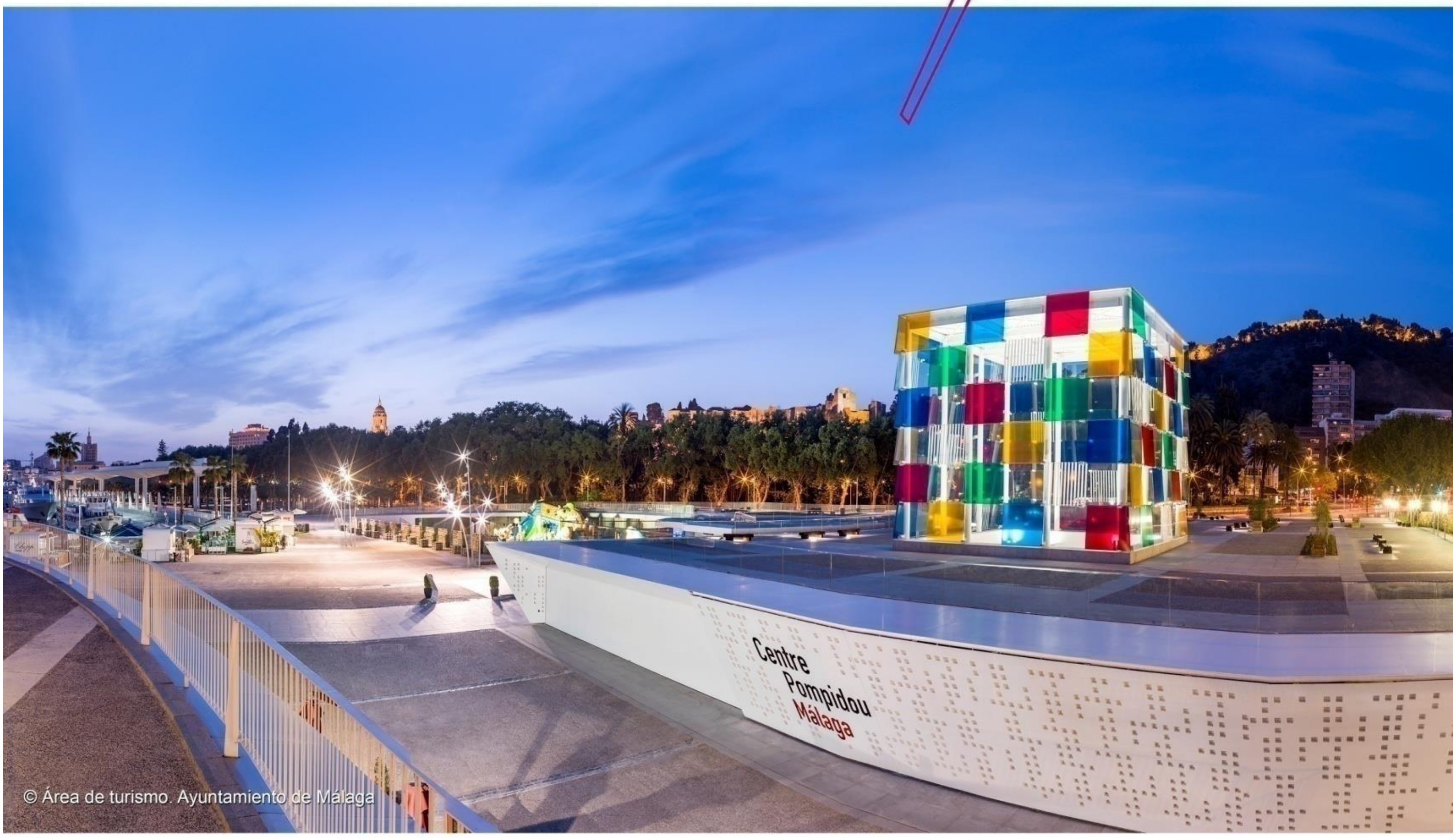
INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XX

XX SEIEM
Málaga 2016



8, 9 Y 10 DE SEPTIEMBRE DE 2016
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD DE MÁLAGA
http://xxseiem16.uma.es/

Catalina Fernández, José Luis González, Francisco José Ruiz, Teresa Fernández y Ainoha Barciano (Eds.)

Ayuntamiento de Málaga
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN Universidad de Málaga
UNIVERSIDAD DE MÁLAGA
Didáctica de la Matemática U.M.A. - ESPAÑA
SEIEM
Málaga Convention Bureau

Investigación en Educación Matemática XX

Publicaciones y Divulgación Científica
UMA
UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

UNIVERSITAS MALACITANA
UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Investigación en Educación Matemática

XX

Catalina Fernández, José Luis González, Francisco José Ruiz,
Teresa Fernández y Ainoha Barciano (Eds.)

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

Málaga, 8, 9 y 10 de septiembre de 2016

Edición científica

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)
Catalina Fernández Escalona
José Luis González
Mari Francisco
José Ruiz Rey
Teresa Fernández
Ainoha Berciano

Comité científico

Dra. Ainoha Berciano (coordinadora)
Dra. Teresa Fernández Blanco (coordinadora) Dra. Alicia Bruno
Dra. María Luz Callejo de la Vega Dr. José Carrillo Yáñez
Dr. Francisco Javier García

Cítese como:

C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (eds.), 2016. Investigación en Educación Matemática XX. Málaga: SEIEM.

Las comunicaciones aquí publicadas han sido sometidas a evaluación y selección por parte de investigadores miembros de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

Diseño de la portada: Pedro Hernández

ISBN: 978-84-9747-948-6

Publicaciones y Divulgación Científica
UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

ÍNDICE

Seminario. Matemáticas y dominio afectivo

Coordinador

Dr. José María Marbán Prieto, Universidad de Valladolid.

Ponentes

Dra. Ana Caballero Carrasco, Universidad de Extremadura.

La intervención en variables afectivas hacia las matemáticas y la resolución de problemas matemáticos. EL MIRPM.

Dr. Inés María Gómez Chacón, Universitat Complutense de Madrid**.**

Dominio afectivo en Matemáticas: marcos teóricos, tendencias y retos.

Dr. Andrés Palacios Picos, Universidad de Valladolid.

Estrategias y técnicas cuantitativas para el estudio del dominio afectivo en matemáticas.

LA INTERVENCIÓN EN VARIABLES AFECTIVAS HACIA LAS MATEMÁTICAS Y LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS. EL MIRPM

Intervention in affective variables towards mathematics and mathematics problem solving. The MIRPM

Caballero, A.[a], Cárdenas, J.[b], Gordillo, F.[a]

[a]Universidad de Extremadura, [b]Universidad de Zaragoza

Resumen

En el presente trabajo se presenta, en primer lugar, una detallada descripción de diferentes propuestas realizadas por diversos autores, tanto a nivel nacional como internacional, para la intervención en variables afectivas (creencias, actitudes, ansiedad…) hacia las matemáticas y la resolución de problemas matemáticos. En segundo lugar, se describe un programa concreto de control emocional en la resolución de problemas matemáticos para maestros en formación inicial así como el eje central del mismo: un Modelo Integrado de Resolución de Problemas Matemáticos (MIRPM). Igualmente se muestran algunos resultados que evidencian la eficacia de este programa, entre los que cabe destacar una disminución significativa de la ansiedad hacia la resolución de problemas matemáticos, un aumento de la autoconfianza y expectativas de éxito y una modificación de las creencias en torno a la resolución de problemas y su enseñanza y aprendizaje.

Palabras clave: *variables afectivas, matemáticas, resolución de problemas matemáticos, ansiedad matemática, programa de intervención.*

Abstract

This paper shows, firstly, a detailed description of different proposals made by different authors, both nationally and internationally, for intervention in affective variables (beliefs, attitudes, anxiety...) towards mathematics and mathematics problem solving. Secondly, a concrete programme of emotional control in mathematical problems for teachers in initial training is described as well as its central axis: an integrated model for mathematics problem solving (MIRPS). Also shows some results that demonstrate the effectiveness of this program, which include a significant decrease of anxiety toward the mathematics problem solving, increased self-confidence and expectations of success and a change in beliefs around solving problems and its teaching and learning.

Keywords: *affective variables, mathematics, mathematics problem solving, math anxiety, intervention program.*

INTRODUCCIÓN

Son numerosos los trabajos que han analizado las variables afectivas hacia las matemáticas y más concretamente hacia la resolución de problemas matemáticos (RPM), así como también sus causas y repercusiones en diferentes poblaciones de estudio: en maestros en formación inicial, estudiantes universitarios y de secundaria y, en determinados casos, incluso en estudiantes de secundaria.

Como conclusión de los resultados hallados en dichos estudios, se enfatiza la necesidad de trabajar con los factores afectivos en la realidad de las aulas y, más aún, en la formación inicial de los

Caballero, A., Cárdenas, J., y Gordillo, F. (2016). La intervención en variables afectivas hacia las matemáticas y la resolución de problemas matemáticos. El MIRPM. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 20-35). Málaga: SEIEM.

docentes para minimizar así el efecto de los propios factores afectivos en sus alumnos y para que ellos mismos puedan desarrollar el control emocional con sus futuros alumnos.

Ello iría en consonancia con las actuales perspectivas educativas integradoras del proceso de enseñanza aprendizaje, donde se pretende atender al funcionamiento cognitivo y afectivo del alumno dentro de un determinado contexto social, cultural y escolar, considerando los procesos internos (cognitivos y afectivos) como producto de la interacción que realiza el alumno con su entorno.

Esta interacción entre cognición y afectos es igualmente apoyada por Gómez-Chacón (2000) al indicar que los afectos hacia las matemáticas conforman un sistema regulador de la estructura de conocimiento del estudiante, donde la persona pensará, actuará y orientará su ejecución.

Así, existen múltiples referencias que recomiendan relacionar la cognición y la afectividad en la resolución de problemas (Blanco, Guerrero & Caballero, 2013; Caballero, Blanco, & Guerrero, 2008, 2011; De Belis & Goldin, 2006;) y, concretamente, destacan la necesidad de que en los programas de formación de profesores los factores afectivos y cognitivos se desarrollen simultáneamente. (Blanco, Guerrero, Caballero, Brígido, & Mellado, 2010; Furinghetti, & Morselli, 2009; Koballa, & Glynn, 2007; Zan, Brown, Evans, & Hannula, 2006).

Para ello es fundamental, en primer lugar, determinar los afectos que subyacen hacia las matemáticas y la RPM, ya que el análisis de estas variables es lo que permitirá diseñar un programa de intervención en la formación de profesores.

INTERVENCIÓN EN VARIABLES AFECTIVAS EN EL ÁREA MATEMÁTICA

Paralelamente a los trabajos en torno a los afectos hacia las matemáticas y hacia la RPM, están en boga las intervenciones dirigidas al desarrollo de la inteligencia emocional en distintos niveles educativos, sobre todo en primaria y secundaria. La gran mayoría de dichas intervenciones se basan en los modelos de Bisquerra (2010), McCombs (1991) y Mayer y Salovey (1997). No obstante, son exiguas las intervenciones centradas en la mejora del control emocional en el área matemática y más concretamente en la RPM.

Toda intervención sobre las variables afectivas en el área matemática, ha de tener presente que creencias, actitudes y emociones están interrelacionadas, de forma que cada uno de estos afectos ejerce influencia sobre los otros, estando las emociones determinadas más fuertemente por las creencias y las actitudes. De esta forma, aunque lo aconsejable es planificar una intervención que contemple propuestas de actuación integradas, una intervención eficaz en una de estas variables posiblemente influirá a las otras.

Mejora de las actitudes hacia las matemáticas

Para la mejora de las actitudes hacia las matemáticas Mato (2010) indica una serie de pautas de actuación en el proceso de intervención psicopedagógica según los precursores de las mimas: los estereotipos y las concepciones curriculares sobre las matemáticas y la relación profesor-alumno. Toma para ello en consideración la indicación de Bazán y Aparicio (2006), según la cual la mejora actitudinal implica actividades que desarrollen habilidades matemáticas, estimulen la curiosidad e imaginación del discente y ofrezcan oportunidades para el desarrollo de su creatividad.

En lo que a los estereotipos en torno a las matemáticas respecta, sobre todo aquellos relativos a su dificultad y utilidad, propone:

- Enseñarles “la dependencia que hay entre los resultados en matemáticas, el uso de estrategias de aprendizaje apropiadas y la posibilidad de adquirir nuevas habilidades o perfeccionar las que ya posee” (p.22).
- Desarrollar técnicas como la relajación para paliar los bloqueos generados por las actitudes negativas.

- Enseñar explícita y directamente estrategias matemáticas para obtener un buen rendimiento y evitar el miedo, odio y rechazo a las matemáticas, así como también el uso correcto de las mismas según el objetivo propuesto y cuándo utilizarlas (conocimiento metacognitivo).
- Propiciar la toma de decisiones mediante la planificación de diversas alternativas de solución de un problema matemático y la previsión de consecuencias de cada una de ellas.

En relación a las concepciones curriculares sobre las matemáticas indica:

- Implementar metodologías de enseñanza y evaluación más activas y constructivas (trabajo en equipo, debates, experimentación, elaboración de hipótesis, uso de fotografías y posters, libros, juegos de ingenio, estrategia…).
- Proponer problemas sugerentes que despierten el interés por la actividad matemática y ayudar a que los estudiantes expliciten y reflexionen sobre sus procesos de pensamiento.

Respecto a la relación profesor-alumno:

- Seleccionar las experiencias en las clases de acuerdo a los alumnos participantes, de acuerdo con su historia personal y cultural, y negociándolas con los mismos.
- Realizar un pacto entre profesores y estudiantes sobre las intenciones y disposiciones de cada uno.
- Fomentar la actitud reflexiva del profesor ante su propia labor y potenciar investigación en la acción y la formación permanente en la práctica cotidiana.
- Transmisión por parte del docente de confianza y disfrute en la enseñanza matemática.
- Adecuada formación científica y didáctica del docente matemático.
- Actitud de respecto del profesorado hacia el alumnado.

La intervención educativa de cara a modificar las actitudes hacia la RPM ha de centrarse principalmente en la reestructuración cognitiva, si bien es cierto que este componente del dominio afectivo, al igual que las creencias, son muy consistentes y resistentes al cambio.

Desde este enfoque, para el desarrollo de actitudes positivas hacia el aprendizaje, han de fomentarse los sentimientos y las emociones positivas en los MFI, ya que de esa forma se producirá un cambio en las creencias y expectativas sobre la disciplina y se favorecerán los comportamientos de acercamiento hacia las tareas matemáticas. Esto repercutirá finalmente en el desarrollo de actitudes más favorecedoras de sus alumnos de cara a la RPM y en el rendimiento de los mismos.

Modificación de las creencias hacia las matemáticas

Las propuestas de actuación planteadas por Mato (2010) en relación a las actitudes, tendrán igualmente una gran influencia en la modificación de las creencias sobre la naturaleza de las matemáticas, sobre la utilidad de las mismas y aquellas derivadas del contexto socio-familiar.

En relación a las creencias relacionadas con la enseñanza de las matemáticas, cabe destacar que los maestros en formación inicial no sienten la necesidad de reflexionar sobre ellas si no tienen referencias prácticas para poder establecer comparaciones, lo que favorece que mantengan la perspectiva que han adoptado como consecuencia de su experiencia discente. Además, muestran “un optimismo no realista” considerando que la enseñanza es una tarea fácil y que no tendrán dificultades para ello, bastando con repetir los esquemas docentes adquiridos durante su etapa como alumnos (Flores, 1999; Fortuny, 1995; González, 1995).

Ello nos lleva a poner de relieve la necesidad de reflexionar sobre el proceso de enseñar y, específicamente, sobre el proceso “aprender a enseñar” matemáticas, mostrando diferentes perspectivas y alternativas.

En esta línea, Warfiel, Wood, y Lehman (2005, citado por Binti Maat, & Zakaria, 2010), Stacey, Brownlee, Thorpe, y Reeves (2005) y Johnson (2008) sostienen que la discusión y reflexión posibilitan oportunidades de cambio en las creencias de los maestros y en sus prácticas, así como también en su superación personal.

Al respecto, Goos, Arvold, Bednarz, Deblois, Maheux, Morselli, y Proulx (2009), proponen enlazar la experiencia discente de los estudiantes con los contenidos de los cursos de formación inicial para modificar las concepciones acerca de la enseñanza de las matemáticas.

García, Escudero, Llinares, y Sánchez (1994, p. 13) indican que los MFI

> tienen que aprender matemáticas de una forma diferente a la que presumiblemente han aprendido hasta estos momentos. Una forma de aprender que sea coherente con las características de la nueva cultura matemática escolar que, en el futuro, ellos mismos deben llegar a generar como profesores.

Respecto a las creencias sobre sí mismo en relación con las matemáticas y con la RPM son las que más influyen en la motivación y en los logros matemáticos (Kloosterman, 2002). Se incluirían en las mismas la autoeficacia y las expectativas de control.

En cuanto a la mejora de la autoeficacia, Bartels, Magun-Jackson, y Kemp (2009), indica que la autoeficacia original no puede desarrollarse a través del uso de estrategias de mejora de la propia autoeficacia, sin embargo, ciertas estrategias pueden servir para reforzar la autoeficacia en una tarea pertinente y así servir de un andamio de motivación.

En esta línea, Godbey (1997, citado por Peker, 2009a) indica que los autodiálogos negativos pueden ser la causa raíz del fracaso matemático en algunos estudiantes. Peker (2009a) señala al respecto que, además, los autodiálogos negativos también pueden ser la causa de la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas en algunos maestros en formación.

De ahí que Caballero (2013) proponga mejorar las expectativas de autoeficacia a través de la modificación cognitiva mediante las autoinstrucciones, es decir, la sustitución de los autodiálogos negativos que subyacen ante las matemáticas y la RPM por otros positivos, siguiendo las propuestas psicológicas realizadas por Meichembaum, (1987), Santacreo (1995) y Vallejo y Ruiz (1998). Igualmente, Caballero (2013) propone plantear problemas matemáticos que partan de un nivel de confort de los discentes como resolutores de problemas para ir aumentando progresivamente la dificultad.

Respecto a la mejora de las atribuciones de control, Okolo (1992) se limitó a emitir mensajes de atribución del éxito al esfuerzo y la habilidad ante los aciertos y de falta de esfuerzo en caso de error, mientras que Yasutake, Bryan, y Dohrn (1996) entrenaron a tutores a proporcionar feedbacks al alumnado con frases de refuerzo que atribuían el éxito a la habilidad y al esfuerzo y a aportar sugerencias de estrategias ante los errores (“vamos a hacer el problema paso a paso”).

Reducción de la ansiedad matemática

Es en la reducción de esta variable afectiva donde encontramos más intervenciones, aunque en España apenas hay estudios al respecto.

Concretamente, Iriarte, Benavide, y Guzmán (2013) desarrollan el Programa PAM (Iriarte y Sarabia, 2010, 2012) a partir del programa “Superando la ansiedad hacia las matemáticas” de Arem (2003). La finalidad del mismo es la de reducir la ansiedad y aquellas conductas de evitación hacia las matemáticas. Aunque en porcentajes bajos, se consiguen cambios en las creencias y actitudes del alumno (15%, disminución del miedo y de la ansiedad (14%), aumento del interés en la materia (10%), aumento de la autoconfianza (8%) y del esfuerzo (8%).

Contextualizado en la etapa de secundaria con estudiantes nigerianos, Asikhia y Mohangi (2015) evidencian el entrenamiento en resolución de problemas en la disminución de la ansiedad matemática, en consonancia con lo apuntado por Caballero (2013) respecto a que la ansiedad ante la RPM no viene dada por la tarea en sí, sino más bien por la carencia de un modelo de resolución de problemas, el no saber qué hacer ante dicha tarea.

En maestros en formación inicial encontramos las siguientes propuestas con eficacia corroborada:

- Enseñanza basada en problemas (estrategia instruccional basada en el constructivismo) (Alsup, 1995).
- Enseñanza más próxima a situaciones cotidianas de la vida real, evitación de la ambigüedad en los enunciados de los problemas verbales y complementación del trabajo individual con el cooperativo (Etches, 1997).

- Tooke, y Lindstrom (1998), analizaron cuatro casos de formación de maestros: uno centrado en una sección de matemáticas enseñada de manera muy tradicional, un segundo con el mismo curso pero impartido con las recomendaciones del *National Council of Teachers of Mathematics* y un tercero compuesto por dos secciones de cursos metodológicos que cubrían el mismo contenido matemático además de contenidos sobre cómo enseñar. No hallaron una reducción significativa de la ansiedad en cualquiera de las dos primeras secciones de matemáticas pero sí en las dos secciones de cursos metodológicos. Ello evidencia que la enseñanza del conocimiento didáctico del contenido reduce la ansiedad matemática.

- Programa de intervención de Uusimaki, y Kidman (2004), basado en la inclusión de nuevas actividades matemáticas abiertas, aprendizaje colaborativo a través del ordenador, la comunidad de aprendices y creencias negativas sobre el aprendizaje y la enseñanza las matemáticas. La encuesta online sobre ansiedad permitió a los participantes controlar sus sentimientos así como la participación en actividades matemáticas diferentes. Los resultados sugieren una significativa disminución de la ansiedad matemática debido a que los participantes tomaron conciencia de su estado emocional y de los sentimientos en relación con cada actividad matemática

- Cursos centrados en el modelo de desarrollo de conceptos de Bruner, desarrollados por Gresham (2007). En los mismos se enfatiza el uso de aprendizajes concretos y manipulativos del contenido matemático, diarios, grupos de instrucción pequeños y completos, presentaciones, actividades basadas en literatura y experiencias prácticas. Además de la reducción de la ansiedad matemática debida a la metodología y al uso de la manipulación para la enseñanza de contenido matemático, se produjo una mayor comprensión de los efectos procedimentales y conceptos matemáticos.

- El Programa de Intervención en Control Emocional y RPM de Caballero (2013), caracterizado por una primera etapa de toma de conciencia y control de los propios afectos (incluyendo el entrenamiento en técnicas de relajación y respiración y entrenamiento en autoinstrucciones) hacia la RPM y una segunda etapa focalizada en un Modelo Integrado de RPM (MIRPM) (incluyendo el entrenamiento en el uso de heurísticos). Los maestros en formación inicial consiguieron un mayor control emocional de los maestros en formación inicial, reduciendo significativamente la ansiedad y los bloqueos ante la RPM, una modificación de las creencias sobre las matemáticas y la RPM, sobre su enseñanza-aprendizaje y sobre sí mismos; aumentaron sus expectativas de autoeficacia, de éxito y de contingencia e igualmente, se apreció una mayor perseverancia y actitud de intento así como un mayor orden y rigor en la RPM y un mayor manejo de heurísticos y de búsqueda de alternativas de resolución de los problemas.

Iossi (2007), entre las estrategias para la reducción de la ansiedad matemática, diferencia entre:

- estrategias curriculares, tales como el *retesting*, el aprendizaje a ritmo individual, la educación a distancia, las aulas de un solo sexo y los cursos de ansiedad;

- estrategias instruccionales tales como la manipulación, la tecnología, la autorregulación y técnicas de comunicación;

- y estrategias no instruccionales, tales como las técnicas de relajación (meditación, yoga y psicoterapia) y el tratamiento psicológico.

No obstante, de todas ellas, sólo se han hallado evidencias empíricas de su eficacia en las estrategias no instruccionales (relajación y tratamiento psicológico) y en el *retesting* (aunque no es considerado por las restricciones de tiempo), en la educación a distancia debido al anonimato y en los cursos de ansiedad matemática a pesar de la escasez de literatura que corrobora su eficacia, en lo que respecta a las estrategias curriculares. En cuanto a las instruccionales, se ha corroborado la eficacia de la manipulación y de técnicas de comunicación (trabajo en parejas, en grupos de aprendizaje cooperativo, en pequeños grupos…).

Beilock y Willingham (2014) proponen que, para la reducción de la ansiedad matemática, los docentes aseguren el aprendizaje de las habilidades matemáticas fundamentales mediante la participación de los padres en la aplicación de las matemáticas, la identificación de estudiantes en riesgo y ejercicios para el desarrollo de las competencias matemáticas básicas. Igualmente indican el tratamiento de la ansiedad matemática de los docentes, cambios en la evaluación como no cronometrar la prueba de evaluación o alentar a los estudiantes a escribir libremente sobre sus emociones durante un tiempo ante una situación específica antes del examen y, por último, prestar especial atención al qué se dice cuando los estudiantes tienen dificultades (evitando mensajes que validen la creencia de los estudiantes sobre que no es bueno en matemáticas y potenciando aquellos que, aun reconociendo la no experiencia del estudiante, exprese la confianza en su capacidad).

Tárraga (2008, 2011) indaga sobre el efecto del programa "¡Resuélvelo!", focalizado en el entrenamiento en estrategias cognitivas y metacognitivas en alumnos con dificultades de aprendizaje, en variables afectivo-motivacionales relacionadas con las matemáticas no hallando efectos significativos en ninguna de las evaluadas: actitudes hacia las matemáticas, ansiedad ante las matemáticas, y las atribuciones al rendimiento matemático.

De forma general, Bursal y Paznokas (2006) indican que, de los programas centrados en reducir la ansiedad matemática, los más exitosos son aquellos en los que los maestros tratan de cambiar la forma en la que las matemáticas son percibidas y aprendidas y a través de cambios en las estrategias de enseñanza.

La *American Mathematical Association of Two - Year Colleges* (AMATYC) (2006), propone una serie de estrategias a los estudiantes para ayudarles a hacer frente y aliviar la ansiedad matemática. Entre ellas se encuentra el acercamiento al aprendizaje activo de las matemáticas.

Barnes (2006) reporta varias sugerencias de los estudiantes en relación con medidas para la reducción de la ansiedad matemática, indicando que lo profesores han de enseñar hábitos de estudio, aumentar la autoconfianza en las habilidades matemáticas, moverse por el aula para ayudar al alumnado y responder preguntas y plantear más actividades prácticas. Además, valoran la tutoría tras la clase y la relajación. Indicaban igualmente los estudiantes que sentían que los maestros podrían hacer mucho más en el aula para disminuir la ansiedad matemática.

De hecho, tal como señala Woodard (2004), los maestros también pueden poner en práctica las técnicas de prevención y reducción de la ansiedad en la clase, como presentar explicaciones claras, revisar los fundamentos, enseñar el pensamiento crítico, exhibir entusiasmo por el tema, dar retroalimentación, revisar los exámenes y ofrecer alternativas de tiempo en las pruebas matemáticas. De la misma forma lo postulan Furner y Berman (2004), quienes reconocen la necesidad de que los docentes propicien la discusión en clase y la RPM, animando a sus discentes a examinar sus procesos de pensamiento y a justificar el uso de herramientas matemáticas. Asimismo, Edelmuth (2006) propone técnicas tanto para docentes, padres y alumnos de cara a reducir y prevenir la ansiedad matemática. Entre ellas plantea que los docentes creen un ambiente distendido de clase que potencie la confianza de los alumnos y en el que se traten cuestiones de forma abierta, mediante el humor y mostrando que los problemas matemáticos tienen varias vías de resolución, considerando además los errores como una oportunidad de aprendizaje. Para los padres sugiere que aprovechen cualquier situación de la vida diaria para proponer un problema matemático, como pudiera ser compara precios, razonar ciertas situaciones, etc.

No obstante, Goldin (2004) indica que reducir la ansiedad no ha de ser la única meta, sino que también hay que dotar a los alumnos de herramientas que les permitan hacer frente a su propia ansiedad matemática.

PROGRAMA DE INTERVENCIÓN EN CONTROL EMOCIONAL Y RPM

Una vez revisadas las diferentes propuestas de intervención en variables afectivas hacia las matemáticas y la RPM, en este epígrafe se presenta de forma concreta una de las más actuales experiencias a colación contrastada empíricamente. Se trata del Programa de Intervención en Control Emocional y RPM de Caballero (2013) dirigido a maestros en formación inicial, citado anteriormente, fruto de un largo período evaluativo. Dicho programa toma en consideración varias de las propuestas anteriormente descritas, como se podrá dilucidar a través de la descripción del mismo, y para su implementación se asume la necesidad de desarrollar un proceso integrador de enseñanza/aprendizaje que considere aspectos cognitivos, emocionales y afectivos.

Para ello, el Programa que se presenta, pretende proporcionar a los maestros en formación inicial estrategias y técnicas de resolución de problemas matemáticos (conocimiento estructural) que les permitan aplicar y convertir o conectar más fácilmente el conocimiento declarativo o matemático (conocimientos matemáticos) en el procedimental (RPM) aumentando la seguridad y confianza que sobre sí mismos tienen en dicho proceder, así como también le facilitará la búsqueda de diferentes "caminos" para la RPM. Todo ello desde el conocimiento condicional, sobre todo en lo que a los afectos se refiere, pareciendo especialmente ineludible que los MFI tomen conciencia de sus propias concepciones, actitudes y emociones, de forma que reflexionen sobre estas variables y puedan controlarlas y/o modificarlas por otras más acordes con las sugeridas en las nuevas propuestas curriculares y los modelos sobre desarrollo de competencias al uso. De esta forma, el programa pretende desarrollar las competencias referentes a la toma de conciencia, regulación y autonomía emocional, fundamentándose en los modelos de educación emocional de Mayer y Salovey (1997), Bisquerra y Pérez (2007) y Gros (2010). De ahí que el programa incluya igualmente el entrenamiento en técnicas para la gestión de las respuestas conductuales ante la RPM, como son las de relajación muscular de Jacobson y de respiración ventral y las autoinstrucciones.

Todo ello se integra en el Modelo Integrado de RPM y Control Emocional (MIRPM, Figura 1), desarrollado a partir del de Polya (1985) y Shoenfeld (1985).

Dicho modelo constituye el eje vertebrador del programa, con el fin de enseñar y entrenar estrategias de RPM y competencias útiles para el control emocional.

Se pretende así alcanzar la meta de los programas de intervención que no es otra que aprender y entrenar conductas y desarrollar y/u optimizar habilidades, estrategias y/o competencias.

Por tanto, el MIRPM se constituye a partir de las técnicas de gestión de respuestas fisiológicas (técnica de respiración y de relajación muscular de Jacobson, año) y cognitivas (autoinstrucciones, de Meichembaum, 1987) así como de heurísticos que se sugieren en las distintas fases de la RPM, y que se ven reflejadas en el perfil establecido para el buen resolutor de problemas por Carrillo (1996).

El MIRPM concluye con una reflexión personal acerca del proceso seguido para la resolución del problema así como de la adecuación de las distintas medidas llevadas a cabo para la obtención de la solución, aspectos hasta ahora no considerados en otros modelos.

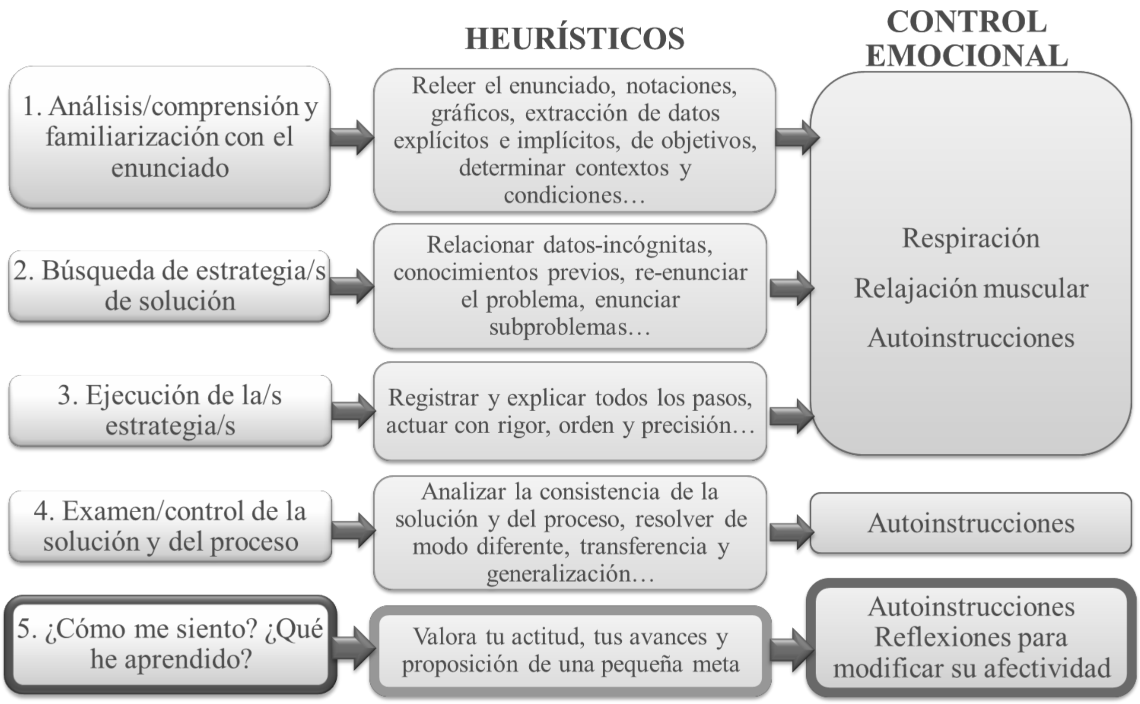


Figura 1. Esquema del Modelo Integrado de RPM y Control Emocional (MIRPM).

En Blanco y Caballero (2015) se presenta una descripción detallada de este modelo y en Blanco y Jiménez (2015) se muestra un ejemplo de aplicación del MIRPM en un problema concreto de geometría.

Objetivos del Programa de intervención en control emocional y RPM

El objetivo general del programa es proporcionar a los futuros profesores una herramienta didáctica que les permita aprender y "aprender a enseñar" a resolver problemas de matemáticas, teniendo en cuenta los aspectos cognitivos y de educación emocional.

Como objetivos específicos se plantean los siguientes:

- Reflexionar sobre las actitudes, creencias y emociones de los participantes en relación a la RPM, y, de forma más específica, sobre las expectativas generalizadas de control y la ansiedad.
- Delimitar el significado de problema de Matemáticas.
- Mostrar y entrenar un Modelo Integrado de RPM que integre competencias cognitivas relacionadas con la RPM.
- Entrenar en el uso de herramientas para la regulación emocional, concretamente la ansiedad, que se originan en el proceso de RPM (relajación y respiración, entrenamiento en autoinstrucciones, reflexión).
- Sensibilizar sobre las creencias erróneas y desfavorables que sobre la RPM y sobre sí mismos como aprendices y resolutores de problemas matemáticos poseen los MFI y promover su modificación.
- Fomentar el desarrollo de actitudes positivas ante la RPM y promover y optimizar el control emocional ante la RPM y disminuir el nivel de ansiedad que los MFI pudieran experimentar en esta actividad matemática.

Desarrollo y metodología del Programa de intervención en control emocional y RPM

El Programa consta de 13 sesiones de dos horas de duración cada una, agrupadas en dos partes diferenciadas. Una primera de toma de conciencia y reflexión sobre las propias variables afectivas (creencias, actitudes, emociones y ansiedad) a partir de cuestionarios y actividades específicas relacionadas con RPM, y sobre su repercusión en el rendimiento matemático así como en el entrenamiento en diferentes técnicas para su control y modificación.

Los problemas matemáticos trabajados en las distintas sesiones respetan las particularidades recomendadas por Santos (1996). Sugerentes y motivadores, accesibles en base a sus conocimientos previos, posibilitan diferentes formas de resolución ilustran ideas matemáticas importantes, no involucran trucos o soluciones sin explicación y son extensibles o generalizables a otros contextos.

A continuación se describen cada una de las sesiones y contenido de las mismas de forma sintetizada:

1ª Sesión. Presentación del programa.

- Introducción y objetivos del programa.
- Evaluación de la autopercepción como resolutores de problemas y del grado de compromiso con el programa. Instrumento: cuestionario inicial-implicación en el taller (Cuestionario abierto - análisis cualitativo).
- Evaluación del conocimiento y las concepciones sobre la RPM (Cuestionario abierto- análisis cualitativo).
- Evaluación de los afectos hacia la RPM (creencias, actitudes y emociones). Instrumento: adaptación del cuestionario sobre el dominio afectivo en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas (Caballero, Guerrero, & Blanco, 2014) a la RPM (Caballero, & Guerrero, 2015). (Cuestionario cerrado - análisis cuantitativo).

2ª Sesión. Concepciones y afectos sobre la RPM.

- Presentación y debate acerca de los resultados de los cuestionarios aplicados en la sesión anterior:
- Análisis de sus concepciones y afectos sobre la RPM y su percepción como resolutores de problemas

- Apertura de dos foros en la plataforma virtual Moodle: “El dominio afectivo y la RPM” y “La concepción tradicional sobre RPM”.

3ª Sesión. Problema vs. Ejercicio y Estrategias vs. Técnicas.

- Diferenciación entre ejercicio y problema y por tanto entre pensamiento productivo y reproductivo, así como una presentación de “otros” tipos de problemas.
- Distinción entre aprendizaje de técnicas, aprendizaje de estrategias y aprendizaje de estrategias de aprendizaje.
- Apertura de foro en Moodle: “Ejercicio y Problema”.

4ª Sesión. Implicación personal en la RPM.

- Evaluación de la ansiedad (ansiedad-estado) ante la RPM - Pretest. Instrumento: STAI (Spielberger, Gorsuch, & Lushene, 1982) adaptado a la RPM (Cuestionario cerrado - análisis cuantitativo)
- Evaluación de los afectos y reacciones en los distintos momentos de la RPM - Pretest. Instrumento: cuestionario aplicado antes de enfrentarse a la situación, mientras está resolviendo el problema matemático y tras haberse enfrentado a la esta tarea, en dos problemas matemáticos distintos. (Cuestionarios abiertos - análisis cualitativo)

5ª Sesión. Implicación personal en la RPM.

- Evaluación de las expectativas de locus de control (contingencia, indefensión y creencia en la suerte), de autoeficacia y de éxito en la RPM. Instrumento: BEEGC-20 (Palenzuela, Prieto, Barros & Almeida, 1997), adaptado a la RPM (Cuestionario cerrado - análisis cuantitativo).
- Descripción de conducta y niveles conductuales.
- Niveles de estrés y ansiedad: manifestaciones y su relación con el rendimiento.

6ª Sesión. Cómo desaturrullarse: estrategias de afrontamiento emocional

- Presentación de algunos resultados del cuestionario anterior y análisis de las intervenciones del foro.
- Técnicas de modificación y entrenamiento conductual: entrenamiento en técnicas de relajación muscular, de respiración ventral y autoinstrucciones.

7ª, 8ª, 9ª y 10ª Sesión. Desarrollo del MIRPM.

- - Desarrollo del MIRPM (Figura 1) con problemas concretos.

11ª Sesión. Ejercicios y problemas matemáticos

- Actividades específicas sobre el MIRPM para desarrollar con alumnos de Primaria: práctica de las diferentes etapas con problemas matemáticos inusuales, fundamentalmente la comprensión y análisis del problema y el diseño de estrategias (Blanco, 2015).

12ª Sesión. Modelo integrado de RPM y control emocional.

- Resolución autónoma de un problema aplicando el MIRPM.

13ª Sesión (16 de Diciembre) Evaluación de los EPP y del taller. 55 EPP.

- Evaluación de la ansiedad (ansiedad-estado) ante la RPM - Postest. Instrumento: STAI (Spielberger et al., 1982) adaptado a la RPM (Cuestionario cerrado - análisis cuantitativo)
- Evaluación de los afectos y reacciones en los distintos momentos de la RPM - Postest. Instrumento: cuestionario aplicado antes de enfrentarse a la situación, mientras está resolviendo el problema matemático y tras haberse enfrentado a la esta tarea, en dos problemas matemáticos distintos. (Cuestionarios abiertos - análisis cualitativo)
- Evaluación del programa por parte de los sujetos. Instrumento: ¿cómo he gestionado mis recursos? (Cuestionario abierto - análisis cualitativo).

- Debate conjunto y discusión sobre la adecuación y desarrollo del programa y metas individuales de los estudiantes. Instrumento: debate grabado en audio y vídeo y notas de campo
- Apertura de foro en Moodle: "Programa de RPM y control emocional".

Sesión evaluadora de la investigación (cuatro meses después)

- Evaluación de la ansiedad (ansiedad-estado) ante la RPM - Retest. Instrumento: STAI (Spielberger et al., 1982) adaptado a la RPM (Cuestionario cerrado - análisis cuantitativo).

Participantes

La muestra, obtenida mediante un muestreo no probabilístico incidental, está compuesta por 60 maestros de primaria en formación inicial del tercer curso.

Instrumentos

En la descripción de las sesiones se han ido enumerando los instrumentos de recogida empleados. Además de un fin eminentemente investigador, la aplicación de los mismos también implica un fin metodológico en lo que a la toma de conciencia y regulación emocional se refiere.

En la Figura 2 queda sintetizada la funcionalidad de cada uno de los instrumentos en correspondencia con las competencias emocionales desarrolladas.

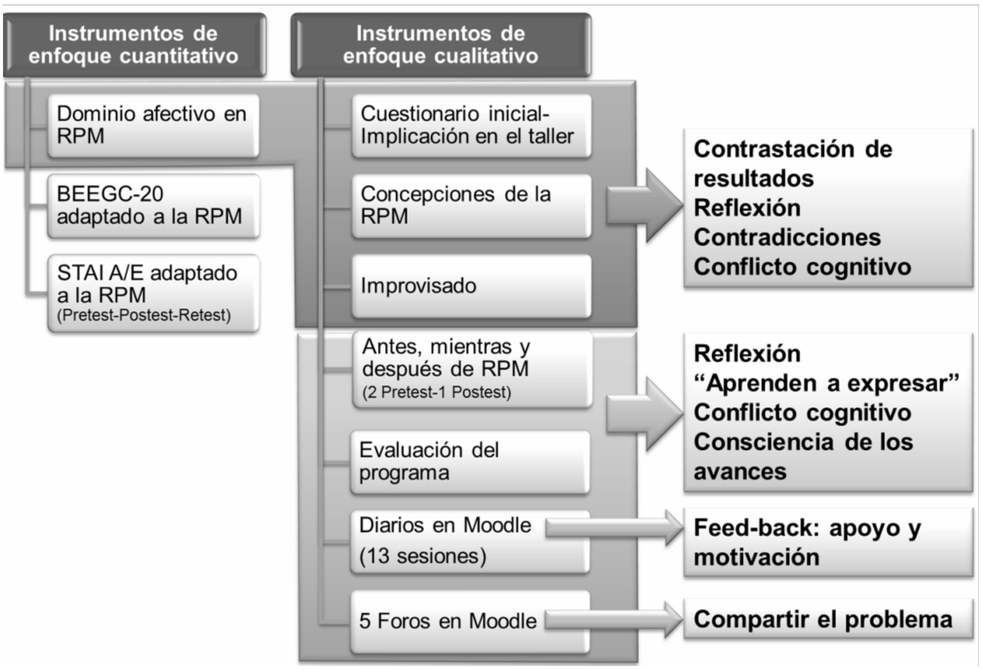


Figura 2. Instrumentos de recogida de datos y competencias emocionales que en ellos se desarrollan.

Procedimiento

Se trata de una investigación evaluativa con un diseño metodológico cuasiexperimental con pretest-postest e incluso retest en el caso de la variable ansiedad, donde la variable independiente es el Programa de Regulación Emocional y Cognitiva en la RPM.

Esta investigación se desarrolló en tres fases cíclicas en dos años diferenciados: análisis de la realidad y diseño y planificación del programa, desarrollo del programa y del plan de investigación, y valoración de resultados y toma de decisiones. De esta forma, la evaluación del primer año (experiencia piloto), publicada en Caballero, Guerrero, Blanco, y Piedehierro (2009), sirvió para rediseñar el programa y desarrollar este proceso cíclico con el programa definitivo (experiencia que aquí se presenta).

RESULTADOS

Aunque la diversidad de instrumentos empleados arroja multitud de resultados, en el presente trabajo sólo se muestran aquellos que evidencian la efectividad del Programa.

Respecto a la variable ansiedad ante la RPM, indicar que se satisfacen los supuestos de normalidad, homogeneidad de varianza y aleatorización, por lo que se efectúa una prueba paramétrica T de Student para muestras relacionadas entre el pretest y el postest, entre el pretest y el retest y por último, entre el postest y el retest, excluyendo los casos según lista para obtener una base de casos coherente para el análisis. Dicho análisis muestra diferencias estadísticamente significativas en las medias entre el pretest y el postest (t = 3.486; *sig.* = .002; $p < .01$) y entre el pretest y el retest (t = 2.190; *sig.* = .038; $p < .05$) mientras que la comparación entre el postest y el restest no arroja diferencias estadísticamente significativas (t = -1.224; *sig.* = .232; $p > .05$). En la Figura 3 se muestran las medias obtenidas en los tres momentos de administración del STAI A/E adaptado a la RPM.

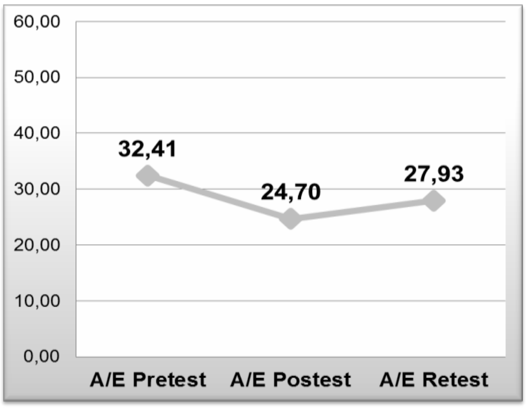


Figura 3. Comparativa de la variable Ansiedad-Estado en la RPM en la Fase Pretest, Postest y Retest.

En lo que respecta a las respuestas conductuales, a nivel cognitivo los resultados muestran una supremacía de autodiálogos negativos en la RPM (Ej. “no voy a ser capaz de resolverlo”) ($f_{positivos}$ = 57; $f_{negativos}$ = 96) sucediéndose tras el programa un aumento de los autodiálogos positivos en (Ej. “confío en que si sigo los pasos conseguiré resolverlo”) detrimento de los negativos ($f_{positivas}$ = 118; $f_{negativas}$= 22). Se aprecia en estos autodiálogos un aumento de la confianza y una mejora actitudinal, disminuyendo los abandonos y efectos derivados de la indefensión aprendida. A nivel emocional, predominan fuertemente las emociones negativas (Ej. “[me siento] angustiado y nervioso”) en el pretest ($f_{positivas}$ = 42; $f_{negativas}$ = 114), predominancia que en el postest caracterizan a las emociones positivas (Ej. “me siento tranquila y relajada”) aunque con menor diferencia ($f_{positivas}$ = 87; $f_{negativas}$ = 58). No obstante, dichas emociones negativas ya nos les llevan al abandono y bloqueos ante la RPM y las positivas suscriben una mayor tranquilidad, relajación, seguridad y confianza en sí mismos y mayores expectativas de autoeficacia. En cuanto a las actuaciones, ya en el pretest se encuentra una supremacía de actuaciones positivas ante la RPM (Ej. “empiezo a leer detenidamente y organizar los datos”) frente a las negativas (Ej. “si no encuentro la solución o la manera de hacer [el problema] rápidamente, me pienso que no sé hacerlo y lo dejo sin hacer”) ($f_{positivas}$ = 87; $f_{negativas}$ = 105) aunque las mismas se limitan a la relectura del problema y a la extracción de datos explícitos. En el postest la diferencia entre ambas se acentúa hasta ser exigua la presencia de actuaciones negativas ($f_{positivas}$ = 51; $f_{negativas}$ = 1) siendo la práctica totalidad positivas (Ej. “me pongo a resolver el problema siguiendo los pasos”, “he diseñados unas estrategias y voy a comprobar si están bien”). Así, la generalidad de los sujetos terminan intentando resolver el problema confiando en la efectividad del MIRPM. A nivel fisiológico, al inicio del programa sólo se hallan 7 respuestas fisiológicas disfuncionales ante la RPM (Ej. “me siento angustiada, mal, tensa, cansada”) disminuyendo hasta 1 tras el desarrollo del mismo.

Respecto a la autopercepción como resolutores de problemas matemáticos, indicar que se satisfacen los supuestos de normalidad, homogeneidad de varianza y aleatorización, por lo que se efectúa una prueba paramétrica T de Student para muestras relacionadas entre el pretest y el postest. Dicho análisis muestra diferencias estadísticamente significativas en las medias entre el pretest y el postest (t = -8.139; *sig.* = .000; $p < .01$). En la Figura 4 se muestran las medias correspondientes.

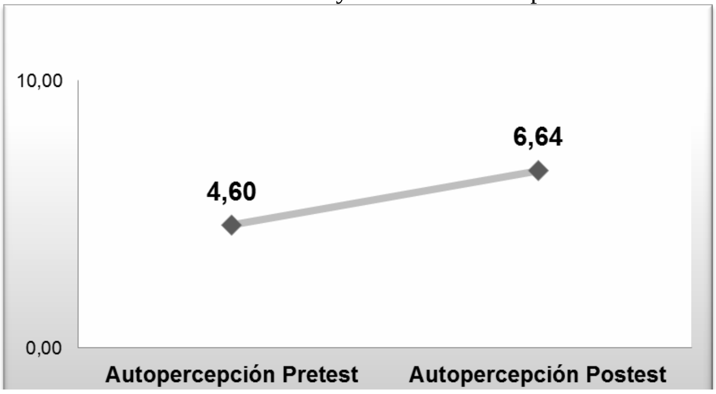


Figura 4. Comparativa de la variable Autopercepción en la RPM en la Fases Pretest y Postest.

CONCLUSIONES

A través de la implementación del programa, los maestros en formación inicial han logrado la reflexión, toma de conciencia y regulación y autonomía emocional. Ello ha redundando en un aumento del control emocional, disminuyendo las emociones negativas y el nivel de ansiedad y mejorando la confianza y seguridad en sí mismos como resolutores de problemas así como sus expectativas de éxito.

Igualmente, disminuyen los bloqueos ante la RPM e incluso desaparecen, desarrollando actitudes favorables a la RPM, de forma que perseveran en la búsqueda de diferentes estrategias de resolución, incluyendo las manipulativas, entre otras actitudes positivas.

Por otra parte, los sujetos objeto de estudio se desvinculan de la concepción tradicional de la RPM mecánica y mediante fórmulas, viéndose modificadas sus creencias sobre la RPM y sobre su enseñanza y aprendizaje.

Además, valoran en gran medida la comprensión y análisis del enunciado, dedicando mayor tiempo a esta primera fase del MIRPM, modelo que desarrollan con mayor orden y precisión.

Por último, indicar que se produce una evolución positiva con respecto al inicio en la auto-percepción como resolutores de problemas matemáticos y, además, manifiestan una mayor disposición a iniciar cambios en la RPM.

Concluir finalmente que las técnicas de relajación y respiración, las autoinstrucciones y la reflexión y modificación consciente de las creencias sobre la RPM originarias de emociones negativas, son facilitadores de la regulación emocional en esta tarea matemática. Además, el propio MIRPM contribuye a la regulación emocional, puesto que no es la resolución de problemas en sí lo que propicia el desarrollo de emociones negativas si no el no saber cómo actuar ante dicha tarea.

En definitiva, consideramos que el programa ha conseguido resultados positivos, corroborando la importancia y necesidad de incorporar las habilidades emocionales en el perfil de competencias a desarrollar en la formación del futuro maestro.

Referencias

Alsup, J. K. (1995). *The effect of mathematic instruction based on constructivism on prospective teachers´ conceptual understanding, anxiety and confidence*. (Tesis doctoral). University of Wyoming, Laramie.

American Mathematical Association of Two - Year Colleges (2006). *Beyond Crossroads. Implementing Mathematics Standards in the First Two Years of College*. Recuperado de http://beyondcrossroads.amatyc.org/doc/PDFs/BCAll.pdf

Arem, C. A. (2003). *Conquering Mathematics Anxiety*. Pacific Grove: Thomson Learning.

Asikhia, O. A., & Mohangi, K. (2015). The use of problem-solving training in reducing mathematics anxiety among Nigerian secondary school students. *Gender & Behaviour, 13*(1), 6547.

Barnes, A. (2006). Investigating the causes of math anxiety in the high school classroom. In L.P. McCoy (Ed.), *Proceedings of Studies in Teaching 2006 Research Digest* (pp.13-18). NC: Winston-Salem. Recuperado de: http://www.wfu.edu/education/gradtea/forum06/proceedings06.pdf

Bartels, J. M., Magun-Jackson, S., & Kemp, A. D. (2009). Volitional regulation and self-regulated learning: an examination of individual differences in approach-avoidance achievement motivation. Electronic Journal of Research I Educational Psychology, 7(2), 605-626,

Bazán, J. L., & Aparicio, A. S. (2012). Las actitudes hacia la Matemática-Estadística dentro de un modelo de aprendizaje. *Educación, 15*(28), 7-20.

Beilock, S. L., & Willingham, D. (2014). Ask the cognitive scientist–math anxiety: can teachers help students reduce it. *American Educator, 38,* 28-33.

Binti Maat, S. M., & Zakaria, E. (2010). An exploration of mathematics teachers' reflection on their teaching practices. *Asian Social Science, 6*(5), 147-152.

Bisquerra, R. (2000). *Educación emocional y bienestar*. Barcelona: Praxis.

Bisquerra, R. & Pérez, N. (2007). Las competencias emocionales. *Educación XXI, 10*, 61-82.

Blanco, L. J. (2015). Actividades específicas para primaria sobre resolución de problemas. En Blanco, L.J., Cárdenas, J.A., & Caballero, A. (2015) *Resolución de Problemas de Matemáticas en la Formación Inicial de Profesores de Primaria* (pp. 109 – 122). Badajoz, España: Servicio de publicaciones de la UEX.

Blanco, L. J., & Caballero, A. (2015). Modelo Integrado de Resolución de Problemas de Matemáticas: MIRPM. En Blanco, L.J., Cárdenas, J.A., & Caballero, A. (2015) *Resolución de Problemas de Matemáticas en la Formación Inicial de Profesores de Primaria* (pp. 109 – 122). Badajoz, España: Servicio de publicaciones de la UEX.

Blanco, L. J., Guerrero, E., & Caballero, A. (2013). Cognition and Affect in Mathematics Problem Solving with Prospective Teachers. *The Mathematics Enthusiast, 10*(1-2), 335-364.

Blanco, L. J., Guerrero, E., Caballero, A., Brígido, M., & Mellado, V. (2010). The Affective Dimension of Learning and Teaching and Teaching Mathematics and Science. In M. P. Caltone (Ed.), *Handbook of Lifelong Learning Developments* (pp. 265-287). New York, EE.UU.: Nova Science Publishers.

Blanco, L. J., & Jiménez, C. (2015). Trabajamos con un problema de geometría. En Blanco, L.J., Cárdenas, J.A., & Caballero, A. (2015) *Resolución de Problemas de Matemáticas en la Formación Inicial de Profesores de Primaria* (pp. 109 – 122). Badajoz, España: Servicio de publicaciones de la UEX.

Bursal, M., & Paznokas, L. (2006). Mathematics anxiety and pre-service elementary teachers' confidence to teach mathematics and science. *School Science and Mathematics, 106*(4), 173–179.

Caballero, A. (2013). *Diseño, aplicación y evaluación de un programa de intervención en control emocional y resolución de problemas matemáticos para maestros en formación inicial* (Doctoral dissertation, Universidad de Extremadura).

Caballero, A., Blanco, L. J., & Guerrero, E. (2008). Descripción del Domino Afectivo en las Matemáticas de los estudiantes para maestro de la Universidad de Extremadura. *Paradigma, 29*(2), 157-172.

Caballero, A., Blanco, L. J., & Guerrero, E. (2011). Problem Solving and Emotional Education in Initial Primary Teacher Education. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 7*(4), 281-292.

Caballero, A., & Guerrero, E. (2015). Un cuestionario sobre dominio afectivo y resolución de problemas de matemáticas. En Blanco, L.J., Cárdenas, J.A., & Caballero, A. (2015) *Resolución de Problemas de Matemáticas en la Formación Inicial de Profesores de Primaria* (pp. 39 – 58). Badajoz, España: Servicio de publicaciones de la UEX.

Caballero, A., Guerrero, E., & Blanco, L. J. (2014). Construcción y administración de un instrumento para la evaluación de los afectos hacia las matemáticas. *Campo Abierto. Revista de Educación, 33*(1), 47-72.

Caballero, A., Guerrero, E., Blanco, L. J., & Piedehierro, A. (2009). Resolución de problemas de matemática y control emocional. En M. J. González, M. T. González, & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 151-160). Santander: SEIEM.

Carrillo, J. (1996). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la Matemática y su enseñanza de profesores de Matemáticas de alumnos de más de 14 años. Algunas aportaciones a la metodología de la investigación y estudio de posibles relaciones* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Sevilla.

DeBellis, V. A., & Goldin, G. A. (2006) Affect and meta-affect in mathematical problem solving: a representational perspective. *Educational Studies in Mathematics, 6*(2), 131-147.

Edelmuth, J. E. (2006). *Acknowledging math anxiety: Techniques for teachers, parents, and students*. (Tesis de Maestría). Universidad de San Diego.

Etches, S. (1997). *Investigating mathematics anxiety through the medium of a workshop*. (Tesis de maestría). Lakehead University.

Flores, P. (1999). Conocimiento profesional en el área de Didáctica de las matemáticas, en el primer curso de la formación de maestros de educación primaria. En J. Carrillo, & N. Climent (Eds.), *Modelos de formación de maestros en Matemáticas* (pp. 91-110). Huelva: Universidad de Huelva.

Fortuny, J. M. (1995). *Proyecto Docente de Didáctica de la Matemática* (Trabajo no publicado). Universidad Autónoma de Barcelona.

Furinghetti, F., & Morselli, F. (2009). Every unsuccessful problem solver in unsuccessful in his or her own way: affective and cognitive factors in proving. *Educational Studies in Mathematics, 70,* 71-90.

Furner, J. M., & Berman, B. T. (2004). Confidence in their ability to do mathematics: The need to eradicate math anxiety so our future students can successfully compete in a high-tech globally competitive world. *Philosophy of Mathematics Education Journal, 18*(1), 1-33.

García, M., Escudero, I., Llinares, S., & Sánchez, V. (1994). Aprender a enseñar matemáticas: una experiencia en la formación matemática de los profesores de primaria. *Epsilón, 30*, 11-26.

Gómez-Chacón, I. M. (2002). Cuestiones afectivas en la enseñanza de las matemáticas: una perspectiva para el profesor. En L. C. Contreras, & L. J. Blanco, *Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de matemáticas: Una mirada a la práctica docente* (pp. 23-58). Cáceres: Universidad de Extremadura.

González, M. (1995). Perspectivas del alumnado de Magisterio sobre su formación y su aprendizaje como docente. *Revista Española de Pedagogía, 53*(200), 23-43.

Goos, M., Arvold, B., Bednarz, N., Deblois, L., Maheux, J., Morselli, F., & Proulx, J. (2009). School experience during pre-service teacher education from the students' perspective. En R. Even, & D. L. Ball (Eds.), *The professional Education and Development of Teachers of Mathematics. The 15th ICMI Study* (pp. 83-91). US: Springer.

Gresham, G. (2007). A Study of mathematics anxiety in pre-service teachers. *Early Childhood Education Journal, 35*(2), 181-188.

Gross, J. J. (2010). The future´s so bright, I gotta wear shades. *Emotion Review, 2*, 212-216.

Iriarte, C., Benavides, M., & Guzmán, M.J. (2013). Tratamiento de la ansiedad hacia las matemáticas. Una experiencia formativa con futuros profesionales de la educación. En V. Mellado, L.J. Blanco, A.B. Borrachero y J.A. Cárdenas (Eds.), *Las Emociones en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Ciencias Experimentales y las Matemáticas* (pp.149-175). Badajoz, España: DEPROFE.

Iossi, L. (2007). Strategies for reducing math anxiety in post-secondary students. In S. M. Nielsen & M. S. Plakhotnik (Eds.), *Proceedings of the Sixth Annual College of Education Research Conference: Urban and International Education Section* (pp. 30-35). Miami: Florida International University.

Johnson, G. (2008). Preservice Elementary-school Teachers' Beliefs Related to the Use of Technology in Mathematics Classes. In K. McFerrin et al. (Eds.), *Proceedings of Society for Information Technology & Teacher Education International Conference 2008* (pp. 4478-4484). Chesapeake, VA: AACE. Recuperado de http://www.editlib.org/p/27965.

Kloosterman, P. (2002) Beliefs about mathematics and mathematics learning in the secondary school: Measurement and implications for motivation. In. G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Eds.) *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education* (pp. 247–269). Dordrecht: Kluwer.

Koballa, T. R., & Glynn, S. M. (2007). Attitudinal and Motivational constructs in science learning. En S. K. Abell & N. G. Lederman (Eds.) *Handbook of Research on Science Education* (pp. 75-102). Mahwah, NJ, USA: Erlbaum.

Mato, M. D. (2010). Mejorar las actitudes hacia las matemáticas. *Revista galego-portuguesa de psicoloxía e educación, 18*(1), 19-32.

Mayer, J. D., & Salovey, P. (1997). *Emotional development and emotional intelligence: implications for educators*. New York: Basic books.

McCombs, B. (1991, April). Metacognition and motivation in higher level thinking. In *annual meeting of the American Educational Research association*, Chicago, IL.

Meichenbaum, D. (1987). *Manual de inoculación de estrés*. (J. Fibla, Trad.) Barcelona, Barcelona, España: Martínez Roca.

Okolo, C. M. (1992). The effects of computer based attribution retraining on the attribution, persistence, and mathematics computation of students with learning disabilities. *Journal of Learning disabilities, 25*, 327-334.

Palenzuela, D. L., Prieto, G., Almeida, L. S., & Barros, M. (1997). Una versión española de una batería de escalas de expectativas generalizadas de control (BEEGC). *Revista portuguesa de educaçao, 10*(1), 75-96.

Peker, M. (2009). Pre-service teachers´teaching anxisety about mathematics and their Learning Styles. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 5*(4), 335-345.

Polya, G. (1985). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Santacreo, J. (1995). El entrenamiento en autoinstrucciones. En V. E. Caballo (Ed.), *Manual de técnicas de terapia y modificación de conducta* (V. E. Caballo, Trad., 3ª ed., pág. 980). Madrid, Madrid, España: Siglo ventiuno.

Santos, M. (1996). Análisis de algunos métodos que emplean los estudiantes al resolver problemas matemáticos con varias formas de solución. *Educación Matemática, 8*(2), 57-69.

Stacey, P., Brownlee, J. M., Thorpe, K. J., & Reeves, D. (2005). Measuring and Manipulating Epistemological Beliefs in Early Childhood Education Students. *International Journal of Pedagogies and Learning, 1*(1), 6-17.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

Spielberger, C. D., Gorsuch, R. R., & Lushene, R. E. (1982). *STAI. Cuestionario de Ansiedad Estado/Rasgo*. Madrid: TEA Ediciones.

Tárraga, R. (2008). *¡Resuélvelo! Eficacia de un entrenamiento en estrategias cognitivas y metacognitivas de solución de problemas matemáticos en estudiantes con dificultades de aprendizaje* (Doctoral dissertation, Disertación Doctoral]. Universidad de Valencia, España).

Tárraga, R. (2011). Evaluación e intervención en factores afectivo-motivacionales en estudiantes con dificultades de aprendizaje en matemáticas. ¿Existe una brecha entre la teoría y la práctica? *International Journal of Developmental and Educational Psychology, 1*(2), 75-84.

Tooke, D. J., & Lindstrom, L. C. (1998). Effectiveness of a mathematics methods course in reducing math anxiety of preservice elementary teachers. *School science and mathematics, 98*(3), 136-139.

Uusimaki, L. S., & Kidman, G. C. (2004) Reducing maths-anxiety: Results from an online anxiety survey. In *AARE Annual Conference*, 28th November - 2nd December, Melbourne, Australia

Vallejo, M. A., & Ruiz, M. Á. (1998). *Manual práctico de modificación de conducta* (Vol. 2). Madrid, Madrid, España: Fundación Universidad-Empresa.

Woodard, T. (2004). The effects of math anxiety on post-secondary developmental students as related to achievement, gender, and age. Inquiry, 9(1), 1-3. Recuperado de: http://www.vccaedu.org/inquiry/inquiry-spring2004/i-91-woodard.html

Yasutake, D., Bryan, T., & Dohrn, E. (1996). The effects of combining peer tutoring and attribution training on students´ perceived self-competence. *Remedial & Special Education, 17,* 83-91.

Zan, R., Brown, L., Evans, J., & Hannula, M. S. (2006). Affect in mathematics education: an introduction. *Educational Studies in Mathematics, 63*(2), 113-121

MÉTODOS EMPIRICOS PARA LA DETERMINACIÓN DE ESTRUCTURAS DE COGNICIÓN Y AFECTO EN MATEMÁTICAS

Empirical Methods for the Determination of Cognition-Affect Structures in Mathematics

Gómez-Chacón, I. Mª

Universidad Complutense de Madrid

Resumen

El objetivo de este trabajo es presentar una revisión crítica de los estudios empíricos y teóricos que se centran en la interacción entre el afecto y la cognición, así como los efectos que tienen. En esta conferencia se plantea cuestiones metodológicas relativas a la evaluación de la interacción entre afecto-cognición. Se prestará especial atención al concepto de la Estructura cognitiva-afectiva. Después de más de dos décadas de investigación, parece pertinente preguntarse si se puede hablar de estructuras o sistemas de referencia subyacentes a este fenómeno. Además, vamos a tratar de identificar categorías y representar modelos prototípicos de la relación cognición-afecto en diferentes procesos de pensamiento matemático o en diferentes grupos de aprendizaje.

Palabras clave: p*ensamiento matemático y emoción, estructura cognitiva-afectiva, matemáticas, métodos empíricos*

Abstract

The aim of this paper is to bring together a critical review of theoretical investigation and empirical studies that focus on the interaction between affect and cognition as well as the effects they have. This lecture poses methodological questions concerning the evaluation of the interaction between emotion and cognition. Special attention will be given to the concept of the Cognitive-Affective Structure. After more than two decades of research, it seems pertinent to ask whether we can speak of structures or reference systems underlying cognitive-affective phenomena. Also, we will attempt to identify categories and represent prototypical models of the interplay cognition and affect in different mathematical thought processes or in different collective learning groups.

Keywords: *Thinking and emotions, Cognitive-Affective Structure, mathematics, empirical methods*

INTRODUCTION

Me siento honrada y agradecida por estar invitada a impartir esta conferencia en el XX Simposio SEIEM. Ello me permite reflexionar, y ejemplificar sobre dos temas que han sido el centro de mi trabajo desde mis inicios en la investigación en Educación Matemática hace casi 20 años: 1) Una investigación sobre pensamiento matemático en sus aspectos de interacción cognición y afecto. 2) La construcción de puentes entre la investigación básica sobre enseñanza y aprendizaje matemático y la práctica diaria en clase.

Gómez-Chacón, I. M. (2016). Métodos empíricos para la determinación de estructuras de cognición y afecto en matemáticas. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 36-58). Málaga: SEIEM.

Considero que si el tema de la interacción cognición y afecto está adecuadamente situado nos permite una visión más holística de la persona y nos da información sobre sus implicaciones en la enseñanza y el aprendizaje. Además, la investigación reciente podría ser más útil si se establecieran más conexiones entre las intuiciones derivadas de la investigación básica y estudios sobre la mejora de la práctica. La investigación y la práctica pueden y deben vivir en sinergia productiva, procurando el enriquecimiento mutuo.

La significatividad de la interacción entre los dominios cognitivo y afectivo durante el aprendizaje matemático se ha observado en investigaciones anteriores, utilizándose distintas formas de comprensión o modelos de la interacción cognición y afecto (Fennema, 1989; Mandler, 1989; McLeod & Adams, 1989, Evans, 2000, Goldin, 2000; Gómez-Chacón, 2000). Sin ánimo de realizar una síntesis exhaustiva podría destacar cuatro aproximaciones. Una primera la podemos encontrar en los trabajos basados en las diferencias individuales. Estos ponen de manifiesto vínculos causales entre cognición y afecto, separando los aspectos sociales del individuo: social, cultural y socialización. Un segundo modelo, se centra en los procesos de aprendizaje de un individuo frente a una tarea o problema integrando la experiencia emocional (modelo cognitivo-constructivista). Un tercer modelo de estudio interacción cognición y afecto viene informado por los estudios de psicoanálisis (Freud y Lacan) en las que los conceptos de inconsciente son claves. Por último señalamos el modelo que tiene en cuenta conjuntamente los aspectos culturales, sociales y personales. Estos estudios abordan cuestiones relacionadas con la singularidad de los patrones individuales de desarrollo en la construcción y reconstrucción de los instrumentos culturales, así como las cuestiones relacionadas con el valor social de los conocimientos, los cambios en las estructuras sociales y el sentido personal y colectivo de identidad.

En la exploración de interacción cognición y afecto los estudios que han focalizado en los sistemas de valoración cognitiva son más abundantes que los que se han centrado en procesos cognitivos matemáticos (tareas cognitivas o de resolución de problemas). Respecto a esta última cuestión la producción científica ha sido menor aunque con resultados interesantes que animan a un mayor desarrollo. Por ejemplo, , estudios en afecto y aprendizaje (Goldin, 2000, 2004, Gómez-Chacón, 2000, 2011, 2012, 2015; Gómez-Chacón, Romero y Garcia, 2016 McLeod, 1994, Liljedahl, 2005) tienden a referirse a las reacciones afectivas que pueden influir en algunos de los procesos cognitivos y conativos implicados en el desarrollo del pensamiento matemático (la creatividad y la intuición, la atribución, la visualización, la generalización, los procesos de prueba y argumentación), o los llamados procesos directivos (procesos metacognitivos y meta-afectiva) (De Corte, Depaepe, Op ’t Eynde, & Verschaffel, 2011, Gómez-Chacón, 2008 y 2015). O cómo las emociones también afectan el procesamiento cognitivo de varias maneras: sesgos en la atención y en la memoria (Schlöglmann, 2002, Gómez-Chacón, García Madruga, et. al., 2014). Además, las emociones son consideradas funcionales, con un papel clave en el afrontamiento y la adaptación humanas (Evans, 2000; DeBellis and Goldin, 2006; Hannula, 2002, Gómez-Chacón, 2011).

Motivada por la temática, la interacción entre emoción y cognición, esta ponencia aspira a plantear algunas cuestiones metodológicas relativas a su evaluación. Partimos del

Gómez-Chacón, I. M. (2016). Métodos empíricos para la determinación de estructuras de cognición y afecto en matemáticas. En Editor1, Editor2 y Editor3 (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. inicial-final). Málaga: SEIEM.

hecho de que la detección de esta interacción es compleja, es difícil ya que manejamos constructos (es decir, cantidades conceptuales no directamente medibles) con fronteras difusas y con formas de expresión variadas. No obstante, y con la prudencia que nos da la conciencia de esta complejidad, presentamos un enfoque y diseño de investigación que ha resultado productivo para abordar este objetivo y que puede impulsar en una dirección de avance.

UNA FORMA DE MIRAR Y HACER

A la conferencia, impartida en el ICME 13 celebrado este año en la Universidad de Hamburgo en Alemania, le puse el título "Hidden connections, double meanings A mathematical exploration of affective and cognitive interactions in learning" ya que quería expresar metafóricamente el tipo de búsqueda (de trabajo intelectual) que ha cualificado mi forma de estudiar este tema de la relación afecto-cognición. Siempre, he buscado profundizar en la comprensión del ser humano. En muchas situaciones los significados no vienen dados por lo aparente visible, sino que hay un mundo invisible; o más bien se dan en la intersección entre lo visible e invisible. Es como cuando consideramos los tan conocidos ejemplos de ambigüedad y reversibilidad Gestalt, por ejemplo el del pato y el conejo.

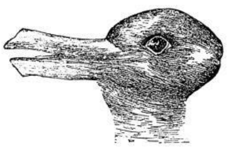


Fig. 1

Estos dibujos atraen y mantienen nuestra atención debido a su ambigüedad perceptiva: nos invitan a invertir la relación figura-fondo que en un principio y de forma espontánea vemos. Nos invitan a cambiar nuestro enfoque visual, la figura a lo que habíamos tomado como fondo y al fondo lo que habíamos tomado como figura. Nos invitan a dejar que nuestros ojos jueguen con la interacción que fluye libremente y que es posible entre figura y fondo, para suavizar el dualismo que normalmente da diferencia entre la figura y el fondo. La duplicidad de estas imágenes lo hace intrigante y a la vez una fuente de placer visual. Nuestra visión se puede mover libremente, de forma espontánea, de ida y vuelta. Este cambio de configuración, revirtiendo figura y el fondo, dejando una configuración emergente diferente -Wittgenstein habla de la aurora de un aspecto[1] -es un buen ejemplo de un proceso hermenéutico. Los estudios que he realizado han tenido como base esta hermenéutica a la hora de estudiar los fenómenos de interacción cognición y afecto en la enseñanza y aprendizaje. Una hermenéutica que considero que a la vez es inherente y espontáneamente operativa en la dinámica afecto-cognición.

Voy a centrar el tema de esta conferencia en cuestiones metodológicas para la determinación de las Estructuras de Afecto-Cognición. Conectada con esta noción de uso de una imagen mencionada anteriormente está otra noción pertinente para nuestro tema, las nociones de "ver como" y "ver cómo".

"Ver como" presupone que es "sólo ver", ver un objeto como lo que es. Se pueden derivar los casos erróneos de visión, en los que se toma algo por lo que no es a partir de su apariencia. Por ejemplo, en una noche oscura, puede verse un arbusto como un asaltante agazapado. El ejemplo tomado del pato y el conejo, una categoría de figuras

[1] Ludwig Wittgenstein, Philosophical Investigations (New York: Macmillan, 1953), p. 194.

ambiguas, que puede ser visto ora de este modo, ora de este otro, pero que tiene que ser visto de un modo u otro. Alguien que dijera que no ve ni un pato ni un conejo, sino un oso, nos dejaría perplejos. Hay además diagramas ilustrativos que pueden verse de múltiples maneras distintas, pero que en un contexto determinado tienen que verse de una determinada manera. El concepto de "ver como" o "ver un aspecto" proporciona para el investigador una clave tanto epistemológica como ontológica en la metodología que actúa.

He vivido distintas etapas en mi investigación sobre esta temática, pero todas ellas en este juego de ver cambios, transversalidades o comunalidades que se perfilaban según pusiera la visión en la figura o en el fondo.

FIGURA Y FONDO, CATEGORIAS PARA UN MODELO DE ANÁLISIS

Desde mi primer trabajo de investigación sobre afecto y cognición (Gómez-Chacón, 1997, 2000a y 200b) he estado interesada por los aspectos metodológicos que me permitieran establecer un modelo de análisis. En la búsqueda de un modelo de análisis para esta interacción, mi afirmación es la siguiente: si queremos comprender la interacción entre cognición y afecto en un individuo cuando actúa en "el momento", es necesario tener una visión holística de la persona, explorar al individuo a diferentes niveles (individuo, grupo, sociedad-) y "capturar" diferentes aspectos que constituyan el modelo. Algunos aspectos clave que podrían ser capturados (explicados y modelados) para describir con detalle el modelo sobre la dinámica afecto y cognición son los siguientes: la estructuras de afecto (local y global), la dimensión cognitiva (procesos de valoración y procesos matemáticos) y meta-afecto.

Seguidamente se describen estas categorías[2]:

Estructura de Afecto Local y global

Estructura de Afecto-Cognición Local, a nivel microscópico e individual. Se define como la comprensión de los estados de cambio de sentimientos o reacciones emocionales durante la resolución de una actividad matemática a lo largo de toda la sesión. Observar y conocer las etapas en el proceso del cambio de sentimientos o reacciones emocionales durante la resolución de problemas y la detección de los procesos cognitivos asociados con la emoción positiva o negativa. Consiste en la representación de la información sobre las reacciones emocionales que afectan el procesamiento consciente. Esto permite establecer rutas afectivo-cognitivas productivas. Las rutas afectivas son secuencias de reacciones emocionales (locales) que interactúan con configuraciones cognitivas en la resolución de problemas. La estructura local expresa tipos de interacción cuando el código emocional interactúa con el sistema cognitivo: interrupciones, desviaciones, atajos cognitivos, que se pueden expresar a través de distintas rutas. Tales rutas proporcionan información útil, que posteriormente puede ser usada para favorecer el proceso de aprendizaje y sugerir estrategias heurísticas para resolver problemas.

Estructura Afecto-Cognición Global: a nivel meso y macroscópico, se comprende como el resultado de los siguientes aspectos:

1- Resumen de las rutas seguidas por el individuo en la dimensión afectiva local. Estas rutas se establecen con el sistema cognitivo y contribuyen a la construcción de las

[2] Hacemos notar que estas categorías se pueden trabajar siempre que tengamos dos fuentes de información la del sujeto y las que vienen de la interacción. Consideramos que el estudio del afecto no se trata solo de una labor introspectiva del sujeto sino en la interacción, y en la interacción natural.

estructuras generales del propio auto-concepto, así como las creencias sobre las matemáticas y el aprendizaje de las matemáticas.

2- Las interacciones e influencias socio-culturales en las personas y cómo esta información se internaliza y configura su sistema de creencias. Dos aspectos a tener en cuenta: las representaciones sociales del conocimiento matemático y la identidad sociocultural de los sujetos. Las características que la identidad de los estudiantes tiene en su contexto son equivalentes a una red de significados que se manifiestan en el aprendizaje de las matemáticas. Estos significados ilustran nuestra búsqueda de una mayor comprensión de su configuración afectiva global, su forma de conocer y reaccionar afectivamente con el aprendizaje de las matemáticas y su forma de construcción de los sistemas de creencias y el conocimiento de sí mismo.

Hacemos notar las implicaciones del afecto local en el afecto global y viceversa, consideramos que el afecto local deja al final un rastro global y la doble dirección del afecto global al local da lugar al concepto de uno mismo, las creencias acerca de la matemática y su aprendizaje influye en la determinación de las rutas seguidas en el afecto local. El afecto global configura la estructura local del afecto-cognición en el sujeto.

Dimensión cognitiva

Utilizamos el término cognitiva en un amplio sentido. Por un lado se refiere al uso de los procesos de valoración cognitiva y de otra, a la caracterización de los significados personales de los sujetos acerca de la dimensión cognitiva de la heurística de resolución de problemas matemáticos y procesos de pensamiento matemático.

Se propone varias dimensiones de valoración cognitiva para diferenciar la experiencia emocional: agrado, esfuerzo anticipado, comprensión, atención, responsabilidad de control / yo-otro, y el control de la situación.

Meta-afecto o meta-emoción

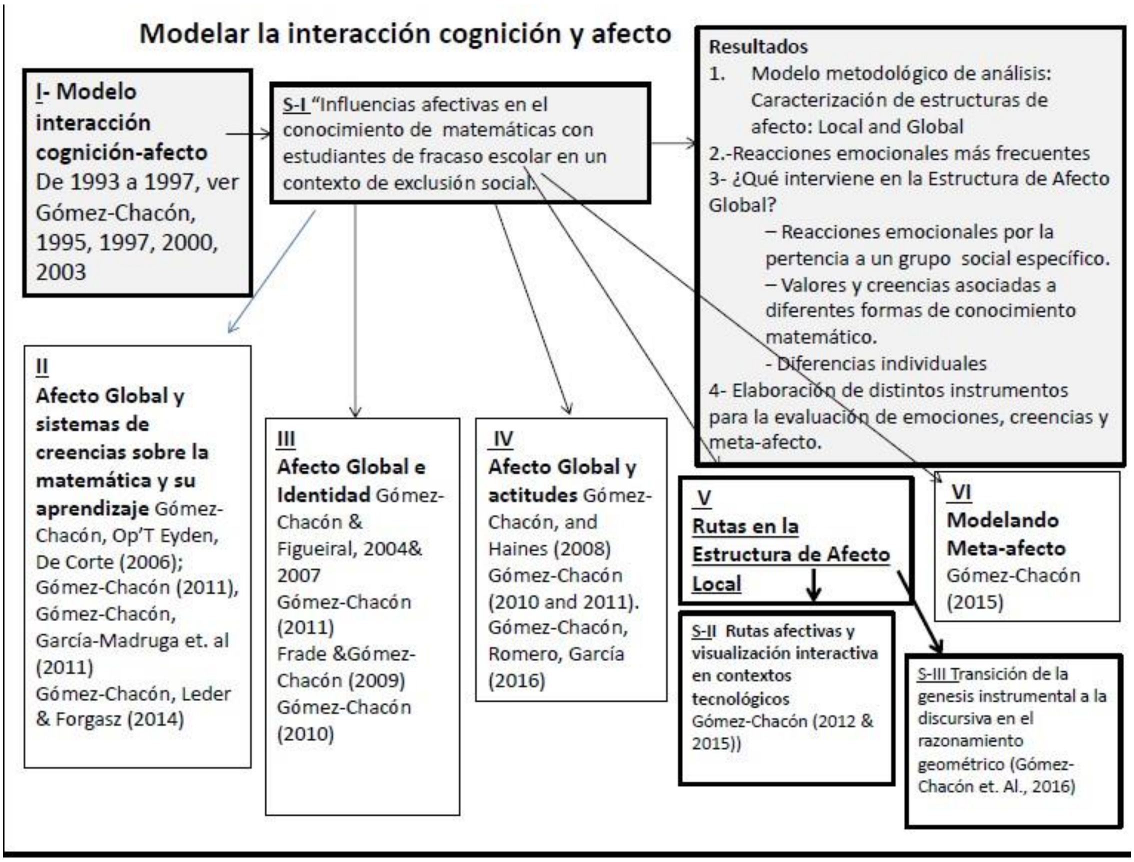
Meta-afecto o meta-emoción, una noción central se refiere a la capacidad que tenemos de autorregular el propio afecto, es decir, de planificar estrategias que se han de utilizar en la interacción cognición y afecto. Se centra en factores que se refieren a la comprensión meta-emocional y habilidades meta-emocionales. Investigaciones previas han demostrado que la estabilidad de las creencias de los individuos está estrechamente relacionada con la interacción entre las estructuras de creencias. Esto incluyen no sólo afectos (sentimientos, emociones), sino también y sobre todo meta-afecto (emociones sobre los estados emocionales, las emociones sobre los estados cognitivos, pensamiento sobre las emociones y cogniciones y, la regulación de las emociones).

Quiero hacer notar que estas categorías están sustentadas por estudios empíricos desarrollados en estos 20 años. En el Cuadro 1 se recoge una síntesis de los mismos.

No tenemos espacio en esta conferencia para explicitar cuál fue la contribución de cada uno de ellos. Solo haré una breve reseña del estudio inicial para mostrar como surgen estas categorías y en las secciones posteriores tomaré un estudio más reciente centrado en la estructura afectivo-cognitiva local.

Mi primer estudio llevó por título “Las influencias afectivas en el conocimiento de las matemáticas en estudiantes de fracaso escolar en un contexto de exclusión social” (realizado de 1993 a 1997, ver Gómez-Chacón, 1995, 1997, 2000, 2003) fue un estudio descriptivo-interpretativo sobre las interrelaciones entre la cognición y el afecto. Para tipificar esta interrelación se adoptó una perspectiva holística y como diseño metodológico se combinaron las técnicas propias de la etnografía con las de los estudios de casos, así como la reflexión sobre la propia acción. Esta investigación fue tanto un punto inicial de respuestas así como fuente de nuevas preguntas a afinar (Ver Cuadro 1).

Cuadro 1. Resumen de distintos estudios realizados sobre modelización de la interacción cognición y afecto



Mirando con perspectiva este estudio varios fueron los elementos de interés:

- La comprensión de la persona tanto en el dinamismo creativo de sus acciones como en sus posicionamientos en distintas circunstancias y niveles en la interacción con otros.
- La necesidad de sinergias a nivel de marcos teóricos y metodológicos.
- La identificación de distintas estructuras de afecto en el individuo.

Retomo brevemente la metáfora que he utilizado al comienzo de la reversibilidad de figura y fondo para explicarme respecto a lo aprendido con esta investigación. Es conocido que la reversibilidad de figura y fondo han sido ampliamente estudiadas por la teoría de la Gestalt (o Psicología de la Forma). Su planteamiento se ilustra con el axioma: El todo es mayor que la suma de sus partes. Con ello se pretende explicar que la organización básica de cuanto percibimos está en relación a la figura en la que nos concentramos, que a su vez es parte de un fondo más amplio, donde hay otras formas, o sea, todo lo percibido es mucho más que la información procesada por los sentidos.

Algo de esto me ocurrió en esta investigación cuando utilicé como marco teórico la aproximación cognitiva de la emoción. Esta me permitió un estudio microscópico de las acciones y comportamientos de los sujetos muy valioso (en términos que diré después, para el estudio del Afecto Local –FIGURA-). Sin embargo, utilizando esta aproximación había algo que quedaba sin explicación y que sobrepasaba las categorías establecidas. Esto me hizo valorar y pensar el dinamismo intrínseco de la persona en su realidad histórica y social (FONDO). Para ello hice una relectura de los datos teniendo como base otra aproximación teórica a la emoción el interaccionismo simbólico y las perspectivas de identidad social.

Explico un poco más esto. Mi supuesto básico es que el desarrollo en una persona no es lineal y no puede ser predicho solamente por identificación de episodios locales. Son numerosas las formas que pueden llevar a una persona a desarrollar una habilidad o a comprender algo. Admitir estos principios tiene claramente unas consecuencias en el estudio del ser humano: el curso de la vida no sólo está caracterizado por las regularidades y el progresivo establecimiento de regularidades, sino también por los momentos en los cuales estas continuidades se interrumpen, se reorientan y se cambian.

Aunque en mi comprensión de la interacción cognición y afecto pienso que es posible establecer regularidades, sin embargo, captar estos momentos de ruptura (de irregularidades) es interesante por diversas razones. Primero, a nivel teórico, los puntos de bifurcación en los cuales la persona desarrolla nuevas conductas son altamente significativos. Segundo, a nivel empírico y metodológico, estos episodios o momentos constituyen de forma natural "laboratorios de cambio". Muchas veces en un contexto experimental planteamos tareas como cuestionarios sin que se presenten puntos de ruptura. Simplemente la gente tiene que responder y el investigador examina detalladamente las respuestas o los procesos que guían estas. Sin embargo, en esta investigación planteada en un contexto natural de seguimiento de las personas –en mi caso durante 2 años- permitió ver estas interrupciones, rupturas o puntos de cambio que requerían de una respuesta, de un ajuste por parte del individuo.

Aunque este estudio trajo consigo diversos resultados a nivel metodológico y la elaboración de ciertos instrumentos para evaluación de creencias y emociones, aquí quería resaltar la contribución que tuvo a la precisión más ampliamente del concepto Estructura de Afecto Local y Global (conceptos que han sido usados por Goldin & Debellis, 2006 en una acepción más limitada).

En nuestro caso fue ampliada la noción de Estructura Global del Afecto[3].

En este estudio (Gómez-Chacón, 2000b) se reveló que para comprender las reacciones afectivas de los estudiantes hacia las matemáticas, no es suficiente observar y conocer las etapas en el proceso del cambio de sentimientos o reacciones emocionales durante la resolución de problemas (dimensión afectiva local), o detectar procesos cognitivos asociados con emociones positivas o negativas. Por ejemplo, las dificultades en la comprensión de un problema, o en recordar conceptos, pueden producir frustración y ansiedad en el individuo, mientras que la experiencia de los avances en el aprendizaje puede traer alegría y satisfacción; la curiosidad podría fomentar el desarrollo de procesos heurísticos que son importantes para la investigación y la planificación, etc. Sino que era necesario contextualizar sus reacciones emocionales dentro de la realidad social que da lugar a ellas. Por Afecto Global se entiende no sólo como la combinación de rutas afectiva locales del individuo, sino también, el concepto de sí mismo como estudiantes que está relacionado con sus actitudes, su perspectiva del mundo matemático, su sistema de creencias sobre el aprendizaje de las matemáticas y su identidad social. En este estudio se tomó en cuenta las representaciones sociales del conocimiento matemático y la identidad de los sujetos. Dos aspectos que permitían

[3] Aunque en versión inglesa se dio a conocer en el 2000, hay publicaciones previas en español desde 1995 donde se deja constancia de este avance, ver por ejemplo Gómez-Chacón (1997).

precisar como descriptores: sistemas de creencias sociales, autoconcepto como aprendiz de matemáticas, autoconcepto por las pertenencias sociales que claramente quedaban reflejadas en las estructuras de creencias sobre la matemática y su aprendizaje. Estos resultados y esta aproximación interpretativa ha funcionado en su totalidad en estudios realizado bien con estudiantes como con profesores en contextos donde hay un marcador social negativo –contextos de exclusión social, contextos de minorías étnicas- y ante el cual los individuos toman claros posicionamientos (Gómez-Chacón & Figueral, 2007).

En lo que sigue nos vamos a centrar en la determinación de la Estructura Afecto-Cognición Local. Una de las razones principales para centrarnos en las Estructuras de Afecto-Cognición Locales es porque dan lugar a un perfil de Estructura de Afecto Global en los sujetos y porque, como he indicado al comienzo, los resultados obtenidos de esta investigación básica podrían ser fácilmente integrados en una práctica de aula.

LA DETERMINACIÓN DE LA ESTRUCTURA DE AFECTO LOCAL

La determinación de la Estructura de afecto local como meta de investigación se podría abordar mediante diseños de investigación que integren diferentes combinaciones de metodologías, métodos y paradigmas. Aquí hemos hecho la elección de presentar un diseño metodológico que ha sido eficaz y productivo.

Partamos de un ejemplo. Planteamos en un aula el siguiente problema sobre Lugares Geométricos para ser resuelto mediante SGD a un grupo de estudiantes universitarios del grado en Matemáticas:

> *Escalera: Una escalera que mide 5 metros está apoyada por su extremo superior en una pared vertical, y su extremo inferior está situado en el suelo ¿Cuál es el lugar geométrico descrito por el punto medio M de la escalera al resbalar y caer ésta? (Y si el punto no es el punto medio de la escalera)*[45] .

Para este objetivo de determinar la Estructura de afecto local, uno podría preguntarse: "Supongamos que tenemos una hipótesis sobre esa meta. ¿Cómo situarse para evaluarla? O de otra forma, "Supongamos que estás tratando de explicar algunos aspectos de la conducta individual o de grupo correspondiente a esta meta. ¿Cómo caracterizar y teorizar el comportamiento?"

4 Para formular la cuestiones metodológicas y avalar con datos y ejemplificaciones tomaré unos de los penúltimos estudios realizados: Rutas afectivas y procesos de visualización en un contexto tecnológico y de desarrollo del conocimiento matemático profesional (Estudio de referencia (ER)) (Gómez-Chacón, 2012 y 2015). Estudio realizado con universitarios del grado en matemáticas, posibles futuros profesores de Secundaria.

[5] Este problema es uno de los planteados en el experimento de enseñanza (Design Based Research). Consideramos que se trata de un problema de nivel medio alto para nuestros estudiantes. El enunciado está formulado sin consignas explícitas de construcción. Es una situación realista de fácil comprensión. No obstante, la traslación a construcción con el software GeoGebra no es evidente, es necesario ayudarse de un objeto auxiliar. El razonamiento visual-analítico requiere superar la dificultad inicial de construcción de la escalera a través de un objeto auxiliar, en ese caso GeoGebra ofrece el locus de forma precisa. Para el registro analítico o algebraico es necesario situar cinco puntos sobre el locus y después trazar con el comando "cónica que pasa por tres puntos". En este caso se obtiene la ecuación algebraica precisa. En lo referente al razonamiento instrumental que debe seguir el estudiante, dos momentos son claves en este problema: 1) La construcción de la escalera con una circunferencia auxiliar. 2) Y si se quiere estudiar el lugar que describen los puntos sobre la escalera, estos puntos deben estar determinados de forma precisa (punto medio, 1/4).

Cuando nos centramos en la interacción cognición afecto local como meta de investigación estamos tratando de "capturar":

1) Movimientos de zigzag en el pensamiento entre lo cognitivo-afectivo.

2) Precisión de procesos cognitivos y afectos (en este caso nos centramos principalmente en emociones).

3) Patrones: rutinas y cambios dinámicos –bifurcaciones- en la ruta de cada individuo.

4) Modelado de la Estructura cognitiva-afectiva local que configura la Estructura de afecto global en el individuo.

Para "capturar" lo señalado en estos cuatro puntos se necesita adoptar una posición teórica y metodológica. Explícito a continuación la que ha sido eficaz para nosotros.

Sistema de referencia afectivo-cognitivo, un camino de "zig-zag" en el razonamiento matemático

Hoy nadie niega la constante interacción entre cognición y afecto, aunque distintos autores han sostenido diferentes puntos de vista a propósito de esta interacción y el rol posibilitador o inhibidor de la afectividad. Nosotros consideramos que es imposible encontrar un comportamiento afectivo sin ningún elemento cognitivo. A menudo hemos encontrado en distintos autores los términos "esquemas afectivos" o "esquemas cognitivos-afectivos" (Schlöglmann, 2005) en un esfuerzo por profundizar en esta interacción. Lejos de contradecir nuestro supuesto básico, el reconocimiento de "estructuras afectivas" nos confirma en que la estructuras afectivas son isomorfas con las estructuras cognitivas y son resultados de una intelectualización (Piaget, 1981). Tal intelectualización existe en el momento en que los sentimientos se estructuran. De hecho, la estructura y funcionamiento de la cognición y la afectividad es indisociable en todo comportamiento.

Mantener una postura dialógica en la interacción cognición y afecto nos lleva a tener en cuenta las cuestiones relacionadas con la singularidad de los patrones individuales en el razonamiento, así como las cuestiones relacionadas con las interacciones sociales. Partimos del hecho de que el razonamiento matemático no sigue una línea recta, sino que los procesos de razonamiento matemáticos, tal como expresa Lakatos, siguen una trayectoria en "zig-zag" ("El descubrimiento ni sube ni baja, sino que sigue una trayectoria zigzagueante aguijoneado por los contraejemplos, se mueve de la conjetura ingenua a las premisas y vuelve de nuevo a eliminar la conjetura ingenua, sustituyéndola por el teorema. La conjetura ingenua y los contraejemplos no aparecen en la estructura deductiva desplegada: el zigzag del descubrimiento no se puede discernir en el producto terminado" (Lakatos, 1978, p.42). El afecto es un aspecto esencial en los procesos de autorregulación y autorreflexión que se produce en el curso del razonamiento. Los procesos de autovaloración de la competencia personal, la mediación de la respuesta afectiva y la autorregulación en la resolución de problemas son clave. En esta línea Lakatos señala que se necesita una dimensión actitudinal de perseverancia para superar las dificultades cognitivas y afectivas que surgen ("respecto a las conjeturas conscientes vienen de las mejores cualidades humanas: valor y modestia" (Lakatos, 1978, p.30).

En esta exploración de interacción cognición y afecto se ha tomado como marco de referencia el afecto como un sistema representacional (DeBellis & Goldin, 2006, Goldin, 2000 & 2004; Gómez-Chacón 2000, 2012). Al afirmar que este sistema es representacional, se quiere indicar el intercambio de información con sistemas cognitivos (verbal semántico/ sintáctico, imaginario, formal simbólico y de planificación heurístico y de regulación). En este marco se tiene en cuenta las dos categorías de afecto, afecto local y afecto global mencionadas. La conjetura implícita en este marco es que con el tiempo las experiencias afectivas locales que son similares y de gran alcance puede llegar a influir en las construcciones más estables de afecto global. Por ejemplo, si un estudiante ha repetido experiencias de frustración al tratar de crear y utilizar GeoGebra para resolver un problema, el estudiante puede comenzar a tener un actitud negativa hacia la herramienta e incluso posiblemente desarrollar la creencia de que GeoGeobra no es una herramienta útil. Además, el afecto en el individuo (local y global) está influenciado por el efecto de los demás, las condiciones sociales y culturales y los factores contextuales externos.

Precisión de procesos cognitivos y emociones

En el estudio utilizamos el termino cognitivo en sentido amplio. De una parte referido al uso amplio de procesos de valoración (cognitive appraisal) y de otra, a la caracterización de los significados personales de los sujetos acerca de la dimensión cognitiva de los procesos de visualización.

Procesos cognitivos matemáticos: visualización

Estudiar los procesos de visualización va a requerir un acercamiento a los marcos teóricos de este tema. En nuestro caso hubo que precisar con que concepto de visualización trabajaríamos y precisar categorías para las tipologías de imágenes.

En los trabajos que se presentan a continuación vamos a entender la visualización como la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre figuras, imágenes, diagramas, en nuestra mente, sobre el papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas y avanzar la comprensión. El análisis de tipologías de imágenes y los usos de la visualización se llevó a cabo mediante el establecimiento de categorías utilizando los modelos de Presmeg (2006) y de Guzmán (2002). En el enfoque de Presmeg, las imágenes se describen distinguiendo entre tipos de imágenes como productos (imágenes concretas ("imagen en la mente"), imágenes cinestetica, imágenes dinámicas, imágenes al recordar una fórmula, imágenes de patrones). En Guzmán se clasifican desde el punto de vista de la conceptualización matemática, el uso de la visualización como una referencia en la matematización, y en la función heurística de las imágenes en la resolución de problemas (visualización isomórfica, visualización homeomórfica, visualización esquemática y visualización analógica). Es esta última categorización la que permite identificar procesos instrumentales en el manejo de herramientas de SGD en la resolución de problemas y la distinción precisa entre la función icónica y heurística de imágenes para analizar el rendimiento de los estudiantes.

Procesos cognitivos de valoración

Se proponen varias dimensiones de evaluación cognitiva para diferenciar la experiencia emocional: nivel de agrado, esfuerzo anticipado, la actividad atencional, la responsabilidad de control / yo-otro, y el control de la situación. En el presente estudio se analizan los patrones de valoración y se trata de identificar ante una misma creencia (creencias sobre visualización y creencias sobre tecnología) el rol de cada una de estas dimensiones en la diferenciación de la experiencia emocional.

Emociones

Al identificar y analizar las emociones en sí mismas nos hemos centrado en un sistema interrelacionado (valoración- afecto-sistema de acción) que tenga en cuenta emociones epistémicas - emociones que surgen cuando el objeto de atención se centra en el conocimiento y el saber- y los procesos de autorregulación cognitivos y afectivos (meta-emoción).

Para la identificación de ambas tipologías de procesos cognitivos y emociones se recogieron datos tanto de los protocolos de resolución de problemas de los sujetos antes mencionados, así como la utilización de dos cuestionarios, uno sobre las creencias y emociones sobre el razonamiento visual completado al inicio y el otro en la interacción entre la cognición y afecto en un contexto tecnológico rellenado después de la resolución de cada problema.

Un primer cuestionario se centró en la identificación de las creencias de los sujetos acerca de la visualización y ordenadores, con objeto de estudiar su afecto global y determinar si una creencia puede provocar diferentes emociones en diferentes individuos (Ver Cuadro 2).

Cuadro 2. Cuestionario creencia-emoción

El razonamiento visual es central en la resolución de problemas

El razonamiento visual no es central en la resolución de problemas

Da razones y ejemplos. ¿Cómo te sientes cuando utilizas representaciones o imágenes?

□ Me gusta . □ Me disgusta . □ Indiferente

Explica las razones para estos sentimientos

También, se utilizó un segundo cuestionario completado al final de cada problema. Las cuestiones principales se explicitan en el Cuadro 3.

Cuadro 3. Cuestionario sobre la interacción cognición y afecto

Responde a las siguientes cuestiones después de resolver el problema:

1. ¿Es el problema fácil o difícil? ¿Por qué?

2. ¿Qué es lo más dificultoso para ti?

3. ¿Sueles utilizar representaciones e imágenes en la resolución de problemas?

4. ¿Has sido capaz de visualizar el problema sin hacer una representación gráfica de los elementos problema? ¿Cuándo? ¿Cómo?

5. Describe cuales han sido tus reacciones emocionales, tus sentimientos, tus bloqueos, emociones, al trabajar el problema con el ordenador y sin el ordenador.

6. Si tuvieras que describir, el camino que han seguido tus reacciones emocionales al resolver el problema ¿Con cuál de estas rutas te identificas más?

Ruta afectiva 1 → Curiosidad → confusión →perplejidad → estimulo-animo → placer →júbilo-alegría → satisfacción →estructura global de autoconcepto positiva

Ruta afectiva 2 → Curiosidad → confusión →perplejidad → frustración → ansiedad → miedo y desesperación→ estructura global (estructuras generales de auto-concepto, odio y rechazo de la matemática/tecnología).

Si no te identificas con ninguna de ellas, especifica a continuación tu propia ruta:

7. Ahora, ya que has definido tu ruta indica si algunas de esas emociones han tenido relación con procesos de visualización y de representación del problema. Específica la parte del problema en la que estabas.

Modelado de la Estructura Local de afecto en el individuo: rutinas y bifurcaciones

Llegar a establecer patrones de interacción cognición y afecto requiere de un análisis a nivel microscópico de los individuos y de todas las fuentes de datos. Presentamos a continuación el análisis realizado en el estudio de casos. En esta sección se exploran los procesos cognitivos-emocionales relativos al pensamiento visual en la resolución de problemas de lugares geométricos con estudiantes universitarios del grado en matemáticas. Tomamos como ejemplo el formulado al inicio de la sección 4: Escalera. Se tratará de dar respuesta a las cuestiones de investigación: ¿Qué hace que un estudiante se mantenga en una ruta afectiva productiva en la resolución de problema o qué hace que este caiga en una ruta de ansiedad, de desesperación que le impide resolver el problema? ¿Qué tipo de ruta afectivo cognitiva se puede describir?

Para lograr un establecimiento posible de patrones se analizó para cada sujeto:

1.- Creencias expresadas y creencias en acción sobre el pensamiento visual y reacción emocional que se deriva.

2.- Coincidencias en tipologías de uso de visualización y emoción asociada.

3.-Valoración realizada sobre los sucesos que le causan emociones. Tal como se ha indicado en la sección anterior nos hemos centrado en procesos relacionados con la visualización y con el uso tecnológico.

Caso de TT-19

TT-19 es un estudiante del grado en matemáticas con un estilo visualizador. Su placer y gusto por la visualización está estrechamente ligado a una concepción evolutiva de la matemática: “El carácter intuitivo y lúdico de la matemática se desarrolla en mayor medida mediante un razonamiento visual que mediante un razonamiento algebraico, aunque lo ideal es complementar ambos en el proceso de resolución del problema” (respuesta al cuestionario).

Considera que el razonamiento visual es esencial en la resolución de problemas (“En los problemas de geometría es fundamental realizar un razonamiento visual a partir de la representación gráfica para su resolución. Pero no sólo en ellos. En muchos otros campos de la matemática la utilización de diagramas y representaciones ayudan a avanzar hacia la solución”). La emoción de placer que experimenta usando visualización la refiere a la experiencia de control y de creación de aprendizaje profundo que experimenta. Considera que le ayuda en su dimensión intuitiva del conocimiento y en formarse imágenes mentales “Expresar la información del problema en un gráfico o diagrama nos puede permitir reducir el problema a uno de tipo geométrico, haciéndolo más accesible. Además, una demostración visual es igual de válida y formal que una algebraica, siendo en muchas ocasiones más intuitiva. Este tipo de razonamiento nos permite ahondar más en las relaciones entre los elementos que intervienen”.

A continuación, ilustramos las relaciones cognición-afecto con el análisis del problema 4 que realizamos sobre los procesos de visualización-representación-afecto en el sujeto (Cuadro 5). Cuando se le pregunta al estudiante si ha sido capaz de visualizar el problema sin hacer una representación gráfica de los elementos problema nos responde: “sí, al ser un instrumento de la vida cotidiana, no he tenido en problemas en visualizar el problema ni en hacer algunas conjeturas”. Considera que el problema tiene una dificultad media, aunque señala que” no resulta trivial encontrar la construcción adecuada para representar el problema”, para él lo más dificultoso ha sido “la manera de representar la escalera resbalando por la pared. He tardado tiempo en encontrar la solución". Define su propia ruta de afecto-cognición (Cuadro 4):

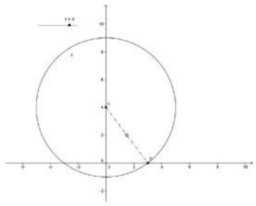
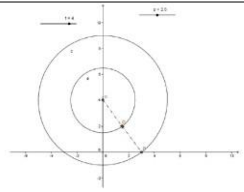
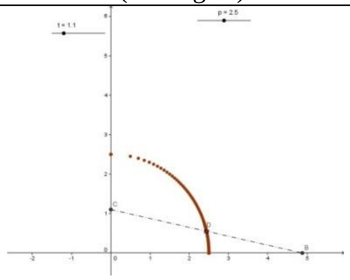
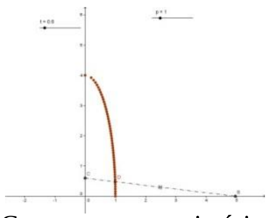
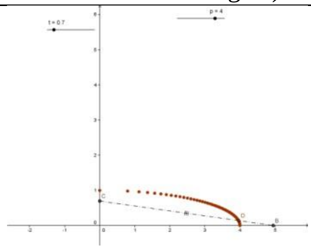
Cuadro 4. Ruta afectiva-cognitiva de TT-19 explicitada en el cuestionario.

Curiosidad → confusión →perplejidad → reflexión → perseverancia- ánimo →confusión → confianza →júbilo-alegría→ satisfacción→ estructura global de autoconcepto positiva

Y cuando se le pregunta si sus emociones han tenido relación con procesos de visualización y de representación del problema y que especifique la parte del problema en la que estaba nos dice: "en el proceso de visualización ha predominado la curiosidad. Me parecía un problema interesante y diferente a los habituales de cónicas. Por ello afrontaba la resolución con energía e ilusión. En el proceso de representación del problema y en la posterior búsqueda de estrategias sufrí el bloqueo más importante en el transcurso de la resolución. No era capaz de encontrar una buena estrategia para llegar a la solución. La confusión me duró lo suficiente como para dejar el problema para otro momento. En una nueva visualización del problema encontré la estrategia a seguir: construir una circunferencia de radio 5 para representar la escalera, y una más pequeña para representar el punto a estudiar. En esos momentos sentí confianza, alegría y satisfacción".

Cuadro 5. Análisis de proceso de resolución, uso de imágenes en situación y emoción experimentada detallada por el estudiante TT-19 en su protocolo

Descripción del proceso	**Tipología de uso de representación/imagen**	**Afecto: emoción**
En primer lugar, represento en el papel el problema. Intento buscar algún camino para resolverlo analíticamente pero no encuentro ninguno. Reflexiono sobre posibles relaciones entre los triángulos que va formando la escalera al caer con la pared y el suelo sin alcanzar nada en claro.	Dibujo (De patrones y pautas/pictórica) Analítico Búsqueda de imagen mental (Concretas pictóricas y Dinámica)	Curiosidad Confusión Me bloqueo.
Pienso en la solución: ¿Será una recta, una elipse, una circunferencia?		Confusión Perplejidad
Dejé el problema para otro día. Estuve pensando el problema mientras realizaba otras actividades. Confianza en que el subconsciente siguiera trabajando.	Búsqueda de imagen mental	Confianza Perseveranci a-animo
Retomo el problema con ilusión y esperanza. Experimento con un bolígrafo y una goma elástica enrollada en su punto medio. Parece formar un arco de circunferencia. Por lo menos, ya tengo una idea.	Manipulación física cinética (Cinéstetica) Imagen mental –identificación objeto matemático	Ilusión y esperanza
Comienzo a trabajar con Geogebra. Tras probar alguna construcción con rectas me doy cuenta que al ser la escalera un segmento de longitud 5 puedo realizar una construcción basada en una circunferencia de radio 5 que recorra el eje de ordenadas.	Manipulación tecnológica con ordenador Representación radio de circunferencia (Concretas pictóricas)	Confianza

Creo un deslizador t y defino C, el centro de la circunferencia, como C= (0, t). El deslizador decrecerá desde 5 hasta 0, momento en el cual la escalera estará tumbada sobre el suelo. El punto B representa la intersección de la circunferencia y el eje de abscisas.	 Creación de imagen interactiva, deslizador (Analógica)	Confianza Júbilo
Una vez representada la escalera, construyo otra circunferencia de radio variable (según un nuevo deslizador p), que indicará el punto del que vamos a estudiar su trayectoria. En nuestro primer caso, el punto medio de la escalera.	 Creación de imagen interactiva, deslizador (Analógica)	Júbilo y alegría
Observamos la trayectoria del punto medio de la escalera al activar el rastro.	 Concreta pictóricas con interactividad/ Analógica)	Sentimiento de belleza
Se trata de un arco de circunferencia de centro $C=(0,0)$ y radio $r=\ 2.5$. Probemos ahora con un punto situado a 4 m del inicio de la escalera (estando en un principio situada verticalmente sobre el eje de ordenadas):	 Concreta pictóricas con interactividad/ Analógica)	Sentimiento de belleza
Hemos obtenido un arco de elipse de semieje mayor 4 (vertical) y semieje menor 1. Por último probemos con un punto situado a 1 m del inicio de la escalera:	 Concreta pictóricas con interactividad/ Analógica)	
El lugar geométrico descrito por el punto D es una **elipse** de semiejes los siguientes: • *Semieje mayor*: $max(h,5-h)$ Vertical si $h>(5-h)$ Horizontal si $h<(5-h)$ • *Semieje menor*: $min(h,5-h)$ Horizontal si $h>(5-h)$ Vertical si $h<(5-h)$	Analítico-Visual De fórmulas en la memoria	Satisfacción

Donde h es la altura del punto desde la base de la escalera, estando ésta en posición vertical. En el caso **h=2.5** los dos semiejes son iguales, por lo que se trata de una **circunferencia**. Por último tratar los casos triviales en los que el punto se encuentra en uno de los extremos de la escalera. En el caso del extremo superior el punto recorre el segmento entre el punto (0,5) y el origen O; recorriendo el segmento entre O y (5,0) en el caso contrario.		

El estudiante usa el poder visual de la tecnología para mejor comprender la situación matemáticamente. El uso tecnológico le permite un cambio de contexto permitiéndole la aplicación de nociones o propiedades. GeoGebra actúa como una verdadera herramienta de modelización matemática. No obstante, el estudiante no resuelve el problema haciendo uso del comando lugar geométrico, aunque llega a una solución correcta mediante el trabajo de modelización realizado.

Y por último, para este estudiante se describe las rutas afectivas en los distintos problemas e interacción con procesos cognitivos de visualización. De la comparación de las rutas de los 6 problemas (Cuadro 6) planteados en el experimento de enseñanza se puede observar que la interacción procesos cognitivos de razonamiento visual y emoción negativa se produce en la identificación de estrategias de representación interactiva y la elaboración de determinadas representaciones, donde se tiene que poner en juego la identificación de variaciones paramétricas. Es un estudiante que tiene un uso fluido de imágenes pictóricas concretas, cinestéticas y analógicas. Este estudiante reconoce una estructura global de autoconcepto positiva al trabajar la matemática con el ordenador.

Este tipo de análisis de los datos nos permite identificar en profundidad perfiles de estudiantes con características variadas: género, rendimiento en matemáticas, creencias, estilo de visualización y emociones. La caracterización de las rutas cognitivo-afectiva y las relaciones implicadas según las variables reveló: a) concurrencia en la tipología de usos de visualización y emociones asociadas; y b) que la autorregulación emocional que se produce depende de sus percepciones individuales considerando en ellas estilo, disposición, tipo de actividad o dimensión de habilidad, del conocimiento instrumental y de los sistemas de creencias respeto a aprendizaje matemático con tecnología. Para más información más detallada ver (Gómez-Chacón, 2012 y 2015).

Problema	**Tipo ruta**	**Emociones/procesos cognitivos**									**Afecto Global**
Pr- 1	Ruta 3 (propia)	Curiosidad	Estimulo animo	Júbilo-alegría	Placer	Satisfacción					Autoconcepto positivo
		Imaginación visual	Imaginación visual	Selección estrategia	Comprobar solución	Ver la resolución					
Pr-2	Ruta 1	Curiosidad	Confusión	Perplejidad	Estimulo animo	Placer	Júbilo y alegría	Satisfacción			Autoconp +
		Imaginar situación	Representación	Representación-comprensión de registros	Intuir respuesta	Lograr representación	Lograr representación	Ver la resolución			
Pr-3	Ruta 3	Curiosidad	Confianza	Alegría	Perplejidad	Júbilo	Placer	Satisfacción			Autoconp +
		Visualización-comprensión	Visualización-identificación de conocimiento/ Representación en papel	Representación en papel	Construcción con GeoGebra	Construcción de representación con GeoGebra	Lograr representación dinámica	Constatar y verificar la resolución			
Pr-4	Ruta 3	Curiosidad	Confusión	Perplejidad	Reflexión	Perseverancia -Animo	Confusión	Confianza	Jubilo-Alegría	Satisfacción	Autoconp +
		Comprensión del problema	Búsqueda de estrategia	Bloqueo en llegar a una estrategia		Búsqueda de imagen-mental-	Identificación de estrategia de representación interactiva	Utilización de imágenes pictóricas	Creación de imagen interactiva Visualización analógica	Creación de imagen interactiva Visualiación analógica	
Pr-5	Ruta 3	Curiosidad	Confianza	Seguridad	Sastisfacción						Autoconp +
			Compresión del enunciado e imagen mental	En el uso de la estrategia y proceso de representación							
Pr-6	Ruta 3	Curiosidad	Confianza	Seguridad	Satisfacción						Autoconp +
		Comprensión del enunciado Visualización como inferencia de lo analítico	Comprensión del enunciado	En el uso de la estrategia y proceso	Comprobación del resultado mediante gráfica						

Cuadro 6. Resumen rutas cognitiva-afectiva en 6 problemas de lugares geométricos

MODELADO DE LA ESTRUCTURA DE AFECTO LOCAL EN UN GRUPO

Una cuestión básica en la que hemos estado trabajando en estos últimos años es en tratar de ver cómo dar el salto de la caracterización de individuos a la caracterización del grupo. Metodológicamente en esta área la caracterización de un grupo se ha solventado mediante estudios cuantitativos, principalmente basados en encuestas. Aquí, me gustaría plantear otras formas metodológicas que parten de medidas cualitativas y que modelizan cuantitativamente comportamientos recogidos de forma cualitativa. En mis trabajos más recientes he trabajado con modelos de Análisis Estadísticos Implicativos o modelos basados en la Lógica Difusa o Borrosa (Gómez-Chacón, 2015 y en prensa). En esta ponencia describiré los modelos primeros.

Método de análisis implicativo de datos

A continuación se describe brevemente el método de análisis implicativo de datos (Gras et al., 1997). Este procedimiento comienza con un grupo de individuos descritos por un conjunto finito de variables binarias (las emociones, la preferencia por el razonamiento visual, las dificultades de aprendizaje cognitivas, el tipo de rutas). La pregunta que se plantea es: ¿en qué medida es la variable b verdadera cuando la variable a es verdadera? En otras palabras, ¿los sujetos que se sabe que se caracterizan por a tienden también a exhibir b? En situaciones de la vida real teoremas deductivos de la lógica formal a → b son a menudo difíciles de establecer debido a la existencia de excepciones. Se hace necesario "explotar" el conjunto de datos para extraer reglas que sean lo suficientemente fiables como para conjeturar relaciones causales que estructuren la población. A nivel descriptivo, permiten detectar una cierta estabilidad en la estructuración. Y, a nivel predictivo, permiten hacer suposiciones.

En la investigación que venimos presentando junto al análisis cualitativos (sec. 4.3.) se realizó un análisis implicativo para explorar la estructura en las interacciones cognición y afecto. Este análisis estadístico permite establecer reglas de asociación en un conjunto de datos cruzando variables e individuos, marcando las tendencias de conjuntos de propiedades usando una medida de carácter no lineal de tipo inferencial. Se trata de estadística no simétrica utilizando la idea de implicación del álgebra booleana y la inteligencia artificial. El conocimiento se forma inductivamente a partir de que se encuentra un número de éxitos que aseguran un cierto nivel de confianza en cierta regla. En el momento en que se alcanza ese nivel (subjetivo), la regla se acepta y se pone en práctica.

De acuerdo con Gras (Gras et al, 1997), el aprendizaje comienza con hechos y reglas que están interrelacionadas y que forman progresivas estructuras de aprendizaje. Este es justamente el objetivo del presente trabajo, encontrar reglas que permitan disminuir el número de categorías y que, al mismo tiempo, proporcionen información sobre los aspectos que están interviniendo en la estructura cognición y afecto. Siguiendo a Grass hay tres importantes reglas que se pueden describir en los procesos de aprendizaje: 1) a → b, donde a y b pueden ser categorías y reglas; 2) a → (b → c); y 3) (a → b) → (c → d). Estas reglas describen una estructura de aprendizaje que es jerárquica, orientada y no simétrica. Esta estructura se puede obtener mediante el programa Clasification Hiéraschique et Cohesitive (CHIC) (Bodin, Coutourier, & Gras, 2000). Este programa produce tres tipos de diagramas que ofrece diferente información: a) Árbol de similitudes: aglutina grupos de variables en función de su homogeneidad lo que da pie a la interpretación de las agrupaciones con que se manejan las variables, produciéndose en cada nivel del gráfico una agrupación de similaridad en orden decreciente. b) El árbol jerárquico: permite interpretar en términos de semejanza clases de variables constituidas significativamente a ciertos niveles, identificando reglas y niveles de cohesión entre las variables o clases. c) Gráfico implicativo: su construcción utiliza tanto el índice de intensidad y un índice de validez. Muestra las asociaciones implicativas que son significativas a niveles específicos.

Resultados del modelado de la Estructura de Afecto Local en un grupo

A continuación presentamos para el grupo de universitarios del grado de matemáticas la estructura de afecto local las categorías de análisis y los resultados que se derivaron.

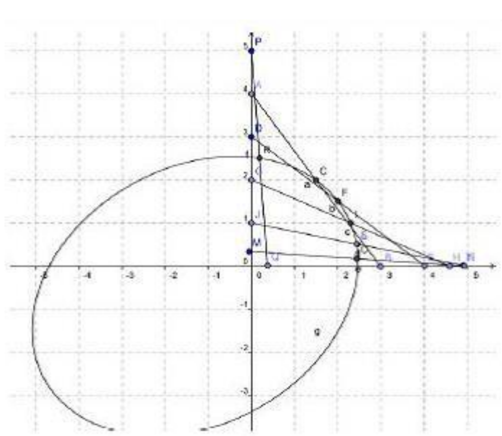
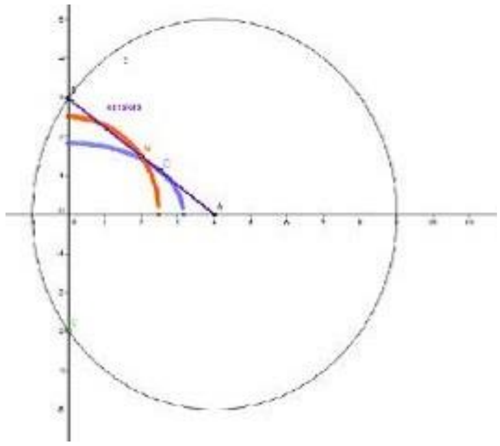
Definición de categorías

Primeramente a la realización del análisis implicativo es necesario un análisis exploratorio, descriptivo e interpretativo, que implica el análisis de datos, principalmente de forma inductiva, con las categorías y construcción de patrones e interpretaciones sobre la información recogida (sec. 4.3). Este análisis basado en un enfoque cualitativo es cotejado por tres investigadores con objeto de establecer categorías para un análisis de implicación. En nuestro estudio se definieron las siguientes categorías:

1. *Emociones asociadas con el razonamiento visual en el problema de la escalera*: P4EviP (gusto), P4EviN (disgusto), P4EviM (mezcla de emociones), and P4viInd (indiferencia).

2. *Dificultades instrumentales*: se seleccionaron dos tipos de dificultades que caracterizaban los problemas (Cuadro 7 y Gómez-Chacón & Escribano, 2011). Tipo 1: Construcciones estáticas (discreta) (DT1P4). En esta tipología, el alumno utiliza GeoGebra como una pizarra avanzada pero no utiliza el dinamismo que propicia el software, sólo repite las construcciones para un conjunto de puntos. Para trazar el lugar geométrico se ayudan del comando cónica que pasa por 5 puntos. Tipo 2: definición no correcta de la construcción (punto libre) (DT2P4). El alumno resuelve aparentemente el problema pero la solución impide la utilización de las herramientas de GeoGebra. Para utilizar la herramienta lugar geométrico es necesario que los puntos que lo definen estén correctamente determinados (no pueden ser puntos libres). En esta aproximación el alumno, en el mejor de los casos, puede obtener una representación parcialmente válida pero que no admite ningún tratamiento algebraico con GeoGebra. En este problema, la dificultad está en definir el punto de la escalera que no es el punto medio. Si se toma un punto libre no se podrá utilizar la herramienta Locus.

Cuadro 7. Ejemplos de dificultades de los estudiantes en el problema de la escalera

 Dificultad DT1	 Dificultad DT2

3. *Visualización inicial del problema*: VisiP4

4. Creencias sobre el razonamiento visual: BeviP (positiva), BeviN (negativa)

5. *Preferencias y emociones sobre la visualización:* EviP (gusto), EviN (no gusto), EviInd (indiferente)

6. *Creencias sobre el aprendizaje con ordenador:* BeGeoP (positiva), BeGeoN (negativa)

7. *Emociones hacia el ordenador:* EGeoP (gusto), EGeoN (no gusto), EGeInd (indiferencia)

8. *Rutas cognitiva-afectiva R1 y R2 (explicitadas en el cuestionario Cuadro 3) and R3* (formuladas por el propio sujeto como el ejemplo dado en el Cuadro 5).

Cada investigador llevó a cabo un análisis por separado. Los resultados se compararon y se discutieron los desacuerdos. La identificación de las rutas afectivo-cognitiva, las emociones y meta-emoción fue objeto de análisis conjunto.

Resultados

En este estudio se refleja una respuesta similar, entre los individuos, en las creencias sobre el uso de software de geometría dinámica como ayuda a la comprensión y la visualización de la idea geométrica de locus. Todos los estudiantes afirmaron que le resulta útil y el 80% expresan emociones positivas argumentando su fiabilidad, rápida ejecución y el potencial para desarrollar su intuición y visión espacial. Añadieron que la herramienta les ayudó a superar los bloqueos mentales y mejorar su confianza y motivación. Como futuros profesores destacaron que GeoGebra podría favorecer no sólo el pensamiento visual, sino ayudar al alumno a mantener una vía afectiva productiva. Indican que el trabajo con herramienta les induce creencias positivas hacia sí mismo y en su propia capacidad y disposición para participar en las matemáticas aprendizaje de las matemáticas (concepto de sí mismo como aprendiz matemática).

El Cuadro 8 presenta un resumen de frecuencias de tipologías de las rutas y emoción asociada al proceso de visualización en el problema 4. Se ponen de relieve las rutas afectivas mixtas, donde las emociones negativas y positivas alternan y donde la autorregulación emocional es optimizada:

Cuadro 8. Frecuencias de tipología de rutas afectivas cognitivas y emociones asociadas a los procesos de visualización al problema 4 (N=32)

	R1	R2	R3	EviP	EviN	EviM	EviInd
Problema 4	15	4	13	6	8	17	1

Para profundizar en esta relación de mezcla emocional y en la meta-emoción nos planteamos la cuestión ¿qué diferencias existes en la determinación de estas tres rutas por un estudiante? Un primer análisis indica que la ruta R3 tiene una elaboración propia y presenta mucha más mezcla de emociones y además, en gran parte de los casos, no se refleja tan explícitamente una tendencia tan clara como la que representa R1 (positiva) o R2 (negativa), sino que hay atribuciones negativas a momentos de elaboración de la visualización y positivas por el logro de la representación y las emociones negativas se regulan. En un segundo nivel de análisis de la R3 mediante el estudio implicativo jerarquizado se obtuvo algunas implicaciones afectivo-cognitivo significativas en las que está implicada la ruta R3 respecto a los procesos visuales como las siguientes: R3P4 $\rightarrow^{0.99}$ VisiP4 y R2P4 $\rightarrow^{0.90}$ DT2P4.

En el árbol cohesitivo (Figura 2) se obtuvieron nueve nodos de los cuales tres fueron significativos que nos permitió la identificación de los grupos siguientes:

Grupo 1 (N (nivel 1, cohesión: 0.998)= (R3P4 VisiP4) al que contribuyen más del 40% sujetos que tienen una visualización inicial del problema 4 y han indicado la ruta R3 como expresión de su interacción cognición y afecto. Además, estos individuos tienen como característica más significativa su emoción positiva por el ordenador (manejo de software GeoGebra (EGeoP)).

Grupo 2 (N (nivel 7, cohesión: 0.276= ((EviP BeviP) BeGeoP)) en el que se destaca que una creencia positiva en el uso de GeoGebra viene marca por creencias y preferencias de gusto por el razonamiento visual.

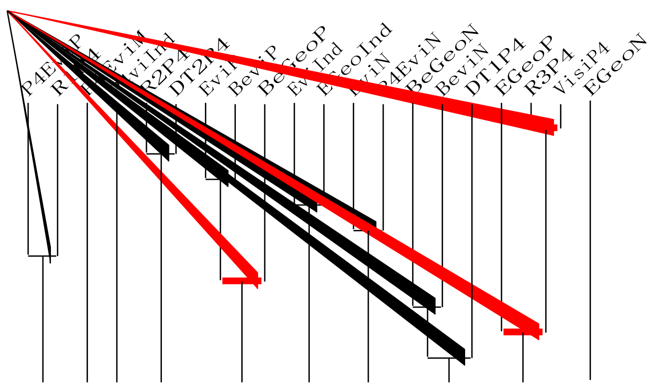


Figura 2. Árbol cohesitivo

A MODO DE EPILOGO

En síntesis, en esta ponencia se ha argumentado, dando evidencias empíricas de que la articulación entre cognición y afecto está en la base de toda actividad matemática. Sin embargo, hemos reseñado que este tipo de investigaciones son aún escasas en la agenda de Educación matemática. Una de las razones principales es que éstas se han escorado más a los procesos de valoración cognitiva que a considerar procesos cognitivos propios de la actividad matemática (procesos de pensamiento, heurísticas de resolución de problemas, etc.). La abundancia de unos frente a la escases de otros viene mediada tanto por la adecuación de marcos teóricos como metodológicos.

Un estudio como el descrito brevemente aquí requiere de sinergias entre marcos y sinergias entre métodos. Cuando me refiero sinergias entre marcos teóricos me estoy refiriendo no a los tradicionales trabajados en la dimensión afectiva sino aquellos vinculados a los espacios de trabajo matemático.

En esta ponencia se ha tratado de visibilizar la clave tanto epistemológica como ontológica de la metodología que actúa en la determinación de “la interacción cognición y afecto” en matemáticas. También, se ha mostrado un diseño de investigación que ha sido potencialmente significativo y productivo para abordar este objetivo. Destacamos:

- La *Estructura de Afecto Local*. En nuestro trabajo, cuando se estudia la dimensión emocional de los sujetos, consideramos que no solo se puede evaluar sus afectos desde un cuestionario sobre qué piensa sobre A (qué nos dice el sujeto de su actitud o emoción…), sino en qué circunstancias la persona ha sido expuesta a A (es decir, las condiciones de una posible internalización), y lo que ella dice o hace sobre A (lo que exterioriza) -y sólo desde esta base es como inferimos su dimensión emocional.

- La *conceptualización del trabajo matemático* pueden propiciar una contribución esencial en la metodología para el diagnóstico de la interacción cognición y afecto. En relación a la dimensión cognitiva en procesos de valoración, las categorías de niveles establecidas han sido útiles para un análisis global, mientras que el modelo de visualización matemática ha posibilitado una mirada local en cómo se producen las representaciones e imágenes. El marco matemático de visualización nos ha permitido caracterizar las dialécticas que se llevan a cabo al transitar (de modo no lineal) por la interacción cognición y afecto.

- Las *decisiones metodológicas*: la comprensión del sujeto y objeto de la investigación a diferentes niveles y la combinación de métodos cualitativos y cuantitativos para abordar el tema del estudio. Mientras que los estudios de encuestas y cuestionarios pueden ser métodos adecuados para la medición de variables de tipo rasgo, experimentos de diseño proporcionan los medios para hacer frente a la complejidad de los entornos educativos. Ofrecen una mayor comprensión de la ecología de aprendizaje (un complejo sistema que implica muchos elementos de diferentes tipos y en diferentes niveles de interacción) por el diseño de los elementos que intervienen y anticipar cómo interactúan para apoyar el aprendizaje (Cobb et al 2003). La investigación cualitativa se llevó a cabo mediante la observación de los sujetos, ya que resuelven un problema durante el entrenamiento. Se pidió a los estudiantes para discutir su enfoque para resolver el problema de protocolos que cubren los siguientes elementos: proceso de resolución de problemas paso a paso, descripción de las dificultades que podrían enfrentar y las estrategias desplegadas. También se les pidió que registraran las emociones y las dificultades experimentadas por escrito. Sus procesos motivacionales y emocionales fueron evaluados a través de análisis de rendimiento y entrevistas semiestructuradas grabadas en vídeo.

- Y por último el uso *del análisis implicativo de datos* nos da elementos para generar predicciones con respecto a la estructura cognitiva y afectiva en el uso de heurísticas de resolución de problemas. Una de las metas de uso de estas herramientas es identificar los patrones de conducta de los datos para inferir conocimiento y predecir situaciones. En el caso que nos ocupa en esta investigación es predecir perfiles de interacción, combinando variables cualitativas y cuantitativas. El aplicar el análisis implicativo en el área de las emociones y procesos cognitivos complejos supone un avance en la forma de analizar los problemas, ya que esta herramienta tiene la ventaja de incorporar el lenguaje común al diseño de sistemas automatizados.

REFERENCIAS

Bodin, A., Coutourier, R., & Gras, R. (2000). *CHIC: Classification Hiérarchique Implicative et Cohésive-Version sous Windows–CHIC 1.2,* Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques Rennes.

Cobb, P., Cofrey, J., di Sessa, A., Lehrer, R. & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32(1): 9-13.

De Corte, E., Depaepe, F., Op 't Eynde, P., & Verschaffel, L. (2011). Students' self-regulation of emotions in mathematics: An analysis of meta-emotional knowledge and skills. *ZDM*, 43, 483-495.

DeBellis, V. A. & Goldin, G. A. (2006). Affect and meta-affect in mathematical problem solving: A representational perspective, *Educational Studies in Mathematics*, 63(2), 131-147.

Di Martino, P., Gómez-Chacón, I. Ma, Liljedahl, P., Morselli, F., Pantziara, M., Schukajlow, S. (2015). Affect and mathematical thinking, Working group 8, *Proceedings CERME-9*, Praha University.

Evans, J. (2000). *Adults' Mathematical Thinking and Emotions: A Study of Numerate Practices*, Routledge Falmer, London.

Fennema, E. (1989). The study of affect and Mathematics: a proposed generic model for research. En McLeod, D. B., & Adams, V. M. *Affect and mathematical problem solving: A new perspective*. (pp. 205-219). Rotterdam, NL: Springer-Verlag Publishing.

Goldin, G. (2002). Affect, Meta-Affect, and Mathematical Belief Structures. In G. Leder, R. Pehkonen & G. Törner (Eds), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (pp. 59-73) Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Goldin, G. A. (2004). Problem Solving heuristics, affect and discrete mathematics. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, 36(2), 56–60, doi: 10.1007/BF02655759.

Goldin, G.A. (2000). Affective pathways and representation in mathematical problem solving. *Mathematical thinking and learning*, 2 (3), 209–219.

Gómez-Chacón, I. M. (2015). Meta-emotion and mathematical modeling processes in computerized environments. In B. Pepin & B. Rösken-Winter (Eds.), From beliefs and affect to dynamic systems in mathematics education. Exploring a mosaic of relationships and interactions (pp. 201–226). Switzerland: Springer.

Gómez-Chacón, I. M. (2012). Affective pathways and interactive visualization in the context of technological and professional mathematical knowledge. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 17(3–4), 57–74.

Gómez-Chacón, I. Mª (2011). Mathematics attitudes in computerized environments. A proposal using GeoGebra. In L. Bu and R. Schoen (eds.), Model-Centered Learning: Pathways to Mathematical Understanding Using GeoGebra, (pp. 147-170). Sense Publishers.

Gómez-Chacón, I. Mª (2008). Suggesting practical advances in the research on affect in mathematical learning, ICME-11, 11th International Congress on Mathematical Education, Monterrey, México.

Gómez-Chacón, I. Mª (2000a). Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático. Madrid: Narcea.

Gómez-Chacón, I. Mª (2000b). Affective influences in the knowledge of mathematics, Educational Studies in Mathematics, 43: 149-168.

Gómez-Chacón, I. Mª (1997/2003). *Procesos de aprendizaje en matemáticas con poblaciones de fracaso escolar en contextos de exclusión social. Las influencias afectivas en el conocimiento de las matemáticas*, Tesis Doctoral Universidad Complutense de Madrid. Publicaciones Universidad Complutense de Madrid.

Gómez-Chacón, I. Mª & Figueral, L. (2007). Identité et facteur affectifs dans l´apprentissage des mathématiques. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, IREM Strasbourg, 12, 117-146.*

Gómez-Chacón, I. Mª & Escribano, J. (2011). Teaching geometric locus using GeoGebra. An experience with pre-service teachers, *GeoGebra International Journal of Romania* (GGIJRO), 2 (1), 209-224.

Gómez-Chacón, I. Mª, García-Madruga, J. A;. José Óscar Vila, J, Elosúa, Mª: R , Rodríguez, R (2014) The dual processes hypothesis in mathematics performance: Beliefs, Cognitive Reflection, Reasoning and Working Memory, *Learning and Individual Differences*, January Vol. 29, 67−73.

Gómez-Chacón, I. Mª, Romero, I. Mª, García, M. M. (2016). Zig-zagging in geometrical reasoning in technological collaborative environments: a Mathematical Working Space-framed study concerning cognition and affect, *ZDM- The International Journal on Mathematics Education*, DOI 10.1007/s11858-016-0755-2

Gras, R., Peter, P., Briand, H. y Philippé, J. (1997). Implicative Statistical Analysis, In Hayashi, N. Ohsumi, N. Yajima, Y. Tanaka, H. Bock & Y. Baba (Eds.), Proceedings of the 5th Conference of the International Federation of Classification Societies (Vol. 2, pp. 412-419). New York: Springer-Verlag.

Guzmán, M. de (2002). The role of visualization in the teaching and learning of mathematical Analysis. Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level). University of Crete. Greece.

Hannula, M.S. (2002). Attitude towards mathematics: Emotions, expectations and values. *Educational Studies in Mathematics* 49(1), 25–46.

Leder, G.C., Pehkonen, E. and Torner, G. (eds.) (2002). *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?,* Kluwer, Dordrecht.

Lakatos, I. (1976). Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery. New York: Cambridge University Press.

Liljedahl, P. (2005). Mathematical discovery and affect: The effect of AHA! experiences on undergraduate mathematics students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 36(2-3), 219-236.

Mandler, G.: (1989) Affect and learning: Causes and consequences of emotional interactions. In D. B. McLeod y V M. Adams (Eds) *Affect and mathematical problem solving: A new perspective*. Springer-Verlag. New York. pp. 3-19.

McLeod, D. B. (1994). Research on affect and mathematics learning in the JRME: 1970 to the present. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25 (6), 637-141.

McLeod, D.B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D.A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Learning and Teaching*, (pp. 575–596). Macmillan, New York.

McLeod, D. B., & Adams, V. M. (1989). *Affect and mathematical problem solving: A new perspectiv*e. Rotterdam, NL: Springer-Verlag Publishing.

Pepin, B. & Rösken-Winter, B. (Eds.) (2015*). From beliefs and affect to dynamic systems in mathematics education. Exploring a mosaic of relationships and interactions*. Switzerland: Springer.

Piaget, J. (1981). *Intelligence and affectivity: Their relationship during child development*. Palo Alto: Annual Reviews.

Presmeg, N.C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics, Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: *Past, Present and Future. PME 1976-2006*. (205–235). Ed. Sense Publishers.

Schlöglmann, W. (2005). Affect and Cognition - Two Poles of a Learning Process. In: C. Bergsten & B. Grevholm (Eds.), Conceptions of Mathematics. *Proceedings of Norma 01*. (pp. 215- 222). Svensk Förening för Matematikdidaktisk Forskning, Linköping.

Schlöglmann,W. (2002). Affect and mathematics learning, In A.D. Cockburn and E. Nardi (eds.), Proceedings of the 26th PME, (Vol. 3, pp. 185–192.). Norwich, UK.

MATEMÁTICAS Y DOMINIO AFECTIVO

Mathematics and affective domain

Marbán Prieto, J.M.[a]

[a]Universidad de Valladolid

La preocupación por el dominio afectivo en educación matemática ha aumentado significativamente desde la aparición de los primeros trabajos que dotaron de rigor científico al estudio de esta cuestión. Un ejemplo de tales aportaciones, en cierto modo seminal, lo encontramos en los trabajos de McLeod de finales de la década de los ochenta quien presenta el dominio afectivo como un constructo en forma de amalgama compleja de diversos subdominios claramente diferenciados de aquellos tradicionalmente atendidos por la investigación en el campo de la educación matemática y vinculados exclusivamente a características puramente cognitivas. Algunos de los aspectos que han ido apareciendo desde entonces como integrantes de este constructo son aquellos que dan cuenta de las actitudes hacia las matemáticas, de las actitudes hacia la docencia de las matemáticas, de las creencias sobre la naturaleza de las matemáticas, sobre cómo enseñar matemáticas o sobre cómo se aprende matemáticas, del autoconcepto matemático, de la ansiedad hacia las matemáticas y de la percepción de dificultad o de utilidad de las matemáticas, entre otros.

En relación con las actitudes hacia las matemáticas, uno de los componentes básicos de dicho dominio afectivo, se ha comprobado su influencia sobre el rendimiento matemático (Gunderson, Ramirez, Levine y Beilock, 2012; Sakiz, Pape y Hoy, 2012). Asimismo, se observa una fuerte relación entre las actitudes hacia las matemáticas y la ansiedad (Akin y Kurbanoglu, 2011; Bursal y Paznokas, 2006; Klinger, 2011). Trabajos en esta línea concluyen que los estudiantes con mejores actitudes hacia las matemáticas poseen un mejor autoconcepto matemático (Hidalgo, Maroto y Palacios, 2005), una mayor confianza en su capacidad para aprender matemáticas (Khezri, Lavasania, Malahmadia y Amania, 2010) y muestran conductas de acercamiento a esta materia (Jameson, 2013).

En otros trabajos se ha destacado la influencia negativa de la ansiedad matemática sobre las actitudes hacia las matemáticas en general y a su docencia en particular (Bursal y Paznokas, 2006; Gresham, 2007; Klinger, 2011; Palacios, Arias y Arias, 2014). En este sentido, los futuros maestros con altos niveles de ansiedad tenderían a confiar menos en sus capacidades para la docencia de las matemáticas siendo estos bajos niveles de competencia percibida los que determinarían actitudes negativas hacia su docencia (Çatlıoğlu, Gürbüz y Birgin, 2014). Por otra parte, la ansiedad actuaría como factor negativo sobre las actitudes a través de su influencia sobre el rendimiento (Cavanagh y Sparrow, 2015; Palacios, Hidalgo, Maroto y Ortega, 2013).

Las actitudes hacia las matemáticas estarían igualmente relacionadas con el autoconcepto matemático (Bates, Latham y Kim, 2011). Concretamente, aquellos estudiantes con buenos autoconceptos matemáticos puntuarían igualmente alto en actitudes hacia su docencia y se percibirían competentes para enseñar matemáticas. Como cabe suponer, el autoconcepto matemático también correlaciona negativamente con la ansiedad matemática (Lavasani, Hejazi y Varzaneh, 2011). Dado que se han obtenido correlaciones significativas del autoconcepto con el rendimiento matemático (Chiu y Klassen, 2010; Khezri et al., 2010), cabe suponer que, a través de esta relación, se podría explicar la influencia que el autoconcepto tiene en las actitudes hacia las matemáticas.

Marbán Prieto, J.M. (2016). Matemáticas y Dominio Afectivo. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 59-64). Málaga: SEIEM.

En la escala de Fennema y Sherman (1976) ya se señalaba la percepción de la utilidad de las matemáticas como uno de los componentes principales de las actitudes hacia las matemáticas. Sin embargo, los trabajos sobre la percepción de utilidad de las matemáticas son escasos. Khezri et al. (2010) afirmaron que los estudiantes con buen autoconcepto matemático consideran a las matemáticas útiles y de gran valor, siendo los alumnos con más altas percepciones de utilidad los que tendrían deseos de estudiar matemáticas y, por ello, mejores actitudes hacia las matemáticas y su enseñanza. Blanco, Caballero, Piedehierro, Guerrero y Gómez (2010) obtienen que los futuros maestros consideran útiles las matemáticas tanto para la vida como para comprender mejor otras disciplinas y entienden que la formación en Didáctica de la Matemática les ha aportado nuevas formas de abordar problemas matemáticos. Kim y Hodges (2012) encuentran que los estudiantes que presentan un mayor gusto por el estudio matemático tienden a estar más motivados para la realización de tareas. Así mismo, hallan correlaciones elevadas y negativas entre gusto y aburrimiento, así como entre gusto y enfado-desesperación ante las matemáticas. Nortes y Nortes (2014) encuentran un nivel bajo de agrado hacia las matemáticas en los docentes en formación, siendo, sin embargo, elevado el nivel de percepción de utilidad.

En otro orden de cosas, la influencia del dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas ha sido también objeto amplio de estudio (véase, por ejemplo, Gómez-Chacón, I. Mª, 2000b). En particular, aunque es fácil observar correlación entre actitudes hacia las matemáticas y rendimiento en estudiantes no universitarios, esta relación parece más difusa y no tan clara entre docentes en formación. En este sentido, Southwell, White y Perry (2006) y White, Perry, Way y Southwell (2006) no encuentran relación significativa entre el rendimiento académico, las actitudes hacia las matemáticas y el autoconcepto matemático. Señalan además que, en estos niveles formativos superiores, las actitudes negativas hacia las matemáticas no conllevan necesariamente bajas expectativas de rendimiento en matemáticas.

En este campo de la formación inicial del profesorado cabe resaltar como especialmente relevantes las aportaciones que han relacionado la forma en la que se aprendió matemáticas y las actitudes hacia esta materia (Cardetti y Truxaw, 2014; Dogan, 2012). Son reseñables además los intentos de llevar al aula experiencias novedosas en la enseñanza de las matemáticas y el cambio de actitudes. An, Ma y Caparro (2011) obtienen un cambio positivo en las actitudes hacia las matemáticas al integrar la música en su docencia; Alpaslan, Mine y Cigdem (2014) al incidir en el estudio de su historia; Harkness, D’Ambrosio y Morrone (2007) al realizar modificaciones en el método guiado por las teorías constructivistas; *Daher y Baya'a (2014) y* Ersoy y Akbulut (2014) al incluir como estrategia didáctica el uso de las Nuevas Tecnologías. En este mismo campo de la formación inicial y el cambio de actitudes, sabemos de la importancia que tiene el estudio de la didáctica de las matemáticas. En este sentido, Burton (2009) concluye que, al finalizar el periodo de formación en este campo, los alumnos manifestaron tener actitudes hacia las matemáticas más positivas y más confianza en sus habilidades matemáticas.

Por último, cabe señalar que las actitudes hacia las matemáticas y las actitudes hacia la docencia de las matemáticas no siempre van en la misma dirección. En este sentido, Young-Loveridge (2010) encuentra que los docentes en formación poseen mejores actitudes hacia la docencia de las matemáticas que hacia asignaturas de matemáticas. Incluso un porcentaje pequeño de estos estudiantes muestran actitudes negativas hacia las matemáticas pero positivas hacia su enseñanza, resultados que han ratificado diferentes trabajos (véase revisión de Blanco et al. (2010)). Maroto, Hidalgo, Ortega y Palacios (2013) concluyen que, pese a las reticencias de los maestros en formación a la docencia en matemáticas, presentan por término medio actitudes positivas hacia la didáctica de esta disciplina; es decir, se inclinan más por las cuestiones pedagógicas y educativas que por el dominio de la materia.

Estos resultados sugieren que, aunque las actitudes hacia las matemáticas pudieran estar relacionadas con la actitud hacia su docencia se desconoce, de existir, la intensidad de tal relación así como la naturaleza de la misma y los factores que pudieran explicarla.

El objetivo principal de este seminario es el de poner en primera línea de debate en el seno de la SEIEM tres de las cuestiones clave vinculadas a la investigación en el terreno del dominio afectivo: el problema de la medida y, por extensión, del diagnóstico, las interacciones entre afecto y cognición y, por supuesto, la intervención en el aula en aras de una mejora del dominio afectivo. Con este objetivo en mente se presentan tres conferencias que, a mi juicio, no sólo nos sitúan de manera excelente ante cada una de las tres problemáticas mencionadas sino que resultan estimulantes y muy actuales en cuanto a las propuestas que plantean.

La primera de ellas, a cargo del Dr. Andrés Palacios Picos, centra su atención en los modelos de medida de los dominios y subdominios que conforman el amplio y complejo constructo del dominio afectivo. Los modelos son presentados bajo el paraguas de las distintas teorías que los sustentan, como son la Teoría Clásica de la Medida (TCM) o la Teoría de Respuesta al Ítem (TRI), la primera focalizando su atención en los instrumentos de medida y centrando sus esfuerzos en torno a las propiedades psicométricas -validez y fiabilidad- de los mismos, mientras que la segunda dirige la mirada hacia planteamientos en los cuales las mediciones no dependan del instrumento de medida en el sentido de ser invariantes con respecto a las escalas empleadas. Tras una sintética y clara descripción de ambas teorías, remarcando similitudes y diferencias, el documento nos introduce en el campo de las técnicas multivariantes que recientemente se están imponiendo en el ámbito de la construcción y validación de instrumentos de medida, los modelos de ecuaciones estructurales (SEM), para a continuación abordar el problema de la medida del dominio afectivo en matemáticas mediante un breve recorrido por los instrumentos más representativos, desde las diferentes teorías y modelos presentados, en relación con la medida de las actitudes hacia las matemáticas y la ansiedad hacia las matemáticas.

La conferencia de la Dra. Inés Mª Gómez Chacón plantea una revisión profunda y crítica de los estudios empíricos y teóricos que han sido elaborados en relación con la interacción entre afecto y cognición. En esta ocasión el foco se fija en la evaluación de la mencionada interacción desde un análisis metodológico vinculado estrechamente al concepto de estructura cognitiva-afectiva, lo que permite no sólo identificar sistemas de referencia subyacentes a este fenómeno sino también categorías y modelos representativos de la relación en estudio en diferentes contextos. La apuesta de esta conferencia es ciertamente interesante en tanto en cuanto no sólo aborda una cuestión nuclear de la investigación en el campo del dominio afectivo en educación-matemática sino que también, al mismo tiempo, apuesta por situaciones en las que investigación e intervención puedan encontrar sinergias positivas. Junto con la caracterización y el modelado de las categorías de afecto local y global así como la introducción y descripción de la noción de meta-afecto o meta-emoción se establecen y ejemplifican rutas afectivo-cognitivas que permiten observar la realidad afectivo-cognitiva a nivel microscópico mediante estudio de casos, un camino que lleva no sólo a la observación de patrones y regularidades según perfiles de estudiante sino también, o sobre todo, a reconocer los momentos de ruptura que llevan a una persona a viajar desde un estado de flujo y disfrute haciendo matemáticas, resolviendo problemas, hasta un estado alternativo en el que dominan la ansiedad y la frustración.

La tercera y última de las conferencias, a cargo de la Dra. Ana Caballero Carrasco, en coautoría con la Dra. Cárdenas y la Dra. Gordillo, aborda el dominio afectivo en el campo de la resolución de problemas y en el contexto de la formación inicial de docentes. El documento comienza ofreciendo una amplia y selecta panorámica de diversas propuestas de intervención orientadas a la mejora del dominio afectivo en el aula de matemáticas para, a continuación, entrar de lleno en la descripción de un programa de control emocional, en palabras de las propias autoras, al que denominan Modelo Integrado de Resolución de Problemas Matemáticos (MIRPM), modelo enmarcado en una perspectiva integradora de enseñanza-aprendizaje. El modelo busca un desarrollo competencial por parte del estudiante que incluye cuestiones relativas a la consciencia, a la auto regulación y a la autonomía emocional, todo ello al amparo de un sólido marco teórico y partiendo de manera ecléctica de modelos de referencia, algunos de ellos descritos en la primera parte del texto. La propuesta planteada por las autoras es descrita en toda su amplitud partiendo de los objetivos perseguidos, analizando su secuenciación, sus aspectos metodológicos, el diseño muestral, los instrumentos empleados, los resultados obtenidos y las líneas de reflexión y mejora.

En suma, creo sinceramente que la estructura de este seminario muestra equilibrios razonables entre teoría y práctica, entre diagnóstico e intervención y entre contextos locales y globales, lo que espero sirva no solo para facilitar un primer acercamiento a quien lo necesite a la realidad de la problemática y la investigación en educación matemática en el terreno del dominio afectivo, sino también para impulsar el debate y la cooperación entre quienes comparten inquietudes en este campo.

Agradezco sinceramente a la Junta Directiva de la SEIEM y al Comité Científico de este Simposio su invitación a organizar este seminario así como su apuesta por el tema elegido. Quiero agradecer también a Inés, Andrés y Ana que aceptaran el encargo que les propuse y que lo hayan llevado a cabo no sólo en plazo sino también con dedicación y meticulosidad, haciendo además muy fácil mi trabajo como coordinador. Ha sido un placer trabajar a su lado y ser el primero en leer sus contribuciones.

Referencias

Aiken, L. R. (1974). Two Scales of Attitude toward Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 2(5), 67-71. DOI:10.2307/748616

Akin, A. y Kurbanoglu, N. (2011). The relationships between math anxiety, math attitude and self-efficacy: A structural equation model. Studia Psychologica, 53(3), 263-273.

Alpaslan, M., Mine, I . y Cigdem, H. (2014). Pre-service Mathematics Teachers' Knowledge of History of Mathematics and Their Attitudes and Beliefs Towards Using History of Mathematics in Mathematics Education, Science and Education. 23(1), 159-183

Bates, A. B., Latham, N. y Kim, J. (2011). Linking Preservice Teachers' Mathematics Self-Efficacy and Mathematics Teaching Efficacy to Their Mathematical Performance. School Science and Mathematics, 111(7), 325–333. doi: 10.1111/j.1949-8594.2011.00095.x

Blanco, L., Caballero, A., Piedehierro, A., Guerrero, E. y Gómez, R. (2010). El dominio afectivo en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas. Una revisión de investigaciones locales. Campo Abierto. 19 (1), 13-31.

Bursal, M. y Paznokas, L. (2006). Mathematics anxiety and preservice elementary teachers’ confidence to teach mathematics and science. School Science and Mathematics, 106, 173–179. doi: 10.1111/j.1949-8594.2006.tb18073.x

Burton, M. (2009). Exploring the changing perception of mathematics among elementary teacher candidates through drawings. En Swars, S. L., Stinson, D. W., y Lemons—Smith, S. (Eds.). (2009). Proceedings of the 31St annual meeting Of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (363-370). Atlanta, GA: Georgia State University.

Cardetti. F. y Truxaw. M.P. (2014). Toward Improving the Mathematics Preparation of Elementary Preservice Teachers. School Science and Mathematics, 114(1), 1-9. doi: 10.1111/ssm.12047.

Çatlıoğlu, H., Gürbüz, R. y Birgin, O. (2014). Do pre-service elementary school teachers still have mathematics anxiety? Some factors and correlates. Bolema: Boletim de Educação Matemática, 28(48), 110-127. DOI: 10.1590/1980-4415v28n48a06.

Cavanagh, R. and Sparrow, L. Mathematics Anxiety: Scaffolding a new construct model. Mathematics: Traditional and [New] Practices. In Proceedings of the Annual Conference of Mathematics Education Research Group of Australasia, Alice Springs. http://www.merga.net.au/documents/RP_CAVANAGH&SPARROW_MERGA34-AAMT.pdf

Chiu, M.M. y Klassen, R. M (2010). Relations of mathematics self-concept and its calibration with mathematics achievement: Cultural differences among fifteen-year-olds in 34 countries. Learning and Instruction. 20, 2-17. doi =*10.1016/j.learninstruc.2008.11.002*

Daher, W.M. y Baya'a, N. (2014). In-service and Pre-service Middle School Mathematics Teachers' Attitudes and Decisions Regarding Teaching Mathematics Using Mobile Phones, International Journal of Interactive Mobile Technologies. 8(4), 4-13.

Dutton, W.H. y Adams, L.J. (1961). Arithmetic attitude scale in Arithmetic for teachers. Englewood Cliffs. NJ: PrenticeHall.

Ersoy. M. y Akbulut. Y. (2014). Cognitive and affective implications of persuasive technology use on mathematics instruction.Computers and Education, 75, 253–262. doi:10.1016/j.compedu.2014.03.009

Fennema, E., y Sherman, J. A. (1976). Fennema-Sherman Mathematics Attitudes Scales: Instruments designed to measure attitudes toward the learning of mathematics by females and males. Journal for Research in Mathematics Education, 7(5), 324-326. DOI: 10.2307/748467

Gómez-Chacón, I. Mª (2000b). Affective influences in the knowledge of mathematics, Educational Studies in Mathematics, 43: 149-168.

Gresham, G (2007). A study of mathematics anxiety in pre-service teachers. Early Child Education Journal, 35, 181–188. doi.org/10.1007/s10643-007-0174-7

Gunderson, E.A., Ramirez, G., Levine, SC. y Beilock, SL. (2012). The Role of Parents and Teachers in the Development of Gender-Related Math, Sex Roles. 66 (3-4), 153-166. doi: 10.1007/s11199-011-9996-2

Harkness, S., D’Ambrosio, B. y Morrone A. (2007). Preservice elementary teachers’ voices describe how their teacher motivated them to do mathematics. Educational Studies in Mathematics. 65, 235–254. DOI: 10.1007/s10649-006-9045-1

Hidalgo, S., Maroto, A., y Palacios, A. (2005). El perfil emocional matemático como predictor de rechazo escolar: relación con las destrezas y los conocimientos desde una perspectiva evolutiva. Revista de Educación Matemática, 17(2), 89-116

Jameson, M. M. (2013). The Development and Validation of the Children's Anxiety in Math Scale. Journal of Psychoeducational Assessment, 31(4), 391–395. doi:10.1177/0734282912470131Kim, C. y Hodges, C.B. (2012). Effects of an emotion control treatment on academic emotions, motivation and achievement in an online mathematics course. Instructional Science, 40, 173-192. doi:10.1007/s11251-011-9165-6

Khezri, H. , Lavasania, M. G., Malahmadia, E. y Amania, J. (2010). The role of self- efficacy, task value, and achievement goals in predicting learning approaches and mathematics achievement. Procedia Social and Behavioral Sciences, 5, 942–947. doi: 10.1016/j.sbspro.2010.07.214

Klinger, C. (2011). "Conectivism" A new paradigm for the mathematics anxiety challenge? Adults Learning Mathematics: An International Journal, 6 (1), 7-19.

Lavasani, M.G., Hejazi, E. y Varzaneh, J.Y. (2011). Predicting model of math anxiety: the role of classroom goal structure, the self-regulation and math self-efficacy. Procedia Social and Behavioral Sciences, 15, 557–562.

McGinnis, J. R., Kramer, S., Shama, G., Graeber, A., Parker, C. y Watanabe, T (2002). Undergraduates' attitudes and beliefs of subject matter and pedagogy measured periodically in a reform-based mathematics and science teacher preparation program. Journal of Research in Science Teaching. 39(8), 713-737.

McLeod, D. B., & Adams, V. M. (1989). *Affect and mathematical problem solving: A new perspectiv*e. Rotterdam, NL: Springer-Verlag Publishing.

Nisbet, S. (1991). A new instrument to measure pre-service primary teachers' attitudes to teaching mathematics. Mathematics Education Research Journal. 3(2), 34-56. DOI: 10.1007/BF03217226

Nortes, R., Nortes, A. (2014). Ansiedad hacia las matemáticas, agrado y utilidad en futuros maestros. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVIII (pp. 485-492).Salamanca: SEIEM.

Palacios, A., Arias, V. y Arias, B. (2014). Las actitudes hacia las matemáticas: construcción y validación de un instrumento para su medida. Revista de Psicodidáctica, 19(1), 67-91. doi: 10.1387/RevPsicodidact.8961

Pietsch, J., Walker, R., y Chapman, E. (2003). The relationship among self-concept, selfefficacy and performance in mathematics during secondary school. Journal of Educational Psychology, 95(3), 589–603.

Richardson, F.C. y Suinn, R.M. (1972). The mathematics anxiety rating scale: Psychometric data. Journal of Counselling Psychology. 19, 551–554. http://dx.doi.org/10.1037/0022-0663.70.4.589

Sakiz, G., Pape, S.J. y Hoy, A.W. (2012). Does perceived teacher affective support matter for middle school students in mathematics class rooms? Journal of School Psychology, 50, 235–255. doi: 10.1016/j.jsp.2011.10.005

Southwell, B., White, A. L., Way, J. y Perry, B. (2006). Attitudes versus achievement in pre-service mathematics teacher education. In Refereed Proceedings, Annual Conference of the Australian Association for Research in Education. Sydney: AARE.

Young-Loveridge, J. (2010). Two Decades of Mathematics Education Reform in New Zealand: What Impact on the Attitudes of Teacher Education Students? Mathematics Education Research Group of Australasia, 33, 3-7.

White. A.L., Perry, B., Way, J. y Sothwell, B (2006). Mathematical Attitudes, Beliefs and Achievement in Primary Pre-service Mathematics Teacher Education. Mathematics Teacher Education and Development, 7, 33-52.

.

ESTRATEGIAS Y TÉCNICAS CUANTITATIVAS PARA EL ESTUDIO DEL DOMINIO AFECTIVO EN MATEMÁTICAS

Strategies and quantitative techniques for the study of the affective domain in mathematics

Palacios-Picos, A.

Departamento de Psicología de la Universidad de Valladolid, Facultad de Educación de Segovia

Resumen

La medida del dominio afectivo matemático supone un aspecto de vital importancia en la investigación matemática. No obstante, no ha tenido el suficiente desarrollo en la formación de los futuros investigadores en este campo de las matemáticas. Nuestro objetivo en las líneas que siguen es presentar los diferentes modelos de medida y las teorías que los sustentan comenzando con la Teoría Clásica de Medida (TCM). Esta teoría está siendo sustituida por nuevos modelos como la Teoría de Respuesta al Ítem (TRI) o por aquellos derivados de las ecuaciones estructurales o modelos SEM, que se presentan en sus aspectos fundamentales recalcando sus principios, sus técnicas y sus aportaciones. Para finalizar, se resumen las propuestas de medida más relevantes relacionadas con las actitudes hacia las matemáticas y la ansiedad matemática con especial interés en las basadas en estas teorías de la TRI o los modelos de ecuaciones estructurales (SEM).

Palabras clave: *Modelos de ecuaciones estructurales, Teoría de Respuesta al Ítem, medida, dominio afectivo matemático, actitudes hacia las matemáticas, ansiedad matemática.*

Abstract

The mathematical measure of affective domain is a vital aspect in mathematical research. However, it has been a field of study that has not been sufficiently developed nor has taken the place it should in the training of future researchers. Our main goal is to present the different measurement models and theories that support beginning with the Classical Test Theory (CTT). This theory is being overtaken by new models like the Item Response Theory (IRT) or those derived from or Structural Equation Models (SEM). They are presented in summarized through its principles, techniques and contributions. Finally, summarizes focused on the two most significant aspects of mathematical affective domain such as attitudes towards mathematics and mathematics anxiety proposals as most important in recent years with special emphasis on those based on these latest theories IRT or Structural Equation Modeling.

Keywords: *Structural equation models, item response theory, measurement, mathematical affective domain, attitudes towards mathematics, math anxiety.*

Palacios-Picos, A. (2016). Estrategias y técnicas cuantitativas para el estudio del dominio afectivo en matemáticas. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 65-81). Málaga: SEIEM.

MODELOS CUANTITATIVOS DE MEDIDA EN CIENCIAS SOCIALES

Teoría clásica de la medida

Los trabajos pioneros de Spearman de principios de siglo pasado (Spearman 1904,1907, 1913) supusieron el inicio de lo que hoy conocemos como la Teoría Clásica de los instrumentos de medida. Venían a solucionar un problema de los test psicológicos que por entonces comenzaron a desarrollarse con no poco éxito: determinar el grado de exactitud de sus medidas y asegurar el mayor grado de precisión posible. La idea de Spearman no pudo ser más sencilla ni más cercana al sentido común: la puntuación de un sujeto (su puntuación empírica) está formada por la puntuación verdadera y el error que cometemos en esta medida.

Dado que no podemos conocer directamente ambos componentes, es necesaria su estimación a partir de un conjunto de supuestos; señalamos los más importantes. Uno de ellos define la puntuación verdadera como la esperanza matemática de las posibles puntuaciones empíricas. Es decir, pasemos infinitas veces el mismo test, al mismo sujeto, calculemos su valor medio y habremos obtenido la puntuación verdadera. Un segundo supuesto mantiene que no existe relación entre el tamaño del error que cometemos y la cuantía de la puntuación verdadera; es decir, puede haber tanto puntuaciones verdaderas muy elevadas y errores muy pequeños como puntuaciones muy pequeñas con errores elevados.

Como señala Muñiz (2010), estos supuestos junto con el modelo lineal que se deriva de ellos y la definición de los test paralelos constituyen el núcleo principal de la teoría clásica de medida. La importancia del instrumento frente a otros elementos de la medida determinó el interés de los investigadores por el cálculo de índices de consistencia de las pruebas así como por la importancia de los grupos normativos. Desde esta perspectiva clásica se considera un instrumento fiable si existe concordancia entre las puntuaciones de un mismo sujeto en diferentes momentos. Se suele recurrir al método del test-retest como procedimiento de cálculo en el que los mismos sujetos son medidos en dos o más ocasiones diferentes, siendo la correlación de Pearson la cuantificación de su fiabilidad. No obstante, ante la dificultad que plantea este cálculo, se ha tendido a sustituir el cálculo de la fiabilidad como el grado de repetición de una medida por la homogeneidad de las preguntas que componen la escala. Para el cálculo de la fiabilidad en este segundo caso, se recurre a técnicas como de las dos mitades o a la correlación de los ítems entre sí, siendo en este último caso el alfa de Cronbach el estadístico más utilizado (con todos los inconvenientes que conlleva).

Aunque la validez de la medida ocupó un espacio menos relevante que el concepto de fiabilidad dentro de esta Teoría Clásica, no deja de ser una característica buscada por cualquier investigador. La validez de una escala está determinada por el grado en el que se mide realmente lo que se dice medir. Tras la simpleza de esta definición, se esconde una dificultad, en muchos casos insalvable, pues no siempre es fácil definir nuestro objeto de estudio. Para operativizar esta característica se utilizan diferentes medidas como son la validez de contenido, la validez de criterio o la validez de constructo (Tabla 1).

Tabla 1.- Diferentes tipos de validez

Validez de contenido	Grado en el que el instrumento de medida presenta una muestra adecuada de ítem referidos a los contenidos que se pretende medir. Se basa fundamentalmente en el juicio de expertos que definen el grado en el que las preguntas representan los contenidos a evaluar. Aunque no suelen utilizarse métodos cuantitativos para su cuantificación, existes índices para esta tarea como el Índice de Validez de Contenidos de Lawshe (1975)
Validez de criterio	Se define como la concomitancia que muestra la escala con variables ajenas a la prueba (criterio), que tomamos como referencia de validez. Generalmente, dicho criterio ha sido testado previamente en cuanto su validez con respecto a lo que queremos medir.
Validez de constructo	Dado que la mayor parte de nuestros instrumentos de medida se refieren a aspectos que carecen de realidad (constructos), para establecer su validez se deben evaluar las predicciones e hipótesis que se derivan del mismo y de la teoría que lo sustenta. En este sentido, la validez de constructo respondería a la pregunta ¿la medida se ajusta a la teoría sobre la que se construyó la escala y a sus posibles predicciones? Como concepto general de validez, es

	el más complejo de calcular y englobaría a algunos de los otros tipos.	

La fiabilidad y la validez dependen, en gran medida, de la correcta elección de los ítems que forman la escala, lo que obliga a un análisis previo de estos elementos. Uno de los objetivos fundamentales es conseguir preguntas relevantes, claras y discriminantes evitando, además, ciertos sesgos de respuestas (sobre todo en las escalas de actitudes), entre los que señalamos la *aquiescencia* y la *deseabilidad social*. En el primer caso, se trata de disminuir o eliminar la tendencia a mostrar acuerdo con cualquier pregunta o incluso a puntuar las opciones intermedias de las escalas (ausencia de compromiso con lo afirmado). Este sesgo se relaciona en muchos casos con la falta de claridad de las preguntas o con su mala redacción. El concepto de *deseabilidad social* hace referencia a la tendencia a contestar no en función de lo que uno piensa sino sobre lo que se considera más aceptable socialmente.

Teoría de Respuesta al Ítem

En las últimas décadas hemos asistido a un cambio en el modo de abordar el estudio psicométrico de los instrumentos de medición en todas las ciencias sociales. Estos nuevos procedimientos no conllevan incompatibilidad sino coexistencia con los planteamientos de la Teoría Clásica de medida, permitiendo mejorar la consistencia de las escalas de medida (Tabla 2).

Tabla 2. Diferencias entre la Teoría Clásica de los Test y la Teoría de Respuesta al Ítem (Muñiz, 2010)

Aspectos	Teoría Clásica	Teoría de Respuesta al Ítem
Modelo	Líneal	No lineal
Asunciones	Débiles (fáciles de cumplir por los datos	Fuertes (difíciles de cumplir por los datos)
Invarianza de las mediciones	No	Si
Invarianza de las propiedades del test	No	Si
Escala de las puntuaciones	Entre 0 y la puntuación máxima en el test	Entre -∞ y +∞
Énfasis	Test	Ítem
Relación ítem-test	Sin especificar	Curva característica del ítem
Descripción de los ítems	Índices de dificultad y discriminación	Parámetros a (dificultad), b (discriminación) y c (adivinación)
Errores de medida	Erros típico de la medida común para toda la muestra	Función de información (varía según el nivel de aptitud o habilidad)
Tamaño muestral	Puede funcionar bien con muestras entre 200 y 500 sujetos aproximadamente	Se recomienda más de 500 sujetos, aunque depende del modelo.

De entre estos nuevos procedimientos, es seguramente la Teoría de Respuesta al Ítem (TRI) la de mayor calado y la que posee mayor reconocimiento (Martínez-Arias, 1995). Como en otros muchos casos, surgen como intento de solución de los problemas de la Teoría Clásica de la medida para quien la puntuación final de un instrumento es el resultado de sumar la puntuación real que el individuo tendría en la prueba más el error que cometemos. Como el error de medida se distribuye de manera aleatoria, con un valor medio de cero, cabe suponer que la puntuación observada coincidirá con la verdadera tras pasar la prueba al mismo sujeto infinitas veces y calcular la media final de todas las tomas. Para Attorresi, Lozzia, Abal, Galibert y Aguerri (2009) este planteamiento conlleva un conjunto de presunciones erróneas. La primera es suponer que el resultado al medir una variable es inherente al cuestionario; esto es tanto como decir que el peso de un objeto depende de la balanza que se utilice para pesar. La segunda es asumir que, tanto el cuestionario de medida como las propiedades de las preguntas, están determinadas por las características de los sujetos a los que hemos pasado la escala. Como sugieren Attorresi et al. (2009) sería como pensar que un kilo de acero puede pesar distinto a un kilo de plumas.

La TRI, en contraposición, es un intento de realizar mediciones que no dependan del instrumento de medida; es decir, que sean invariantes con respecto o de las escalas empleadas (Muñiz, 1997). Además, se trataría de disponer de instrumentos de medida cuyas propiedades finales no dependan del grupo normativo (que sea invariante respecto a las personas). Si dos sujetos presentan el mismo nivel de desempeño en un rasgo, tendrán la misma probabilidad de dar la misma respuesta independientemente de la población de referencia. Aspectos ambos que parecen hacer innecesario disponer de un grupo de referencia, evitando el uso de grupos normativos.

No obstante, las fortalezas que manifiesta esta teoría se fundamentan en un conjunto de supuestos estrictos a los que gran parte de los datos empíricos difícilmente se ajustan. Como señalan Hambleton, Swaminathan y Rogers (1991), el resultado final de un sujeto dependerá de la fiabilidad de la escala, que determinará la probabilidad de que el sujeto acierte un ítem determinado. Es decir, cuanto mejor sea la actitud hacia las matemáticas de un estudiante, mayor probabilidad tendrá de puntuar alto en una pregunta relacionada con esta actitud. Esto explica el porqué del nombre de la teoría pues evalúa el ítem y no la prueba en su totalidad. Esta relación entre la habilidad, el conocimiento o la actitud y la probabilidad de acertar el ítem queda plasmada en el concepto central de esta teoría como es la *Curva Característica del Ítem* (Figura 1).

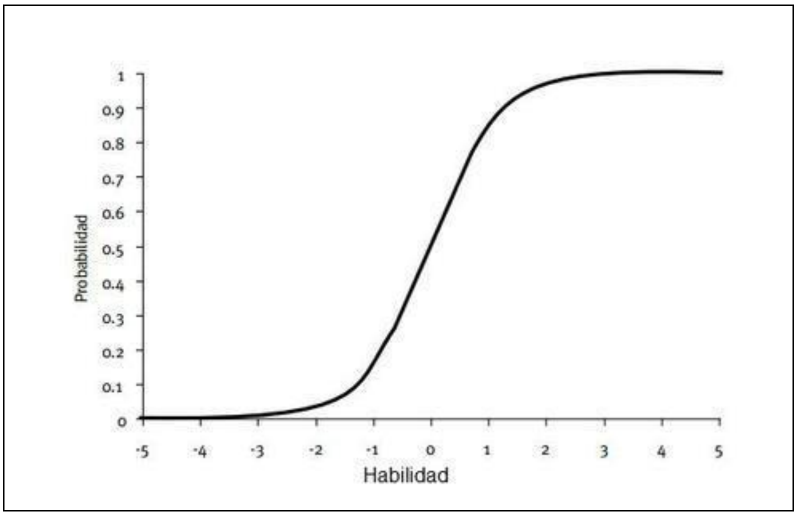


Figura 1.- Curva Característica del Ítem

Esta curva vincula la probabilidad de dar una respuesta (un ítem de la escala de actitudes hacia las matemáticas, pongamos por caso), con el nivel del rasgo latente que se está midiendo (la verdadera actitud del entrevistado). Concretamente, cuanto mejores sean las actitudes hacia las matemáticas, mayor probabilidad de puntuar alto en el ítem. Sin embargo, como señala Hamblenton et al. (1991) este supuesto se fundamenta en la unidimensionalidad de lo que se pretende medir. Es una única *habilidad* (nivel de rasgo) la que determina el resultado del sujeto. Sin embargo, esto no es siempre posible pues, en ciencias sociales, la mayor parte de los constructos dependen de varios factores. No obstante, se han desarrollado modelos no basados en la existencia de un único factor (multidimensionales), pero como señala Attorresi et al. (2009) estos desarrollos son relativamente incipientes y su puesta en práctica resultan costosos y complejos.

Muy relacionado con el supuesto anterior es la necesidad de que la medida de un ítem debe ser independiente de lo que mida otro de la misma escala (*independencia local*). Esto supone simplemente que el desempeño de un ítem debe ser exclusivamente la habilidad, el conocimiento o la opinión del encuestado. Como hemos indicado, el supuesto de *unidimensionalidad* y la *independencia local* son aspecto complementarios, dado que, sí dos ítem no son independientes, debemos asumir que otro factor, que no es el que se pretende medir, está determinando el nivel de desempeño, violándose el supuesto de unidimensionalidad (Lord y Novick, 1968).

Modelos de medida relacionados con las ecuaciones estructurales

Actualmente asistimos al relanzamiento de un novedoso modo de construir y validar instrumentos de medida basado en los modelos de ecuaciones estructurales (SEM como se les conoce por su acrónimo en inglés). Se trata de técnicas estadísticas multivariantes que combinan la regresión múltiple y el análisis factorial al servicio de la validación de teorías, su cuantificación y la dirección de la relaciones de causalidad entre variables. Permite pues, contrastar la validez de una teoría a partir de los datos obtenidos mediante diferentes instrumentos, a los que se evalúa en sus características psicométricas. Dos son las principales ventajas que se señalan de los modelos SEM: la posibilidad de trabajar con variables latentes no medibles directamente y poder considerar los errores de medida como parte del modelo.

En estos modelos se trabaja en un doble sentido: evaluando el modelo de medida y comprobando el modelo estructural o predictivo. Este último establece las relaciones entre variables latentes y el resto de relaciones que no forman parte del modelo de medida. Su objetivo final es obtener los pesos de las relaciones entre variables (la fuerza de sus relaciones causales) y la naturaleza de la relación (directa o inversa).

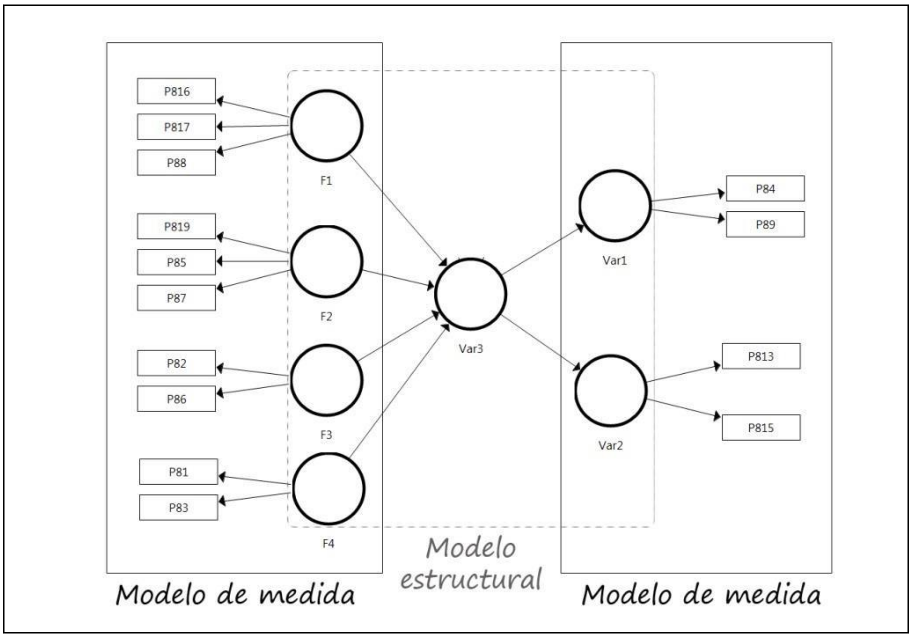


Figura 2.- Modelo estructural y modelo de medida de un análisis SEM

En el modelo de medida se especifican las relaciones de los indicadores y sus factores latentes asociados. Dado que, como hemos indicado, las variables latentes no pueden medirse directamente, debemos suponer que se manifiestan a través de sus indicadores. La bondad de la medición y, por tanto, su validez psicométrica, dependerá de la relación real que pueda existir entre los indicadores observables (las respuestas a nuestros ítems) y los constructo subyacentes. Si esta relación es débil o incluso inadecuada, la medición será imprecisa o simplemente incorrecta. Resumimos en la Tabla 3 algunos de los indicadores de ajuste más utilizados.

Tabla 3. Indicadores del ajuste de un modelo de medida(análisis SEM)

Indicador	Descripción	Valores admisibles
Nivel de significación de χ^2	Este estadístico permite contrastar la hipótesis nula de que el modelo es correcto.	El valor de p (χ^2) debería ser superior a .05
Razón χ^2 /gl	Permite contrastar la hipótesis nula de que el modelo es correcto en razón de los grados de libertad del modelo.	Debería ser inferior a 2.00
NNFI	Índice de ajuste no normado de Tuker y Lewis (1973)	Debería ser superiores a .95; mejor cuanto más próximo a 1.00
CFI	Índice de ajuste comparado de Bentler (1990)	Debería ser superiores a .95; mejor cuanto más próximo a 1.00
RMSEA	Error cuadrático medio de aproximación	Inferior a .08 (preferiblemente, inferior a .06); el modelo debería rechazarse si RMSEA>.10
SRMR	Valor estandarizado del índice RMSEA obtenido al dividir dicho valor por la desviación típica	Inferior a .08, mejor mientras más próximo a .00
Valores de t	Grado de significación estadística de las relaciones entre las variables intervinientes en el modelo	Los valores absolutos deberían ser superiores a 1.96
Saturaciones	Valor de las cargas de las relaciones del modelo	Superiores a .30

Residuos	Errores del modelo predicho	Distribución normal, simétrica en torno a 0, pocos residuos superiores a |2.00|
Fiabilidad compuesta	Índice de fiabilidad que permite tener en cuenta todos los constructos implicados en la escala, y no un análisis uno a uno como Cronbach	Las fiabilidades compuestas de las variables latentes deberían ser superiores a .60.
Varianza media extractada (VME)	Cantidad de varianza que un constructo obtiene de sus indicadores con relación a la cantidad de varianza debida al error	Las VME de las variables latentes deberían ser superiores a .50
Validez discriminante	La validez discriminante es grado en el que la varianza extractada de cada variable latente es superior al cuadrado de la correlación entre ellas; prueba que los constructos que no deberían tener ninguna relación de hecho, no la tienen.	Prueba de diferencias de χ^2, los intervalos de confianza y la varianza extractada

Hablar de modelos de medida es referirse al Análisis Factorial Confirmatorio (AFC), procedimiento de análisis que se ha convertido en los últimos años en uno de los más usados en la validación de escalas de medida. Se trata de un procedimiento encuadrado dentro de los modelos SEM cuyo principal objetivo es analizar las relaciones entre un conjunto de indicadores observables y una o más variables latentes o factores.

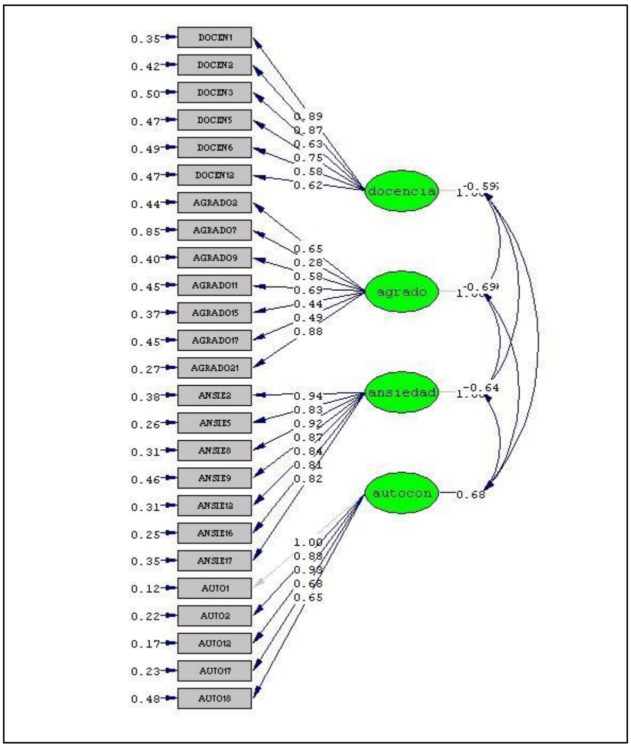


Figura 3.- Modelo de medida de un Análisis Factorial Confirmatorio (AFC)

Aunque se trata de técnicas complementarias al Análisis Factorial Exploratorio (AFE) es bien diferentes al AFC tanto por los objetivos que se persiguen como por los cálculos que se realizan. Como señalan Martínez, Hernández y Hernández (2006), la primera y más notoria diferencia se deduce de su propio nombre dado que en el AFE se trata de explorar la existencia de una no conocida estructura factorial de antemano, mientras que en el AFC se realiza una comprobación de una estructura conocida a priori mediante la formulación de un modelo de medida que se elabora previamente y se comprueba posteriormente. De ello se deriva, además, que en el AFE se desconoce inicialmente el número de factores, cosa que no sucede con el AFC que sabemos cuáles y cuántos de ellos intervienen en el modelo. Aspectos que pueden ser resumidos siguiendo a Hair, Anderson, Tatham y Black (1999) en que el AFE es una técnica multivariante especialmente indicada para el estudio de la relaciones de *interdependencia*, mientras que el AFC se enmarca dentro de los modelos SEM como técnicas multivariantes al servicio del estudio de las relaciones de *dependencia* entre diferentes variables.

Pese al valor que para la investigación tienen estos modelos de medida, el AFC es una técnica de análisis exigente pues son numerosas las condiciones necesarias para su realización (Tabla 4).

Tabla 4.- Condiciones necesarias para realizar una AFC (tomado de Arias, 2008)

Condición	***Observaciones***
1. Nivel de medida	Indicadores en nivel de intervalo o de razón (excepcionalmente, ordinal)
2. Valores por indicador	Los indicadores deberían tener un mínimo de 4 valores.
3. Normalidad y *outliers*	Distribución normal de los datos, control de outliers.
4. Homocedasticidad	Corrección mediante normalización o transformaciones.
5. Datos perdidos	Tratamiento adecuado de los datos perdidos.
6. Tipo de relaciones	Relaciones lineales y aditivas.
7. Multicolinealidad	Ausencia de multicolinealidad
8. Variables relevantes	Inclusión dentro del modelo de todas las variables relevantes.
9. Identificación del modelo	Modelo supraidentificado.
10. Número mínimo de observaciones	Al menos 150 observaciones, o 5 observaciones por cada parámetro a estimar.
11. Indicadores por variable latente	Preferible disponer de más de 2 (lo ideal es disponer de al menos 4 o 5).
12. Número de indicadores	El número máximo de indicadores no debería exceder de 20-30.
13. Varianzas relativas	Ausencia de matrices *ill-scaled*

Para solucionar al menos en parte estas exigencias han surgido nuevos modelos que podríamos denominar *no paramétricos* que mantienen los principios de los modelos SEM. Los modelos basados en covarianzas (CB SEM), como son los que se basan en el algoritmo del programa Lisrel de Jöreskog (1970), están sustentados en un enfoque muy paramétrico de máxima verosimilitud (ML) que plantea muchas restricciones respecto al tamaño de la muestra y las propiedades que deben tener los datos del modelo. Sin embargo, Herman Wold, que fuera director de tesis del propio Jöreskog, consideró que era necesario un sistema menos exigente y más de acuerdo al tipo de datos con los que habitualmente se trabaja en ciencias sociales. Este planteamiento, en palabras de Tenenhaus y Vinzi (2005) contraponía un enfoque que denominó *soft modelling* frente al enfoque *hard modelling* de Jöreskog. Este nuevo planteamiento lo denominó *Partial Least Squares* (PLS). Estos modelos aúnan dos técnicas multivariantes cuales son el análisis de componentes principales y la regresión lineal múltiple (Figura 4).

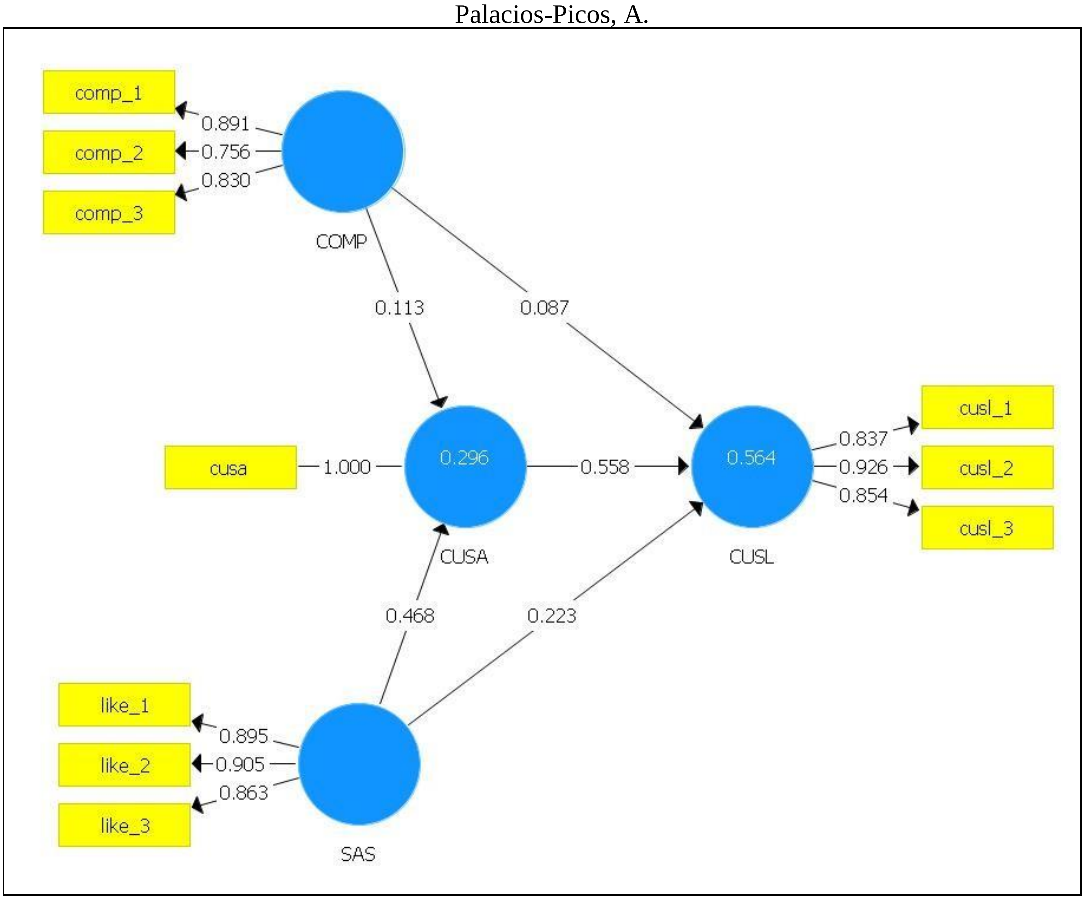


Figura 4.- Modelo de medida y modelo estructural en PLS

Entre sus ventajas cabe señalar la capacidad de identificación del modelo con tamaños de muestras pequeños, con las que, por lo general, se alcanzan niveles altos de potencia estadística, no se necesitan asunciones sobre las distribuciones de los datos, son poco sensibles a la presencia de valores perdidos, admiten variables latentes medidas con uno o varios indicadores, incorporan con facilidad modelos de medida tanto formativos como reflectivos y manejan sin problemas modelos complejos con gran cantidad de relaciones estructurales.

Como el resto de modelos SEM, en los modelos PLS es posible diferenciar la parte relativa a la medida del modelo estructural propiamente dicho. Los modelos de medida posibilitan evaluar la fiabilidad y la validez (Figura 4).

LA MEDIDA DEL DOMINIO AFECTIVO MATEMÁTICO

La medida del dominio afectivo en matemáticas no ha sido indiferente al devenir histórico de los modelos que hemos intentado resumir en el apartado anterior. Así, aunque gran parte de las escalas instrumento siguieron el modelo de las Teorías Clásicas de Medida, se está imponiendo con cada vez más fuerza los estudios que siguen las Teorías de Respuesta al Ítem y, sobre todo, las propuestas basadas en los modelos de ecuaciones estructurales.

En las líneas que siguen, realizamos un breve recorrido por los instrumentos más representativos, desde estas diferentes posturas, en relación a la medida de dos de los tres componentes del dominio afectivo matemático señalados por McLeod (1988, 1992) cuales son las actitudes hacia las matemáticas y la ansiedad hacia las matemáticas.

Se ha señalado sobradamente el importante papel que las *actitudes hacia las matemáticas* tienen en el proceso de enseñanza-aprendizaje y sobre el rendimiento matemático de los alumnos (Miñano y Castejón, 2011; Miranda, 2012; Sakiz, Pape, y Hoy, 2012). Asimismo, es de sobra conocida la influencia negativa que las buenas actitudes hacia las matemáticas tienen sobre la ansiedad (Akin y Kurbanoglu, 2011). Otros estudios han encontrado que los estudiantes con mejores actitudes hacia las matemáticas perciben las matemáticas como más útiles y muestran mayor motivación intrínseca por esta materia (Perry, 2011), poseen autoconceptos matemáticos más elevados (Hidalgo, Maroto, y Palacios, 2005), mayor confianza en su aprendizaje (McLeod, 1992) y muestran conductas de acercamiento a esta materia (Fennema y Sherman, 1976). La importancia del estudio de las actitudes explica el interés de su medida. Para comprender una creencia o un estado emocional, su posible cambio o la correcta predicción de una conducta, necesitamos de medidas válidas y fiables.

No obstante, esta medida plantea importantes problemas pues, por su propia naturaleza, esta medida es siempre indirecta. Las actitudes, lo mismo que las creencias sólo son medibles sobre la base de determinadas inferencias sobre sus componentes: sobre sus acciones explícitas, sus contenidos o sus estados emocionales. Las actitudes son indicadores de conducta, pero no la conducta en sí. En este sentido, se han encontrado discrepancias importantes entre las actitudes y la conducta, siendo el fenómeno que se conoce con el nombre de *deseabilidad social* un importante sesgo que puede explicar dichas discrepancias.

Para evitar o disminuir este sesgo, se han desarrollado técnicas de medida camufladas como alternativa a las escalas directas. En este tipo de medidas indirectas, se utilizan sistemas de enmascaramiento al medir sutilmente los pensamientos y los afectos que se relacionan con el objeto de estudio. Cabe señalar como ejemplos de estos métodos indirectos de medida los registros fisiológicos (electroencefalogramas o electromiografía facial), las pruebas proyectivas, los métodos de observación conductual, las tareas de evaluación automática o los Test de Asociación Implícita.

Pese al valor de estos procedimientos, son más habituales las medidas directas de las actitudes a partir de procedimientos como el diferencial semántico, las escalas de intervalos, o las escalas Likert, procedimientos que suelen englobarse en la categoría de sistemas de autoinforme o simplemente escalas de actitud (Tabla 5).

Tabla 5.- Técnicas de autoinforme en la medida de la actitudes

Técnica	**Autor/es**	**Descripción**
Escala de Diferencial Semántico	Osgood, Suci y Tannenbaum (1957)	Los encuestados evalúan un objeto según una escala en la que se evalúa mediante dos conceptos contrapuestos y bipolares separados por intervalos
Escala de Intervalos	Trurstone (1928)	Se mide la actitud mediante un continuo de ítems escalonados que, previamente, han preparado los investigadores
Escala Likert	Likert (1932)	Conjunto de proposiciones-afirmaciones sobre las que hay que posicionarse generalmente según el grado de acuerdo medido en una escala de diferentes puntos
Escalograma de Guttman	Guttman (1947)	Se trata de un procedimiento que se centra en la determinación de las propiedades de un conjunto de ítems.

Las escalas de intervalos o diferenciales de Thurstone son consideradas como el primer método sistemático para medir actitudes. Este tipo de escalas están construidas en base a un conjunto de preguntas en forma de afirmaciones que varían según su mayor o menor grado de acuerdo con respecto o al objeto que se pretende medir. Este grado de favorabilidad de las preguntas se determina previamente mediante las opiniones de un grupo de jueces que evalúan esa característica. La construcción de este tipo de escalas es muy laborioso por lo que se suele acudir a otro tipo de escalas como puedan ser las sumativa tipo Likert.

Estas escalas Likert son las más conocidas y utilizadas, entre otros aspectos, por la sencilla de su construcción. Se fundamenta en un sistema utilizado en otro tipo de instrumentos de evaluación cual es: situar a los individuos a lo largo de un continuo a partir de la suma de las respuestas a diferentes preguntas que deben poseer el mayor grado de homogeneidad; razón por la cual, también se las denomina escalas sumativas. Es importante resaltar que se debe conseguir el mayor grado de parecido entre los ítems, dado que debemos suponer que todos ellos miden lo mismo (supuesto de unidimensionalidad de la escala no siempre comprobado). Para evitar tendencias de respuestas no deseadas, se deben incluir preguntas enunciadas en términos favorables y preguntas en términos desfavorables.

Por lo general, todas ellas tienden a centrarse en la medida de la valencia y la intensidad de las creencias y conocimientos así como de los sentimientos del encuestado y la tendencia actuar de manera determinada de manera conjunta o por separado.

Las propuestas para medir las actitudes hacia las matemáticas surgen tempranamente siendo los trabajos de Aiken (Aiken, 1972, 1974, 1979; Aiken y Dreger, 1961) y Dutton y Blum (1968) pioneros en el tiempo. El trabajo de Aiken y Dreger (1961) propone un cuestionario compuesto por 20 ítems con dos subescalas: *Agrado* y *Miedo a las matemáticas*, aunque algunos autores la han considerado como una escala unidimensional (Auzmendi, 1992). En una versión posterior, Aiken (1972) introduce el factor *Disfrute de las Matemáticas*, sobre la que, años más tarde, añadirá dos subescalas: *Valor de las matemáticas* y *Disfrute de las matemáticas*. En una versión posterior, Aiken (1979) aumentará el número de factores hasta un total de cuatro: *Gusto por las matemáticas, Motivación matemática, Valor-Utilidad de las matemáticas* y *Miedo a las matemáticas*.

La escala de Fennema y Sherman (1976) es para muchos la más popular de las medidas de las actitudes hacia las matemáticas (Tapia y Marsh, 2004). Esta escala ha sido objeto de amplios estudios de replicación, traducida a diferentes lenguas y modificada para ser aplicada a diferentes situaciones. La aportación de Tapia y Marsh (2004) denominada ATMI (Attitude Toward Mathematics Inventory) es, sin duda, uno de los instrumentos más utilizados en la medida de las actitudes hacia las matemáticas. La versión final está formada por 49 ítems que miden seis factores: *Confianza-autoconcepto*, *Ansiedad*, *Utilidad-valor de las matemáticas, Gusto por las matemáticas*, *Motivación y Expectativa de los padres y profesores*.

En todas estas propuestas, el modelo psicométrico seguido es el de la Teoría Clásica de medida presentando como indicadores de fiabilidad exclusivamente índices de homogeneidad de los ítems (alfa de Cronbach) y análisis factoriales exploratorios (AFE) como criterio único de validez como medio de conocer y describir la estructura factorial sin que se realicen análisis factoriales confirmatorios posteriores (AFC).

No conocemos adaptaciones propiamente dichas al castellano de las escalas de Aiken (1974), Fennema y Sherman (1976) y Tapia y Marsh (2004). En la mayor parte de las investigaciones en nuestra lengua se han limitado a su uso sin que exista estudio previo de las propiedades psicométricas de estas escalas. Señalamos entre otros trabajos los realizados por por Cazorla, Silva, Vendramini, y Brito (1999) de la escala de Aiken (1974) sobre la base de una anterior al portugués de Brito (1998) orientada al estudio de las actitudes hacia la estadística, la más moderna de Estrada y Díez-Palomar (2011) o la de González-Pienda et al. (2012).

En la medida de las actitudes hacia las matemáticas en lengua castellana puede considerarse pionero el trabajo de Gairín (1990). Aunque es Auzmendi (1992) quien elabora la que es, sin duda, la escala de actitudes hacia las matemáticas más citada de las realizadas en lengua castellana (Palacios, Arias y Arias, 2014). Más cercanos en el tiempo son los trabajos de de Muñoz y Mato (2008) y de Alemany y Lara (2010). La escala de Muñoz y Mato (2008) consta de 19 ítems que, tras el análisis factorial correspondiente, presenta dos únicos factores: Actitud del profesor percibida por el alumno y Agrado-utilidad de las matemáticas. La aportación de Alemany y Lara (2010), trabajando con una muestra de validación de alumnos de origen étnico berebere, presenta un alfa de Cronbach de .92 en una muestra de 236 estudiantes de 2.º y 3.º de Educación Secundaria.

Como señalan Palacios, Arias y Arias (2014), las diferentes escalas de actitudes hacia las matemáticas tanto en inglés como en castellano que brevemente hemos analizado presentan, en general, índices de fiabilidad adecuados, si no se tienen en cuenta las limitaciones del coeficiente alfa de Cronbach utilizado para evaluar dicha fiabilidad.

Existen pocas propuestas de medida de las actitudes hacia las matemáticas basadas en los modelos TRI, SEM o PLS. Entre ellas, queremos señalar la aportación de Palacios, Arias y Arias (2014) pues, además de la cercanía en el tiempo, se trata de una propuesta de una escala en castellano, con una muestra elevada de sujetos (4741 participantes), que resume el modo de trabajo de estos nuevos modelos de análisis de medida. Para la elaboración de su *Escala de Actitudes hacia las Matemáticas* (EAM) parten los autores de trabajos anteriores como los señalados en este apartado que presentan cinco factores de manera generalizada en el constructo actitudes hacia las matemáticas: *agrado-gusto por las matemáticas, ansiedad hacia las matemáticas, percepción de dificultad, utilidad percibida y autoconcepto matemático*. Tras un primer AFE, los autores concluyen que la estructura subyacente de la prueba está formada por cuatro factores: *Percepción de la incompetencia matemática, Gusto por las matemáticas,* (*Percepción de utilidad*) y *Autoconcepto matemático.* Como paso lógico dentro de estos nuevos modelos, se presentan los resultados de diferentes AFC los que presentan como mejor modelo el de cuatro factores correlacionados (Figura 5).

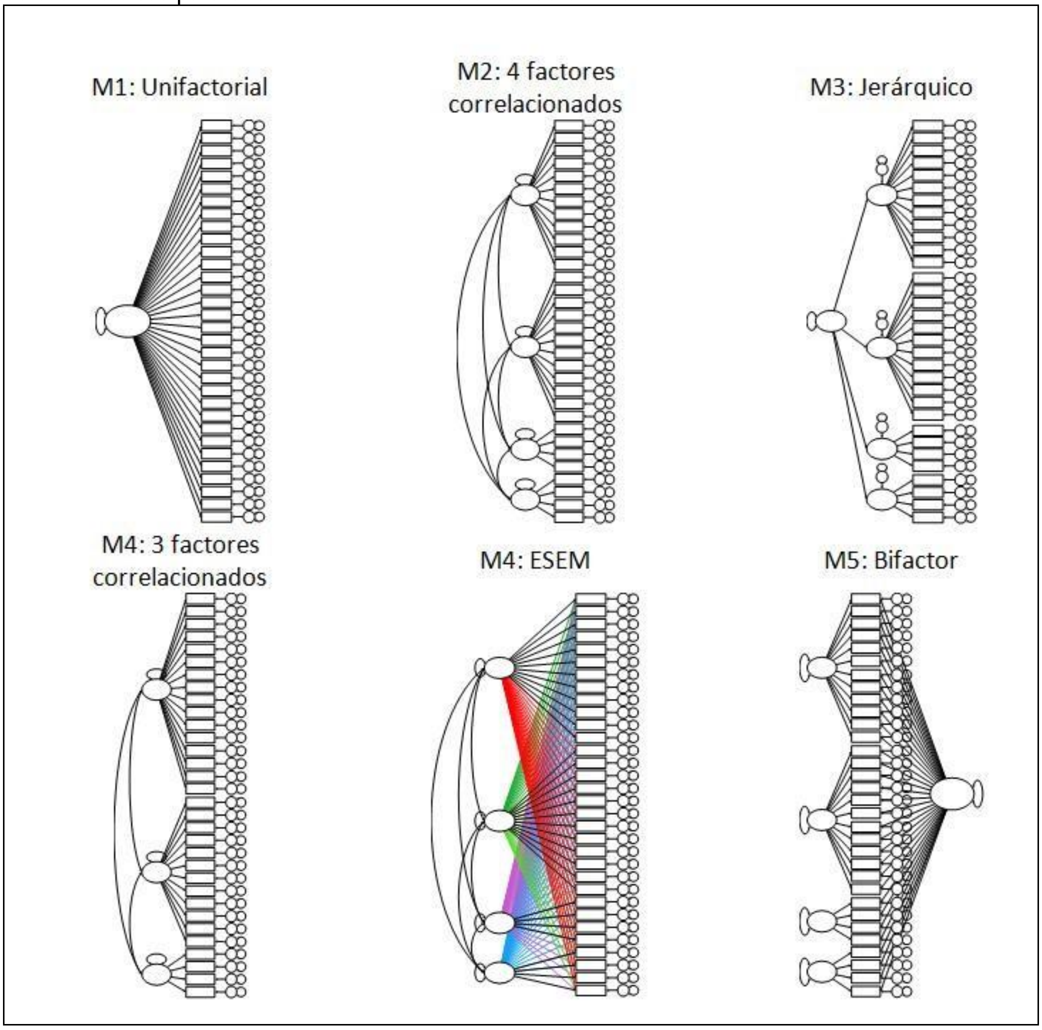


Fig. 5.- Contrastación mediante AFC de los modelos de la escala de actitudes de Palacios, Arias y Arias (2014)

Dentro de este mismo modelo de TRI y como alternativa al cálculo de la fiabilidad mediante el alfa de Cronbach, los autores calculan la fiabilidad compuesta (*composite reliability*) a partir de las saturaciones y los errores de medida, el coeficiente alfa ordinal, el coeficiente theta ordinal y el coeficiente Omega de McDonald y el glb (*greatest lower bound*). Se complementan estos valores con los cálculos de la *validez de contenido*, la *validez de constructo y* la *validez convergente*. Como concluyen los propios autores, la escala presenta evidencias tanto de validez como de fiabilidad. Estas evidencias, junto con la garantía de haber sido obtenidas con una muestra de gran tamaño (con las consiguientes garantías de potencia estadística y disminución del error de medida) y los modelos SEM señalados permiten concluir a los autores que se trata de un instrumento de medida de las actitudes hacia las matemáticas sólido y robusto, y de una gran utilidad potencial para su uso en niveles educativos no universitarios.

La ansiedad hacia las matemáticas es otro de los componentes básicos de las emociones y por ende, del dominio afectivo matemático. En una de las definiciones clásicas, Richardson y Suinn (1972) describen la ansiedad hacia las matemáticas como "*a feeling of tension and anxiety that interfere with the manipulation of mathematics problems in varied situations in ordinary as well as academic life"*. Como sucediera con las actitudes, por su trascendencia, pronto aparecieron escalas para su evaluación. Hay que considerar el trabajo de Richardson y Suinn (1972) como el primer instrumento diseñado específicamente para medir la ansiedad matemática. Esta escala, denominada *Mathematics Anxiety Rating Scale* (MARS), estaba formada por 98 preguntas con cinco alternativas de respuesta. En sus orígenes, fue construido como medida unidimensional de la ansiedad matemática. La escala MARS ha sido adaptada a diferentes poblaciones y edades. Suinn y Edwards (1982) validaron la *Mathematics Rating Scale for Adolescents* (MARS-A) para una población de 16 a 25 años, que posteriormente la adaptarían para estudiantes de primaria conocida como la escala MARS-E (*Mathematics Anxiety Rating Scale for Elementary School*) (Suinn, Taylor y Edwards, 1988). Las escalas basadas en MARS han sido adaptadas a diferentes idiomas. Nuñez-Peña, Suarez-Pellicioni, Guilera y Mercadé-Carranza (2013) realizaron una adaptación al castellano; Mahmood y Khatoon (2011) al idioma indio; Ko y Yi (2011) al coreano; al turco (Akin, Kurbanoglu y Takunyaci, 2011; Baloğlu, 2010); al iraní (Vahedi y Farrokhi, 2011); al idioma italiano (Primi, Busdraghi, Tomasetto, Morsanyi y Chiesi, 2014)

No obstante, como han sugerido Baloglu y Zelhart (2007), pronto quedaron patentes dos problemas de la

MARS: a) la duración y longitud exagerada de la prueba b) basarse en un supuesto no suficientemente comprobado de unidimensional de la ansiedad matemática. Entre los primeros intentos de realizar una versión reducida hay que mencionar la propuesta de Plake y Parker (1982) de la escala MARS-R (*Mathematics Rating Scale Revised*), compuesta por 24 ítems. En esta misma línea de versiones reducidas, Suinn y Winston (2003) elaboraron la que se conoce con el nombre de MARS-SV (*Mathematics Anxiety Rating Scale Short Version),* compuesta por 30 preguntas y una estructura unidimensional parecida a la obtenida con la versión original de 98 ítems. Más cercana en el tiempo, cabe señalar la escala Cipora, Szczygiel, Willmes y Nuerk (2015).

La versión más reducida de la escala es sin duda la de Nuñez-Peña, Guilera y Suarez-Pellicioni (2013) quienes propusieron un instrumento compuesto por un solo ítem ("On a scale from 1 to 10, how math anxious are you?") denominada por los autores SIMA (*Single Item Math Anxiety*). Aunque cabe señalar al trabajo de Alexander y Martray (1989) como una de las adaptaciones más utilizadas entre las versiones reducidas de MARS.

Además de la citada MARS, cabe señalar la escala MAS (*Mathematics Anxiety Scale*) de Fennema y Sherman (1976) en su adaptación de Betz (1978) como otro de los referentes de la medida de la ansiedad matemática. La MAS está pensada para la evaluación de la ansiedad matemática a partir de un conjunto de 10 ítems en una escala Likert de cinco puntos. Bai, Wang, Pan y Frey (2009) aumentaron a 14 los ítems de la escala anterior y la aplicaron a una muestra de estudiantes universitarios. Esta versión presentó índices de fiabilidad mejores que la versión original de la escala. Las escalas MAS han sido traducidas también a diferentes idiomas. Concretamente, Hunt, Clark-Carter y Sheffield (2011) adaptaron la escala original a una población del Reino Unido denominada MAS-UK (Mathematics Anxiety Scale for British Undergraduates). Lim y Chapman (2013) realizaron una nueva versión compuesta por 9 ítems con una muestra de estudiantes pre-universitarios de la ciudad de Singapur, la FSMAS-R; Prieto y Delgado (2007) la adaptaron para evaluar estudiantes españoles.

Se han desarrollado igualmente escalas para niños de las que cabe señalar el trabajo de Chiu y Henry (1990) con un instrumento de 22 ítems con adecuada validez y fiabilidad, y una estructura de cuatro factores: *Math Evaluation, Learning, Problem Solving y Teacher Anxiety*. Dentro de este mismo tipo de pruebas para niños, señalamos la adaptación de la escala MARS-E de Suinn, Taylor y Edwards (1988) y Ramirez, Chang, Maloney, Levine y Beilock (2016) denominada *Revised Child Math Anxiety Questionarie* (CMAQ-R). Además, cabe señalar la CAMS (*Children's Anxiety in Math Scale;* Jameson, 2013). Está formada por 16 ítems con una estructura de tres factores (*General Math Anxiety, Math Performance Anxiety y Math Error Anxiety)* y presenta índices de fiabilidad adecuados. También, cabe señalar por su importancia el trabajo de Wigfield y Meece (1988), quienes elaboraron la escala MAQ (*Math Anxiety Questionnaire*), especialmente diseñada para los estudiantes de primaria y secundaria. Se trata de una adaptación compuesta por 11 ítems con una estructura de dos factores (*Negative Affective Reactions y Worry*), una adecuada fiabilidad y unas correlaciones en las direcciones esperadas con el rendimiento matemático.

Como sucediera con las actitudes, la mayor parte de las escalas de medida de la ansiedad matemática fueros validadas según el modelo clásico siendo escasas las que se ajustaron a los modelos más modernos de TRI o modelos estructurales. Cabe considerar como mejor ejemplo de estas últimas los trabajos de Palacios et al. (2013), Prieto y Delgado (2007) y Nuñez-Peña et al. (2013).

En el trabajo de Palacios et al (2013) se contrasta un modelo de ecuaciones estructurales en el que, una parte importante del trabajo, se dedica a la comprobación de la fiabilidad y la validez de una escala de ansiedad hacia las matemáticas (modelo de medida). La escala final compuesta por 16 ítems, que se presenta como una adaptación al contexto español de la escala MARS mencionada de Richardson y Suinn (1972), presenta valores de ajuste adecuados con una solución unidimensional tras el AFC (RMSA=.045; CFI=.97; AGFI=.95; NFI=.96). En un estudio anterior, Prieto y Delgado (2007) realiza la validación al contexto español de la escala MAS (Math Anxiety Scale) mediante la teoría del TRI y concretamente del modelo Rasch. La validez convergente obtenida mediante la correlación con la escala de actitudes de Fennema y Sherman (1976) es elevada, presentando la escala propiedades métricas óptimas, resultados que, a grandes rasgos, también obtienen Núñez-Peña et al. (2013). En este caso, se analiza la escala sMARS de Alexander y Martray (1989) comprobando, mediante un AFC la estructura de tres factores de la escala original (*math test, numerical task y math course anxiety*). Presenta, además, un excelente consistencia interna de estas tres subescala y de la escala total, así como evidencias de una adecuada validez convergente y validez discriminante; lo que lleva a los autores a concluir que la adaptación al castellano de la escala sMARS posee propiedades psicométricas adecuada tanto por su consistencia interna como por su validez.

CONCLUSIONES

Los procedimientos de recogida de información y de medida son aspectos de vital importancia en la investigación en general y en la investigación matemática en particular. Aunque los métodos no deben determinar los objetivos de las investigaciones, los afecta de manera importante. Entre otras razones, porque si los instrumentos de recogida de datos son inadecuados, también lo serán sus conclusiones. Por ello, es necesario asegurar que estos instrumentos tengan propiedades psicométricas que garanticen la exactitud de la medida. Más si cabe pues, como hemos indicado, en educación matemática, como en la mayor parte de las ciencias sociales, medimos conceptos y rara vez cosas tangibles (constructo).

En este sentido, el conocimiento de las teorías estadísticas sobre la medida es de gran valor para la investigación matemática pues nos va a asegurar las principales cualidades psicométricas de nuestros instrumentos; nos va a permitir determinar su grado de fiabilidad y validez, aspectos ambos necesarios para usar los instrumentos con garantía, de forma rigurosa y científica.

La Teoría Clásica de Medida surge en gran medida como soporte estadístico de los test que tanto éxito comenzaron a tener a comienzos del siglo pasado. Su fundamento estadístico es simple: la puntuación verdadera de una escala es la suma de la puntuación obtenida por el sujeto (puntuación empírica) más una error. Este error será difícil de cuantificarlo pero posible de estimar ya que tiende a cero al pasar infinitas veces la misma prueba, al mismo sujeto. La fiabilidad del instrumento será entonces la capacidad que posea de minimizar la cuantía de este error. Un instrumento medirá con precisión si cometer pocos errores en su medida.

Pero no basta saber que una medida es consistente si no estamos seguros de medir lo que pretendemos medir; planteamiento que nos acerca al concepto de validez de una medida. Pese a que su cálculo ocupó un espacio menos relevante en la teoría clásica de medida que la fiabilidad, se propusieron procedimientos que aseguraran estas características de todo buen instrumento entre las que destacamos la validez de contenido, la validez de criterio o la validez constructo.

Además, un buen instrumento de medida debe conllevar un grupo normativo de referencia que nos permita establecer el significado de las puntuaciones empíricas. Este grupo normativo actúa como el referente que nos va a permitir situar a cada sujeto, en cuanto a los resultados de la prueba, en un lugar determinado (un percentil, por ejemplo) en comparación con este grupo normativo. Como cabe suponer, un mismo sujeto puede ocupar una posición diferente en función de diferentes grupos normativos.

Esta Teoría Clásica de Medida realiza un conjunto de presunciones de dudosa validez sino directamente erróneas. Es aventurado afirmar, por ejemplo, que la medida de la actitud hacia las matemáticas dependa del cuestionario que se utilice; asegurar que el resultado en el cuestionario está determinado por los sujetos a los que hemos pasado la escala en el grupo normativo. La TRI surge como un intento de solución de estos presupuestos difíciles de demostrar, para ello, intentarán realizar mediciones que no dependan del instrumento (invariante con respecto a la escala), ni de los grupos normativos (invariante respecto a las personas). No obstante, las estrictas condiciones que impone este modelo ha determinado la aparición de nuevas propuestas menos exigentes como los modelos basados en las ecuaciones estructurales (modelos SEM). En estos nuevos planteamientos, es posible realizar en un único modelo las cualidades de la medida (su fiabilidad y su validez) y el grado de ajuste de los datos a la teoría que lo sustenta. El concepto de *variable latente* juega entonces un papel prioritario y se pone de manifiesto en la realización de análisis factoriales confirmatorios (AFC) como alternativa a los análisis factoriales exclusivamente exploratorios (AFE).

La medida del dominio afectivo matemático no ha sido ajena al devenir histórico de estos modelos. Así, aunque gran parte de las escalas en de medida del dominio afectivo matemático han seguido el modelo clásico, se impone actualmente con fuerza aportaciones novedosas basadas en los modelos de la TRI y de los modelos SEM. En este sentido, cabe recordar las aportaciones de Palacios, Arias y Arias (2014) en el campo de la medida de las actitudes hacia las matemáticas y los trabajos de Palacios et al. (2013), Prieto y Delgado (2007) y Nuñez-Peña et al. (2013) en la medida de la ansiedad hacia las matemáticas.

Referencias bibliográficas

Aiken, L. R. (1972). Research on attitudes toward mathematics. *The Arithmetic Teacher*, 19(3), 229-234.

Aiken, L. R. (1974). Two scales of attitude toward mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 5, 67-71.

Aiken, L. R. (1979). Attitudes toward mathematics and science in Iranian middle schools. *School Science and Mathematics*, 79, 229-234

Aiken, L. R., y Dreger, R. M. (1961). The effect of attitude on performance in mathematics. *Journal of Educational Psychology*, 52, 19-24.

Akin, A., Kurbanoglu, N.I. y Takunyaci, M. (2011). Revised mathematics anxiety rating scale: a confirmatory factor analysis. *Journal of Science and Mathematics Education*. 5(1), 163-180.

Akin, A., y Kurbanoglu, N. (2011). The relationships between math anxiety, math attitude and self-efficacy: A structural equation model. *Studia Psychologica*, 53(3), 263-273.

Alemany, I., y Lara, A. I. (2010). Las actitudes hacia las matemáticas en el alumnado de la ESO: un instrumento para su medición. *Publicaciones*, 40, 49-71.

Alexander, L., y Martray, C. (1989). The development of an abbreviated version of the Mathematics Anxiety Rating Scale. *Measurement and Evaluation in Counseling and Development*, 22(3), 143-159

Arias, B. (2008). Desarrollo de un ejemplo de Análisis Factorial Confirmatorio con Lisrel, AMOS y SAS. En Verdugo, M. A., Crespo, M., Badía, M. y Arias (Coordinadores) (2008). *Metodología en la investigación sobre discapacidad. Introducción al uso de las ecuaciones estructurales*. Publicaciones del INICO: Salamanca

Attorresi. H.F., Lozzia, G.S., Abal, F. Galibert, M. S. y Aguerri, M. E. (2009). Teoría de Respuesta al Ítem. Conceptos básicos y aplicaciones para la medición de constructos psicológicos. *Revista Argentina de Clínica Psicológica*, 18, 179-188

Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática-estadística en las enseñanzas medias y universitarias. Características y medición*. Bilbao: Mensajero.

Bai, H., Wang, L., Pan, W., y Frey, M. (2009). Measuring mathematics anxiety: Psychometric analysis of a bidimensional affective scale. *Journal of Instructional Psychology*, 36, 185-193.

Baloğlu, M. (2010). An investigation of the validity and reliability of the adapted mathematics anxiety ratings scale-short version (MARS-SV) among Turkish students. *European Journal Psychology Education*, 25, 507–518

Baloglu, M. y Zelhart, P. (2007). Psychometric properties of the revised Mathematics anxiety rating scale. *The Psychological Record*, 57, 593–611

Bentler, P.M. (1990). Comparative fit indexes in structural models. *Psychological Bulletin*, 238–246, 1990.

Betz, N. E. (1978). Prevalence, distribution, and correlates of math anxiety in college students. *Journal of Counselling Psychology*, 25, 441-448.

Brito, M. R. F. (1998). Adaptação e validação de uma escala de attitudes em relação à matemática. *Zetetiké*, 6(9), 109-162.

Cazorla, I. M., Silva, C. B., Vendramini, C., y Brito, M. R. F. (1999). Adaptação e validação de uma escala de attitudes em relação à estatística. *Actas de la Conferência Internacional Experiências e Perspectivas do Ensino da Estatística*. PRESTA, Florianópolis: Florianópolis.

Cipora, K., Szczygiel, M., Willmes, K. y Nuerk, H.C. (2015). Math Anxiety Assessment with the Abbreviated Math Anxiety Scale: Applicability and Usefulness: Insights from the Polish Adaptation. *Frontiers in Psychology*, 6, 1-16.

Chiu, L. H., y Henry, L. L. (1990). Development and validation of the Mathematics Anxiety Scale for Children. *Measurement and Evaluation in Counselling and Development*, 23, 121-127

Dutton, W. H., y Blum, M. P. (1968). The measurement of attitudes toward arithmetic with a Likert-type test. *Elementary School Journal*, 68, 259-264.

Estrada, A., y Díez-Palomar, J. (2011). Las actitudes hacia las Matemáticas. Análisis descriptivo de un estudio de caso exploratorio centrado en la Educación Matemática de familiares. *Revista de Investigación en Educación*, 9(2), 116-132.

Fennema, E., y Sherman, J. A. (1976). Fennema-Sherman Mathematics Attitudes Scales: Instruments designed to measure attitudes toward the learning of mathematics by females and males. *Journal for Research in Mathematics Education*, 7(5), 324-326

Gairín, J. (1990). *Las actitudes en educación. Un estudio sobre la educación matemática*. Barcelona: Boixareu Universitaria.

González-Pienda, J. A., Fernández-Cueli, M., García, T., Suárez, N., Fernández, E., Tuero-Herrero, E., y Helena da Silva, E. (2012). Diferencias de género en actitudes hacia las matemáticas en la enseñanza obligatoria. *Revista Iberoamericana de Psicología y Salud*, 3(1), 55-73.

Guttman, L. (1947). The Cornell technique for scale and intensity analysis. *Educational Psychological Measurement*, 7, 247-279.

Hair, J.F.; Anderson, R.E.; Tatham R.L. y Black,W.C. (1999): *Análisis multivariante*. 5ª ed. Madrid: Prentice

Hall.

Hambleton, R. K., Swaminathan, H., y Rogers, J. (1991). *Fundamentals of item response theory*. Beverly Hills, CA: Sage

Hidalgo, S., Maroto, A., y Palacios, A. (2005). El perfil emocional matemático como predictor de rechazo escolar: relación con las destrezas y los conocimientos desde una perspectiva evolutiva. *Revista de Educación Matemática*, 17(2), 89-116.

Hunt, T.U., Clark-Carter, D. y Sheffield, D. (2011). The development and part validation of a U.K. Scale for Mathematics Anxiety. *Journal of Psychoeducational Assessment*. 29(5), 455- 466.

Jameson, M. M. (2013). The Development and Validation of the Children's Anxiety in Math Scale. *Journal of Psychoeducational Assessment*, 31(4), 391–395.

Jöreskog, K. G. (1970). A general method for analysis of covariance structures. *Biometrika*, , 57, 239-251.

Ko, H.K. y Yi, H.S. (2011). Development and validation of a mathematics anxiety scale for student. *Asia Pacific Education Review*. 12(4), 509-521

Lawshe C. H. (1975). A quantitative approach to content validity. *Personnel Psychology*. 28(4), 563-575.

Likert, R. (1932). A technique for the measurement of attitudes. *Archives of Psychology, 22*(140), 1–55.

Lim, S.Y. y Chapman, E. (2013). An investigation of the Fennema-Sherman mathematics anxiety subscale. *Measurement and Evaluation in Counseling and Developmen*t. 46(1) 26 –37.

Lord, F. M., y Novick, M. R. (1968). *Statistical theories of mental test scores*. New York: Addison-Wesley.

Mahmood, S. y Khatoon, A. (2011). Development and validation of the mathematics anxiety scale for secondary and senior secondary school students. *British Journal of Arts and Social Sciences*. 2(2), 169-179

Martínez, R., Hernández, MV y Hernández, MJ. (2006). *Psicometría*. Madrid: Alianza.

Martínez-Arias, M. R. (1995). *Psicometría: Teoría de los Tests Psicológicos y Educativos*. Madrid: Síntesis.

McLeod, D. B. (1988). Affective issues in mathematical problem solving: Some theoretical considerations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19, 134-141

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: a reconceptualization. En D. Grows(Ed.), *Handbook of research onmathematics teaching and learning* (pp. 575-596). New York: McMillan Publishing Company.

Miñano, P., y Castejón, J. L. (2011). Variables cognitivas y motivacionales en el rendimiento académico en Lengua y Matemáticas: un modelo estructural. *Revista de Psicodidáctica*, 16(2), 203-230.

Miranda, A. (2012). Funcionamiento ejecutivo y motivación en tareas de cálculo y solución de problemas de niños con TDAH. *Revista de Psicodidáctica*,17(1), 51-72.

Muñiz, J. (1997). *Introducción a la teoría de respuesta a los ítems*. Madrid: Pirámide.

Muñiz, J. (2010). La teoría de los test: Teoría clásica y Teoría de Respuesta a los Ítems. *Papeles del Psicólogo*, 31 (1), 57-66

Muñoz, J. M., y Mato, M. D. (2008). Análisis de las actitudes respecto a las matemáticas en alumnos de la ESO. *Revista de Investigación Educativa*, 26(1), 209-226.

Nuñez-Peña, M.L., Guilera, G. y Suarez-Pellicioni, M. (2013) The Single-Item Math Anxiety Scale: An Alternative Way of Measuring Mathematical Anxiety. *Journal of Psychoeducational Assesment* , 20(10), 1-12

Nuñez-Peña, M.L., Suarez-Pellicioni, M. Guilera, G y Mercadé-Carranza, Cl. (2013) A Spanish version of the short Mathematics Anxiety Rating Scale (sMARS). *Learning and individual differences*. 24, 204-210

Osgood, C.E., Suci, G.J., y Tannenbaum, P.H. (1957). *The measurement of meaning*. Urbana, IL: University of Illinois Press.

Palacios, A.; Arias, V., y Arias, B. (2014). Las actitudes hacia las matemáticas: construcción y validación de un instrumento para su medida. *Revista de Psicodidáctica*. 19(1). 67-91

Perry, C. A. (2011). Motivation and attitude of preservice elementary teachers toward mathematics. Morehead State University. *School Science and Mathematics*, 111(1), 2-10.

Plake, B. S., y Parker, C. S. (1982). The development and validation of a revised version of the Mathematics

Anxiety Rating Scale. *Educational and Psychological Measurement*, 42, 551-557.

Prieto, G., y Delgado, A. R. (2007). Measuring math anxiety (in Spanish) with the Rasch Rating Scale Model. *Journal of Applied Measurement*. 8, 149–160

Primi, C., Busdraghi, C., Tomasetto, C., Morsanyi, K. y Chiesi, F. (2014). Measuring math anxiety in Italian college and high school students: validity, reliability and gender invariance of the Abbreviated Math Anxiety Scale (AMAS). *Learning and Individual Differences.* 34, 51–56.

Ramirez, G., Chang, H., Maloney, E.A., Levine, S. C. y Beilock, S. (2016). On the relationship between math anxiety and math achievement in early elementary school: The role of problem solving strategies. *Journal of Experimental Child Psychology,* 141, 83–100

Richardson, F.C. y Suinn, M. (1972). The Mathematics Anxiety Rating Scale: Psychometric Data. *Journal of Counseling Psychology*. 18(6), 551-554

Sakiz, G., Pape, S. J., y Hoy, A. W. (2012). Does perceived teacher affective support matter for middle school students in mathematics class rooms? *Journal of School Psychology*, 50, 235-255.

Spearman, C. (1904). The proof and measurement of association between two things. *American Journal of Psychology*, 15, 72-101.

Spearman, C. (1907). Demonstration of formulae for true measurement of correlation. *American Journal of Psychology*, 18, 161-169.

Spearman, C. (1913). Correlations of sums and differences. *British Journal of Psychology*, 5, 417-426.

Suinn, R. M., y Edwards, R. (1982). The measurement of mathematics anxiety: The mathematics anxiety rating scale for adolescents— MARS-A. *Journal of Clinical Psychology*, 38, 576-580.

Suinn, R., Taylor, S., y Edwards, R. (1988). Suinn Mathematics Anxiety Rating Scale for elementary school students (MARS-E). Psychometric and normative data. *Educational and Psychological Measurement*, 48, 979-986

Suinn, R. M., y Winston, E. H. (2003). The mathematics anxiety rating scales, a brief version: Psychometric data. *Psychological Reports*, 92(1), 167-173.

Tucker, L.R. y. Lewis, C. (1973). A reliability coefficient for maximum likelihood factor analysis. *Psychometrika*,1–10, 1973

Tapia, M., y Marsh, G. E. (2004). An instrument to measure mathematics attitudes. *Academic Exchange Quarterly*, 8(2).

Tenenhaus, M., y Vinzi, E.V. (2005). PLS regression, PLS path modeling and generalized procrustean analysis: a combined approach for PLS regression, PLS path modeling and generalized multiblock analysis. *Journal of Chemometrics*, 19, 145–153.

Thurstone, L. L. (1928). Attitudes can be measured. *The American Journal of Sociology*, 26,249-269

Vahedi, S., y Farrokhi, F. (2011). A confirmatory factor analysis of the structure of abbreviated math anxiety scale. *Iranian journal of psychiatry*, 6(2), 47.

Wigfield, A. y Meece, J.L. (1988). Math Anxiety in Elementary and Secondary School Students. *Journal of Educational Psychology*, 80(2), 210-216

Seminario. Investigación en Educación Infantil

Coordinadora

Dra. María Jesús Salinas Portugal, Universidad de Santiago de Compostela.

Ponentes

Dr. Angel Alsina I Pastells, Universidad de Girona.

Contribuciones de la investigación en Educación Matemática en Infantil para el diseño, gestión y evaluación de las buenas prácticas.

Dr. Carlos de Castro Hernández, Universidad Autónoma de Madrid**.**

El estudio de documentos curriculares como organizador de la investigación en Educación Matemática Infantil.

Dra. Mequè Edo i Bastè Universitat Autònoma de Barcelona.

Emergencia de la investigación en educación matemática infantil. Juego y matemáticas.

CONTRIBUCIONES DE LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA INFANTIL PARA EL DISEÑO, GESTIÓN Y EVALUACIÓN DE BUENAS PRÁCTICAS

Contributions of research on early childhood mathematical education for the design, management and evaluation of good practices

Alsina, Á.

Universidad de Girona

Resumen

Se presenta el panorama de la investigación en educación matemática infantil a partir de las contribuciones en la SEIEM y en el grupo IEMI. Esta revisión sirve de base para plantear algunos elementos que se deberían considerar en el diseño, la gestión y la evaluación de buenas prácticas matemáticas en las aulas de Educación Infantil, sustentados principalmente en las aportaciones de la Educación Matemática Realista y el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos. Para el diseño se consideran los contextos de aprendizaje y los conocimientos matemáticos; para la gestión se aportan algunas ideas clave acerca del trabajo de los contenidos a través de los procesos matemáticos, que se ejemplifican con un ejemplo; y para la evaluación se presenta un instrumento para analizar la presencia de los procesos matemáticos en las prácticas de aula.

Palabras clave: *investigación en educación matemática infantil, prácticas matemáticas, contextos de aprendizaje, conocimientos matemáticos, evaluación de prácticas matemáticas.*

Abstract

An overview of research on childhood mathematics education is presented here on the basis of the contributions made by SEIEM and the IEMI group. This review serves as a basis for presenting some elements that should be considered in the design, management and evaluation of good mathematical practices in preschool classrooms, principally supported by the contributions of the Realistic Mathematics Education approach and the National Council of Teachers of Mathematics of the United States. The design part takes into consideration learning contexts and mathematical knowledge; the management section highlights some key ideas for working on content through mathematical processes, which are illustrated with a example; and for the evaluation aspect, an instrument is presented which analyses the presence of mathematical processes in classroom practices.

Keywords: *research on early childhood mathematics education, mathematics practice, learning contexts, mathematical knowledge, evaluation of mathematical practices.*

Alsina, Á. (2016). Contribuciones de la investigación en educación matemática infantil para el diseño, gestión y evaluación de buenas prácticas. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 71-88). Málaga: SEIEM.

INTRODUCCIÓN

Diversos estudios bibliométricos realizados en España en los últimos tiempos han puesto de manifiesto que la investigación en educación matemática infantil ha tenido tradicionalmente una presencia escasa en nuestro país respecto a la realizada en otras etapas educativas. Así, por ejemplo, Gómez, Cañadas, Bracho, Restrepo y Aristizábal (2011), a partir de un análisis temático de la investigación en educación matemática en España a través de los Simposios de la SEIEM, señalan la importancia de los trabajos que se refieren a la Educación Secundaria. En este mismo estudio se concluye que la Educación Primaria, la Formación Profesional y el título de Grado Universitario aparecen en segundo lugar de importancia, y destacan la reducida cantidad de documentos que se refieren a la etapa de Educación Infantil. Los trabajos que no se refieren a ningún nivel educativo específico representan también una proporción importante de la totalidad de trabajos (ver Figura 1):

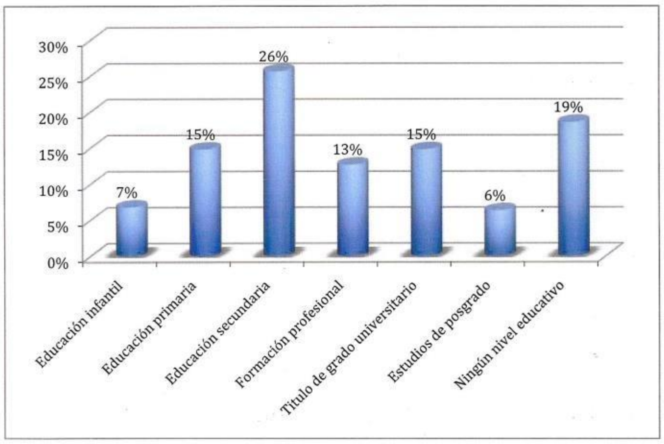


Figura 1. Porcentaje de trabajos por niveles educativos en la SEIEM entre 1997 y 2008 (Gómez, Cañadas, Bracho, Restrepo y Aristizábal, 2011)

También Sierra y Gascón (2011), a partir de la revisión de algunas de las investigaciones más relevantes en Didáctica de las Matemáticas de la Educación Infantil y Primaria, concluyen que las relativas a la Educación Elemental son escasas, y especialmente escasas las de Educación Infantil dentro de la SEIEM.

Alsina (2013) sugiere que esta tendencia se empieza a modificar a partir del año 2011, en el que se produce un punto de inflexión como consecuencia, sobre todo, de la creación del Grupo de Investigación IEMI. En el trabajo de Alsina, además de las investigaciones recogidas en las diferentes Actas de los Simposios de la SEIEM, se analizan también los trabajos presentados en los seminarios intermedios de los diferentes grupos de investigación de la SEIEM desde 2005 hasta 2012, ya que en el marco de estos diferentes grupos también hay algunas investigaciones centradas en la etapa de Educación Infantil, sobre todo en el caso del I Seminario del Grupo de Investigación IEMI celebrado en marzo de 2012 en la Universidad Complutense de Madrid.

En síntesis, Alsina (2013) señala la escasa producción de investigaciones sobre Didáctica de las Matemáticas en Educación Infantil en la SEIEM desde 1997 hasta 2010, y el cambio de tendencia que se ha producido a partir de 2011, que ha supuesto el inicio de un cuerpo de investigaciones sobre educación matemática infantil cada vez más cohesionado, que se sustenta en el análisis del contenido matemático que aparece en los trabajos revisados. Desde este criterio de interpretación se aprecia que hasta el momento los trabajos se centran sobre todo en tres temas:

- La formación inicial de maestros de Educación Infantil: este campo de investigación se trata, en algunas ocasiones, desde un enfoque didáctico concreto como por ejemplo la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) o la Educación Matemática Realista (EMR); en otros trabajos se aportan datos a partir de diferentes métodos de formación activa, como por ejemplo el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) o el Aprendizaje Colaborativo; se analizan también los referentes internacionales a nivel curricular (NCTM, 2003); experiencias de formación interdisciplinarias; prácticas externas y Trabajos de Final de Grado; etc.

- La adquisición y el desarrollo del pensamiento matemático infantil: la mayoría de los estudios se centran, hasta el momento, en la numeración y el cálculo, lo cual tiene su explicación ya que, de acuerdo con la NCTM (2003), es uno de los bloques con mayor peso en esta etapa educativa. Cabe destacar que algunos de los trabajos clasificados dentro de este bloque se fundamentan ya en un enfoque didáctico concreto, como por ejemplo los realizados desde la perspectiva de la TAD o la EMR.
- Existe un tercer grupo de trabajos que analizan algunos recursos o contextos de aprendizaje para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático como los contextos de vida cotidiana, los juegos, los cuentos, los gráficos, etc.

En los distintos seminarios intermedios del Grupo IEMI de la SEIEM que se han celebrado posteriormente (Valladolid, 2014; Lugo, 2016) se ha ido reforzando esta categorización, y el número de trabajos presentados ha ido aumentando. Parece, pues, que aunque queda mucho por hacer, la investigación en educación matemática infantil en nuestro país se va consolidando paulatinamente. Como indica Alsina (2013), para seguir avanzando será necesario ir dando mayor coherencia a este campo de investigación a partir de los postulados expuestos por Sierra y Gascón (2011):

> Si pretendemos tomar en consideración el contenido de los trabajos y, en especial, el tipo y la naturaleza de los problemas didácticos que éstos formulan y abordan, entonces deberemos situarnos necesariamente en un enfoque didáctico concreto y elaborar criterios con ayuda de las herramientas teóricas y metodológicas que dicho enfoque nos proporciona. Creemos que sólo así será posible valorar y comparar adecuadamente el alcance y las limitaciones de los diferentes trabajos de investigación y potenciar el necesario diálogo y desarrollo mutuo, que no necesariamente integración, de los enfoques teóricos en didáctica de las matemáticas que sustentan los trabajos en cuestión (p. 153).

En definitiva, pues, las líneas para seguir avanzando están marcadas, y pasan necesariamente por realizar estudios que se sustenten en un determinado enfoque teórico, una metodología de investigación concreta y un contenido claro que se aborde desde un enfoque didáctico concreto.

Considerando estos aspectos, en los siguientes apartados se aportan algunas contribuciones de la investigación en educación matemática infantil sustentadas principalmente en la EMR (Freundenthal, 1971) y las aportaciones acerca del conocimiento matemático del NCTM (2003) para el diseño, gestión y evaluación de buenas prácticas.

EL DISEÑO DE BUENAS PRÁCTICAS EN EL AULA DE EDUCACIÓN INFANTIL

El término "buena práctica" ha sido objeto de un amplio debate en el ámbito de la investigación en educación matemática, y también ha generado discusión en el contexto de la educación matemática infantil. A modo de ejemplo, el NCTM (2003, p. 17) señala que "una enseñanza eficaz requiere conocer lo que los alumnos saben y lo que necesitan aprender; y luego estimularlos y ayudarlos para que lo aprendan bien". De forma más concreta, consideran tres elementos en el marco del "Principio de Enseñanza" de las matemáticas:

- La eficacia docente exige saber matemáticas, tener en cuenta que los alumnos son aprendices y disponer de estrategias pedagógicas. En este sentido, el profesorado debería tener diferentes tipos de conocimientos (disciplinares, didácticos, etc.)
- Una enseñanza eficaz requiere un entorno en aprendizaje que apoye y estimule. Se trata, en definitiva, de plantear propuestas educativas o tareas matemáticas útiles para introducir nociones matemáticas importantes y para retar e implicar intelectualmente a los alumnos. La toma de decisiones respecto al tipo de propuestas o tareas debe acompañarse con decisiones acerca de la gestión de dichas tareas.
- Una enseñanza eficaz requiere tratar continuamente de mejorar. En otras palabras, las buenas prácticas surgen de la observación y reflexión sistemática de la propia práctica.

En definitiva, según estos planteamientos, se trata de que el profesorado conozca y entienda profundamente las matemáticas que enseña y que sea capaz de hacer uso de este conocimiento con flexibilidad.

Para concretar las características de una buena práctica matemática, Planas y Alsina (2014) retoman los siete principios clásicos de la enseñanza de las matemáticas elaborados por el matemático inglés John Perry y sintetizados en Price (1986, p. 114) y, a modo de decálogo, los completan con tres principios más, ubicados al final de la lista:

- Tener en cuenta la motivación y los intereses del alumnado.
- Basar lo abstracto en la experiencia concreta para promover la comprensión.
- Emplear actividades que supongan el uso de la mano y el ojo, y no solo de la oreja, en conjunción con el cerebro, así como de los métodos gráficos.
- Adoptar métodos experimentales y heurísticos: experimento, estimación, aproximación, observación, inducción, intuición, sentido común, etc.
- Retrasar el rigor lógico y la preocupación inicial por los fundamentos, y restringir los elementos deductivos formales, admitiendo diversas formas de demostración.
- Simplificar, ensanchar y unificar la materia-disciplina de las matemáticas, e ignorar las divisiones artificiales tradicionales.
- Correlacionar las matemáticas con la ciencia y el trabajo de laboratorio, y relacionar las matemáticas con la vida y sus aplicaciones.
- Recordar la necesidad de incorporar el rigor lógico y la preocupación por los fundamentos en los momentos posteriores a la experiencia concreta.
- Introducir formas de validación de la práctica matemática que no hayan surgido de la implicación del alumnado en las actividades propuestas.
- Generar motivación e interés en el alumnado por problemas matemáticos.

Añaden los tres últimos principios con la intención de cerrar “mejor” el círculo, retomando cuestiones y prácticas matemáticas de importancia que podrían no ser incorporadas en el desarrollo del currículo si solo se tuvieran en cuenta la motivación y los intereses del alumnado o si se retrasara tanto el rigor lógico y la preocupación por los fundamentos que, finalmente, no se volviera a ellos.

Todavía en relación a la concreción de buenas prácticas en educación matemática desde una perspectiva genérica, en el manual *De los Principios a la Acción* (NCTM, 2015) se mencionan ocho prácticas basadas en investigaciones:

- Establecimiento de metas matemáticas basadas en el aprendizaje.
- Implementación de tareas que promuevas el razonamiento y la resolución de problemas.
- Uso y vinculación de las representaciones matemáticas.
- Favorecimiento del discurso matemático significativo.
- Planteamiento de preguntas deliberadas.
- Elaboración de la fluidez procedimental a partir de la comprensión conceptual.
- Favorecer el esfuerzo productivo en el aprendizaje de las matemáticas.
- Obtener y utilizar evidencias del pensamiento de los estudiantes.

El NCTM considera que las ocho prácticas anteriores constituyen “un conjunto de acciones muy recomendables para todos los docentes, asesores pedagógicos y especialistas en matemáticas, así como para todo el personal administrativo de escuelas y distritos y cada uno de los líderes políticos y responsables de políticas” (NCTM, 2015).

Desde la perspectiva de la educación matemática infantil también ha habido intentos de concreción de lo que se entiende por buena práctica matemática en estas primeras edades. Así, por ejemplo, en la declaración conjunta de posición sobre las matemáticas en la Educación Infantil de la Asociación Nacional para la Educación Infantil y el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados

Unidos (NAEYC y NCTM, 2013), se indican algunos aspectos que se deberían considerar en las prácticas de aula:

- Potenciar el interés natural de los niños en las matemáticas y su disposición a utilizarlas para dar sentido a su mundo físico y social.
- Aprovechar las experiencias y conocimientos previos de los niños, incluidos los familiares, lingüísticos, culturales y los de su comunidad, sus aproximaciones individuales al aprendizaje; y sus conocimientos informales.
- Basar los currículos de matemáticas y las prácticas docentes en el conocimiento sobre el desarrollo cognitivo, lingüístico, físico, social y emocional, de los niños.
- Utilizar currículos y prácticas docentes que fortalezcan los procesos infantiles de resolución de problemas y razonamiento, así como los de representación, comunicación y conexión de ideas matemáticas.
- Asegurar que el currículo sea coherente y compatible con las relaciones y secuencias conocidas de las ideas matemáticas fundamentales.
- Facilitar que los niños interactúen de forma continuada y profunda con las ideas matemáticas clave.
- Integrar las matemáticas con otras actividades y otras actividades con las matemáticas.
- Proporcionar tiempo suficiente, materiales, y apoyo del profesor para que los niños se impliquen en el juego, un contexto en el que explorar y manipular ideas matemáticas con vivo interés.
- Introducir activamente conceptos matemáticos, métodos y lenguaje a través de una variedad de experiencias y estrategias de enseñanza apropiadas.
- Apoyar el aprendizaje mediante la evaluación continua y reflexiva del conocimiento, destrezas y estrategias de todos los niños.

A partir de los planteamientos anteriores, Alsina (en prensa) sugiere que el diseño de buenas prácticas en el aula debe considerar dos grandes aspectos: los contextos de aprendizaje y los conocimientos matemáticos.

Los contextos de aprendizaje

La investigación contemporánea sobre medidas educativas eficaces para mejorar el rendimiento en matemáticas subraya la necesidad de considerar las siguientes medidas (EACEA P9 Eurydice, 2011):

- Atención a las diferentes necesidades del alumnado: adaptarse a las diferentes necesidades de aprendizaje de los alumnos, en lo referente a su disposición hacia el aprendizaje, su interés y su perfil individual de aprendizaje, incide positivamente sobre el rendimiento y la implicación en matemáticas.
- Hincapié en la importancia de las matemáticas: los métodos de enseñanza deberían partir de “grandes temas” y temas multidisciplinares que permitan establecer conexiones con la vida cotidiana y con otras asignaturas.
- Intervención temprana: los primeros años de escolarización constituyen la base de los futuros aprendizajes en matemáticas, y la identificación de dificultades puede evitar que los niños desarrollen estrategias inadecuadas.
- Factores motivacionales: el profesorado necesita establecer y comunicar a sus alumnos unas expectativas de aprendizaje elevadas y fomentar la participación activa de todos ellos.
- Aumento de la participación de las familias: debe animarse a los padres a que ayuden a aprender y a disfrutar con las matemáticas.

A partir de estos planteamientos, parece que para lograr cada vez mejores rendimientos es necesario trasladar el currículo de matemáticas a la práctica de aula; aplicar diversos enfoques didácticos para dar respuesta a las necesidades de todos los alumnos; usar de forma eficaz los métodos de evaluación; establecer objetivos y hacer un seguimiento de la eficacia de los programas de apoyo; aumentar la motivación y la implicación de los alumnos a través de iniciativas específicas; ampliar el repertorio didáctico del profesorado y fomentar la flexibilidad; promover políticas basadas en la evidencia; y, por supuesto, trabajar los contenidos a través de los procesos matemáticos.

Desde esta perspectiva, Alsina (2010) plantea que para favorecer la alfabetización matemática en las primeras edades es preciso partir de contextos de aprendizaje significativos y ajustados a las necesidades de los alumnos. Haciendo un símil con la pirámide de la alimentación, plantea la "Pirámide de la Educación Matemática" en la que se indica de forma sencilla el tipo de recursos necesarios para desarrollar el pensamiento matemático y su frecuencia de uso más recomendable (figura 2).

Como en el caso de la pirámide alimentaria, no descarta ningún recurso, sólo informa sobre la conveniencia de restringir algunos de ellos a un uso ocasional y, por eso, puede ser una herramienta útil para el profesorado preocupado por hacer de su metodología una garantía de educación matemática.

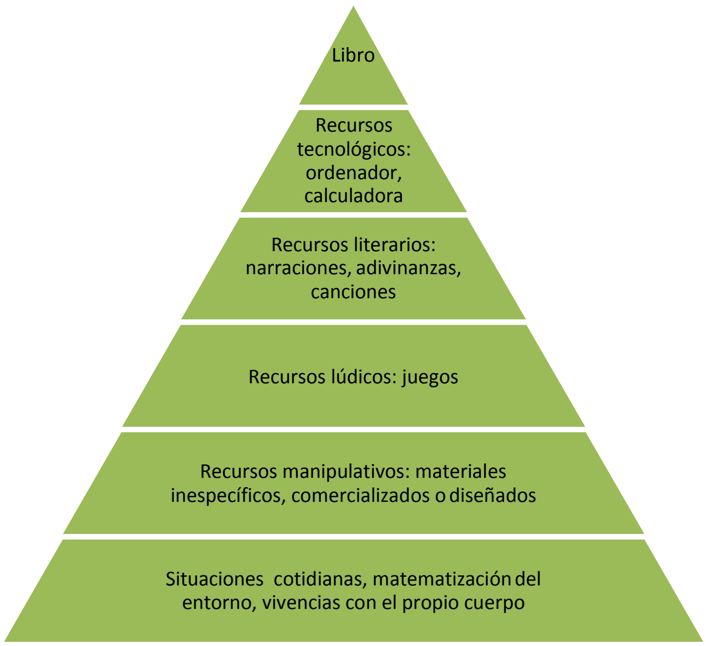


Figura 2. Pirámide de la Educación Matemática (Alsina, 2010)

En la base están los recursos que necesitan todos alumnos y que, por lo tanto, se podrían y deberían "consumir" diariamente: las situaciones problemáticas y los retos que surgen en la vida cotidiana de cada día, la observación y el análisis de los elementos matemáticos del entorno, la manipulación con materiales diversos, y los juegos, entendidos como la resolución de situaciones problemáticas. Después aparecen los que deben "tomarse" alternativamente varias veces a la semana, como los recursos literarios y los recursos tecnológicos. Por último, en la cúspide, se encuentran los recursos que deberían usarse de forma ocasional, concretamente los cuadernos de actividades. Sin embargo, los cuadernos continúan ejerciendo un control considerable en el diseño y el desarrollo de la enseñanza de las matemáticas en Educación Infantil (Lacasta y Wilhelmi, 2008), por lo que en realidad, en la práctica diaria de muchos docentes este organigrama está invertido: en la base están los libros de texto, mientras que la matematización del entorno, el uso de materiales manipulativos, juegos, etc. "se consumen muy poco". En nutrición, la inversión de la pirámide conlleva problemas de salud, como por ejemplo la obesidad. En educación matemática, la inversión del organigrama piramidal conlleva también graves problemas como los aprendizajes poco significativos, la desmotivación, la falta de comprensión, etc.

Parece necesario, pues, repensar qué tipo de actividades se ofrecen a los alumnos de las primeras edades. En este sentido, Alsina (en prensa), propone diversas fases para el diseño de buenas prácticas en el aula. Estas fases, como se verá, se inspiran principalmente en los postulados de la EMR

(Freudenthal, 1991), y tienen en cuenta los distintos tipos de conocimientos matemáticos planteados por la NCTM (2003): los contenidos y los procesos matemáticos.

Los conocimientos matemáticos

Desde el punto de vista de Alsina (en prensa), el diseño de buenas prácticas que fomenten la alfabetización matemática en las primeras edades requiere considerar las siguientes fases de trabajo:

Fase 1: Matematización del contexto de enseñanza-aprendizaje

En esta fase todavía no intervienen los alumnos. Consiste en analizar y establecer los contenidos matemáticos (de números y operaciones, álgebra, geometría, medida y análisis de datos y probabilidad) que se pueden trabajar en el contexto de aprendizaje y determinar a través de qué procesos se trabajan.

	Resolución de problemas	Razonamiento y demostración	Comunicación	Conexiones	Representación
Números y operaciones					
Álgebra					
Geometría					
Medida					
Análisis de datos y probabilidad					

Figura 3. Relación cartesiana entre contenidos y procesos matemáticos

Partir de este enfoque globalizado del conocimiento matemático ya desde las primeras edades, en la que todo está integrado, nos parece especialmente significativo, dado que cuando los alumnos usan las relaciones existentes en los contenidos matemáticos, en los procesos matemáticos y las existentes entre ambos, progresa su conocimiento de la disciplina y crece la habilidad para aplicar conceptos y destrezas con más eficacia en diferentes ámbitos de su vida cotidiana.

Fase 2. Trabajo previo en el aula

Cualquier actividad formativa requiere partir de los conocimientos previos de los alumnos, puesto que si la distancia entre lo que el alumno sabe y lo que se planifica que aprenda es demasiado grande, el aprendizaje difícilmente va a producirse. Y en el caso que se produzca, será un aprendizaje desconectado del resto, puesto que no será posible realizar ningún tipo de vínculo.

Desde este punto de vista, una vez determinado el contexto de enseñanza-aprendizaje se inicia un diálogo con los alumnos para recoger sus conocimientos previos y experiencias. Existen diversos recursos posibles para hacer emergen los conocimientos previos, aunque uno de los más adecuados son las buenas preguntas. En los procesos de interacción, diálogo y negociación, las buenas preguntas se erigen como uno de los instrumentos de mediación más idóneos, ya que pueden hacer avanzar desde unos primeros niveles de concienciación sobre lo que uno ya sabe o es capaz de hacer hacia niveles más superiores (Mercer, 2001).

En el marco de este diálogo, entre todos se pacta el material para trabajar en contexto y documentar el trabajo que va a realizarse durante el transcurso de la actividad: una cámara digital para poder documentar en contexto, o bien otros materiales que sean necesarios para llevar a cabo la actividad:

una cinta métrica, una calculadora, una libreta para anotar los descubrimientos o para representar una idea matemática, etc.

Fase 3: Trabajo en contexto

En esta fase es cuando se desarrolla la actividad matemática en el contexto de enseñanza-aprendizaje establecido, y la práctica docente del maestro debería favorecer que los alumnos usen y comprendan las matemáticas en dicho contexto. Para ello, como se detallará en el apartado correspondiente a la gestión de actividades matemáticas competenciales, el maestro debería provocar situaciones que inviten a los alumnos a pensar, indagar, argumentar, razonar, descubrir, comprobar, comunicar, conectar, modelar o bien representar ideas matemáticas. Así, pues, durante la realización de la actividad competencial es recomendable que el maestro intervenga haciendo preguntas, más que dando explicaciones.

Otro elemento interesante a considerar es la documentación de la actividad. Aunque no se trata de un requisito imprescindible, la documentación a través de fotografías, vídeo, anotaciones en el diario del maestro, etc. pueden tener un papel muy importante: en primer lugar, pueden servir para llevar a cabo procesos de reflexión acerca de la propia actividad que permitan mejorar actividades posteriores; en segundo lugar, pueden servir a los propios alumnos para observar y ser conscientes de su propia práctica; en tercer lugar, pueden servir para comunicar el trabajo realizado a las familias; y finalmente, también puede ser útiles para mostrar a la comunidad el trabajo que se realiza a través, por ejemplo, de presentaciones en el blog de la escuela.

Fase 4. Trabajo posterior en el aula

Esta fase es fundamental para que los alumnos compartan los conocimientos adquiridos en contexto, consiguiendo de esta forma fomentar la coconstrucción de nuevo conocimiento matemático a través del andamiaje colectivo así como la consolidación de aprendizajes ya adquiridos previamente.

Para lograr estas finalidades, de nuevo es aconsejable establecer un diálogo con los alumnos para que comuniquen lo que han aprendido, procurando en todo momento que utilicen un lenguaje matemático adecuado. Además, para interiorizar los aprendizajes adquiridos en contexto, puede resultar muy eficaz que los alumnos representen gráficamente el trabajo realizado.

Fase 5. Formalización de los aprendizajes adquiridos

Una de las finalidades de las matemáticas es representar de manera simbólica las situaciones concretas de la realidad que nos rodea. Por esta razón, una actividad matemática competencial debería finalizar, a medida que avanzan las posibilidades de representación de los alumnos, con la formalización de los aprendizajes matemáticos adquiridos.

Desde esta perspectiva, los alumnos deben ir adquiriendo progresivamente herramientas que les permitan formalizar los aprendizajes a través del lenguaje escrito en general, y el lenguaje algebraico en particular.

En el diagrama siguiente se representan esquemáticamente las diferentes fases que debería contemplar una buena práctica matemática:

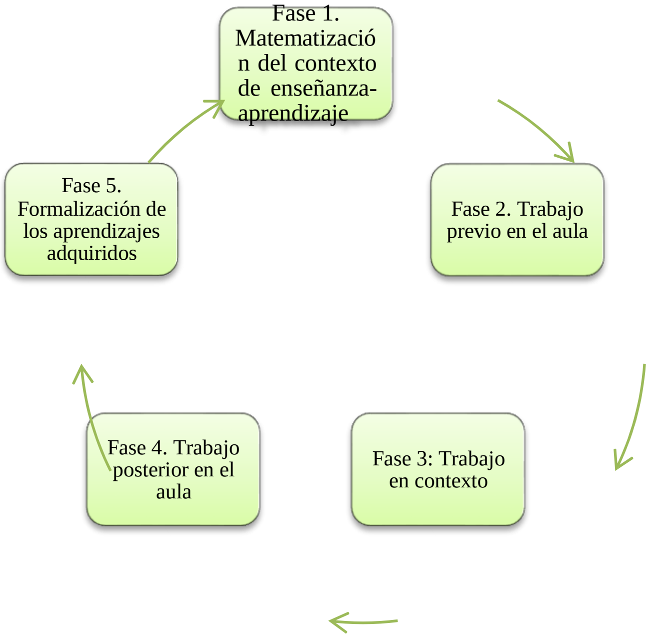


Figura 4. Fases de una actividad matemática competencial (Alsina, en prensa)

Como puede apreciarse, se trata de una secuencia continua de fases en un flujo circular. Ello significa que, una vez finalizada la actividad, el alumno dispondrá de un nuevo aprendizaje que va a servirle de base para emprender un nuevo ciclo. En esta nueva secuencia se planificarán otros aprendizajes para que, desde lo concreto, el alumno pueda conectar con lo formal interiorizado en una práctica matemática anterior, aumentando de esta forma la comprensión del conocimiento matemático.

LA GESTIÓN DE BUENAS PRÁCTICAS EN EL AULA

Diversos estudios han puesto de manifiesto que la práctica docente del maestro determina el aprendizaje que realizan los alumnos. En este sentido, parece evidente que el tipo de gestión de una buena práctica que contemple el ciclo de fases descrito en el apartado anterior requiere un maestro que participe activamente en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Alsina (en prensa), sugiere que esta participación debería contemplar algunos aspectos básicos como por ejemplo plantear retos a los alumnos que despierten su curiosidad; formular buenas preguntas que lleven a razonar sobre lo que se ha hecho y justificar los resultados; fomentar la comunicación y el uso de lenguaje matemático cada vez más preciso en el aula; tener presente la importancia de la representación; conectar los conocimientos matemáticos entre ellos, etc. En otras palabras, se deberían trabajar de forma explícita los procesos matemáticos descritos por el NCTM (2003): resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representación.

Desde este prisma, a continuación se ofrece una síntesis de ideas clave en relación al trabajo sistemático de los procesos matemáticos que pueden servir de orientación para una gestión eficaz de buenas prácticas matemáticas en Educación Infantil (para una revisión en profundidad, puede consultarse NCTM, 2003; Alsina, 2011, 2014).

Resolución de problemas

La resolución de problemas permite preguntar y responder preguntas dentro de las matemáticas y con las matemáticas (Niss, 2002). Si bien existe un consenso en este sentido, no parece existir el mismo grado de acuerdo respecto al significado y el uso de los problemas en el aula. Algunas ideas clave que deberían considerarse son:

- Hay cuatro aspectos referentes a la resolución de problemas que se deberían trabajar en el aula (NCTM, 2003): a) construir nuevo conocimiento matemático por medio de la resolución de problemas; b) resolver problemas que surgen de las matemáticas y en otros contextos; c) aplicar y adaptar una variedad de estrategias apropiadas para resolver problemas; y d) controlar y reflexionar sobre el proceso de resolver problemas matemáticos.

- Una situación problemática es una situación nueva de la que no se conoce de antemano el método de resolución. Deben distinguirse de los ejercicios de aplicación, en los que se conoce de antemano el método de resolución y sirven principalmente para poner en práctica un conocimiento previamente aprendido.
- La resolución de problemas se puede entender como el marco de aplicación de los diferentes bloques de contenido matemático. Además de considerar los problemas según el contenido, también se pueden interpretar en base al tipo de enunciado (visual o verbal), la finalidad (aprender una estrategia, aplicar una técnica, etc.), o bien la respuesta (abierta, cerrada).
- Se aprende a resolver problemas haciendo, manipulando, simulando, discutiendo, compartiendo, imaginando, observando, visualizando, etc. En el proceso de resolución se tendría que permitir que cada niño utilice la estrategia que se ajuste mejor a sus posibilidades: un dibujo, un esquema, el cálculo mental, la manipulación de un determinado material, etc.
- Una posible secuencia de tipos de problemas en las primeras edades es la siguiente (Alsina, 2006): situaciones reales; situaciones dramatizadas; situaciones manipulativas; una parte del enunciado con material y la otra parte verbal; situaciones gráficas, con imágenes e ilustraciones; enunciado oral-respuesta oral; enunciado oral-respuesta gráfica; enunciado gráfico-respuesta gráfica; introducción al enunciado escrito y la respuesta oral o gráfica; introducción al enunciado escrito y la respuesta escrita. Se trata, en definitiva, de partir de lo concreto (situaciones reales) para avanzar progresivamente a lo simbólico (lenguaje escrito).

Razonamiento y prueba

El trabajo sistemático del razonamiento y la prueba es fundamental en todas las edades para que los niños aprendan desde pequeños a razonar (argumentar, explicar, justificar) y probar (en las primeras edades comprobar, más que validar o demostrar) sus acciones y proposiciones, puesto que es el camino necesario para comprender el verdadero significado de las matemáticas. Algunas ideas clave que deberían considerarse son:

- Hay cuatro aspectos referentes al razonamiento y la prueba que se deberían trabajar en el aula (NCTM, 2003): a) reconocer el razonamiento y la prueba como aspectos fundamentales de las matemáticas; b) formular e investigar conjeturas matemáticas; c) desarrollar y evaluar argumentos y pruebas matemáticas; y d) escoger y usar varios tipos de razonamiento y métodos de prueba.
- En las primeras edades el razonamiento es sobre todo informal y se refiere a la capacidad de explicar, argumentar o justificar las acciones realizadas y las proposiciones, mientras que la prueba implica comprobar el resultado de dichas acciones y proposiciones. Desde este prisma, razonar y comprobar implica argumentar las afirmaciones que se hacen ("¿por qué piensas que es verdad?"); descubrir ("¿qué piensas que pasará ahora?"); justificar proposiciones ("¿por qué funciona esto?"); y hacer razonamientos inductivos, basados en la propia experiencia.
- A medida que los niños avanzan en la escolaridad deberían interiorizar otros tipos de razonamiento propios de las matemáticas: el razonamiento algebraico, por ejemplo al argumentar que el patrón de dos series de cubos "azul-verde" y "rojo-amarillo" es el mismo, y representarlo; el razonamiento geométrico, que se puede iniciar describiendo y comparando propiedades geométricas elementales de formas geométricas que no están físicamente presentes; o los razonamientos estadístico y probabilístico, que en las primeras edades se puede fomentar a través de tareas que impliquen la recogida y organización de datos, la comparación, etc.
- Los proyectos pueden favorecer el razonamiento y la prueba, junto a otras prácticas como las situaciones de experimentación y juego, en contraposición a otras prácticas docentes más descontextualizadas, poco significativas y a menudo orientadas a la adquisición de técnicas y símbolos a través de la repetición y la práctica.

- Una gestión de las prácticas matemáticas que favorezca el razonamiento y la prueba implica plantear buenas preguntas, más que dar explicaciones; favorecer la interacción y el contraste; e incentivar la indagación y el aprendizaje autónomo con la guía del adulto.

La comunicación

Nadie niega que la matemática sea, entre otras cosas, un lenguaje universal que permite comunicarse. Así, pues, los niños que tienen oportunidades y se sienten motivados y apoyados para hablar, escribir, leer y escuchar en las clases de matemáticas se benefician doblemente: comunican para aprender matemáticas y aprenden a comunicar matemáticamente. Algunas ideas clave que deberían considerarse son:

- Hay cuatro aspectos referentes a la comunicación que se deberían trabajar en el aula (NCTM, 2003): a) organizar y consolidar el pensamiento matemático a través de la comunicación; b) comunicar el pensamiento matemático con coherencia y claridad a los compañeros, maestros y otras personas; c) analizar y evaluar las estrategias y el pensamiento matemático de los otros; y d) usar el lenguaje matemático para expresar ideas matemáticas con precisión.
- El lenguaje oral y escrito son herramientas imprescindibles (y previas al lenguaje simbólico) para desarrollar y comunicar el pensamiento matemático, ya que favorecen la comprensión del conocimiento y la estructuración del pensamiento.
- La comunicación se tiene que distinguir de la información: informar implica transmitir en sentido unidireccional desde un emisor hacia un receptor; en cambio comunicar implica interactuar en sentido bidireccional dos o más personas.
- El trabajo sistemático de la comunicación en el aula de matemáticas requiere integrar los procesos de interacción, diálogo y negociación alrededor de los contenidos matemáticos y su gestión, puesto que los niños a menudo interpretan las normas establecidas de maneras diferentes, y muy a menudo también estas interpretaciones difieren de las que los maestros esperan.
- A nivel curricular se insiste en la necesidad de plantear buenas preguntas para favorecer la comunicación, sin embargo ha habido escasas aportaciones sobre qué características debería tener una buena pregunta, qué tipos de preguntas se tendrían que formular y cómo se tendrían que formular para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático. Las buenas preguntas para enseñar matemáticas, de acuerdo con Sullivan y Lilburn (2002), tienen tres características: a) más que recordar un hecho o reproducir una acción, requieren comprensión de la tarea, aplicación de técnicas y estrategias y análisis y síntesis de los conceptos implicados; b) permiten que los niños aprendan respondiendo preguntas, y que los maestros aprendan a partir de las respuestas de los niños; y c) permiten diversas respuestas aceptables.

Las conexiones

Se refieren a las relaciones entre los diferentes bloques de contenido matemático y entre los contenidos y los procesos matemáticos (intradisciplinariedad); las relaciones de las matemáticas con otras áreas de conocimiento (interdisciplinariedad); y las relaciones de las matemáticas con el entorno que nos rodea. Algunas ideas clave que deberían considerarse son:

- Hay tres aspectos referentes a las conexiones que se deberían trabajar en el aula (NCTM, 2003): a) reconocer y usar las conexiones entre ideas matemáticas; b) comprender cómo las ideas matemáticas se interconectan y construyen una sobre otras para producir un todo coherente; c) reconocer y aplicar las matemáticas en contextos no matemáticos.
- Las conexiones entre los diferentes bloques de contenido matemático ponen de manifiesto que las matemáticas no son una colección fragmentada de bloques de contenido, aunque con frecuencia se dividen y presentan así, sino que constituyen un campo integrado de conocimiento. Hay unas mismas estructuras matemáticas que se repiten: identificar (definir o

reconocer); relacionar (comparar); y operar (transformar), lo único que varía es el tipo de contenido.

- Las conexiones entre los contenidos y los procesos matemáticos evidencian que no son conocimientos independientes de una misma disciplina sino que se interrelacionan, se retroalimentan para favorecer la competencia matemática.
- Las conexiones entre las matemáticas y las otras áreas de conocimiento ponen de manifiesto la relevancia de trabajar las matemáticas en conexión con el arte, por ejemplo, trabajando las matemáticas a partir de pinturas y esculturas; con la música, trabajando a partir de canciones; con la psicomotricidad, trabajando aspectos diversos relativos a la orientación y la estructuración espacial, etc.
- Las conexiones entre las matemáticas y el entorno evidencian que el uso de contextos de vida cotidiana puede contribuir a comprender el papel social de las matemáticas, al fomentar el uso de las matemáticas en contextos no exclusivamente escolares.

La representación

Las representaciones se refieren a las formas de representar las ideas y procedimientos matemáticos, como por ejemplo imágenes, materiales concretos, tablas, gráficos, números, letras, entre otras. Muchas de las representaciones que existen actualmente son el resultado de una construcción cultural, que llevó muchos años determinar. Cuando los niños comprenden las representaciones matemáticas que se les presenta y además tienen oportunidades de crear otras, mejoran su capacidad para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos. La representación es, pues, un proceso indispensable para poder aprender. Si no hay representación del conocimiento no hay aprendizaje. Algunas ideas clave que deberían considerarse son:

- Hay tres aspectos referentes a la representación que se deberían trabajar en el aula (NCTM, 2003: a) crear y usar representaciones para organizar, registrar, y comunicar ideas matemáticas; b) seleccionar, aplicar y traducir representaciones matemáticas para resolver problemas; y c) usar representaciones por modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos.
- La representación de las ideas y procedimientos matemáticos puede tener formas diversas en las primeras edades, por ejemplo a través de objetos físicos (una pieza con forma de triángulo), el lenguaje natural (la palabra “triángulo”), dibujos (triángulos de diferentes características), y símbolos convencionales (un triángulo equilátero).
- El desarrollo progresivo de la representación de las ideas y procedimientos matemáticos va de lo concreto a lo abstracto (Freudenthal, 1991). En este sentido, se respeta y favorece su proceso de adquisición cuando se fomenta por ejemplo que las primeras representaciones sea concretas, a partir de objetos o dibujos y usando el lenguaje natural; posteriormente pictóricas, usando tablas o diagramas; y finalmente convencionales, usando símbolos abstractos.
- La adquisición progresiva de la representación de las ideas y procedimientos matemáticos aumenta la capacidad para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos. En otras palabras, permite hacer modelos e interpretar la realidad. Un modelo es, pues, una representación ideal de un aspecto concreto de la realidad usada con finalidades de interpretación.
- Pueden usarse distintos tipos de modelos: a) modelos manipulables (materiales físicos con los que trabajan los niños, como por ejemplo una regleta que representa el número cinco); b) modelos ejemplificadores o simuladores (por ejemplo el dibujo de un itinerario que puede hacer un niño, o en términos más complejos, el plano esquemático de la red del metro de una gran ciudad).

UN EJEMPLO DE BUENA PRÁCTICA EN EDUCACIÓN INFANTIL

Se muestra la propuesta “Rotondas”, que incluye varias tareas. Esta actividad se desarrolló en la Escuela

Balandrau (Girona), en el aula de 5-6 años de la maestra Fátima Dalmau, responsable de la implementación y documentación.

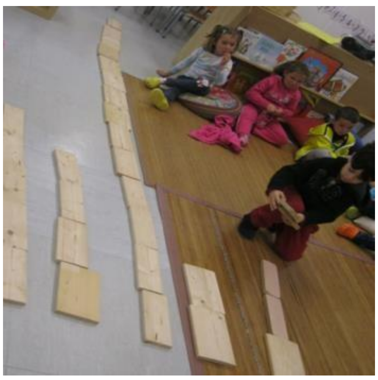
Alrededor de la escuela Balandrau hay varias rotondas, y desde el patio se ven circular los vehículos que pasan. Ello genera gran curiosidad a los alumnos, por lo que se establece un diálogo en el aula sobre los tipos de vehículos que pasan por la rotonda (coches, camiones, furgonetas, bicicletas, *skaters*, tractores, etc.). En el marco de este diálogo se pregunta a los alumnos qué vehículos circulan con mayor frecuencia por la rotonda, de manera que la primera tarea consiste en contar los vehículos que pasan durante una cantidad determinada de tiempo.


Figuras 5-6. Recuento del número de vehículo que pasan por la rotonda

Los alumnos, por grupos, van contabilizando los diferentes tipos de vehículos que circulan por la rotonda: coches, motos, bicicletas, etc. Cada grupo se responsabiliza de un tipo de transporte y va registrando los datos (marcando una cruz o un palito cada vez que pasa un vehículo). Los datos recogidos se ponen en común en una tabla:

Figura 7. Frecuencias absolutas del número de vehículos que pasan por la rotonda

Una vez recogidos y organizados los datos en la tabla, se propone una nueva tarea a los alumnos que consiste en representar los datos obtenidos usando materiales. Cada grupo de trabajo puede escoger libremente el material a partir del cual considera que es mejor representar los datos obtenidos: piezas de madera, etc.

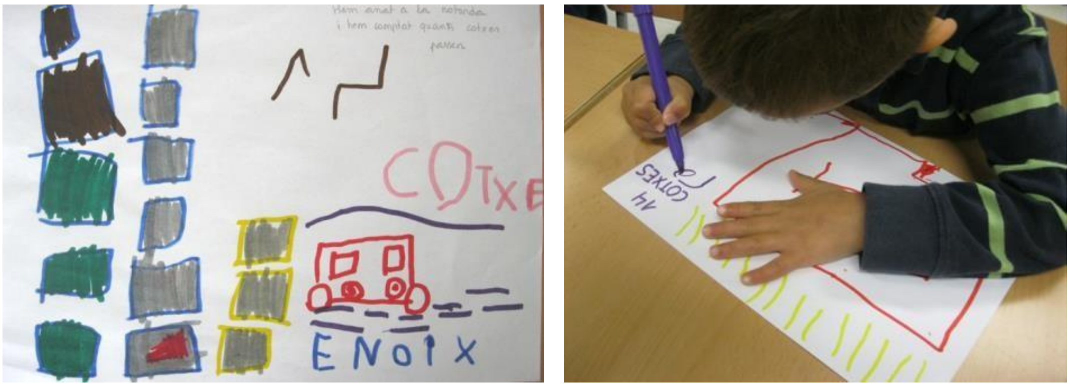




Figuras 8-10. Representación horizontal con piezas de madera

Figuras 11-12. Representación vertical con piezas de madera

Figuras 13-14. Representación con otros materiales

Posteriormente se invita a los alumnos a representar en el papel los datos obtenidos:



Figuras 15-16. Representaciones en el papel

Una vez finalizada la representación se hace una puesta en común. La maestra formula preguntas y los alumnos van interviniendo para explicar lo que han aprendido.

En síntesis, considerando la fundamentación teórica descrita y las fases para el diseño de una buena práctica matemática, en la propuesta anterior se realiza una planificación previa de los contenidos a trabajar en el contexto de aprendizaje (numeración y estadística principalmente) y se decide a través de qué procesos se van a trabajar (resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representación). Ello conlleva que durante toda la secuencia se lleve a cabo un tipo de gestión que prioriza el planteamiento de preguntas más que las explicaciones; la coconstrucción y reconstrucción de conocimientos matemáticos a partir de la interacción, la negociación y el diálogo; la representación de las ideas matemáticas usando diferentes recursos; etc.

El hecho de plantear la propuesta a partir de un interés natural de los niños en un contexto de su vida cotidiana puede haber contribuido, entre otros aspectos, a propiciar el interés por las matemáticas y su disposición a utilizarlas para dar sentido a su mundo físico y social.

LA EVALUACIÓN DE BUENAS PRÁCTICAS EN EL AULA

La evaluación de prácticas docentes que incorporen los procesos matemáticos de forma sistemática como herramientas para trabajar los diferentes contenidos requiere elaborar indicadores de referencia que permitan analizar la presencia (o no) de los procesos en dichas prácticas. Desde este punto de vista, Coronata (2014) y Alsina y Coronata (2014) han elaborado y analizado la validez de un instrumento de evaluación que incluye cinco categorías que se corresponden con los cinco procesos indicados por el NCTM (2003). El diseño, construcción y validación del instrumento contempló seis fases: 1) análisis histórico-epistemológico de los procesos matemáticos y sus significados; 2) estudio de investigaciones sobre los procesos matemáticos en las prácticas docentes del profesorado de Educación Infantil; 3) análisis del tratamiento otorgado a los procesos matemáticos en el currículo; 4) construcción de la versión piloto del instrumento; 5) revisión mediante el juicio de expertos; y 6) construcción de la versión final del instrumento. Las fases 1, 2 y 3 consideran la revisión de literatura e investigaciones que permiten diseñar el instrumento, mientras que las fases 4, 5 y 6 se relacionan específicamente con la construcción y validación del instrumento.

Posteriormente se ha analizado la fiabilidad del instrumento (Maurandi, Alsina y Coronata, en revisión). La presencia de cada indicador se mide con una escala tipo Likert que va de 1 (ausencia) a 5 (presencia):

Tabla 1. Pauta de evaluación de la presencia de los procesos matemáticos en la práctica docente

1. Indicadores de RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Plantea situaciones problemáticas usando diferentes tipos de apoyo (oral, concreto, pictórico).					
Contextualiza las situaciones problemáticas a la vida cotidiana de los alumnos.					
Propone situaciones problemáticas de diversos tipos.					
Realiza preguntas que generan la investigación y exploración para solucionar al problema.					
Permite a los niños la utilización de material concreto y/o pictórico con apoyo oral para la resolución de problemas.					
Mantiene a los niños comprometidos con el proceso de resolución de problemas.					
Promueve la discusión en torno a las estrategias de resolución de problemas y los resultados.					
2. Indicadores de RAZONAMIENTO Y PRUEBA:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Invita a hacer conjeturas.					
Permite que los propios alumnos descubran, analicen y propongan diversas vías de resolución.					
Pide a los alumnos que expliquen, justifiquen o argumenten las estrategias o técnicas que utilizaron durante la resolución.					
Plantea interrogantes para que los alumnos argumenten sus respuestas.					
Promueve que los alumnos comprueben conjeturas de la vida cotidiana.					
Promueve el apoyo del razonamiento matemático.					
Entrega retroalimentación con material concreto permitiendo el pensamiento divergente.					
3. Indicadores de CONEXIONES:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Considera las experiencias matemáticas cotidianas de los alumnos para avanzar hacia las matemáticas más formales.					
Realiza conexiones entre diversos contenidos matemáticos.					

	1	2	3	4	5
Desarrolla actividades matemáticas vinculadas a contextos musicales.					
Trabaja las matemáticas vinculándolas con la literatura infantil.					
Relaciona las matemáticas con la expresión artística.					
Genera conocimiento matemático a través de contextos vinculados a la psicomotricidad.					
Promueve que los alumnos apliquen el conocimiento matemático a las situaciones de la vida cotidiana.					
4. Indicadores de COMUNICACIÓN:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Promueve con mayor énfasis la comunicación en el aula que la entrega de información unidireccional.					
Favorece la interacción con otros para aprender y comprender las ideas matemáticas.					
Impulsa el intercambio de ideas matemáticas a través del lenguaje oral, gesticular, gráfico, concreto y /o simbólico.					
Pide al niño explicitar con lenguaje matemático adecuado sus estrategias y respuestas.					
Incentiva en los alumnos el respeto por la forma de pensar y de exponer sus puntos de vista en torno al contenido matemático.					
Fomenta la escucha atenta de los puntos de vista de los demás.					
Interviene mayoritariamente a través de preguntas, más que a través de explicaciones.					
5. Indicadores de REPRESENTACIÓN:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Pide a los niños que hablen, escuchen y reflexionen sobre las matemáticas para avanzar hacia la representación simbólica.					
Utiliza materiales concretos como recursos para representar ideas matemáticas.					
Utiliza modelos ejemplificadores (esquemas, entre otros) para mostrar maneras de resolver situaciones problemáticas.					
Trabaja en los niños las representaciones concretas (dibujos, etc.).					
Trabaja en los niños las representaciones pictóricas (signos, etc.).					
Trabaja en los niños las representaciones simbólicas (notación convencional).					
Muestra un trabajo bidireccional (de lo concreto a lo abstracto y de lo abstracto a lo concreto).					

Para realizar el análisis, se realizan 95 entrevistas a maestros. Los datos obtenidos se han analizado con el paquete estadístico de R Core Team (2014) R versión 3.1.0 sobre una plataforma i686-pc-linux-gnu (32-bit). Se ha empleado el paquete psych (Revelle, 2015) para el cálculo del coeficiente alfa de Cronbach.

Tabla 2. Alfas de Cronbach estandarizadas para los procesos matemáticos

Proceso matemático	alfa-std
Resolución de problemas	0.86
Razonamiento y prueba	0.88

Conexiones	0.82
Comunicación	0.81
Representación	0.79

El coeficiente alfa de Cronbach, basado en puntuaciones estandarizadas, más bajo obtenido corresponde al quinto proceso “Representación”, con un valor de 0.79 que según el criterio de George y Mallery (2006), se puede valorar como una consistencia interna aceptable. En general, siguiendo los parámetros de estos mismos autores, la valoración media de la consistencia interna es buena.

Estos valores de los coeficientes de alfa de Cronbach obtenidos permiten afirmar que todos los ítems están relacionados significativamente con aquellos construidos para evaluar la misma faceta del factor, por lo que forman parte del mismo constructo. Así, pues, en estas circunstancias el cuestionario descrito constituye una herramienta base para medir la presencia o ausencia de los procesos matemáticos en la práctica docente.

Referencias

Alsina, Á. (2006). *Como desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años.* Barcelona: Editorial Octaedro-Eumo.

Alsina, Á. (2010). La “pirámide de la educación matemática”, una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. *Aula de Innovación Educativa*, *189,* 12-16.

Alsina, Á. (2011). *Aprendre a usar les matemàtiques. Els processos matemàtics: propostes didàctiques per a l’Educació Infantil*. Vic: Eumo Editorial.

Alsina, Á. (2013). Early Childhood Mathematics Education: Research, Curriculum, and Educational Practice. *Journal of Research in Mathematics Education, 2*(1), 100-153.

Alsina, Á. (2014). Procesos matemáticos en Educación Infantil: 50 ideas clave. *Números 86,* 5-28.

Alsina, Á. (en prensa). Diseño, gestión y evaluación de actividades matemáticas competenciales en el aula. *Epsilon.*

Alsina, Á. y Coronota, C. (2014). Los procesos matemáticos en las prácticas docentes: diseño, construcción y validación de un instrumento de evaluación. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 3*(2), 21-34.

Coronata, C. (2014). *Presencia de los procesos matemáticos en la enseñanza del número de 4 a 8 años. Transición entre la Educación Infantil y Primaria*. Girona: Universidad de Girona. Tesis Doctoral

EACEA P9 Eurydice (2011). *La enseñanza de las matemáticas en Europa: Retos comunes y políticas nacionales*. Madrid: Secretaría General Técnica, Subdirección General de Documentación y Publicaciones del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Freudenthal, H. (1991). *Revising mathematics education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

George, D. y Mallery, P. (2006). *Spss for Windows step by step: A Simple Guide and Reference. 13.0 Update* (6ª ed.). Boston: Pearson Education, Inc.

Gómez, P., Cañadas, M.C., Bracho, R., Restrepo, A.M. y Aristizábal, G. (2011). Análisis temático de la investigación en Educación Matemática en España a través de los Simposios de la SEIEM. En M. Marín, G. Fernández, L.J. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 371-382). Ciudad Real: SEIEM.

Lacasta, E. y Wilhelmi, M. R. (2008). Juanito tiene cero naranjas. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L.J. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 403-414). Badajoz: SEIEM.

Maurandi, A., Alsina, Á. y Coronata, C. (en revisión). Los procesos matemáticos en la práctica docente: análisis de la fiabilidad de un cuestionario de evaluación.

Mercer, N. (2001). *Palabras y mentes.* Barcelona: Paidós.

NAEYC y NCTM (2013). Matemáticas en la educación infantil: Facilitando un buen inicio. Declaración conjunta de posición. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(1), 1-23.

NCTM (2015). *De los principios a la acción. Para garantizar el éxito matemático de todos.* Reston, VA: NCTM.

NCTM. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Granada: Servicio de Publicaciones de la SAEM Thales.

Niss, M. (2002). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: the Danish Kom Project*. Roskilde: Roskilde University.

Planas, N. y Alsina, A. (2014). Epílogo. En N. Planas y A. Alsina (2009), *Educación matemática y buenas prácticas* (pp. 265-272). Barcelona: Graó (2ª edición).

Price, M.H. (1986). The Perry Movement in school mathematics. En M. H. Price (Ed.), *The development of the secondary curriculum* (pp. 7-27). Londres: Croom Helm.

R Core Team (2014). *R: A language and environment for statistical computing. Viena: R Foundation for Statistical Computing*. Recuperado de: http://www.R-project.org.

Revelle, W. (2015). *Psych: Procedures for Personality and Psychological Research. Evanston, Illinois: Northwestern University*. Recuperado de: http://CRAN.R-project.org/package=psych

Sierra, T.A. y Gascón, J. (2011). Investigación en Didáctica de las Matemáticas en la Educación Infantil y Primaria. En M. Marín, G. Fernández, L.J. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 125-163). Ciudad Real: SEIEM.

Sullivan, P. y Lilburn, P. (2002). *Good questions for Math Teaching.* Australia: Oxford University Press

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA INFANTIL

Research on Mathematics Early Childhood Education

Salinas, Mª. J.
Universidade de Santiago de Compostela

Tal y como señala Lupiáñez (2015) uno de los objetivos de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) fue el de promover la creación y estabilización de grupos de investigadores en educación matemática que abordaran problemas de indagación específicos. En este sentido, dentro de la SEIEM existe, desde su inicio en 1995, un grupo dedicado a la investigación en el ámbito de la educación matemática infantil, coordinado inicialmente por Carmen Corral (Universidad de Oviedo). En 2011, siendo presidente de la SEIEM Lorenzo Blanco, se decide dar un nuevo impulso a este grupo, que había decaído en años anteriores, bajo la coordinación de Mequè Edo (UAB) y Carlos de Castro (UAM) y después de María Jesús Salinas (USC).

La característica distintiva del Grupo de Investigación en Educación Matemática Infantil (en adelante, IEMI) es el interés por una investigación muy cercana a la práctica en el aula, orientada al diseño, desarrollo y evaluación del currículo matemático de Educación Infantil. Se contemplan también, dentro de los intereses del grupo, las investigaciones que tratan la transición de Educación Infantil a Primaria, así como los estudios sobre el aprendizaje de alumnado con necesidades educativas especiales, cuyo currículo matemático sea cercano al de la Educación Infantil. Desde este prisma, no se excluye ninguna aproximación metodológica de investigación, siempre que sea centrada en Educación Matemática Infantil.

Hasta el año 2011, tal como señalan Sierra y Gascón (2011), solo se contaba con seis trabajos referidos a la etapa de Educación Infantil en las publicaciones de las SEIEM. Y es a partir de este mismo año cuando, gracias a la reactivación del grupo IEMI, esta tendencia se modifica y aparece un cuerpo de investigaciones sobre educación matemática infantil cada vez más cohesionado. Como indica Alsina (2016), hasta este momento los trabajos se han centrado principalmente en tres temas: 1) la formación inicial de maestros de Educación Infantil: este campo de investigación se trata, en algunas ocasiones, desde un enfoque didáctico concreto como por ejemplo la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) o la Educación Matemática Realista (EMR); 2) la adquisición y el desarrollo del pensamiento matemático infantil: la mayoría de los estudios se centran, hasta el momento, en el numeración y el cálculo; 3) existe un tercer grupo de trabajos, con menor peso hasta el momento, que analizan algunos recursos o contextos de aprendizaje para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático como los contextos de vida cotidiana, los juegos, los cuentos, etc. En definitiva, pues, "parece que las líneas para seguir avanzando están marcadas, y pasan necesariamente por realizar estudios que se sustenten en un determinado enfoque teórico, una metodología de investigación concreta y un contenido claro que se aborde desde un enfoque didáctico concreto".

Desde esta perspectiva, en este seminario se presentan tres ponencias que abarcan aspectos fundamentales de la investigación matemática infantil.

En la primera ponencia, el Doctor Ángel Alsina, de la Universidad de Girona, plantea algunos elementos que se deberían considerar en el diseño, la gestión y la evaluación de buenas prácticas en el aula de Educación Infantil, inspirado principalmente en las aportaciones de la Educación Matemática Realista y el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos. Para

Salinas, Mª. J. (2016). Investigación en Educación Matemática Infantil. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 89-91). Málaga: SEIEM.

el diseño considera los contextos de aprendizaje y los conocimientos matemáticos; para la gestión se aportan algunas ideas clave acerca del trabajo de los contenidos a través de los procesos matemáticos; y para la evaluación se presenta un instrumento para analizar la presencia de los procesos matemáticos en las prácticas de aula.

A continuación la Doctora Mequè Edo, de la Universidad Autónoma de Barcelona, revisa la presencia de la Investigación en Educación Matemática Infantil en congresos de Didáctica de la Matemática a nivel nacional e internacional. Destaca la primera conferencia plenaria del Grupo Internacional del Psychology of Mathematics Education (PME 2002) centrada exclusivamente en educación matemática infantil, o la creación en el 6º Congress of European Research in Mathematics Education (CERME6 2009) del primer grupo de trabajo de una sociedad europea de didáctica de la matemática, centrado en educación infantil bajo el nombre de Early Years Mathematics (EYM), así como los trabajos presentados en la SEIEM. También visualiza las principales temáticas de investigación presentadas por estos grupos en dichos congresos y se focaliza en las principales contribuciones sobre matemáticas y juego en educación infantil.

Y por último, el Doctor Carlos de Castro, a partir del análisis de los documentos curriculares sobre educación matemática infantil en los últimos 40 años, describe algunas tendencias detectadas en la evolución de estos documentos, como la ampliación del rango de edad incluyendo a los niños de 0 a 3 años, la consideración de expectativas de aprendizaje por edades, la distancia entre el modelo de investigación dominante en 0-3 años y las prácticas de aula, la invisibilidad curricular y la complejidad epistémica de algunos contenidos y procesos matemáticos, y la mención explícita de teorías didácticas dentro de documentos curriculares. Se presentan implicaciones e interrogantes relacionados con estas tendencias para promover la investigación en educación matemática infantil dentro de las líneas desarrolladas por los diferentes grupos de trabajo de la SEIEM.

Esperamos, pues, que estas tres ponencias contribuyan a que los asistentes al Seminario puedan tener una amplia panorámica sobre la investigación en educación matemática infantil.

Referencias

Alsina, Á. (2016). Contribuciones de la investigación en educación matemática infantil para el diseño, gestión y evaluación de buenas prácticas. En Editor1, Editor2 y Editor3 (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. inicial-final). Málaga: SEIEM.

Lupiáñez, J. L. (2015). Investigaciones sobre pensamiento numérico y algebraico. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), Investigación en Educación Matemática XIX (pp. 17-19). Alicante: SEIEM.

Sierra, T.A. y Gascón, J. (2011). Investigación en Didáctica de las Matemáticas en la Educación Infantil y Primaria. En M. Marín, G. Fernández, L.J. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 125-163). Ciudad Real: SEIEM

EL ESTUDIO DE DOCUMENTOS CURRICULARES COMO ORGANIZADOR DE LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA INFANTIL

Study of curricular documents as an organizer of research in early mathematics education

De Castro, C.

Universidad Autónoma de Madrid

Resumen

En este trabajo se describen algunas tendencias detectadas en la evolución de documentos curriculares sobre educación matemática infantil en los últimos 40 años. Entre ellas destacan la ampliación del rango de edad incluyendo a los niños de 0 a 3 años, la consideración de espectativas de aprendizaje por edades, la distancia entre el modelo de investigación dominante en 0-3 años y las prácticas de aula, la invisibilidad curricular y la complejidad epistémica de algunos contenidos y procesos matemáticos, y la mención explícita de teorías didácticas dentro de documentos curriculares. Se presentan implicaciones e interrogantes relacionados con estas tendencias para promover la investigación en educación matemática infantil dentro de las líneas desarrolladas por los diferentes grupos de trabajo de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

Palabras clave: *cero a tres años, currículo, educación infantil, educación matemática, estándares, investigación, matemáticas.*

Abstract

In this paper I describe some trends identified in the evolution of mathematics education curricular documents for the early childhood over the past 40 years. These include extending the age range from 0 to 3 years, the consideration of learning expectations by age, the distance between dominant model of research in 0-3 years and "mathematical" practices in the classroom, curricular invisibility and epistemic complexity of some mathematical contents and processes, and explicit reference to didactical theories on mathematics education in curricular documents. I present implications and questions related to these trends to promote research in early mathematics education within the lines developed by different working groups of the Spanish Society for Research in Mathematics Education (SEIEM).

Keywords: *curriculum, early childhood education, standards, research, mathematics, mathematics education, toddler, zero to three years.*

DOCUMENTOS CURRICULARES SOBRE EDUCACIÓN MATEMÁTICA INFANTIL: UNA PRIORIDAD EN EL GRUPO IEMI DE LA SEIEM

Dentro de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) existe, desde su inicio en 1995, un grupo dedicado a la investigación en el ámbito de la educación matemática infantil, coordinado inicialmente por Carmen Corral (Universidad de Oviedo). En 2011, siendo presidente de la SEIEM Lorenzo Blanco, se decide dar un nuevo impulso a este grupo, que había

De Castro, C. (2016). El estudio de documentos curriculares como organizador de la investigación en educación matemática infantil. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 92-105). Málaga: SEIEM.

decaido en años anteriores, bajo la coordinación de Mequè Edo (UAB) y Carlos de Castro (UAM) y después de María Jesús Salinas (USC).

La característica distintiva del Grupo de Investigación en Educación Matemática Infantil (en adelante, IEMI) es el interés por una investigación muy cercana a la práctica en el aula, orientada al diseño, desarrollo y evaluación del currículo matemático de educación infantil.

Este tipo de investigación tiene un punto de partida natural en la reflexión curricular, que se fundamenta en el estudio de "documentos curriculares", tomados en un sentido amplio, en la línea del Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS) dentro del modelo MTSK (Muñoz-Catalán, Contreras, Carrillo, Rojas, Montes y Climent, 2015). Así, consideramos "documentos curriculares" los currículos nacionales de matemáticas (MEC, 1991; MECD, 2004; MEC, 2008), currículos más "locales" -autonómicos, en España; estatales, en EEUU, etc.- (Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid, 2008; *The New York State Education Department*, 2011), los estándares para el aprendizaje de las matemáticas elaborados por instituciones de prestigio mundial (NCTM, 2000, 2003), los capítulos de *handbooks* internacionales de investigación (Clements y Sarama, 2007; Mulligan y Vergnaud, 2006), publicaciones internacionales de editoriales de gran prestigio en el área (English y Mulligan, 2013), e incluso libros de texto para la formación de maestros en educación matemática infantil (Castro y Castro, 2016; Chamorro, 2005; Clements y Sarama, 2009; Clements y Sarama, 2016; Geist, 2009). Dentro del grupo IEMI de la SEIEM, este interés por los documentos curriculares ha dado lugar ya a varias publicaciones (Alsina, 2015b, 2016), mientras que en el ámbito más amplio de la SEIEM se han elaborado trabajos que analizan documentos curriculares (Rico y Lupiáñez, 2008).

Los documentos citados en este trabajo abarcan un periodo extenso de cerca de 40 años. La lista de documentos no pretende ser exhaustiva. Este trabajo aborda dos objetivos principales: (1) Describir fenómenos que pueden observarse en la evolución de los documentos curriculares; (2) Establecer líneas de investigación coherentes con los fenómenos observados.

FENÓMENOS OBSERVADOS EN LA EVOLUCIÓN DE LOS DOCUMENTOS CURRICULARES

En los próximos apartados voy a describir algunos fenómenos que pueden observarse en la evolución de los documentos curriculares seleccionados. Después, explicaré cómo a partir de estos fenómenos puede organizarse parte de la investigación en educación matemática infantil.

Ampliación progresiva del rango de edad al nivel (Pre-K) (0 a 3 años)

En los primeros documentos del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 1980, 1989, 1991) la primera franja de edad considerada es la de 5 a 9 años (etapa K-4). El punto de inicio es el kindergarten, curso de adaptación a la escuela elemental (primaria) que niños y niñas comienzan a la edad de 5 años. En los años 80, las edades de 0 a 3 (incluso a 4) años están ausentes en estos influyentes documentos.

A partir del año 2000, en los *Principios y Estándares para la Educación Matemática* (NCTM, 2000, 2003), esta situación comienza a cambiar, al incluirse la etapa de *Prekindergarten*:

> Desde el nacimiento hasta los cuatro años tienen lugar muchos desarrollos matemáticos importantes para los niños. Tanto si están al cuidado de la familia antes de entrar en la escuela, como si lo están al de personas ajenas, todos necesitan que se atienda y apoye su innato deseo de aprender (NCTM, 2003, p. 77).

No obstante, aunque se produce un "guiño" al periodo que abarca desde el nacimiento a los cuatro años, los listados de espectativas de aprendizaje -contar con comprensión, usar modelos para desarrollar nociones de valor posicional, etc.- (NCTM, 2003, p. 82) corresponden más al rango de edad de 5 a 7 años (K-2).

En el año 2000, se celebra en Arlington (Virginia) la *Conferencia sobre Estándares para la Educación Matemática en Kindergarten y Prekindergarten*. Esta conferencia da lugar a una publicación (Clements, Sarama y DiBiase, 2004) en la que se proponen contenidos matemáticos adecuados para los niños de 2 años (Clements, 2004) que pueden consultarse en De Castro, Flecha y Ramírez (2015, pp. 91-93). Este documento es fundamental, por establecer espectativas de aprendizaje para pequeños de edades no consideradas en documentos curriculares americanos con anterioridad. Además, se trata de un documento que trata el tema con extensión y profundidad y está basado en resultados de investigación.

Dentro del proyecto de los *Focos Curriculares* (NCTM, 2006), que en principio abarcaba desde *Kindergarten* hasta el 8º grado (5 a 14 años), se desarrollan con posterioridad los *Focos en Prekindergarten* (Fuson, Clements y Beckman, 2009). En este documento, siguiendo la línea de los *Focos Curriculares*, que tratan de desarrollar y concretar el *principio curricular*, centrándose en "matemáticas importantes y bien articulado a través de diferentes niveles" (NCTM, 2003, p. 15), se especifica cuáles son las matemáticas importantes para alumnos de 2 a 4 años, diferenciando dentro de este rango de edad tres etapas: 2-3 años inicial (early 2s/3s), 2-3 años avanzado (later 2s/3s), y 4 años (4s/Pre-Ks).

Los *Estándares Estatales Comunes de Estados Unidos*, adoptados por 45 de los 50 estados (NGA Center & CCSSO, 2010) comienzan en *kindergarten* (5 años). Algunos estados han desarrollado documentos curriculares para *prekindergarten*, alineados con los *Estándares Comunes*, de los que también puede obtenerse información de interés (The New York State Education Department, 2011).

La observación conjunta de los documentos de Clements (2004) y Fuson y otros (2009) permite una aproximación a la enseñanza de las matemáticas para niños de 2 y 3 años basada en resultados de investigación. A partir de aquí, para seguir avanzando hacia las "profundidades" del ciclo de 0 a 3 años hay que "descender" un nivel, a documentos del tipo de currículos locales (The New York State Education Department, 2011) o libros de texto de autores de prestigio (Clements y Sarama, 2009; Geist, 2009) que recogen resultados de investigación (Sarama y Clements, 2009).

Geist (2009) propone un "currículo matemático" para niños de 0 a 3 años. Su planteamiento de qué se entiende por matemáticas con bebés (0-1 años) contiene opciones cuestionables, como la inclusión como contenido matemático de la permanencia del objeto (Geist, 2009, p. 151). Coincidiendo en este punto particular, Vergnaud (1991, p. 24) propone la permanencia del objeto como ejemplo de "cálculo relacional", término con el que este autor intenta clarificar y hacer explícita la noción de razonamiento (p. 28).

Estos últimos ejemplos permiten entender que profundizar en el "currículo matemático" en edades de 0 a 2 años va más allá del análisis de documentos curriculares, pues requiere un posicionamiento acerca de qué es hacer matemáticas, o qué tipo de actividad contribuye al desarrollo del pensamiento matemático, y cómo lo hace, en estas edades.

El interés que tiene profundizar en el currículo matemático de 0 a 3 años se justifica por la obligación legal de que en los centros que imparten primer ciclo de educación infantil, "Por cada 6 unidades o fracción deberá haber, al menos, un Maestro Especialista en Educación Infantil o grado equivalente" (Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid, 2008b, p. 17). Esto hace que el rango de edad de 0 a 3 años tenga interés para maestras y maestros en formación, como posible salida profesional propia de su titulación, para sus profesores, y educadores matemáticos e investigadores en este ámbito.

Del currículo "minimalista" a las espectativas de aprendizaje por edades

Balfanz (2004), en su trabajo titulado "¿Por qué enseñamos a los niños pequeños tan pocas matemáticas? Algunas consideraciones históricas" sostiene que:

> El currículo minimalista centrado en los diez primeros números y el reconocimiento de formas sencillas […] ha sido predominante en los últimos 60 años. Restos de los programas matemáticos creados por pioneros de la educación infantil como Goodrich, Froebel o Montessori pueden todavía encontrarse en los centros de educación infantil, pero en su mayoría son artefactos desprovistos de su contenido matemático profundo (p. 9).

Este autor explica que durante los dos pasados siglos se han ido alternando visiones contrapuestas sobre qué experiencias matemáticas son adecuadas en los primeros años, oscilando desde el desarrollo de profundos currículos matemáticos como el de Froebel, hasta la eliminación completa de contenidos matemáticos de la educación infantil basada en concepciones, de origen psicológico o pedagógico, que apuntaban a que es innecesario o incluso perjudicial enseñar matemáticas en la educación infantil (Balfanz, 2004).

Aunque en la actualidad se pueden encontrar rasgos de este minimalismo curricular en las prácticas de aula en las escuelas infantiles, se están produciendo cambios en documentos curriculares que señalan una clara tendencia hacia la determinación de espectativas de aprendizaje matemático por edades. Estos cambios obedecen a que cada vez hay resultados más sólidos de revisiones de investigación que apuntan a que el conocimiento numérico de los niños al final de la educación infantil es el mejor predictor, no solo del rendimiento matemático futuro, sino también de las habilidades tempranas de lectura (Castro y Castro, 2016; Clements y Sarama, 2009; NRC, 2014b).

En este sentido, Clements (2004) realiza una síntesis de propuestas de espectativas de aprendizaje para los primeros años, de la que aquí presentamos como ejemplo un pequeño extracto sobre el conteo:

De los 2 a los 4 años, niñas y niños pueden: 1) Desarrollar la capacidad de formar colecciones de hasta 4 objetos sin dar la cantidad verbalmente. Por ejemplo, mostrándoles 3 objetos y tapándolos; 2) Formar una colección equivalente a otra (de hasta 4 objetos) mediante una correspondencia uno a uno; 3) Recitar la secuencia de las palabras número hasta 10; 4) Contar hasta 4 objetos indicando el cardinal y formar contando una colección de hasta 4 objetos; 5) Decir cuál es el número que va después de… 2, 3, hasta 9, empezando a contar desde 1. Por ejemplo: ¿Qué número va después de 4? “1, 2, 3, 4 y 5. El 5.”; 6) Subitizar pequeñas colecciones de hasta 3 objetos; y 7) Representar cantidades de 1 o 2 objetos con los dedos (Clements, 2004, p. 26-28).

Clements y Sarama (2009, 2016) proponen trayectorias de aprendizaje para cada contenido matemático, basadas en resultados de investigación, con referencias muy detalladas sobre edades. Por ejemplo, para el aprendizaje de la subitización, proponen la siguiente trayectoria: 1) Indicar el número en pequeñas colecciones de hasta tres objetos con 1 o 2 años; 2) Construir colecciones de hasta 3 objetos con 3 años; 3) Subitizar perceptivamente hasta cuatro objetos con 4 años; etc. (Clements y Sarama, 2016, pp. 28-29). Otros autores siguen esta línea de mostrar trayectorias de aprendizaje con referencias a edades a modo de ejemplo, manteniendo a la vez una visión crítica con respecto a las mismas, en manuales de formación de maestros (Castro y Castro, 2016, ver pp. 57, 58 y 134). También hay ejemplos de manuales que ofrecen listados o tablas de contenidos matemáticos adecuados para cada edad. Por ejemplo, Geist (2009) propone como contenidos matemáticos pertenecientes al ámbito del número, para niños de 6 a 36 meses, los siguientes: la correspondencia uno a uno (24-36 meses), la permanencia del objeto (6 a 12 meses), el concepto de “más” (12 a 18 meses), el concepto de “uno” (24 a 36 meses) y la iniciación a la recitación de la secuencia numérica (24 a 36 meses) (Geist, 2009, pp. 150-152).

Varios documentos curriculares han seguido esta línea de proponer espectativas de aprendizaje matemáticas por edades. Aunque debe aclararse que estas propuestas abarcan también toda la educación primaria, las propuestas para la educación infantil resultan más novedosas. Entre estos documentos están los Focos Curriculares del NCTM (2006), en que los contenidos de cada curso vienen resumidos en una página, y sus desarrollos posteriores (Fuson, Clements y Beckman, 2009) en los que se entra con un mayor detalle en cada curso. También destacamos los Estándares Estatales Comunes de EEUU (Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers (2010), en los que el currículo de cada curso puede descargarse en un documento independiente.

Aunque siempre se pueden poner objeciones relativas a las variaciones en el desarrollo del pensamiento matemático (NRC, 2014b), y todas estas referencias a espectativas de aprendizaje por edades deben ser tomadas con mucha cautela, y que nunca hay que confundir unas orientaciones con unos contenidos mínimos exigibles a todos los alumnos, pienso que es una línea de trabajo necesaria debido a que la actuación de maestras y maestros en la práctica docente necesita de algún tipo de orientación, basada en la investigación, sobre qué tipo de actividad matemática es adecuada aproximadamente a cada edad.

La distancia entre el paradigma dominante de investigación en psicología y el modelo de aprendizaje de cero a tres años

El área de conocimiento de la Didáctica de la Matemática ha recibido aportaciones de diversas disciplinas: "Matemática, la Epistemología e Historia de la Ciencia, la Pedagogía, la Psicología y la Sociología de la Educación" (Rico, Sierra, Castro, 2002, p. 40). Ahora bien, algunas revisiones de investigación sobre el aprendizaje de las matemáticas en la educación infantil presentan un sesgo hacia las aportaciones provinientes del ámbito de la Psicología y de la propia Didáctica de la Matemática (Clements y Sarama, 2007; NRC, 2014a). Como veremos, esto produce un distanciamiento entre la información que ofrecen las síntesis de resultados de investigación y las prácticas más recomendadas para los primeros años (0 a 3).

Las investigaciones que se han desarrollado en el campo de la psicología con bebés (0-1 años) suelen utilizar el paradigma de la habituación. Este modelo de investigación se basa en que los bebés, a medida que los estímulos se repiten, van reduciendo cada vez más su grado de respuesta hasta dejar de reaccionar al estímulo por completo. Se dice entonces que los bebés se han habituado al estímulo. Cuando el bebé recupera la atención al estímulo, se interpreta que el estímulo es distinto y que el bebé se ha deshabituado. La habituación y la deshabituación se miden en función del tiempo que el bebé mira al objeto (Lago, Jiménez y Rodríguez, 2003).

Utilizando este modelo de investigación se ha llegado a numerosos resultados sobre el conocimiento matemático de los bebés y de menores de 3 años (Lago, Jiménez y Rodríguez, 2003; Lago, Rodríguez, Escudero y Dopico, 2012; National Research Council, 2014a; Castro, Cañadas y Castro-Rodríguez, 2013). Parece claro que bebés de pocos meses de vida son sensibles a variaciones en aspectos de los estímulos que se les presentan, que parecen incluir la numerosidad de colecciones de objetos (o representaciones de objetos).

No obstante, algunas de las conclusiones a las que se llega en estas investigaciones se cuestionan, puesto que las interpretaciones sobre a qué aspecto del estímulo responden los bebés y qué significado tiene esta respuesta son muy diversas y han dado lugar a muy diferentes explicaciones, críticas y estudios de réplica (Lago, Jiménez y Rodríguez, 2003; Rodríguez y Scheuer, 2015).

Más allá del interés que tienen los resultados obtenidos en estas investigaciones, vemos que en ellas el bebé es receptor pasivo de ciertos estímulos que el experimentador le suministra y ante los cuales reacciona fijando la atención sobre los mismos una cantidad mayor o menor de tiempo.

Entre las prácticas recomendadas para el primer ciclo de educación infantil que potencian el desarrollo del pensamiento matemático se encuentran el cesto de los tesoros, el juego heurístico (Figura 1, aula de 1-2 años de Gonzalo Flecha en la Escuela Cigüeña María), las bandejas de experimentación o el juego de construcción. Estas prácticas son experiencias muy abiertas de juego libre en las que el educador organiza el entorno del niño eligiendo materiales ideales para la exploración. No son "actividades" entendidas en el sentido usual que se da a este término con niños mayores (situaciones breves de aprendizaje orientadas a la consecución de un objetivo didáctico, en las que el maestro explica lo que hay que hacer), sino propuestas en que el maestro interviene indirectamente a través de la organización de un entorno, pero en las que es el niño el que explora con total libertad los materiales (Alsina, 2006, 2015a; De Castro, 2011; Edo, 2012; Goldschmied y Jackson, 2007; Lee, 2012; Zero to Three, 2008).

Como vemos, hay una gran distancia entre los resultados obtenidos por la investigación psicológica sobre el pensamiento matemático siguiendo el modelo de habituación-deshabituación y las prácticas consideradas apropiadas para el ciclo de 0 a 3 años. Parece muy difícil establecer conexiones entre la teoría y la práctica; en particular, parece que los resultados de investigación tienen poco que aportar a las prácticas de aula, pero: ¿Tiene esto que ser forzosamente así? ¿Hay alternativas para conectar mejor resultados de investigación y práctica de aula?

Figura 1. Juego heurístico en un aula de 1-2 años

Una propuesta para reducir esta distancia consiste en incorporar revisiones de investigaciones de fuentes que han recibido una menor atención en el pasado. Un trabajo en esta línea es el de Edò (2016) en este seminario.

Complejidad epistémica de contenidos y procesos matemáticos

Suele pensarse que las matemáticas que se aprenden en la educación infantil son muy sencillas y que cualquiera puede enseñarlas (Castro y Castro, 2016, p. 15). Sin embargo, las matemáticas infantiles contienen ideas muy profundas y sutiles:

> Aunque los adultos lo dan por sentado, por ser algo familiar, la conexión entre la lista de los números de contar y el número de elementos de un conjunto es profunda y sutil. Es una conexión clave que los niños deben establecer. También hay sutilezas e ideas profundas implicadas al recitar y al escribir la lista, que los adultos también dan por sabidas, por lo habitual de su uso (NRC, 2015, p. 36).

Muchos de los términos que se emplean al hablar de las matemáticas en los primeros años tienen una gran complejidad en sí mismos (*numerosidad*, *subitización*, *unitización*) o constituyen términos inventados para enfatizar una distinción crucial, como *palabra número* o *secuencia de palabras número* (o cantinela), para diferenciar entre el número, como concepto, y el numeral hablado o palabra número. También entre las representaciones es necesario diferenciar entre *recta numérica* y *banda numérica* o *camino numérico* (*number path*; NRC, 2009, p. 53), al ser la primera una representación continua y la segunda una representación discreta más adecuada para las primeras edades (NRC, 2009).

En la Figura 2 aparecen varios de estos contenidos y procesos matemáticos fundamentales para comprender los conocimientos numéricos en las primeras edades. Como hemos visto, distintos documentos curriculares llaman la atención sobre la profundidad de estos contenidos.

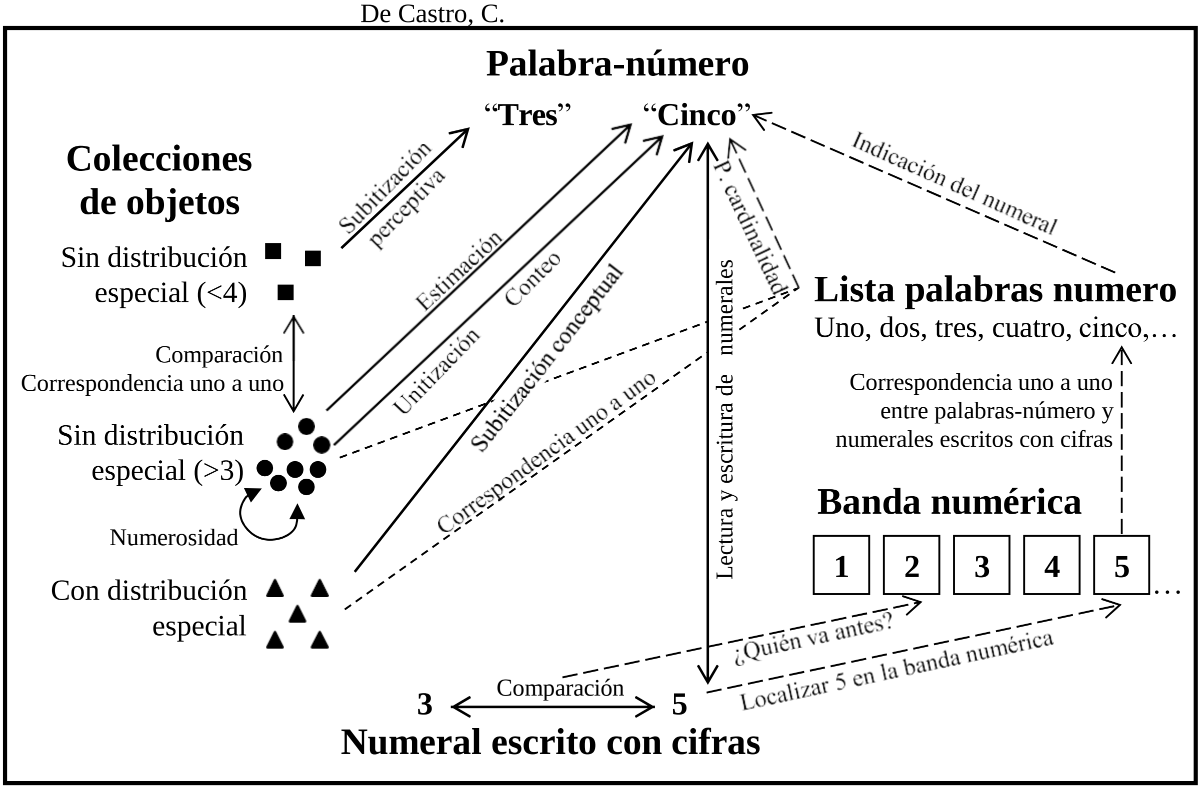


Figura 2. Algunos contenidos matemáticos propios de 0 a 6 años y sus relaciones

La "invisibilidad curricular" de algunos contenidos matemáticos

Algunos contenidos matemáticos no suelen aparecer en los documentos curriculares. Para Ruiz (2001), se trata de "conocimientos necesarios para llevar a cabo ciertas prácticas… que no pueden ser objetos de enseñanza porque no se presentan bajo una forma cultural conocida, incluso no figuran en los documentos curriculares… para la institución escolar […], son invisibles" (p. 230). Esta invisibilidad curricular afecta a la enumeración de colecciones, la diferenciación entre conocimientos espaciales y geométricos, y al razonamiento de los alumnos (Ruiz, 2001). En el caso de la enumeración, Margolinas (2014) ha descrito también este fenómeno de "invisibilidad" relacionándolo con los procesos de institucionalización que intervienen en la transformación de los conocimientos en saberes dentro de una institución.

Enumerar una colección de objetos consiste en realizar una única acción con cada uno de los objetos de la colección. La enumeración fue descrita por primera vez en los trabajos de Guy Brousseau y Joel Briand (Margolinas, 2014). Está presente en la correspondencia uno a uno propia del conteo, pero también es necesaria en muchas situaciones de la vida diaria como echar una carta en cada uno de los buzones de un portal, o despedirse individualmente de cada uno de los presentes en una reunión familiar al finalizar la misma. Se trata de un conocimiento matemático que requiere el uso de la selección o dicotomía (forma elemental de clasificación) y del establecimiento de un orden lineal en la colección de objetos y que resulta básico para no incurrir en errores en el conteo.

Otro conocimiento "invisible" en varios documentos curriculares es la subitización. Esta se define como el reconocimiento inmediato (súbito) del número de objetos que hay en una colección sin necesidad de contar. Por ejemplo, se produce cuando reconocemos que ha salido el 6 en un dado, de un "golpe de vista", sin contar los puntos. En España, la subitización no aparece ni en el currículo de educación infantil LOGSE (MEC, 1991), ni en el de la LOCE (MECD, 2004). En el de la LOE (MEC, 2008) aparece la expresión "Estimación cuantitativa exacta de colecciones" (p. 1024) que podría referirse a la subitización, aunque de forma indirecta y algo confusa, pues el uso conjunto de las palabras "estimación" y "exacta" no permite hacerse una idea de a qué se refiere el texto.

No ocurre lo mismo en Estados Unidos. Ya en los Estándares del año 2000 (NCTM, 2003) aparece "la habilidad de reconocer de un vistazo pequeños grupos de objetos" (p. 84) o la actividad de "recordar la configuración de los puntos de las fichas de dominó y determinar el número de puntos sin contarlos" (p. 105), aunque en los documentos curriculares tienden a aparecer expresiones alternativas, sin que aparezca explícitamente el término subitización. Así, en los Focos Curriculares para *prekindergarten* (Fuson, Clements y Beckman, 2009), se indica que los niños "reconocen el número de objetos en pequeños grupos sin contar y contando" (p. 7). Igualmente, en los Estándares Comunes (CCSS, 2010), para el curso de *kindergarten* (5 años), se dice que "los alumnos eligen […] estrategias efectivas para responder cuestiones cuantitativas, incluyendo el reconocimiento rápido del cardinal de pequeños conjuntos de objetos" (p. 9).

En los libros de texto para la formación de maestros, la subitización ya comienza a aparecer explícitamente. Clements y Sarama (2009, p. 10-18) desarrollan una trayectoria para el aprendizaje del reconocimiento del número y la subitización que abarca desde los 0 a los 8 años y Castro-Rodríguez y Cañadas (2016) incluyen la subitización como método de cuantificación propio de la educación infantil.

El término *unitización* aparece en los documentos de desarrollo de los Focos Curriculares, en Prekindergarten y en Kindergarten, como el "proceso de detectar o crear una unidad" (Fuson, Clements y Beckman, 2009, p. 65) figurando como uno de los procesos específicos de razonamiento matemático, más allá de la consideración de la unidades de medición en el currículo, siguiendo una línea en la que se propone la unidad (y la unitización) como ideas centrales en el desarrollo inicial del pensamiento matemático capaces de articular la aritmética con la medición, la geometría y el álgebra (Sophian, 2007).

La "invisibilidad curricular" genera un problema evidente en la práctica en el aula. Aquello que no aparece en el currículo, no puede ser objeto de enseñanza (Ruiz, 2001). Este problema está relacionado con la aparente trivialidad de los contenidos matemáticos propios de la educación infantil a la que me he referido en el apartado anterior. Supone un reto para los investigadores y para la formación de maestros. La existencia de este problema es una buena justificación para la distinción que hacía en la introducción entre el conocimiento de un currículo particular y el conocimiento de los estándares en el modelo MTSK (Muñoz-Catalán y otros, 2015).

La inclusión explícita de "teorías didácticas" en documentos curriculares: El caso de las trayectorias de enseñanza y aprendizaje

La enseñanza de las matemáticas en los primeros años ha recibido diferentes orientaciones a lo largo de la historia, recibiendo influencias de los grandes autores y de las corrientes pedagógicas más importantes en cada momento. Newton y Alexander (2013) realizan un esbozo del desarrollo histórico, desde 1900 hasta la actualidad, del aprendizaje de las matemáticas en los primeros años, dividiendo este periodo de tiempo en tramos de 20 años y señalando, en cada uno de ellos, los desarrollos principales en teorías del aprendizaje y la enseñanza y en la educación matemática, centrándose especialmente en las primeras edades. Los periodos que proponen estas autoras son: La era del *aprendizaje experiencial* (1900-1920), en la que predominan enfoques como los de Montessori o Froebel, con un aprendizaje a través del juego con materiales y actividades estructurados; la era de la *disponibilidad* (*readiness*) (1920-1940), en que las matemáticas reciben una atención menor y se llega a considerar que los niños no están preparados para su estudio hasta la educación primaria y que una exposición anterior puede resultar perjudicial; la era del *desarrollo cognitivo* (1940-1960), bajo la influencia de Piaget, en la que se asume que la naturaleza del pensamiento y el razonamiento del niño preoperacional tiene ciertas limitaciones (conservación, reversibilidad, etc.); la era del *desarrollo con andamiaje social* (1960-1980), en la que destaca la presencia de las aportaciones de Vygotsky y Bruner, con un giro hacia el socioconstructivismo; la era del *aprendizaje culturalmente situado* (1980-2000), con aportaciones provinientes de la antropología, como las de Lave o Rogoff; y la *era emergente del aprendizaje corpóreo* (2000-2020), con las aportaciones más recientes de la neurociencia y de la cognición corpórea (o encarnada). En cada uno de estos periodos Newton y Alexander (2013) eligen la influencia más determinante a su juicio, que da nombre a la "era", pero también señalan visiones alternativas en cada periodo entre las que seguro estarán las que los lectores echan en falta.

En este contexto histórico, cada documento curricular refleja las características de su época y las influencias de los autores y las corrientes teóricas. Este reflejo se mueve dentro de un rango amplio que va desde lo implícito (MEC, 2008), pasando por lo explícito con reconocimientos en bibliografía (CCSS, 2010, pp. 91-92, ver "muestra de trabajos consultados"), hasta lo explícito con lista de referencias (NCTM, 2000, 2003). Así, en el currículo español LOE/LOMCE de educación infantil

(MEC, 2008), aparecen fragmentos que denotan influencia piagetiana, como el siguiente: “niños y niñas van desarrollando determinadas habilidades lógico matemáticas, como consecuencia del establecimiento de relaciones cualitativas y cuantitativas entre elementos y colecciones” (p. 1025). Aunque se puede considerar a Piaget el acuñador del término “lógico-matemático” (Piaget e Inhelder (1966/2007, p. 154), la presencia de este autor está implícita en el texto.

En el extremo contrario, de la referencia explícita de influencias en los documentos curriculares, dos casos interesantes son la síntesis de enfoques propuesta en los *Estándares Comunes* (CCSS, 2010) en su introducción, al basar los *Estándares para la Práctica Matemática* en los *estándares de procesos* (NCTM, 2000/2003) y en las *hebras de la competencia matemática* del informe “Adding it up” (NRC, 2001), y la inclusión de “teorías” surgidas dentro de la Educación Matemática en documentos curriculares importantes. En este caso, tenemos la presencia de las *Trayectorias de Enseñanza y Aprendizaje*[6] en distintos documentos curriculares (CCSS, 2010; Naeyc y NCTM, 2002/2013, 2013; NRC, 2009).

Las trayectorias de aprendizaje se han convertido en una de las ideas más presentes en la Educación Matemática actual. En 2009 se celebró una conferencia sobre trayectorias de aprendizaje en Carolina del Norte a la que asistió gran parte del equipo responsable de la redacción de los *Estándares Comunes* (CCSS, 2010). Dicha conferencia dio lugar a un informe inicial (Daro, Mosher, y Corcoran, 2011) y posteriormente a un libro (Maloney, Confrey y Nguyen, 2014). Según indican los editores de este volumen en la introducción, la idea de las trayectorias de aprendizaje debe gran parte de su popularidad a haberse convertido en uno de los organizadores de los *Estándares Comunes* (Confrey, Maloney y Nguyen, 2014). Dentro de la educación infantil, aparece un ejemplo de trayectoria de aprendizaje en la *Declaración Conjunta de Posición sobre las Matemáticas en Educación Infantil* (Naeyc y NCTM, 2002/2013, pp. 21-23). También en el informe del National Research Council sobre el aprendizaje de las matemáticas en la primera infancia (NRC, 2009), se dedica una parte extensa del mismo a describir caminos de enseñanza y aprendizaje para: 1) Los números, relaciones y operaciones (cap. 5, pp. 127-173); y 2) La geometría, el pensamiento espacial, y la medición (cap. 6, pp. 175-221).

Finalmente, las trayectorias de aprendizaje y enseñanza, en diversas versiones, han llegado con mayor o menor intensidad a los libros de texto para la formación de maestros de Educación Infantil (Buys, 2010; Castro y Castro, 2016; Clements y Sarama, 2009, 2016).

IMPLICACIONES PARA LA INVESTIGACIÓN

En este apartado final quiero invitar a los socios de la SEIEM a reflexionar con el grupo IEMI sobre grandes tareas, o posibles investigaciones, a la luz de lo expuesto en los apartados anteriores, que quedan pendientes para los próximos años. Trataré en cada caso de sugerir como ejemplo trabajos, muchos de ellos realizados en el ámbito de la SEIEM, que guardan relación con cada tarea.

La invisibilidad curricular, junto a la complejidad epistémica de algunos contenidos matemáticos propios de la educación infantil, abren diferentes caminos para la investigación dentro de líneas ya consolidadas en la SEIEM: Para el análisis didáctico desde diferentes perspectivas teóricas (Fernández, 2010; Font, Planas y Godino, 2010; Rico y Lupiáñez, 2013); para la reflexión teórica sobre las matemáticas en 0 a 3 años, ya sea desde una síntesis de aportaciones teóricas previas (Tall, 2013), o desde un enfoque más pragmático basado en síntesis de resultados de investigaciones (Sarama y Clements, 2009); para diseñar propuestas para el aula que desarrollen el currículo (Alsina, 2016; Margolinas, 2014; Salgado, 2015); para estudiar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (Muñoz-Catalán y otros, 2015) o para investigar el desarrollo de la competencia profesional de “mirar con sentido” en la Educación Infantil (Fernández, Valls y Llinares, 2011; Gamoran, Jacobs y Philip, 2011; Llinares, 2012). En cualquiera de estos casos resulta evidente que es necesario un conocimiento profundo del contenido y los procesos matemáticos para que se puedan desarrollar estas líneas de investigación.

[6] En este texto, utilizo siempre entrecomillado el término “teoría” o “teoría didáctica” como abreviatura de “herramienta didáctico-matemática desarrollada dentro de una teoría sobre el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas”. Así, en el enfoque de Sarama y Clements (2009) de las trayectorias de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, considero a éstas (las trayectorias) herramientas que surgen dentro del marco teórico del *Interaccionismo Jerárquico* (*Hierarchic Interaccionalism)*, teoría esbozada en Sarama y Clements (2009, pp. 20-24).

Se hacen necesarias también las revisiones de investigaciones sobre educación matemática en los primeros años en revistas generales de investigación en educación y en particular de educación infantil, cuyos resultados han recibido una atención menor hasta la fecha (Ver Edo, en estas actas). Se espera de estas revisiones que contribuyan a acercar los resultados de investigación a la mejora de las prácticas docentes en el aula.

Un ámbito en el que se hace necesaria una reflexión teórica profunda es el desarrollo de una conceptualización de la actividad matemática que pueda aplicarse al inicio de este tipo de actividad con niños de 0 a 3 años. En estas edades, Rodríguez y Scheuer (2015) han descrito la situación aparentemente paradójica que nos encontramos al comparar los resultados de investigaciones que muestran la competencia numérica de los bebés con la lentitud en el aprendizaje matemático de niñas y niños en torno a los cuatro años de edad. Las preguntas sobre cuándo y cómo se inicia la actividad matemática, o cómo podemos favorecer este tipo de actividad con niños de 0 a 3 años, permanecen abiertas y posiblemente demanden en el futuro nuevos desarrollos teóricos y nuevas aproximaciones a la práctica en el aula.

Referencias

Alsina, Á. (2006). *Cómo desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años*. Barcelona: Octaedro & Eumo.

Alsina, Á. (2015a). *Matemáticas intuitivas e informales de 0 a 3 años*. Madrid: Narcea S.A. de Ediciones.

Alsina, Á. (2015b). Panorama internacional contemporáneo sobre la educación matemática infantil. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 42*, 210-232.

Alsina, Á. (2016). El currículo del número en educación infantil. Un análisis desde una perspectiva internacional. *PNA, 10*(3), 135-160.

Balfanz, R. (1999): Why do we teach young children so little mathematics? Some historical considerations. En J.V. Copley (ed.), *Mathematics in the early years* (pp. 3-10): NCTM & NAEYC, Reston, VA.

Buys, K. (2010). Años de preescolar. Numerización emergente. En M. Van de Heuvel-Panhuizen, M. (Ed.), *Los niños aprenden matemáticas: Una trayectoria de aprendizaje-enseñanza con objetivos intermedios para el Matemáticas con dos años cálculo con números naturales en la escuela primaria* (pp. 47-56). México: Correo del Maestro & La Vasija.

Castro, E. y Castro, E. (Coords.) (2016). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación infantil*. Madrid: Pirámide.

Castro, E., Cañadas, M.C. y Castro-Rodríguez, E. (2013). Pensamiento numérico en edades tempranas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(2), 1-11.

Castro-Rodríguez, E. y Cañadas, M.C. (2016). Números y operaciones. En E. Castro, y E. Castro (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación infantil* (pp. 153-170). Madrid: Pirámide.

Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers (2010). *Common core state standards for mathematics*. Washington, DC: NGA Center & CCSSO. Recuperado el 24 de julio de 2014 en: http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards.pdf

Chamorro, M.C. (Coord.) (2005). *Didáctica de las matemáticas para educación infantil*. Madrid. Pearson Educación.

Clements, D.H. (2004). Major themes and recommendations. En D.H. Clements, J. Sarama y A.M. DiBiase (eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 7-72). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Clements, D.H. y Sarama, J. (2007). Early childhood. En F. K. Lester (ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics* (461-556). Charlotte, NC: Information Age Pub.

Clements, D.H. y Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. Nueva York: Routledge.

Clements, D.H. y Sarama, J. (2016). *El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas a edad temprana: El enfoque de las trayectorias de aprendizaje*. Lexinton: KY: Learning Tools LLC.

Clements, D.H., Sarama, J. y DiBiase, A.M. (eds.) (2004). *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Confrey, J., Maloney, A.P., y Nguyen, K.H. (2014). Introduction: Learning trajectories in mathematics. In A.P. Maloney, J. Confrey y K.H. Nguyen (Eds.), *Learning over time: Learning trajectories in mathematics education* (pp. xi-xxii). Charlote, NC: Information Age Publishing.

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid (2008a). DECRETO 17/2008, de 6 de marzo, del Consejo de Gobierno, por el que se desarrollan para la Comunidad de Madrid las enseñanzas de la Educación Infantil. *Boletín Oficial de la Comunidad de Madrid, 61*, 6-15. Recuperado el 20/05/2016 de: http://www.madrid.org/dat_capital/loe/pdf/Desarrollo_Infantil_Madrid_08.pdf

Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid (2008b). DECRETO 18/2008, de 6 de marzo, del Consejo de Gobierno, por el que se establecen los requisitos mínimos de los centros que imparten primer ciclo de Educación Infantil en el ámbito de la Comunidad de Madrid. *Boletín Oficial de la Comunidad de Madrid, 61*, 15-18. Recuperado el 20/05/2016 de: http://www.madrid.org/dat_capital/loe/pdf/Requisitos_minimos_infantil_08.pdf

Daro, P., Mosher, F. y Corcoran, T. (2011). *Learning trajectories in mathematics: A foundation for standards, curriculum, assessment, and instruction*. CPRE Research Report #RR-68. Philadelphia: Consortium for Policy Research in Education. DOI: 10.12698/cpre.2011.rr68

De Castro, C. (2011). Buscando el origen de la actividad matemática: Estudio exploratorio sobre el juego de construcción Infantil. *EA, Escuela Abierta, 14*, 47-65.

De Castro, C., Flecha, G. y Ramírez, M. (2015). Matemáticas con dos años: Buscando teorías para interpretar la actividad infantil y las prácticas docentes. *Tendencias Pedagógicas, 26*, 89-108.

Edo, M. (2012). Ahí empieza todo. Las matemáticas de cero a tres años. *Números, 80*, 71-84.

English, L.D. y Mulligan, J.T. (Eds.) (2013). *Reconceptualizing early mathematics learning*. Netherlands: Dordrecht. DOI: 10.1007/978-94-007-6440-8

Fernández, C. (2010). Análisis epistemológico de la secuencia numérica. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 13*(1), 59-87.

Fernández, C., Valls, J. y Llinares, S. (2011). El desarrollo de un esquema para caracterizar la competencia docente "mirar con sentido" el pensamiento matemático de los estudiantes. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M.M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 351-360). Ciudad Real: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Font, V., Planas, N., Godino, J.D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje, 33*(1), 89-105.

Fuson, K.C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En D.A. Grouws (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 243-275). New York: Macmillan.

Fuson, K.C., Clements, D.H. y Beckman, S. (2009). *Focus in prekindergarten: Teaching with curriculum focal points*. Reston, VA/Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics & Naeyc.

Gamoran, M., Jacobs, V.R. y Philip, R.A. (Eds.) (2011). *Mathematics Teacher Noticing: Seeing Through Teachers' Eyes*. New York & London: Routledge.

Geist, E. (2009). *Children are born mathematicians: Supporting mathematical development, birth to age 8*. Upper Saddle River, NJ: Pearson.

Goldschmied, E. y Jackson, S. (2007). *La educación infantil de 0 a 3 años*. Madrid: Morata.

Lago, M. O., Jiménez, L. y Rodríguez, P. (2003). El bebé y los números. En I.Enesco (Coord.), *El desarrollo del bebé: cognición, emoción y afectividad* (pp. 147-170). Madrid: Alianza.

Lago, M.O., Rodríguez, P., Escudero, A. y Dopico, C. (2012). ¿Hay algo más que contar sobre las habilidades numéricas de los bebés y los niños? *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 1*(1), 38-53.

Lee, S. (2012). La historia de Emma: Estudio de caso sobre el desarrollo de la resolución de problemas desde los 8meses a los 2 años. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 1*(2), 64-71.

Llinares, S. (2012). Formación de profesores de matemáticas. Caracterización y desarrollo de competencias docentes. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 10*, 53-62.

Maloney, A.P., Confrey, J. y Nguyen, K.H. (Eds.) (2014). *Learning over time: Learning trajectories in mathematics education*. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Margolinas, C. (2014). ¿Saberes en la escuela infantil? Sí, pero ¿cuáles? *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 3*(1), 1-20.

Mulligan, J. y Vergnaud, G. (2006). Research on children's early mathematical development: Towards integrated pespectives. En A. Gutiérrez y P. Boero (eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 117-146). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

Muñoz-Catalán, M.C., Contreras, L.C., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M.A. y Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 18*(3), 589–605.

Ministerio de Educación y Ciencia (1991, 6 de septiembre). REAL DECRETO 1331/1991, de 6 de septiembre, por el que se establece el currículo de la Educación Infantil. *BOE*, *216*, 29716-29726.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2004). Real Decreto 114/2004, de 23 de enero, por el que se establece el currículo de la Educación Infantil. *BOE*, *32*. Recuperado el 30/04/2016 de: http://www.boe.es/buscar/pdf/2004/BOE-A-2004-2221-consolidado.pdf

Ministerio de Educación y Ciencia (2008). ORDEN ECI/3960/2007, de 19 de diciembre, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la educación infantil. *BOE*, *5*, 1016-1036. Recuperado el 30/04/2016 de: http://www.boe.es/boe/dias/2008/01/05/pdfs/A01016-01036.pdf

NAEYC y NCTM (2013). Matemáticas en la Educación Infantil: Facilitando un buen inicio. Declaración conjunta de posición. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *2*(1), 1-23. Recuperado el 17 de agosto de 2014 de: http://www.edma0-6.es/index.php/edma0-6/article/download/30/34

Newton, K.J. y Alexander, P.A. (2013). Early mathematics learning in perspective: Eras and forces of change. En L.D. English y J.T. Mulligan (eds.), *Reconceptualizing Early Mathematics Learning, Advances in Mathematics Education* (pp. 5-28). Dordrecht: Springer.

NCTM (1980). *An agenda for action: Recommendations for school mathematics of the 1980s*. Reston, VA: Author.

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standars for school mathematics*. Reston, VA: Author.

NCTM (2000). *Principles and standars for school mathematics*. Reston, VA: Author.

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

NCTM (2006). *Curriculum Focal Points for Kindergarten through Grade 8 mathematics: A quest for coherence*. Reston, VA: Author.

National Council for Curriculum and Assessment (2014). *Mathematics in Early Childhood and Primary Education (3–8 years). Definitions, Theories, Development and Progression*. Dublin: NCCA. Recuperado de: http://ncca.ie/en/Curriculum_and_Assessment/Early_Childhood_and_Primary_Education/Primary-Education/Primary_Developments/Maths/Review-and-Research/ el 30 de abril de 2016.

National Research Council (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. J. Kilpatrick, J. Swafford y B. Findell (eds.), Mathematics Learning Study Committee, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, DC: National Academy Press.

National Research Council (2009). *Mathematics Learning in Early Childhood: Paths Toward Excellence and Equity*. C.T. Cross, T.A. Woods y H. Schweingruber (eds.), Committee on Early Chilhood Mathematics, National Research Council.

National Research Council (2014a). Fundamentos cognitivos para la iniciación en el aprendizaje de las matemáticas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 3*(1), 21-48.

National Research Council (2014b). Variaciones en el desarrollo, influencias socioculturales, y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 3*(2), 1-22.

National Research Council (2015). Contenido matemático fundacional para el aprendizaje en los primeros años. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *4*(2), 32-60.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1966/2007). *Psicología del niño* (17ª ed.). Madrid: Morata.

Rico, L. y Lupiáñez, J.L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.

Rico, L. y Lupiáñez, J.L. (Coords.) (2013). *Análisis Didáctico en Educación Matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*. Granada: Editorial Comares.

Rico, L., Sierra, M. y Castro, E. (2002). El área de conocimiento de “Didáctica de la Matemática”. *Revista de Educación*, *328*, 35-58.

Rodríguez, C. y Scheuer, N. (2015). The paradox between the numerically competent baby and the slow learning of two- to four-year-old children / La paradoja entre el bebé numéricamente competente y el lento aprendizaje de los niños de dos a cuatro años de edad, *Estudios de Psicología, 36:1*, 18-47, DOI:10.1080/02109395.2014.1000009

Ruiz, L. (2001). La invisibilidad institucional de los objetos matemáticos. Su incidencia en el aprendizaje de los alumnos. En M.C. Chamorro (Dir.), *Dificultades del Aprendizaje de las Matemáticas* (pp. 229-262). Madrid: MECD.

Salgado, M. (2015). *La práctica docente en educación infantil desde el enfoque de la educación matemática realista y los procesos matemáticos*. Tesis doctoral. Santiago de Compostela: Universidad de Santiago.

Sarama, J. y Clements, D.H. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research. Learning trajectories for young children.* Nueva York: Routledge.

Simon, M.A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114–145.

Sophian, C. (2007). *The origins of mathematical knowledge in childhood*. New York & London: Lawrence Erlbaum Associates.

Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics*. New York: Cambridge University Press.

The New York State Education Department (2011). *New York State Prekindergarten Foundation for the Common Core*. Albany, NY: NYSED. Recuperado el 01/05/2016 de: http://www.p12.nysed.gov/ciai/common_core_standards/pdfdocs/nyslsprek.pdf

Zero to three (2008). *Caring for infants and toddlers in groups: Developmental appropriate practice* (2nd ed.). Washington, DC: Author.

EMERGENCIA DE LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA INFANTIL. JUEGO Y MATEMÁTICAS

The raise of mathematics education in early years. Mathematics ans play

Edo, M.

Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

En esta ponencia se revisa la aparición de Investigación en Educación Matemática Infantil en congresos de Didáctica de la Matemática. Se destaca la primera conferencia plenaria centrada exclusivamente en educación matemática en infantil, en 2002, y la creación de grupos de investigación estables vinculados a sociedades de investigación en didáctica de las matemáticas, nacionales e internacionales. También se visualizan las principales temáticas de investigación presentadas por estos grupos en dichos congresos y se focaliza en las principales contribuciones sobre matemáticas y juego en educación infantil.

Palabras clave: *Educación infantil, educación matemática, juego y matemática*

Abstract

In this presentation I expose a review about the emergence of Mathematical Education in Early Years at Didactic of Mathematics conferences. I highlight the first plenary talk exclusively dedicated to Early Years Education, in 2002, as well as the creation of stable reseach groups affiliated to Mathematic Education Societies. Here I examine the main topics presented by these grous at the mentioned conferences, putting the focus on the subject of mathematics and play.

Keywords: *Early years education, mathematics education, mathematics and play.*

EMERGENCIA DE LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN INFANTIL DESDE LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

El interés en la investigación en didáctica de la matemática, en educación infantil ha crecido considerablemente en los últimos años. Soy consciente que esta temática viene siendo investigada desde años atrás, principalmente por psicólogos, encontrando en Piaget a uno de sus principales precursores (Piaget, 1924, 1936). Pero desde finales de los años noventa ha aparecido un interés creciente en la investigación en el campo de la educación matemática temprana (Schuler y Wittmann, 2009; Koleza y Giannis, 2013). Una muestra de este hecho la encontramos en que la mayor parte de las asociaciones de investigadores en didáctica y en educación matemática crean grupos estables centrados en esta etapa.

El primer congreso de educación matemáticas en el que aparece un grupo centrado en infantil exclusivamente es en el International Congress on Mathematical Education. En su historia se observa que se han realizado varios intentos de crear este grupo de investigación, el primero de ellos en ICME-2, en 1988 aparece el Action Group 1: Early Childhood Years (ages 4-8). Aunque, en este caso, no tuvo continuidad. Los siguientes años el grupo de primeras edades cubre infantil y primaria, es decir de 0 a 12 años. Es a partir del ICME-12 en año 2012 que aparece de forma

Edo, M. (2016). Emergencia de la Investigación en Educación Matemática Infantil. Juego y Matemáticas. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 106-119). Málaga: SEIEM.

regular un grupo de investigación centrado únicamente en educación infantil, aunque sigue cambiando el nombre del grupo en cada edición.

En relación a la European Society for Research in Mathematics Education, en 2009 se crea el Early Years Mathematics Groups cuyos miembros coinciden en gran medida en que el aprendizaje de las matemáticas en las primeras edades debe tener lugar en procesos de participación y construcción colaborativa (Vygotsky, 1979; Edo, Planas y Badillo, 2009).

A nivel español, en el Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática celebrado el 2010 en Lleida se acordó volver a intentar constituir un Grupo de Educación Infantil, como grupo de trabajo dentro de la SEIEM. En esta ocasión, a diferencia del primer intento (SEIEM, 1997), sí se consiguió: IEMI, Grupo de Investigación en Educación Matemática Infantil nacía.

La aparición y consolidación de estos grupos de investigación viene precedida por un hito relevante en relación con la investigación en matemáticas en educación infantil, este es la conferencia plenaria de Ginsburg, en el PME26 en el año 2002.

PRIMERA PLENARIA CENTRADA EN EDUCACIÓN INFANTIL EN UN CONGRESO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

En el año 2002, con motivo del 26º Congreso del Grupo Internacional del Psychology of Mathematics Education (PME26), se realiza la primera conferencia plenaria, de una sociedad de didáctica de la matemática, centrada exclusivamente en educación infantil. Herbert P. Ginsburg fue el encargado de realizar la conferencia que llevaba por título: Little children, big mathematics: Doing, learning and teaching in the preschool. En esta conferencia el autor muestra una visión diferente sobre la educación matemática temprana a la concebida hasta el momento. Ginsburg (2002) manifiesta que las investigaciones en didáctica de la matemática conciben a los niños de tres, cuatro y cinco años de edad como pequeños y, en lugar de sugerir como Piaget la idea de que el pensamiento de los niños es "diferente" al de los adultos, tienden a pensar que el razonamiento infantil es inferior. Ginsburg pone de manifiesto la concepción errónea de muchos adultos al pensar que los niños están muy lejos de poder entender las matemáticas de manera significativa. La matemática es simbólica, compleja y abstracta, por lo tanto, se tiende a creer que la matemática es demasiado "grande" para los "niños pequeños". Por el contrario, él defiende que los niños pequeños tienen un gran interés en las ideas matemáticas, incluso en el simbolismo matemático y pueden aprender y beneficiarse de la enseñanza de esta materia.

Ginsburg ha observado que los niños de cuatro y cinco años durante el juego libre, de forma espontánea y con frecuencia, usan las matemáticas de la vida cotidiana. Éstas hacen referencia a las habilidades y competencias matemáticas que los niños emplean de forma espontánea en su entorno habitual. Ginsburg, en su investigación detecta tres tipos de matemática cotidiana que aparece en el juego libre: la enumeración, la magnitud y el patrón. La enumeración hace referencia al uso de palabras de contar, a la enumeración de objetos y a la determinación de la cantidad de un conjunto de objetos. La magnitud hace referencia a actividades donde los niños comparan, hacen juicios sobre qué conjuntos tienen más cantidad que otros o sobre qué cantidad es más grande. El patrón se observa, por ejemplo, cuando los niños elaboran simetrías en tres dimensiones durante el juego libre con piezas de construcción. En síntesis, afirma que los niños de forma espontánea emplean contenidos matemáticos en su juego libre. Ginsburg cierra su conferencia con las siguientes palabras:

> "Yes, mathematics is big, but little children are bigger than you might think. Early mathematics education is a great opportunity for children, teachers and researchers alike".
>
> (Ginsburg, 2002, p.13)

La conferencia de Ginsburg, que pone de manifiesto la necesidad de investigación en didáctica de la matemática en educación matemática infantil, la tomamos como primer hito relevante. Para nosotras existen otros dos momentos clave para situar la emergencia de la investigación en educación matemática en infantil, internacional y nacionalmente. La Figura 1 muestra estos hitos.

Figura 1. Hitos en la emergencia de la investigación en educación matemática infantil

Este artículo, y mediante la técnica de análisis de textos, se centra en primer lugar en los trabajos presentados en el grupo de investigación Early years mathematic del CERME, como grupo referente internacional. A continuación se presentan las ideas más relevantes de las contribuciones relacionadas con el juego y el aprendizaje matemático en infantil desde la primera aparición del grupo (CERME6) hasta el último encuentro (CERME9). Sigue un breve resumen de las principales tareas realizadas por el grupo de investigación sobre el tema a nivel español Investigación en Educación Matemática Infantil de la SEIEM. Se cierra con la revisión el título de esta aportación.

EMERGENCIA Y CONSOLIDACIÓN DEL GRUPO DE INVESTIGACIÓN EARLY YEARS MATHEMATICS

En el año 2009 en el 6º Congress of European Research in Mathematics Education (CERME6 Lyon) aparece el primer grupo de trabajo, de una sociedad europea de didáctica de la matemática, centrado en educación infantil bajo el nombre de Early Years Mathematics (EYM). Patti Barber (2009), coordinadora del grupo, presenta algunas similitudes y diferencias de los planes de estudio y metodologías habituales en los países de los investigadores del grupo. Los planes de estudio de educación infantil en países como Dinamarca y Alemania, se centran en el desarrollo integral del niño y no tienen currículos específicos, con contenidos y objetivos de aprendizajes matemático. En el caso de Israel, la escolarización combina las ideas básicas de las matemáticas con el juego libre y la orquestación del maestro. El plan de estudios de Chipre se centra en el juego libre, la construcción de estructuras, el cálculo y las formas geométricas. También presenta como referencia el documento del plan de estudios de 0-8 de Nueva Zelanda: Te Whariki, que evoca un enfoque holístico para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en las primeras edades.

En 2011, en el CERME7 de Polonia, se presentan 21 contribuciones en el EYM. Este Grupo de Trabajo se centra en la investigación del aprendizaje de las matemáticas y la educación matemática en los primeros años, la edad de 3 a 7. Podemos observar que los países de los cuales proviene el mayor número de investigadores es Alemania y Noruega.

Tabla 1: número de comunicaciones y posters según país de origen CERME 7

País	Nº de comunicaciones	Nº de posters	Nº de presentadores
Alemania	3		5
Noruega	3	1	6
Israel	2		2
Portugal	1		2
Spain	1		2
Chipre	1		1
Italia	1		1
Holanda	1		1
Reino unido		1	1

TOTAL	13	2	21

Los coordinadores del grupo, Erfjord, Mamede y Krummheuer (2011) señalan que este grupo de investigación tiene que hacer frente a una gran variedad de enfoques educativos de preescolar y jardín de infancia en los diferentes países. También se observan distintas orientaciones teóricas y gran variedad de temas. La tabla 2 señala las principales orientaciones teóricas y las temáticas detectadas por Erfjord, Mamede y Krummheuer (2011)

Tabla 2: orientación teórica diferente y temas CERME 7

Principal Orientación teórica	Temas
Psicología educativa	
Desarrollo conceptual	Concepto de mitad Conocimiento geométrico Concepto de número y las operaciones
Experimento enseñanza en el aula	Fracciones pensamiento algebraico temprana
Ciencias de la educación	Relación de juego y el aprendizaje
La psicología cultural	Co-aprendizaje Matemática y comunicativa competencia
La sociología, la sociolingüística	aprendizaje de las matemáticas Sistema de apoyo Códigos y marcos multiculturalismo
Semiótica	Los gestos

En el CERME8 en 2013, en Turquia, las coordinadoras Maria Bartolini, Ingvald Erfjord, Esther Levenson, and Cecile Ouvrier-Buffet señalan que el objetivo inicial de este grupo sigue siendo, el intercambio de investigación académica relacionada con la educación matemática en relación con niños de entre 3-8. Este grupo de edad abarca desde preescolar hasta los primeros grados de la escuela primaria, y tiene en cuenta que en diferentes países, los niños comienzan la escuela primaria a diferentes edades.

El grupo consta de buena salud y muestran como cada año va aumentando el número de contribuciones y como aumenta también el números de investigadores participantes.

La Tabla 3: número de comunicaciones y posters según país de origen CERME 8

País	Nº de comunicaciones	Nº de posters	Nº de presentadores
Canadá	1		1
China	1		1
Francia	1		2
Alemania	6		12
Grecia	1		1
Israel	2		1
Italia	4	1	7
Noruega	1		3
Suecia	2		5
Turquía			1
TOTAL	19	1	34

El hilo común obvio a lo largo de todos los documentos presentados en este grupo es el deseo de mejorar el aprendizaje de matemáticas para los niños pequeños. A parte de este deseo la realidad es que la diversidad de países de origen, de políticas educativas, etc. dificultan las comparaciones.

En la última sesión de la conferencia, se pasó a los participantes un cuestionario desarrollado por los líderes del grupo. El cuestionario incluyó las siguientes cuatro preguntas: (1) ¿Ha participado en el pasado en este grupo de trabajo? (2) Si es así, ¿ha notado un cambio? (3) ¿Tiene preguntas específicas? (4) ¿Qué ha aprendido? En general, 20 participantes habían participado en este grupo de trabajo en el pasado. Otro dato que aporta Bartolini para asegurar que este grupo va camino de la consolidación.

En el CERME9, en 2015. Las coordinadoras, fueron: Maria Bartolini, Esther Levenson, Ingvald Erfjord, Eugenia Koleza and Bożena Maj-Tatsis, dos de ellas repiten por segunda vez. Durante CERME9, hubo aproximadamente 30 participantes (autores y co-autores), con 20 comunicaciones aceptadas y 7 posters. De las 20 comunicaciones, uno era una revisión de la literatura sobre la educación de la primera infancia, el resto eran estudios empíricos (12 relacionados con preescolar y 7 a la escuela primaria). Hubo 6 posters con los estudios empíricos realizados en el entorno de preescolar y uno no.

Se observan una vez más muchas temáticas distintas con aproximaciones metodológicas y marcos teóricos distintos. Se observa una cierta relación entre el contexto y el marco teórico, es decir, los investigadores que viven en un mismo país suelen utilizar marcos más próximos, aspecto que posibilita explotar los resultados en su propio contexto cultural.

En resumen, los trabajos presentados en este grupo y en las distintas ediciones (2009-2015) de este congreso son diversos. Pero los temas más recurrentes son:

- el análisis de las oportunidades de aprendizaje matemático en contextos informales, como el juego libre y ofertas abiertas (e.g. Schuler, 2011; Vogel y Jung, 2013; Vighi, 2013; Tubach, 2015);
- el análisis del papel y la influencia de los materiales en la educación matemática primeriza (e.g. Schuler y Wittmann, 2009);
- el estudio de las diferentes formas de representación matemática de los niños pequeños (e.g. Badillo, Font, Edo y Planas, 2011; Flottorp, 2001);
- la caracterización de los gestos y el lenguaje no verbal como recurso semiótico en el aprendizaje de las matemáticas en infantil (e.g. Elia, Gagatsis, Paraskevi, Georgiou, van den Heuvel-Panhuizen, 2011);
- la investigación de la comunicación espontánea del lenguaje de los niños en la comprensión y aprendizaje matemático (e.g. Vighi, 2015);
- el estudio de las evidencias de aprendizaje sobre contenidos matemáticos específicos (e.g. Koleza y Giannis, 2013; Tirosh, Tsamir, Levenson, Tabach, Barkai, 2013);
- el análisis de las reflexiones y el papel de los maestros de infantil (e.g. Svensson, 2015; Erfjord, Carlsen, Hundeland, 2015).

Del estudio de las principales temáticas de estas cuatro ediciones del congreso CERME se puede concluir que el interés por la etapa infantil se mantiene. Que el grupo ha ido creciendo gradualmente tanto en número de aportaciones como de participantes. Que la diversidad de temáticas, técnicas de investigación y de marcos teóricos es grande y se relaciona con los países de origen. Que uno de los temas más presentes y recurrentes es el Juego y las matemáticas en infantil, 12 comunicaciones sobre el tema en las cuatro ediciones.

EARLY YEARS MATHEMATICS: JUEGO Y MATEMÁTICAS

Las contribuciones que focalizan en el juego y el aprendizaje matemático en infantil han sido recurrentes desde el momento de la creación del grupo de trabajo de Early years mathematic en el CERME6. Desde el inicio, se han presentado trabajos sobre este tema de investigación en todas sus ediciones (e.g. Schuler y Wittmann, 2009; Flottorp, 2011; Schuler, 2011; Vigh, 2013; Vogel y Jung, 2013; Svensson, 2015; Tubach, 2015). Algunas de las cuestiones que plantean estos trabajos hacen referencia a cómo los juegos pueden contribuir en la educación matemática temprana (e.g. Schuler y Wittmann, 2009); a cómo y por qué el juego libre puede ayudar al desarrollo de ciertos procesos matemáticos (e.g. Flottorp, 2011); a cómo se pueden desarrollar oportunidades de aprendizaje en contextos informales como el juego libre y las ofertas abiertas con materiales educativos (e.g. Schuler, 2011); a cómo el juego puede llegar a promover en los niños pequeños el recurso de la generalización (e.g. Vigh, 2013); a qué tipo de investigación metodológica puede contribuir al rastreo de actividad matemática en situaciones matemáticas de juego y exploración (e.g. Vogel y Jung, 2013); a cómo se puede caracterizar el juego matemático de los niños en el contexto del entorno de juego (e.g. Tubach, 2015) y a cómo los maestros de infantil pueden desarrollar la comprensión del juego como actividad matemática infantil (e.g. Svensson, 2015).

Las cuestiones planteadas por estas investigaciones muestran una variedad de enfoques, marcos e intereses que emergen de un mismo tema de estudio: el juego y las matemáticas en educación infantil. La mayor parte de estos estudios coinciden en utilizar un marco sociocultural inspirado en Vygotsky y todos coinciden en que el juego es una actividad esencial en el desarrollo infantil y especialmente poderosa en el aprendizaje inicial de las matemáticas (Schuler y Wittmann, 2009; Flottorp, 2011; Vigh, 2013; Tubach, 2015; Svensson, 2015).

¿Cómo los juegos pueden contribuir en la educación matemática temprana? Es una pegunta de investigación recurrente. Schuler y Wittmann (2009) exponen que en los últimos años se han desarrollado diferentes enfoques en los programas sobre educación matemática temprana. Por un lado, encontramos programas de educación infantil centrados en la construcción intencionada de conocimientos matemáticos específicos y, por otra parte, metodologías centradas en el uso de juegos y materiales educativos con la intención de estimular las capacidades de los niños de manera lúdica e informal. Vigh (2013) afirma que la tendencia de las investigaciones sobre matemáticas en edades tempranas se encuentra en las relaciones entre el juego y el aprendizaje matemático como objeto de estudio. Schuler (2011) aporta que sigue habiendo objeciones tanto en los modelos teóricos como en las investigaciones empíricas sobre la relación entre jugar y aprender. La autora añade que principalmente hay dos tipos diferentes de estudios empíricos en el contexto del juego y el aprendizaje matemático. Por un lado, los estudios de intervención interesados en los efectos del aprendizaje introduciendo juegos reglados y seleccionados por los adultos (como por ejemplo, Kamii y Nagahiro, 2008, Edo y Deulofeu, 2005 y 2006). Y, por otro lado, los estudios de observación interesados en el contexto del juego libre y las condiciones para el aprendizaje (como por ejemplo, van Oers, 2010 y Ginsburg, 2009). Schuler (2011) señala que los estudios del primer tipo concluyen que los juegos elegidos en función de los posibles contenidos y objetivos matemáticos llegan a ser igual de exitosos que una clase convencional. La investigación de Edo (2002) concluye que los alumnos que han participado en un estudio del primer tipo, mejoraron sus habilidades de cálculo mental de forma significativa respecto a los años anteriores.

En relación al segundo tipo de contexto de aula, basado en el juego libre, no dirigido por el adulto, surge la siguiente pregunta ¿cómo desarrollar oportunidades de aprendizaje en contextos informales de juego libre y con propuestas abiertas con materiales manipulativos? Pregunta que guía a varios estudios metodológicamente centrados en la observación. Ginsburg (2009) afirma que el desarrollo del pensamiento matemático de los niños en estos contextos depende del juego, del entorno y del momento de aprendizaje. Siguiendo esta misma línea, van Oers (2010), ubicado en la teoría sociocultural de Vygotsky, concluye su estudio afirmando que la aparición del pensamiento matemático en los niños pequeños es un proceso culturalmente guiado que puede ser asignado a las acciones del niño en un entorno de resolución de problemas en colaboración con otras personas con un mayor conocimiento, ya sean iguales o adultos, en actividades que tienen sentido para los participantes. Varios estudios de observación concluyen que los niños precisan del guiado de un adulto o de iguales con más experiencia en el contexto del juego para promover su pensamiento matemático. Los materiales y los juegos deben ofrecer un potencial matemático en relación con las ideas centrales de los contenidos y la gestión de la conversación es crucial para las oportunidades de aprendizaje matemático (Schuler, 2011; Schuler y Wittmann, 2009; Vigh, 2013).

Los resultados de la investigación de Schuler (2011) lo llevan a la conclusión de que el potencial matemático se desarrolla a través de los comentarios de los educadores durante el transcurso del juego con la realización de preguntas que estimulan explicaciones, razonamientos y reflexiones sobre las acciones y los pensamientos de los niños. En la Figura 2 mostramos a un alumno de l'Escola dels Encants de Barcelona jugando al "tres en raya" con la maestra. El alumno ha escogido el juego que desea jugar y es él mismo quien busca un adulto o un compañero como contrincante para iniciar su actividad.

El estudio de Schuler (2011) concluye que hay consenso en que los niños pequeños adquieren habilidades matemáticas principalmente de manera lúdica a través del juego libre, de ofertas abiertas y oportunidades de aprendizaje informales. En esencia, el juego puede ser visto, en su sentido más amplio, como la descripción de casi todas las actividades iniciadas espontáneamente por los niños pequeños. Siguiendo esta idea, en los últimos años, estudios empíricos han proporcionado pruebas de que los juegos matemáticamente ricos llegan a tener un impacto positivo en el aprendizaje matemático de los niños. Los juegos ricos matemáticamente ofrecen importantes contextos de aprendizaje informal que pueden ser utilizados como puntos de partida para el aprendizaje formal en la escuela primaria (Tubach, 2015).

Varios autores se plantean también qué es la actividad matemática vinculada a los juegos. Svensson (2015), tomando como referente a Bishop (1988), plantea que el juego es la actividad matemática que se ocupa de los aspectos del pensamiento matemático y contribuye al desarrollo matemático. No obstante, el concepto de aprender jugando, necesita más matices que el de ser clasificado como actividad matemática. Bishop (1988) señala que jugar permite pensar hipotéticamente, es decir, imaginar un potencial de acción a tomar en el juego; permite modelar, es decir, conectar con la realidad y; permite abstraer, es decir, identificar las características relevantes de la situación.

Algunos estudios se centran en la importancia de las reglas de juego y de los materiales seleccionados. Helenius et al. (2014) expone que para que el juego sea considerado como actividad matemática, los participantes deben acatar y negociar las reglas implícitas o explícitas en él, ya que esto contribuye a la formación de los límites del juego y, por lo tanto, a la modelación de los aspectos reales. Sin embargo, añade que los niños pequeños no necesariamente tienen que conocer las reglas matemáticas por lo que respecta al juego matemático. Van Oers (2014) explica que para que el juego pueda considerarse actividad matemática, tiene que moverse entre los polos de las normas y la libertad. El juego se entiende como una actividad caracterizada por una alta participación de los actores orientados por reglas con un cierto grado de libertad. Por otro lado, Schuler, 2011, señala que las normas del juego pueden ofrecer actividad matemática más allá del uso intuitivo de un material. La autora añade que el material puede estimular la participación y la implicación de los niños, pero no tiene por qué traducirse, necesariamente, en actividades matemáticas. En un contexto no directivo de juego libre al no haber normas sobre el abandono de los materiales y los juegos, se puede observar desde niños que abandonan o cambian de material después de un corto período de tiempo, hasta niños que juegan con él todo el día.

La tipología y disposición de los materiales que se ofrecen en el aula también centra la atención de varios estudios. Ginsburg (2006) hace referencia a la importancia del uso de los materiales en el juego libre. En este caso, expone que los niños cuando juegan con objetos y realizan varias acciones con ellos, esto les permite obtener una visión de varias relaciones matemáticas. Mediante estas acciones, pueden descubrir el impacto de un cambio de un objeto y la forma de reaccionar de éste de acuerdo con su acción. La actividad del juego, matemáticamente, implica el establecimiento de relaciones entre los objetos que se están manipulando. Los niños pueden construir nociones matemáticas concretas, a partir de las relaciones entre objetos físicos y objetos abstractos y de la interpretación de sus semejanzas y diferencias. El juego puede ofrecer a los niños un contexto donde verbalizar sus estrategias e interpretaciones, así como la negociación de significados matemáticos. Schuler (2011) añade que los materiales también están equipados de contextos sociales, pero mantiene la idea de que la gestión de la conversación en el aula influye en el potencial matemático, que se desarrolla en interacción, de los procesos de argumentar y razonar.

Otro aspecto en el que los investigadores focalizan es el hecho de que el juego libre es, habitualmente, una actividad compartida y a menudo cooperativa. La participación en procesos de construcción colaborativa de la realidad es la base en el aprendizaje de las matemáticas en infantil (Edo, Planas y Badillo, 2009). Bussi (2008) defiende que el juego colectivo es importante, tanto como elemento de socialización, como elemento de creación de situaciones problemáticas. Donde la solución de los problemas que emergen del juego se puede relacionar con el lenguaje (en la presentación y creación de reglas), la socialización (el respeto de las normas) y las capacidades de tipo matemático (el orden y la organización de la conducta). Vygotsky (1979) afirma que el juego es la principal actividad de los niños a estas edades, que es la actividad conductora del aprendizaje ya que cuando el niño juega crea una zona de desarrollo próximo que permite al niño, elevarse por encima de sí mismo, es decir, actuar por encima de su conducta diaria, mostrarse más maduro y en definitiva crecer al seguir y ceñirse a unas reglas desafiantes.

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA INFANTIL: JUEGO Y MATEMÁTICAS

A nivel español, en el Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, celebrado el 2010 en Lleida se acordó volver a intentar constituir un Grupo de Educación Infantil, como grupo de trabajo dentro de la SEIEM. En esta ocasión, a diferencia del primer intento (SEIEM, 1997), sí se consiguió: IEMI, Grupo de Investigación en Educación Matemática Infantil nacía y los coordinadores iniciales fueron Carlos de Castro y Mequè Edo. Este grupo tiene, desde su origen, como objetivo desarrollar la investigación sobre educación matemática en infantil y se interesa principalmente en las investigaciones llevadas a cabo en el aula, y orientadas al desarrollo del currículo matemático de la Educación Infantil.

El boletín 29 de la SEIEM, en 2011 apunta:

"Fundamentalmente, detrás de la decisión de reabrir el Grupo de Educación Infantil, hay dos hechos importantes:

1. Los cambios producidos en la Universidad, con las nuevas titulaciones de grado, dan importante realce al título de Grado de Maestro en Educación Infantil. Este grado queda como una de las dos únicas titulaciones de Maestro, al desaparecer todas las especialidades correspondientes a las antiguas diplomaturas de magisterio. Al pasar de diplomados a graduados, las futuras maestras y maestros de Educación Infantil podrán acceder a postgrados e investigar en Educación Matemática.
2. Por otra parte, desde la SEIEM se considera que la investigación en Educación Matemática Infantil, es un ámbito del que tradicionalmente se ha ocupado la Psicología, con los objetivos y metodologías que le son propias. Sería importante que, desde el área de conocimiento de Didáctica de la Matemática, se diera un empuje más decidido y organizado a la investigación en esta etapa, con unos objetivos y formas de trabajo más propios de nuestra área de conocimiento. Para comenzar con el grupo de trabajo, el Presidente de la SEIEM ha propuesto a Mequè Edo (Universitat Autònoma de Barcelona) y a Carlos de Castro (Universidad Complutense de Madrid) que coordinen el inicio del Grupo de Investigación en Educación Matemática Infantil" (SEIEM, 2011, p. 24).

Este grupo tiene ya seis años de existencia. A los tres años de su inicio la coordinación fue asumida por María Jesús Salinas Portugal (Universidad Santiago de Compostela) y pronto pasará el relevo a la tercera coordinación. En la actualidad el grupo está compuesto por más de 35 investigadores. El grupo ha participado todos los años en los Simposios de la SEIEM, ha realizado tres encuentros intermedios en distintos puntos de la geografía española (Madrid, 2012; Valladolid, 2014 y Lugo, 2016). Se han leído recientemente las primeras tesis centradas en matemáticas y educación infantil que se han presentado y discutido en grupo (Coronata, 2014; Ramírez, 2015; Salgado, 2015) y varios de sus miembros han sido requeridos en tribunales de tesis de esta temática.

Los trabajos presentados en este grupo, desde su aparición hasta su último encuentro (2009-2015), son diversos, algunos de los temas más recurrentes se centran en:

- la formación inicial de maestros de educación infantil (e.g. Edo, 2012; Gutiérrez y Berciano, 2012);
- la resolución de problemas matemáticos en educación infantil (e.g. Salgado y Salinas, 2012; Ramírez y de Castro, 2015);
- el desarrollo del pensamiento matemático en los niños y niñas de infantil (e.g. Edo, 2012; Alsina, 2012);
- el trabajo con contenidos matemáticos específicos en infantil (e.g. Salgado y Salinas, 2013), entre otros.

Alsina (2013), argumenta la existencia de una creación progresiva y cohesionada de investigaciones sobre didáctica de las matemáticas en educación infantil en España.

Sus declaraciones se sustentan en el análisis del contenido matemático de diferentes trabajos, para determinar el estado de la investigación en didáctica de las matemáticas en educación infantil en España, propone tres grandes temas de investigación según un criterio de clasificación por contenidos. A partir de este análisis de datos cualitativo, el autor determina los temas de investigación siguientes (Alsina, 2013, pp. 117-118):

(1) la formación inicial de maestros de educación infantil,

(2) la adquisición y el desarrollo del pensamiento matemático infantil y

(3) recursos o contextos de aprendizaje para el desarrollo del pensamiento matemático en contextos como la vida cotidiana y los juegos.

Tras el análisis de las distintas temáticas de las comunicaciones presentadas en el IEMI, cabe destacar el hecho de que la temática relacionada con el aprendizaje matemático en contextos relacionados con el juego libre, prácticamente, y a diferencia del EYM, es inexistente. En relación con el tema del juego y el aprendizaje matemático en las SEIEM, hay una presentación sobre el tema Edo y Deulofeu, (2005), pero es anterior a la creación del grupo IEMI. Hasta el momento, la única comunicación presentada en la SEIEM desde la aparición de IEMI fue realizada por Carlos de Castro y Gonzalo Flecha en Ciudad Real el año 2011 (SEIEM XV). La comunicación en cuestión tiene por título Buscando indicadores alternativos para describir el desarrollo del juego de construcción con niños de dos y tres años y trata sobre la detección y descripción detallada de indicadores de desarrollo del juego en la construcción infantil. Es un estudio cualitativo de observación y se centra en las acciones verbales y de cooperación de los niños. Los resultados de este estudio muestran, entre otros aspectos, que en el juego de construcción con niños de dos y tres años hay un predomino de apilamientos horizontales y verticales, al mismo tiempo que predominan las construcciones de puentes, cerramientos e incluso de simetrías. Aparece de manera recurrente la repetición, la equivalencia y la combinación de la construcción con juego simbólico.

Aunque la presentación de trabajos relacionados con el juego y el aprendizaje matemático en infantil ha sido muy breve hasta el momento en el grupo IEMI, sí encontramos aportaciones de investigadores de este grupo, relacionadas con este campo de investigación en distintas revistas de investigación y de transferencia. Por ejemplo, Edo, Planas y Badillo (2009) presentan resultados de un estudio sobre aprendizajes matemáticos en un contexto de juego simbólico; de Castro, López y Escorial (2011) presentan un estudio exploratorio sobre el uso del juego de construcción en edades tempranas. En de Castro (2012) muestra como en las experiencias de juego libre de construcciones llevadas a cabo en aulas de escuelas infantiles, aparecen construcciones simétricas realizadas de manera espontánea durante el juego.

A MODO DE CONCLUSIÓN

Esta ponencia se centra en la emergencia de la investigación en educación matemática en infantil por parte de miembros de sociedades de educación matemática. Esta temática se comparte con investigadores de otras disciplinas, psicólogos principalmente, pero el interés por parte de las sociedades de profesores de matemáticas es relativamente reciente, apenas unos quince años. Hemos visto como una primera conferencia en el año 2002, en un congreso de educación matemática internacional, pone de manifiesto la necesidad y la importancia de la investigación en educación matemática infantil del momento. Presenciamos la aparición y consolidación de grupos de investigación centrados en este tema a nivel internacional, como el Early Years Mathematics Groups del European Society for Research in Mathematics Education. Grupo que aumenta en cantidad y calidad sus aportaciones año tras año. También se ha hablado de la aparición y consolidación del grupo de Investigación en Educación Matemática Infantil de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Grupo que, tras seis años de funcionamiento regular, a punto de traspasar de nuevo la coordinación tras dos mandatos completos, realizando puntualmente reuniones intermedias bianuales, con algunas tesis discutidas en el grupo ya presentadas y aumentando el número de miembros de forma gradual sentimos ya consolidado. Se puede afirmar que la investigación en educación matemática en las primeras edades es una temática relevante y necesaria. Y que, como campo de investigación, hoy, está consolidada tanto a nivel internacional como en España.

En los dos grupos de investigación se presentan estudios de diversa índole y con temáticas variadas y se observa un tratamiento distinto en relación con el tema de investigación juego y aprendizaje matemático en educación infantil. Las investigaciones presentadas en el grupo de trabajo internacional Early Years Mathematics sobre juego y aprendizaje matemático en educación infantil han sido numerosas y recurrentes desde el momento de la creación del grupo de trabajo en el CERME6 (2009), hasta su último encuentro en el CERME9 (2015). A pesar de las objeciones tanto en los modelos teóricos como en las investigaciones empíricas sobre juego y aprendizaje matemático de los diferentes trabajos presentados, alguna de las conclusiones ampliamente aceptadas, es la importancia y relevancia del juego en el inicio de la construcción del pensamiento matemático en las primeras edades. En el caso del grupo de investigación español IEMI, se observa que el tema del juego no está entre los más estudiados, si bien varios investigadores del grupo lo han tratado y han publicado acerca de él. Los temas que más han centrado la atención de los socios de este grupo (de 2011 a 2015) son, de un lado la formación del maestro de educación infantil, en todos los simposios realizados hay dos o más presentaciones vinculadas a este tema. Y en segundo lugar, el pensamiento numérico y la resolución de problemas en educación infantil, que, como en el caso anterior, hay siempre dos o más comunicaciones en todas las sesiones del grupo.

Después de estudiar las aportaciones sobre juego y aprendizaje matemático en educación infantil de dos grupos de investigación, podemos afirmar que en Europa este es un tema relevante, con numerosas y crecientes aportaciones. La importancia del juego como actividad matemática clave en el aprendizaje infantil es indiscutible para los integrantes del grupo EYM y, a su vez, podemos comprobar que sigue siendo un campo temático con múltiples interrogantes y con necesidad de mayor investigación en educación matemática infantil.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha llevado a cabo en el contexto del proyecto de investigación SGR-2014-972: Grup d'Investigació en Pràctica Educativa i Activitat Matemàtica – GIPEAM, Departament d'Economia i Universitats; 2014-2016 (IP: Núria Planas).

Referencias

Alsina, A. (2012). Contextos de vida cotidiana para desarrollar el pensamiento matemático en educación infantil. En M. Marín y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 409-426). Ciudad Real: SEIEM.

Alsina, A. (2013). Educación Matemática en Infantil: Investigación, Currículum, y Práctica Educativa. *REDIMAT: Journal of Research in Mathematics Education, 2*(1), 100-153.

Badillo, E., Font, V., Edo, M. y Planas, N. (2011). Analysis of mathematical solutions of 7 year old pupils when solving an arithmetic problem on distribution. En M. Pytlak, T. Rowland, E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1832-1841). Poland: University of Rzeszów and European Society for Research in Mathematics.

Barber, P. (2009). Introduction to working group F4 Early Years Mathematics. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.). *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2535-2536). Lyon, France: Institut National de Recherche Pédagogique.

Bishop, A.J. (1988). *Mathematical enculturation: A cultural perspective on mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.

Bussi, M.G. (2008). *Matematica. I numeri e lo spazio*. Milano: Edizioni junior

Coronata, C. (2014). *Presencia de los procesos matemáticos en la enseñanza del número de 4 a 8 años. Transición entre la educación infantil y elemental*. Tesis Doctoral. Universitat de Girona. Recuperada el 08/05/2016 de: http://www.tdx.cat/handle/10803/284330

De Castro, C., López, D., y Escorial, B. (2011). Posibilidades del juego de construcción para el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Infantil. *Pulso: Revista de Educación, 34*, 103-124.

De Castro, C. (2012). Aparición espontánea de construcciones simétricas durante el juego libre en Educación Infantil. *Épsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales", 29*(3), n. 82, 23-40.

De Castro, C. y Flecha, G. (2012). Buscando indicadores alternativos para describir el desarrollo del juego de construcción con niños de 2 y 3 años. En M. Marín y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 455-482). Ciudad Real: SEIEM.

Edo, M. (2002). *Jocs, interacció i construcció de coneixements matemàtics*. Tesis doctoral. Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona.

Edo, M. y Deulofeu, J. (2005). Juegos, interacción y construcción de conocimientos matemáticos: investigación sobre una práctica educativa. *Actas IX Simposio SEIEM*, *Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 187-195). Córdoba.

Edo, M. y Deulofeu, J. (2006). Investigación sobre juegos, interacción y construcción de conocimientos matemáticos. *Enseñanza de las Ciencias, 24*(2), 257-268.

Edo, M., Planas, N. y Badillo, E. (2009). Mathematical learning in a context of play. *European Early Childhood Education Research Journal, 17*(3), 325-342.

Edo, M. (2012). Situaciones interdisciplinarias para el desarrollo del pensamiento matemático en educación infantil en la formación de maestros. En M. Marín y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 427-453). Ciudad Real: SEIEM.

Elia, I., Gagatsis, A., Michael, P., Georgiou, A. y van den Heuvel-Panhuizen, M. (2011). Kindergartners' use of gestures in the generation and communication of spatial thinking. In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1842-1851). Poland: University of Rzeszów and European Society for Research in Mathematics.

Erfjord, I., Mamede, M., Krummheuer, G. (2011). Introduction to the papers of wg13: Early years mathematics. In M. Pytlak, T. Rowland, E. Swoboda (eds). *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1780-1781). Poland: University of Rzeszów and European Society for Research in Mathematics.

Erfjord, I., Carlsen, M., & Sigurd Hundeland, P. (2015). From speaking to learning of parallelism and perpendicularity relations. *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* Prague: Charles University in Prague, Faculty of Education.

Flottorp, V. (2011). How and why do children classify objects in free play? A casestudy. In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1852-1860). Poland: University of Rzeszów and European Society for Research in Mathematics.

Ginsburg, H. P. (2002). Little children, big mathematics: Doing, learning and teaching in the preschool. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the Twenty sixth Psychology of Mathematics Education*, PME26, (Vol. 1, pp. 1-3 – 1-14). Norwich (United Kingdom).

Ginsburg, H. P. (2006). Mathematical play and playful mathematics. In D.G. Singer, R.M. Golinkoff & K.

Hirsh-Pasek (Eds.), *Play = learning* (pp. 145-165). New York, NY: Oxford University Press.

Ginsburg, H. P. (2009). Early Mathematics Education and How to Do It. In O. A. Barbarin, & B. H. Wasik (Eds.) *Handbook of Child Development and Early Education. Research to Practice* (pp. 403–427). New York, London: The Guilford Press.

Gutiérrez, G., y Berciano, A. (2012). Desarrollo del pensamiento matemático y su didáctica en el Grado de Educación Infantil. De la manipulación a la comunicación visual. En M. Marín y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 489-503). Ciudad Real: SEIEM.

Helenius, O., Johansson, M., Lange, T., Meaney, T., Riesbeck, E., & Wernberg, A. (2014). Bishop's 6 activities: Changing preschool teachers' mathematical awareness. In *Development of mathematics teaching: Design, Scale, Effects: Proceedings from Madif9: The Ninth Swedish Mathematics Education Research Seminar, Umeå, February 4-5.*

Kamii, C., & Nagahiro, M. (2008). The educational value of Tic-Tac-Toe for Four-to-Six-Year-Olds. *Teaching Children Mathematics 14*(9), 523-527.

Koleza, E., & Giannis, P. (2013). Kindergarten children's reasoning about basic geometric shapes. In B. Ubuz, Ç. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2118-2127). Ankara: Middle East Technical University.

Piaget, G. (1924). Le jugement et le raisonnement chez l´enfant [El juicio y el razonamiento en el niño. Madrid: La Lectura, 1929. Reedición, 1972; Buenos Aires: Guadalupe]

Piaget, G. (1936). La naissance de l'intelligence chez l'enfant. [El nacimiento de la inteligencia en el niño. Madrid: Aguilar, 1969]

Ramírez, M. (2015). *Desarrollo de conocimientos matemáticos informales a través de resolución de problemas aritméticos verbales en primer curso de Educación Primaria*. Tesis Doctoral. Universidad Complutense de Madrid. Recuperada el 08/05/2016 de: https://dialnet.unirioja.es/descarga/tesis/47140.pdf

Ramírez, M. y De Castro, C. (2015). Comprensión de las decenas y aplicabilidad de las operaciones en problemas aritméticos verbales. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), Investigación en Educación Matemática. *Comunicaciones de los grupos de investigación. XVIII Simposio de la SEIEM* (pp. 533-542). Salamanca: SEIEM.

Rico, L., Sierra, M. y Castro, E. (2002). El área de conocimiento de «didáctica de la matemática». *Revista de Educación, 328, 35-58*

Salgado, M. y Salinas, M.J. (2012). Estrategias de resolución de problemas numéricos de sumar y restar en la etapa infantil. En M. Marín y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 505-517). Ciudad Real: SEIEM.

Salgado, M. y Salinas, M. J. (2013). Repartir en Educación Infantil. En A. Estepa, y N. Climent (Eds.), Investigación en Educación Matemática. *Comunicaciones de los grupos de investigación. XVI Simposio de la SEIEM* (pp.237-244). Baeza: SEIEM.

Salgado, M. (2015). *La práctica docente en educación infantil desde el enfoque de la Educación Matemática Realista y los procesos matemáticos*. Tesis Doctoral. Universidade de Santiago de Compostela.

SEIEM (2011). *Boletín SEIEM, 29*, 24-25. Disponible en:

http://www.seiem.es/docs/boletines/boletin30.pdf

SEIEM (1997). *Boletín SEIEM, 2*, 15. Disponible en:

http://www.seiem.es/docs/boletines/boletin02.pdf

Schuler, S. (2011). Playing and learning in early mathematics education – modelling a complex relationship. In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1912-1922). Poland: University of Rzeszów and European Society for Research in Mathematics.

Schuler, S. y Wittmann, G. (2009). How can games contribute to early mathematics education? – A video-based study. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.). *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2647-2656). Lyon (France): Institut National de Recherche Pédagogique.

Svensson, C. (2015). Preschool teachers' understanding of playing as a mathematical activity. *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* Prague: Charles University in Prague, Faculty of Education.

Tirosh, D., Tsamir, P., Levenson, E., Tabach, M. & Barkai, R. (2013). Two children, three tasks, one set of figures: highlighting different elements of children's geometric knowledge. In B. Ubuz, Ç. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2238-2237). Ankara: Middle East Technical University.

Tubach, T. (2015). "If she had rolled five then she'd have two more" -children focusing on differences between numbers in the context of a playing environment. *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* Prague: Charles University in Prague, Faculty of Education.

van Oers, B. (2010). Emergent mathematical thinking in the context of play. *Educational Studies in Mathematics* 1, 23-37.

van Oers, B. (2014). Cultural-historical Perspectives on Play: Central Ideas. In L. Brooker, M. Blaise & S. Edwards (Eds.), *The SAGE Handbook of Play and Learn-ing in Early Childhood* (pp. 56-66). Los Angeles, CA: Sage.

Vigh, P. (2013). Game promoting early generalization. In B. Ubuz, Ç. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2228-2247). Ankara: Middle East Technical University.

Vighi, P. (2015). From speaking to learning of parallelism and perpendicularity relations. *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.* Prague: Charles University in Prague, Faculty of Education.

Vogel, R. & Jung, J. (2013). Videocoding – a methodological research approach to mathematical activities of kindergarten children. In B. Ubuz, Ç. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2248-2277). Ankara: Middle East Technical University.

Vygotsky, L.S. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Madrid: Crítica. [Publicación en inglés el 1978].

.

Comunicaciones

¿RECONOCEN LOS ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA LAS SECUENCIAS DE RESULTADOS ALEATORIOS?

Do secondary school students recognise sequences of random results?

Rodrigo Esteban[a], Carmen Batanero[b], Luis Serrano[b] y J. Miguel Contreras[b]

[a]Universidad de Zaragoza, [b]Universidad de Granada

Resumen

El objetivo de este trabajo fue identificar las características que los estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria asignan a las secuencias de resultados aleatorios. Se comparan las respuestas y argumentos de 159 estudiantes de tres niveles educativos a cuatro tareas que en la investigación previa se conocen como tareas de reconocimiento de la aleatoriedad. Manteniendo el experimento aleatorio consistente en lanzar una moneda y la longitud total de la secuencias, se varían la frecuencia de resultados y la longitud de las rachas. Los resultados sugieren que los alumnos reconocen las características de las secuencias y tienen buena percepción de la estabilidad de la frecuencia relativa, pero esperan rachas más cortas de las habituales en un proceso aleatorio. Se observan mejores resultados que en investigaciones previas y mejor razonamiento en los alumnos mayores.

Palabras clave: *aleatoriedad, reconocimiento, estudiantes de educación secundaria obligatoria*

Abstract

The aim of this work was to identify the characteristics that secondary school students assign to sequences of random results. The responses and arguments from 159 students in three different educational levels to four items, which in previous research are termed as recognition tasks are compared. With the same random experiment (flipping a coin) and the same total length, the frequency of results and the length of runs were varied. Results suggest that students recognise the characteristics of the sequences and perceive the stability of frequencies; however, they expect shorter runs than those predicted in a random sequence. We observe better results than in previous research and more correct reasoning in the older students.

Keywords: randomness, perception, secondary school students

INTRODUCCIÓN

En las últimas dos décadas diferentes currículos (ej., CCSSI, 2010; NCTM, 2000) inciden en la importancia de la probabilidad, y recomiendan que los estudiantes realicen experimentos aleatorios con material manipulativo o mediante simulación, obtengan datos empíricos de los mismos y comparen los resultados obtenidos con sus predicciones. Estas recomendaciones se siguen en España, donde se adelantó la enseñanza de la probabilidad al último ciclo de Educación Primaria en el anterior currículo (MEC, 2006); la tendencia continúa en el actual currículo (MECD, 2014).

El aprendizaje de la probabilidad, desde este enfoque frecuencial, requiere que los estudiantes adquieran las ideas de aleatoriedad, variabilidad e independencia (Sánchez y Valdés, 2015). También requiere que comprendan las características de las secuencias aleatorias, y perciban posibles sesgos en la producción de las mismas. El concepto de aleatoriedad es el punto de partida de la teoría de probabilidades, pero Batanero y Serrano (1995) sugieren que la diversidad de

Esteban. R., Batanero, C., Serrano, L. y Contreras, J. M. (2016). ¿Reconocen los estudiantes de educación secundaria obligatoria las secuencias de resultados aleatorios? En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 122-132). Málaga: SEIEM

interpretaciones del mismo, favorece la existencia de sesgos subjetivos en el reconocimiento de las secuencias aleatorias y sus características. Por otro lado, Sánchez, García y Medina (2014) indican que es importante que el estudiante adquiera una correcta percepción de la aleatoriedad para poder progresar en el aprendizaje de la probabilidad. El objetivo principal de nuestro trabajo es evaluar las características que los alumnos que han estudiado probabilidad en la educación primaria asignan a las secuencias aleatorias y compararla en alumnos de 2º, 3º y 4º cursos de la Educación Secundaria Obligatoria. Un segundo objetivo es comparar con los resultados de investigaciones previas, realizadas en un periodo en que la probabilidad no se incluía en este nivel educativo.

FUNDAMENTOS

Las principales investigaciones sobre comprensión de las secuencias de resultados aleatorios, parten de los trabajos sobre el desarrollo cognitivo de la idea de azar de Piaget e Inhelder (1975) y Fischbein (1975). Los primeros autores supusieron que la comprensión del azar es complementaria a la idea de causa y efecto y que requiere de razonamiento combinatorio y proporcional, todo lo cual supone una lenta maduración. Por el contrario, Fischbein postuló la existencia de intuiciones parcialmente formadas sobre la aleatoriedad en los niños y, como consecuencia, indicó la conveniencia de adelantar la enseñanza del tema, para educar esta intuición.

Un autor que ha tenido gran influencia en la investigación sobre comprensión de la probabilidad es Green (1983), quien reprodujo los experimentos de Piaget e Inhelder en versión de papel y lápiz, construyendo un cuestionario que pasó a 2930 estudiantes ingleses de entre 11 y 16 años. Uno de sus ítems pedía a los niños decidir cuál entre dos secuencias de 150 lanzamientos de una moneda equilibrada era aleatoria, justificando la respuesta. El autor indicó que la mayoría de los niños consideraba aleatoria precisamente la secuencia que era inventada, porque esperaban un balance de caras y cruces muy cercano al 50% y no aceptaron como aleatorias las rachas de más de dos o tres resultados.

La investigación posterior sobre percepción de la aleatoriedad se ha concentrado especialmente en sujetos adultos (Bar-Hillel y Wagenaar, 1991; Batanero, 2015; Falk, 1981; Schreiber, 2014; Wagenaar, 1972). En dichas investigaciones se han utilizado dos tipos generales de tareas: a) En las *tareas de generación* (Engel y Sedlmeier, 2005; Serrano, 1996) se pide a los sujetos inventar una secuencia de resultados que parezca ser generada por un dispositivo aleatorio (por ejemplo, una secuencia de lanzamientos de una moneda): b) en las *tareas de reconocimiento* (e.g., Batanero y Serrano, 1999; Chernoff, 2011) se pide a los sujetos decidir cuál entre varias secuencias de resultados aleatorios es más probable o bien cuál, entre varias secuencias es aleatoria.

Nuestro trabajo se centra en tareas de reconocimiento, adaptadas de otras utilizadas en el trabajo de Batanero y Serrano (1999), que fue realizado por 277 estudiantes españoles de 13 y 17 años. Dichos autores proponen secuencias de 40 lanzamientos de una moneda equilibrada y varían dos variables en las secuencias: a) La proporción de caras, próxima, pero no exacta a 0,5 en tres de las secuencias e igual a 0,3 en la otra; b) la longitud de la racha más larga, que llega a cinco resultados idénticos en una de estas secuencias. Sin embargo, los autores no combinan sistemáticamente las dos variables en su prueba. Los resultados indican los siguientes puntos difíciles en la comprensión de las secuencias aleatorias: a) variabilidad local (ausencia de patrones), b) regularidad global (convergencia de la frecuencia relativa a la probabilidad teórica), y c) diferencia entre valores teóricos y observados. Entre los errores mostrados por estos estudiantes, los autores resaltan la creencia en que los datos deben ser erróneos, si no corresponden a sus expectativas y la confusión entre alta probabilidad y certeza.

En nuestro caso tratamos de completar las investigaciones previas, utilizando tareas similares a las propuestas por Batanero y Serrano (1999), pero combinando sistemáticamente la longitud de las rachas (sólo rachas cortas o incluye rachas largas) con la frecuencia relativa de caras (exactamente igual a 0.5 o menor). Además, se reduce la longitud de las secuencias a 20 resultados para facilitar la tarea y se evalúa la comprensión de alumnos que han tenido contacto previo con la probabilidad.

MÉTODO

La muestra consta de 159 alumnos, de un instituto de la provincia de Teruel, de los siguientes cursos de Educación Secundaria Obligatoria: 2º (n = 51; 2 grupos), 3º (n = 64; 3 grupos) y 4º (n = 44, 2 grupos). En total han participado 7 grupos de alumnos, prácticamente todos los alumnos de estos cursos en el citado centro. Sus edades están comprendidas entre 13 y 17 años y han recibido enseñanza de contenidos de probabilidad, de acuerdo con las programaciones curriculares emanadas de la LOE. Nuestra muestra es intencional y el estudio es exploratorio.

Para elegir los ítems que forman parte del cuestionario se revisaron los utilizados en las investigaciones sobre reconocimiento de la aleatoriedad. Es decir, se decidió utilizar únicamente tareas en que se den a los estudiantes algunas secuencias de resultados para pedirles que indiquen si son o no aleatorias; además, se decidió preguntarles por las razones de su respuesta. Ya que encontramos una gran variedad en estas tareas, para que los ítems resultaran sencillos a los estudiantes, se decidió utilizar secuencias de longitud corta (20 resultados). Otra variable que se fijó fue utilizar experimentos aleatorios con dos resultados equiprobables, donde los estudiantes puedan aplicar sus conocimientos de probabilidad clásica (regla de Laplace) en la respuesta.

En la Figura 1 mostramos el cuestionario, que presenta 4 secuencias diferentes de resultados de lanzamientos de una moneda (se supone equilibrada, es decir con probabilidad de cara igual a ½). En estas secuencias se han variado algunas características, para ver si los alumnos las perciben: Las secuencias de María y Daniel tienen exactamente 10 caras y 10 cruces, mientras que las otras dos tienen menos caras (8 en la secuencia de Martín y 7 en la de Diana). Las secuencias de Daniel y Martín sólo tienen rachas cortas; la longitud más larga de las rachas es sólo de dos símbolos iguales. Las otras dos secuencias contienen algunas rachas más largas (de hasta 5 elementos la de María y hasta 4 la de Diana). Las diferencias con las tareas de Batanero y Serrano (1999) son las siguientes: a) la longitud de las secuencias (20 resultados en lugar de 40), b) las frecuencias, pues los autores no propusieron ninguna secuencia con una frecuencia exacta del 50% de caras.

Items 1 a 4

Se pidió a algunos niños que lanzaran una moneda equilibrada 20 veces y anotaran los resultados obtenidos. Algunos lo hicieron correctamente, lanzando la moneda y anotando los resultados; otros hicieron trampas, inventando los resultados sin lanzar la moneda. Indicaron C para la cara y + para la cruz. Estos son sus resultados:

- María: + + + C + C C + + + C + C C C C C + C +
- Daniel: C + C + + C C + C + C C + + C + + C C +
- Martín: C + C + C + + C + C + +C+ + C + + C+
- Diana: C + + + C + + C + C + + + C + + + + C C

Item 1: ¿Hizo María trampas? ¿Por qué?
Item 2: ¿Hizo Daniel trampas? ¿Por qué?
Item 3: ¿Hizo Martín trampas? ¿Por qué?
Item 4: ¿Hizo Diana trampas? ¿Por qué?

Figura 1. Cuestionario

Para responder a los ítems, esperamos que los alumnos usen su conocimiento del experimento aleatorio planteado (lanzar una moneda) y sus características de impredecibilidad local (no se sabe qué resultado ocurre cada vez), y regularidad global (se puede prever la distribución del conjunto, cuando se repite el experimento) (Batanero, Henry y Parzysz, 2005). Para cada experimento planteado en los enunciados han de reconocer el espacio muestral. Deben comprender las características de las secuencias de resultados aleatorios; por ejemplo, la independencia de cada repetición del experimento y la convergencia de la frecuencia relativa a la probabilidad teórica. Deben aceptar la variabilidad de los resultados en experimentos aleatorios y reconocer cuando esta variabilidad es demasiado pequeña para que la secuencia sea aleatoria.

Para evaluar la aleatoriedad de las diferentes secuencias, los estudiantes cuentan las frecuencias de los diferentes resultados; esto supone el conocimiento de la idea de frecuencia y capacidad de cálculo. Finalmente, también aplican la idea de valor esperado, al compararlo con estas frecuencias.

Método de análisis: Recogidos los cuestionarios, se procedió a un análisis cualitativo de los datos, mediante un procedimiento inductivo y cíclico. Para cada ítem se analizaron dos variables:

- La respuesta del estudiante en cada ítem (si la secuencia es o no aleatoria la secuencia). Se calcula la frecuencia de estudiantes que consideran aleatoria o no aleatoria cada secuencia. No se califica la respuesta como correcta o incorrecta, porque la corrección dependerá de la justificación dada.

- El argumento (justificación) dado para considerar cada secuencia como aleatoria; que puede ser correcto o incorrecto, dependiendo del ítem. Se han clasificado estos argumentos dependiendo de si los alumnos responden fijándose en la frecuencia de caras (o de cruces), en el orden de la secuencia, o en la longitud de las rachas.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Análisis de respuestas

En la Tabla 1 presentamos la frecuencia y porcentaje de respuestas en cada ítem, observando que son pocos los estudiantes que no responden, pues se interesaron por la tarea y la completaron con seriedad. La mayoría de los estudiantes considera aleatoria todas las secuencias, especialmente la secuencia presentada en el segundo ítem, donde las rachas son cortas y el número de caras coincide exactamente con el teórico.

Tabla 1. Frecuencia y Porcentaje de alumnos que considera aleatorio o no los ítems 1 a 4.

	Ítem 1. María 10C, Rachas largas		Ítem 2. Daniel 10 C Rachas cortas		Ítem 3. Martín 8C Rachas largas		Ítem 4. Diana 7C Rachas cortas	
	N	%	N	%	N	%	N	%
Aleatoria	88	55,3	103	64,8	97	61,0	96	60,4
No aleatoria	67	42,1	52	32,7	59	37,1	60	37,7
No contesta	4	2,5	4	2,5	3	1,9	3	1,9

Batanero y Serrano (1999) en su trabajo con estudiantes de 14 y 18 años encontraron los siguientes porcentajes de sujetos que aceptaron la aleatoriedad de secuencias de longitud 40: 60% (frecuencia similar a la esperada, rachas cortas), 57% (frecuencia similar a la esperada, rachas largas); 36% (rachas largas, frecuencia diferente a la esperada), siendo difícil en dicha investigación deducir si el rechazo de la aleatoriedad se produce por la longitud de las rachas o por la diferencia entre frecuencia observada y teórica. En nuestro caso, estas dos variables se separan, pues hemos incluido rachas largas en secuencias con frecuencia observada igual y diferente a la teórica. Hay un porcentaje algo mayor de aceptación de la aleatoriedad en todos los casos (7,8% más de estudiantes si las frecuencias se aproximan a las esperadas y las rachas con cortas; 2,1% más si las rachas son largas y las frecuencias se aproximan y 25% más cuando las frecuencias se apartan un poco de las esperadas).

En la Figura 2 presentamos el porcentaje de alumnos que en cada uno de los cursos ha respondido que la secuencia es aleatoria en los diferentes ítems. Observamos ahora una diferencia por curso. En segundo curso no parecen influir las variables de la tarea para aceptar la aleatoriedad, pues siempre alrededor del 60% de estudiantes consideran aleatoria las secuencias. En tercero los alumnos parecen diferenciar las rachas largas (ítems 1 y 4) pues hay menos alumnos que consideran (erróneamente) aleatorias estas secuencias, en comparación con los otros dos ítems. En cuarto curso los alumnos parecen fijarse más en la frecuencia, pues menos alumnos consideran aleatorias las secuencias 3 y 4. En la investigación de Batanero y Serrano (1999) no hubo diferencias por curso en la aceptación de la aleatoriedad de las secuencias que propusieron.

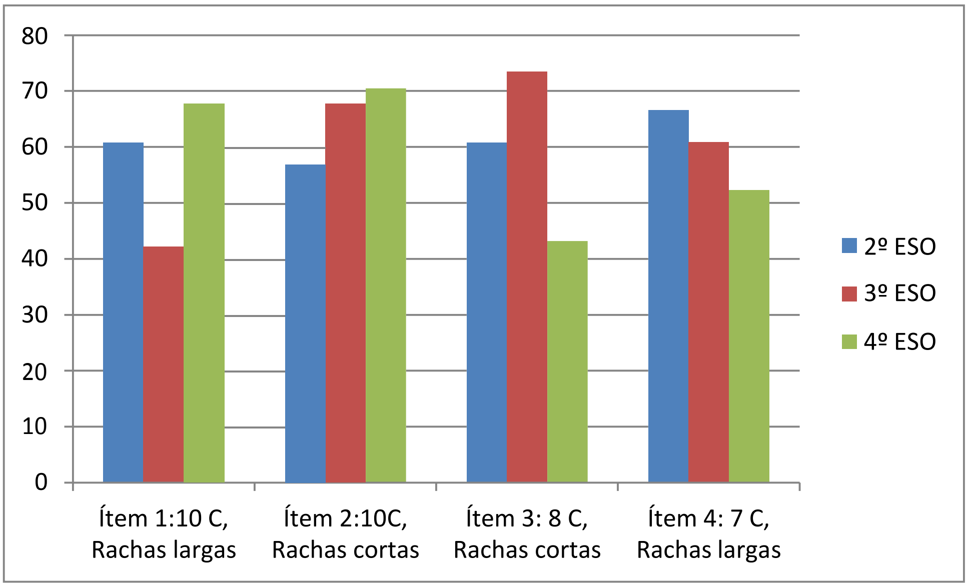


Figura 2. Porcentaje de estudiantes que consideran aleatoria cada secuencia

Análisis de argumentos

Los argumentos dados por los estudiantes para justificar su respuesta se analizaron con detalle y se clasificaron, de acuerdo con la propuesta hecha en la investigación de Batanero y Serrano (1999). Estos argumentos permiten evaluar las propiedades que los estudiantes asignan a las secuencias aleatorias y fueron los siguientes:

Frecuencias iguales: Se clasifican en esta categoría los estudiantes que han contado el número de caras y cruces en las secuencias y las han comparado con el valor teórico (10 caras y 10 cruces); dichos estudiantes muestran buena percepción del valor esperado en una serie de ensayos independientes (formalmente, el número de caras en cada secuencia seguiría una distribución binomial). Como parte de su argumento, señalan que las frecuencias observadas de caras y cruces en la secuencia son iguales o se aproximan al valor de probabilidad teórica esperado de cada suceso, diferenciando ambos conceptos y poniendo en relación los puntos de vista clásico y frecuencial de la probabilidad. Cuando argumentan que una secuencia es aleatoria porque el número de caras es 10, lo consideramos correcto; también si indican que el número de caras es cercano a 10, pero que la diferencia es admisible en una secuencia aleatoria, pues supone la correcta percepción del valor esperado en la distribución binomial. Algunos ejemplos que implícitamente incluyen esta idea son los siguientes:

- "No (hizo trampas), porque la proporción es más o menos igual" (Alumno 17, 2º curso).
- "No (hizo trampas), porque ha tenido una probabilidad del 50%" (Alumno 38, 4º curso).

Consideramos incorrecto el argumento de algunos alumnos que indican que la secuencia no puede ser aleatoria por haber una pequeña diferencia en la frecuencia observada del número de caras respecto a la probabilidad teórica. Este razonamiento supone la creencia en la ley de los pequeños números (esperar una convergencia demasiado exacta; Kahneman y Tversky, 1972). También consideramos incorrecto el razonamiento de los alumnos que indican que no se puede predecir el número de caras esperado; Batanero y Serrano (1995, 1999) indican que esta respuesta implica no comprender la utilidad de la estadística para analizar los fenómenos aleatorios.

- "Sí (hizo trampas), es muy complicado que salgan 10C y 10X (Alumno 4, 3º curso).
- "Sí (hizo trampas), porque el resultado está hecho aposta (adrede) 10X y 10C". (Alumno 50, 2º curso).

Frecuencias diferentes: Al igual que en el razonamiento anterior, los alumnos argumentan en base a la comparación de las frecuencias observadas y esperadas, de acuerdo a una distribución de probabilidad teórica, por lo que muestran una buena comprensión de estos conceptos. Ejemplos de los razonamientos correctos, en que indican que es aceptable obtener una pequeña variación de las frecuencias relativas son los que siguen:

- No, no tienen por que ser diez y diez, puede ser aproximada, le puede salir 8 y 12 perfectamente (Alumno 2, 4ºcurso).
- "No, porque es más coherente, ya que no sale el mismo número de cruces que de caras" (Alumno 44, 2º curso).

El razonamiento sería incorrecto en caso de argumentar que se la secuencia no es aleatoria, por no obtener una frecuencia relativa idéntica a la probabilidad teórica, razonando, por tanto, de acuerdo a la ley de los pequeños números:

- "Sí, porque no le sale el mismo número de veces cara que cruz" (Alumno 28, 4º curso).

Patrón regular: Unas de las concepciones modernas de la aleatoriedad, debida a Von Mises es que en las secuencias aleatorias no es posible encontrar un patrón que sirva para predecir sus resultados (Batanero, 2015). Esta concepción se muestra en algunos estudiantes, que hacen referencia al orden de los sucesos en la secuencia, analizando si hay alguna regularidad o patrón aparente en la presentación de caras y cruces. En general, se supone que en dicho caso, el estudiante ficticio que se cita en el ítem ha hecho trampa, pues la existencia de un patrón se percibe como falta de aleatoriedad, lo que sería un razonamiento correcto. Algunos argumentos que dan los alumnos son:

- "Sí, porque están ordenadas muy iguales". (Alumno 1, 2º curso).
- *"*Sí, porque tiene todo un orden*"*. (Alumno 12, grupo 2ºA).
- "Sí, porque es muy poco probable que le salga todo el rato C++ C++ C++". (Alumno 14, 2º curso).
- "Sí, porque sus resultados tienen un patrón". (Alumno 64, 3º curso).
- "Sí, porque hizo como una progresión (1-1-2-1-2-2-2-2)" (Alumno 14, 3º curso).

Patrón irregular: Por el contrario, otros alumnos en su razonamiento indican que no se aprecia ningún cierto orden o patrón en la secuencia de caras y cruces; en general, este tipo de respuesta correctamente se asocia a la aleatoriedad:

- "No, porque es un resultado irregular". (Alumno 24, 3º curso).
- "No, porque no sigue un patrón". (Alumno 53, 3º curso).
- "No, el patrón no es constante". (Alumno 25, 2º curso).

Rachas: En algunos casos los alumnos observan en las secuencias la longitud de las rachas del mismo resultado, para argumentar sobre la aleatoriedad de cada secuencia. Consideramos incorrecto cuando argumenten que las rachas son muy largas para que la secuencia sea aleatoria, porque, de acuerdo a Batanero (2015), esto implica no reconocer la independencia de los ensayos aleatorios. También será incorrecto el argumento consistente en indicar que todas las rachas han de ser cortas para ser aleatorio:

- "Sí (hace trampas), porque le han salido muchas veces seguidas caras". (Alumno 36, 2º curso).
- "Creo que sí (hace trampas) porque hay demasiadas cruces y las que hay están juntas". (Alumno 13, 3º curso).

Será correcto cuando indiquen que hay que esperar alguna racha larga en una secuencia para que sea aleatoria:

- "No (hace trampas) porque cambia más". (Alumno 51, 2º curso).
- "No porque le están saliendo los resultados alternamente". (Alumno 42, 3º curso).

*Impredecible***:** Los alumnos consideran el experimento aleatorio en base a la impredecibilidad de los resultados. Este argumento incluye una visión primitiva de la aleatoriedad, pues, aunque cada resultado aislado es impredecible, si se puede predecir la distribución de todos los resultados en la secuencia dada:

- "No, porque es azar". (Alumno 4, 2º curso).
- "No los resultados son impredecibles". (Alumno 9, 3º curso).

- “No todos los resultados son válidos”. (Alumno 9, 4º curso).

En la Tabla 2 presentamos la frecuencia con que se consideraron los diferentes argumentos en cada ítem y curso. Se observa, en primer lugar, un alto porcentaje de no argumento en todos los ítems; es decir, aunque la mayoría de los alumnos responde a la pregunta de si considera o no aleatoria la secuencia, no todos saben explicar la razón. Esto puede implicar que algunos alumnos no tienen suficiente capacidad argumentativa, pues, como hemos visto, si parecen reconocer las características del ítem.

Tabla 2. Porcentajes de argumentos en los ítems 1 a 4.

Argumentos	Ítem 1. María 10C, Rachas largas			Ítem 2. Daniel 10 C Rachas cortas			Ítem 3. Martín 8C Rachas largas			Ítem 4. Diana 7C Rachas cortas		
	2º	3º	4º	2º	3º	4º	2º	3º	4º	2º	3º	4º
Patrón regular		2		18	19	14	22	13	14	2	6	
Patrón irregular	4							3		2	5	
Frecuencias iguales	16	17	33	20	21	33	4		5			
Frecuencias diferentes	2			2			8	6	26	16	11	26
Rachas	21	31	17	12	16	7	8	11	7	12	26	22
Impredecibles/suerte	21	30	31	18	28	32	18	37	24	26	27	38
Sin argumentos	36	20	19	30	16	14	40	30	24	42	25	14

Fue también muy frecuente en todos los ítems el argumento de impredecibilidad, es decir, considerar que cualquier resultado es posible en un experimento aleatorio. Estos alumnos entenderían que al ser un experimento aleatorio impredecible, no pueden dar una razón para considerar una secuencia aleatoria o no. Esta fue también una respuesta muy frecuente en Green (1991) y en la investigación de Batanero y Serrano (1999) osciló entre el 28% y el 35% en todos los ítems; en nuestra investigación ha sido menor en algunos cursos e ítems.

No hubo mucha diferencia por curso en los argumentos, aunque en tercero predomina más el argumento de imprevisibilidad (que implica una concepción más primitiva de la aleatoriedad) y en cuarto desaparece la asociación con el patrón regular o irregular (concepción más avanzada). Hay también en cuarto mayor proporción de chicos que asocian el hecho de que las frecuencias observadas sean próximas a las esperadas con la aleatoriedad; esto implicaría una mejor comprensión del significado frecuencial de la probabilidad. Al comparar con el estudio de Batanero y Serrano (1999) hubo algo mayor variación con la edad en los nuestros, ya que dichos autores encontraron respuestas muy similares en los chicos de 14 y 17 años.

En la Figura 3 se presentan los argumentos en cada ítem en el total de la muestra, dependiendo de si se considera o no aleatoria la secuencia. Como se ha dicho hubo un alto porcentaje de no argumento en todos los ítems; se produce además tanto si se considera aleatoria la secuencia, como si no se considera. Podemos observar que muchos alumnos detectan las características de las secuencias y lo indican explícitamente. Así, el patrón irregular apenas aparece y ligado solo a los ítems 3 y 4 donde todas las rachas son cortas. Este argumento fue mucho menos frecuente que en el trabajo de Batanero y Serrano (1999) cuyos alumnos lo usaron en todos los ítems. El patrón regular se usa para rechazar la aleatoriedad en los primeros ítems, mientras en Batanero y Serrano se usa tanto para aceptarla como para rechazarla; en consecuencia, en nuestro estudio se obtiene mejor resultado en este argumento.

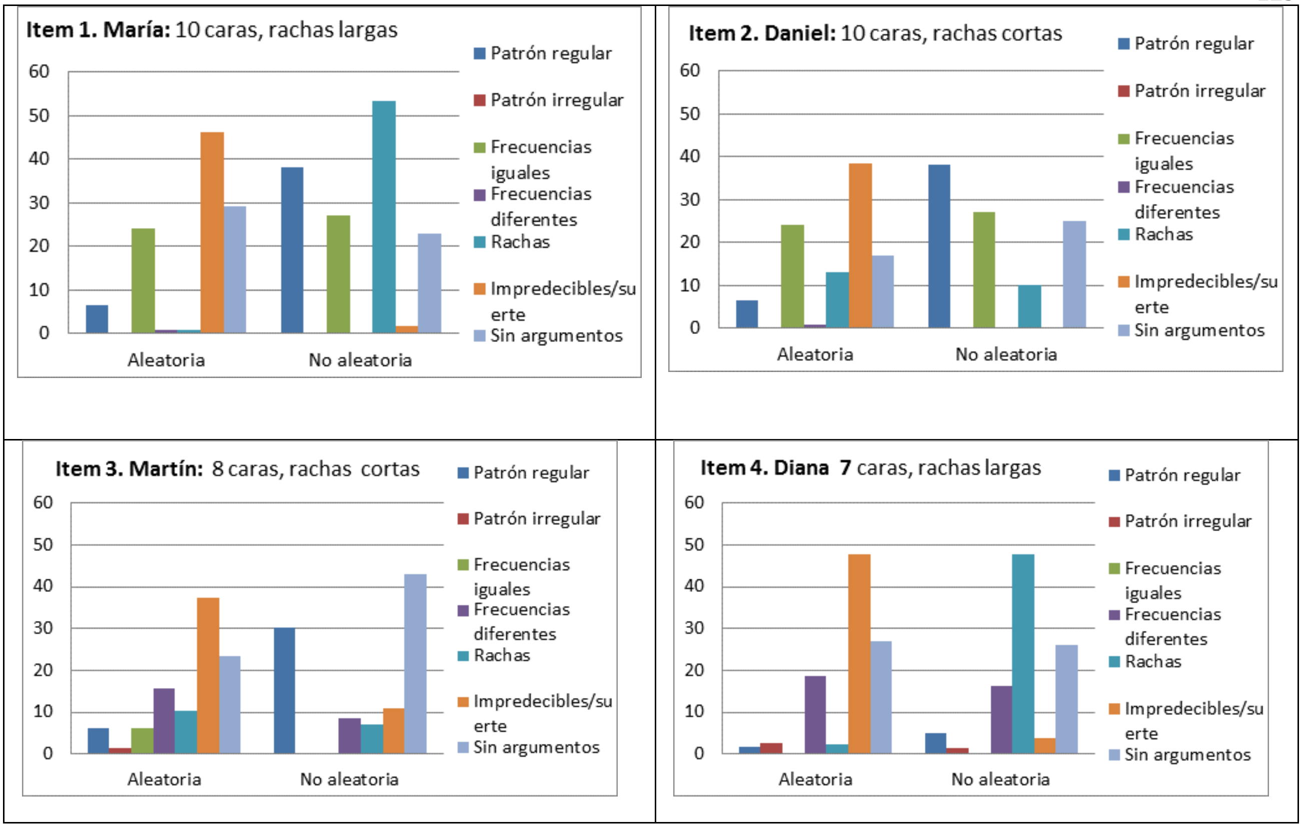


Figura 3. Porcentaje de diferentes argumentos en cada ítem en función de si se considera o no aleatoria la secuencia

Las frecuencias iguales se argumentan solo en los dos ítems con exactamente 10 caras y 10 cruces, y la frecuencias diferentes en lo que tienen menos caras, aunque tanto para aceptar, como para rechazar la secuencia como aleatoria, como ocurrió en Batanero y Serrano (1999). Las rachas se argumentan sobre todo cuando son largas y se asocia a la no aleatoriedad, un error presente en Batanero y Serrano con mayor frecuencia que en nuestro caso. Fue también muy frecuente en todos los ítems el argumento de impredecibilidad; casi siempre ligado a la aleatoriedad; en Batanero y Serrano osciló entre el 28% y el 35% en todos los ítems; esta vez ha sido mayor.

REFLEXIONES FINALES

Los resultados permiten evaluar la percepción de las secuencias aleatorias en alumnos de 2º a 4º curso de la ESO y compararla con la información proporcionada por las investigaciones previas. Por un lado se observa que los estudiantes que han participado en nuestra investigación proporcionan los mismos argumentos que los participantes en el estudio de Batanero y Serrano (1999), aunque se les pide juzgar la aleatoriedad de secuencias de menor longitud (20 resultados en lugar de 40).

Además, tanto el reconocimiento de la aleatoriedad, como los argumentos proporcionados por nuestros estudiantes mejoran con el curso, mientras que Batanero y Serrano no encontraron diferencia en las respuestas de estudiantes de diferente edad. Puesto que los autores realizaron su trabajo en un momento en que no era habitual el enfoque frecuencial, y la enseñanza de la probabilidad se atrasaba hacia los 15 años, interpretamos que las diferencias encontradas en nuestro trabajo podrían deberse a la enseñanza recibida. No obstante, se necesita profundizar en la investigación para poder mostrar claramente esta influencia.

Nuestros resultados apoyan la hipótesis de que los estudiantes han reconocido las características de las secuencias presentadas; muchos de ellos las hacen explícitas en sus argumentos. La principal dificultad observada es una expectativa demasiado alta en la variabilidad local de la secuencia y en consecuencia, un rechazo de las rachas largas. Como punto más positivo resaltamos la comprensión de la convergencia de la frecuencia relativa de caras a la probabilidad teórica y la aceptación de pequeñas diferencias entre las mismas en las secuencias aleatorias. Igualmente, los estudiantes esperan que no haya patrones en el orden de resultados en las secuencias aleatorias. Sin embargo, algunos de ellos hacen demasiado énfasis en la impredecibilidad de los resultados aleatorios, que se extiende indebidamente, suponiendo que también la distribución es impredecible. Estos estudiantes no comprenden la utilidad del análisis estadístico para estudiar fenómenos aleatorios.

El contacto previo con la probabilidad de estos alumnos podría haber influido en las mejores respuestas de los mismos, respecto al estudio de Batanero y Serrano (1999) y en los mejores resultados de los alumnos según avanzan de curso. No obstante, creemos que es necesario proporcionar a los estudiantes un conocimiento más preciso de las propiedades de las secuencias aleatorias. Ello podría lograrse a partir de la experimentación y simulación y utilizando una metodología activa, tal como se establece en los nuevos diseños curriculares.

En nuestro estudio, la evaluación se utilizó también como punto de partida para plantear actividades didácticas. El cuestionario resultó interesante para los estudiantes, sirviendo la discusión posterior de las respuestas como una actividad de aula. Dada la importancia de la comprensión de la aleatoriedad para el aprendizaje de la probabilidad, es importante partir de los resultados de investigaciones como la actual, donde se proporciona información sobre las concepciones previas y sesgos subjetivos del alumnado. La discusión en clase de ítems parecidos a los nuestros sería un buen medio de hacer florecer sus argumentaciones y llevarlos a reconocer las que son incorrectas.

Agradecimiento: Proyecto EDU2013-41141-P (MEC), y Grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Bar-Hillel, M. y Wagenaar, W. A. (1991). The perception of randomness. *Advances in Applied Mathematics, 12*, 428-454.

Batanero, C. (2015). Understanding randomness: Challenges for research and teaching. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.). *Proceeding of the Ninth Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 34-49). Praga: ERME.

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. In A. G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 15–37). New York: Springer.

Batanero, C. y Serrano, L. (1995). Aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. *Uno, 5*, 15-28.

Batanero, C. y Serrano, L. (1999). The meaning of randomness for secondary school students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30 (5), 558-567.

Chernoff, E. J. (2011). Investigating relative likelihood comparisons of multinomial, contextual sequences. En M. Pytlak, T. Rowland y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of European Research in Mathematics Education*, (591-600). Reszlow: ERME.

Common Core State Standards Initiative (CCSSI). (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington, DC: National Governors Association for Best Practices and the Council of Chief State School Officers. Recuperado de: http://www.corestandards.org/Math/.

Engel, J. y Sedlmeier, P. (2005). On middle-school students' comprehension of randomness and chance variability in data. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37*(3), 168-177.

Falk, R. (1981). The perception of randomness. In C. Laborde (Ed.), *Proceedings of the Fifth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 222-229). Grenoble: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Fischbein (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.

Green, D. R. (1983). A survey of probabilistic concepts in 3.000 pupils aged 11-16 years. En D. R. Grey et al. (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (pp. 766-783). University of Sheffield.

Green, D. R. (1991). *A longitudinal study of pupil's probability concepts*. Tesis Doctoral, Universidad de Loughborough.

Kahneman, D. y Tversky, A. (1972). Subjective probability: A judgment of representativeness. *Cognitive Psychology*, 3, 430-454.

Ministerio de Educación y Ciencia, MEC (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria*. España: Ministerio de Educación y Cultura.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, MECD (2015). *Real Decreto 1105/2014 de currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Madrid: Autor.

National Council of Teachers of Mathematics, NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Autor.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1975). *The origin of the idea of chance in children.* New York: Norton.

Schreiber, J. M. (2014). Cognitive processes associated with the perception of randomness. *Journal of Educational and Developmental Psychology*, *4*(1), 84.

Sanchez, E., García, J. y Medina, M. (2014). Niveles de razonamiento y abstracción de estudiantes de secundaria y bachillerato en una situación-problema de probabilidad. *Avances de Investigación en Educación Matemática 6*, 5-23

Sánchez, E. y Valdés, J. C. (2015). El razonamiento probabilístico informal de estudiantes de bachillerato. *Investigación en Educación Matemática XIX*, 89,103.

Serrano, L. (1996). *Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad*. Tesis doctoral, Universidad de Granada.

Wagenaar, W. A. (1972). Generation of random sequences by human subjects: A critical survey of literature. *Psychological Bulletin*, *77*, 65-7

EVALUACIÓN DE DIFICULTADES EN EL ANALISIS DE VARIANZA ELEMENTAL POR ESTUDIANTES DE PSICOLOGÍA

Assessing psychology students' difficulties in elementary variance analysis

Osmar D. Vera[a], Carmen Díaz[c], Carmen Batanero[c] y Mª del Mar López-Martín[c]

[a]Universidad Nacional de Quilmes, Argentina, [b]Universidad de Huelva, [c]Universidad de Granada.

osmar.vera@unq.edu.ar/overa17@gmail.com

Resumen

En este trabajo presentamos un estudio de evaluación de las dificultades de comprensión de algunas componentes del análisis de varianza. Utilizamos las respuestas de una muestra de 224 estudiantes de Psicología, depués de finalizar un curso de análisis de datos a un cuestionario. Analizamos la selección de un modelo de análisis de varianza, la comprensión de los supuestos de aplicación y del modelo lineal asociado, los cálculos necesarios para completar una tabla de análisis de varianza y la interpretación del análisis. Los resultados obtenidos, proporcionan información en un área donde hay poca investigación previa.

Palabras clave: *Estudiantes de Psicología; análisis de varianza elemental; evaluación.*

Abstract

In this paper we present a study where we assess the difficulties in understanding some elements of variance analysis using a questionnaire administered to a sample of 224 Psychology students after taking a data analysis course. We analyse the selection of a variance analysis model, the understanding of assumptions and of the associated linear model, the computations involved and the interpretation of results. These results provide information in an area where little prior research is available.

Keywords: *Psychology students; elementary variance analysis; assessment*

INTRODUCCIÓN

La inferencia estadística juega un papel destacado en las ciencias humanas, incluyendo la Psicología, donde la investigación se basa en los datos obtenidos de muestras de las que se infieren conclusiones para la población de las que se han tomado. Sin embargo, el uso y la interpretación de la estadística en el campo de la Psicología no siempre es apropiada, como se muestra en diversos estudios incluidos en trabajos de survey (ej., Batanero, y Díaz, 2006; Harlow, Mulaik, y Steiger, 1997).

También se han encontrado dificultades de comprensión de la inferencia en estudiantes universitarios, tal como lo muestran numerosos estudios (ej., Castro-Sotos; Vanhoof; Van Den Nororgat y Onghena, 2007, Harradine, Batanero y Rossman, 2011; Krauss y Wassner, 2002 o Vallecillos, 1994). La mayoría de estas dificultades se relacionan con la comprensión del nivel de significación en un contraste de hipótesis, concepto que es esencial para determinar si la presencia de un factor es significativa en el análisis de varianza. Existen otros puntos necesarios para una correcta comprensión y aplicación del método; sin embargo en ese sentido la investigación previa disponible es escasa.

El doble objetivo de este estudio ha sido evaluar la comprensión, tanto de alguno de los conceptos básicos, como de los procedimientos que intervienen en el análisis de la varianza en estudiantes españoles de Psicología. El estudio se llevó a cabo después de completar un curso de inferencia que

Vera, O.D., Batanero, C. y López Martín, M.M. (2016). Evaluación de dificultades en el análisis de varianza elemental por estudiantes de Psicología. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 133-142). Málaga: SEIEM.

incluía ese tópico. Con el fin de alcanzar el objetivo definido anteriormente, se han analizado las respuestas a un pequeño cuestionario que incluyen los siguientes puntos: a) selección de un modelo particular, b) comprensión del modelo lineal asociado, c) supuestos necesarios para aplicar el método, d) cálculos involucrados y e) interpretación de los resultados. En lo que sigue describimos los antecedentes de esta investigación y el método empleado; se finaliza con la discusión de los resultados y algunas implicaciones para mejorar la enseñanza de los tópicos.

ANTECEDENTES

Entre los pocos estudios relacionados con la enseñanza y el aprendizaje del análisis de varianza, podemos citar el trabajo de Rubin y Rosebery (1990), quienes implementaron una enseñanza experimental con estudiantes universitarios, con objeto de estudiar las dificultades en la interpretación de algunas ideas básicas del diseño experimental, que tiene conceptos comunes con el análisis de varianza. Los resultados sugieren que los estudiantes no distinguen fácilmente la diferencia entre variables dependientes, independientes y extrañas; además de no comprender el rol de la aleatorización.

El concepto de interacción adquiere cierta importancia en el análisis de varianza multifactorial, puesto que la interpretación incorrecta de la interacción de un factor en los diferentes niveles de otro conduce a conclusiones erróneas. Rosnow y Rosenthal (1991) señalaron que la interacción es el concepto poco comprendido en el campo de la Psicología, además, en 2007, Green observa, con estudiantes universitarios, ciertas dificultades en la interpretación de dicho concepto. Por otro lado, son varios los autores que han analizado la interpretación que se realiza de la interacción en artículos publicados en prestigiosas revistas de investigación, encontrando un alto porcentaje de errores relativos a la interpretación. Por ejemplo, Zukerman, Hodgins, Zuckerman y Rosenthal (1993) establecen que aproximadamente un tercio de los artículos tienen errores en la interpretación realizada, mientras que Umesh, Peterson, McCann-Nelson y Vaidyanathan (1996) y Pardo, Garrido, Ruiz y San Martín (2007) señalan que el porcentaje asciende aproximadamente al 75%.

MÉTODO

Nos basamos en las respuestas a un cuestionario realizado por 224 estudiantes de segundo curso de la Licenciatura en Psicología de la Universidad de Huelva, España. Estos estudiantes completaron el cuestionario después de finalizar dos cursos de análisis de datos (un año lectivo para cada uno) que incluían estadística descriptiva y probabilidad (primer año) y estadística inferencial (intervalos de confianza, contraste de hipótesis y análisis de varianza) en el segundo año.

Tabla 1. Contenidos evaluados por ítem

Contenidos de Análisis de Varianza	Ítem									
	I1	I2	I3	I4	I5	I6	I7	I8	I9	I10
Selección de modelos en análisis de varianza	X	X								
Reconocimiento de los supuestos del modelo			X	X						
Cálculos usados en análisis de varianza					X	X	X			
Interpretación de resultados								X	X	X

El cuestionario consta de 10 ítems de opción múltiple (ver Apéndice). La confección de los ítems está basada tanto en el contenido de análisis de varianza enseñado como en el incluido en los libros de texto usados por los estudiantes. La selección de los ítems se realizó siguiendo los criterios de calidad habituales que sugieren Wang y Osterlind (2013), es decir nos aseguramos de la congruencia entre cada ítem y el objetivo del cuestionario mediante un análisis a priori y el juicio de expertos. Para ello se seleccionaron 10 profesores universitarios que imparten el tema e investigadores en educación estadística, todos ellos doctores y con tradición investigadora. Se realizó una prueba piloto de cada ítem del cuestionario con muestras de alrededor de 50 estudiantes del mismo curso, el año anterior. De este modo nos aseguramos de obtener información objetiva referente a los ítems: dificultades, legibilidad y ajuste al tiempo previsto. A partir de la información obtenida de la prueba piloto, se obtuvieron valores suficientemente elevados del coeficientes de fiabilidad del cuestionario; Alfa de Crombach (α=0,79) y del coeficiente de consistencia interna de los ítems del cuestionario, basado en el Análisis Factorial de los ítems, theta de Carmines (ϴ=0,85). La Tabla 1 recoge los tópicos evaluados en los diferentes ítems.

El cuestionario fue completado como parte de la evaluación final del curso. Con el fin de evitar las preguntas contestadas al azar, se penalizó las respuestas incorrectas (como es habitual en la asignatura). Por otro lado, las preguntas dejadas en blanco no puntúan (ni en negativo ni en positivo).

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

A continuación presentamos y discutimos los resultados, comentando conjuntamente los ítems que evalúan el mismo contenido. Comenzamos presentando una síntesis global de los resultados en la Tabla 2, donde se marcan con negrita las respuestas correctas. Observamos una variedad de índices de dificultad (porcentaje de respuestas correctas); desde 26,8 % a 72,3%. En todo caso, de los 10 ítems propuestos se tiene que en 7 de ellos el porcentaje de respuestas correctas es superior al 50% lo que indica que no resultaron excesivamente difíciles.

Tabla 2. Porcentaje de respuestas por distractor en cada ítem (*n*=224)

Respuesta	Í1	Í2	Í3	Í4	Í5	Í6	Í7	Í8	Í9	Í10
a	23.7	4.9	11.2	5.8	**57.1**	3.6	3.1	**33.0**	4.9	13.8
b	7.6	9.8	4.0	12.5	7.1	4.0	**72.3**	6.3	9.4	**26.8**
c	**50.9**	**63.8**	**43.3**	**69.2**	21.9	**72.3**	3.1	12.5	**74.6**	16.5
No respuesta	17.9	21.4	41.5	12.5	13.8	20.1	21.4	48.2	11.2	42.9

Selección de modelos en análisis de varianza

Los dos primeros ítems evalúan la selección del modelo. Puesto que hay diferentes tipos de análisis de varianza, el primer paso en el análisis sería determinar, a partir de la lectura de un enunciado, cuál es el modelo apropiado. En el primer ítem evaluamos la comprensión de los estudiantes de la diferencia entre las situaciones donde puede utilizarse la prueba *t* de diferencia de medias y aquéllas en que se debe usar el análisis de varianza. Puesto que en el enunciado del ítem una profesora aleatoriamente divide la población en tres grupos y aplica a cada uno diferentes técnicas que quiere comparar, se debe usar el análisis de varianza de un factor completamente aleatorizado (la respuesta correcta es la c). Aquellos que eligen uno de los otros dos distractores, confunden el modelo de análisis de varianza con la prueba *t*.

Algo más de la mitad de los estudiantes (50,9%) interpretan correctamente la situación que se describe y eligen el modelo más adecuado que resuelve el problema (ver Tabla 2). A pesar de que el 23,7% de los estudiantes fueron capaces de diferenciar en el contexto del problema las muestras independientes de las relacionadas, no eligieron el procedimiento adecuado, ya que la prueba *t* solo es válida para comparar dos muestras. Esta dificultad también ha sido encontrada por Rubin and Rosebery (1990). El 7,6% de los sujetos seleccionan incorrectamente la prueba *t*, y adicionalmente confunden independencia con muestras relacionadas. Finalmente, aproximadamente el 18% no responde la unidad de medida.

En el segundo ítem investigamos si el estudiante comprende la diferencia entre factor y nivel de un factor y si discrimina situaciones donde un investigador aplicaría un modelo de análisis de varianza de dos factores para analizar sus datos. La respuesta correcta es la c), en el estudio hay dos variables, cada una con dos o más niveles. Los estudiantes que eligen la opción b) confunden factor con nivel del factor ya que en el estudio se ha incluido una variable con dos factores. Por otro lado, los que seleccionan el distractor a) no diferencian el modelo de análisis de varianza de dos factores y el análisis multivariante unifactorial, puesto que se muestran dos variables dependientes. Sin embargo, cabe señalar que, de los alumnos que respondieron el ítem (78.6%), lo resolvieron de forma correcta el 63,8%.

Comprensión de los supuestos para la aplicación del modelo de análisis de varianza

Dos ítems evalúan esta comprensión, ítem 3 e ítem 4. El ítem 3 se aplica con el objetivo de evaluar la comprensión de los estudiantes de los supuestos requeridos para usar modelos de análisis de varianza. La respuesta correcta es la c), que fue seleccionada por 43,3% de los estudiantes (ver Tabla 2) lo cual denota un nivel moderado-bajo de dificultad. El 11,2% elige la opción a), olvidando que para aplicar este modelo se requiere que las varianzas tomadas para cada nivel deben ser estadísticamente iguales (homocedasticidad). La violación de este supuesto conduciría a conclusiones erróneas en aquellos casos donde no se trabaje con un modelo de efectos fijos y muestras de igual tamaño (Montgomery, 2005). Por otro lado, el 4% de los estudiantes seleccionan la opción b), en cumplimiento del supuesto de normalidad. Hay que señalar el alto porcentaje de estudiantes que no contestaron a esta pregunta (41,5%). No hemos encontrado investigaciones que evalúen la comprensión por parte de los estudiantes de los supuestos en las pruebas de análisis de varianza.

El ítem 4 está enfocado en evaluar la comprensión de la descomposición de la variabilidad total en un modelo de análisis de varianza de dos factores en las variabilidades por factor principal e interacción, junto con la del error. Esta descomposición es fundamental en el modelo y contribuye a explicar por qué llamamos análisis de varianza a un método donde el objetivo principal es comparar medias. De la información recogida en la Tabla 2, se sigue que el 69,2% de los estudiantes respondió correctamente al ítem; el 5,8% no consideran la variabilidad de ambos factores principales y la interacción (respuesta a)); el 12,5% confunden la descomposición de la variabilidad total con aquella que se corresponde para el modelo de análisis de varianza de medidas repetidas (respuesta c)). Un 18,3% de la muestra (respuestas en ambos distractores sumados) no asociaron la interacción con el modelo completo de análisis de varianza de dos factores, error señalado por varios autores (Rosnow y Rosenthal, 1991; Pardo, Garrido, Ruiz y San Martín, 2007). Finalmente, un 12,5% no responde a esta pregunta.

Cálculo en análisis de varianza.

Una vez elegido un modelo de análisis de varianza es necesario realizar una serie de cálculos para estimar los diferentes componentes de la tabla de análisis de varianza (ANOVA) y realizar el contraste de hipótesis requerido para la toma de decisiones. Los ítems 5, 6 y 7 evalúan la comprensión en relación con dichos cálculos.

El ítem 5 evalúa la comprensión de la definición del estadístico F como un cociente de sumas de cuadrados. Los estudiantes han estudiado previamente la distribución F en otros tópicos, por ejemplo en relación con la prueba de igualdad de varianzas. La respuesta correcta es la a), que fue seleccionada por el 57,1%, por los que observamos que la dificultad del ítem ha sido solamente moderada. Estos estudiantes comprendieron que el estadístico F es usado para comparar la variabilidad entre grupos con la variabilidad aleatoria; en el caso en que ambas varianzas sean iguales o cercanas, la diferencia entre grupos podría deberse a la variabilidad aleatoria y no al efecto de algún factor.

La opción b) fue seleccionada solamente por el 7,1% de los estudiantes, en este caso, la varianza entre grupos fue confundida con la varianza entre sujetos; esta confusión no ayudaría para la comparación de la diferencia entre grupos; en este sentido a la no comprensión del método de cálculo se agregaría la de la lógica del análisis de varianza. Aquellos estudiantes que han elegido la opción c) (21,9%) piensan que en el análisis de varianza de medidas repetidas se debe examinar la interacción entre las variables sujeto-grupo. No encontramos investigaciones previas para comparar nuestros resultados.

Para resolver los ítems 6 y 7 los estudiantes completan una tabla ANOVA y, a continuación se les pregunta en relación al cálculo de los valores que completaron en la tabla. Los resultados de ambos ítems sugieren una buena comprensión de los cálculos que involucran el procedimiento del análisis de varianza. Tampoco hemos encontrado investigaciones previas sobre este tipo de ítems.

La respuesta correcta al ítem 6 (relacionado con la obtención de la suma de cuadrados es la opción c), y fue elegida por el 72,3% de los estudiantes (Tabla 2), de donde resulta, tal como lo advertíamos, que la pregunta tuvo una fácil resolución. El 3,6% de los estudiantes eligió la opción a) que da el valor de F observado para ese factor, confundiéndolo con la suma de cuadrados. Otro 4% confunde el valor de sumatorio cuadrado para el factor B con el de la media cuadrática para el otro factor. Un 20,1% no responde la pregunta, no recordando el concepto de suma de cuadrados.

En el ítem 7 se requiere el valor de la media de cuadrados de un factor. También encontramos un porcentaje alto, 72,3% de aciertos (opción b)), indicando que una alta proporción de estudiantes comprendieron la lógica para el cálculo de la media de cuadrados. Aquellos que se decidieron por la opción a) (3,1%) muestran confusión entre la media de cuadrados del factor y la media de cuadrados de la interacción; mientras que los que seleccionaron la opción c) (3,1%) tienen dificultades en diferenciar entre ese valor y el F observado para el factor B. Por último señalar que la mayoría de los estudiantes que no respondieron (21,4%), dejaron en blanco el ítem 6, sugiriendo que habían olvidado el cálculo de la tabla de análisis de varianza.

Interpretación de resultados

Finalmente, los tres últimos ítems evalúan la comprensión de los resultados del análisis de la varianza y la interpretación de los mismos en relación al contexto y la pregunta de investigación.

En el ítem 8 nosotros evaluamos en que porcentaje, los estudiantes realizan una buena interpretación de los resultados de la tabla de análisis de varianza y la decisión que toman acerca de una hipótesis sobre los efectos de los factores involucrados en la situación. Con la finalidad de responder a la pregunta, los estudiantes deben tener completa la tabla ANOVA usada en las preguntas anteriores, que dará tres valores para F empíricos, todos estadísticamente significativos. Los estudiantes deben interpretar correctamente cuando un resultado es significativo; interpretación que resultó difícil en las investigaciones llevadas a cabo por Vallecillos (1994) y Lecoutre (1999) y Cañadas (2012).

Dado que el p-valor del factor A, está próximo a 0 y sería poco probable que el resultado no se debiera a la influencia de ese factor sobre la respuesta, entonces la respuesta correcta es la a). Esta unidad de medida resultó la más difícil para los estudiantes, ya que solo la pudo contestar correctamente el 33% de la muestra, y un alto porcentaje de no respuesta (48.2%). La selección de las opciones b) o c) pone de manifiesto la no correcta compresión de la significación estadística tanto del factor B como de la interacción. A pesar de que esos distractores han sido seleccionados por pocos estudiantes, el ítem aún fue difícil de acuerdo con los resultados que se tienen de otras investigaciones donde se les pregunto a los estudiantes por la interpretación de los resultados de análisis estadísticos (Vallecillos, 1994). Consideramos que ello es debido a que alrededor del 20% no completó o no entendió bien la tabla de análisis de varianza, como vimos en los ítems 6 y 7. No obstante, el porcentaje de interpretaciones correctas sigue siendo bajo.

Mediante el ítem 9, se pretende evaluar la interpretación que pueden realizar los estudiantes a partir de la información recogida en las salidas que ofrece un software estadístico, en concreto, SPSS. Los estudiantes habían realizado prácticas de análisis de varianza con SPSS y habían anteriormente interpretado tablas parecidas. El porcentaje de respuestas correctas fue del 74,6%; lo que sugiere que el grupo posee una capacidad buena de interpretación de este tipo de salida del software. Un 4,9% elige como correcto el distractor (a), contraste de dos medias independientes, sin tener en cuenta que se quiere estudiar si influyen o no dos variables independientes sobre una tercera ("tipo de trabajo" y "flexibilidad en horario" sobre la "satisfacción laboral"), además de estudiar si interactúan. También un 9,4%, elige equivocadamente el modelo medidas repetidas, el cual no sería correcto por la independencia de las dos variables presentadas. También es bajo el porcentaje de no respuesta (11,2%). No hay antecedentes para compararlo con otras investigaciones.

Al igual que el ítem 9, el ítem 10 evalúa la interpretación de las salidas del software SPSS centrada en el rechazo de hipótesis nula. Se evidencia dificultad, ya que sólo hubo un 26,8% de estudiantes que responde correctamente (ver Tabla 2). Un 13,8% eligen, de forma incorrecta, el distractor (a), creyendo que el tipo de trabajo incide significativamente en la satisfacción laboral. Por otro lado, a pesar de que en la tabla de análisis de varianza del enunciado la significación es de 0,855, un 16,5% elige el distractor (c) creyendo que existe interacción entre los dos factores. Destacamos por un lado el alto porcentaje de preguntas en blanco, 42,9%, y por otro, la escases de investigaciones empíricas de este tipo para que puedan ser comparados los resultados obtenidos. No obstante, en este ítem se debe interpretar un nivel de significación, concepto en el que los alumnos presentaron muchos errores en la investigación de Vallecillos (1994).

Al comparar el porcentaje de éxito en los tres ítems relacionados con la interpretación, vemos que el más sencillo fue el ítem 9, consistente en identificar el modelo de análisis a partir de la tabla de análisis de varianza; los otros dos ítems requieren interpretar el nivel de significación y además en el ítem 8 hay que construir la tabla.

CONCLUSIONES E IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA DEL ANALISIS DE VARIANZA

El aprendizaje mostrado en las respuestas de los estudiantes en esta investigación fue razonable, a pesar que nuestra muestra consiste exclusivamente en estudiantes de Psicología, quienes tienen poca experiencia en el uso de modelos y herramientas matemáticas. A pesar del alto grado de no respuesta en algunos ítems, se muestra una buena competencia en la mayor parte de los puntos evaluados. En nuestra opinión, los resultados satisfactorios se deben al hecho de que, antes de la evaluación, los estudiantes realizaron dos cursos de estadística (Análisis de Datos en Psicología I y II), y el cuestionario se pasó como parte de la evaluación de la asignatura. En el primer curso estudiaron las bases para la aplicación de pruebas de hipótesis y en el segundo tuvieron la oportunidad de aplicarlas utilizando métodos de comparación de dos muestras (sus medias, proporciones y varianzas) y pruebas para varias muestras (análisis de varianza).

No obstante, se han detectado errores en las respuestas que persisten después de completar el ciclo de dos años de estudios. Por ejemplo, los resultados obtenidos en el ítem 8 corroboran los obtenidos por Vallecillos (1994) y Olivo (2008), quienes claramente han observado el nivel de dificultad entre la interpretación de un estudio estadístico, aunque el estudiante domine el cálculo necesario en la resolución de los ítems.

También nuestros resultados confirman lo expuesto por Vallecillos (1994) y Díaz, Batanero y Wilhelmi (2008), que indican que el *p*-valor y el nivel de significación son conceptos que no resultan suficientemente claros para los estudiantes, incluso para aquellos que sean capaces de tomar la decisión correcta sobre la hipótesis que se debe rechazar.

Las principales implicaciones que deducimos para la enseñanza del tema son las siguientes:

- Sería importante hacer hincapié en los supuestos de aplicación del análisis de varianza y la consecuencia de la violación de los mismos Igualmente se debe mejorar la capacidad de interpretar resultados estadísticos por los futuros licenciados. Dicha interpretación será necesaria para una correcta comprensión de los resultados de sus estudios y de los recogidos en investigaciones publicadas.
- Es necesario revisar la enseñanza de la inferencia estadística para reforzar la comprensión del concepto de p-valor, como se indica en Vera, Díaz y Batanero (2011) y también de otros objetos matemáticos necesarios para comprender el contraste de hipótesis y el análisis de varianza. Para ello sería importante comenzar introduciendo estos objetos informalmente desde la enseñanza media, siguiendo la tendencia actual denominada *inferencia informal* (ver Batanero, 2015; Gil y Ben-Zvi, 2011; Wild, Pfannkuch, Regan y Horton, 2011).

Nuestra investigación aporta alguna información en un tema que ha sido poco analizado, pero, no obstante, es un estudio exploratorio. Finalizamos animando a otros investigadores para continuar sobre esta línea de investigación con el fin de mejorar el aprendizaje de estos conceptos por parte de los estudiantes.

REFERENCIAS

Batanero, C. (2015). Aproximación informal al contraste de hipótesis. En J.M. Contreras (Ed.), *II Jornadas Virtuales de Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y la Combinatoria* (pp. 125.144).. Granada: SEIEM.

Batanero, C. y Díaz, C. (2006). Methodological and didactical controversies around statistical inference. *Actes du 36iémes Journées de la Societé Française de Statistique* [CD-ROM]. Paris: Societé Française de Statistique.

Cañadas, G. (2012). *Comprensión intuitiva y aprendizaje formal de las tablas de contingencia en alumnos de psicología*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Castro Sotos, A. E., Vanhoof, S., Van Den Nororgate, W. y Onghena, P. (2007). Student´s misconceptions of statistical inference: A review of the empirical evidence form research on statistical education. *Educational Research Review*, **2**(2), 98-113.

Green, K. E. (2007). Assessing understanding of the concept of iteraction in analysis of variance. Trabajo presentado en la *IASE/ISI-Satellite Conference on Assessing Student Learning in Statistics*. Guimarães, Portugal: International Statistical Institute.

Gil, E. y Ben-Zvi, D. (2011). Explanations and context in the emergence of students' informal inferential reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 13, 87-108.

Harlow, L. L., Mulaik, S. A. y Steiger, J. H. (1997). *What if there were no significance tests?* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Harradine, A., Batanero, C. y Rossman, A. (2011). Students and teachers' knowledge of sampling and inference. En C. Batanero, G, Burrill y C. Readings (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics.*

Challenges for teaching and teacher education New York: Springer, 2011, pp. 235-246.

Krauss, S. y Wassner, K. (2002). How significance tests should be presented to avoid the typical misinterpretations. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics*. Cape Town, South Africa: International Association for Statistics Education. Online: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.

Lecoutre, B. (1999). Beyond the significance test controversy: Prime time for Bayes? *Bulletin of the International Statistical Institute: Proceedings of the Fifty-second Session of the International Statistical Institute* (Tomo 58, Libro 2) (pp. 205 – 208). Helsinki: International Statistical Institute.

Montgomery, D. (2005). *Diseño y análisis de experimentos*. México: Limusa.

Olivo, E. (2008). *Significado de los intervalos de confianza para los estudiantes de ingeniería en México*. Universidad de Granada.

Pardo, A., Garrido, J., Ruiz, M.A. y San Martín, R. (2007). La interacción entre factores en el análisis de la varianza: error de interacción. *Psicothema 19* (2), 343-349.

Rosnow, R. L. y Rosenthal, R. (1991). If you're looking at the cell means, you're not looking at *only* the interaction (unless all main effects are zero). *Psychological Bulletin, 110*, 574-576.

Rubin, A. y Rosebery, A. S. (1990). Teachers' misunderstandings in statistical reasoning; evidence from a field test of innovative materials. En A. Hawkins (Ed.) *Training teachers to teach Statistics* (pp, 72-89) Voorburg, The Netherlands: ISI.

Umesh, U. N., Peterson, R. A., McCann-Nelson, M. y Vaidyanathan, R. (1996). Type IV error in marketing research: The investigation of ANOVA interactions. *Journal of the Academy of Marketing Science*, *24*, 17-26.

Vallecillos, A. (1994). *Estudio teórico experimental de errores y concepciones sobre el contraste de hipótesis en estudiantes universitarios*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Vera, O. D., Díaz, C. y Batanero, C. (2011). Dificultades en la formulación de hipótesis estadísticas por estudiantes de Psicología. *Unión*, 27. Recuperado de: www.fisem.org/web/union/.

Wang, Z. y Osterlind, S. J. (2013). Classical test theory. En T. Teo (Ed.), Handbook of quantitative methods for educational research (pp. 31-44). Rotterdam: Sense Publishers.

Wild, C. J., Pfannkuch, M., Regan, M., & Horton, N. J. (2011). Towards more accessible conceptions of statistical inference. *Journal of the Royal Statistical Society: Series A 174*(2), 247 – 295.

Zuckerman, M., Hodgins, H. S., Zuckerman, A. y Rosenthal, R. (1993). Contemporary issues in the analysis of data: A survey of 551 psychologists. *Psychological Science*, *4*,49-52

APÉNDICE: CUESTIONARIO

Ítem 1. Para mejorar la psicomotricidad de los niños de primaria, una maestra cree que ayudarán unas nuevas actividades físicas. La maestra divide aleatoriamente su grupo de trabajo en tres partes iguales. A cada grupo le aplica un tipo de ejercicio diferente, pues desea saber qué tipo de ejercicios le dará mejores resultados. De las técnicas estadísticas que siguen, ¿cuál debería aplicar la maestra para comprobar si los métodos que aplica son diferentes?

Contraste de hipótesis *t* sobre medias independientes.
Contraste de hipótesis *t* sobre medias relacionadas.
Análisis de varianza de un factor completamente aleatorizado.

Ítem 2. Un investigador utilizará un análisis de varianza de dos factores, efectos fijos y completamente aleatorizado cuando:

En el estudio haya dos variables dependientes.
En el estudio haya una variable independiente, con dos niveles seleccionados al azar.
En el estudio haya dos variables independientes, cada una con dos o más niveles.

Ítem 3. Los supuestos de aplicación del análisis de varianza de dos factores, efectos fijos y completamente aleatorizado son:

Independencia de las observaciones, normalidad de las distribuciones, y aditividad
Independencia de las observaciones, igualdad de varianza y aditividad.
Independencia de las observaciones, normalidad de las distribuciones e igualdad de varianzas.

Ítem 4. El análisis de varianza de dos factores, con efectos fijos, descompone la variabilidad total en los siguientes componentes:
Variabilidad total = V. entre grupos + V. error
Variabilidad total = V. entre grupos + V. entre sujetos + V. error
Variabilidad total = V. factor A + V. factor B + V. interacción + V. error.

Ítem 5. Si en un Análisis de varianza de un factor, y medidas repetidas encuentro que la *F* empírica u observada toma un valor de 8,16 esto quiere decir que:
CM entregrupos / CM error = 8,16
CM entresujetos / CM error = 8.16
CM entregrupos / CM intrasujetos = 8,16

A partir de la información de la Tabla 1 se quiere estudiar el efecto de ciertas variables motivacionales sobre el rendimiento en tareas de logro. Se manipularon dos variables: “tipo de entrenamiento motivacional” (A1: instrumental; A2: atribucional y A3: control) y “clima de clase” (B1: cooperativo; B2: competitivo y B3: individual). Se seleccionaron a 45 sujetos y se dividieron en grupos para cada condición experimental.

Tabla 1

Fuente de variación	SC	GL	CM	F
Factor A	70			
Factor B			20	
Interacción AB				3,91
Error	46		1,278	
Total	176	44		

Ítem 6. El valor del sumatorio cuadrado para el factor B (Tabla 1) es:
15,65
35
40
Ítem 7. El valor de la media cuadrática para el factor A (ver Tabla 1) es:
5
35
15,65
Ítem 8. Una de las conclusiones del estudio sería (alfa = 0,05) (ver Tabla 1)
Hay efecto del factor A (“entrenamiento”) sobre el rendimiento en tareas de logro
No hay efecto del factor B (“clima de clase”) sobre el rendimiento en tareas de logro
No hay interacción de los factores.

Se ha decidido estudiar si hay efecto del “tipo de trabajo” (A1: trabajos de cualificación baja; A2: trabajos de cualificación media ó A3: trabajos de cualificación alta) sobre la “satisfacción laboral”. También se ha tenido en cuenta, al mismo tiempo, si la “flexibilidad en el horario” (B1: si; B2: no) influye en la “satisfacción laboral”. Los resultados se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2. Pruebas de los efectos inter-sujetos

Fuente	Suma de cuadrados	GL	Media cuadrática	F	Significación
Modelo corregido	465,614(a)	5	93,123	,852	,516
Intersección	17192,763	1	17192,763	157,355	,000
Tipo de trabajo	49,120	2	24,560	,225	,799
Flexibilidad horaria	270,878	1	270,878	2,479	,008
Tipo * Flexibilidad	34,383	2	17,191	,157	,855
Error	12564,981	115	109,261		
Total	33298,000	121			
Total corregida	13030,595	120			

Ítem 9. El tipo de análisis aplicado en este estudio (Tabla 2) es:
Contraste de dos medias independientes.
Análisis de varianza de un factor, con medidas repetidas.
Análisis de varianza de dos factores completamente aleatorizado.

Ítem 10. Entre las posibles conclusiones del estudio se encuentra, considerando un α=0,05 (ver Tabla 2):
Hay diferencias estadísticamente significativas en la “satisfacción laboral” en función del “tipo de trabajo”.
Hay efecto del factor “flexibilidad horaria” sobre la “satisfacción laboral”.

Hay interacción entre la "flexibilidad horaria" y "tipo de trabajo".

EL LENGUAJE DE LA ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD EN LIBROS DE TEXTO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

The language of probability in Spanish secondary school textbooks

Ortiz, J. J.[a], Albanese, V.[a] y Serrano, L.[a]
[a]Universidad de Granada

Resumen
En este trabajo analizamos el lenguaje de la estadística y probabilidad en tres libros de texto españoles de Educación Secundaria publicados el pasado año. Los resultados muestran la gran riqueza y diversidad de expresiones verbales y predominio de lenguaje coloquial frente al formal; el lenguaje se asocia a diversos significados de la probabilidad (intuitivo, clásico, frecuencial y formal). El lenguaje numérico se desarrolla de acuerdo a la introducción de diferentes sistemas numéricos en la enseñanza y se encuentra también amplio uso de representaciones tabulares y gráficas. Algunas diferencias en los libros indican el importante papel del profesor al seleccionar y usar estos libros en la enseñanza.
Palabras clave: *probabilidad, libros de texto, educación secundaria.*
Abstract
In this document we analyse the language of probability in three Spanish secondary school textbooks published last years. The results show the great richness and variety of verbal expressions and a predominance of colloquial language against the formal. The language is associated to different meanings of probability (intuitive, classic, frequency and formal). The numerical language is developed according to the introduction of different number systems and there is also an extensive use of tabular and graphical representations. Some differences in the books indicate the important role of the teacher to select and use these books in teaching.
Keywords: *probability, textbooks, secondary school.*

INTRODUCCIÓN

En los documentos curriculares recientes (ej., NCTM, 2000; CCSSI, 2010) la enseñanza de la probabilidad ha adquirido una gran importancia desde los primeros niveles educativos. En particular, en España, dentro de las Matemáticas para primer y segundo curso de la Educación Secundaria Obligatoria (MECD, 2015), en el *Bloque 5. Estadística y probabilidad* se presentan los siguientes estándares de aprendizaje, que incluyen los contenidos y criterios de evaluación:

1.1. Define población, muestra e individuo desde el punto de vista de la estadística, y los aplica a casos concretos. 1.2. Reconoce y propone ejemplos de distintos tipos de variables estadísticas. 1.3. Organiza datos, obtenidos de una población, de variables cualitativas o cuantitativas en tablas, calcula sus frecuencias absolutas y relativas, y los representa gráficamente. 1.4. Calcula la media aritmética, la mediana (intervalo mediano), la moda (intervalo modal), y el rango, y los emplea para resolver problemas. 1.5. Interpreta gráficos estadísticos sencillos recogidos en medios de comunicación. 2.1. Emplea la calculadora y herramientas tecnológicas para organizar datos, generar gráficos estadísticos y calcular las medidas de tendencia central y el rango de variables estadísticas cuantitativas. 2.2. Utiliza las tecnologías de la información para comunicar información resumida y relevante sobre una variable estadística analizada. 3.1. Identifica los experimentos aleatorios y los

Ortiz, J. J., Albanese, V. y Serrano, L. (2016). El lenguaje de la estadística y probabilidad en libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 143-151). Málaga: SEIEM..

distingue de los deterministas. 3.2. Calcula la frecuencia relativa de un suceso mediante la experimentación. 3.3. Realiza predicciones sobre un fenómeno aleatorio a partir del cálculo exacto de su probabilidad o la aproximación de la misma mediante la experimentación. 4.1. Describe experimentos aleatorios sencillos y enumera todos los resultados posibles, apoyándose en tablas, recuentos o diagramas en árbol sencillos. 4.2. Distingue entre sucesos elementales equiprobables y no equiprobables. 4.3. Calcula la probabilidad de sucesos asociados a experimentos sencillos mediante la regla de Laplace, y la expresa en forma de fracción y como porcentaje. (p. 413).

Este currículo se ha implementado para el primer curso de la ESO en 2015, por lo que se han editado nuevos libros de texto que tratan de responder al cambio de directrices. Una característica importante del libro de texto de matemáticas, es el lenguaje que se utiliza (entendido en un sentido amplio, es decir, incluyendo tanto el lenguaje verbal, como el gráfico, simbólico y tabular). Debe ser asequible al alumno, englobar y ampliar el que ya conoce de los cursos previos y ser un instrumento potente en la actividad de matematización. Todo ello debido a que el libro de texto es uno de los principales recursos educativos, ya que muchas decisiones de los profesores sobre las tareas a realizar están mediadas por los mismos (Stylianides, 2009).

Cordero y Flores (2007) resaltan la influencia que tiene el libro de texto en el discurso matemático escolar, que prácticamente regula la enseñanza y aprendizaje. Desde el currículo pretendido al implementado en el aula, una fase importante es el currículo escrito y la forma en que lo interpretan los profesores, a través de los libros de texto (Herbel-Eisenmann, 2007).

En este trabajo se analiza el lenguaje (en el sentido amplio anteriormente descrito) en el tema de estadística y probabilidad en tres libros de texto de primer curso de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) publicados según la nueva normativa, con la finalidad de comparar con otros estudios previos y las directrices curriculares citadas.

FUNDAMENTOS

Marco teórico

Un reto en la enseñanza de las matemáticas es el uso de un lenguaje múltiple, que incluye el lenguaje verbal, los símbolos y expresiones algebraicas, las representaciones gráficas y las tablas (Scheleppegrell, 2007). Dicho lenguaje es un elemento fundamental en el aprendizaje del alumno, puesto que éste debe asimilarlo, para ampliar su lenguaje cotidiano con otro de mayor nivel de abstracción.

De las diferentes perspectivas teóricas para abordar el análisis de libros de texto, hemos optado por el Enfoque Onto-semiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007), debido a la importancia que otorga al lenguaje matemático, al que considera mediador de las prácticas personales o institucionales en la resolución de problemas, por su carácter representacional y operativo. En este marco teórico es también fundamental la idea de conflicto semiótico, que puede surgir al interpretar el lenguaje matemático, pues se trata de "cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones)" (Godino, Batanero y Font, 2007, p.133).

Antecedentes

La investigación sobre la presentación de la estadística y la probabilidad en los libros de texto es muy escasa y concentrada en la educación secundaria (por ejemplo, 2014; Ortiz, 2014), siendo aún menor la que se centra en el lenguaje.

Serradó y Azcárate (2006) analizaron la estructura de las unidades didácticas sobre probabilidad en cuatro series de libros de texto de matemáticas para la Educación Secundaria Obligatoria españoles, determinando diferentes modos de organizar su contenido. Su estudio se completa en Serradó, Azcárate y Cardeñoso (2006), con el análisis de los significados de la probabilidad en los mismos libros de texto, indicando el predominio del significado clásico en unas editoriales y del frecuencial en otras, sin formalizar las relaciones entre las dos aproximaciones.

Ortiz, Serrano y Batanero (2001) estudiaron el lenguaje en dos libros de texto de Educación Secundaria, publicados en 1975 y 1988, distinguiendo entre el lenguaje del azar y de la probabilidad. Respecto al primero observan mayor riqueza del lenguaje empleado en uno de los textos, con una gama más variada de adjetivos y expresiones, ejemplos de generadores aleatorios asociados a una concepción frecuencial de la probabilidad y tablas de números aleatorios. El mismo texto presenta un vocabulario más rico respecto a la probabilidad, con gradaciones cualitativas, presentando las concepciones subjetivas y frecuencial y conectando con el estudio de la estadística.

Recientemente, Gómez, Ortiz, Batanero y Contreras (2013) analizaron el lenguaje utilizado en el tema de probabilidad en dos series de libros de texto de Educación Primaria publicados entre 2008 y 2011. Diferencian entre expresiones verbales, lenguaje numérico y simbólico, representaciones tabulares y gráficas. Sus resultados muestran la gran riqueza y diversidad de expresiones verbales y predominio de lenguaje coloquial frente al formal; el lenguaje se asocia a diversos significados de la probabilidad (intuitivo, clásico, frecuencial y formal). El lenguaje numérico se adapta a la introducción de diferentes sistemas numéricos en la enseñanza y se encuentra también amplio uso de representaciones tabulares y gráficas.

Nuestro trabajo trata de completar los anteriores, analizando tres libros de texto de primer curso de la ESO publicados en 2015 y siguiendo las categorías de análisis del trabajo de Gómez, Ortiz, Batanero y Contreras (2013).

METODOLOGÍA

Se analizaron tres libros de texto, publicados en 2015, que se eligieron por ser editoriales de gran prestigio a nivel nacional. Se trata de una muestra intencional, puesto que el estudio es de tipo exploratorio, sin pretensiones de extender las conclusiones. Se incluyen como anexo y se denotan con un código en el trabajo. En estos libros se ha realizado un análisis de contenido del capítulo dedicado a estadística y probabilidad, estudiando las variables determinadas en el estudio de Gómez, Ortiz, Batanero y Contreras (2013), que permiten lograr el objetivo de este estudio: a) expresiones verbales, según tipología; b) expresiones numéricas; c) símbolos; d) representaciones tabulares y gráficas.

Las categorías de cada una de estas variables se determinan mediante sucesivas revisiones de los textos de un modo cíclico e inductivo. Por ejemplo, para la variable “expresiones verbales” se han diferenciado cuatro tipos: expresiones cotidianas, específicas de estadística, específicas de probabilidad y específicas de los juegos de azar. A través de la comparación del contenido de estos textos, se establece la presencia o ausencia de cada una de las categorías en los libros de la muestra. Por último, se seleccionan ejemplos en los textos que ilustren las diferentes categorías y se elaboran unas tablas cuya lectura facilite la obtención de conclusiones sobre el uso del lenguaje en los libros analizados. A continuación se presentan los resultados, utilizando ejemplos de los textos cuando sea necesario, mediante las tablas recién mencionadas.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Expresiones verbales

En primer lugar se analizaron las expresiones verbales. Hemos tenido en cuenta, siguiendo a Shuard y Rothery (1984), las palabras del lenguaje cotidiano, que se usan en el texto con sentido específico, para referirse a procedimientos. Dentro de las específicas, siguiendo a Gómez et al. (2013), hemos diferenciado las que se refieren a juegos de azar y hemos separado las específicas de estadística y de probabilidad (Tabla 1). En ella observamos una gran variedad de términos: en la primera categoría, encontramos palabras que usan para indicar resumidamente un procedimiento; en las dos categorías siguientes hacen alusión a conceptos o propiedades de estadística o probabilidad, y la última a ejemplos de material que se utiliza en los juegos de azar, acciones sobre dicho material y los resultados de las mismas. El mayor número de expresiones diferentes son las específicas de la estadística y probabilidad, seguidas de las referidas a juegos de azar, al contrario que en el estudio de Gómez et al. (2013) con textos de primaria, donde había una predominancia de lenguaje cotidiano, es decir observamos un aumento en la formalización y variedad del lenguaje entre la educación primaria y el primer curso de la ESO.

Tabla 2. Expresiones distintas y frecuencia en los libros de texto según categoría

Categoría	Expresiones diferentes	Frecuencia de aparición [T1]	[T2]	[T3]
Expresiones cotidianas	Agrupar, asociar, calcular, clasificar, completar, construir, dibujar, diseñar, elaborar, estimar, hallar el número, interpretar, lanzar, observar, ocurrir, predecir, recoger, reconocer, representar, saber de antemano, preguntar, ordenar, organizar.	14	15	19
Específicas de probabilidad	Azar, casos (favorables, posibles), conjunto, equiprobable, espacio muestral, experiencia (aleatoria, irregular, regular), experimento (aleatorio, determinista), frecuencia relativa, grado confianza, random, sucesos (elementales, compuestos, imposible, seguro, igualmente probable), probabilidad, resultado (favorable, posible, previo), poco, medianamente, muy (probable) posibilidad, subconjunto, situación, unión de sucesos elementales	16	15	14
Específicas de estadística	Amplitud, carácter (estadístico, cuantitativo, cualitativo), conjunto, cuestionario, datos, desviación media, diagrama (de barras, de sectores), dispersión, distribución, encuesta, estadística, estudio estadístico, frecuencia (absoluta, relativa), fiabilidad, gráficos estadísticos, histograma, individuo, información, media (aritmética, ponderada), mediana, moda, muestra, opciones, población, polígono de frecuencias, proporcional, rango, recuento, tabla (de datos, de frecuencias, de recuento) tamaño de la muestra, variable (estadística, continua, discreta, cualitativa, cuantitativa).	20	15	21

Específicas de juegos de azar	Baraja, bola, bolsa, caja, cara, carta, chincheta, cruz, dado, dado trucado, dardo, diana, elegir, extraer, experimentar, girar, inventar, juego justo, laberinto, moneda, obtener, rifa, sorteo, papeletas, parchís, ruleta, sacar, tarjeta, urna	11	15	16

Dentro de la probabilidad, el lenguaje verbal relacionado con experimento aleatorio, los sucesos y sus tipos no ha variado mucho respecto al estudio de Ortiz (2002), con textos de secundaria dirigido a alumnos de 14 años, aunque no se incluyen referencias a conceptos más complejos, como la probabilidad compuesta. Por otro lado, la mayor parte de las expresiones sobre probabilidad se refieren al significado clásico de la probabilidad, siendo muy escasas las expresiones asociadas al significado frecuencial. Únicamente el texto [T3] hace referencia al mismo, al describir el experimento del lanzamiento de chinchetas, indicando que, en este caso: "*la probabilidad del suceso es, aproximadamente, igual a su frecuencia relativa observada*" (T3, p. 283).

Los términos específicos de estadística son muy variados, lo que indica el gran número de conceptos subyacentes; la mayor riqueza de lenguaje verbal la encontramos en torno a la variable estadística y sus tipos, gráficos estadísticos y resúmenes estadísticos. Los términos habituales del lenguaje que se utilizan, son sobre todo verbos de acción para describir procedimientos de construcción y cálculo de gráficos, tablas y resúmenes estadísticos.

Respecto al lenguaje asociado a los juegos, hay abundante descripción de dispositivos que pueden servir en dichos juegos, y las acciones sobre los mismos. La única referencia al juego equitativo es la siguiente: "*Julián y Ana juegan con un dado cada uno. El de Julián tiene 1 uno, 2 doses y 3 treses, y el de Ana, 2 unos, 2 doses y 2 treses. Quieren inventarse un juego que sea justo, de forma que si cada uno lanza su dado, los dos tengan la misma probabilidad de ganar*" (T1, p. 179).

Al comparar el contenido de los textos con las indicaciones del currículo, se observan omisiones. Por ejemplo el texto [T2] no incluye términos relacionados con los resúmenes estadísticos ni los sucesos equiprobables; el texto [T3] no hace referencia a situaciones deterministas. Son también escasas las expresiones relacionadas con el uso de tecnologías y simulación; un ejemplo es: "*las calculadoras científicas tienen la función Random. Con dicha función obtenemos un número entre 0 y 1 que podemos considerar aleatorio. ¿Cómo podrías obtener un número entre 0 y 100 usando esta función?*" (T2, p. 294). En los otros dos textos se remite a una dirección electrónica, donde indica que puede utilizar GeoGebra "*y calcular probabilidades en distintas situaciones*" (T1, p. 173) o que utilice la Web para "*interpretar un diagrama de sector*es" (T3, p.277).

El lenguaje estadístico es similar en los tres textos, salvo algunas diferencias: el texto [T3] es el único que utiliza las expresiones mediana, distribución, dispersión e histograma, y el único que relaciona estadística y probabilidad mediante la estimación de la probabilidad de un suceso a partir de la frecuencia relativa observada. El texto [T1] utiliza la expresión carácter estadístico en lugar de variable estadística como lo hacen los otros textos: "*En una población podemos estudiar distintos aspectos. Cada uno de ellos recibe el nombre de carácter estadístico*" (T1, p.166). En probabilidad, en los textos [T1] y [T2] aparece un lenguaje más formal y conjuntista, mientras que el texto [T3] utiliza un lenguaje más intuitivo basado en ejemplos, dibujos e imágenes y no define espacio muestral ni sucesos simples o compuestos.

Lenguaje numérico

En segundo lugar se ha analizado el tipo de lenguaje numérico, encontrando expresiones numéricas relacionadas con los números enteros, decimales y fracciones, que con frecuencia se combinan en una misma expresión, por ejemplo "*11/25=0,44*" (T1, p. 167). Los números enteros se utilizan para representar valores de variables estadísticas o sucesos en experimentos aleatorios, y en el cálculo de frecuencias absolutas "*En una caja hay 3 lápices rojos, 2 negros y 1 azul. Se sacan a la vez dos lápices*" (T1, p.176).

Tabla 2. Tipos de números incluidos en los libros de texto

Expresiones	[T1]	[T2]	[T3]
Números enteros	x	x	x
Números decimales	x	x	x
Fracciones	x	x	x

Los números decimales, aparecen sobre todo en el cálculo de frecuencias relativas. Las fracciones se emplean para recordar la fórmula de las frecuencias relativas o en el cálculo de la probabilidad mediante la regla de Laplace, combinando en el resultado los números decimales ("*la probabilidad será 1/200=0,005*" (T2, p. 288). Una diferencia es que el texto [T1] en probabilidad solo utiliza enteros y fracciones. En la Tabla 2 se observa que los tres libros utilizan estos distintos tipos de números, mientras que en el trabajo de Gómez et al. (2013) sólo se encontraron los números enteros en los textos de los dos primeros ciclos de primaria; además una de las series de libros analizadas hacía mayor uso de las fracciones.

Lenguaje simbólico

Hemos encontrado una gran variedad de lenguaje simbólico que incluye las expresiones de igualdad y operaciones aritméticas, al igual que en el trabajo de Gómez et al. (2013), pero no hemos encontrado la desigualdad, que sí aparecía en dicho estudio. También coincidiendo con dicho trabajo se utilizan símbolos literales y notación funcional, para expresar la regla de Laplace: *"P(A) = nº de casos favorables al suceso A/nº de casos posibles"* (T2, p. 288). El texto [T3] no menciona de forma explícita dicha regla y utiliza menos símbolos; por ejemplo, para referirse a un suceso, en lugar de utilizar una letra lo representa con la palabra completa "*P (AZUL)*"(T3, p.283), y en otros casos utiliza un dibujo.

La implicación es utilizada para realizar cálculos encadenados: "*Calculamos los grados que tendrá cada sector. Fútbol: 360º/30 = nº/15 ⟶ nº = 360º.15/30 = 180º*" (T1, p.169). Es frecuente el lenguaje conjuntista sobre todo en los textos [T1] y [T2], donde se utiliza para expresar el conjunto formado por los elementos de un suceso y el símbolo ∅ para representar el suceso imposible: "*Espacio muestral E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}*" (T2, p. 287). El símbolo aproximado solo aparece en un texto, para indicar que la probabilidad de un suceso es aproximadamente el valor de la frecuencia relativa observada: (T3, p. 283).

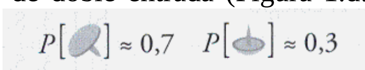
En la Tabla 3 resumimos esta variable, observando también diferencias entre los textos, siendo el lenguaje simbólico mucho más formalizado en los dos primeros, debido al uso de conceptos sobre conjuntos, la notación funcional y símbolos literales. Hay un salto grande en la formalización del lenguaje simbólico en comparación con el estudio de Gómez et al. (2013).

Tabla 3. Tipos de símbolos y operaciones incluidos en los libros de texto

Expresiones	[T1]	[T2]	[T3]
Igualdad (=)	x	x	x
Operaciones aritméticas	x	x	x
Conjuntos: {}, ∅	x	x	
Aproximación			x
Implicación		x	
Símbolos literales	x	x	
Notación funcional	x	x	

Lenguaje tabular

Se han encontrado diferentes tipos de tabla: el primero de ellos es el listado de datos o de sucesos de un espacio muestral, como el ejemplo de la Figura 1.a (T2, p. 280). Otro tipo son las tablas de recuento que también aparecen en el mismo ejemplo y que son una ayuda previa a la construcción de una tabla de frecuencias o el cálculo de probabilidades. Las tablas de frecuencia, contienen los valores de la variable y diferentes frecuencias que pueden ser absolutas o relativas o porcentajes o bien combinar varios de ellos, como en la Figura 1.b (T2, p. 281). En ocasiones se dan parcialmente construidas para completarlas, como en la Figura 1.c (T1, p. 175). Estas tablas de frecuencias ofrecen una estructura de relaciones, más allá de los números consignados en ellas (por ejemplo, relacionando cada valor de la variable con su frecuencia). Mientras en el trabajo de Gómez et al. (2013) aparecían tablas de datos agrupados en intervalos al finalizar la Primaria, no las hemos encontrado en nuestro estudio. Finalmente, la tabla de doble entrada (Figura 1.d: T1, p. 181), presenta conjuntamente dos variables; el contenido de las celdas es usualmente una frecuencia absoluta doble, pero también, como en el ejemplo, puede contener símbolos y operaciones.



Se ha preguntado a todos los alumnos de clase por su color favorito. Realiza el recuento.

R = rojo V = verde
Am = amarillo Az = azul

R	R	Am	V	Az	R
Am	V	V	R	R	Am
Am	Az	V	Am	R	Az
R	V	Az	V	R	R

Color	Recuento
Rojo	𝍸 ////
Verde	𝍸 /
Amarillo	𝍸
Azul	////
Total	24

a. Listado de sucesos y Tabla de recuento

x_i	f_i	$h_i = \frac{f_i}{N}$
1	14	$\frac{14}{28} = 0,5$
2	7	$\frac{7}{28} = 0,25$
3	5	$\frac{5}{28} = 0,18$
4	2	$\frac{2}{28} = 0,07$
Total	$N = 28$	1

b. Tabla de frecuencias

Visitas	frecuencia absoluta	frecuencia relativa
0	25	0,125
1	•••	0,225
2	50	•••
3	•••	0,3
4	15	•••
5	•••	0,025
	•••	•••

c. Tabla de frecuencias incompleta

Observa los precios de cada país. El primer plato cuesta 1 € más que el postre. El segundo plato cuesta 2 € más que el postre. Cada entrante cuesta 3 € más que el postre. Así, si llamamos al postre de cada país *a*, *b*, *c* y *d*, podríamos construir una tabla como esta.

	Entrante	1.er plato	2.º plato	Postre
España	$a+3$	$a+1$	$a+2$	a
Italia	$b+3$	$b+1$	$b+2$	b
Grecia	$c+3$	$c+1$	$c+2$	c
Portugal	$d+3$	$d+1$	$d+2$	d

d. Tabla de doble entrada

Figura 1. Distintos tipos de tablas encontradas en los textos.

En la Tabla 4 resumimos los resultados relativos a esta variable, observando pocas diferencias entre los textos analizados, siendo la única destacable que la tabla de doble entrada solo aparece en el texto [T1]. Este tipo de tabla exige un nivel de razonamiento más complejo porque establece relaciones entre dos variables que se disponen en filas y columnas, en nuestro ejemplo países y precios de cada plato, con el contenido de las celdas. En Gómez et al. (2013), estas tablas aparecían en una de las serie de textos, dentro del segundo ciclo de primaria.

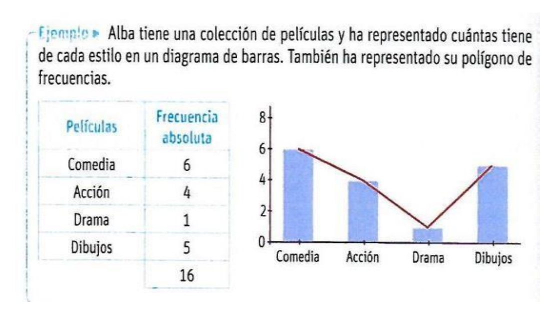
Tabla 4. Lenguaje tabular

Expresiones	[T1]	[T2]	[T3]
Listado de datos	x	x	x
Tabla de recuento	x	x	x
Tabla de frecuencias absolutas	x	x	x
Tabla de frecuencias relativas	x	x	x
Tabla de porcentajes	x	x	x
Tabla de doble entrada	x		
Tabla para organizar los cálculos	x	x	x

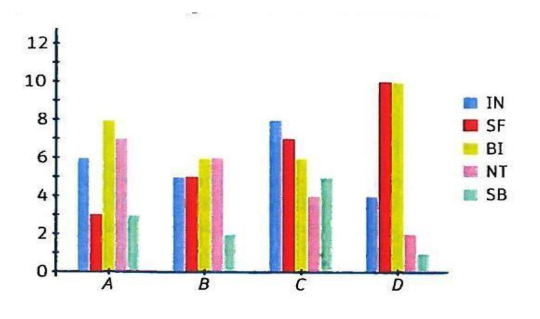
Por otro lado, el lenguaje tabular se vincula exclusivamente con la estadística, al contrario que en el estudio de Gómez et al. (2013), donde aparecían algunas tablas relacionadas con probabilidad. A pesar de que los contenidos de estadística y probabilidad están en el mismo tema, en general, los autores no los relacionan entre sí, lo que puede deberse al olvido del enfoque frecuencial de la probabilidad, que sin embargo, es recomendado en el currículo. Como hemos señalado, en nuestro estudio sólo el texto [T3] lo incluye, y usa las tablas para ello, al relacionar las frecuencias relativas con la probabilidad, presentándolas como estimaciones de la misma. En nuestro estudio se ha encontrado más diversidad de lenguaje tabular, aunque de menor complejidad, que en Ortiz, Serrano y Batanero (2001). Finalmente observamos que los contenidos de estadística y probabilidad se presentan en el mismo tema, mientras que en Ortiz, Serrano y Batanero (2001), se presentaban en temas separados.

Lenguaje gráfico

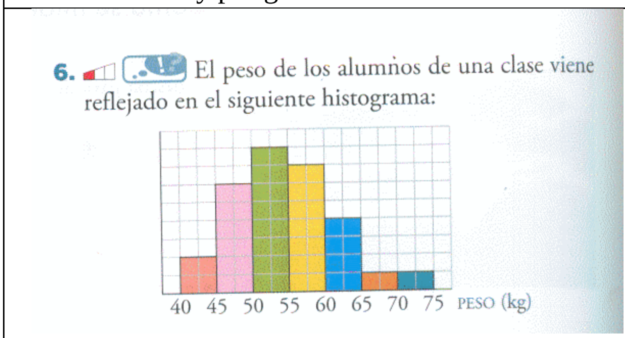
En todos los textos se trabaja la traducción entre diferentes sistemas de representación, siguiendo las indicaciones de las orientaciones curriculares. Se han encontrado una gran variedad de gráficos, la mayoría, relacionados con la estadística. Entre ellos el diagrama de barras, polígono de frecuencias o ambos en la misma representación, como el ejemplo de la Figura 2.a (T1, p. 168), donde explica su construcción a partir de una tabla de frecuencias. El diagrama de barras aparece en todos los textos analizados, no así el polígono de frecuencias que solo aparece en dos de ellos. También encontramos diagrama de barras agrupados, como en la Figura 2b (T1, 178), que supone un nivel de complejidad superior, de acuerdo a Batanero, Arteaga y Ruiz (2010), al representar conjuntamente dos distribuciones de datos.



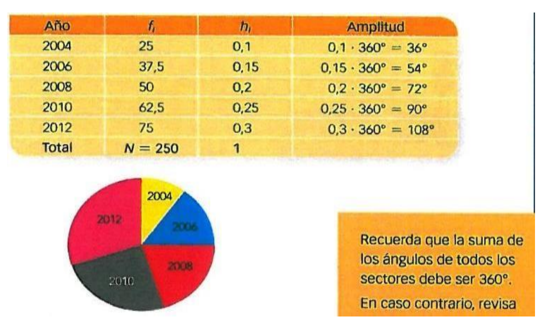
a. D. de barras y polígono de frecuencias



b. Diagrama de barras



c. Histograma



d. Diagrama de sectores

Figura 2. Ejemplos de gráficos en los textos

El histograma es utilizado para representar las frecuencias o probabilidades de una variable agrupada en intervalos, apareciendo solo en el texto [T3] (ver Figura 2c: T3, p. 284), lo que es algo contradictorio con el hecho de no incluirse tablas de datos agrupados. Por último, el diagrama de sectores, apropiado para representar las frecuencias relativas de una variable cualitativa o discreta con pocos valores, aparece en todos los libros de texto analizados, como en la Figura 2d (T2, p.285), donde se explica el procedimiento para construirlo a partir de una tabla de frecuencias.

Todos estos gráficos aparecen sólo ligados al estudio de la estadística, excepto un diagrama de barras en una actividad (T2, p. 295), que los alumnos deben leer para calcular una probabilidad. Por el contrario, en el estudio de Gómez et al. (2013) con textos de primaria, aparecían todos los gráficos estadísticos citados en el tema de probabilidad. Por ello, consideramos que en los nuevos textos analizados se hace una presentación incompleta de las diferentes representaciones gráficas adecuadas para el estudio de la probabilidad, que se recomiendan en las orientaciones curriculares. Finalmente son frecuentes las representaciones icónicas encontradas, son dibujos relacionados con el contexto del problema propuesto, como por ejemplo niños lanzando monedas (T2, p. 293).

En la Tabla 5 se observan algunas diferencias entre los textos: El diagrama de barras agrupado sólo aparece en [T1], el histograma sólo en [T3], y el polígono de frecuencias no aparece en el texto [T2]. En el estudio de Ortiz, Serrano y Batanero (2001) también aparecen diagramas de barras e histogramas; sin embargo, en nuestro estudio también encontramos diagrama de sectores y polígono de frecuencias, mientras que estos autores observaron gráficos cartesianos, diagramas de flechas y de Venn. Por otro lado, se echa en falta el diagrama del árbol, recomendado en el currículo, que si se encuentra en el estudio de Gómez et al. (2013).

Tabla 5. Lenguaje gráfico

Expresiones	[T1]	[T2]	[T3]
Diagrama de barras	x	x	x
D. barras agrupado	x		
Diagrama de sectores	x	x	x
Polígono de frecuencias	x		x
Histograma			x
Representación icónica	x	x	x

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha mostrado la gran riqueza y diversidad de lenguaje en los textos analizados, que el profesor ha de tener en cuenta para valorar la dificultad que supone para los alumnos, quienes, además de los conceptos y propiedades, han de aprender el uso de símbolos, tablas y gráficos. Como indican Ortiz et al. (2001), a esta dificultad se añade el uso de algunas palabras del lenguaje cotidiano, con significado diferente, en el tema de probabilidad.

Se encontraron mayor número de expresiones verbales específicas de la estadística con respecto a las de la probabilidad, si se separan de éstas las relacionadas con los juegos de azar. Por otro lado, los lenguajes tabular y gráfico aparecen exclusivamente vinculados con la estadística, en contra de lo especificado en las orientaciones curriculares; por ejemplo, no se ha encontrado diagrama en árbol, citado expresamente en el currículo. Además, hay un deslizamiento hacia el enfoque clásico de la probabilidad, al no conectarse estadística y probabilidad, también contradiciendo dichas recomendaciones curriculares. Al contrario que en el trabajo de Serradó y Azcárate (2006), no hemos encontrado predominio del enfoque frecuencial en ninguno de los textos analizados.

Puesto que el estudio es exploratorio, estos resultados deben ser valorados con precaución y sería necesario ampliar el estudio con otros textos. Por otro lado, el profesor debe buscar estrategias que permitan a los estudiantes progresar desde el lenguaje cotidiano a un lenguaje matemático más avanzado e interpretar así los significados más complejos de la probabilidad. Esto requiere que los profesores enfaticen la relación entre el lenguaje cotidiano y el lenguaje formal mediante el cual se construye el conocimiento matemático, facilitando así el aprendizaje de los estudiantes (O'Halloran, 2000). Esperamos con este trabajo contribuir a la mejora de la enseñanza de las matemáticas, en particular de la estadística y la probabilidad, en Educación Secundaria, así como facilitar la labor del profesorado en el aula.

Agradecimientos: Plan Propio Investigación Universidad de Granada: Programa 20, Proyecto EDU2013-41141-P y Grupo FQMN-126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Batanero, C., Arteaga, P. y Ruiz, B. (2010). Análisis de la complejidad semiótica de los gráficos producidos por futuros profesores de educación primaria en una tarea de comparación de dos variables estadísticas. *Enseñanza de las Ciencias, 28*(1), 141-154.

Cordero, F., Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socio epistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10*(1), 7-38.

Common Core State Standards Initiative (CCSSI). (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*, National Governors Association for Best Practices and the Council of Chief State School Officers, Washington, DC. <www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math Standards.pdf> [acceso junio 2015].

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.

Gómez, E., Ortiz, J. J., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2013). El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria. *Unión*, 35, 75-91.
Herbel-Eisenmann, B. A. (2007). From intended curriculum to written curriculum: Examining the "voice" of a mathematics textbook. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(4), 344-369.
MECD (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Madrid: *Boletín Oficial del Estado*, nº 3.
National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: VA, NCTM.
O'Halloran, K. L. (2000). Classroom discourse in mathematics: A multisemiotic analysis. *Linguistics and Education*, 10(3), 359–388.
Ortiz, J. J. (2014). Estudio de las situaciones problemas de probabilidad en libros de texto de Bachillerato. En M.T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 503-511). Salamanca: SEIEM.
Ortiz, J. J. (2002). *La probabilidad en los libros de texto*. Universidad de Granada.
Ortiz, J. J., Serrano, L., Batanero, C. (2001). El lenguaje probabilístico en los libros de texto. *Suma*, 38, 5-14.
Schleppegrell, M. (2007). The linguistic challenges of mathematics teaching and learning: A research review. *Reading and Writing Quarterly*, 23,139-159.
Serradó, A., Azcárate, P. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO. *Revista de Educación*, 340, 341-378.
Serradó, A., Azcárate, P., Cardeñoso, J.M. (2006). La caracterización escolar de la noción de probabilidad en libros de texto de la ESO. *Tarbiya. Revista de Investigación e Innovación Educativa*, 38, 91-112.
Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-Proving in School Mathematics Textbooks. *Mathematical thinking and learning*, *11*(4), 258-288.
ANEXO: Textos empleados en el análisis.
[T1]. Nieto, M., Moreno, A., Pérez, A. (2015). *Matemáticas 1 ESO*. Madrid: SM.
[T2]. Grence, T. (Dir.) (2015). *Matemáticas 1 ESO*. Serie Resuelve. Madrid: Santillana.
[T3]. Colera, J., Gaztelu, I., Colera, R. (2015). *1 ESO. Matemáticas*. Unidades 11 a 15. Madrid: Anaya.

EMOCIONES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS: UN ESTUDIO EXPLORATORIO

Mathematics teachers' emotions: an exploratory study

García-González, M., Martínez-Sierra G.

Centro de Investigación en Matemática Educativa, Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero

Resumen

En Matemática Educativa más allá de la amplia investigación sobre ansiedad matemática de profesores en pre-servicio y en servicio muy poco se sabe de las emociones discretas de los profesores de matemáticas en pre-servicio y en servicio. Para empezar a llenar este hueco el presente estudio exploratorio tiene el objetivo de identificar las emociones de maestros. Para la toma de los datos aplicamos un cuestionario a 13 profesores de preparatoria en servicio. Los resultados muestran que las emociones de cada uno de los profesores son desencadenadas por su valoración de las situaciones en función, principalmente, de la deseabilidad de la meta de persecución activa 'que los estudiantes aprendan' y por las metas de interés subordinadas de 'que los estudiantes se interesen en la clase' y 'que los estudiantes participen en la clase'.

Palabras clave: *emoción, profesores, matemática educativa.*

Abstract

Little is known in Mathematics Education about the discrete emotions of pre-service and in-service primary teachers beyond the wide research on mathematics anxiety. In order to start filling this gap, this exploratory research aims to identify the teachers' emotions. To collect data, we applied a questionnaire to 13 high school in-service teachers. The emotions were analysed with the cognitive structure of emotions. Results show that emotions of the teachers are triggered by their appraisals of the situations, mainly the desirability of the active-pursuit goal 'that students learn' and by the subordinate interest goals 'that students participate in class'.

Keywords: *emotion, teachers, mathematics education.*

Emociones de profesores en Matemática Educativa

Los resultados de investigación han evidenciado que el afecto tiene una alta influencia en la motivación académica y en las estrategias cognitivas y por ende en el aprendizaje escolar matemático. A decir de Gómez-Chacón (2000), al aprender matemáticas, un estudiante recibe continuos estímulos asociados a las matemáticas a los cuales reacciona emocionalmente de forma positiva o negativa condicionado por sus creencias acerca de sí mismo y acerca de las matemáticas. Si situaciones similares, repetidamente, le producen la misma clase de reacciones emocionales (satisfacción, frustración) la activación de las emociones puede ser automatizada y se pueden solidificarse en actitudes.

De acuerdo a Guerrero, Blanco & Vicente (2002), una historia repetida de fracasos lleva a los alumnos a dudar de su capacidad intelectual en relación con las tareas matemáticas y llegan a considerar sus esfuerzos inútiles, manifestando un sentimiento de indefensión; lo cual determina nuevos fracasos que refuerzan la creencia de que efectivamente son incapaces de lograr el éxito, desarrollándose una actitud negativa que bloquea sus posteriores posibilidades de aprendizaje. En estos resultados de investigación, se resalta el papel central de las emociones en la formación de las actitudes y creencias de los estudiantes.

García-González M., Martínez-Sierra G. (2016). Emociones de profesores de matemáticas. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 152-156). Málaga: SEIEM.

Respecto de los profesores, la investigación sobre emociones se ha centrado en el nivel primaria, con profesores en formación y algunas veces con profesores en servicio. La ansiedad matemática – entendida como un conjunto de emociones negativas acerca de un estado de disconfort, que ocurre en respuesta a situaciones que implican tareas matemáticas- es el fenómeno emocional más estudiado en los profesores en formación (Bekdemir, 2010). La ansiedad matemática ha sido reportada como un fenómeno común entre los profesores en formación de la escuela primaria en muchos países y se ha evidenciado que puede interferir seriamente en ellos para convertirse en buenos profesores de matemáticas (Hannula, Liljedahl, Kaasila, & Rösken, 2007).

Existe un consenso entre los investigadores que las causas de todas las emociones negativas de los profesores obedecen principalmente a que la mayoría de ellos no son especialistas en matemáticas y han tenido a menudo experiencias negativas con las matemáticas cuando eran estudiantes de primaria o secundaria '(Philipp, 2007). Pero poco se sabe de otras emociones discretas, emociones que los profesores experimentan en momentos determinados de la clase de matemáticas, más allá de la amplia investigación sobre la ansiedad matemática.

Para empezar a llenar este vacío, nuestra investigación, de corte cualitativo tiene como objetivo identificar las emociones de profesores mexicanos de bachillerato (grado pre universitario) en servicio. Por lo tanto, nos hemos planteado la siguiente pregunta de investigación: ¿Cuáles son las emociones que profesores de bachillerato en servicio experimentan en sus clases de matemáticas?

La teoria de la estructura cognitiva de las emociones

Hemos demostrado en investigaciones anteriores (Martínez-Sierra & García González, 2016) que la teoría de la estructura cognitiva de las emociones, llamada teoría OCC (Ortony, Clore, & Collins, 1988) es un excelente modelo para identificar y explicar las emociones experimentadas en el pasado y narradas por las personas. La teoría OCC se basa en la idea de que las emociones son desencadenadas por las valoraciones cognitivas (appraisals) que la gente hace de una situación, de manera consciente o no. La OCC está estructurada como una tipología de tres ramas, que se corresponden con tres tipos de estímulos: (1) Un juicio individual sobre la deseabilidad de un evento, un evento es agradable si ayuda al individuo a alcanzar su meta, y es desagradable si lo impide; (2) la aprobación de una acción respecto a normas y estándares sociales; y (3) la atracción de un objeto, es decir, la correspondencia de sus aspectos con los gustos del individuo, la persona se siente atraída por un objeto, o le resulta repulsivo.

En esta teoría se especifican 3 clases, 5 grupos y 22 tipos de emociones. A modo de ejemplo, en la Tabla 1 mostramos las emociones del grupo vicisitudes de los otros "estar contentos vs estar disgustados". Desde esta postura, la deseabilidad de un evento se evalúa respecto a metas, definidas como lo que se quiere lograr. Se consideran tres tipos de metas que hemos reformulado de la definición original de la OCC basados en datos de investigaciones precedentes resultado del estudio de emociones en estudiantes de bachillerato y universidad (Martínez-Sierra, & García-González, 2016). Las Metas de persecución activa (A-metas) representan el tipo de cosas que uno quiere lograr y se necesita un largo periodo de tiempo para alcanzarlas, por ejemplo aprobar un curso o terminar la escuela. Metas de interés (I-metas) son metas más rutinarias y son necesarios para alcanzar o dar soporte a las A-metas, requieren un tiempo más corto de tiempo para ser alcanzadas respecto a las A-metas, ejemplo de ellas son acreditar un examen o hacer tareas en clase. Metas de relleno (R-metas) son metas básicas y necesarias para llevar a cabo todos los otros tipos de metas. A veces son tan naturales en el aula que las personas no los perciben como metas, por ejemplo asistir a clases.

Tabla 3. Ejemplo de emociones del grupo “vicisitudes de los otros”

Grupo de emociones	Tipo de emociones
Vicisitudes de los Otros	Contento por un acontecimiento deseable para alguna otra persona (*feliz-por*) Contento por un acontecimiento indeseable para alguna otra persona (*alegre por el mal ajeno*) Descontento por un acontecimiento deseable para alguna otra persona (*resentido-por*) Descontento por un acontecimiento indeseable para alguna otra persona (*quejoso-por*)

metodología

Participantes y contexto

En octubre de 2014 en el marco de un evento para profesores en servicio el primer autor de este artículo dirigió un taller con el tema “Dominio afectivo en Matemática Educativa”. Al principio de las actividades del taller se les pidió a los asistentes ser voluntarios para contestar y entregar un cuestionario que contenía preguntas formuladas con el objetivo de conocer los datos básicos de su experiencia profesional como maestros y de conocer sus emociones relacionadas con su actividad docente. Se les explicó que los datos serían utilizados para fines de investigación y serían usados de manera confidencial. 13 profesores accedieron a ser participantes, como parte de la dinámica del taller otros asistentes también contestaron el cuestionario, pero no lo entregaron al investigador.

Los participantes son profesores en servicio, 3 mujeres y 10 hombres entre 25 y 57 años de edad, de 1 a 19 años de experiencia docente. Todos ellos trabajaban en el mismo sistema de bachillerato del estado mexicano de Hidalgo, localizado al sur de la Ciudad de México, el cual es financiado con recursos públicos federales y estatales. Sólo tres de ellos estudiaron para maestro de secundaria, el resto eran ingenieros que llegaron a la docencia, sobre todo, por la oportunidad de trabajo y por "contar con el perfil" (tener un carrera afín a las matemáticas como lo son ingenierías) para ser profesor de matemáticas. Cabe señalar que en México no hay carrera profesional alguna que habilite a las personas a ser maestros de matemáticas de bachillerato, por lo que es usual que ingenieros, matemáticos y otros profesionistas con carreras en Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas se desempeñen como maestros de matemáticas en este sistema educativo.

Recolección de datos

El cuestionario aplicado a los participantes contenía las siguientes preguntas formuladas con el objetivo de conocer sus emociones relacionadas con su actividad como profesores de matemáticas -siguiendo la teoría OCC, nuestras preguntas intentaron provocar al profesor para escribir sobre sus experiencias emocionales en términos de las condiciones desencadenantes- : (1) ¿Qué emociones o sentimientos experimenta en la clase de Matemáticas? ¿Por qué experimenta todo esto?, (2) ¿Cuáles son las principales experiencias positivas que ha tenido como profesor de Matemáticas? (3) ¿Por qué fueron experiencias positivas?, (4) ¿Cuáles son las principales experiencias negativas que ha tenido como profesor de Matemáticas? ¿Por qué fueron experiencias negativas?, (5) ¿En qué circunstancias y situaciones ha experimentado felicidad o alegría como profesor de Matemáticas? ¿A qué atribuye esa felicidad o alegría?, y (6) ¿En qué circunstancias y situaciones ha experimentado tristeza o pesar como profesor de Matemáticas? ¿A qué atribuye esa tristeza o pesar?

Análisis de datos

Los profesores fueron identificados con seudónimos. Las respuestas a los cuestionarios fueron totalmente transcritas. De acuerdo a la teoría OCC, un tipo de emoción se identifica por dos especificaciones: 1) Una frase concisa que expresa todas las situaciones desencadenantes de las experiencias emocionales. En la evidencia, usamos negritas para resaltar estas frases. 2) Las palabras emocionales que expresan la experiencia emocional. Resaltamos las palabras emocionales en cursivas. Posteriormente a la identificación del tipo de emoción centramos la atención en las situaciones desencadenantes para después inferir las metas que soportaban la valoración (appraisal) de cada emoción.

Como ejemplo presentamos el análisis de las experiencias de Orgullo y Complacencia de Severo, un profesor de 33 años, que estudió la licenciatura en educación con especialidad en matemáticas y cuenta con 11 años de servicio docente en bachillerato. De acuerdo a su relato, él experimenta emociones de orgullo —aprobación de la acción plausible de uno mismo— cuando reconoce que está contribuyendo a la formación académica de sus estudiantes, ésta es una acción plausible que se encuentra normada por las normas en la escuela en general y que se evidencia de manera particular en el salón de clases donde la enseñanza y el aprendizaje tienen lugar. La norma indica que un profesor debe formar a sus estudiantes.

Severo: [En la clase de matemáticas he experimentado] *satisfacción* por **contribuir a la formación de los estudiantes en su formación académica**.

La acción plausible de Severo que genera emociones de orgullo está asociada a la meta "que los estudiantes aprendan", ésta la hemos caracterizado como meta de persecución activa (A-meta), porque el aprendizaje es un proceso que requiere de tiempo, consideramos que abordar un tema en una clase no es suficiente para que el estudiante lo aprenda. Esta meta la hemos identificado en el resto de los profesores. En el discurso de Severo identificamos dos metas que él señala para lograr el aprendizaje: "que los estudiantes se interesen en la clase" y "que los estudiantes participen", éstas las hemos considerado metas de interés (I-metas) porqué influyen para que se cumpla la A-meta, nótese que estas metas requieren de menos tiempo para alcanzarse, en una clase ambas pueden alcanzarse. Sí las I-metas son alcanzadas por Severo entonces al orgullo experimentado se suma el júbilo lo que da evidencia de emociones de complacencia —aprobación de la acción plausible de uno mismo y contento por el acontecimiento deseable relacionado—.

Severo: [En la clase de matemáticas he experimentado] *emoción* **cuando soy capaz de trasmitir conocimiento, cuando desarrollo una clase productiva, cuando consigo interés y participación en la clase, cuando hago lo que me gusta y transmito lo que sé.**

En la Tabla 2 presentamos las experiencias emocionales de Severo y la identificación de las metas que soportan sus valoraciones.

Tabla 2 Experiencias emocionales de Severo

Tipos de emociones	Situaciones desencadenantes	Metas que soportan su valoración
Orgullo	Percepción de que los estudiantes aprenden	A-meta: Que los alumnos aprendan

Complacencia	La participación de los estudiantes en clase	I-meta: Que los estudiantes se interesen en la clase
	Percepción de interés de los estudiantes	I-meta: Que los estudiantes participen
Quejoso por	Percepción de que los estudiantes no aprenden	A-meta : Que los alumnos aprendan
	Poco interés de los estudiantes	A-meta: Que los alumnos aprendan
Ira	Bajo rendimiento de los estudiantes en exámenes	A-meta: Que los alumnos aprendan
	Alumnos con inadecuado nivel de conocimientos de partida	
Gratitud	Cuando los estudiantes enseñan a sus compañeros	A-meta: Que los alumnos aprendan

RESULTADOS

En la Tabla 3 presentamos las experiencias emocionales de todos los participantes, las situaciones que las desencadenan y las metas que soportan sus valoraciones.

Tabla 3. Emociones de los participantes

Metas que soportan los appraisals
A-meta: Que los alumnos aprendan
I-meta: Que los estudiantes se interesen en la clase
I-meta: Que los estudiantes participen en la clase

Tipos de emociones	**Situaciones desencadenantes**
Quejoso por	Percepción de que los estudiantes no aprenden Poco interés de los estudiantes
Feliz por	Percepción de que los estudiantes aprenden
Resentido por	Los estudiantes no aprenden
	Deserción escolar por falta de recursos
	Reprobación
Reproche	El estudiante culpa al profesor por no aprender
Congoja	El estudiante no se esfuerza por aprender
Júbilo	El estudiante disfruta la clase
Agrado	Uso de recursos novedosos en la clase Tecnología, dinámicas nuevas
Ira	Falta de interés de los estudiantes por aprender en la clase
Orgullo	Contribuir a la formación de los estudiantes
	Reconocimiento a su labor docente por parte de otros
Gratitud	Los alumnos se ayudan entre ellos
Decepción	Los estudiantes no aprende al mismo ritmo
Remordimiento	El mismo maestro no entiende lo que va a enseñar
Gratificación	Los alumnos están interesados por aprender
Autoreproche	Los estudiantes entienden la explicación de la clase pero no son capaces de hacer la tarea por no entenderla

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Identificamos 14 tipos de experiencias emocionales en los participantes de las 22 que señala la OCC, todas ellas perteneces a los 6 grupos que modela la teoría. Hemos identificado emociones del grupo *vicisitudes de otros* que en investigaciones anteriores (Martínez-Sierra & García González, 2014) realizadas con estudiantes no aparecieron, la explicación que damos a este hecho es que este grupo de emociones depende de la deseabilidad que alguien tenga de que determinados acontecimientos les ocurran a otros, en la evidencia encontramos casos en que las emociones de los profesores están en función de su deseo porque determinadas metas sean alcanzadas por los estudiantes, esto es, que los estudiantes aprendan. Sí esta meta es alcanzada se experimenta *feliz por* de lo contrario *resentido por* o *quejoso por* aparecen, dependiendo de las valoraciones de los profesores. El principal hallazgo de esta investigación es haber identificado que todas de las experiencias emocionales identificadas en cada uno de los participantes son desencadenadas por la valoración (appraisal) de situaciones en función, principalmente, de la deseabilidad de la meta de persecución activa de '*que los estudiantes aprendan*' y por las metas de interés subordinadas de '*que los estudiantes se interesen en la clase*' y '*que los estudiantes participen en la clase*'. Este resultado lo interpretamos de varias formas.

En primer lugar, si consideramos que las emociones tienen como función la preparación para la acción y la sugerencia de planes (Oatley & Johnson-Laird, 2014) nuestros resultados señalan que la actividad de los maestros en la clase de matemáticas se encuentra orientada fundamentalmente por las metas y objetivos en el aula de matemáticas. Esto es consistente, por ejemplo, con el modelo de Schoenfeld (2011) quien considera a las metas como una variable básica para modelar la toma de decisiones de los profesores de matemáticas. Dado que el modelo de Schoenfeld no considera a las emociones como variable en la toma de decisiones de los maestros, nuestros resultados, junto con los resultados generales de las investigaciones basadas en teorías de valoración, señalan que las emociones deben ser consideradas como variable fundamental en la toma de decisiones en los profesores de matemáticas.

De manera general las situaciones desencadenantes y las metas identificadas en nuestra investigación pueden ser consideradas como creencias acerca de los objetivos perseguidos en la clase de matemáticas y los medios para alcanzarlas. Esta consideración, agregada a que las emociones preparan para la acción, señala que estas creencias acerca de metas y medios para logarlas tienen un alto impacto en las acciones de los profesores. Dado que este aspecto se ha señalado muy poco en la investigación en Matemática Educativa sobre creencias de profesores; consideramos que sería importante seguir investigando a profundidad las relaciones entre emociones, creencias sobre metas y las acciones del profesor en la clase de matemáticas.

REFERENcias

Bekdemir, M. (2010). The pre-service teachers' mathematics anxiety related to depth of negative experiences in mathematics classroom while they were students. *Educational Studies in Mathematics*, 75(3), 311–328. http://doi.org/10.1007/s10649-010-9260-7

Gómez Chacón, I. (2000). *Matemática Emocional*. Madrid: Narcea.

Guerrero, E., Blanco L. J. & Vicente, F. (2002). *Trastornos emocionales ante la educación matemática*. España: Pirámide.

Hannula, M. S., Liljedahl, P., Kaasila, R., & Rösken, B. (2007). Researching relief of mathematics anxiety among pre-service elementary school teachers. In J.-H. Woo, H.-C. Lew, K.-S. P. Park, & D.-Y. Seo (Eds.), *Proceedings of 31st Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 1 (pp. 153–156). Seoul, Korea.

Martínez-Sierra, G. & García-González, M.S. (2016). Undergraduate Mathematics Students' Emotional Experiences in Linear Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 91(1), 87-106. doi: 10.1007/s10649-015-9634-y

Oatley, K., & Johnson-Laird, P. N. (2014). Cognitive approaches to emotions. *Trends in Cognitive Sciences*, 18(3), 134–40. http://doi.org/10.1016/j.tics.2013.12.004

Ortony, A., Clore, G. L., & Collins, A. (1988). *The cognitive structure of emotions*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F. Lester (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257–315). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Schoenfeld, A. H. (2011). How We Think: *A Theory of Goal-Oriented Decision-Making and its Educational Application*. New York, NY: Routledge.

APRENDIZAJE DEL CONCEPTO RECTA TANGENTE EN ALUMNOS DE BACHILLERATO

High school students' Construction of the tangent line concept

Orts, A.[a], **Llinares, S.**[b], **Boigues, F.** [c]
[a]IES Guadassuar (Valencia), [b]Universidad de Alicante, [c]Universidad Politécnica de Valencia

Resumen
El objetivo de esta investigación es caracterizar el aprendizaje del concepto de recta tangente por estudiantes de Bachillerato (16-17 años). Diseñamos un experimento de enseñanza desde una trayectoria hipotética de aprendizaje integrando las perspectivas analítica local y geométrica y considerando las fases del aprendizaje conceptual derivadas de la abstracción reflexiva (Simon, et al, 2004). El análisis de los datos nos permitió identificar tres perfiles en la manera en la que los estudiantes aprenden el concepto de recta tangente. Estos tres perfiles reflejan tres momentos en el proceso de aprendizaje conceptual de los estudiantes: momento de proyección, momento de reflexión y momento de anticipación local.
Palabras clave: *progresión en el aprendizaje, comprensión matemática, recta tangente, descomposición genética, trayectoria de aprendizaje.*
Abstract
The aim of this research is to characterize the high school students ' learning of line tangent concept (16-17 years-old). We design a teaching experiment from a learning hypothetical trajectory integrating the local analytical and geometrical perspectives and considering the conceptual stages of learning derived from reflective abstraction (Simon et al., 2004). Findings point out three profiles of high students' conceptual learning of tangent line concept. These three profiles reflect different moments in the students' learning: projection, reflection and local anticipation.
Keywords: *learning progressions, mathematical understanding, tangent line, genetic decomposition, learning trajectory.*

introducción

La recta tangente es un concepto que permite interpretar geométricamente la derivada de una función en un punto y se trata también de la recta que mejor aproxima localmente una función. En la constitución de su significado intervienen el concepto de límite, derivada, monotonía o curvatura de una función así como los procesos de aproximación a una curva desde varios sistemas de representación (Robles, Del Castillo y Font, 2010). Esto hace que durante su aprendizaje se generen diferentes significados, como el de una línea que pasa por un punto pero no corta la curva en un entorno de él, como una línea que tiene una doble intersección con la curva en dicho punto, y como una línea que pasa por dos puntos infinitamente cercanos a un punto de la curva entre otros (Artigue, 1991). Estos diferentes significados generan errores, obstáculos y conflictos en el aprendizaje.

Varias investigaciones han identificado algunas de las dificultades que tienen los alumnos de enseñanzas preuniversitarias en el aprendizaje de la recta tangente (Biza, Christou y Zachariades, 2008; Biza, Nardi y Zacharides, 2009a, 2009b, Biza y Zacharides, 2010, Páez y Vivier, 2013). En particular, se ha subrayado que el conocimiento previo de los estudiantes de la recta tangente a un círculo influye negativamente en el desarrollo de una comprensión más general de recta tangente a

Orts, A., Llinares, S. y Boigues, F. (2016). Aprendizaje del concepto recta tangente en alumnos de Bachillerato. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 157-164). Málaga; SEIEM

una curva. Estas investigaciones han identificado tres características en el aprendizaje de la recta tangente. En primer lugar, estudiantes cuya concepción de recta tangente es la de una recta que toca en un punto pero no corta a la función (concepción euclídea) que genera dificultades al considerar lo que pasa en los puntos angulosos, en los puntos de inflexión y cuando la curva se confunde con la recta tangente. En segundo lugar, estudiantes que aplican propiedades geométricas solo de forma local y, finalmente, estudiantes que comprenden el concepto de recta tangente como límite de las rectas secantes (concepción cartesiana) (Biza, Christou, y Zachariades, 2008; Castela, 1995).

Esta situación plantea la necesidad de generar información sobre la que fundamentar decisiones en el diseño de oportunidades de aprendizaje para los estudiantes. Esta información debe proporcionarnos elementos y características que nos ayuden a comprender mejor la manera en la que los estudiantes aprenden el significado de recta tangente. La información sobre las progresiones en el aprendizaje (Battista, 2011) entendidas como predicciones de cómo el pensamiento y la comprensión de los estudiantes evoluciona durante la realización de las actividades instruccionales, puede ayudarnos a tomar decisiones sobre el desarrollo del currículo y la enseñanza (Simon, 2014). En el caso del aprendizaje de la recta tangente, Vivier (2010) indica que inicialmente los alumnos construyen el significado vinculado a una concepción geométrica, como la recta que toca en un punto a la circunferencia (concepción euclídea) que conlleva la idea de recta perpendicular al radio de la circunferencia que es un significado introducido en el currículo junto con la concepción euclídea en primer curso de la educación secundaria (12-13 años). Posteriormente, al llegar a Bachillerato, se introduce la recta tangente a desde una perspectiva analítica considerada como el límite de las rectas secantes (concepción cartesiana) que conlleva el significado de recta tangente como aquella que pasa por el punto de tangencia con pendiente igual a la derivada de la función en dicho punto. Sin embargo, los estudiantes mantienen cierta desconexión entre las concepción euclídea (de tipo geométrico) y la cartesiana (de tipo analítico) (Vivier, 2010).

La transición entre estas concepciones se plantea a partir de la idea de linealidad local (concepción leibniziana). Así, por ejemplo, Maschietto (2008) realiza su estudio con estudiantes universitarios utilizando las calculadoras gráficas como elemento mediador generando un nuevo significado de la recta tangente definida a partir de su *micro-straightness* (explotando así la idea de Tall (1985) de la realización de sucesivos zoom sobre la gráfica de la función). De un modo similar Milani y Baldino (2002) utilizan la función zoom de CorelDraw para mostrar que la curva y la recta tangente aparecen como líneas paralelas. Este proceso permite a los estudiantes ampliar sus imágenes del concepto e incorporar elementos del mundo de los infinitesimales. En cambio, para otros autores el tránsito entre la concepción global (euclídea) de recta tangente a la concepción local (leibniziana) se podría realizar a través de la convención matemática y no necesariamente a través de la visualización (Canul, Dolores y Martínez-Sierra, 2011).

Los resultados de estas investigaciones ponen de manifiesto las diferentes concepciones de la recta tangente construidas por los estudiantes vinculadas al contexto curricular en el que aparecen y a las características de la progresión en el aprendizaje. Sin embargo, las diferentes aproximaciones adoptadas dejan abierto el problema de cómo apoyar la coordinación entre las diferentes concepciones de la recta tangente durante el aprendizaje. En particular, esta situación plantea desafíos a los investigadores que están generando trayectorias de aprendizaje para apoyar el desarrollo del currículo ya que deben determinar cómo las variaciones instruccionales afectan a estas trayectorias lo que ha definido el objetivo de nuestra investigación.

Para aportar información a este problema didáctico, nos planteamos un experimento de enseñanza apoyado en una descomposición genética del concepto (entendida como una trayectoria hipotética de aprendizaje) para generar características de cómo los estudiantes de Bachillerato construyen un concepto de recta tangente desde una concepción leibniziana mediante la interiorización de la concepción cartesiana que les permita superar el obstáculo epistemológico que supone la concepción euclídea. La hipótesis que subyace a esta forma de proceder es que este proceso de construcción puede apoyar la constitución del significado de recta tangente como la mejor aproximación local a una función.

marco teórico

Dubinsky (1991) aplica la idea de abstracción reflexiva de Piaget al pensamiento matemático avanzado considerando formas de conocer los conceptos matemáticos como acciones, procesos, objetos y esquemas, y mecanismos constructivos como interiorización, encapsulación, y tematización. Para describir la construcción de los significados se introduce la idea de descomposición genética (DG) de un concepto como un conjunto de construcciones mentales que un estudiante debería desarrollar para comprender el concepto matemático en un determinado nivel. En este proceso de construcción, algunas veces hay que tener en cuenta obstáculos que lo dificultan y que aparecen en el mismo acto de conocer, como una necesidad funcional (Brousseau, 1983). Ppor ejemplo, la idea de recta tangente concebida como la recta que tiene un solo punto en común con la curva introducida al estudiar la recta tangente a la circunferencia suele ser un obstáculo para identificar una recta tangente que tenga varios puntos de corte con la función.

Un modelo para describir cómo los estudiantes progresan a niveles de pensamiento más sofisticados ha sido desarrollado por Simon y sus colegas (Simon, Tzur, Heinz, y Kinzel, 2004). Tzur y Simon (2004) proponen dos fases en la construcción de un concepto. La fase de participación se da cuando los estudiantes identifican regularidades en la relación entre las actividades realizadas durante la resolución de tareas instruccionales y los efectos producidos que constituyen elementos del concepto que se está aprendiendo. En segundo lugar, la fase de anticipación en la que los estudiantes son capaces de usar estos elementos en diferentes situaciones que permite la consolidación de la nueva estructura conceptual construida mediante la tematización del concepto. La tematización en este contexto es el mecanismo implicado en construir como un objeto cognitivo el concepto de recta tangente. Este mecanismo permite a los estudiantes aplicar transformaciones al esquema de recta tangente, por ejemplo, ampliando el tipo de funciones y puntos singulares en los que evaluar la existencia de rectas tangentes, comprobando propiedades de la recta tangente o razonando cuando dos rectas que pasan por el mismo punto en una curva y cumplen ciertas condiciones del concepto de recta tangente pero no otras, son o no rectas tangentes a la curva en ese punto. En este sentido, la tematización implica la transición de la aplicación o uso implícito a un uso consciente de las propiedades de la recta tangente (Piaget y García, 1989). La transición al uso consciente de las propiedades de la recta tangente en diferentes contextos se da en el paso de la fase de participación a la fase de anticipación (Tzur y Simon, 2004). En esta transición en el proceso de aprendizaje conceptual, Roig y sus colegas (Roig, Llinares, & Penalva, 2012) identificaron tres momentos característicos. En el primero los estudiantes construyen y organizan un conjunto de registros relativos a los efectos de las actividades realizadas (momento de proyección). En el segundo los alumnos abstraen alguna regularidad en los conjuntos de relaciones anteriores, esto es, el concepto de recta tangente vinculado a la situación en la que se ha generado, coordinando y comparando los diferentes registros (momento de reflexión). Y finalmente, en el tercer momento los estudiantes son capaces de aplicar en diferentes situaciones la regularidad identificada, es decir, el concepto de recta tangente (momento de anticipación local), lo que podemos considerar como evidencia de la tematización del concepto de recta tangente.

Teniendo en cuenta estas referencias generamos una descomposición genética del concepto de recta tangente como un conjunto de construcciones mentales cada vez más sofisticadas que un estudiante debería desarrollar para alcanzar su comprensión en el nivel de Bachillerato (Orts, Llinares, y Boigues, 2015). Sin embargo, esta caracterización de una progresión en el aprendizaje depende de la enseñanza, por lo que esta descomposición genética debe ser referencia para fundamentar el diseño de la instrucción matemática. Desde estas referencias generamos la siguiente pregunta de investigación,

* ¿Cómo estudiantes de Bachillerato aprenden el concepto de recta tangente en un entorno de aprendizaje diseñado considerando una trayectoria de aprendizaje y teniendo en cuenta las fases del aprendizaje conceptual?

metodología

Participantes y contexto

El experimento de enseñanza se realizó con 11 alumnos de primer curso de Bachillerato (16-17 años) de la modalidad de Ciencias y Tecnología distribuidos en cinco grupos (cuatro parejas y un trío). Las parejas se codificaron como GA (formada por los alumnos Ad y An), ES (formada por los estudiantes E y S), SK (formada por S y K) y OM (formada por O y M). El trío fue codificado como grupo TRES y estaba integrado por A, J y M. A los alumnos se les introdujo el concepto de derivada como muestran los libros de texto a partir de su definición como límite del cociente incremental. Así, se interpretó analíticamente la derivada como la tasa de variación instantánea y geométricamente como la pendiente de la recta tangente (usando la concepción cartesiana sin definir la recta tangente). Luego, participaron en un experimento de enseñanza de tres sesiones diseñado ad hoc con el objetivo de desarrollar el significado de recta tangente y la coordinación entre las diferentes concepciones (cartesiana, euclídea y leibniziana) que pudiera llevar a la tematización del concepto de recta tangente.

Experimento de Enseñanza

En primer lugar generamos una descomposición genética (DG) del concepto recta tangente a una curva como descripción de una progresión en el aprendizaje (Orts et al, 2015). Para ello, integramos información desde un análisis epistemológico del concepto que nos ha permitido identificar tres concepciones a lo largo de la historia (concepción euclídea -recta tangente como aquella recta que toca en un punto sin cortar la gráfica de la función-; concepción cartesiana -recta tangente como límite de las rectas secantes-; y concepción leibniziana -consideramos la curva formada por infinitos segmentos y al prolongar el segmento en el que se encuentra el punto obtenemos la recta tangente-), desde un análisis curricular (considerando cómo se presenta la recta tangente en los libros de texto) y desde un análisis cognitivo (síntesis de las investigaciones previas junto con un cuestionario piloto contestado por un grupo de alumnos de Bachillerato).

En segundo lugar, diseñamos un conjunto de tareas instruccionales usando el programa Geogebra a partir de la descomposición genética con el objetivo de favorecer la tematización del esquema de recta tangente apoyando la transición entre la concepción leibniziana y la cartesiana mediante la visualización permitiendo crear oportunidades para superar los obstáculos derivados de la concepción euclídea. El experimento de enseñanza constaba de 3 sesiones.

La primera sesión consistió en cuatro actividades que pretendían mostrar las limitaciones de la concepción euclídea. En concreto, se pedía identificar gráficamente (i) la recta tangente a una función que la cortaba en más de un punto, (ii) la recta tangente a un función en un máximo relativo, (iii) la recta tangente a otra recta y (iv) la recta tangente en un punto anguloso. Al final de esta sesión hubo una puesta en común sobre las dificultades y la necesidad de definir qué es la recta tangente. En la segunda sesión se introdujo la concepción leibniziana. Para ello, se propusieron actividades consistentes en la utilización del comando zoom de Geogebra mediante el cual se estudiaba la linealidad local de varias funciones en diferentes puntos, incluyendo puntos angulosos. Al final de esta sesión se definió la recta tangente desde la concepción leibniziana, como aquella recta que mejor aproxima localmente una función. A continuación se realizó una sesión grupal en la que se relacionaba la concepción leibniziana y la cartesiana. Geogebra permite visualizar de forma dinámica, mediante el uso de un deslizador por ejemplo, cómo las rectas secantes tienden a la recta tangente, aquella que se ha definido previamente. Así, podemos obtener la ecuación de la recta tangente a partir de la ecuación punto-pendiente, pues dicha recta pasa por el punto de tangencia (a, $f(a)$) y tiene como pendiente el límite de las pendientes de las rectas secantes, esto es, el límite de los cocientes incrementales (la derivada de la función en el punto considerado). Por último se realizaron varias actividades de cálculo analítico de la recta tangente. La tercera sesión consistió en cinco actividades cuyo objetivo era tematizar el esquema de recta tangente. Las actividades pedían (i) obtener analíticamente la ecuación de la recta tangente en varios puntos, (ii) identificar razonadamente (gráficamente o analíticamente) la recta tangente a una función en un punto de inflexión, (iii) obtener la recta tangente paralela a otra recta dada, (iv) obtener el valor de un parámetro para que las rectas tangentes a una función en dos puntos diferentes fueran paralelas y (v) obtener el valor aproximado de una función en un punto cercano a otro del que se conoce su imagen y su derivada.

Las tres sesiones del experimento fueron grabadas con el programa CamStudio (www. http://camstudio.org/) que permite registrar tanto las acciones realizadas en el ordenador como los comentarios realizados por los estudiantes.

Análisis

Los datos de esta investigación son las transcripciones de las interacciones entre los alumnos durante la resolución de las actividades y los productos generados al manipular los applets en el ordenador al resolver las tareas. Consideramos como unidad de análisis las expresiones verbales junto con lo registrado en el ordenador indicando el uso de los elementos matemáticos por parte de los estudiantes (Clement, 2000; Goldin, 2000). El proceso inductivo de análisis realizado a los datos procedentes de los diferentes grupos y el análisis intercasos posterior nos ha permitido identificar características del proceso de aprendizaje de la recta tangente Estas características reflejan tres momentos en el proceso de aprendizaje conceptual de los estudiantes: momento de proyección, momento de reflexión y momento de anticipación local.

RESULTADOS

A partir del análisis de las respuestas de los estudiantes, hemos identificado las progresiones en el aprendizaje generado (Clements y Sarama, 2004) permitiéndonos establecer características del aprendizaje del concepto de recta tangente, estableciendo tres perfiles del aprendizaje del concepto de recta tangente.

El primer perfil viene caracterizado porque los estudiantes experimentan con casos particulares lo que les permite identificar de manera gráfica la recta tangente (Grupo GA). Sin embargo, estos estudiantes no evidencian comprender la recta tangente como el límite de las rectas secantes a una función en el punto considerado (concepción cartesiana). Los estudiantes con estas características usan el registro gráfico pero tienen dificultades en el registro analítico. Este grupo de estudiantes parecen usar la idea de recta tangente como aquella recta de mínimo contacto con una cónica (toca pero no corta) y, como consecuencia, tiene un solo punto en común con la curva (concepción euclídea de forma local) ya que resuelven las actividades por tanteo numérico sin utilizar métodos analíticos-algebraicos. Por último, relacionan la idea de rectas paralelas con tener pendientes iguales.

Así por ejemplo, en la actividad 3 de la sesión 3, que pide proporcionar una recta tangente paralela a una dada ($y=-2x+1$), los dos estudiantes que conforman la pareja en este perfil no saben obtener analíticamente la ordenada en el origen de la recta ni el punto de tangencia. Estos estudiantes solo saben que la recta buscada será de la forma y=-2x+n. Para obtener la ecuación recurren a un método gráfico de tanteo. Prueban primero con la recta tangente de ecuación $y=-2x+3$ y ven que no es tangente (Figura 1a). A continuación prueban con la recta $y=-2x+4$ (Figura 1b) que tampoco es tangente. Como ven que debe estar entre las dos anteriores prueban, en un tercer intento, con la recta $y=-2x+3.5$ (Figura 1c). Por último, obtienen por tanteo la ecuación correcta de la recta tangente $y=-2x+3.75$ (Figura 1d). Finalmente concluyen con un razonamiento que refleja la concepción euclídea:

An: Y esta es la recta tangente porque la toca pero no la corta.
Ad: La toca pero no la corta.

Para comprobar la solución realizan un zoom para acercar (concepción euclídea local) (Figura 1e).

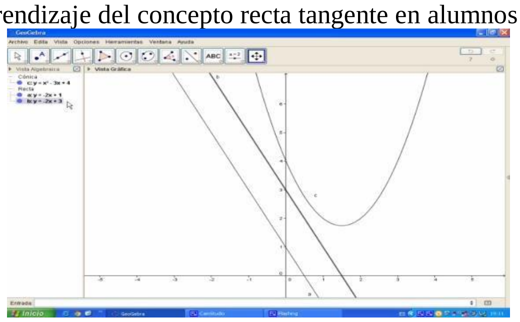


Fig. 1a

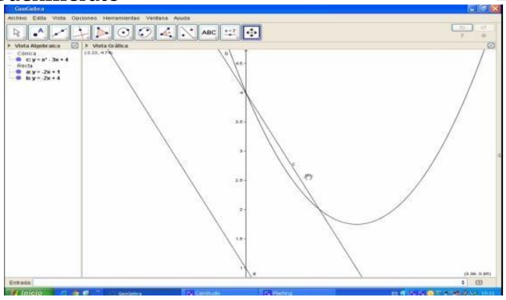


Fig. 1b

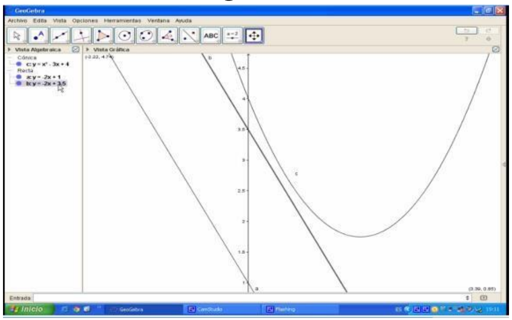


Fig. 1c

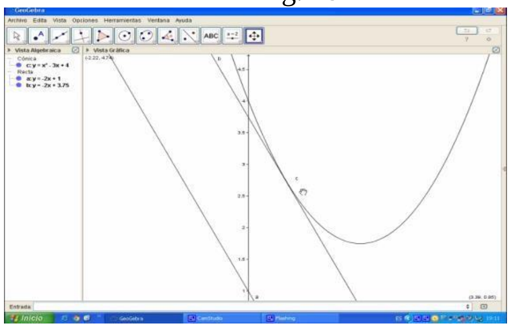


Fig. 1d

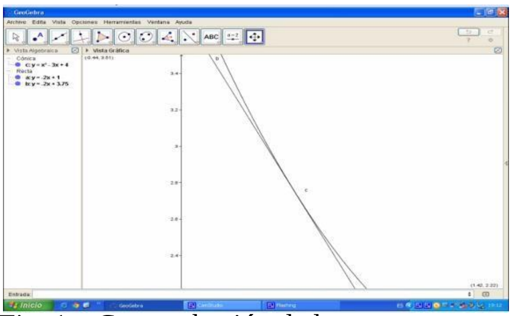


Fig. 1e: Comprobación de la recta tangente obtenida

El segundo perfil (grupos ES y OM) viene caracterizado porque los estudiantes experimentan con casos particulares identificando la recta tangente por métodos gráficos y analíticos, y también por relacionar la idea de rectas paralelas con pendientes iguales. En este perfil los estudiantes empiezan a usar la idea de curva formada por infinitos segmentos, de forma que al prolongar el segmento en el que se encuentra el punto obtenemos la recta tangente (perspectiva leibniziana). Estos estudiantes calculan analíticamente la ecuación de la recta tangente y coordinan los registros gráfico y analítico para comprobar la solución obtenida en cada registro. Además, ahora los estudiantes conocen que la derivada de la función en un punto es la pendiente de la recta tangente y utilizan el punto de tangencia como elemento de apoyo para obtener la ecuación de la recta tangente. Estos estudiantes reconocen que la recta tangente a una función en un punto es el límite de las rectas secantes (concepción cartesiana).

Por ejemplo, el grupo OM resuelve la actividad 1 de la sesión 3, en la que se pide obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $y= x^2$ en el punto de abscisa x=1, sin ninguna dificultad:

M: La derivada de la función será 2x.
O: Y sustituimos en el punto 1 y será 2 por 1 igual a 2.
M: Y la función en el 1.
O: La función en el 1 será 1.
M: Será 1.
M: Ahora sustituimos en la ecuación el punto x por 1 y y también por 1.
O: Pasa por (1,1).
M: Vale, y ahora sacamos la ecuación de la recta que es y=mx+n.
O: Vale, la x será 1, la y será 1 y la m 2.

[están sustituyendo el punto (1,1) en la ecuación y=2x+n]
[hablan mientras parece que están realizando los cálculos, cada uno por separado]

M: n es igual a -1.
O: Sí, m es igual a -1. Entonces la recta tangente sería y es igual a ...

M: 2x - 1.
O: No, ah, sí, sí.
M: Que es la segunda opción. Grado de seguridad, pues un 2 porque hemos hecho todas las operaciones y pensamos que está bien.

Lo que caracteriza la progresión del primer al segundo perfil es que los estudiantes coordinan los registros gráfico y analítico permitiéndoles usar la ecuación punto-pendiente de una recta para obtener la recta tangente en un punto. Por ejemplo, en la actividad 3 de la sesión 3 (*Obtén la recta tangente a* $y = x^2 - 3x + 4$ *paralela a la recta* $y=-2x+1$) los estudiantes obtienen la solución de forma analítica y, posteriormente, utilizan un procedimiento gráfico para comprobar la solución obtenida. Así, tras obtener la recta tangente $y = -2x + 3.75$, activan la vista gráfica y comprueban que la recta es a la vez tangente a la función y paralela a la otra recta dada.

S: La n es 3'75 y la recta es igual a -2x + 3'75.
E: Ponla ahí a ver si ...

[*introducen en Geogebra la función* $h(x) = -2x + 3.75$ *y la representan gráficamente*]

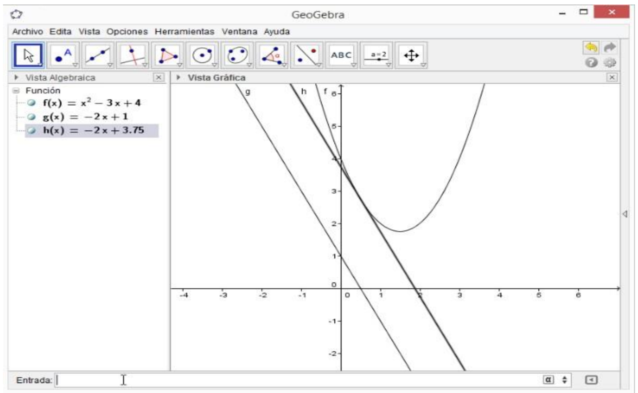
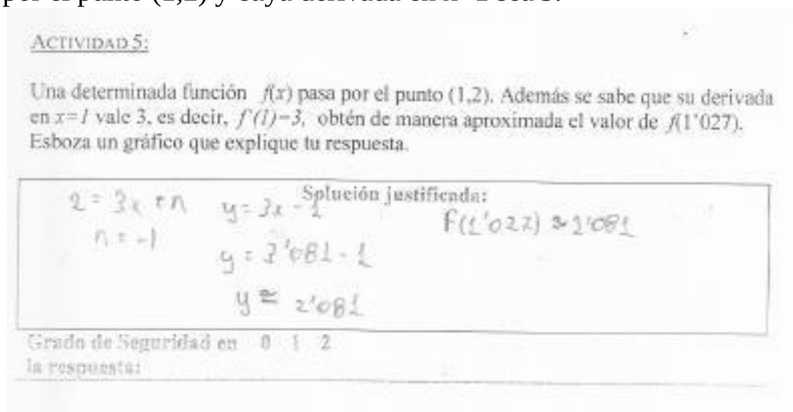


Figura 2. Coordinación de las soluciones analítica y gráfica

Los estudiantes en el tercer perfil (grupos SK y TRES) añaden a las características anteriores el utilizar propiedades de la recta tangente para resolver problemas como que la recta tangente en un extremo relativo es una recta horizontal, y por utilizar la recta tangente para aproximar el valor de una función en el entorno del punto de tangencia. Es decir, por usar la concepción leibniziana ya no solo como la definición de la recta tangente sino como una extensión del concepto. Por ejemplo, en la actividad 5 (sesión 3) centrada en una situación de interpolación (Calcular el valor aproximado de una función en un punto), el grupo TRES calcula la recta tangente y la utiliza para aproximar el valor de la función en un entorno del punto.

A la hora de esbozar un gráfico que explique la situación, estos estudiantes identifican la función original con $f(x) = x^3 + 1$, (realizan una integral sin haber estudiado previamente este concepto), buscando una función que pase por el punto (1,2) y cuya derivada en x=1 sea 3.


ACTIVIDAD 5:

Una determinada función $f(x)$ pasa por el punto (1,2). Además se sabe que su derivada en $x=1$ vale 3, es decir, $f'(1)=3$, obtén de manera aproximada el valor de $f(1'027)$. Esboza un gráfico que explique tu respuesta.

Solución justificada:

$2 = 3x + n$
$n = -1$
$y = 3x - 1$
$y = 3'081 - 1$
$y \simeq 2'081$
$f(1'027) \simeq 2'081$

Grado de Seguridad en la respuesta: 0 1 2

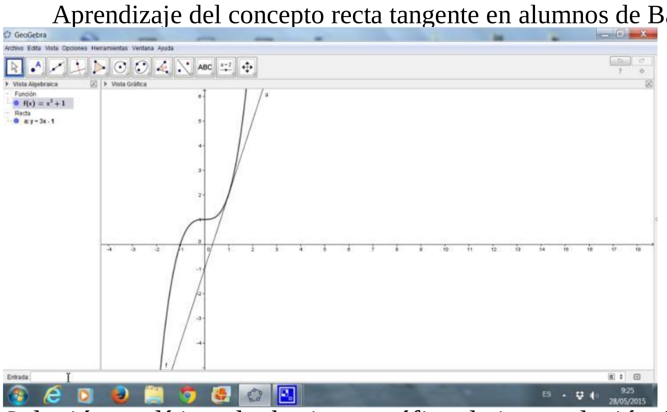


Figura 3. Solución analítica-algebraica y gráfica de interpolación (grupo TRES)

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos analizado cómo estudiantes de Bachillerato participando en un experimento de enseñanza aprenden el concepto de recta tangente. Dicho experimento se ha diseñado según una trayectoria hipotética de aprendizaje con el objetivo de ayudar a la tematización del concepto de recta tangente, entendido como el uso consciente de las propiedades de la recta tangente en diferentes contextos. La actividades propuestas utilizaban Geogebra para facilitar la coordinación de los registros analítico y gráfico y entre las diferentes concepciones de la recta tangente. Desde los resultados, podemos identificar tres perfiles de estudiantes según la manera en que construyen el concepto de recta tangente que muestran distintos momentos en el aprendizaje conceptual (Simon et al, 2004).

El primer perfil refleja los estudiantes en el momento de proyección que construyen el concepto de recta tangente solo a nivel gráfico presentando dificultades en el registro analítico-numérico y en el analítico-algebraico. En el segundo perfil se sitúan los alumnos que se encuentran en el momento de reflexión ya que coordinan los registros gráfico y analítico y las concepciones cartesiana y leibniziana (considerando la recta tangente como límite de las rectas secantes como mejor aproximación lineal). En este perfil los estudiantes han superado el obstáculo epistemológico que supone la concepción euclídea (recta tangente como aquella que toca sin cortar la gráfica de la función). Por último, en el tercer perfil se sitúan los estudiantes que están en el momento de anticipación local ya que usan en modo analítico la idea de recta tangente como mejor aproximación lineal de una función en un punto.

Los resultados obtenidos proporcionan dos tipos de contribuciones. Por una parte, nuevo conocimiento sobre la progresión en el aprendizaje de la recta tangente que aporta información para el diseño de secuencias de enseñanza-aprendizaje que apoyen a los estudiantes a progresar hacia niveles de pensamiento más sofisticado. Esta información puede ser usada para el desarrollo de currículo, la elaboración de libros de texto y el diseño de materiales docentes. Se subraya que las secuencias de enseñanza-aprendizaje deberían proponer actividades encaminadas a que los estudiantes superen el obstáculo epistemológico que supone la concepción euclídea si queremos que construyan un concepto adecuado de recta tangente. Para ello, se pueden presentar gráficas de funciones cuya recta tangente corte en varios puntos y ejemplos de rectas tangentes en puntos de inflexión. Además, actividades como la número 5 de la sesión 3 (ver figura 3) han mostrado ser un buen indicador de cómo los estudiantes han tematizado el esquema de recta tangente previsto en la trayectoria de aprendizaje al usar la concepción leibniziana no solo como definición del concepto sino como extensión de él en un entorno diferente. En segundo lugar, permite aportar información sobre el debate en educación matemática sobre los constructos “trayectoria de aprendizaje” y “progresión en el aprendizaje” en el sentido de integrar, la perspectiva cognitiva que considera las fases en el aprendizaje conceptual en el desarrollo de las trayectorias de aprendizaje (Battista, 2011; Simon, 2014). De esta manera, los resultados empíricos vinculados a una secuencia didáctica determinada (y por tanto a un contexto curricular) permiten considerar en qué medida las características de los perfiles identificados *(la progresión en el aprendizaje*) podrían o no modificarse al introducir cambios en la secuencia instruccional y por tanto empezar a ser considerados como elementos de una *trayectoria de aprendizaje* (Battista, 2011).

Reconocimientos.
Esta investigación ha recibido el apoyo de los Proyectos I+D+i, EDU2014-54526-R del Ministerio de Ciencia e Innovación, España.

Referencias

Aranda. M . C . (2015). *Análisis de la construcción del concepto de integral definida en estudiantes de Bachillerato.* Tesis doctoral. Universidad de Alicante.

Aranda, M.C. y Callejo, M. L. (2015). Perfiles de estudiantes en la comprensión del área de la superficie bajo una curva. En C. Fernández, M. Molina, y N. Planas (eds.) *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 123-131). Alicante: SEIEM

Artigue, M. (1991). Analysis. En D. Tall (ed.). *Advanced mathematical thinking* (pp. 167-198). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Battista, M. (2011). Conceptualizations and Issues Related to Learning Progressions, Learning Trajectories, and Levels of Sophistication. *The Mathematics Enthusiast, 8*(3), 507-570.
Biza, I., Christou, C. y Zachariades, T. (2008). Student perspectives on the relationship between a curve and its tangent in the transition from Euclidean Geometry to Analysis. *Research in Mathematics Education, 10(1), 53-70.*
Biza, I., Nardi, E. y Zachariades, T. (2009a). Teacher beliefs and the didactic contract on visualisation. *For the learning of Mathematics, 29(3),* 31-36.
Biza, I., Nardi, E. y Zachariades, T. (2009b). Teachers' views on the role of visualization and didactical intentions regarding proof. *Proceedings of CERME 6, working group* 2, Lyon.
Biza, I. y Zacharides, T. (2010). First year Mathematics undergraduates' settled images of tangent line. *The Journal of Mathematical Behavior 29,* 218-229.
Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4 (2),* pp. 165-198.
Canul, E., Dolores. C. y Martínez-Sierra (2011). De la concepción global a la concepción local. El caso de la recta tangente en el marco de la convención matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 14(2)*, 173-202.
Castela, C. (1995). Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures: Un exemple concret, celui de la tangente. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15(1), 7-47.
Clement, J. (2000). Analysis of Clinical Interviews: Foundations and Model Viability. En A.E. Kelly y R. A. Lesh (eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education,* (pp. 547-590). London: Lawrence Erlbaum Associates, Pub.
Clements, D.G. y Sarama, J. (2004). Learning Trajectories in Mathematics Education. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 81-89.
Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (ed.), *Advanced Mathemathical thinking*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 95-123.
Goldin, G. A. (2000). A Scientific Perspective on Structured, Task-Based Interview in Mathematics Education Research. En A.E. Kelly y R. A. Lesh (eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*, (pp. 517-546). London: Lawrence Erlbaum Associates, Pub.
Maschietto, M. (2008). Graphic Calculators and Micro-Straightness: Analysis of a Didactic Engineering. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 13,* 207-230.
Milani, R. y Baldino, R. (2002). The theory of limits as an obstacle to infinitesimal analysis. In A. D. Cockburn y E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th PME International Conferenc*e, 3, 345-352.
Orts, A.; Llinares, S. y Boigues, F.J. (2015). Una descomposición genética para el concepto de recta tangente. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.) *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 459-467). Alicante: SEIEM.
Páez, R. y Vivier, L. (2013). Teachers' conception of tangent line. *The Journal of Mathematical Behavior 32*, 209-229.
Piaget, J. y García R. (1984). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia (2da ed.)*. México: Siglo veintiuno editores.
Robles, M.G., Del Castillo, A.G. y Font,V. (2010). La función derivada a partir de una visualización de la linealidad local. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T.A. Sierra (eds.) *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 523-532). Lleida: SEIEM.
Roig, A.I., Llinares, S. y Penalva, M. (2012). Different Moments in the Participatory Stage of the Secondary Students' Abstraction of Mathematical Conceptions. *BOLEMA, Rio Claro, Brasil, v. 26,* n. 44, 1345-1366.
Simon, M. (2014). Hypothetical Learning trajectories in Mathematics Education. En S. Lerman (ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education* (272-275). Dordrecht/London/New York: Springer.
Simon, M.A., Tzur, R., Heinz, K. y Kinzel, M. (2004). Explicating a mechanism for conceptual learning: Elaborating the construct of reflective abstraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(3), 305-329.
Simon, M. A. y Tzur, R. (2004). Explicating the Role of mathematical Tasks in conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 91-104.
Tzur, R. y Simon, M. A. (2004). Distinguishing two stages of mathematics conceptual learning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *2*, 287-304.
Tall (1985). Chors, Tangents and the Leibniz Notation. *Mathematics Teaching*, 112, 48-52.
Vivier, L. (2010). Un milieu théorique pour la notion de tangente dans l'enseignament secondaire. *Annales de Didactique et de Sciencies Cognitives*, 15, 173-199.

CONOCIMIENTO DE FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA SOBRE PROBABILIDAD EN EXPERIENCIAS COMPUESTAS

Pre-service primary school teachers' knowledge of probability in compound experiences

Fernandes, J. A.[a], Gea, M. M.[b], Batanero, C.[b]

[a]Universidad de Minho, [b]Universidad de Granada

Resumen

Este trabajo describe los resultados de la resolución de una tarea sobre probabilidad basada en experiencias compuestas, a través de la extracción de dos bolas de un saco. La tarea se resuelve por 59 futuros profesores que cursan la Licenciatura de Educación Básica en Portugal, con formación previa sobre el tema. Los resultados muestran diversas dificultades de los futuros profesores en la resolución de la tarea, algunas de las cuales se describen en la literatura de investigación, tales como comparar probabilidades de experiencias simples, considerar la reposición o no apreciar el orden de los resultados de las experiencias.

Palabras clave: *probabilidad, experiencias compuestas, futuros profesores en educación primaria, conocimiento del profesor.*

Abstract

This study describes the resolution of a task in probability based on compound experiments involving the drawing of two balls from a bag. The task is resolved by 59 prospective teachers that are taking the Graduation in Elementary Education in Portugal, who had already studied the topic of Probability within the course. The results show many teachers' difficulties in solving the task, some of which are reported in the literature, such as consider probabilities in simple experiments, replacement of favourable and/or possible cases or no consideration of the order in the results.

Keywords: *probability, compound experiments, prospective teachers of primary school, knowledge of teacher.*

INTRODUCCIÓN

La estadística y la probabilidad se han incorporado a los programas de enseñanza básica (6 a 12 años) de muchos países, desde hace muy poco tiempo, entre los cuales se encuentra Portugal (Ministério da Educação, 2007; 2013). Esta reciente incorporación de su enseñanza en las etapas iniciales de escolaridad ha motivado nuevos estudios de investigación, completando líneas de investigación ya existentes en las etapas de secundaria y nivel superior, aportando resultados de gran interés en cuanto a los tres grandes focos de estudio en Didáctica de la Matemática como son el profesor, el alumno, el saber, y las relaciones entre ellos. El trabajo que presentamos se centra en el conocimiento que el futuro profesor posee sobre probabilidad en experiencias compuestas, que serán contenidos que tendrá que impartir en un futuro inmediato.

El estudio de la probabilidad en experiencias compuestas forma parte de lo que se denomina cultura estadística de cualquier ciudadano, entendida en términos de capacidad del individuo para interpretar de modo crítico la información que encontramos en nuestra vida diaria, valorando la utilidad de las herramientas que la estadística pone a nuestro servicio para tomar decisiones con

Fernandes, J. A., Gea, M. M., y Batanero, C. (2016). Conocimiento de futuros profesores de Educación Primaria sobre probabilidad en experiencias compuestas. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 165-172). Málaga: SEIEM..

toda la información disponible (Wallman, 1993). Esta cultura estadística adquiere mayor relevancia en el caso de los profesores, que se encargan de la enseñanza de estos conceptos, al nivel que determine la institución o sistema educativo (Watson y Moritz, 2002).

En diversas investigaciones se ha puesto de manifiesto la dificultad que entraña el cálculo de probabilidades en experiencias compuestas, en comparación con el cálculo de probabilidades en experiencias simples (e.g., Fernandes, 1999; Fischbein, Nello y Marino, 1991; Polaki, 2005). En concreto, en la investigación de Contreras, Díaz, Batanero y Cañadas (2013) se muestra la dificultad de futuros profesores de enseñanza secundaria y bachillerato de definir los conceptos de probabilidad simple y probabilidad condicional. Como indican los autores, estos resultados son preocupantes ya que afectan a sus decisiones sobre la enseñanza de estos conceptos.

En este trabajo abordamos esta problemática, mediante la resolución de una tarea en el contexto de extracción de bolas de un saco por futuros profesores de educación básica.

MARCO TEÓRICO

El análisis del conocimiento de los futuros profesores sobre probabilidad en experiencias compuestas se analiza bajo el marco teórico desarrollado por Ball y colaboradores (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill, Ball y Schilling, 2008) que, en comparación con otras perspectivas, describe con gran detalle el conocimiento matemático que el profesor requiere poner en marcha para la enseñanza. Según este marco teórico, el profesor debe coordinar dos dominios, uno referido al contenido de la materia de enseñanza y otro referido a su enseñanza, en sí misma. En este trabajo nos referimos al primero de estos dominios, cuyas componentes se describen a continuación:

El *conocimiento común del contenido*, que se refiere al conocimiento que cualquier persona posee después de haber recibido formación sobre el tema, por lo que se pretende que nuestros estudiantes lo adquieran tras el proceso de enseñanza y aprendizaje del tema.

El *conocimiento avanzado del contenido* (denominado por los autores como conocimiento en el horizonte matemático), se refiere a contenidos sobre el tema de un nivel superior que los implicados en el conocimiento común del contenido, así como a las relaciones del tema con otras disciplinas.

El *conocimiento especializado del contenido* se vincula al proceso de enseñanza y aprendizaje del tema e implica el diseño y la secuenciación de tareas, desempeño de diferentes métodos de resolución de las mismas, así como organizar la secuenciación de contenidos en el proceso de instrucción.

En nuestro estudio nos basamos en la primera de estas componentes, ya que los resultados de nuestro análisis se refieren a las respuestas de los futuros profesores a una tarea elemental de probabilidad en experiencias compuestas y los conocimientos requeridos para su resolución no son complicados.

ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN

Las investigaciones sobre cálculo de probabilidad en experiencias compuestas han mostrado que este contenido resulta más complicado para los estudiantes que el de probabilidad en experiencias simples (Fernandes, 1999, 2001; Fischbein, Nello y Marino, 1991; Polaki, 2005; Estrada, Díaz y de la Fuente, 2006; Contreras et al., 2013). Estos contenidos están relacionados ya que, si por ejemplo analizamos experiencias compuestas independientes, como puede ser el lanzamiento de una moneda dos veces consecutivas, el cálculo de la probabilidad de obtener dos caras (1/4) puede calcularse mediante el producto de la probabilidad de obtener cara (1/2) en cada uno de los dos lanzamientos (1/2×1/2). Sin embargo, la probabilidad compuesta exige un nivel más avanzado de conocimientos que el de probabilidad simple, entre otros, el espacio muestral producto de los espacios muestrales simples asociados. Siguiendo con el ejemplo anterior, si pedimos calcular la probabilidad del suceso “obtener una cara en los dos lanzamientos”, el producto de las probabilidades simples en este caso no es una estrategia correcta, pues debemos considerar los dos casos favorables al suceso (C+ y +C).

Fernandes (1999) observó muchas dificultades de los estudiantes de 8º y 11º curso (13 años y 16 años, respectivamente) en la comparación de probabilidades basadas en experiencias compuestas, en diferentes tareas como la extracción de bolas de un saco y el lanzamiento de monedas y dados. En su estudio, el porcentaje de respuestas correctas de los alumnos varía mucho según el curso escolar y la tarea propuesta. El éxito en las tareas de los alumnos de 8º curso varía entre el 12,8% y el 37,7%, mientras que en 11º curso varía entre el 14,3% y el 64,1%. En general, el porcentaje de respuestas correctas fue mayor cuando los alumnos tenían que comparar sucesos con una mayor razón entre casos favorables. Por ejemplo, resultó más fácil en el lanzamiento de dos dados identificar que el suceso “obtener dos números diferentes” es más probable que el suceso “obtener dos números iguales” (el número de casos favorables a uno y otro suceso es de 30 y 6, respectivamente), mientras que resultó más complicado comparar los sucesos “salir un 5 y un 6” y “salir un 5 y un 5” (el número de casos favorables a uno y otro suceso es de 2 y 1, respectivamente). Este mejor desempeño también se observó en una tarea basada en el lanzamiento de tres monedas, donde se pedía comparar la probabilidad de los sucesos “obtener resultados iguales” y “obtener resultados diferentes en dos de las tres monedas” (el número de casos favorables a uno y otro suceso es de 2 y 6, respectivamente), en comparación con los sucesos “obtener cara en dos monedas” y “obtener sólo una cara” (el número de casos favorables a uno y otro suceso es de 1 y 2, respectivamente).

Otra experiencia muy interesante de la investigación de Fernandes (1999) fue la extracción de dos bolas de un saco (con igual cantidad de bolas blancas que negras: 2 bolas blancas y 2 bolas negras), sin reposición, donde se obtuvieron porcentajes muy bajos de respuestas correctas (14,7% en 8º curso y 28,7% en 11º curso). Se pedía decidir sobre cuál de los siguientes sucesos tenía mayor probabilidad: “salir dos bolas blancas” y “salir bola blanca y negra”; o bien, si poseían igual probabilidad. Esta tarea, con igual número de bolas de ambos colores, difiere de la del presente estudio en cuanto al total de bolas y la cantidad de bolas blancas que negras: los estudiantes que respondieron incorrectamente indicaron que ambos sucesos poseen igual probabilidad, justificando que el saco se compone de igual número de bolas blancas que negras (razonamiento aditivo) o que los sucesos “obtener bola blanca” y “obtener bola negra” son equiprobables (Lecoutre y Durand, 1988). Los resultados en esta tarea se mantienen en investigaciones desarrolladas con futuros profesores (Fernandes, Batanero, Correia y Gea, 2014), donde el 47,8% justifica su respuesta con cálculos de probabilidades simples, error que también se manifestó en otra tarea referida a la selección de dos personas de un grupo.

Otra variable analizada en las investigaciones sobre experiencias compuestas es la reposición y no reposición en el experimento. Fischbein y Gazit (1984) analizaron las respuestas de estudiantes de entre 10 y 13 años de edad en una secuencia de enseñanza sobre probabilidad, observando mayor éxito en las tareas con reposición que en aquellas sin reposición. Los autores se refieren a la complejidad del espacio muestral resultante en uno y otro caso. Por ejemplo, si experimentamos con un saco sin reposición, de la primera extracción resulta que en el saco queda una bola menos, mientras que si actuamos con reposición, para la segunda extracción volvemos a disponer de las mismas bolas que cuando efectuamos la primera extracción. Los autores observan cómo los estudiantes no obtienen correctamente el espacio muestral en experiencias sin reposición y calculan las probabilidades comparando el número de casos favorables antes y después de la primera extracción en vez de comparar los resultados favorables con el total de resultados posibles. Resultados similares se obtienen en otras investigaciones (Fernandes, Correia y Contreras, 2013) e incluso en investigaciones con futuros profesores (Fernandes et al., 2014).

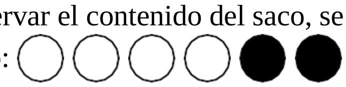
Por último, el orden en que se obtienen los resultados de la experiencia compuesta influye en el cálculo de probabilidades. Por ejemplo, en la extracción de dos bolas de un saco en el que hay dos bolas blancas y dos negras, con o sin reposición, el orden de los resultados es irrelevante si se evalúa la probabilidad de obtener dos bolas de igual color, pero sí influye cuando evaluamos el suceso “obtener una bola de cada color” ya que, en este caso, podemos obtener la bola blanca en la primera extracción o en la segunda. Fernandes et al. (2014) observaron este error en casi la mitad de los futuros profesores de la muestra (47,8% de futuros profesores) en el desempeño de tareas de extracción de bolas y selección de dos personas de un grupo.

metodología

En este estudio se trata de evaluar el conocimiento de futuros profesores de enseñanza básica (6 a 12 años) en probabilidad en experiencias compuestas mediante el análisis de sus respuestas a una tarea basada en la extracción de bolas de un saco. La muestra está compuesta por 59 estudiantes (designados en el trabajo con códigos A1 hasta A59) de segundo curso de la Licenciatura en Educación Básica de una universidad del norte de Portugal, que poseen una formación en matemáticas muy variada al acceder a la universidad, a saber: un 32% en el curso Científico-Humanístico, un 26% en el curso de Ciencias Sociales, un 22% en un curso profesional y un 22% en la enseñanza básica. Antes de la aplicación de la tarea, los estudiantes han estudiado matemáticas en la universidad en cuatro asignaturas, entre ellas, una en la cual se estudió el tema de probabilidad. Según las percepciones de los estudiantes recogidas en la hoja de respuestas de la tarea, la mayoría manifiesta tener dificultad con las matemáticas (45,8%), que en algunos casos califican de “gran dificultad” (18,6%); algunos estudiantes manifiestan tener poca dificultad (30,5%) o ninguna (1,7%).

Los estudiantes responden a la tarea (Figura 1) una vez acabada la enseñanza sobre el tema de probabilidad (asignatura: Números y probabilidad), y se pretende que calculen las probabilidades de dos sucesos dependientes (“obtener dos bolas blancas” y “obtener una bola de cada color”) y que comparen sus resultados.

En un saco hay cuatro bolas blancas y dos negras, como se muestra en el siguiente dibujo. Las bolas son todas iguales excepto en el color. Sin observar el contenido del saco, se sacan de una vez dos bolas del saco:

Saco: 

¿Qué es más probable obtener: “dos bolas blancas” o “una bola blanca y una bola negra”, o son sucesos igualmente probables? Justifica tu respuesta.

Figura 3. Tarea de propuesta a los futuros profesores.

El experimento que se analiza en este trabajo se basa en una extracción de bolas sin reposición, ya que el experimento “sacar dos bolas de una vez” equivale a “sacar dos bolas sucesivamente sin reposición”. A continuación, mostramos el análisis de los resultados de los futuros profesores a la tarea propuesta, según las tres subtareas que la conforman:

Subtarea 1. Cálculo de la probabilidad: P(“obtener dos bolas blancas”) = $4/6 \times 3/5 = 12/30= 6/15$;

Subtarea 2. Cálculo de la probabilidad: P(“obtener una bola blanca y una negra”) = $(4/6 \times 2/5) \times 2 = 16/30= 8/15$; y

Subtarea 3. Comparación de los resultados de las subtareas 1 y 2 para decidir que el suceso “obtener una bolas blanca y una bola negra” es el más probable.

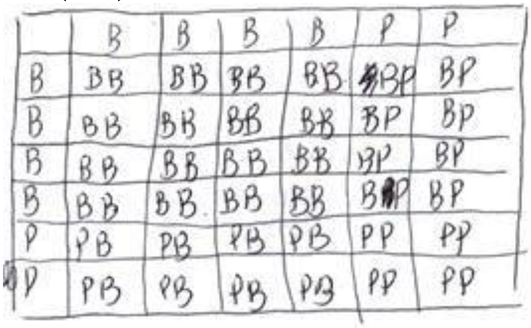
ANÁLISIS DE RESULTADOS

Las respuestas de los futuros profesores a la tarea de investigación (Figura 1), se describen a continuación, atendiendo a los resultados en cada una de las subtareas que la conforman. Las categorías de nuestro análisis atienden a los sesgos descritos en investigaciones previas, explicados en el apartado de antecedentes como son: la reposición, el cálculo de probabilidades simples, la combinación de probabilidades simples, así como no considerar el orden de los resultados en el experimento. Son pocos los casos en que no se calculan probabilidades.

El índice de respuestas correctas en la primera subtarea es bajo (39% de los futuros profesores) y los errores más comunes se deben a no considerar la no reposición en el experimento y al uso de probabilidades simples, que en algunos casos combinan mediante sumas; no encontramos respuestas referidas al orden de los resultados del experimento ya que, en este caso, al tratarse de dos bolas blancas, los futuros profesores han percibido correctamente que la cuestión del orden no es relevante.

La estrategia del cálculo de probabilidades simples es la más utilizada, como se muestra el siguiente ejemplo, en el que A15 calcula la probabilidad de obtener dos bolas blancas a partir del cálculo de obtener una bola blanca: “P(obtener dos bolas blancas) = 4/6 = 2/3” (A15). Otro futuro profesor resolvió la subtarea mediante el cálculo de probabilidades simples, mostrando un razonamiento más avanzado que los anteriores: “Es más probable obtener dos bolas blancas, porque la probabilidad de obtener dos bolas blancas es de: P(2 bolas blancas) = 4/6 + 3/5 = 20/30 + 18/30 = 38/30” (A19). En esta situación, A19 calcula correctamente las probabilidades de cada una de las dos bolas blancas, pero comete el error de combinarlas mediante la suma en lugar de realizar su producto. Este tipo de error, de naturaleza aditiva, también fue observado en investigaciones previas como Fernandes (1999), Green (1982) y Fernandes y Barros (2005), esta última investigación centrada en el conocimiento de futuros profesores de enseñanza básica.

También es elevado el número de respuestas en que no se considera la no reposición en el experimento, como se muestra en el siguiente ejemplo, donde A34 elabora una tabla de doble entrada sin percatarse de que la bola extraída en la primera extracción ya no vuelve al saco: “La probabilidad de sacar dos bolas blancas o una bola blanca y una negra es igual, pues según la tabla de doble entrada [Figura 2] se verifica que P(BB) = 16/36 = 4/9” (A34).



	B	B	B	B	P	P
B	BB	BB	BB	BB	BP	BP
B	BB	BB	BB	BB	BP	BP
B	BB	BB	BB	BB	BP	BP
B	BB	BB	BB	BB	BP	BP
P	PB	PB	PB	PB	PP	PP
P	PB	PB	PB	PB	PP	PP

Figura 2. Tabla de doble entrada elaborada por A34 para la resolución de la tarea

En la Tabla 1 se resumen los resultados obtenidos por los futuros profesores en la subtarea 1, que en su mayoría utilizan cálculos para responder a la tarea; sólo el 22% utiliza el diagrama de árbol (11 futuros profesores en las respuestas correctas y 2 que incorrectamente consideran la reposición) y el 5,1% la tabla de doble entra (sólo 3 futuros profesores que no consideran la no reposición en el experimento) para obtener el espacio muestral.

Tabla 4. Frecuencia (y porcentaje) de estrategias utilizadas por los futuros profesores en la subtarea 1

Estrategia utilizada	Frecuencia (%) de futuros profesores
Respuesta correcta	23(39)
Reposición	15(25,4)
Cálculo de probabilidades simples	16(27,1)
Suma de probabilidades	1(1,7)
No calcula probabilidades	4(6,8)

El porcentaje de respuesta correcta a la subtarea 2 desciende, aunque no mucho (del 39% en la subtarea 1 al 37,3% en la subtarea 2). Los futuros profesores hacen uso de las mismas estrategias que utilizaron para resolver la subtarea 1, añadiendo la estrategia incorrecta de no considerar el orden de los resultados en el experimento, cuyos casos se añaden a la categoría de reposición, ya que los alumnos suelen cometer ambos fallos, como se muestra en el siguiente ejemplo: “P(obtener una bola blanca y otra negra) = P(1ª bola blanca) × P(2ª es bola negra) = 4/6 × 2/6 = 8/36 = 2/9” (A8). Esta estrategia es la más utilizada por los futuros profesores (39% del total de futuros profesores) donde el 69,6% de los futuros profesores que la usan no consideran la no reposición en el experimento y el 39,1% no consideran el orden de obtener bola blanca en la primera o segunda extracción.

En menor medida encontramos futuros profesores que calculan probabilidades simples para obtener el resultado, donde dos de ellos obtienen la probabilidad a través de la suma de las respectivas probabilidades simples.

En la Tabla 2 se resumen los resultados obtenidos por los futuros profesores en la subtarea 2, donde observamos que resultó incorrecta por la mayoría de futuros profesores. Los futuros profesores, en su mayoría, utilizan cálculos para responder a la tarea; sólo el 22% utiliza el diagrama de árbol (10 futuros profesores en las respuestas correctas y 3 que incorrectamente consideran la reposición y/o el orden) y el 5,1% la tabla de doble entra (sólo 3 futuros profesores que consideran la reposición y/o el orden) para obtener el espacio muestral.

Tabla 2. Frecuencia (y porcentaje) de estrategias utilizadas por los futuros profesores en la subtarea 2

Estrategia utilizada	Frecuencia (%) de futuros profesores
Respuesta correcta	22(37,3)
Reposición y/o orden	23(39)
Cálculo de probabilidades simples	9(15,2)
Suma de probabilidades	2(3,4)
No calcula probabilidades	3(5,1)

Podemos observar un descenso de casi a la mitad de futuros profesores que utilizan como estrategia el cálculo de probabilidades simples en la subtarea 2, en comparación con la subtarea 1, hecho que puede ser debido a que los futuros profesores perciben mejor la necesidad de considerar los sucesos relacionados, por lo que tienden a combinar las probabilidades de ambas extracciones. Aún así, el índice de éxito en las dos subtareas es muy similar, por lo que los futuros profesores muestran dificultades en el desempeño de la probabilidad en estas experiencias compuestas.

En la resolución de la subtarea 3, el porcentaje de futuros profesores que contestan correctamente es similar al de las subtareas anteriores aunque un poco inferior (32,2% de futuros profesores), lo que muestra que los futuros profesores basan su elección en los resultados de las subtareas 1 y 2, por lo que sus conocimientos sobre probabilidad en experiencias compuestas se muestran insuficientes.

La mayoría de futuros profesores eligen la opción incorrecta de mayor probabilidad de obtener dos bolas blancas. Utilizan varias razones en sus argumentos pero, la mayor parte de ellos (59,4%), se refieren a la cantidad de bolas blancas en el saco, por lo que reducen la complejidad de la situación planteada al caso de probabilidades simples, como se muestra en el siguiente ejemplo: “Es más probable obtener dos bolas blancas porque en el saco hay más bolas blancas que negras, por lo que la probabilidad de obtener blanca es dos veces mayor que la de obtener negra: P(B) = 2P(N)” (A40). Este error también se observa en A9, que calcula explícitamente las probabilidades simples de los sucesos “obtener bola blanca” y “obtener bola negra”: “Bolas blancas = 4/6; Bolas negras = 2/6; Respuesta: Es más probable obtener dos bolas blancas porque existe un mayor número de bolas blancas que de bolas negras” (A9).

En otros casos, los futuros profesores optan por la opción de dos bolas blancas por errores que cometen en los cálculos, o por haber usado estrategias erróneas en las subtareas 1 o 2, como el ejemplo que se muestra a continuación de A58, quien no considera el orden:

P(obtener dos bolas blancas) = 4/6 = 2/3

P(obtener una bola blanca y una bola negra) = 4/6 × 2/5 = 8/30 = 4/15

Respuesta: Es más probable obtener dos bolas blancas que obtener una bola blanca y una bola negra pues 4/6 > 4/15.

Finalmente, los futuros profesores eligen la opción de que los dos sucesos son igualmente probables, principalmente porque consideran la reposición en el experimento. Un ejemplo es A11, que a pesar de utilizar el diagrama de árbol para sus cálculos, no evita que concluya erróneamente que los dos sucesos son igualmente probables: “P(obtener bolas blancas) = 4/6 × 4/6 = 16/36 = 4/9; P(una bola blanca y una bola negra) = 4/6 × 2/6 + 4/6 × 2/6 = 8/36 + 8/36 = 16 / 36 = 4/9; Respuesta: Luego son igualmente probables ya que ambos tienen igual probabilidad P = 4/9”. El error de la reposición le conduce a un error en la construcción del propio diagrama (Figura 3).

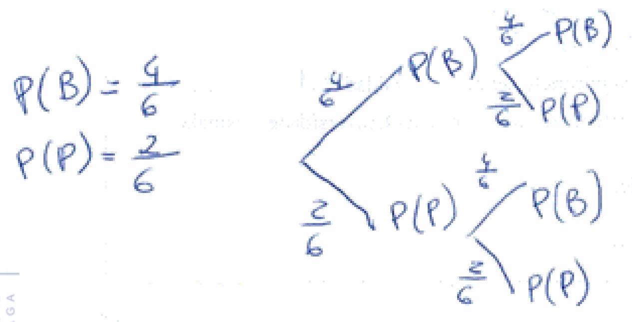


Figura 3. Diagrama de árbol del futuro profesor A11

En la Tabla 3 se resume los resultados de las respuestas de los futuros profesores a la subtarea 3, Podemos observar que la mayor elección se corresponde con el suceso “obtener dos bolas blancas”, mientras que la elección de que los sucesos son igualmente probables es la menos elegida, en contra de lo ocurrido en la investigación de Fernandes (1999) con alumnos de 8º y 11º curso, donde el saco se componía de igual número de bolas blancas y negras.

Tabla 3. Frecuencia (y porcentaje) de respuestas de los futuros profesores en la subtarea 3

Respuesta	Frecuencia de futuros profesores (%)
Es más probable obtener dos bolas blancas	32(54,2)
Es más probable obtener dos bolas de cada color	19(32,2)
Los sucesos son igualmente probables	7(11,9)
No responde	1(1,7)

CONCLUSIÓN

En el estudio que presentamos se evalúan las respuestas de futuros profesores de enseñanza básica a una tarea sobre probabilidad en experiencias compuestas. La mayoría muestra dificultades en identificar un suceso como más probable según la extracción de bolas de un saco. Los principales errores son debidos a la dificultad en relacionar probabilidades de experiencias simples con probabilidades en experiencias compuestas, no considerar la no reposición en el experimento o no atender al orden para identificar los resultados de la experiencia compuesta. Todos estos contenidos forman parte del conocimiento común del contenido que los profesores debiesen poseer, en el sentido de Hill, Ball y Schilling (2008), ya que se refieren a conocimientos básicos y para lo que nuestros futuros profesores debiesen estar formados para su futura labor docente.

Las dificultades observadas en estudios previos (Fernandes, 1999, 2001; Fischbein, Nello y Marino, 1991; Green, 1982; Polaki, 2005) fueron confirmadas en el presente estudio. En este caso, la mayoría eligió como suceso más probable obtener dos bolas blancas que dos bolas de diferente color de un saco con el doble de bolas blancas que negras (4 bolas blancas y 2 bolas negras). Esta elección se apoya tanto en cálculos incorrectos de probabilidades como en concepciones incorrectas sobre probabilidad en experiencias compuestas. Aunque no siempre se manifiesta de modo explícito, se deduce, principalmente, un razonamiento aditivo en la decisión de considerar más probable obtener dos bolas blancas, basado en la cantidad de bolas del saco. Este razonamiento lleva asociadas estrategias como el cálculo y la comparación de probabilidades en experiencias simples.

La elección de que ambos sucesos ("obtener dos bolas blancas" y "obtener una bola de cada color") son igualmente probables fue poco elegida por los futuros profesores. De algún modo, confirmamos la hipótesis de que la composición de bolas del saco es una variable fuertemente decisiva en la comparación de probabilidades compuestas ya que, la cuestión de la composición de bolas del saco en nuestro estudio se basó en resultados en estudios previos como el de Fernandes (1999), donde cerca de tres de cada cuatro alumnos de 8º y 11º curso eligieron como igualmente probables los sucesos "obtener dos bolas blancas" y "obtener una bola de cada color" en un saco con 2 bolas blancas y 2 negras. Aunque el presente estudio se compone de futuros profesores de enseñanza básica y no tanto de estudiantes, como en Fernandes (1999), el estudio que presentamos en este trabajo ayuda a confirmar nuestra hipótesis. Así es que, los futuros profesores se centran en el mayor número de bolas blancas en relación al número de bolas negras para decidir su elección, concluyendo equivocadamente que es más probable obtener dos bolas blancas.

Con todo ello, recomendamos una mejor preparación en probabilidad en experiencias compuestas, principalmente en el profesorado encargado de impartir estos conceptos, donde sería adecuado discutir con ellos cada uno de los objetos matemáticos implicados en su conocimiento (lenguaje, definiciones, tipos de situaciones-problema, procedimientos, propiedades y tipos de argumentación) así como los sesgos de razonamiento descritos en el presente trabajo. Todo ello favorecerá el desarrollo del conocimiento común del contenido del profesor, en el sentido de Hill, Ball y Schilling (2008). Como sugieren Díaz y de la Fuente (2005), las soluciones erróneas pueden discutirse en clase donde la simulación de las experiencias descritas y el uso de diversas representaciones del lenguaje (diagrama de árbol o tablas de doble entrada, entre otros) pueden contribuir a la mejora de su aprendizaje.

Agradecimientos

Proyecto EDU2013-41141-P (MEC) y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Ball, D. L., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 433-456). Washington, DC.: American Educational Research Association.

Contreras, J. M., Díaz, C., Batanero, C. y Cañadas, G. R. (2013). Definiciones de la probabilidad y probabilidad condicional por futuros profesores. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 237-244). Bilbao: SEIEM

Díaz, C. y de la Fuente, I. (2005). Razonamiento sobre probabilidad condicional e Implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Épsilon, 59*, 245-260.

Estrada, A., Díaz, C. y de la Fuente, E. (2006). Un estudio inicial de sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional en alumnos universitarios. En M. P. Bolea, M. Moreno, M. J. González (Eds.), *Investigación en educación matemática X* (pp. 277-284). Huesca: SEIEM.

Fernandes, J. A. (1999). *Intuições e aprendizagem de probabilidades: uma proposta de ensino de probabilidades no 9.º ano de escolaridade*. Tese de doutoramento, Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Fernandes, J. A. (2001). Intuições probabilísticas em alunos do 8.º e 11.º anos de escolaridade. *Quadrante, XX*(2), 3-32.

Fernandes, J. A., Batanero, C., Correia, P. F. y Gea, M. M. (2014). Desempenho em probabilidade condicionada e probabilidade conjunta de futuros professores do ensino básico. *Quadrante*, *XXIII*(1), 43-61.
Fernandes, J. A., Correia, P. F. y Contreras, J. M. (2013). Ideias intuitivas de alunos do 9º ano em probabilidade condicionada e probabilidade conjunta. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *4*, 5-26.
Fernandes, J. A. y Barros, P. M. (2005). Dificuldades de futuros professores do 1.º e 2.º ciclos em estocástica. In *Actas do V Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática (CIBEM)*, Porto, Portugal: Faculdade de Ciências.
Fischbein, E., Nello, M. S. y Marino, M. S. (1991). Factors afecting probabilistic judgments in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 523-549.
Fischbein, E. y Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, *15*, 1–24.
Green, D. R. (1982). *Probability concepts in 11-16 year old pupils*. Loughborough, UK: Center for Advancement of Mathematical Education in Technology.
Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*, 372-400.
Lecoutre, M. -P. y Durand, J. -L. (1988). Jugements probabilistes et modèles cognitifs: étude d’une situation aléatoire. *Educational Studies in Mathematics*, *19*(3), 357-368.
Ministério da Educação. (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. Lisboa: Autor.
Ministério da Educação. (2014). *Programa de matemática para o ensino básico*. Lisboa: Autor.
Polaki, M. V. (2005). Dealing with compound events. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 191–214). New York, NY: Springer.
Wallman, K. K. (1993). Enhancing statistical literacy: Enriching our society. *Journal of the American Statistical Association*, *88*(421), 1-8.
Watson, J. M. y Moritz, J. B. (2002). School students’ reasoning about conjunction and conditional events. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *33*(1), 59-84..

COMPRENSIÓN DE MEDIDAS DE ASOCIACIÓN EN TABLAS RxC POR ESTUDIANTES DE PSICOLOGÍA

Measures of association in tables RxC for student´s in Psychology

Gustavo R. Cañadas, **Pedro Arteaga, J. Miguel Contreras, María M. Gea**

Universidad de Granada

Resumen

El objetivo de este trabajo fue evaluar la competencia de cálculo e interpretación de las medidas de asociación en tablas RxC en estudiantes universitarios, finalizada una experiencia de enseñanza. Se describe la experiencia desarrollada en un curso reglado de análisis de datos, y la evaluación del aprendizaje en 92 estudiantes de psicología. Se encuentra que la mayoría es capaz de calcular estas medidas en una tarea abierta, con ayuda de Excel, y una proporción alta de estudiantes interpreta el tipo de asociación estadística. Sin embargo, se observa una mayor dificultad en la interpretación probabilística del resultado y en la contextualización del mismo.

Palabras clave: *Tablas RxC, medidas de asociación, cálculo e interpretación, evaluación de la comprensión.*

Abstract

The objective of this research was to evaluate the competence of calculation and interpretation of the measures in association in RxC tables by college students after a teaching experience. The experience developed in a compulsory course of data analysis, and the assessments of learning by 92 students in Psychology are described. The majority of students were able to calculate these measures in an open task, with the help of Excel, and a high proportion of students provided a statistical interpretation of the kind of association. However, there was difficulty in the probabilistic interpretation of the results and its contextualization.

Keywords: *Tables' RxC, measures in association, calculation and interpretation, assessment of understanding.*

Introducción

Las tablas de contingencia son un instrumento de gran utilidad en la presentación y análisis de datos cualitativos, que se utilizan con gran frecuencia en actividades profesionales, donde se estudia si existe asociación entre variables. A pesar de su importancia, el aprendizaje del tema no se encuentra exento de errores y dificultades, que persisten incluso después de la enseñanza (Batanero, Estepa y Godino, 1997). La investigación sobre la comprensión del tema después de la enseñanza es bien escasa y se centra más bien en las estrategias intuitivas de los estudiantes en la interpretación de dichas tablas (Inhelder y Piaget, 1955; Jenkins y Ward 1965).

El objetivo de esta investigación fue analizar la competencia en el cálculo e interpretación de las medidas de asociación en una tabla *RxC* en estudiantes de psicología, después de recibir enseñanza sobre el tema, completando la investigación precedente con resultados de un proceso de instrucción. El interés de realizar este estudio se debe a que no existen investigaciones previas sobre esta comprensión, a pesar de que el estudio de las medidas de asociación en tablas rxc se incluye en la mayoría de las universitarias.

Cañadas, G. R., Arteaga, P., Contreras, J. M. y Gea, M. M. (2016). Comprensión de medidas de asociación en tablas RxC por estudiantes de Psicología. C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 173-180). Málaga: SEIEM.

INVESTIGACIONES PREVIAS

La investigación sobre la asociación estadística se inicia con los trabajos de Inhelder y Piaget (1955), que describen las estrategias usadas en los juicios de asociación en tablas 2x2 (como la mostrada en la Tabla 1) en diferentes edades. Cuando se pide estudiar la asociación entre dos variables *A* y *B* a partir de los datos de la tabla, los razonamientos más elementales se originan en la adolescencia, donde los sujetos usan sólo la celda *a* para juzgar la asociación; es decir, consideran que hay asociación sólo si el número de casos en que se presentan a la vez *A* y *B* es elevado.

Entre los 12 y 15 años, se observa que los alumnos comparan celdas dos a dos, por ejemplo, comparan la celda *a* con la celda *b*, considerando la presencia o ausencia de la variable *B* y manteniendo fija la presencia de *A*. Un nivel posterior sería comprender y distinguir las cuatro situaciones posibles que se muestran en la tabla, considerando como casos favorables a la presencia (ausencia) conjunta de las variables las celdas *a* y *d*, y como casos desfavorables a la asociación entre las variables las celdas *b* y *c*. Finalmente, un razonamiento avanzado establece las relaciones diagonales (*a* y *d* se perciben como favorables a la asociación, mientras que *b* y *c* serían contrarias), comparándolas entre sí o con el total (*a*+*b*+*c*+*d*). Jenkins y Ward (1965) indican que esta última estrategia sólo se puede usar con frecuencias marginales iguales para la variable independiente.

Tabla 5. Esquema de una tabla 2x2

	B	No B	Total
A	a	b	a+b
No A	c	d	c+d
Total	a+c	b+d	

En relación a la enseñanza y aprendizaje del tema, Batanero, Estepa, Godino, y Green (1996) investigan las estrategias intuitivas de los estudiantes. Batanero, Estepa y Godino (1997) describen diferentes concepciones de los estudiantes destacando, entre otras, la concepción causal, por su resistencia incluso después de la enseñanza. Se presenta cuando sólo se considera asociación si puede atribuirse a la presencia de una relación de causa-efecto entre las variables. También se encuentran la concepción determinista (considerar asociación sólo si existe dependencia funcional), la concepción local (confirmar la asociación basándose sólo en un subconjunto de datos del estudio) o la concepción unidireccional (cuando no se admite la asociación inversa), por lo que la asociación negativa se llega a estimar como cero (Erlick y Mills, 1967).

Más recientemente, Cañadas, Díaz, Batanero y Estepa (2013) analizan los juicios de asociación de estudiantes en psicología, donde observan que muchos dan una estimación positiva de la intensidad de la asociación, incluso en el caso de independencia. Además, la mayor precisión de la estimación corresponde a la dependencia directa y a valores altos del coeficiente de asociación. También Cañadas, Batanero, Estepa y Arteaga (2013) estudian los juicios de asociación con datos ordinales donde la mayoría sobrevaloraron la asociación, debido a la correlación ilusoria ó la falta de familiaridad con datos ordinales.

El trabajo más relacionado con el que ahora presentamos fue realizado por Cañadas, Batanero, Arteaga, Gea (2014), donde analizamos la comprensión que los estudiantes de psicología tienen de las medidas de asociación en tablas 2x2. Se propuso a una muestra de estudiantes resolver una tarea abierta, con ayuda de Excel donde debían calcular e interpretar el coeficiente Phi de Pearson, los riesgos relativos y la razón de productos cruzado. La mayoría pudo calcular estos estadísticos adecuadamente y una proporción alta de estudiantes proporciona una interpretación estadística correcta del tipo de asociación entre las variables. Sin embargo se observa mayor dificultad en la interpretación probabilística del resultado y en la contextualización del mismo. En este trabajo continuamos el anterior, proponiendo a los estudiantes el cálculo e interpretación de los coeficientes adecuados en una tabla rxc.

MÉTODO

Muestra. Contexto educativo

La experiencia se llevó a cabo en el grado de Psicología en la Universidad de Granada, dentro del curso reglado *Técnicas de Análisis en la Investigación Psicológica*. Esta asignatura es de carácter obligatorio de primer curso de grado, y en ella se estudia la asociación estadística (tablas de contingencia, medidas de asociación, etc.). Los datos se recogen después de la enseñanza de este tema. Además los estudiantes han trabajado con las tablas de contingencia durante el bachillerato, aunque es la primera vez que estudian las medidas de asociación, que no volverán a estudiar posteriormente.

En el estudio participaron 92 estudiantes, divididos en dos grupos: 51 estudiantes en el primer grupo (8 hombres y 43 mujeres) y 53 en el segundo (16 hombres y 37 mujeres), mayoritariamente mujeres, como es frecuente en esta carrera. La mayoría se encontraba en un rango de edad comprendido entre 19 y 20 años, con algún estudiante aislado que superaba esta edad.

Diseño de la enseñanza

La enseñanza se implementó en el segundo cuatrimestre académico, casi al finalizar la asignatura. El diseño de la enseñanza comenzó fijando su contenido, a partir de un análisis previo del tema en libros de estadística orientados a Psicología o Educación (por ejemplo, Ato y López, 1996; Guàrdia, Freixa, Peró y Turbany, 2007). De dicho análisis, se seleccionaron los objetos matemáticos para la construcción de la propuesta didáctica (problemas, conceptos, propiedades, procedimientos, representaciones y argumentos), organizándolos en un proceso de estudio pretendido. En el diseño de la enseñanza también se tuvieron en cuenta los principios de diseño instruccional propuestos por Cobb y McClain (2004) para el aprendizaje de la estadística.

El proceso de estudio se organiza en cuatro lecciones específicamente diseñadas (Cañadas, 2011), con soporte en una página web en que se desarrollan los bloques de contenido (www.ugr.es/~analisisdedatos/webcurso/presentacion.html: (1) tablas de contingencia, lectura e interpretación; (2) asociación estadística, dependencia funcional e independencia; (3) el estadístico Chi-cuadrado y contrastes asociados; y (4) medidas de asociación. Asimismo, se proporcionó al estudiante (en la web diseñada para la enseñanza) diferentes hojas de cálculo ya programadas en el programa Excel para facilitar los cálculos, con breves descripciones en cada hoja (Figura 1).

FRECUENCIAS DOBLES								
			Variable Y					
			Supervivencia					
			y1	y2	y3	y4	y5	
			Si	No				Total
Variable X	x1	Primera	194	128				322
Clase	x2	Segunda	119	161				280
	x3	Tercera	138	573				711
	x4							0
	x5							0
		Total	451	862	0	0	0	1313

FRECUENCIAS RELATIVAS POR FILAS								
			Variable Y					
			Supervivencia					
			y1	y2	y3	y4	y5	
			Si	No	0	0	0	Total
Variable X	x1	Primera	0,60	0,40	0,00	0,00	0,00	1
Clase	x2	Segunda	0,43	0,58	0,00	0,00	0,00	1
	x3	Tercera	0,19	0,81	0,00	0,00	0,00	1
	x4	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0
	x5	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0

FRECUENCIAS RELATIVAS DOBLES								
			Variable Y					
			Supervivencia					
			y1	y2	y3	y4	y5	
			Si	No	0	0	0	Total
Variable X	x1	Primera	0,15	0,10	0,00	0,00	0,00	0,25
Clase	x2	Segunda	0,09	0,12	0,00	0,00	0,00	0,21
	x3	Tercera	0,11	0,44	0,00	0,00	0,00	0,54
	x4	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	x5	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
		Total	0,34	0,66	0,00	0,00	0,00	1,00

FRECUENCIAS RELATIVAS POR COLUMNAS							
			Variable Y				
			Supervivencia				
			y1	y2	y3	y4	y5
			Si	No	0	0	0
Variable X	x1	Primera	0,43	0,15	0,00	0,00	0,00
Clase	x2	Segunda	0,26	0,19	0,00	0,00	0,00
	x3	Tercera	0,31	0,66	0,00	0,00	0,00
	x4	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	x5	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
		Total	1,00	1,00	0,00	0,00	0,00

NOTA IMPORTANTE: SÓLO PUEDES ESCRIBIR EN LOS CUADROS VERDES

Figura 1. Hoja "Frecuencias"

Tarea de evaluación propuesta a los estudiantes

Al finalizar la enseñanza se realizaron varias pruebas de evaluación, que los estudiantes resolvieron individualmente. Los instrumentos utilizados fueron cuestionarios de opción múltiple, para evaluar el conocimiento teórico adquirido, junto a problemas abiertos que se resolvían con el apoyo de las hojas de cálculo Excel que se facilitaron a los estudiantes (e. g., Ver Figura 1).

En este trabajo se analizan los resultados en uno de estos problemas abiertos, dirigido a evaluar el aprendizaje sobre medidas de asociación en tablas *RxC*. En el problema se plantea el cálculo de las medidas de asociación en una tabla 2x3 junto a su interpretación (Figura 2), donde existe una asociación entre las variables media-baja (coeficiente *V* de Cramer = 0,364) estadísticamente significativa (*p*=0,000). Se trata de variables de las que el estudiante no tiene teorías previas al respecto, donde la relación sería indirecta debido a la existencia de una tercera variable como puede ser que una variable *A* inicialmente parece que hace cambios en *B*, pero lo que ocurre es que la variable *A* produce cambios en una variable *C*, y los cambios en la variable *C* producen los cambios en la variable *B*.

Tarea. Se está realizando un estudio sobre la población de estudiantes que hicieron la prueba de selectividad en el curso 2000-2001. Dos de las variables registradas fueron "convocatoria" (junio-septiembre) y "tipo de estudios" por el que se inclinaba el estudiante (grado medio, facultades, escuelas técnicas). Los resultados encontrados en la Universidad Complutense fueron los expuestos en la tabla siguiente:

	Escuelas Técnicas	Facultades	Grado Medio
Septiembre	200	500	800
Junio	1500	1300	700

Calcule e interprete las medidas de asociación para tablas *RxC*.
(Adaptado de San Martín y Pardo, 1989, p. 449)

Figura 2. Tarea propuesta

En las tablas *RxC* podemos diferenciar entre dependencia directa y dependencia inversa observando la frecuencia en algunas celdas. No es tan sencillo como en el caso 2x2, donde las celdas *a* (presencia-presencia) y *d* (ausencia-ausencia) contribuyen a la asociación directa, mientras las otras dos celdas, donde se da un solo carácter y el otro no, apoyan la asociación inversa. En nuestro caso, habría que observar el crecimiento de una distribución marginal (1º fila de datos), y el decrecimiento de otra (2º fila de datos), para apoyar la asociación.

Las soluciones correctas para calcular los coeficientes de asociación, realizando las correspondientes interpretaciones, son las siguientes (Ruiz-Maya, Martín, Montero y Uriz, 1995; Ato y López, 1996; Batanero y Díaz, 2008):

Para calcular el *coeficiente de contingencia de Pearson*, ($C = \sqrt{\chi^2/(\chi^2 + n)}$ con máximo $\sqrt{\dfrac{Min\{r-1,\, c-1\}}{1 + Min\{r-1,\, c-1\}}}$) los estudiantes pueden utilizar el programa Excel según la hoja de cálculo programada, con el cual obtienen el valor 0,342, así como el valor máximo, que es 0,7071. Para interpretar este resultado el estudiante puede considerar que el valor del coeficiente es levemente inferior a la mitad de su valor máximo (0,3536), por lo que puede considerar que hay una dependencia moderada.

Para calcular el valor de *Lambda de Goodman y Kruskal*, ($\lambda_x = \dfrac{(\sum f_{mj}) - f_{m+}}{N - f_{m+}}$) los estudiantes pueden introducir en la hoja de cálculo programada el número de columnas y número de filas, y obtendrán el valor 0,067, es decir, la reducción del error de predicción es sólo del 6,7%. Se puede, por tanto, concluir que el error apenas se ve reducido al predecir el valor de la variable dependiente *Y*, conocido el valor de la variable independiente *X*. En este caso, es difícil predecir de qué facultad es el estudiante si se sabe en qué convocatoria aprobó, aunque, si cambiamos filas y columnas, se obtiene un valor Lambda de Goodman y Kruskal = 0,167, por lo que es algo más fácil (pero no demasiado, pues solo se reduce el error el 16,7%) deducir en qué convocatoria aprueba el estudiante si se sabe qué estudios realiza.

Para calcular el valor *V* de *Cramer*, ($V = \sqrt{\chi^2 / n(p-1)}$) los estudiantes pueden utilizar la hoja de cálculo programada en Excel y obtener el valor 0,364. Para interpretar el resultado han de concluir que está un poco por debajo de la mitad de su valor posible; por lo que también este coeficiente indica que hay una dependencia moderada.

Se considera parcialmente correcta cuando el estudiante realiza el cálculo y falla en la interpretación o viceversa.

Análisis de los datos

Recogidas las respuestas escritas a la tarea, se realizó un análisis de su contenido (Krippendorff, 1991), considerando cada apartado como una medida de asociación. Con la lectura atenta de las producciones de los estudiantes, se buscaron las componentes relacionadas con cada uno de los apartados del problema. Las respuestas de todos los estudiantes fueron transcritas en un fichero de texto, asignando al estudiante su número y a cada respuesta un código correspondiente al apartado.

Las respuestas en cada apartado se compararon entre sí, mediante un proceso inductivo y cíclico, hasta llegar a un número suficiente de categorías para mostrar la diversidad de soluciones. La codificación fue revisada por todos los autores hasta llegar a un acuerdo sobre las categorías que se utilizarían en el estudio. Somos conscientes de que a priori es posible otros tipos de respuestas, pero sólo se han considerado las que dieron los estudiantes, quienes mostraron en general poca capacidad de argumentación.

RESULTADOS

A continuación, se exponen los resultados en cada apartado de la tarea.

Coeficiente de contingencia de Pearson

Respuestas correctas:

RC.1. Se calcula e interpreta de forma correcta el valor del coeficiente de contingencia de Pearson según su valor máximo, que es necesario conocer para poder interpretar adecuadamente la intensidad de la asociación (Ruiz-Maya, Martín, Montero y Uriz, 1995). Para ello, se introducen correctamente los datos en el programa, así como el número de filas y de columnas.

Respuestas parcialmente correctas:

RP.1. El estudiante calcula bien los valores necesarios, es decir, el del coeficiente y su valor máximo, pero no interpreta la intensidad de la asociación. Por ejemplo, un alumno deduce correctamente que hay dependencia al obtener un coeficiente distinto de cero, pero no es capaz de decidir qué intensidad indica el valor hallado, a pesar de haber indicado explícitamente el rango posible de valores que, para la tabla dada, puede tomar el coeficiente.

RP.2. Este es un caso particular del anterior. El estudiante calcula bien el valor del coeficiente de contingencia de Pearson y el máximo que este valor puede alcanzar, pero surge un problema, pues la interpretación del valor obtenido es incorrecta, ya que indica que la asociación es moderada-alta, en lugar de una asociación moderada o moderada-baja. Un problema en esta interpretación es que no hay una regla fija que el estudiante pueda aplicar (por ejemplo, usar unos valores fijos a partir de los cuáles la asociación sea alta o moderada), pues la decisión sobre la intensidad que debe considerarse alta es hasta cierto punto subjetiva. No obstante, tradicionalmente sólo los valores mayores que 0,7 se consideran altos, por lo que es posible que el estudiante haya extrapolado indebidamente esta propiedad (aplicable al coeficiente) a su valor máximo, que si es superior

a 0,7.
RP.3. El estudiante calcula bien el coeficiente de contingencia de Pearson, aunque comete un error en el valor máximo que puede tener este coeficiente, posiblemente debido a confundir el número de columnas y de filas o no introducirlo correctamente en el programa. Estos estudiantes dan una interpretación correcta de los valores que han obtenido, considerando una asociación moderada o moderada-baja, ya que el coeficiente no supera la mitad del valor máximo.
RP.4. El estudiante calcula correctamente el coeficiente de contingencia de Pearson, pero comete un error en el cálculo del su valor máximo, y además, realiza una interpretación errónea de su magnitud, considerando una asociación moderada-alta, en lugar de una asociación moderada o moderada-baja. Un ejemplo sería extender indebidamente propiedades del coeficiente a su máximo.
RP.5. Al igual que en los dos casos anteriores, el estudiante calcula bien el valor del coeficiente de contingencia de Pearson y confunde el valor máximo, que además, no interpreta.
RP.6. Se calcula bien el coeficiente de contingencia de Pearson, lo que implica una buena construcción de la tabla, pero no el máximo, y la interpretación es incorrecta o no interpreta. Los errores más comunes son no considerar el número de filas y columnas (ya que el valor máximo es incorrecto) o el significado del valor obtenido (producido por no interpretar o hacerlo de forma errónea).
RP.7. El estudiante calcula mal el coeficiente de contingencia de Pearson, pues introduce con errores la tabla en la hoja de cálculo, aunque calcula bien el máximo posible de este coeficiente. No interpreta los valores que obtiene.
RP.8. Aquí el estudiante comete un error de cálculo del coeficiente como anteriormente y calcula bien su máximo como el caso anterior, pero hace una interpretación correcta de los valores que ha obtenido.
Respuestas incorrectas:
RI.1. Calcula o interpreta incorrectamente los dos valores. En ocasiones el estudiante calcula coeficientes de asociación de tablas 2x2 (coeficiente Phi de Pearson, riesgo relativo y razón de productos cruzados), en lugar de los adecuados para tablas de contingencia *RxC* (coeficiente de contingencia de Pearson, *V* de Cramer y Lambda de Goodman y Kruskal).

Tabla 2. Porcentajes de respuestas en el coeficiente de contingencia de Pearson

	Respuesta	Cálculo correcto	Cálculo Max correcto	Interpretación correcta
RC.1	39.1	39,1	39,1	39,1
RP.1	2,2	2,2	2,2	
RP.2	14,1	14,1	14,1	
RP.3	7,6	7,6		7,6
RP.4	5,4	5,4		
RP.5	1,1	1,1		
RP.6	4,3	4,3		
RP.7	1,1		1,1	
RP.8	2,2		2,2	2,2
RI.1	6,5			
No responde	16,3			
Total	100	74,8	58,7	48,9

Podemos observar en la Tabla 2 que sólo 36 estudiantes (39,1%) responden correctamente al cálculo e interpretación del coeficiente de contingencia de Pearson. La respuesta correcta es la más frecuente, seguida de RP.2, en la que se calculan bien los valores (del coeficiente y su máximo posible), pero la interpretación de estos resultados obtenidos es incorrecta. También hacemos notar que el coeficiente de contingencia de Pearson ha sido calculado correctamente por el 74,8% de los estudiantes, su máximo es realizado correctamente por el 58,7% y la interpretación la realiza correctamente el 48,9%. Observamos que la mayor dificultad se da en la interpretación.

Lambda de Goodman y Kruskal

Respuestas correctas:
RC.1. El estudiante calcula e interpreta correctamente el valor de Lambda de Goodman y Kruskal, como proporción del error reducido. Usa una notación adecuada, e introduce la tabla de contingencia de forma correcta en el programa, informando en la interpretación que es el porcentaje de error que se ve reducido al predecir el valor de la variable dependiente *Y*, conocido el valor de la variable independiente *X*, en nuestro caso el 6,7% (Ruiz-Maya, Martín, Montero y Uriz, 1995).
RC.2. Otra posible solución correcta, aunque más pobre que la anterior, es que el estudiante calcule correctamente el valor de Lambda de Goodman y Kruskal, y lo interprete en función de si hay asociación o no. Una solución de este tipo ocurre cuando el estudiante interpreta el coeficiente únicamente como coeficiente de asociación y no lo relaciona con la reducción en el porcentaje de error en la predicción.
Respuestas parcialmente correctas:
RP.1. En este caso, el estudiante calcula bien el valor del coeficiente Lambda de Goodman y Kruskal, pero no realizan una interpretación de este resultado, por lo que pensamos que no ha comprendido la forma de

interpretarlo.

RP.2. Como en el caso anterior, el estudiante calcula bien el valor de Lambda de Goodman y Kruskal, pero hace una interpretación errónea, en términos de asociación, considerando una asociación moderada, o bien en términos de predicción de error, indicando que no mejora la predicción con el conocimiento de una variable.

Respuestas incorrectas:

RI.1. El estudiante realiza un cálculo incorrecto del valor de Lambda de Goodman y Kruskal, calcula e interpreta las medidas de asociación para tablas 2x2, o no calcula Lambda de Goodman y Kruskal, debido a que consideraron que no es una medida de asociación, pues en los apuntes se presentaba como una medida basada en la reducción proporcional del error.

Tabla 3. Porcentajes de respuestas en el coeficiente Lambda

	Porcentaje	Cálculo correcto	Interpretación correcta
RC.1	31,6	31,6	31,6
RC.2	16,3	16,3	16,3
RP.1	11,9	11,9	
RP.2	11,9	11,9	
RI.1	8,7		
No responde	19,6		
Total	100	71,7	47,9

En la Tabla 3 presentamos los resultados, observando que 44 estudiantes (47,9%) dan la respuesta correcta. Como se ha indicado, algunos estudiantes calcularon únicamente el coeficiente de contingencia de Pearson y el valor *V* de Cramer, ya que se trata de medidas basadas en la reducción proporcional del error, y no la consideraron como coeficiente de asociación. Entre las respuestas más frecuentes destacan las correctas y, posteriormente, las parcialmente correctas, lo cual muestra unos resultados buenos. El cálculo correcto de Lambda ha sido alto (71,7% de la muestra), pero como en otros coeficientes, la interpretación correcta sigue siendo baja (47,9% de la muestra).

V de Cramer

Respuestas correctas:

RC.1. El estudiante interpreta y calcula el valor del coeficiente correctamente. Utiliza una notación adecuada en su explicación, construye correctamente la tabla de contingencia haciendo uso de la hoja de cálculo programada, tiene en consideración el número de filas y de columnas, y además considera correctamente su máximo como uno (Ruiz-Maya, Martín, Montero y Uriz, 1995).

Respuestas parcialmente correctas:

RP.1. Se calcula bien el coeficiente *V* de Cramer, pero la interpretación es errónea. Por ejemplo, el estudiante considera independencia, en lugar de una asociación moderada o moderada-baja.

RP.2. Esta respuesta es un caso particular de la anterior, pues el estudiante, calcula bien el valor del coeficiente de *V* de Cramer, pero no interpreta el resultado.

RP.3. El estudiante calcula mal el valor del coeficiente a pesar de interpretar correctamente los valores que ha obtenido. Una respuesta muy frecuente es considerar el valor 0,515 del coeficiente *V* de Cramer, que se obtiene al considerar 3 filas y 3 columnas, en lugar de 2 filas y 3 columnas acompañada de una interpretación adecuada del mismo.

Respuestas incorrectas:

RI.1. Calcula e interpreta incorrectamente el valor del coeficiente o calcula e interpreta las medidas de asociación para tablas 2x2.

Tabla 4. Porcentajes de respuestas en el coeficiente *V* de Cramer

	Porcentaje	Cálculo correcto	Interpretación correcta
RC.1	44,5	44,5	44,5
RP.1	15,2	15,2	
RP.2	2,2	2,2	
RP.3	9,8		9,8
RI.1	1,1		
RI.2	6,5		
RI.3	1,1		
No responde	19,6		
Total	100	61,9	54,3

Podemos observar, en la Tabla 4, como únicamente 41 estudiantes (44,5%) calculan e interpretan correctamente del valor *V* de Cramer, a pesar de disponer del programa de Excel para facilitar su cálculo. Entre las respuestas parcialmente correctas destaca la respuesta RP.1, en la que los estudiantes calculan bien el coeficiente de la *V* de Cramer, pero la interpretación que realizan es errónea. De entre los errores que cometen los estudiantes, destacamos la dificultad que algunos muestran al introducir la función *Mín{}* o al introducir el número de filas y columnas en la hoja de cálculo. Consideramos que la tarea propuesta fue de dificultad media, pues la obtención de la *V* de Cramer la realiza correctamente el 61,9% de estudiantes aunque su interpretación tan sólo el 54,3%.

Al comparar los tres coeficientes observamos que el coeficiente de contingencia de Pearson es calculado e interpretado correctamente por el 39,1%, parcialmente por el 38,1% y de forma incorrecta por el 6,5%; el valor *V* de Cramer correctamente por el 44,5%, parcialmente por el 27,2% y de forma incorrecta por el 8,7%; y el valor Lambda de Goodman y Kruskal correctamente por el 47,9%, parcialmente por el 29,2%, y de forma incorrecta por el 3,3%. En resumen, podemos concluir que el cálculo de estas medidas de asociación resultan de dificultad moderada para los estudiantes, donde el índice de no respuesta es inferior al 20%, el cálculo e interpretación correcto de los mismos alrededor del 40%, y de manera parcialmente correcta entre un 27% y un 40%. Resultó más sencillo el cálculo e interpretación del valor Lambda de Goodman y Kruskal, seguida por la *V* de Cramer y finalmente el coeficiente de contingencia de Pearson.

Discusión y consecuencias para la enseñanza

Nuestros resultados muestran que el porcentaje de estudiantes que obtienen una respuesta correcta a la tarea del cálculo e interpretación de alguno de los coeficientes de asociación para tablas *RxC* estudiados, es mucho mayor respecto al encontrado en investigaciones previas con estudiantes que no han recibido instrucción sobre el tema (Cañadas, Batanero, Estepa, y Arteaga, 2013; Cañadas, Díaz, Batanero, Estepa, 2013). Consideramos que la experiencia de enseñanza resultó beneficiosa en este sentido, contribuyendo a la mejora del razonamiento de los estudiantes sobre la asociación en tablas de contingencia *RxC*. El uso del programa Excel, a través de las hojas de cálculo que se programaron para servir de apoyo al proceso de enseñanza del tema, supusieron una gran ayuda a los estudiantes para el estudio del tema, además de servir de herramienta de cálculo de los coeficientes estudiados.

A pesar de estos resultados, y en comparación con investigaciones previas con medidas de asociación en tablas 2x2 (Cañadas, Batanero, Arteaga, Gea, 2014), observamos que el porcentaje de no respuesta a la tarea es muy superior en nuestro trabajo con medidas de asociación en tablas *RxC*, que en otros trabajos. Estos resultados pueden indicar la mayor dificultad de estas medidas de asociación en relación a las utilizadas más usualmente como es el caso de las medidas de asociación en tablas 2x2.

Hacemos también notar que una gran parte de los alumnos se limitan a dar un valor numérico, sin realizar una interpretación del resultado, y sin especificar en el contexto del problema lo que quiere decir ese resultado obtenido correctamente. Además, encontramos que algunos estudiantes (entre un 3% y un 9% de estudiantes) no lograron comprender el cálculo de algunos de los coeficientes al confundir filas y columnas en su determinación así como no comprender su significado pues basaban sus interpretaciones en coeficientes asociados a tablas 2x2. Henry (1997) señala la dificultad de interpretación de los modelos matemáticos.

Todo ello sugiere la necesidad de poner mayor atención en la enseñanza del tema y en proponer mayor cantidad de actividades interpretativas en el proceso de enseñanza. Posiblemente, la facilidad de calcular e interpretar el valor de Lambda se debe a que este valor no se veía afectado por el número de filas y columnas, y no requiere el cálculo de un valor máximo de forma independiente.

Consideramos de gran utilidad el análisis realizado sobre el desempeño de los estudiantes en la tarea propuesta, que informa de las dificultades de algunos estudiantes en la interpretación y el cálculo de medidas de asociación. Como indican Cañadas, Batanero, Arteaga, Gea, (2014) las tablas de contingencia son un instrumento útil en nuestra vida diaría (como resumen de información) y profesional, y este trabajo avanza en esta línea de investigación, mostrando que aún queda mucho camino por recorrer para la mejora de la enseñanza de este objeto matemático.

Agradecimientos: Proyecto EDU2013-41141-P (MEC) y Grupo FQM-126 (Junta de Andalucía).

REFERENCIAS

Ato, M. y López, J. J. (1996). *Análisis estadístico para datos categóricos*. Madrid: Sintesis

Batanero, C. y Díaz, C. (2008). *Análisis de datos con Statgraphics*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Batanero, C., Estepa, A. y Godino, J. D. (1997). Evolution of students' understanding of statistical association in a computer based teaching environment. En J. B. Garfield y G. Burrill (Ed.), *Research on the role of technology in teaching and learning statistics* (pp. 191-206).Minnesota, MN: International StatisticalInstitute.

Batanero, C., Estepa, A., Godino, J. D., & Green D. R. (1996). Intuitive strategies and preconceptions about association in contingency tables. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(2), 151-169.

Cañadas, G. R. (2011). *Las tablas de contingencia para psicología*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Cañadas, G. R., Batanero, C., Arteaga, P., Gea, M. M. (2014). Medidas de asociación en tablas 2x2:

evaluación de una experiencia de enseñanza con estudiantes universitarios. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 207-216). Salamanca: SEIEM.

Cañadas, G. R., Batanero, C., Estepa, A. y Arteaga, P. (2013). Juicios de asociación en tablas de contingencia con datos ordinales. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 209-218). Bilbao: SEIEM.

Cañadas, G. R., Díaz, C., Batanero, C. y Estepa, A. (2013). Precisión de los estudiantes de psicología en la estimación de la asociación, *Bolema*, *27*(47), 759-778.

Cobb, P. y Mc Clain, K. (2004). Principles of instruccional design for supporting the development of students‟ statistical reasoning. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking. Netherlands:*KluwerAcademicPublishers.

Erlick, D. E. y Mills, R. G. (1967). Perceptual quantification of condicional dependency, *Journal of Experimental Psychology,73* (1), 9-14.

Guàrdia, J., Freixa, M., Peró, M. y Turbany, J. (2007). *Análisis de datos en psicología*, Delta, Publicaciones Universitarias.

Henry, M. (1997). Notion de modéle et modélization en l'enseignement. En M. Henry (Ed.), *Enseigner les probabilités au* lycée (pp. 77-84).Reims: Commission Inter-IREM.

Inhelder, B. y Piaget, J. (1955). *De la logique de l´enfant à la logique de l´adolescent.* Paris: Presses Universitaires de France.

Jenkins, H. M. y Ward, W. C. (1965). Judgment of the contingency between responses and outcomes, *Psychological Monographs*, *79,* 1-17.

Krippendorff, K. (1991). *Metodología de análisis de contenido*, Barcelona, Paidós.

Meiser, T. y Hewstone, M. (2006). Illusory and spurious correlations: Distinct phenomena or joint outcomes of exemplar-based category learning? *EuropeanJournal of Social Psychology, 363*(3), 315-336.

Ruiz-Maya, L., Martín, F. J., Montero, J. M. y Uriz, P. (1995). *Análisis estadístico de encuestas: datos cualitativos*. Madrid: AC.

San Martín, R. y Pardo, A. (1989). *Psicoestadística Contrastes paramétricos y no paramétricos*, Pirámide..

INVESTIGACIÓN SOBRE LIBROS DE TEXTO EN LOS SIMPOSIOS DE LA SEIEM (1997-2015)[i]

Research on textbooks at SEIEM Simposia (1997-2015)

Marco-Buzunáriz, M.A.[a], Muñoz-Escolano, J.M.[a], Oller-Marcén, A.M.[b]

[a] Universidad de Zaragoza, [b] Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza

Resumen

En este artículo, se analizan los trabajos relacionados con la investigación sobre libros de texto publicados en las actas de los Simposios de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) desde 1997 a 2015 y se identifican las instituciones y los autores más prolíficos en esta línea. Este análisis se completa con la clasificación de estas aportaciones según las categorías establecidas por Fan, Zhu y Miao (2013) y Fan (2013). Los resultados señalan que, si bien este tipo de trabajos han estado presentes en la mayoría de los Simposios, su frecuencia ha sido irregular y en todo caso, no mayoritaria. La mayor parte de las investigaciones en esta línea son de carácter descriptivo y tienen al propio libro de texto como objeto de investigación para analizar el tratamiento dado a un determinado tópico matemático.

Palabras clave: *Educación matemática, libros de texto, cienciometría, actas SEIEM.*

Abstract

In this paper, we analyze the contributions on textbook research published in the SEIEM Symposia from 1997 to 2015 and the most prolific institutions and authors are identified. This analysis is complemented with a classification according to the categories established by Fan, Zhu and Miao (2013) and Fan (2013). Our results show that, even though this kind of research has been present in most Symposia, its frequence has been irregular and, in any case, minoritary. Most of the reports of this type are descriptive in nature. Moreover, they have textbooks as the subject of research to analyze how textbooks represent mathematical knowledge of certain topics.

Keywords: *Mathematics education, textbooks, scientometrics, SEIEM proceedings.*

INTRODUCCIÓN

La Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) se fundó en marzo de 1996. Al año siguiente, en septiembre de 1997, tuvo lugar el primer Simposio "con la intención de presentar y discutir los resultados de sus investigaciones" (Sierra, 1997, p. 5). Se acumulan, por lo tanto, 19 ediciones tras las cuales el Simposio de la SEIEM se ha convertido en la principal reunión anual de investigadores en Educación Matemática a nivel nacional que "refleja los temas de interés de los investigadores españoles de dicha área de conocimiento" (Maz-Machado, Bracho-López, Torralbo-Rodríguez, Gutiérrez-Arenas & Hidalgo-Ariza, 2011, p. 165).

Uno de estos temas de interés puede ser la investigación sobre libros de texto, entendidos como obras que presentan sistemáticamente un contenido con el objetivo de contribuir a su comprensión (Pationitis, 2006). De hecho, en el XIII Simposio de la SEIEM se desarrolló un Seminario de investigación sobre el análisis de libros de texto en el que Sierra (2009, p. 3) ya apuntaba que "en el caso español, se está produciendo una incipiente investigación en manuales escolares". Abundando en este hecho, Font (2011) señala cómo el análisis de libros de texto responde a la demanda por parte del sistema educativo en cuanto al diseño de herramientas para analizar las diferentes maneras de organizar el contenido matemático. Recientemente, Claros, Sánchez y Coriat (2014) revisan,

Marco-Buzunáriz, M.A., Muñoz-Escolano y J.M., Oller-Marcén, A.M. (2016). investigación sobre libros de texto en los Simposios de la seiem (1997-2015). En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp181-191). Lugar: SEIEM.

entre otros aspectos, el uso de los libros de texto como fuente de información y recurso metodológico dentro de su ponencia en el Seminario de investigación de Didáctica del Análisis Matemático.

Así pues, tanto desde el punto de vista de la investigación en Didáctica de la Matemática, como por sus implicaciones sobre la enseñanza, la investigación sobre libros de texto es un tema interesante de estudio como demuestran los monográficos específicos sobre este aspecto publicados en diferentes revistas como ZDM (número 45) o AIEM (número 8). En este trabajo pretendemos observar el modo en que este interés ha quedado plasmado en las contribuciones a los sucesivos Simposios de la SEIEM.

MARCO TEÓRICO

Los estudios de corte cienciométrico o bibliométrico sustentan su importancia en la necesidad de evaluar y, por tanto, analizar la investigación. Así, en España existen recientes estudios analizando desde este punto de vista la producción de diversas revistas dedicadas a la Educación Matemática (Bracho-López, Maz-Machado, Jiménez-Fanjul, Adamuz-Povedano, Gutiérrez Arenas & Torralbo Rodríguez, 2011; Bracho-López, Maz-Machado, Jiménez-Fanjul, Adamuz-Povedano & Torralbo, 2011; Maz, Torralbo, Vallejo, Fernández-Cano, & Rico, 2009). También se han publicado estudios de este tipo centrados en los Simposios de la SEIEM. Por ejemplo, Gómez, Cañadas, Bracho, Restrepo y Aristizábal (2011) abordan un análisis temático de los trabajos presentados en los Simposios de la SEIEM hasta 2008, considerando variables como el nivel educativo o el área de las Matemáticas. Del mismo modo, Maz-Machado et al. (2011) analizan las comunicaciones y conferencias presentadas en dicho foro hasta 2008. Entre otros resultados interesantes, estos autores muestran el progresivo aumento en el número de comunicaciones presentadas, así como el importante papel jugado por la Universidad de Granada. Estos hechos también son refrendados por Ortiz (2010) que realiza un análisis bibliométrico de todas las aportaciones realizadas tanto en las comunicaciones como en las sesiones del grupo de trabajo por los miembros del Grupo de Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria.

Otro motivo por el cual realizar estudios bibliométricos puede ser el llevar a cabo reflexiones sobre diversos aspectos de la investigación. Por ejemplo, Godino et al. (2012) se centran en la metodología aplicada en las comunicaciones presentadas en los Simposios de la SEIEM hasta 2010. Además de las consideraciones metodológicas que motivan el trabajo, los autores analizan otras variables, como el nivel educativo, el área temática o el tamaño de la muestra. En particular, en los trabajos analizados predominan las muestras pequeñas, el nivel educativo con mayor número de trabajos es el universitario y el menor la Educación Infantil y las áreas temáticas con un mayor número de comunicaciones son “Pensamiento Numérico y Algebraico” junto con “Conocimiento y desarrollo profesional del profesor”. Ya hemos mencionado en la introducción el interés de la investigación sobre libros de texto. Godino et al. (2012) señalan también los materiales y recursos (en particular los libros de texto) como una de las posibles fuentes de información al abordar la investigación en Educación Matemática, aunque encuentran que no se utilizan con demasiada frecuencia en los trabajos estudiados. Mientras que Ortiz (2010) también señala que el análisis de libros de texto es una de las líneas presentes entre las aportaciones presentadas en el grupo “Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria”, si bien no la mayoritaria.

Respecto a estudios bibliométricos detallados sobre las investigaciones con libros de texto, Fan, Zhu y Miao (2013) presentan una clasificación de estas investigaciones en el ámbito de la Educación Matemática. Las categorías identificadas surgieron tras el análisis de un total de 111 trabajos de investigación publicados en revistas, tesis doctorales, comunicaciones en congresos, etc. rastreados mediante el uso de la base de datos ERIC. Tras la identificación de los estudios empíricos (100 en total), se identificaron esencialmente tres grandes tipos de trabajos:

- Trabajos centrados en el análisis de distintos libros de texto.
- Trabajos centrados en la comparación de distintos libros de texto.
- Trabajos interesados en el uso que estudiantes o profesores hacen de los libros de texto.

Estos autores apuntan el rápido crecimiento que se ha producido en este tipo de estudios desde la década de los 80 hasta la actualidad. Además, observaron un claro predominio de los trabajos centrados en el análisis y comparación de libros de texto, que supusieron el 63% de los trabajos analizados.

Por otro lado, en (Fan, 2013) se presenta otro marco para la clasificación de las distintas investigaciones centradas en los libros de texto. El marco propuesto se basa en las clasificaciones de Postlethwaite (2005) de las cuestiones abordadas en investigación educativa (descriptivas, correlacionales y causales), así como en un análisis de los trabajos presentados en ICME-10 e ICME-11. Se distinguen tres tipos de enfoques según la relación de los libros de texto con otros factores de la educación sobre la que se focaliza el estudio:

- Trabajos en los que los libros de texto son el objeto principal de la investigación.
- Trabajos en los que los libros de texto se tienen en cuenta en tanto que variable dependiente y en los que se analiza el modo en que otros factores influyen sobre ellos.
- Trabajos interesados en los libros de texto en tanto que variable independiente y que analizan cómo éstos influyen sobre otros factores.

El autor concluye que el mayor número de trabajos analizados entran dentro de la primera categoría (principalmente descriptiva) y señala la necesidad de un desplazamiento hacia las otras dos (que son correlacionales y causales).

OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

En este trabajo abordamos una investigación de tipo descriptivo, de carácter cuantitativo, cuyos objetivos son los siguientes:

- Identificar los trabajos relacionados con la investigación sobre libros de texto presentados en los Simposios de la SEIEM hasta 2015.
- Clasificar los trabajos identificados atendiendo a las categorías establecidas por Fan, Zhu y Miao (2013) y Fan (2013).
- Analizar aspectos de los trabajos sobre libros de texto como el tamaño de la muestra, los niveles educativos o el área de las Matemáticas a la que se refieren.
- Estudiar los autores e instituciones involucrados en dichos trabajos.

MARCO METODOLÓGICO

Medina-López, Marín-García y Alfalla-Luque (2010) señalan cinco fases a seguir en un proceso de revisión bibliográfica: identificación del campo de estudio y periodo, selección de las fuentes, realización de la búsqueda, gestión y depuración de los resultados y análisis de los resultados.

Nuestro campo de estudio son los trabajos de investigación en educación matemática sobre libros de texto. Las fuentes analizadas son todos los trabajos presentados en los Simposios de la SEIEM, desde 1997 hasta 2015 (ponencias, comunicaciones, comunicaciones dentro de los grupos de investigación y pósteres). Estos trabajos han sido publicados en las sucesivas actas y están disponibles libremente online en la página web de la SEIEM (www.seiem.es/publicaciones/actas.htm). Scott (1990) señala cuatro aspectos fundamentales a la hora de determinar los documentos que intervienen en un estudio que trabaja con fuentes documentales: autenticidad, credibilidad, representatividad y significado. En nuestro caso estos aspectos están garantizados por el origen de los documentos, así como por los procesos de revisión y edición que preceden a la publicación de los trabajos considerados.

Para la realización de la búsqueda se tomaron todas las aportaciones a las actas de las pasadas SEIEM y se hizo un primer filtrado automático. Este filtrado se realizó con scripts en Python (haciendo uso de sus bibliotecas especializadas para tratar con archivos pdf) desarrollados ad-hoc por los autores. El criterio de filtrado consistió en descartar aquellas aportaciones que no contuvieran, en todo el documento, las expresiones “libro de texto”, “libros de texto”, “manual” o “manuales”. Entre los restantes documentos, se hizo una revisión manual, triangulando aquellos casos que pudieran resultar dudosos. Esta triangulación de investigadores (Denzin, 1978) contribuye, además, a mejorar la calidad de la investigación (Onwuegbuzie & Leech, 2007).

Para la gestión y depuración de los resultados, los trabajos seleccionados tras el proceso anterior fueron importados desde Sage (usando el notebook jupyter) para su tratamiento. Sage combina los paquetes de software R y Python, usados habitualmente para análisis estadístico y representación de datos, y permite su tratamiento tanto desde un punto de vista programático como interactivo, lo que lo hace especialmente útil para este tipo de estudio. Además, incluye clases específicas para el análisis de grafos que, como veremos posteriormente, nos permitieron analizar las relaciones de colaboración entre autores y entidades.

Respecto a la fase de análisis, siguiendo estudios similares al nuestro (Bracho-López et al., 2011; Maz-Machado et al., 2011; Maz et al., 2009), se observaron diversas variables que permitirán la clasificación de los trabajos seleccionados bajo distintos criterios, así como la identificación de redes de colaboración:

- Autoría y adscripción de los autores.
- Tipo de aportación (ponencias, comunicaciones, comunicaciones dentro de los grupos de investigación y pósteres).
- Nivel educativo (Infantil, Primaria, Secundaria, Bachillerato o Universidad).
- Área de las Matemáticas en la que se centra el trabajo (Álgebra, Análisis, Aritmética, Combinatoria, Estadística, Geometría o Probabilidad).
- Tamaño de la muestra de libros de texto analizados (caso de haberla).

Por otro lado, para la clasificación de los trabajos de tipo empírico se tuvieron en cuenta las clasificaciones de Fan, Zhu y Miao (2013) y de Fan (2013) recogidas en la Tabla 1.

Tabla 1. Categorías para la clasificación de trabajos sobre libros de texto

Fan, Zhu y Miao (2013)	**Fan (2013)**
Papel de los libros de texto (P) Análisis de libros de texto (A) Comparación de libros de texto (C) Uso de libros de texto (U)	Libros de texto como objeto de investigación (O) Libros de texto como variable dependiente (VD) Libros de texto como variable independiente (VI)

RESULTADOS

En total, se analizaron 841 contribuciones a los Simposios. De ellas, 74 se corresponden con trabajos relacionados con la investigación sobre libros de texto (un 8.8%). Según el tipo de contribución, estos trabajos se distribuyen del siguiente modo: 7 ponencias en seminarios, 39 comunicaciones, 24 comunicaciones a los grupos de investigación y 4 pósteres. Como cabía esperar, el mayor número de trabajos corresponde con comunicaciones. Por otro lado, pese a que solo se publicaron entre 2005 y 2012, se observa un gran número de comunicaciones en grupos de investigación relacionadas con esta temática.

A continuación, vamos a estudiar la evolución en el número de trabajos presentados en los distintos Simposios. Como se puede observar en la Figura 1, hubo un pico de aportaciones sobre libros de texto en la edición de 2009, tanto si se analiza desde el punto de vista de valores absolutos como relativos al total de aportaciones. Este hecho se explica fácilmente si tenemos en cuenta que en esa edición del SEIEM hubo un seminario dedicado específicamente a la investigación sobre libros de texto. Si dejamos de lado esta anomalía, a la vista de los datos, se observa una gran variabilidad entre distintas ediciones, haciendo difícil valorar si existe una tendencia creciente en el tiempo.

En cualquier caso, sí se puede observar que, dejando a un lado el caso anómalo de 2009, el porcentaje de las aportaciones en cada Simposio que se centran en libros de texto está siempre por debajo del 15%, llegando algunos años a bajar al 4% (e incluso siendo nula en la edición de 2002). Esto nos indica que el tema de los libros de texto, aunque presente, no parece haber sido uno de los temas dominantes en la investigación sobre Educación Matemática en España durante las últimas dos décadas.

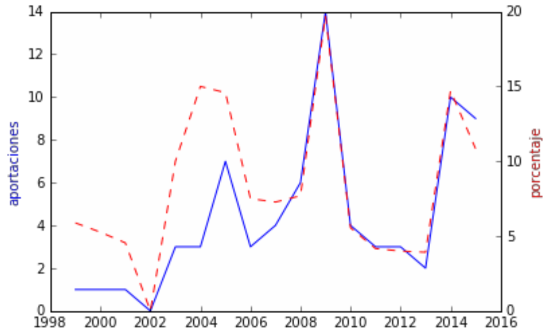


Figura 1. Producción diacrónica de trabajos sobre libros de texto

Clasificación según el enfoque del trabajo

Del total de 74 trabajos analizados, 2 son trabajos de tipo teórico, aunque uno de ellos aborda parcialmente el análisis de libros de texto. Así pues, los 72 estudios restantes son empíricos y podemos clasificarlos según las categorías presentadas anteriormente. La Tabla 2 resume la distribución de las aportaciones en cada categoría.

Tabla 2. Clasificación de los trabajos de tipo empírico

	O	VD	VI	Total
A	36	5	1	42
C	15	10	0	25
U	0	0	5	5
Total	51	15	6	72

Se puede ver como los estudios que consideran el libro de texto como sujeto de estudio dominan claramente sobre los que lo consideran como variable dependiente o independiente. Respecto a la segunda clasificación, las categorías que dominan son las de análisis y comparación.

Resultados según nivel educativo

Por niveles educativos, la mayoría de los estudios analizados se centran en libros de texto de Educación Secundaria y Bachillerato, tal y como se recoge en la Tabla 3:

Tabla 3. Trabajos sobre libros de texto según nivel educativo

Nivel Educativo	Porcentaje
Infantil	3.0%
Primaria	16.4%
Secundaria	38.8%
Bachillerato	25.4%
Universidad	16.4%

Esta distribución es en general uniforme a lo largo de las distintas categorías establecidas. No obstante, en el caso de los estudios centrados en el análisis de libros de texto, el porcentaje de trabajos dedicados a los niveles educativos más altos es ligeramente mayor; mientras que, en los estudios centrados en la comparación, ocurre lo contrario (Tabla 4).

Tabla 4. Trabajos sobre análisis y comparación de libros de texto según nivel educativo

Análisis		**Comparación**	
Nivel Educativo	*Porcentaje*	*Nivel Educativo*	*Porcentaje*
Infantil	2.4%	Infantil	9.1%
Primaria	14.6%	Primaria	22.7%
Secundaria	34.1%	Secundaria	40.9%
Bachillerato	26.8%	Bachillerato	18.2%
Universidad	22.0%	Universidad	9.1%

El número de trabajos dentro de las categorías VD y VI no es suficiente para sacar conclusiones significativas sobre su distribución a lo largo de los distintos niveles educativos.

Resultados según área de las Matemáticas

Respecto a los temas en los que se centra cada estudio, hay una gran prevalencia del análisis y la aritmética, como se muestra en la Tabla 5.

Tabla 5. Trabajos sobre libros de texto según tema

Tema	Porcentaje
Álgebra	8.1%
Análisis	32.3%
Aritmética	19.4%
Combinatoria	1.6%
Estadística	14.5%
Geometría	12.8%
Probabilidad	11.3%

Sin embargo, esta distribución varía mucho dependiendo del nivel educativo de cada estudio. La aritmética está presente sobre todo en los estudios sobre los niveles educativos más bajos. El análisis está presente sobre todo en los estudios sobre bachillerato y universidad, la geometría se centra en primaria y secundaria; y la probabilidad en secundaria y bachillerato (Figura 2).

También cabe señalar que, en el área de Análisis, dos tercios de los trabajos son clasificados en la categoría de análisis de libros de texto, mientras que en el área de Aritmética sucede lo contrario y cerca del 60% de los trabajos son de comparación.

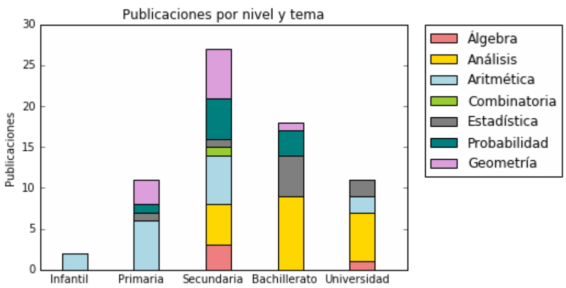


Figura 2. Número de publicaciones sobre libros de texto según nivel educativo y tema

Tamaño de las muestras

En cuanto al tamaño de las muestras estudiadas en cada aportación, en 7 ocasiones no estaba especificado o no era aplicable. De las 67 restantes, el tamaño máximo de muestra era de 51, la media de 10.73 y la mediana de 8. Una visión global de esta distribución se puede ver en la Tabla 6.

Tabla 6. Distribución de trabajos según el tamaño de la muestra considerada

Tamaño de la muestra	Porcentaje
N/A	9.5%
1 (estudio de caso)	12.2%
2-4	21.6%
5-12	32.4%
Más de 12	24.3%

Si analizamos esta variable en función de los distintos tipos de estudio, observamos que los estudios dedicados a realizar comparaciones entre libros de texto tienden a usar muestras más grandes que los que caen en la categoría de análisis de libros de texto. Por otro lado, se aprecia que los estudios que consideran al libro de texto como variable dependiente tienden a tener muestras grandes, mientras que los análisis que consideran al libro como objeto de estudio usan muestras más pequeñas.

Autoría y filiación

En total, los trabajos analizados fueron realizados por miembros de 39 centros distintos. Los centros que más destacan por su producción en este campo son las universidades de Granada, Salamanca y Valencia con 21, 10 y 9 trabajos respectivamente. Los demás centros acumulan cinco aportaciones o menos. Entre estos centros especialmente prolíficos, resulta llamativo que en la Universidad de Granada se han realizado más trabajos dentro de la categoría de análisis que de la de comparación (14 frente a 5), mientras que en el caso de la Universidad de Salamanca ocurre lo contrario (2 frente a 7).

En total, 105 autores han participado en los trabajos analizados. C. Batanero es la autora que más trabajos ha firmado con 7. Le siguen A. Maz, J.M. Contreras y M Sierra con 5; A. Contreras, B. Gómez, M.M. Gea, M.T. González y T. Ortega con 4.

En la Figura 3 se muestran las seis componentes conexas con más de una institución que aparecen al construir el grafo correspondiente a la red de colaboración entre distintas instituciones. Se omiten 7 instituciones en las que no hay ninguna colaboración con otras. Se observa la existencia de una gran componente de 20 nodos y de otras cinco pequeñas componentes formadas por dos o tres centros que colaboran entre sí. Se puede observar cómo la Universidad de Granada es la institución que más colaboraciones realiza, siendo además el eje que vertebra la mayor componente conexa, seguida por la Universidad Complutense de Madrid. Los datos numéricos respaldan esta impresión: la Universidad de Granada tiene el mayor grado de centralidad (0.24) seguido por la Universidad Complutense de Madrid (0.16). Otros centros con grados de centralidad relevantes son la Universidad Autónoma de Barcelona y la Universidad de Salamanca, con 0.12 cada una. Los demás centros tienen grados de centralidad por debajo de 0.08.

En cuanto a los autores, el grafo correspondiente a la red de colaboración de autores se recoge en la Figura 4. De nuevo, se omiten 5 autores que publican en solitario. Este grafo tiene 32 componentes conexas, destacando dos grandes (formadas por 12 y 13 autores) con el resto por debajo de 6. En cuanto a los autores con más colaboradores, destacan C. Batanero, con 10 colaboradores, seguida por J.M. Contreras con 6.

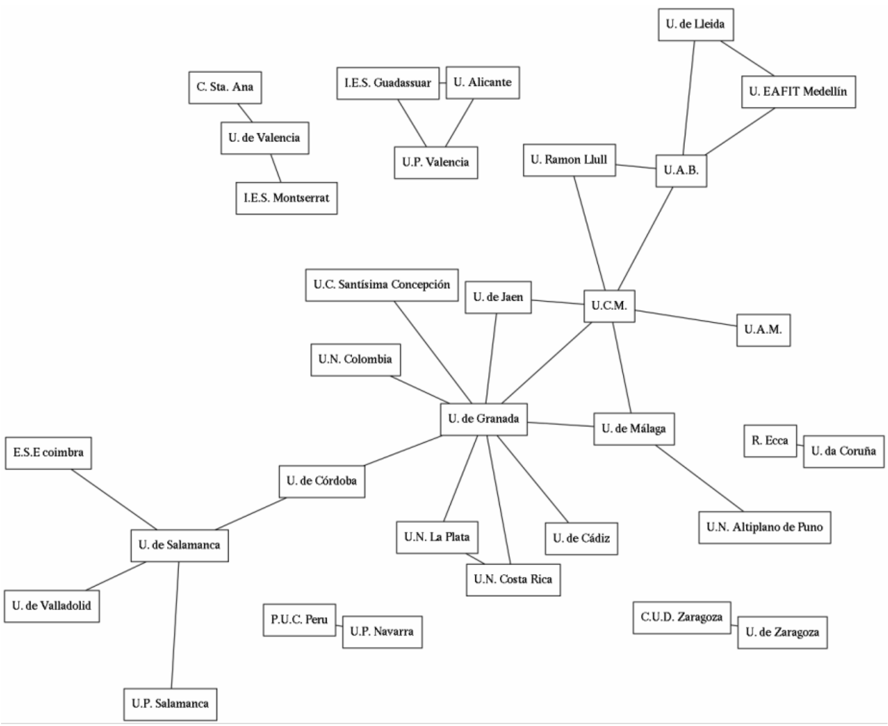


Figura 3. Red de colaboración entre instituciones

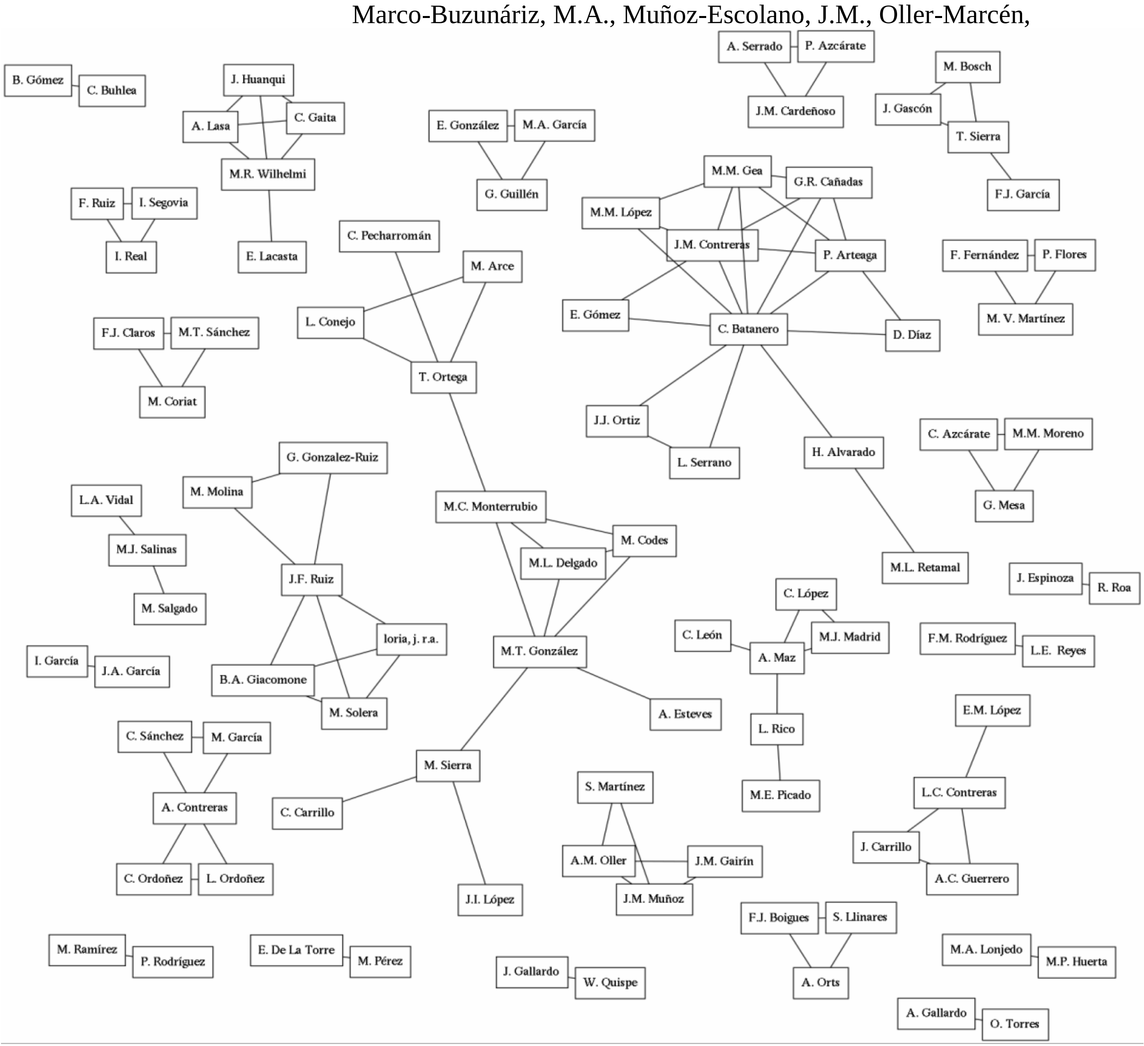


Figura 4. Red de colaboración entre autores

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Las investigaciones sobre libros de texto en Simposios de la SEIEM han estado presentes de forma continuada en mayor o menor medida desde 2003 hasta 2015. No obstante, a pesar del aumento progresivo de comunicaciones en Simposios de la SEIEM hasta 2008 constatado por Maz et al. (2011) y en nuestros datos hasta 2015, no se puede afirmar que haya supuesto un aumento apreciable y continuado en cuanto a investigaciones de este tipo ni en términos de frecuencia total ni en términos de porcentaje respecto al resto de aportaciones realizadas cada año.

En cuanto a las instituciones y autores, nuestros resultados señalan a la Universidad de Granada cómo la institución que más aportaciones de este tipo ha realizado a los Simposios, seguidas de las universidades de Salamanca y Valencia. Carmen Batanero es la autora que más aportaciones ha realizado. Esto se corresponde parcialmente con los obtenidos por otros estudios bibliométricos generales sobre comunicaciones (Maz et al, 2011) y de temática específica (Ortiz, 2010). En contraste con los estudios antes citados, en el nuestro, la Universidad de Salamanca aparece en una posición más destacada, debido principalmente a comunicaciones y trabajos presentados en el grupo Historia de las Matemáticas y Educación Matemática.

El nivel educativo sobre el que más se ha trabajado es Educación Secundaria, coincidiendo con los resultados generales señalados por Gómez et al. (2011). El tamaño de las muestras de libros analizados es variado aunque mayoritariamente es de tamaño pequeño o medio y existe correlación con el tipo de investigación realizado, en el que las muestras más grandes se emplean en estudios con finalidades de Comparación, mientras que para los estudios de Análisis y de Uso se emplean principalmente muestras mucho más pequeñas. Finalmente, las áreas de las Matemáticas sobre las que inciden en mayor frecuencia las investigaciones identificadas son la Aritmética y el Análisis.

La inmensa mayoría de las investigaciones sobre libros de textos son de Análisis y Comparación (más de un 90%). Hemos identificado muy pocos trabajos que se preocupen de investigar sobre el uso o empleo que dan los docentes o estudiantes a los libros de texto. Estos resultados son más acusados que los de Fan et al. (2013) en cuanto a este último aspecto y se corresponden en gran medida a que la mayoría de trabajos identificados son de naturaleza principalmente descriptiva donde el libro de texto aparece como un objeto de investigación principal. Es mucho menor la presencia de trabajos de investigación sobre libros de textos centrados en aspectos causales y correlacionales, líneas de investigación sugeridas por Fan (2013) para el avance de esta disciplina. Por tanto, no es abundante la presencia de investigaciones centradas en detectar algunos de los factores (leyes educativas, autores, editoriales, …) que afectan a diversos aspectos de los libros de texto o al tratamiento de algunos de sus contenidos. Además, se detecta una gran escasez de trabajos que investiguen acerca de cómo los libros de texto afectan a otros aspectos del sistema escolar, de la práctica docente y de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Referencias

Bracho-López, R, Maz-Machado, A., Jiménez-Fanjul, N., Adamuz-Povedano, N., Gutiérrez Arenas, P. & Torralbo Rodríguez, M. (2011). Análisis cienciométrico y temático de la revista SUMA (1999-2010). *SUMA*, 68, 1-20.

Bracho-López, R, Maz-Machado, A., Jiménez-Fanjul, N., Adamuz-Povedano, N. & Torralbo, M. (2011). La investigación en Educación Matemática en la revista Epsilon. Análisis cienciométrico y temático (2000-2009). *Epsilon*, 27(2), 11-27.

Claros, J., Sánchez, M. T. & Coriat, M. (2014). Marco teórico y metodológico para el estudio del límite. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 19-32). Salamanca: SEIEM.

Denzin, N. K. (1978). *The Research Act: A Theoretical Introduction to Sociological Methods*. New York: Praeger.

Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM Mathematics Education*, 45, 765-777.

Fan, L, Zhu, Y. & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM Mathematics Education*, 45, 633-646.

Font, V. (2011). Investigación en Didáctica de las Matemáticas en Educación Secundaria Obligatoria. En M. Marín, G. Fernández, L.J. Blanco & M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 165-194). Ciudad Real: SEIEM.

Godino, J. D., Carrillo, J., Castro, W.F., Lacasta, E., Muñoz-Catalán, M.C. & Wilhelmi, M.R. (2012). Métodos de investigación en las ponencias y comunicaciones presentadas en los Simposios de la SEIEM. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 2, 29-52.

Gómez, P., Cañadas, M.C., Bracho, R., Restrepo, A.M. & Aristizábal, G. (2011). Análisis temático de la investigación en Educación Matemática en España a través de los Simposios de la SEIEM. En M. Marín, G. Fernández, L.J. Blanco & M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 371-382). Ciudad Real: SEIEM.

Maz-Machado, A., Bracho-López, R., Torralbo-Rodríguez, M., Gutiérrez-Arenas. M. P. & Hidalgo-Ariza M. D. (2011). La investigación en Educación Matemática en España: los Simposios de la SEIEM. *PNA*, 5(4), 163-185.

Maz, A., Torralbo, M., Vallejo, M., Fernández-Cano, A. & Rico, L. (2009). La Educación Matemática en la revista Enseñanza de las Ciencias: 1983-2006. *Enseñanza de las Ciencias*, 27 (2), 185-194.

Medina-López, C., Marín-García, J. A. & Alfalla-Luque, R. (2010). A methodological proposal for the systematic literature review. *WPOM-Working Papers on Operations Management*, 1(2), 13-30.

Pationitis, M. (2006). Textbooks at the Crossroads: Scientific and Philosophical Textbooks in 18th Century Greek Education. *Science & Education*, 15 (7-8), 801-822.

Postlethwaite, T. N. (2005). *Educational research: Some basic concepts and terminology*. Paris: International Institute for Educational Planning/UNESCO.

Scott, J. (1990). *A Matter of Record: Documentary Sources in Social Research*. Cambridge:Polity Press.

Sierra, M. (1997). Presentación. En L. Rico & M. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática I* (p. 5). Salamanca: SEIEM.

Sierra, M. (2009). Introducción al Seminario sobre análisis de libros de texto. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 3-4). Santander: SEIEM.

Onwuegbuzie, A.J. & Leech, N.L. (2007). Validity and Qualitative Research: An Oxymoron? *Quality & Quantity*, 41(2), pp. 233-249.

Ortiz, J.J. (2010). La educación estadística en los Simposios de la SEIEM (1997-2009). En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 475-486). Lleida: SEIEM.

i Este artículo surge del trabajo desarrollado por el grupo de investigación "S119-Investigación en Educación Matemática" financiado por el Plan Autonómico de Investigación del Gobierno de Aragón y el Fondo Social Europeo.

VALIDACIÓN DE UN INSTRUMENTO PARA EVALUAR EL MÁSTER EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO: ESTUDIO PILOTO EN LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICAS

Validation of an instrument to assess the Master Degree in Teacher Education: pilot study in the specialty of mathematics

Muñiz-Rodríguez, L. [a, b], Alonso, P. [a], Rodríguez-Muñiz, L. J. [a], Valcke, M. [b]

[a] Universidad de Oviedo (España), [b] Universidad de Gante (Bélgica)

Resumen

Los programas de formación inicial docente deben proporcionar al futuro profesorado unas competencias especializadas que le capaciten para el ejercicio de su profesión. En este trabajo se presenta un estudio piloto que tiene un doble objetivo. Por un lado, validar un cuestionario para evaluar la calidad de los programas de formación inicial docente en España sobre la base de la formación disciplinar del futuro profesorado de matemáticas y el dominio de competencias. Por otro lado, llevar a cabo una evaluación preliminar de dichos programas a partir de los datos obtenidos. El estudio consistió en una encuesta online en la que participaron 51 titulados del Máster en Formación del Profesorado en la especialidad de matemáticas de diferentes universidades españolas. El análisis de datos avala la validez y fiabilidad del instrumento. Los resultados indican bajos niveles de logro en todas las competencias analizadas, lo que parece indicar un déficit en los programas de formación inicial docente en España.

Palabras clave: *competencias docentes, Educación Secundaria, formación del profesorado, futuro profesorado de matemáticas.*

Abstract

Initial teacher education programs should provide future teachers with specialized competences to qualify them for the profession. In this paper we present a pilot study with a twofold goal. On one hand, the validation of an instrument to assess the quality of initial teacher education programs in Spain based on future mathematics teachers' content knowledge and the mastery of professional competences. On the other hand, a preliminary evaluation of these programs building on the results obtained. The study consisted on an online survey conducted by 51 graduates from the Master Degree in Teacher Education in mathematics from different Spanish universities. Data analysis supports the validity and feasibility of the instrument. Results show low levels of attainment in all analyzed competences, suggesting a deficit in initial teacher education programs in Spain.

Keywords: *teaching competences, secondary education, teacher education, future mathematics teachers.*

INTRODUCCIÓN

La formación inicial del futuro profesorado es un aspecto clave para garantizar la calidad del aprendizaje de los estudiantes. Investigaciones previas ponen de manifiesto la estrecha correlación entre los resultados en el aprendizaje de las matemáticas y el nivel de competencia de los docentes (Darling-Hammond, Holtzman, Gatlin & Heilig, 2005). A pesar de los numerosos intentos en los últimos años por mejorar los programas de formación para futuros profesores en Educación Secundaria en nuestro país (Rico, 2004; Santos & Lorenzo, 2015), todavía siguen siendo escasas las propuestas implementadas al respecto. Recientes investigaciones (López, Miralles & Viader, 2013; Santos & Lorenzo, 2015) cuestionan el conocimiento tanto disciplinar como didáctico del alumnado

Muñiz-Rodríguez, L., Alonso, P., Rodríguez-Muñiz, L. J., & Valcke, M. (2016). Validación de un instrumento para evaluar el Máster en Formación del Profesorado: estudio piloto en la especialidad de matemáticas. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 192-202). Málaga: SEIEM.

al finalizar el Máster en Formación del Profesorado en Educación Secundaria (MFPES), y plantean la idea de reformular el sistema de formación para la docencia a nivel de Educación Secundaria.

Desde su implementación en el curso académico 2009/2010, el MFPES ha sido foco de discusión en seminarios y comisiones de diferentes organizaciones y grupos de trabajo del territorio español en el contexto de la didáctica de las matemáticas: Comité Español de Matemáticas (CEMAT), Conferencia de Decanos de Matemáticas (CDM), Conferencia de Rectores de Universidades Españolas (CRUE), Real Sociedad Matemática Española (RSME), Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), entre otras. Pese a una valoración general positiva – no exenta de polémica (Viñao, 2013) – del MFPES con respecto al anterior Certificado de Aptitud Pedagógica, las conclusiones de las distintas comisiones (Comisión de Educación de CEMAT, 2011; Font, 2013; Palarea, 2011; Valdés & Bolívar, 2014) siguen girando en torno a la necesidad de: garantizar una formación matemática sólida de los estudiantes admitidos en el MFPES en la especialidad de matemáticas, profundizar en la coordinación entre docentes para asegurar una formación didáctica específica del contenido de la especialidad, fomentar la conexión entre la formación teórica y práctica, desarrollar un marco de competencias profesionales del futuro profesorado de matemáticas, entre otras.

El trabajo que se presenta, como parte de una investigación más amplia en el contexto de los programas de formación inicial docente para futuros profesores de matemáticas en Educación Secundaria en España, tiene como principal objetivo validar un cuestionario que permita analizar, por un lado, la formación disciplinar específica del alumnado que accede al MFPES en la especialidad de matemáticas y, por otro lado, el nivel de adquisición de competencias durante dicho programa. Las preguntas de investigación que se plantean son: ¿es válido el instrumento diseñado para analizar la formación matemática del alumnado que accede al MFPES en la especialidad de matemáticas, ¿es válido el instrumento diseñado para analizar la adquisición de competencias del alumnado que cursa el MFPES? El estudio consistió en una encuesta online en la que participaron 51 titulados del MFPES en la especialidad de matemáticas. En particular, se incluyen los resultados obtenidos en este estudio piloto para la validación del instrumento, ofreciendo una visión preliminar de algunos aspectos del MFPES. El trabajo se estructura como sigue: en primer lugar, se presenta un marco teórico sobre competencias docentes y formación matemática para la enseñanza de las matemáticas en Educación Secundaria; en segundo lugar, se describe el instrumento de análisis, así como el proceso llevado a cabo para el desarrollo del estudio piloto; por último, se presentan tanto los resultados obtenidos a partir del análisis de datos, como las conclusiones derivadas del mismo.

FUNDAMENTOS

Competencias para la enseñanza de las matemáticas en Educación Secundaria

Uno de los principales objetivos perseguidos a nivel internacional en los últimos años es una formación inicial docente basada en el desarrollo por competencias (European Commission, 2013), entendiendo por competencia docente el conjunto de conocimientos, habilidades, valores y aptitudes que conducen al desarrollo efectivo de la docencia, en un contexto multidimensional que abarca al propio docente, sus compañeros, al alumnado, sus familias, el centro y, por ende, al sistema educativo en su sentido más amplio.

En la literatura podemos encontrar diferentes modelos teóricos que caracterizan las competencias del profesor para enseñar matemáticas. Una de las primeras conjeturas sobre las bases del conocimiento del docente para la enseñanza fue desarrollada por Shulman (1986), posteriormente profundizada por Mishra y Koehler (2006) con la demandada inclusión de la tecnología en el sistema educativo. El conocido modelo TPACK (Technological Pedagogical Content Knowledge) integra los tres pilares básicos del conocimiento: el contenido, la pedagogía y la tecnología.

A partir de esta teoría surgen numerosas investigaciones en el contexto de la educación matemática que persiguen identificar el conocimiento matemático necesario para la enseñanza de esta materia. Hill, Ball y Schilling (2008) caracterizan el conocimiento matemático para la enseñanza sobre dos elementos: el conocimiento del contenido, determinado por el conocimiento común del contenido, el conocimiento especializado del contenido, y el conocimiento en el horizonte matemático; y el conocimiento pedagógico del contenido, desintegrado en conocimiento del contenido y los estudiantes, conocimiento del contenido y la enseñanza, y conocimiento del currículo.

Tomando lo anterior como fundamento, Godino (2009) propone un modelo mejorado (Modelo del Conocimiento Didáctico Matemático) basado en categorías de análisis más específicas de los conocimientos didáctico-matemáticos del docente, apoyándose en el enfoque ontosemiótico. Este enfoque es utilizado posteriormente en numerosas investigaciones que persiguen tanto caracterizar el conocimiento didáctico-matemático del docente en áreas concretas de las matemáticas (Gómez Torres, Contreras & Batanero, 2015; Pino-Fan, Godino & Font, 2014) como evaluar la formación del profesorado, tanto de Educación Primaria como Secundaria (Gonzato, Godino, Contreras & Fernández, 2013; Vásquez & Alsina, 2015).

Desde este referente teórico, en una fase preliminar a este estudio, se ha diseñado un marco de competencias para futuros docentes de matemáticas en Educación Secundaria. Para ello se han tenido también en cuenta marcos de referencia existentes a nivel internacional desarrollados por diferentes organizaciones educativas tales como el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM), la Asociación Australiana de Profesores de Matemáticas (AAMT), la Agencia de Garantía de la Calidad de la Educación Superior (QAA), entre otras. Dicho marco fue validado por expertos nacionales en matemáticas, didáctica y didáctica de las matemáticas, dando como resultado un conjunto de 33 competencias distribuidas en 12 áreas del conocimiento (Muñiz-Rodríguez, Alonso, Rodríguez-Muñiz & Valcke, 2015).

Formación matemática del futuro profesorado en Educación Secundaria

La presuposición de que la formación matemática del futuro profesorado es adecuada y sólida, es probablemente uno de los problemas más significativos y trascendentales de la formación inicial docente en España, tanto a nivel de Primaria (Rico, Gómez & Cañadas, 2014) como de Secundaria (Font, 2013). La orden ministerial que regula el MFPES (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007) establece como requisito de acceso al máster la acreditación del dominio de las competencias relativas a la especialidad que se desee cursar mediante la realización de una prueba, de la que quedarán exentos quienes estén en posesión de una titulación universitaria afín a la especialidad elegida. Sin embargo, no existe a nivel nacional un acuerdo sobre un marco de titulaciones universitarias que respondan al término *titulación afín a la especialidad*, dando lugar a una notable heterogeneidad entre las titulaciones consideradas de acceso directo al MFPES en matemáticas entre las distintas universidades españolas. Así, los resultados de un análisis previo, en el marco de esta investigación (Muñiz-Rodríguez, Alonso, Fernández-Blanco, Rodríguez-Muñiz & Valcke, 2015), manifiestan que las titulaciones más comunes que posee el alumnado que se matricula en el máster por la especialidad de matemáticas son, por orden de frecuencia: ingeniería (aeronáutica, civil, electrónica, industrial, mecánica,…) o arquitectura, matemáticas o estadística, economía, administración y dirección de empresas, física, e informática. Las carencias curriculares en contenido matemático de algunas de estas titulaciones no garantizan haber adquirido una formación matemática suficiente para acceder al MFPES, mucho menos para impartir docencia.

En la literatura, parece no existir una respuesta homogénea a la pregunta: *¿qué contenidos matemáticos se deben dominar y con qué nivel de profundidad para llegar a ser profesor de matemáticas en Educación Secundaria?*, si bien parece existir cierto consenso en que el nivel de conocimiento matemático de un docente debe ir más allá del contenido que enseña (Ernerst, 1989; Sultan & Artzt, 2011). Algunas investigaciones previas demuestran que una inadecuada o escasa formación en contenido matemático puede tener consecuencias graves sobre el aprendizaje, tales como omisión del contenido, transmisión incorrecta del mismo, o enfoque de la enseñanza de las matemáticas como un conjunto de reglas y procedimientos y no como un proceso activo de indagación (Hill, Rowan & Ball, 2005; Vásquez & Alsina, 2015).

No obstante, evaluar la formación matemática del alumnado que accede al MFPES por la especialidad de matemáticas no es tarea fácil. En el curso académico 2011/2012, López, Miralles y Viader (2013) sometieron a 33 alumnos matriculados en la especialidad de matemáticas del máster en las universidades Pompeu Fabra y Oberta de Catalunya a una prueba de contenidos matemáticos. Los resultados muestran una gran proporción de preguntas que no han sido respondidas, pudiendo deberse a que los titulados tienen reticencias a ser evaluados por miedo a poner en evidencia carencias en su formación matemática. Así, esta investigación pretende conocer la formación matemática recibida por el alumnado matriculado en el MFPES en la especialidad de matemáticas, yendo más allá de la denominación de su titulación, y de forma que se eviten los resultados de investigaciones previas fruto de la exposición a examen.

METODOLOGÍA

Población y muestra

La población de referencia para este estudio piloto está formada por todos los titulados del MFPES en matemáticas desde su implementación en el curso académico 2009/2010. Dada la dificultad de acceso a la población, se optó por un muestreo no probabilístico incidental, con una muestra resultante de 51 participantes, que representan un total de 8 universidades españolas – Cantabria, Extremadura, Jaume I de Castellón, Oviedo, Pública de Navarra, Santiago de Compostela, Valladolid, y Zaragoza – de las 51 que ofertan actualmente esta especialidad. La tasa de respuesta obtenida fue adecuada (24.9%) tratándose de un estudio online y de un muestreo intencional.

Instrumento

El instrumento diseñado para la recogida de datos consta de tres secciones: perfil del individuo, competencias para la enseñanza de las matemáticas en Secundaria, y evaluación del cuestionario.

La primera sección se centra en variables demográficas (edad, sexo), formación académica (titulación universitaria, nivel de desempeño académico en educación universitaria, formación matemática recibida), características del programa en formación inicial docente (universidad, curso académico, especialidad, vía de acceso) e interés por la profesión (motivación para ser docente y futuro en la docencia). Para el diseño de estas preguntas se tuvieron en cuenta algunos ítems (Brese & Tatto, 2012) utilizados en el TEDS-M (Teacher and Education Development Study in Mathematics), primer estudio internacional comparativo sobre el conocimiento adquirido por el futuro profesorado de matemáticas en Educación Primaria y Educación Secundaria Obligatoria al acabar su formación inicial desarrollado en 2008. Recordemos que la participación española en el estudio quedó limitada a la evaluación de futuro profesorado de Educación Primaria (Sanz & Martín, 2014). En particular, se han tomado como referencia las cuestiones del TEDS-M relativas a:

1. Contenidos matemáticos estudiados antes de iniciar el MFPES. La formación matemática del futuro profesorado se mide mediante 18 indicadores de contenido matemático agrupados en 4 dominios: estructuras discretas y lógica, geometría, continuidad y funciones, y probabilidad y estadística. Los participantes deben indicar para cada uno de ellos si los han estudiado en algún momento anterior a su incorporación al MFPES.
2. Vocación del alumnado con respecto a la labor docente. Los participantes tienen que indicar la medida en que seis motivos diferentes justifican su intención de ser profesor, así como su expectativa como profesor de matemáticas en Educación Secundaria en una escala de (1) *No busco trabajo como profesor* a (7) *Espero que sea mi profesión para toda la vida*.

La segunda parte del cuestionario pretende analizar la percepción del alumnado sobre las competencias para la enseñanza de las matemáticas en el MFPES mediante tres escalas:

1. Importancia de cara a la labor como profesor de matemáticas en Educación Secundaria.
2. Nivel de desarrollo, *¿en qué medida se ha trabajado cada competencia durante el MFPES?*
3. Nivel de dominio, *¿en qué medida el MFPES le ha capacitado para desarrollar cada competencia?*

Para ello, se toma como referencia el marco de competencias docentes diseñado y validado previamente (Muñiz-Rodríguez, Alonso, Rodríguez-Muñiz & Valcke, 2015), tal y como se ha explicado con anterioridad. Para cada ítem se utiliza una escala Likert de siete puntos.

Por último, el cuestionario incluye una sección final con el objetivo de conocer la opinión de los participantes acerca del instrumento, esto es, adecuación de las preguntas, errores en la redacción que dificulten su correcta comprensión, duración de la encuesta, entre otros.

Recogida y análisis de datos

El cuestionario se diseñó mediante la plataforma LimeSurvey®, una aplicación libre que permite el diseño, publicación, administración y recopilación de datos de una encuesta en línea. Los participantes fueron contactados vía correo electrónico, a través del cual se les facilitó el enlace para participar en el estudio piloto. El posterior análisis de datos se llevó a cabo utilizando los softwares SPSS®, para el análisis cuantitativo, y Weft QDA, para el análisis cualitativo.

RESULTADOS

Perfil de los participantes

La edad media de los titulados que participaron en el estudio piloto fue de 30.82 años, con una desviación típica de 5.46, y con valores mínimo de 23 y máximo de 48 años. El 72.5% de los participantes eran mujeres. Así, es posible identificar cierta semejanza entre el perfil demográfico del profesorado en formación de Educación Primaria y de Educación Secundaria, teniendo en cuenta la afinidad de estos resultados con los del TEDS-M (INEE, 2013).

Formación matemática del futuro profesorado en Educación Secundaria

En primer lugar, se analizó la titulación de acceso al MFPES de los titulados en la especialidad de matemáticas, obteniendo como resultado 17 titulaciones universitarias diferentes: matemáticas (n_1 = 22), una amplia gama de ingenierías (n_2 = 21), administración y dirección de empresas (n_3 = 3), química (n_4 = 3), arquitectura (n_5 = 1), y estadística (n_6 = 1). La mayoría de los titulados situaron su nivel de rendimiento académico en educación universitaria en las categorías de *aprobado* o *notable*.

La tabla 1 muestra el porcentaje de titulados que habían estudiado cada contenido matemático en algún momento anterior a su incorporación al MFPES en la especialidad de matemáticas. Más de un 80% de los encuestados reconocen haber estudiado los ítems A, B, F, J, K, L, N, O, Q y R en algún momento anterior a su incorporación al MFPES. Los contenidos matemáticos restantes – C, D, E, G, H, I, M, P y S – fueron estudiados por entre un 60.8% y un 76.5% de los encuestados.

Asimismo, los resultados del análisis correlacional entre la titulación universitaria de los participantes y su formación matemática señalan diferencias significativas en todas las áreas, salvo en probabilidad y estadística. Esta singularidad se comenta con más detalle en la siguiente sección.

Interés por la profesión docente

Las motivaciones más valoradas son de naturaleza intrínseca o vocacional (gusto por las matemáticas, talento para ser profesor, entusiasmo por trabajar con gente joven), recibiendo las motivaciones de tipo extrínseco o profesional (salario, seguridad a largo plazo que ofrece la profesión docente) calificaciones menos acentuadas. Asimismo, la mitad de los participantes mostraron una gran aspiración por desarrollar su carrera profesional en el ámbito de la enseñanza.

Tabla 1. Contenidos matemáticos estudiados previo acceso al MFPES en matemáticas

Área de las matemáticas	Contenido matemático	%
Estructuras discretas y lógica	Números y operaciones (A)	96.1%
	Álgebra lineal (B)	98.0%
	Teoría de conjuntos (C)	74.5%
	Álgebra abstracta (D)	60.8%
	Matemática aplicada o discreta (P)	76.5%
	Lógica matemática (S)	68.6%
Geometría	Fundamentos de geometría o geometría axiomática (E)	72.5%
	Geometría analítica o geometría de coordenadas (F)	98.0%
	Geometría no-euclídea (G)	72.5%
	Geometría diferencial (H)	74.5%
	Topología (I)	70.6%
Continuidad y funciones	Introducción al cálculo (J)	100.0%
	Cálculo (K)	100.0%
	Cálculo de varias variables (L)	98.0%
	Cálculo avanzado, análisis real, teoría de la medida (M)	66.7%

	Ecuaciones diferenciales (N)	94.1%
	Variable compleja y análisis funcional (O)	80.4%
Probabilidad y estadística	Probabilidad (Q)	94.1%
	Estadística teórica o aplicada (R)	96.1%

Competencias para la enseñanza de las matemáticas en Educación Secundaria

La tabla 2 muestra los resultados sobre la escala Likert de 7 puntos de las tres medidas de análisis – importancia, nivel de desarrollo, y nivel de dominio – de las competencias para la enseñanza de las matemáticas en Educación Secundaria en el MFPES desde el punto de vista de los titulados que participaron en el estudio. A pesar de que los futuros profesores de matemáticas en Educación Secundaria consideran relativamente importantes todas las competencias (mín. $_{\text{importancia}}$ = 5.02, máx. $_{\text{importancia}}$ = 6.33), opinan que estas han sido débilmente trabajadas durante el MFPES (mín. $_{\text{desarrollo}}$ = 3.31, máx. $_{\text{desarrollo}}$ = 5.14) y, por tanto, no creen estar suficientemente capacitados en cada una de ellas (mín. $_{\text{dominio}}$ = 3.55, máx. $_{\text{dominio}}$ = 5.04).

Por último, se analizó mediante una prueba t para una muestra, si existen diferencias significativas entre el nivel de dominio manifestado por los titulados en cada competencia y el nivel deseado, tomando como referencia el modelo *mastery learning* de Zimmerman y Dibenedetto (2008) que establece un nivel de dominio mínimo del 80%. El análisis muestra que existen diferencias significativas entre ambos indicadores, siendo el nivel de dominio inferior al índice de referencia en todas las competencias (el valor de la t es siempre negativo).

Calidad del instrumento

El análisis de las propiedades psicométricas, realizado mediante el coeficiente alfa de Cronbach para las escalas de importancia ($\alpha_{\text{importancia}}$ = 0.955), desarrollo ($\alpha_{\text{desarrollo}}$ = 0.973) y dominio (α_{dominio} = 0.977) del conjunto de competencias, refleja una alta fiabilidad. Las respuestas a la última pregunta aseguran que todos los enunciados son claros y que el instrumento es coherente para el análisis del MFPES en matemáticas. El TEDS-M avala la validez y fiabilidad del resto de ítems.

Tabla 2. Competencias para la enseñanza de las matemáticas en Educación Secundaria

Dominio/ Competencia	Importancia M (DT)	Desarrollo M (DT)	Dominio M (DT)
A. Conocimiento matemático…			
Conocer y comprender el contenido…	6.00 (1.077)	3.96 (1.442)	4.02 (1.516)
Conocer la historia y desarrollos recientes…	5.24 (1.274)	3.75 (1.412)	3.76 (1.491)
B. Conocimiento en DM…			
Identificar concepciones/ dificultades/ errores…	6.22 (1.083)	4.16 (1.541)	4.12 (1.395)
Comunicar y representar contenido matemático…	6.33 (0.887)	4.20 (1.536)	4.47 (1.641)
Relacionar conceptos matemáticos…	6.20 (0.960)	4.29 (1.591)	4.47 (1.515)
Conocer principales líneas investigación DM…	5.45 (1.238)	3.90 (1.628)	3.96 (1.536)
C. Teoría del proceso enseñanza-aprendizaje…			
Seleccionar estrategias creativas e innovadoras…	5.92 (1.163)	4.39 (1.550)	4.41 (1.458)
Explicar el impacto de las estrategias de aprendizaje…	5.24 (1.176)	3.63 (1.399)	3.63 (1.356)
Utilizar variedad de materiales y recursos…	5.73 (1.234)	4.43 (1.700)	4.45 (1.540)
Conocer recursos para profesorado de matemáticas…	5.27 (1.060)	4.10 (1.300)	4.20 (1.265)
D. Gestión del aula…			
Incorporar normas y hábitos de comportamiento…	5.47 (1.155)	3.73 (1.601)	4.04 (1.574)
Utilizar diversas técnicas para motivar al alumnado…	6.24 (1.142)	4.12 (1.716)	4.33 (1.717)
Hacer uso eficiente del espacio del aula…	5.29 (1.361)	3.78 (1.579)	3.94 (1.690)
Fomentar situaciones de aprendizaje matemático…	5.84 (1.065)	3.94 (1.502)	4.02 (1.435)
E. Planificación de las enseñanzas…			
Planificar lecciones bien estructuradas…	5.82 (1.090)	4.67 (1.583)	4.67 (1.506)
Conocer los documentos curriculares vigentes…	5.49 (1.206)	5.14 (1.400)	5.04 (1.385)
Planificar tareas y actividades fuera del aula…	5.45 (1.222)	3.76 (1.544)	4.10 (1.688)

F. Evaluación y tutoría…			
Aplicar diferentes métodos y técnicas de evaluación…	5.69 (1.273)	4.06 (1.542)	4.08 (1.495)
Utilizar resultados de la evaluación para planificar…	5.76 (1.210)	3.75 (1.495)	3.86 (1.429)
Proporcionar retroalimentación a alumnado, familias...	5.67 (1.089)	3.57 (1.578)	3.73 (1.484)
G. Desarrollo personal del estudiante…			
Conocer las características del alumnado…	5.96 (1.038)	4.31 (1.435)	4.47 (1.433)
Conocer las etapas del desarrollo cognitivo…	5.78 (1.083)	4.65 (1.309)	4.51 (1.433)
Adaptar el proceso de enseñanza al desarrollo…	5.75 (0.997)	4.22 (1.419)	4.14 (1.470)
H. Inclusión y atención a la diversidad…			
Identificar las necesidades educativas del alumnado…	6.20 (0.749)	4.12 (1.608)	3.92 (1.495)
Adaptar el proceso de enseñanza a las necesidades…	5.84 (1.027)	4.00 (1.697)	4.02 (1.594)
Saber cuándo colaborar con el personal de apoyo…	5.80 (0.849)	3.94 (1.793)	3.88 (1.751)
I. Tecnologías de la información y la comunicación…			
Aplicar TIC dentro de los entornos educativos…	5.63 (1.058)	4.51 (1.554)	4.57 (1.404)
J. Habilidades comunicativas…			
Utilizar técnicas de comunicación verbal y no verbal...	5.57 (1.044)	3.96 (1.661)	4.04 (1.536)
K. Participación en la comunidad educativa…			
Participar en la definición del proyecto educativo…	5.02 (1.208)	3.65 (1.585)	3.88 (1.519)
Participar en la toma de decisiones del centro…	5.25 (1.214)	3.31 (1.581)	3.55 (1.527)
L. Ética profesional…			
Mostrar cualidades intrapersonales, como…	6.16 (1.120)	4.10 (1.513)	4.45 (1.629)
Contribuir a mejorar la enseñanza de matemáticas…	5.92 (0.977)	4.00 (1.549)	4.35 (1.610)
Comprometerse con el desarrollo profesional…	5.71 (0.944)	3.53 (1.515)	4.04 (1.788)

Nota. M = Media. DT = Desviación típica. DM = Didáctica de las matemáticas.

DISCUSIÓN

Los resultados de este estudio piloto han permitido validar el instrumento diseñado para evaluar la calidad de la formación inicial docente en España para futuro profesorado de matemáticas en Educación Secundaria y avalan su idoneidad para ser utilizado en estudios a mayor escala.

Se considera oportuno introducir un cambio respecto al planteamiento definido en el cuestionario TEDS-M en el dominio *probabilidad y estadística.* Sobre la base de los resultados obtenidos en el análisis correlacional entre la titulación universitaria y la formación matemática en esta área, se sugiere una nueva caracterización, la cual busca representar de manera más adecuada las diferencias curriculares en materia de probabilidad y estadística existentes, por ejemplo, entre una titulación en matemáticas y una ingeniería. De cara a un análisis más preciso, se proponen los siguientes contenidos: *introducción al cálculo de probabilidades, procesos estocásticos, estadística descriptiva, vectores aleatorios y sucesiones de variables aleatorias,* e *inferencia estadística.*

Por otro lado, a partir de los datos recogidos ha sido posible llevar a cabo una evaluación preliminar de la especialidad de matemáticas del MFPES y detectar algunas carencias en cuanto a la formación matemática del alumnado que accede a dicho máster y al dominio de competencias por parte de los titulados una vez finalizado el programa.

En primer lugar, y en línea con investigaciones anteriores (López, Miralles & Viader, 2013), la formación matemática del alumnado que accede al MFPES es, en algunos casos, insuficiente (véase tabla 1). Los criterios impuestos por algunas universidades sobre qué titulaciones dan acceso directo a la especialidad del máster deben ser revisados, ya que acreditar estar en posesión de una titulación universitaria que no sea matemáticas no asegura, en algunos casos, haber recibido una formación disciplinar lo suficientemente sólida como para impartir esta materia. Este déficit también ha sido detectado en la formación inicial de maestros (Rico, 2014).

Los datos recogidos acerca del rendimiento académico en educación universitaria del alumnado que accede al máster muestran que en España no existe un criterio de selección de candidatos a la profesión docente en base a un mínimo en su expediente académico universitario, como sí lo hacen otros países (por ejemplo, Finlandia). Estudios previos indican que los mejores sistemas educativos atraen a la docencia a candidatos con mejores calificaciones (Castejón, 2015), factor que contribuye, junto con las conclusiones previas, a la revisión de los criterios de admisión al MFPES.

Entre los resultados obtenidos acerca de las competencias para la enseñanza de las matemáticas en Secundaria encontramos uno de los problemas más críticos del MFPES. Los titulados indican que la mayoría de las competencias no han sido trabajadas lo suficiente durante el programa de formación, y por tanto aseguran que el MFPES no les ha capacitado para su dominio. Las competencias que no se han desarrollado de manera adecuada según los titulados, apuntan en algunos casos a aspectos esenciales de la profesión docente, como por ejemplo, ser capaz de explicar el impacto que tienen sobre el alumnado las estrategias adoptadas para el aprendizaje de las matemáticas, proporcionar retroalimentación constructiva, útil y oportuna al alumnado, sus familias y a otros profesionales del centro, identificar las diferentes necesidades educativas del alumnado, entre otras (véase tabla 2).

Por último, también es relevante el predominio de razones vocacionales frente a profesionales para ser docente, teniendo en cuenta el impacto significativo que la motivación tiene sobre la formación del profesorado (INEE, 2013) y la profesionalidad del profesorado (Larrosa, 2010).

Los resultados preliminares de este estudio piloto parecen indicar un problema de calidad en el sistema de formación inicial docente en España. El siguiente paso de esta investigación será llevar a cabo un estudio a mayor escala en el que participen no solo estudiantes y titulados del MFPES en la especialidad de matemáticas, sino también docentes del máster y tutores de prácticas en centros de Educación Secundaria. Este enfoque desde múltiples perspectivas enriquecerá las conclusiones del estudio, y permitirá identificar aquellas competencias débilmente trabajadas y desarrolladas durante el MFPES, a partir de las cuales se desarrollarán propuestas de intervención que permitan al futuro profesorado lograr el principal objetivo que persiguen los programas de formación inicial docente, esto es, adquirir una formación especializada que les capacite para el ejercicio de su profesión.

AGRADECIMIENTOS

El equipo de esta investigación agradece a todos los participantes su colaboración e interés durante el desarrollo de este estudio piloto. Sus opiniones y sugerencias como titulados del MFPES en la especialidad de matemáticas fueron de gran utilidad para la validación del instrumento.

Referencias

Brese, F., & Tatto, M. T. (Eds.). (2012). *TEDS-M 2008 Users Guide for the International Database. Supplement 1*. Hamburg: IEA.

Comisión de Educación de CEMAT. (2011). Seminario 2010 de la Comisión de Educación del Comité Español de Matemáticas CEMAT. *Suma, 66*, 137-139.

Castejón, J.L. (2015). *Aprendizaje y rendimiento académico*. Alicante: Editorial Club Universitario.

Darling-Hammond, L., Holtzman, D. J., Gatlin, S. J., & Heilig, J. V. (2005). Does Teacher Preparation Matter? Evidence about Teacher Certification, Teach for America, and Teacher Effectiveness. *Education Policy Analysis Archives, 13*(42).

Ernest, P. (1989). The knowledge, beliefs, and attitudes of the mathematics teacher: a model. *Journal of Education for Teaching, 15*(1), 13-33.

European Commission. (2013). *Supporting teacher competence development for better learning outcomes.* European Commission Education and Training.

Font, V. (2013). La formación inicial del profesor de matemáticas de Secundaria en España. *Revista Binacional Brasil Argentina, 2*(2), 49-62.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos de profesor de matemáticas. *UNIÓN, 20,* 13-31.

Gómez Torres, E., Contreras, J. M., & Batanero, C. (2015). Significados de la probabilidad en libros de texto para Educación Primaria en Andalucía. En Fernández, C., Molina. M., & Planas, N. (eds.). *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 73-87). Alicante: SEIEM.

Gonzato, M., Godino, J. D., Contreras, A., & Fernández, T. (2013). Conocimiento especializado de futuros maestros de primaria sobre visualización de objetos tridimensionales. En Berciano, A., Gutiérrez, G., Estepa, A., & Climent, N. (eds.). *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 311-318). Bilbao: SEIEM.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400.

Hill, H. C., Rowan B., & Ball, D. L. (2005). Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journal, 42*(2), 371-406.

INEE. (2013). *TEDS-M. Estudio Internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros. Informe Español. Volumen II. Análisis secundario.* Madrid: MECD.

Larrosa, F. (2010). Vocación docente versus profesión docente en las organizaciones educativas. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 13*(4), 43-51.

López, M., Miralles, J., & Viader, P. (2013). Tres años del Máster de Formación del Profesorado de Secundaria de Matemáticas. *Suma, 72*, 31-36.

Ministerio de Educación y Ciencia. (2007). Orden ECI/3858/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de las profesiones de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado*, 312, 53751–53753.

Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teacher College Record, 108*(6), 1017-1054.

Muñiz-Rodríguez, L., Alonso, P., Fernández-Blanco, T., Rodríguez-Muñiz, L. J., & Valcke, M. (2015). ¿Cuál es el perfil de los futuros profesores de matemáticas en Educación Secundaria? En Fernández, C., Molina, M., & Planas, N. (eds.) *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 575). Alicante: SEIEM.

Muñiz-Rodríguez, L., Alonso, P., Rodríguez-Muñiz, L. J., & Valcke, M. (2015). Validación de un marco de competencias para futuros profesores de matemáticas en Educación Secundaria. En Pérez, R., Rodríguez-Martin, A., & Álvarez, E. (eds.) *Innovación en la Educación Superior. Desafíos y propuestas* (pp. 219-226). Oviedo: Ediciones de la Universidad de Oviedo.

Palarea, M. (2011). Informe del Seminario: La formación inicial del profesorado de matemáticas ante la implantación de los nuevos grados en infantil, primaria y máster de secundaria. *Educatio Siglo XXI, 29*(2), 225-234.

Pino-Fan, L. R., Godino, J. D., & Font, V. (2014). Explorando aspectos relevantes del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada de profesores en formación inicial. En González, M. T., Codes, M., Arnau, D. & Ortega, T. (eds.). *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 513-522). Salamanca: SEIEM.

Rico, L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria. *Profesorado: Revista de curriculum y formación del profesorado, 8*(1), 1.

Rico, L., Gómez, P., & Cañadas, M. C. (2014). Formación inicial en educación matemática de los maestros de primaria en España, 1991-2010. *Revista de educación, 363*, 35-59.

Santos, M. A., & Lorenzo, M. (2015). La formación del profesorado de Educación Secundaria: pensando en la reconstrucción del proyecto universitario. *Revista Española de Pedagogía, 73*(261), 479-492.

Sanz, I., & Martín, R. (2014). El estudio TEDS-M de la IEA en el marco del Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE). En González, M. T., Codes, M., Arnau, D., & Ortega, T. (eds.). *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 67-81). Salamanca: SEIEM.

Shulman, L. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Sultan, A., & Artzt, A. F. (2011). *The mathematics that every secondary school math teacher needs to know*. New York: Routledge, Taylor & Francis Group.

Valdés, R., & Bolívar, Bolívar, A. (2014). La experiencia española en formación del profesorado: el máster en educación secundaria. *Ensino Em Re-Vista, 21*(1), 159-173.

Vásquez, C., & Alsina, A. (2015). Evaluación del conocimiento común del contenido para enseñar probabilidad en profesores de Educación Primaria. En Fernández, C., Molina, M., & Planas, N. (eds.). *Investigación en Educación Matemáticas XIX* (pp. 511-520). Alicante: SEIEM.

Viñao, A. (2013). Modelos de formación inicial del profesorado de Educación Secundaria en España (siglos XIX-XXI). *Revista Española de Educación Comparada*, *22*, 19-37.

Zimmerman, B. J., & Dibenedetto, M. K. (2008). Mastery learning and assessment: Implications for students and teachers in an era of high-stakes testing. *Psychology in the Schools*, 45(3), 206-216.

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO,MOVILIZADO Y EMERGENTE, EN UNA CLASEDE PRIMARIASOBRE LAS POSICIONES RELATIVAS DE LAS RECTAS

Specialisedknowledge which ismobilised and emerges in a Primary school class when dealing with the relative positions of straight lines

Víctor J. Barrera Castarnado[a,b], María del Mar Liñán García[a,b], Mª Cinta Muñoz-Catalán[a], Luis Carlos Contreras González[c]

[a]Universidad de Sevilla, [b]Centro de Estudios Universitarios Cardenal Spínola CEU, [c]Universidad de Huelva

Resumen

Presentamos el análisis de un episodio en la observación de una maestra de quinto curso de educación primaria cuando enseña geometría. Basándonos en el modelo analítico de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK),analizamos el conocimiento de los contenidos relacionados conlas posiciones relativas delas rectas (particularizando en las paralelas)movilizados en el aula, permitiéndonos reflexionar sobre el conocimiento especializado que permitiría una mejor gestión de la enseñanza de lasituación descrita. Mostraremos que el análisis desde MTSK no solo permite identificar el conocimiento especializado del profesor, sino que también nos ayuda a reflexionar sobre el conocimiento que permitiríaaprovecharlas oportunidades que brinda el análisis del aula.

Palabras clave: *MTSK, Conocimiento Profesional, Geometría, recta, posiciones relativas de las rectas.*

Abstract

We present the analysis of an episode in the observation of a fifth grade Primary school teacher when teaching geometry. Based on the analytical model Mathematics Teachers'Specialised Knowledge (MTSK), we analyse the knowledge of contents related to the relative positions of straight lines (focusing on parallels) that aremobilised in the class. This allows us to reflect on what has to be the specialised knowledge needed for a bettermanagement in teaching which emerges in the described situation. We will show that the analysis from MTSK not only identifies the specialised knowledge of the teacher, but also helps us to reflect on the knowledge that would makeit possible to take advantage of the opportunities offered by the analysis of the class.

Keywords: *MTSK, Professional Knowledge, Geometry, straight line, straight lines relative positions.*

INTRODUCCIÓN

Los principios para la educación matemática (NCTM, 2000, p. 18) indican que la *eficacia docente exige saber matemáticas, tener en cuenta que los estudiantes son aprendices y disponer de estrategias pedagógicas,* lo que implica un conocimiento especializado tanto desde el contenido matemático como desde el didáctico, con una óptima gestión de las oportunidades que emergen en

Barrera, V.J., Liñán, M.M., Muñoz-Catalán, C. y Contreras, L.C. (2016). Conocimiento especializado, movilizado y emergente, en una clase de primaria sobre las posiciones relativas de las rectas. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 203-214). Málaga: SEIEM.

el aula. Sin embargo, en trabajos recientes (Liñán y Contreras, 2013, Liñán, Montes y Contreras, 2015), se han puesto de manifiesto las dificultades en el conocimiento especializado en Geometría de los estudiantes para maestro (EPM) y las carencias en los contenidos relacionados con la recta, semirrecta y segmento de una maestra en ejercicio, respectivamente. La unión de ambas ideas nos ha hecho reflexionar sobre el conocimiento especializadoque permitiríauna mejor gestión de la enseñanza de estos conceptos geométricos en primaria, lo que nos podría llevar a pensar sobre cómo mejoraría una sesión de clase el hecho de tener en cuenta los conocimientos emergentes en el aula y la gestión que de ellos se podría hacer.

Para responder a nuestro interés, hemos observado a una maestra mientras enseñaba geometría en 5º de primaria, centrándonos en el episodio sobre las posiciones relativas de las rectas. Desde una perspectiva interpretativa, hemos realizado el análisis con la lente teórica que nos proporciona el modelo sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) y la teoría *embodiedcognition* en lo referente a las metáforas cognitivas, viendo quese reflejan conocimientos tanto explícitos como subyacentes, formando parte ambos del conocimiento emergente en el aula.

Entendemos como subyacentes aquellos conceptos, procesos y procedimientos que a priori no son susceptibles de ser tratados (total o parcialmente[ii]) en el nivel en el que nos encontramos (no aparecen en el currículum oficial ni en los textos usados por los alumnos y la maestra), pero que están íntimamente relacionados con el contenido tratado. Pretendemos con este trabajo, además, establecer los posibles beneficios que para la formación de maestros podría tener la gestión de las oportunidades ofrecidas al tomar conciencia de la existencia de dichos contenidos emergentes.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

El modelo analítico del *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (MTSK)(Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2014) está basado en la especialización como eje del conocimiento del profesor de matemáticas, dividiendo el mismo en seis subdominios, tres de ellos relacionados con el contenido matemático y otros tres con el didáctico.

En el conocimiento matemático (MK) encontramos tres subdominios: el conocimiento de los temas (KoT), el conocimiento de la estructura matemática (KSM) y el conocimiento de la práctica matemática (KPM), mientras que en el conocimiento didáctico del contenido (PCK) tendríamos el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM), el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) y el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS).

Especificando dentro de cada subdominio del MK, podemos distinguir en el KoT los contenidos matemáticos en sí mismos, dividiendo estos en seis categorías. La *fenomenología* considera los conocimientos del profesor sobre los fenómenos relacionados con un tema que pueden generar conocimiento matemático y los usos y aplicaciones del mismo. La segunda categoría serían las *propiedades y sus fundamentos* de un tema en particular; la tercera, *registros de representación*, reúne el conocimiento del profesor sobre las diferentes maneras en las que puede representar un tema. La categoría *definiciones* está muy ligada a la categoría de propiedades y sus fundamentos, pues considera el conjunto de propiedades que hacen definible a un tema, además de las formas alternativas de hacerlo. En la categoría*procedimientos*se recogen tanto los algoritmos estándares como los alternativos y todos los argumentos, fundamentos y características que a ellos llevan, entendiendo algoritmo en su sentido amplio.Finalmente, debemos remarcar que el modelo considera dentro de este subdominio las conexiones intraconceptuales.

Dentro del KSM, donde se tienen en cuenta las conexiones interconceptuales, observamos cuatro categorías. Las conexiones de *complejización* y de *simplificación*, en las que se relacionan contenidos enseñados con otros posteriores o anteriores, respectivamente; las conexiones de *contenidos transversales*, que relacionan entre sí contenidos que comparten ciertas cualidades y características, como las relaciones de equivalencia y las figuras geométricas congruentes; finalmente, las conexiones *auxiliares* se producen entre contenidos que sirven de apoyo vehicular tanto para conceptualizar como para resolver.

En el KPM consideramos dos categorías: las *prácticas ligadas a la matemática en general*, y las *prácticas ligadas a un tema en particular*. En ambos casos se considera el conocimiento que tiene el profesor acerca de la lógica proposicional, modos de proceder y sintaxis propia de las matemáticas, particularizando o no en un tema concreto.

En cuanto al PCK, el KFLM distingue cuatro categorías. Las *formas de aprendizaje* engloban el conocimiento del profesor sobre cómo aprenden matemáticas sus alumnos. Las *fortalezas y dificultadesasociadas al aprendizaje*encierran el conocimiento del profesor acerca tanto de los errores, obstáculos y dificultades como de la facilidad de aprendizaje relacionados con un tema concreto. Las *formas de interacción de los alumnos con el contenido* y las *concepciones* de los estudiantes sobre las matemáticas, relativas a sus expectativas e intereses, completan este subdominio.

En el KMT se definen tres categorías. El conocimiento de *teorías personales o institucionales de enseñanza*, el conocimiento de *recursos materiales y virtuales* y el conocimiento sobre *actividades, tareas, ejemplos y ayudas*, distinguiéndose esta última categoría de la anterior en la intencionalidad por parte del docente en su uso.

El KMLS implica el conocimiento tanto del currículum oficial vigente en cada país, como de los estándares y principios determinados por organizaciones destacadas en la didáctica de las matemáticas.

Por otro lado,hemos querido tener en cuenta el papel de las metáforas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Font, Bolite, Acevedo, 2010), fundamentadas en la *teoría sobre cognición corporizada* (embodiedcognitiontheory), propuesta inicialmente por Lakoff y Núñez (2000). Estos autores ubican en los procesos cognoscitivos cotidianos, como el pensamiento metafórico, las matemáticas generadas individualmente, institucionalmente o por asociaciones de expertos (Font y Acevedo, 2003).Para este trabajo nos centraremos en el concepto de metáfora cognitiva interpretándola como la comprensión de un ente matemático en términos de otro, ya sea este segundo matemático o no. Las metáforas generan una relación conceptual entre un dominio de partida, *sourcedomain*, y un dominio de llegada, *target domain*, siendo el primero el que nos permite conceptualizar al segundo. Por ejemplo, en el contexto de la educación infantil, "la pizarra es un rectángulo", que relacionaría un dominio externo a la matemática con uno interno (*groundingmetaphor*),o bien "los números naturales son los cardinales de los conjuntos discretos", en el que el dominio de partida y el de llegada serían matemáticos (*linkingmetaphor*).

DISEÑO METODOLÓGICO

El modelo MTSK fundamenta la respuesta a nuestra pregunta de investigación: ¿qué conocimiento especializado puede identificarse en el análisis de un episodio de aulaque permitiera una mejor gestión de la enseñanza de las posiciones relativas de las rectas en primaria? De esta pregunta podemos derivar como objetivo identificar el conocimiento especializado de una maestra de primaria en relación con las posiciones relativas de las rectas, tanto el presente en el aula como el que podría emerger en la situación gestionada por la maestra.

Hasta ahora nos ha interesado comprender el conocimiento especializado de los profesores de nuestros estudios, observando sus potencialidades y limitaciones. En este trabajo queremosampliar nuestro foco de atención y aprovechar la oportunidad que nos brinda el análisis de un episodio de aula para comprender no solo el conocimiento movilizado por la maestra en esa situación, sino para identificar el conocimiento que podría emerger de la práctica observada para una gestión alternativa del contenido matemático en cuestión. Esto supone, entre otros aspectos, estar atentos también a intervenciones de alumnos y a las situaciones que se generan en el aula.

Nos situamos en el paradigma interpretativo (Bassey, 1995) y en el contexto general de un estudio de caso de tipo instrumental (Stake, 2005), del que, en este trabajo, ofreceremos el análisis de un episodio. Accedemos a la información desde la observación del grupo profesor-alumnos en un aula de 5º de primaria en el que una maestra,con más de 30 años de experiencia en educación primaria,enseña geometría.La clase está ubicada en un colegio público de Sevilla. La maestra toma como apoyo principal el libro de texto para diseñar sus clases, haciendo uso de lecturas de divulgación matemática para provocar reflexión en el aula. Hemos registrado en vídeo (con el consentimiento de las partes) todo lo ocurrido en el aula(observación directa sin intervención) cuando se trabajanlas posiciones relativas de las rectas, centrándonos en las rectas paralelas para este trabajo.La transcripción literal del mismo y las notas de campo obtenidas en el momento de la toma de datos, han permitido, una vez realizada una primera identificación de los dominios, subdominios y categorías desde la perspectiva MTSK, el diseño de la entrevista semiestructurada con la maestra y su posterior análisis.

Para el análisis de los datos hemos procedido identificando evidencias, indicios y oportunidades (Escudero-Ávila, Carrillo *et al.,* 2015), no solo sobre las manifestaciones de la maestra en la transcripción, sino también sobre las situaciones que se generan en el aula, muchas veces vinculadas a preguntas y reacciones de los alumnos,así como a la forma en que la maestra las gestiona, lo que nos ha proporcionado ocasiones de reflexión sobre el MTSK emergentepara una mejor gestión de las oportunidades de aprendizaje en el aula de 5º de primaria para trabajar la geometría.En cuanto a la identificación de las metáforas cognitivas, solo consideraremos las que constituyen evidencias del conocimiento especializado.

Somos conscientes de que las respuestas de un maestro a dichas situaciones están sujetas a condicionantes varios, como los vinculados a su propia programación u organización temporal de los contenidos que imparte, y que, por tanto, para obtener información acerca de su conocimiento sería necesario acceder a ella interrogándole sobre las razones de tales respuestas. Este no ha sido el caso. No ha sido nuestra intención evaluar el conocimiento puesto en juego, sino comprender las características del conocimiento que la gestión de una determinada situación pone de relieve, tanto el que realmente se moviliza como el subyacente emergente. No enjuiciamos, por ello, las decisiones tomadas por la maestra de nuestro estudio y asumimos, además, que otras opciones diferentes a las que nosotros analizaremos habrían sido igualmente válidas. Nuestra intención es poner de relieve que el análisis de la práctica con MTSK, además de mostrar el conocimiento especializado puesto en juego nos permite identificar también vías alternativas de gestión de la situación analizada y el conocimiento especializado implicado en ellas.

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

En la segunda parte de la primera clase sobre geometría en 5º de primaria, tras haber definido y ejemplificado la recta, semirrecta y segmento, se tratan las posiciones relativas de las rectas. Nos vamos a centrar en el episodio en el que trabajan las rectas paralelas.

Los alumnos tienen el libro abierto en la página correspondiente a las definiciones de recta, semirrecta y segmento, donde también aparece la clasificación de las rectas según su posición. Esto les permite adelantarse al contenido y recordar significados, por lo que comienza el episodio con uno de los alumnos diciendo:“*pues lo siguiente es todavía más fácil”*. La maestra confirma esta sensación dibujando en la pizarra dos segmentos horizontales y paralelos (utiliza la cuadrícula de la pizarra para ello). Tras preguntar cómo son esas rectas y de qué otra manera podrían ser, prolonga los segmentos hasta el final de la pizarra para hacer una comprobación *empírica* de lo que plantean los alumnos: no se *tocan* por mucho que *se prolonguen*. Sin que aparentemente sean conscientes de ello, emergenvarias situaciones problemáticas: qué significa *prolongar* una recta, en qué contexto están situando dichas rectas (*plano o espacio*) y cuál es el concepto de *distancia entre rectas* aplicable. El puente conceptual establecido al identificar la representación de la recta con el segmento podríamos identificarlo como una *linkingmetaphor* sinécdoque (Font, Godino, Planas, Acevedo, 2010), es decir, parte-todo, puesto que se está identificando el segmento (la parte) con el todo (la recta).

Veamos el siguiente fragmento, en el que se introducen los conceptos y propiedades relacionados con las rectas paralelas (M: Maestra; A: alumnos). Después lo analizaremos refiriéndonos al número asignado a cada intervención de este diálogo.

A. Pues lo siguiente es todavía más fácil.

M. Claro. Mirad, según eso tenemos… según su posición… vamos a ver tipos de rectas, vamos a ver cómo pueden ser las rectas. A ver, N., ¿cómo pueden ser esas rectas infinitas? No las semi, las rectas. ¿Cómo pueden ser?

A. Paralelas, secantes y perpendiculares (una alumna ejemplifica con sus dedos dos segmentos perpendiculares, separa estos y muestra dos segmentos que se cruzan perpendicularmente, pero no se cortan).

M. A ver (dibuja en la pizarra dos segmentos de igual longitud aparente, paralelos entre sí, a su vez horizontales, aprovechando la cuadrícula de una parte de la pizarra) ¿Por qué se caracterizan estas dos rectas?

A. ¿Qué nunca se cortan?

M. Nunca se van a cortar, nunca se van a tocar.

A. Por mucho que se prolonguen…

M. Por mucho que yo la prolongue esta hasta el infinito y esta otra (amplía los segmentos hasta el límite de la pizarra), nunca se van a chocar, nunca se van a tocar. Esta, que la voy a llamar a de Aurelia, y esta b de Benito, no se van a tocar.

A. También, que la distancia entre las dos siempre es la misma.

M. Claro, eso quiere decir que si cojo la regla y la mido hasta aquí (dibuja en la pizarra un segmento perpendicular a los otros dos, pero sin decir que lo es o que lo ha de ser para medir la distancia) o si lo mido aquí es la misma distancia, aquí es la misma distancia (esto lo hace mientras dibuja segmentos discontinuos perpendiculares a los dos paralelos en distintas posiciones) Siempre es la misma distancia. Siempre, siempre. No se van a ir achicando porque si no llegaría un momento que… tocaban ¿no? Siempre se van a mantener a la misma distancia.

M. Aquí, esta fila y esta fila ¿serían paralelas? (pone como ejemplo diversas filas de pupitres).[…] (ella va preguntando y los alumnos contestan).

M. Muy bien. Esa no sabemos. Paralelas, nunca se van a tocar. Mira lo que dice (mira el libro con la alumna): son dos rectas que nunca se cortan, ya está. La distancia entre ellas es la misma […]

M. No, son dos rectas que nunca se cortan. La distancia entre ellas es la misma. No es tanto, ¿no? Son dos cositas, las características son esas: rectas que nunca se cortan. La distancia entre ellas es la misma. Por mucho que se prolonguen, no sabemos. Hasta el infinito.

La maestra comienza mostrando su conocimiento de una fortaleza en los estudiantes (KFLM, fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje), en este caso, las posiciones relativas de las rectas: los alumnos lo califican de *fácil*y la maestra refuerza (*Pues lo siguiente es todavía más fácil… Claro…)* aprovechando la potencialidad del contenido.

Cuando pregunta a los alumnos por las *rectas infinitas* (2) utiliza una forma de hacerles partícipes del enunciado de la clasificación de las rectas (haciendo uso de la potencialidad de hacer preguntas para evocar conocimientos, KMT, teorías sobre la enseñanza), haciendo referencia, además, a instantes anteriores en los que han trabajado los conceptos de recta, semirrecta y segmento, momento en el que ha emergido el concepto de infinito relacionado con la recta (Liñán, Montes y Contreras, 2015). Muestra su conocimiento sobre la recta (KoT, definiciones), y su conexión con el concepto *infinito* (KSM, conexión transversal, Liñán *et al*., *opus cit.*), si bien, al igual que en la definición de estas, no da un elemento más allá del visual sobre lo que significa *recto*.Aquí podríamos detectar una metáfora (*grounding*)objeto cognitiva puesto que permite interpretar la propiedad de ser recto con la imagen gráfica basada en la experiencia con objetos reales.

La maestra muestrasaber cuáles son las posiciones relativas de las rectas (KoT, propiedades y sus fundamentos). Deja patente que ha de referirse a estas y no a las semirrectas (2), lo que podría ser un indicio sobre su conocimiento relativo a que se han de tener en cuenta otras propiedades y clases de equivalencia[iii]al tratar las posiciones relativas de las semirrectas y segmentos. Sabe que dichas posiciones son un criterio para clasificarlas rectas (KoT, propiedades y sus fundamentos), si bien ni en el aula ni en el libro se remarca si se está haciendo referencia al espacio o al plano.De haber problematizado sobre qué ocurre en cada contexto con las posiciones relativas de las rectas en el plano y en el espacio, habríamos podido observar otro aspecto de su conocimiento de los temas (KoT,fenomenología).

Al utilizar la representación gráfica en la pizarra (4), tenemos evidencias deconocimiento del contenido (KoT,registros de representación), así como de los ejemplos utilizados (KMT,actividades, tareas, ejemplos, ayudas)que son usados por la maestra inicialmente como detonante para preparar la discusión sobre la clasificación de las rectas según su posición relativa. Sin embargo, también vemos que la maestra conoce y utiliza el ejemplo para mostrar el concepto de rectas paralelas, definiendo correctamente, aunque de forma no completa.En este momento la intención de la maestra es que, a través de un caso concreto representado en la pizarra, los niños expresen algunas de las características fundamentales del concepto teniendo como objetivo promover el desarrollo conceptual y la flexibilidad de los estudiantes, al considerar diferentes formas de caracterizar un concepto, favoreciendo la comparación crítica del trabajo en los alumnos.

Advertimos la presencia de conocimiento de la enseñanza (KMT, actividades, tareas, ejemplos, ayudas) en el momento en el que la maestra utiliza los verbos *chocar, tocar* (6, 8) e, incluso, en la frase *prolongar hasta el infinito*, pues en la entrevista indica que su uso facilita la comprensión del alumno por ser palabras cercanas al niño, identificando una *groundingmetaphor* al unir el significado de términos del lenguaje cotidiano (dominio de partida) con el concepto matemático de intersección (dominio de llegada). Sin embargo, si bien en la expresión *nunca se van a chocar, nunca se van a tocar* muestra su conocimiento de que las rectas paralelas *no tienen puntos en común* (KoT, propiedades y sus fundamentos), también pone de relieve que el conocimiento de la práctica matemática (KPM,prácticas ligadas a la matemática en general) habría permitido saber que no se pueden usar términos cualesquiera para referir que *no secortan en un punto*, en el sentido de que el enunciado de una propiedad ha de tener ciertas características, como el uso de palabras apropiadas que no dejen lugar a dudas. La expresión *por mucho que yo la prolongue hasta el infinito* referida a una recta no es correcta/precisa pues si no tiene límites, no se puede prolongar. Parece influir en este caso la propuesta del libro de texto, que incluye en su definición de rectas paralelas la frase "*nunca se cortan por mucho que se prolonguen"*. La maestra repite las ideas expresadas por los estudiantes, refinando la expresión, exponiéndolas de modo más claro o representando gráficamente las aportaciones de los estudiantes, con un único ejemplo que coincide con el que aparece en el libro de texto (segmentos horizontales para ejemplificar rectas).

La maestra es consciente de la limitación que tiene la pizarra como *recurso material* asociado, en este caso, para la representación de rectas (KMT, recursos materiales y virtuales), por eso dibuja finalmente los segmentos hasta el extremo de la pizarra, igual que hace en las explicaciones previas sobre la definición de recta (Liñán *et al*., 2015).

El concepto *distancia*emerge al ser planteado por un alumno (9), si bien seguramente siguiendo la definición de rectas paralelas del libro,mientras la maestra utiliza la propiedad *no se cortan*. La idea de la distancia en este momento podemos suponer que es intuitiva, puesto que la maestra reconoce en la entrevista que nunca se ha tratado de forma explícita en el aula, ni en este curso ni en anteriores. Se muestra este concepto asociado a la definición de rectas paralelas:*la distancia entre las dos siempre es la misma* (KoT, propiedades y sus fundamentos). La maestra sabe que es así y trata de aclararlo dibujando en la pizarra un segmento perpendicular a los dos paralelos (10) mientras dice *si cojo la regla y lo mido hasta aquí*, evidenciando su conocimiento sobre el procedimiento (KoT, procedimientos) para medir distancias entre rectas paralelas en el plano. A su vez, se evidencia una conexión auxiliar (KSM, conexiones auxiliares) entre la definición de rectas paralelas y distancia(*no se va a ir achicando porque, si no, llegaría un momento en que tocaban)* y el procedimiento de medir. Al estar aplicando el procedimiento de medida de distancia entre dos rectas paralelas en el plano, a pesar de no hablar de manera explícita sobre cómo se hace ni por qué se hace así, la maestra está suscitando la adquisición de dicho procedimiento.

Observamos cómo la profesora muestra su conocimiento sobre la enseñanza (KMT, actividades, tareas, ejemplos, ayudas) al proponer un ejemplo (11) sobre cuya adecuación podría no haber reflexionado: señalando los pupitres del aula colocados en filas, va preguntando si son paralelas dos a dos, e identificamosuna *groundingmetaphor* en el establecimiento de la relación entre la alineación de los pupitres y el concepto de rectas paralelas.

Por último, la maestra incide en las características que han dado los estudiantes, que coinciden con las que aparecen en el libro de texto (12, 13), enfatizando asíel desarrollo conceptual y estructural al establecer conexiones con el infinito.

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO EMERGENTE PARA UNA MEJOR GESTIÓN DE LA SITUACIÓN

En el análisis del episodio, tanto desde la intervención de la maestra como desde las interacciones con los alumnos, en la entrevista semiestructurada y en las notas de campo, es posible descubrir conocimientosespecializados,tanto explícitos como subyacentes, que podrían haber permitido gestionar la situación aprovechando las oportunidades ofrecidas. Podemos comenzar con la recta conceptualizada a través de sus propiedades, que en el caso de este concepto no configuran una definición[iv]. Talconceptualización, mostrada por el libro (*una recta es una línea de puntos, sin curvas ni ángulos, que no tiene principio ni fin*), da por supuestas nociones que, de hecho, se van a tratar más adelante en el mismo capítulo y que, a su vez, utilizan el concepto *recta* en su denominación (*dos rectas secantes forman cuatro regiones en el plano llamadas ángulos),* así que la maestra ha de lidiar con ello y conseguir la comprensión de un concepto axiomático que no resulta sencillo. En la línea de Font, Bolite y Acevedo (2010), podemos identificar esta situación con una metáfora ontológica, objeto, parte-todo, porque“nos lleva a la interpretación de ideas y conceptos, etc., como entidades que son parte de otras entidades y que están constituidas por ellas” (p. 138).

Se hace hincapié, por otro lado, en el concepto de *recta infinita*(2), si bien no se especifica en qué sentido lo es. Apoyándonos en el estudio realizado por Liñán *et al.* (2015), observamos un posible obstáculo didáctico futuro en la relación entre recta e infinito. Se produce una contradicción, además, entre esa *infinitud* de la recta y la *prolongación hasta el infinito* que aparece en el episodio cuando se quiere explicitar el hecho de que dos rectas paralelas no se cortan *por mucho que yo las prolongue hasta el infinito* (7, 8). Del mismo modo, la posible inexactitud en los términos usados (*chocar, tocar*) podría generar a su vez obstáculos futuros relacionados con el desarrollo del propio lenguaje matemático, habiendo perdido la oportunidad de aclarar la necesidad del uso de palabras precisasen matemáticas, términos específicos que contribuirían a desarrollar flexibilidad y elegancia.En la línea de Font y Acevedo (2003), recalcamos la importancia de ser consciente del uso de algunas metáforas en el discurso para poder controlarlas yno correr “el peligro de trasladar aspectos del dominio de partida que no son aplicables en el dominio de llegada” (p. 414).

Para clasificar las rectas según sus posiciones relativas es necesario discutir las distintas casuísticas que se generan en el plano y en el espacio; sin embargo el libro omite este extremo, sin especificar que, en realidad, está haciendo referencia al plano.Lasituación generada por el gesto de la alumna(3)podría ser usada para tratar los diferentes comportamientos de una misma clasificación dependiendo del entorno en el que se observen las rectas. Emerge, por un lado, la necesidad de establecer las condiciones (KPM, prácticas ligadas a la matemática en general) en las que se han de proponer las definiciones, propiedades y procedimientos a tratar en el aula, por otro lado, el conocimiento de la dependencia del contexto (KoT, fenomenología) para considerar, en este caso, las posiciones relativas de las rectas, y por último la problematización de la situación planteando qué ocurre en el plano y en el espacio (KMT, actividades, tareas, ejemplos, ayudas).

A la pregunta de la maestra *¿Qué caracteriza a estas dos rectas?* (4), una vez dibujadas en la pizarra, obtiene dos respuestas diferentes por parte de los estudiantes: *no se cortan* y *la distancia entre las dos es siempre la misma*. Esas respuestas vienen de manera explícita en el libro, así que probablemente se darán tras su lectura por parte de los alumnos, no parece que las hayan deducido ellos tras observar el dibujo, si bien la problematización de la equivalencia entre ambas definiciones no se hace evidente.

Al aparecer explícitamente la distancia entre rectas como definición de las rectas paralelas, cabe destacar la necesidad de definir previamente, quizá de manera informal, la función distancia (KoT, definiciones, procedimientos) ¿Cómo se mide la distancia entre dos rectas o entre punto y recta? Es más, ¿cuándo está definida dicha distancia? Se genera una problematización interesante cuando lo relacionamos con el contexto en el que nos encontramos: espacio o plano (KoT, conexión intraconceptual), puesto que en el plano solo puedo medir distancia entre punto y recta o entre rectas paralelas,pero en el espacio, sin embargo, podría obtener la medida que dista entre rectas que se cruzan e, incluso, que se cortan[v].Promovería el desarrollo conceptual de los estudiantes por fomentar el tratamiento del método de medida en distintos contextosrelacionando definición de paralelas con magnitud, resolución de problemas y razonamiento, al plantear tareas abiertas, enfatizando procesos que desarrollan flexibilidad y comparación crítica de definiciones y procedimientos.

Por otro lado, los segmentos con los que ejemplifica esta posición relativa están situados horizontalmente en la pizarra (4, 10), por lo que podría ser *natural* la forma elegida para medir: de entre todas las posibles posiciones de la regla, eligen colocarla sobre un segmento perpendicular a ambos segmentos. ¿Qué habría ocurrido si los dos segmentos no se hubieran ubicado en esa posición (horizontal), sino formando un ángulo entre 0º y 180º sobre la horizontal? (KMT, actividades, tareas, ejemplos; KFLM, fortalezas y dificultades). Quizá en este caso se habría elegido la horizontal o la vertical para medir la distancia, dependiendo de lo *inclinadas* respecto de la horizontal que estuvieran las rectas. Podríamos establecer una relación con la dificultad de reconocerla altura de un triángulo sobre un lado no horizontal (KSM, transversal), lo que incluiría alturas sobre lados no horizontales en triángulos en posición prototípica como cualquiera de las alturas en triángulos situados en posición no prototípica (Contreras y Blanco, 2012).

En caso de haber utilizado diferentes ejemplos de pares de rectas paralelas para comprobar que dicha característica es general, y no del caso concreto que se dibuja en la pizarra, se estaría suscitando la adquisición de un proceso que favorecería en el estudiante la flexibilidad y la comparación crítica de resultados. Si se hubiera planteado como tarea abierta, con pares de rectas paralelas en distintas posiciones, podría haber generado la reflexión sobre el proceso de medida de distancia entre dos rectas, con una clara orientación hacia la resolución de problemas y el razonamiento. También podría haberse optado por haberlo usado para promover el desarrollo del procedimiento general de medida de distancia entre dos rectas a partir del concepto de rectas paralelas.

Del mismo modo, aprovechando la ejemplificación con paralelas situadas en posiciones no horizontales, se podría haber generado conocimiento sobre los invariantes ante movimientos rígidos, en este caso la distancia entre rectas paralelas a las que se les puede aplicar giros, traslaciones o simetrías en el espacio o en el plano (KSM, complejización).

Para ejemplificar haciendo uso de situaciones cotidianas, podría haber utilizado otros elementos de clase, como los bordes de la pizarra, marcos de las puertas o ventanas, intersecciones entre la pared y el suelo o la pared y el techo… (KMT, actividades, tareas, ejemplos, ayudas). Podría, de esta forma, haber establecido conexiones con propiedades o características críticas del rectángulo, generando conocimiento de la estructura matemática al utilizar la condición de *segmentos paralelos* para definir un rectángulo (KSM, auxiliar).Al utilizar, sin embargo, los pupitres como ejemplo de rectas paralelas, quizá no ha considerado el equívoco que puede generar en sus alumnos (KFLM, fortalezas y dificultades) el hecho de ejemplificar con elementos de su entorno que *ostensivamente tienen volumen* y que no son *continuos.*

CODA

Nuestra discusión muestra que utilizar MTSK como modelo de análisis del conocimiento especializado del profesor de matemáticas no solo nos permite acceder al conocimiento que se muestra, nos ha puesto de relieve el conocimiento emergente (procesos y procedimientos relacionados con la distancia entre segmentos, movimientos rígidos, …). Por otro lado, la observación de las metáforas cognitivas identificadas, tanto en el discurso de la maestra como en el libro de texto, nos ha permitido identificar ciertos conflictos que se pueden estar originando en el pensamiento de los alumnos al no distinguir entre significados informales y los correspondientes geométricos de los mismos (conexión entre el dominio de origen y de llegada).

Dado nuestro compromiso con la formación de maestros, consideramos que el enfoque de este trabajo posee la novedad respecto a trabajos anteriores de establecer el vínculo teórico-práctico de una manera más directa. El análisis pormenorizado de los episodios de clase, centrado en el conocimiento matemático especializado que emerge de situaciones reales de práctica (explícitos y subyacente), constituye un buen sustento para la elaboración de viñetas, herramientas potentes tanto para la formación inicial como continua. Las viñetas pueden promover desarrollo profesional toda vez que fomentan que el profesor pueda problematizar su *saber desde la acción* (Schön, 1983, 1987), mejorando su consciencia y profundidad epistemológica, así como la reflexión *sobre, en* y *para* la práctica.

Agradecimientos

Este trabajo se realiza al amparo del proyecto de investigación "Caracterización del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas" (EDU2013-44047P), financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad.Agradecemos su colaboración al Centro de Estudios Universitarios Cardenal Spínola CEU.

Referencias

Bassey, M. (1995). *Creating Education Through Research*. Edimburgo: British Educational Research Association.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., y Muñoz-Catalán, M.C. (2014). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti (Eds.), *CERME 8 Proceedings*(pp. 2985-2994). Antalya, Turquía.

Contreras, L.C., y Blanco, L. (2012). Conceptualizando y ejemplificando el conocimiento matemático para la enseñanza. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 30*, 101-123.

Escudero-Ávila, D., Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L.C., y Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA, 10* (1), 25-51.

Font, V., y Acevedo, J.I. (2003). Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones. *Enseñanza de las Ciencias, 21* (3), 405-418.

Font, V., Bolite, J., y Acevedo, J. I. (2010). Metaphors in mathematics classrooms: analyzing the dynamic process of teaching and learning of graph functions. *Educational Studies in Mathematics, 75*(2),131–152.

Font, V., Godino, J. D., Planas, N., y Acevedo, J. I. (2010). The object metaphor and sinecdoque in mathematics classroom discourse. *For the Learning of Mathematics, 30*, 15-19.

Lakoff, G., y Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being.* New York, NY: Basic Books.

Liñán, M.M., y Contreras, L.C. (2013). Debilidades y Fortalezas en el Conocimiento de los Tópicos Matemáticos en Geometría de los Estudiantes para Maestro.En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 337-344). Bilbao: SEIEM.

Liñán, M.M., Montes, M.A., y Contreras, L.C. (2015). Conocimiento sobre la recta de una maestra de tercer ciclo de educación primaria. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en EducaciónMatemática XIX* (pp. 335-342). Alicante: SEIEM.

NCTM (2000).*Principles and Standards for School Mathematics*.Traducción SAEM Thales (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: SAEM Thales.

Puig Adam, P. (1986). *Curso de Geometría Métrica I: Fundamentos*. Madrid: Euler.

Schön, D. A. (1983).*The reflective practitioner: How professionals think in action*. New York: Basic Books.

Schön, D. A. (1987).*Educating the reflective practicioner*. San Francisco: Jossey-Bass.

Stake, R. E. (2005).Qualitative Case Studies.En N.K. Denzin y Y.S. Lincoln (Eds.), *The Sage handbook of qualitative research.Thirdedition* (pp. 443-166). ThousandOaks: SagePublications.

[1] En el libro de texto una de las definiciones de rectas paralelas indica que la distancia entre ellas es siempre la misma, pero no define ni el concepto ni el procedimiento asociado a distancia.

ii Entendemos que la posición relativa entre dos segmentos cualesquiera es la que existe entre el primero y cualquier segmento congruente al segundo. En este sentido, los segmentos AB y CD son secantes si se puede encontrar un segmento C'D', congruente a CD, de manera que la intersección entre AB y C'D' sea un punto, siendo AB y C'D' no colineales. AB y CD serán paralelos si podemos encontrar un segmento congruente a CD, C'D', tal que la intersección entre AB y C'D' contenga infinitos puntos, o que contenga un único punto y AB y C'D' sean colineales.

iii Puig Adam (1986) determina en el primero de sus cinco grupos de axiomas lo que él mismo llama la *denominación*, que no *definición*, del espacio, plano y recta, estableciéndolos como conjuntos de infinitos puntos que cumplen otros axiomas recurrentes entre sí.

[iv] La distancia entre rectas en el plano no está definida si estas se cortan, puesto que no se puede trazar una perpendicular a ambas. Sin embargo, en el espacio, siempre se puede encontrar una recta perpendicular a dos rectas que se cortan, pues estas lo hacen en un plano y la recta perpendicular pertenecería a un plano perpendicular al primero. La distancia sería cero, pero estaría definida.

ANÁLISIS DE PROCESOS DIDÁCTICOS PARA LOGRAR CONVENCIMIENTO EN UN CONOCIMIENTO MATEMÁTICO BIEN FUNDAMENTADO

Analysis of didactic processes to achieve convincement of well-grounded mathematical knowledge

Martínez-Navarro, B. y Rigo-Lemini, M.

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN

Resumen

Con base en los principios de la Teoría Fundamentada en este escrito se analiza la interacción -a distancia- entre un tutor y un estudiante. En un primer nivel, se realiza un microanálisis de las relaciones entre el convencimiento que experimenta un estudiante en torno a una respuesta, la adecuación de dicha respuesta a la acepción matemática aceptada y su fundamento. Se desprende de este análisis una tipificación de argumentos. En un segundo nivel, se identifican procesos en los que un estudiante llega a experimentar convencimiento en un conocimiento bien fundamentado.

Palabras clave: *convencimiento, comprensión, procesos didácticos, argumentación matemática*

Abstract

Based on the principles of Grounded Theory, this paper analyzes the interaction –distance- between a tutor and a student. At an initial level, a microanalysis is performed of the relations that exist among the convincement experienced by a student with respect to an answer, the adjustment of that answer to the accepted mathematics meaning and its foundation. A characterization of arguments stems from the analysis. Then at a second level, processes are identified in which a student experiences convincement of a well-grounded knowledge.

Keywords: *convincement, understanding, didactic processes, mathematical argumentation*

ANTECEDENTES Y OBJETIVOS

En investigaciones diversas se ha destacado el peso que tiene el convencimiento en los hechos de las matemáticas que los agentes de clase vivencian durante los procesos didácticos. Por ejemplo, Krummehuer (1995) resaltó el convencimiento asociado a los soportes de los argumentos, para cuyo análisis utilizó el Modelo de Toulmin; despunta en su aplicación la omisión de los calificadores modales Q, ausencia que señalaron Inglis, Mejía Ramos & Simpson (2007). Estos autores sostienen que una mejor categorización de la argumentación matemática la proporciona el uso del esquema completo de Toulmin (que incluye a los calificadores Q). En su propuesta los investigadores mostraron que estudiantes de posgrado talentosos frecuentemente usan garantías no deductivas que reducen su incertidumbre sobre la conclusión de un argumento, pero no la anula (p. 9). Esos estudiantes, continúan los autores, eliminan su incertidumbre en una conclusión solo si se desprende de una prueba formal. El estudio permitió a Inglis et al, incluir al razonamiento informal (e. g. intuitivo o inductivo) como parte de la gama completa de la argumentación matemática; les permitió también desprender como consideración didáctica que uno de los objetivos de la instrucción debe ser el desarrollo de habilidades de los estudiantes para igualar "adecuadamente" tipos de garantías con calificadores modales Q (p. 3). Afín a esta sugerencia educativa, un artículo reciente sobre los estados de confianza que se dan en estudiantes de niveles básicos, realizado por Foster (2016), sugiere que un alumno "bien calibrado" en un tema es aquel que confía en sus

Martínez-Navarro, B. y Rigo-Lemini, M. (2016). Análisis de procesos didácticos para lograr convencimiento en un conocimiento matemático bien fundamentado. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp 215-224). Málaga: SEIEM.

respuestas correctas y duda de las que no lo son. Foster advierte, sin embargo, que en escenarios reales un estudiante puede mostrar altos niveles de confianza y competencia en un procedimiento sin entender las matemáticas que hay detrás de dicho procedimiento. Al respecto, el autor apunta que se deben encontrar maneras para que los profesores puedan apoyar a que sus alumnos experimenten altos niveles de confianza y competencia en los conceptos que hay detrás de sus procedimientos (p. 286). En correspondencia con los temas relativos al convencimiento antes descritos, y siguiendo los principios de la Teoría Fundamentada (Grounded Theory) (Corbin & Strauss, 2015), el objetivo general de este escrito es explicar procesos en los que un estudiante llega a experimentar convencimiento en torno a un conocimiento bien fundamentado. Para tal fin se examina, de acuerdo a dos niveles de análisis, una interacción a distancia entre un tutor y un estudiante en un contexto de álgebra de niveles básicos. En un primer nivel, se realiza un microanálisis de las relaciones que en un argumento se pueden dar entre el convencimiento de los estudiantes en torno a un enunciado de contenido matemático, la adecuación de ese enunciado con la acepción matemática aceptada y su fundamento. De este análisis se desprende una tipificación de argumentos. En un segundo nivel, en el que se incorpora el proceso al análisis, se da cuenta de estrategias que permitieron a un profesor que un estudiante llegara a experimentar confianza en un conocimiento bien fundamentado. Así, en el escrito se busca responder ¿Cómo se pueden explicar procesos en los que un estudiante llega a experimentar convencimiento en torno a un conocimiento bien fundamentado? ¿Cómo se pueden caracterizar los argumentos que emergen de esos procesos?

MARCO TEORICO

Para analizar las participaciones de los estudiantes se recurrió al Modelo de Toulmin. En este modelo, un argumento está compuesto por una afirmación (C), datos (D), garantías (W), un soporte (B), y calificadores (Q). Enseguida se expone la interpretación de esos elementos en este escrito.

Los calificadores Q

Toulmin, Rieke & Janik (1984) consideran que Q consiste en “el grado de confianza que puede ser adjudicado a las conclusiones dados los argumentos disponibles para apoyarlas” (p. 85, 1984). En esta interpretación de Q se supone implícitamente un sujeto experto que califica. A diferencia, en el presente escrito se acepta explícitamente que es el sujeto que argumenta el que califica la fuerza de los componentes del argumento, y se considera que ese sujeto (que participa en un foro virtual) vivencia un estado de convencimiento, o bien de presunción o duda en un enunciado matemático -los que Rigo (2013) denomina “estados epistémicos de convencimiento”-, cuando cumple con alguno(s) de los criterios que aparecen en la Tabla 1 (Martínez & Rigo, 2014).

Tabla 1: Instrumento teórico-metodológico para distinguir estados epistémicos

Elementos del habla	La persona recurre a enfatizadores del lenguaje que pueden revelar un mayor grado de compromiso con la verdad de lo que dice, por ejemplo, cuando la persona usa el modo indicativo de los verbos (e.g. tengo)
Acción	El sujeto realiza acciones consecuentes con su discurso.
Determinación	La persona manifiesta de manera espontánea y determinada su adhesión a la veracidad de un enunciado matemático indicando algún grado de determinación.
Interés	Las participaciones de una persona que interviene con interés en torno a un hecho matemático específico en un foro virtual son: -*Sistemáticas*. Es decir, el sujeto contesta todas las preguntas dirigidas a él de la manera más detallada posible. -*Informativas*. Sus afirmaciones, procedimientos y/o resultados son suficientemente informativos. -*Claras y precisas*
Consistencia	La persona muestra consistencia en distintas intervenciones.

Garantías (W): adecuación entre las acciones y el significado matemático aceptado

El contenido matemático de los fragmentos elegidos para este estudio es el de la resolución de ecuaciones lineales. En este escrito se considera al Modelo 3UV (Ursini, Escareño, Montes & Trigueros, 2005) como el procedimiento paradigmático escolar para encarar ese tipo de tareas. De acuerdo a ese modelo, los aspectos de la variable como incógnita específica que un estudiante debe poner en juego cuando se resuelven ecuaciones lineales son: interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación como la representación de valores específicos (aspecto I1); determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando operaciones algebraicas, aritméticas o de ambos tipos (aspecto I4) y sustituir la variable por el valor o valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero (aspecto I3). En este escrito, las garantías (W) que subyacen las acciones de los estudiantes revelan si esas acciones son acordes a los aspectos antes mencionados.

El soporte del argumento B

Al resolver una ecuación lineal los estudiantes pueden fundar sus argumentos en diferentes soportes; los soportes pueden estar conformados por constituyentes diversos, uno de los cuales coincide con lo que Rigo (2013) llama "esquemas epistémicos" de sustentación. Según la autora, mientras algunos sustentos se vertebran en torno a razones matemáticas, como las instanciaciones de reglas generales, otros se articulan en torno a consideraciones extra-matemáticas, como los esquemas operatorios que se activan cuando se introduce una regla sin justificación, basada posiblemente en la autoridad que se le otorga a las matemáticas. Por tanto, se pueden presentar soportes matemáticos y soportes extra-matemáticos para los argumentos.

Otro de los constituyentes hace referencia al carácter aritmético o algebraico del argumento. En este escrito se sugiere (cf. Martínez y Pedemonte, 2014) que la resolución de una ecuación se basa en el álgebra cuando el sistema de referencia en los datos contiene literales, y el "núcleo del argumento" (i.e., sus D y su C) presenta una estructura de tipo deductivo, la que es posible explicitar a través de las garantías, ya que éstas descubren la estructura que articula el argumento. Se dirá que una resolución se soporta en la aritmética cuando el sistema de referencia en los datos se da por ensayo y error numérico, y el núcleo del argumento presenta una estructura inductiva. Otro indicador para determinar si el soporte contiene constituyentes aritméticos o algebraicos está relacionado con los elementos conceptuales que el alumno pone en juego cuando realiza el aspecto I3. I3 presupone el desarrollo, aunque sea sólo de manera intuitiva y tácita, del siguiente argumento: a) Considerar en la ecuación $ax+b=0$ un valor específico para x, i.e., que $x=r$, $r\in\Re$; b) Instanciar en la ecuación, i.e., $a(r)+b=0$; c) Realizar operaciones aritméticas; d) Derivar (eventualmente) una tautología aritmética: $m=m$; e) Desprender de d) que a) es una suposición correcta (de otro modo no se derivaría de ella una tautología), y que $a(r)+b=0$ es una proposición verdadera, esto es, que r hace verdadera a la proposición $ax+b=0$ (la cual es abierta, ya que carece de un valor de verdad), y que por tanto, r es una solución para dicha ecuación. Cuando el alumno procesa I3 con la conciencia de lo que significa que un valor específico $r\in\Re$ "satisface una ecuación y resuelve el problema" (Ursini et al, 2005, p. 27), esto es, cuando tiene algunas intuiciones relacionadas con los pasos a) al e) del argumento antes expuesto, en este documento se considera que I3 coadyuva a su comprensión de la variable y que el soporte de su argumento contiene un constituyente algebraico. Cuando I3 queda sólo como un argumento incomprensible y rutinario para el estudiante que va sólo del paso a) al d) y él lo aplica solamente con el propósito de verificar ("en la aritmética", terreno seguro para el alumno) si los valores obtenidos son correctos, aquí se considera que ese aspecto I3 coadyuva poco a la comprensión de la variable y que el soporte de su argumento incluye constituyentes aritméticos.

CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS

El estudio, inspirado en los procedimientos de la Teoría Fundamentada (Corbin & Strauss, 2015), se llevó a cabo en un diplomado -a distancia- cuyo propósito es fortalecer la formación de asesores que enseñan álgebra a adultos. Los datos que se usaron para el estudio quedaron registrados en la plataforma Moodle para su posterior análisis y forman parte de la interacción que un tutor mantuvo con sus estudiantes (en particular, con Belarmina). El tutor, quien propuso y guió las actividades, es uno de los autores de este trabajo. En trabajos anteriores, los autores han desarrollado los conceptos de estados epistémicos y esquemas epistémicos utilizando como herramienta analítica "comparaciones constantes" entre conjuntos de datos. Como parte de los productos, se diseñó un instrumento para sugerir cuándo una persona está convencida. De acuerdo a Corbin y Strauss, el desarrollo de una teoría formal se basa en añadir propiedades y dimensiones a conceptos conocidos y agregar nuevos conceptos que no se pudieron derivar de estudios previos. En el trabajo actual, se utiliza la categoría de argumento para estructurar los conceptos de estados epistémicos y esquemas epistémicos. Para tal fin, se consideraron los contextos de interacción, interacción que se separó en fragmentos (distinguidos con un numeral) y se organizó en argumentos, los cuales se analizaron conforme al

Modelo de Toulmin. En un primer nivel de estudio, se realiza un micro análisis de las relaciones que en un argumento se puedan dar entre los estados epistémicos de los estudiantes en torno a un enunciado de contenido matemático (Q), la adecuación de ese enunciado con la acepción matemática aceptada (revelada en W), y el fundamento del mismo (que se desvela en B). Las relaciones entre Q, W y B se concentran en una tabla, con el fin de obtener una perspectiva general y de tipificar los argumentos (v. Tablas 2,3,4). En un segundo nivel, el proceso se incorporó al análisis de datos. Los procesos son cambios adaptativos en el flujo de la acción interacción que se adoptan como respuesta a variaciones en las condiciones. Dichos cambios se consideran necesarios para alcanzar un objetivo. El análisis de los datos tomando en cuenta el proceso requiere que el analista siga el curso de la acción/interacción, tenga en cuenta cualquier cambio y lo relacione con las condiciones. En este estudio, el objetivo del profesor consistió en que la estudiante experimentara convencimiento en torno a un conocimiento bien fundamentado, y las medidas que él adoptó como respuesta a las condiciones cambiantes tuvieron como objeto esa finalidad. De modo que, a diferencia de otras investigaciones, en ésta se consideran las relaciones entre los estados epistémicos de los estudiantes en torno a un enunciado de contenido matemático, la adecuación de ese enunciado con la acepción matemática aceptada y el fundamento del mismo, relaciones que se suponen como parte de un proceso dinámico en el que pueden modificarse como respuesta a condiciones cambiantes. Como resultado de este nivel de análisis se identifican y se da cuenta de procesos generales en los que el alumno puede llegar a experimentar convencimiento en un conocimiento bien fundamentado. Cabe mencionar que aun cuando los procedimientos de la Teoría Fundamentada pueden dar licencia para generalizar los resultados, el objetivo de este documento es tratar de construir explicaciones iniciales para una interacción en la cual un tutor logró que una estudiante experimentara convencimiento en un conocimiento matemático bien fundamentado.

MICROANÁLISIS DE RELACIONES ENTRE CONVENCIMIENTO EN ENUNCIADOS MATEMÁTICOS, SU ADECUACIÓN Y FUNDAMENTO. PRIMER NIVEL ANALÍTICO.

1a participación de Belarmina: expresión de una tendencia algebraica y operatoria

A manera de diagnóstico, el tutor propuso resolver a los estudiantes: Rosa tiene una balanza en equilibrio, de un lado una pesa de 5 kg y del otro una pesa de 2kg y un bulto de fierro. ¿Cómo puede hacer para saber el peso del fierro? En la Figura 1 se muestra la respuesta de Belarmina.

1.1	5=2+x donde x es el bulto de fierro	**D1.** a: 5=2+x donde x es el bulto de fierro; b: x=5-2 → **C1.** 3kg **W1.** a: La solución de la ecuación se encuentra al lado derecho del signo igual (I1); b: Trasposición de términos (I4) **B1.** a: Esquemas operatorios y álgebra (I1); b: Esquemas operatorios y álgebra (I4)
1.2	entonces x=5-2=3kg.	

Figura 4. Análisis de la primera participación de Belarmina. Argumento 1

En su primera intervención, Belarmina experimentó seguridad en la aplicación de I1e I4, la cual se deja ver en el uso del enfatizador "es" en 1.1, al actuar con base en las expresiones que derivó y mostrar determinación por publicar su respuesta. La aplicación de I1 e I4 la hizo conforme a esquemas operatorios (que se revelan por el carácter implícito de las reglas que enunció) y a una perspectiva algebraica, que se refleja a través de la estructura deductiva y el sistema de referencia algebraico en los datos.

Intervención del tutor: Cuestionamiento del soporte

2.2	Una vez planteada la ecuación acostumbramos a usar "trasposición de términos", pero ¿por qué funciona? Para averiguarlo realicemos la siguiente actividad.
2.3	Da clic en el interactivo, arma la ecuación en la balanza y llega a la solución. Describe paso por paso cómo llegaste a la solución. Por ejemplo: -2x-4=4x-4; Para dejar sola a la x realizo lo siguiente: 1.-Sumo a ambos miembros 4. La ecuación nos queda: -2x=4x; 2.- Sumo a los dos miembros 2x. La ecuación nos queda: 0=6x; 3.- Divido a los dos miembros entre 6. La ecuación nos queda: 0=x. La solución es 0.

Como respuesta a Belarmina, el tutor cuestionó (v. 2.2) el constituyente operatorio sobre el cual la estudiante apoyó I4 (v. B1b). En la Figura 2 aparece lo que la alumna respondió.

2a participación de Belarmina: Seguridad en el sustento algebraico y operatorio

3.1	Para dejar sola a la x en: -4x-4=8x-	**D2.** a: -4x-4=8x-4; b: sumo a → **C2.** La solución es

	4	ambos miembros 4; c: -4x=8x; d: sumo a los dos miembros 4x; e: 0=12x; f: divido a los dos miembros entre 12; g: 0=x x!!!
3.2-3.3	Sumo a ambos miembros 4. La ecuación nos queda: -4x=8x	**W2.** b-f: Determinar el valor de la literal con las propiedades de la igualdad (I4); g: La solución de la ecuación se encuentra a la derecha del signo igual (I1)
3.4-3.5	Sumo a los dos miembros 4x. La ecuación nos queda: 0=12x	**B2.** b-f: Álgebra y razones matemáticas (I4); g: Álgebra y esquemas operatorios (I1)
3.6-3.7	Divido a los dos miembros entre 12. La ecuación nos queda: 0=x	
3.8	La solución es x!!!	

Figura 2. Análisis de la segunda participación de Belarmina. Argumento 2

Belarmina desarrolló I4 con base en las reglas promovidas por el tutor (v. W2b-f), y apoyada en un soporte algebraico y matemático (v. B2b-f), extendiendo su comprensión en este aspecto. Pero nuevamente, la alumna también afianzó su argumento en esquemas operatorios (B2g) cuando en el paso de D2g a C2 dio una interpretación incorrecta del signo igual (v. W2g) que la llevó a contravenir I1. Sobre la aplicación de W2g (relacionada con I1) e I4, Belarmina experimentó seguridad que mostró con el uso de enfatizadores (!!!), al actuar siguiendo las reglas que enunció y al mostrar determinación e interés por publicarlas. Como respuesta, el tutor cuestionó el uso implícito de la garantía W2g relacionada con I1: 1. ¿Qué entiendes por la solución de una ecuación? 2. ¿La solución de una ecuación puede expresarse con literales? ¿Por qué? En la Figura 3 se analizan las respuestas dadas por Belarmina.

3a participación de Belarmina: Duda asociada a la aparición de razones matemáticas

4.1	1.- [La solución es] Encontrar el valor que al sustituirlo en la ecuación por la incógnita permita llegar a una igualdad	**D3.** La solución es encontrar el valor que al sustituirlo en la ecuación por la incógnita permita llegar a una igualdad (I3)	**C3.** La solución de una ecuación no se puede expresar con literales (I1)
4.2	2.- Tutor, tengo duda en esta pregunta pero checando la pregunta de arriba entonces no se puede expresar con literales porque vamos a encontrar su valor. Corríjeme.	**W3.** Si la solución de una ecuación es el valor de la literal entonces la solución no se puede expresar con literales (I1) **B3.** a: Razones matemáticas y álgebra (I1) b: Razones operatorias y aritmética (I3)	

Figura 3. Análisis de la tercera participación de Belarmina. Argumento 3

En su participación, Belarmina parafraseó con seguridad I3 (ver en 4.1 el uso indicativo de los verbos y el empleo de I3 para derivar otra regla) en su versión aritmética, lo cual hizo conforme a esquemas operatorios y aritméticos. De esta versión escolar de I3, la estudiante dedujo con duda (ver 4.2) una conclusión C3 acorde con I1, conforme a una garantía soportada en razones matemáticas y algebraicas, ayudando a su comprensión de I1. Con el fin de que la estudiante aplicara las proposiciones que enunció, el tutor preguntó: 1.- ¿Cuál es el valor de la incógnita?; 2.- ¿Cómo comprobamos que ese valor es solución de la ecuación? En la Figura 4 se analizan las respuestas de Belarmina.

4a participación de Belarmina: Duda al aplicar una nueva regla

5.1	1.- [El valor de la incógnita] sería 0	**D4.** a: D2g y C3; b: Sustituimos el valor en la ecuación; c: -4x-4=8x-4; d: -4(0)-4=8(0)-4; e: -0-4=0-4; f: -4=-4; g: Existe igualdad	**C4.** Sería 0
5.2	2.- Espero y estar bien, si no, me corrigen. [Para comprobar] lo sustituimos en la ecuación		
5.3	-4x-4=8x-4; -4(0)-4=8(0)-4; -0-4=0-4; -4=-4	**W4.** a: W3 (I1); b-g: Versión aritmética de I3 (I3)	
5.4	Existe una igualdad en ambos lados	**B4.** a: Razones matemáticas y álgebra (I1); b-g: Razones operatorias y aritmética (I3)	

Figura 4. Análisis de la cuarta participación de Belarmina. Argumento 4

En 5.1, Belarmina aplicó C3, relacionado con I1, con cierta inseguridad (ver el uso del mitigador "sería") que en su participación anterior soportó en razones matemáticas y bajo una perspectiva algebraica. En 5.3 la estudiante aplicó D3, relacionado con I3, bajo esquemas operatorios y aritméticos y lo hizo con duda (ver 5.2). A continuación, el tutor solicitó resolver: Bety tuvo que cobrar $178 de un billete de $200. Ella le preguntó al cliente si traía cambio y él le dijo que traía $3. Ella aceptó. ¿Cuánto tiene que regresar? Esta tarea, similar a la que Belarmina enfrentó en su primera participación, la planteó el tutor para identificar posibles cambios que se dieron en su resolución después de la interacción. En la Figura 5 se analiza cómo Belarmina enfrentó la tarea.

5a participación de Belarmina: Seguridad en un soporte algebraico

4.1	procedemos a despejar la incógnita;	**D5.** a: 200+3=178+x; b: 203=178+x; c: 203-178=178-178+x	**C5.** x=25
4.2	200+3=178+x;		
4.3	203=178+x; 203 -178=178-178+x;	**W5.** a: Interpretar la variable como un valor específico (I1);b-c:Determinar la literal con las propiedades de la igualdad (I4)	
4.4	x=25 que es el cambio que tiene que regresar Bety	**B5.** a: Razones matemáticas y álgebra (I1); b-c: Razones matemáticas y álgebra (I4)	

Figura 5. Análisis de la quinta participación de Belarmina. Argumento 5

Belarmina aplicó I1 (aún cuando D5c pudo activar W2g) e I4 (esta vez con las propiedades de la igualdad), aspectos que previamente re-construyó con el tutor bajo un soporte matemático. En esta participación, ella los administró con seguridad, estado que dejó ver mediante el uso de enfatizadores (“procedemos”, “es”), de acciones congruentes con lo que enunció y la determinación e interés que exhibió al publicar su respuesta. Sin embargo, la estudiante dejó de aplicar I3, la cual construyó y empleó en sus contribuciones precedentes (v. D3 y D4). Así que el tutor cuestionó su solución C5: ¿Cómo podemos comprobar que el valor que obtuviste para la incógnita es solución de la ecuación? La respuesta a esta pregunta se expone en la Figura 6.

6a participación: Seguridad al aplicar una nueva regla

5.1	Sustituyendo lo que vale x, que en este caso es 25, en la ecuación 200+3=178+x	**D6.** a: 200+3=178+x; 200+3=178+25; 203=203	**C6.** x=25
5.2	200+3=178+25; 203=203	**W6.** a: Si al sustituir un valor en una ecuación existe una igualdad, entonces ese valor es solución de la ecuación	
5.3	de esta manera podemos comprobar que es correcto porque en ambos lados es la misma cantidad.	**B6.** a: Esquemas operatorios y Aritmética	

Figura 6. Análisis de la sexta participación de Belarmina. Argumento 6

En esta participación, Belarmina parafraseó tácitamente la versión aritmética de I3 y la aplicó en D6 bajo esquemas operatorios y aritméticos. En esta ocasión, ella mostró seguridad en esa versión de I3, al utilizar enfatizadores (e. g. “es”) cuando la enunció, actuar conforme a ella (en 5.1 y 5.2) y mostrar determinación e interés por explicitarla. Enseguida, el tutor le pidió resolver:-4x-16=9x+1. En la Figura 7 aparece lo que la alumna respondió.

7a participación: Omisión de un procedimiento aritmético

6.1	Tutor, esta es mi respuesta	**D7.** a: -4x-16=9x+1; b: -4x-16+16=9x+16+1; c: -4x=9x+17; d: -4x-9x=9x-9x+17; e: 13x=17	**C7.** X=17/13
6.2	Ecuación: -4x-16=9x+1		
6.3	-4x-16+16=9x+16+1 (propiedad usada suma); -4x=9x+17; -4x-9x=9x-9x+17 (propiedad usada resta); 13x=17 (propiedad usada división)	**W7**. a: Interpretar la variable como un valor específico (I1); b-e: Determinar la literal con las propiedades de la igualdad (I4)	
6.4	X=17/13	**B7**. a: Razones matemáticas y Álgebra (I1) b-e: Razones matemáticas y Álgebra (I4)	

Figura 7. Análisis de la séptima participación de Belarmina. Argumento 7

Para resolver la ecuación, Belarmina activó los aspectos I1 e I4 siguiendo con puntualidad el procedimiento sustentado algebraicamente que construyó con el tutor. Como en las ocasiones previas, asociado a este esquema la estudiante pareció experimentar convencimiento; se ve al usar el indicativo de los verbos cuando presentó su respuesta (“esta es”), actuar conforme a las reglas que enunció y mostrar determinación e interés por publicar y explicar su respuesta. Pero nuevamente, ella dejó de aplicar I3.

ANÁLISIS DE RESULTADOS. TIPIFICACIÓN DE ARGUMENTOS

Para obtener una perspectiva general, en las Tablas 2, 3 y 4 se sintetizan las relaciones que en un argumento se pueden encontrar entre los estados epistémicos que un estudiante experimenta en torno a un enunciado matemático, la adecuación de ese enunciado con la acepción matemática aceptada (W) y los esquemas epistémicos que representan el marco general en el que se funda su argumento (que revela B). Se desglosan los aspectos I4, I1 e I3.

Tabla 2: Relaciones entre estados epistémicos, adecuación y Soporte de I4

Argumento / Categoría	1	2	3	4	5	6	7

Calificador	Seguridad	Seguridad	No aplica	No aplica	Seguridad	No aplica	Seguridad
Adecuación	Acorde	Acorde	No aplica	No aplica	Acorde	No aplica	Acorde
Soporte	Operatorio	Matemática	No aplica	No aplica	Matemática	No aplica	Matemática
	Álgebra	Álgebra	No aplica	No aplica	Álgebra	No aplica	Álgebra

Tabla 3: Relaciones entre estados epistémicos, adecuación y Soporte de I1

Argumento / Categoría	1	2	3	4	5	6	7
Calificador	Seguridad	Seguridad	Duda	Duda	Seguridad	No aplica	Seguridad
Adecuación	Acorde	Discorde	Acorde	Acorde	Acorde	No aplica	Acorde
Soporte	Operatorio	Operatorio	Matemática	Matemática	Matemática	No aplica	Matemática
	Álgebra	Álgebra	Álgebra	Álgebra	Álgebra	No aplica	Álgebra

Tabla 4: Relaciones entre estados epistémicos, adecuación y Soporte de I3

Argumento / Categoría	1	2	3	4	5	6	7
Calificador	No aparece	No aparece	Seguridad	Duda	No aparece	Seguridad	No aparece
Adecuación	No aparece	No aparece	Acorde	Acorde	No aparece	Acorde	No aparece
Soporte	No aparece	No aparece	Operatorio	Operatorio	No aparece	Operatorio	No aparece
	No aparece	No aparece	Aritmética	Aritmética	No aparece	Aritmética	No aparece

En las Tablas 2 y 3 se observa que inicialmente el tutor identificó convencimiento en respuestas correctas pero basadas en esquemas extra-matemáticos y dirigió sus acciones para que la estudiante experimentara convencimiento no sólo en respuestas correctas sino además bien fundamentadas. Este hecho sugiere redefinir el constructo “bien calibrado” de Foster, el cual involucra sólo el convencimiento y la adecuación de las respuestas. Tomar en cuenta el soporte del argumento, en este estudio, da lugar a una gama más amplia de argumentos. Con esta perspectiva, el objeto de la instrucción es que los estudiantes experimenten seguridad cuando actúan acorde a un aspecto fundado en esquemas matemáticos (SAM para abreviar), y que duden cuando actúan de forma discorde a un aspecto (fundado ya sea en esquemas matemáticos o extra-matemáticos: DDM o DDEM para abreviar) o cuando actúan acorde a un aspecto fundado en esquemas extra-matemáticos (DAEM para abreviar). Los argumentos 5 y 7 para los aspectos I1 e I4 son ejemplos de argumentos SAM; el argumento 4 para el aspecto I3 es DAEM. Los argumentos antes descritos se nombran aquí como *argumentos consistentes*. Dado que en una interacción el objetivo del profesor es construir junto con sus estudiantes un argumento SAM, se puede llamar a éste *argumento objetivo*. Los argumentos que presentan una variación con respecto a los argumentos consistentes, en este escrito se conocen como *argumentos inconsistentes*. Por ejemplo, en el Argumento 1 para los aspectos I1 e I4 se asocia seguridad a una respuesta correcta basada en esquemas extra-matemáticos (SAEM para abreviar), en el Argumento 2 para el aspecto I1 se asocia seguridad a una respuesta discorde fundada en esquemas extra-matemáticos (SDEM para abreviar) o en el Argumento 3 para el aspecto I1 se asocia duda a una respuesta acorde fundada en esquemas matemáticos (DAM para abreviar).

ANÁLISIS DE RESULTADOS. DEFINICIÓN DE PROCESOS

Una vez definida la anterior tipificación de argumentos, una pregunta natural es ¿Bajo qué condiciones pueden surgir los distintos tipos de argumentos? El objetivo del tutor para que la estudiante experimentara seguridad en un conocimiento bien fundamentado lo llevó a realizar acciones que eventualmente modificaron el comportamiento de la alumna. A continuación se elabora un diagrama para explicar bajo qué condiciones pueden surgir dichos comportamientos.

Un diagrama se puede utilizar como un método para visualizar relaciones entre conceptos y explicar fenómenos (Corbin & Strauss, 2015). Los diagramas se construyen para cada fenómeno con una categoría en cada caja. La condición inicial se coloca en la parte superior del diagrama, las consecuencias en la parte inferior y las acciones/interacciones en el medio. Debajo de cada categoría se enumeran las propiedades. Las flechas indican el curso de las acciones/interacciones. En el Diagrama 1, la condición inicial es la elaboración de un argumento por parte del estudiante ante una actividad propuesta por el profesor. Esta condición da lugar a que el profesor identifique el tipo de argumento que construyó el estudiante. Con base en lo anterior, el profesor publica una intervención la cual puede consistir en una actividad que se desarrolla en un contexto (e.g. la balanza, resolución de problemas o de ecuaciones) y con un nivel de dificultad (e.g. ecuaciones con una incidencia de la literal o con dos incidencias); en un cuestionamiento a la conclusión, garantía o soporte del argumento del estudiante o en la introducción y solicitud de aplicación de nuevas reglas. Ante estas nuevas condiciones, el estudiante puede construir un nuevo argumento el cual puede ser un argumento objetivo (SAM) o no, y mostrar o no cambios con respecto al anterior. A continuación, el profesor puede realizar una nueva intervención y el ciclo se repite. En lo que sigue, se utiliza este diagrama para explicar las trayectorias de interacción entre Belarmina y el tutor.

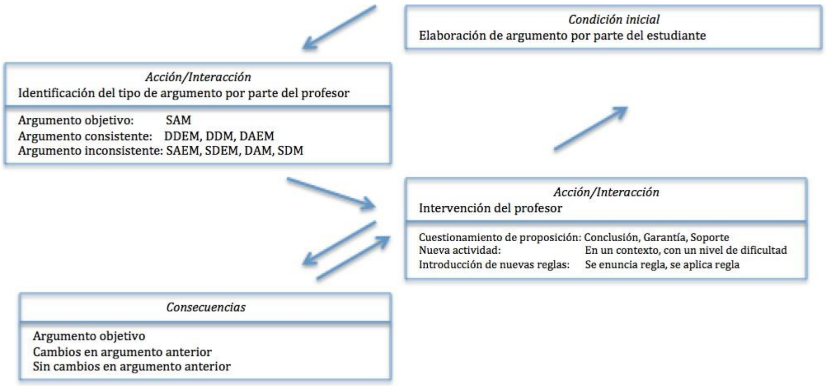


Figura 8. Diagrama 1: Proceso de los argumentos

La trayectoria de I4 comenzó con la solicitud del tutor para resolver una situación problemática que involucró una ecuación lineal con una incidencia de la literal. Como respuesta, Belarmina construyó un argumento en su primera participación. Esta condición inicial llevó al tutor a identificar una estructura SAEM en dicho argumento. Para seguir con el diagrama, a continuación el tutor publicó una intervención. Específicamente, él cuestionó el soporte extra-matemático B1b del argumento y publicó una nueva actividad en la que modificó el contexto (de la resolución de problemas a la balanza) y la dificultad (de una incidencia de la literal a dos) para introducir nuevas reglas (W2b-f) relacionadas con las propiedades de la igualdad. Estas nuevas condiciones, llevaron a la estudiante a construir en su segunda participación el argumento objetivo SAM para I4. Esto revela la prontitud con la que la estudiante asimiló las garantías (W2b-f) relativas a I4 y que un aumento de comprensión puede ir acompañado de seguridad. Una vez que la estudiante construyó el argumento objetivo SAM bajo las condiciones antes mencionadas, el tutor realizó nuevas intervenciones en las que él cambió el contexto (primero, de la balanza a la resolución de problemas y luego, de la resolución de problemas a la resolución de ecuaciones) y la dificultad (primero, de dos a una incidencia de la literal en las ecuaciones y luego, de una a dos incidencias) de las actividades. Cada vez que el tutor modificó las características de las actividades, la estudiante construyó argumentos que él identificó como SAM para I4. A esta trayectoria en la que para construir el argumento SAM no se registran cambios en los estados epistémicos en este escrito se llamará *trayectoria suave.*

Para el aspecto I1, en su primera participación Belarmina experimentó seguridad cuando aplicó la regla W1a según la cual la solución está a la derecha del signo igual apoyada en un esquema operatorio que, en conjunción con la trasposición de términos, la llevó a obtener una respuesta acorde con I1. Enseguida el tutor identificó un argumento SAEM en esa primera participación. Cuando el tutor cuestionó el soporte de I4 y colocó una nueva actividad en la que cambió el contexto y la dificultad para introducir nuevas reglas relacionadas con las propiedades de la igualdad, la estudiante construyó un argumento SAM para dicho aspecto I4, pero ella mantuvo su seguridad en torno a la regla W1a relacionada con I1 y la aplicó, lo que la condujo a trasgredir I1 y, en suma, a construir una argumento que el tutor identificó como SDEM para I1 en su segunda participación. Lo anterior revela que la consistencia para un aspecto puede no transferirse automáticamente a otro aspecto. La identificación del argumento SDEM llevó al tutor a publicar una nueva intervención en la que cuestionó la garantía W1a. Esto condujo a la estudiante a construir en su tercera participación un argumento en el que ella explicitó reglas W3 acordes con I1 bajo esquemas matemáticos ayudando a su comprensión. Sin embargo aquí Belarmina dudó. Enseguida el tutor identificó aquí un argumento DAM para I1. Esto desvela que el actuar conforme a un conocimiento bien fundamentado no va necesariamente aparejado de un fomento en la seguridad, porque lo primero va acompañado de reacomodos cognitivos que suelen propiciar estados de inseguridad. Ante estas nuevas condiciones, el tutor realizó una nueva intervención en la que solicitó a la estudiante aplicar la regla W3 que ella construyó, pero la duda de Belarmina continuó en su cuarta participación y el tutor identificó nuevamente una estructura DAM en el argumento. Entonces, el tutor colocó una nueva actividad en la que cambió el contexto (de la balanza a la resolución de problemas) y la dificultad (de dos incidencias de la literal a una). Como respuesta, la estudiante elaboró un argumento en su quinta participación cuya estructura el tutor identificó como SAM para I1, la cual se mantuvo en su séptima participación aun cuando el tutor modificó nuevamente la actividad. A trayectorias en las que para construir el argumento SAM se dan cambios sucesivos en los estados epistémicos se llamarán aquí *trayectorias intrincadas.*

Hasta aquí se han definido procesos que culminan en un argumento SAM. Pero pueden encontrarse trayectorias que finalizan con alguna variación de ese argumento. Considérese la trayectoria de I3. La estudiante dejó de poner en juego I3 hasta su tercera participación cuando, como respuesta al cuestionamiento que el tutor hizo a la garantía W1a relacionada con I1, la estudiante parafraseó la versión aritmética de I3 en un argumento con una estructura que el tutor identificó como SAEM para ese aspecto. Así que el tutor solicitó a Belarmina aplicar dicha versión aritmética de I3, la cual ella empleó en su cuarta participación, pero lo hizo con duda, en un argumento que el tutor identificó como DAEM. Entonces, el tutor colocó una nueva actividad en la que cambió el contexto y la dificultad, pero la estudiante dejó de acudir a I3 en su quinta participación. Ante estas condiciones, en una nueva intervención, el tutor cuestionó la solución C5 que Belarmina obtuvo. Como respuesta, en su sexta participación, la estudiante aplicó la versión aritmética de I3 pero esta vez con seguridad en un argumento que el tutor identificó como SAEM. Sin embargo, cuando el tutor colocó una nueva actividad, ella dejó de aplicar nuevamente I3 en su séptima participación. A estas trayectorias en las que los estados epistémicos cambian pero la adecuación de la respuesta y su fundamento permanecen sin variaciones se llamarán en este escrito, *trayectorias improductivas.*

CONSIDERACIONES FINALES

Con base en el marco teórico-interpretativo y siguiendo los principios metodológicos de la Teoría Fundamentada se analiza la interacción entre un profesor y una estudiante que participan en un foro virtual sobre álgebra básica. En un primer nivel, se revela que a lo largo de una interacción se puede identificar una diversidad de argumentos. Por ejemplo, se puede asociar duda a una respuesta acorde fundada en razones matemáticas o asociar convencimiento a una respuesta discorde a un aspecto basado en consideraciones extra-matemáticas. Lo anterior motivó una tipificación de argumentos para niveles básicos. Sin embargo se propone que, como uno de los objetivos del profesor es que los estudiantes experimenten convencimiento en un conocimiento bien fundamentado, se relacione a los argumentos SAM con la comprensión (cf. la idea de estado 'bien calibrado' de Foster, 2016). En un segundo nivel se definen distintos procesos que puede desarrollar un profesor a lo largo de una interacción. En dicha interacción pueden surgir procesos en los que el alumno, durante la dinámica de ese proceso, llegue a experimentar convencimiento en un conocimiento bien fundamentado (v. trayectoria suave o intrincada). En esos procesos la seguridad coligada a una respuesta incorrecta basada en esquemas extra-matemáticos, por ejemplo, puede requerir cuestionar el soporte, la construcción de nuevas reglas y su aplicación; la inseguridad aunada a una respuesta bien fundada puede requerir de su aplicación en diferentes contextos.

Referencias

Corbin, J., & Strauss, A. (2015). *Basics of Qualitative Research: Techniques and Procedures for Developing Grounded Theory* (4^{nd} ed.). California, USA: Sage Publications, Inc.

Foster, C. (2016). Confidence and competence with mathematical procedures. *Educational Studies in Mathematics*, 91(2), 271-288.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P., & Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 3-21.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. En P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229–270). New York, USA: Routledge.

Martínez, B. & Rigo, M. (2014). ¿La certeza implica comprensión? En M.T. González, M. Codes, D. Arnau & T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 445-454). Salamanca, España: SEIEM.

Martínez, V. & Pedemonte, B. (2014). Relationship between inductive arithmetic argumentation and deductive algebraic proof. *Educational Studies in Mathematics*, 86(1), 125-149.

Rigo, M. (2013). Epistemic schemes and epistemic states. A study of mathematics convincement in elementary school classes. *Educational Studies in Mathematics*, 84(1), 71-91.

Toulmin, S., Rieke, R., & Janik, A. (1984). *An introduction to reasoning*. New York, USA: Macmillan

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., & Trigueros M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental: Una propuesta alternativa*. México D.F., México: Editorial Trillas..

CREENCIAS Y ACTITUDES HACIA LAS MATEMÁTICAS. UN ESTUDIO CON ALUMNOS DE BACHILLERATO

Beliefs and attitudes towards mathematics. A Study with high school students

Lemus M. y Ursini S.

Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México

Resumen

Se presentan los resultados de un estudio exploratorio, cuyo propósito es analizar las creencias y las actitudes hacia las matemáticas de estudiantes mexicanos de último año de bachillerato y, a partir de esta información explorar la intención de elección de carrera (IEC). El objetivo es obtener información que nos permita formular algunas hipótesis acerca de la relación entre creencias y actitudes hacia las matemáticas, y su relación con la IEC. Participaron 55 estudiantes que cursaban el último año de bachillerato. Para determinar las actitudes hacia las matemáticas se aplicó la escala AMMEC y para determinar las creencias se aplicaron cuatro sub-escalas del cuestionario de Fennema-Sherman. Los resultados sugieren que no hay una relación directa entre tipo de actitud y tipo de creencias, pero si se perfilan asociadas con la IEC. Próximamente este estudio se realizará con una población de estudiantes mucho más amplia.

Palabras clave: *matemáticas, actitudes, creencias, elección de carrera, bachillerato.*

Abstract

We present the results of an exploratory study, whose purpose is to analyze high school Mexican students' beliefs and attitudes towards mathematics, the relation between them and their relation with intention of career choice. The purpose is to obtain information that allows us to formulate some hypotheses about the relationship between beliefs and attitudes towards mathematics, and their relationship with intention of career choice. Fifty five high school students were tested. To determine attitudes towards mathematics we administered the AMMEC scale. Four subscales of Fennema-Sherman questionnaire were administered to test students' beliefs. The results suggest no direct link between attitudes and beliefs but they are related to intention of career choice. In a near future the study will be carried out with a greater number of students.

Keywords: *mathematics, attitudes, beliefs, career choice, high school.*

INTRODUCCIÓN

Una vertiente muy importante en matemática educativa, que se ha venido desarrollando desde hace ya varias décadas, es la que estudia las actitudes, los afectos, las creencias, y todo lo relacionado con las emociones que provocan en los estudiantes la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Desde 1976, Fennema y Sherman argumentaban la importancia de estudiar las actitudes hacia las matemáticas, debido al gran número de alumnos que las estudian sólo hasta los niveles preuniversitarios y evitan continuar su estudio en niveles superiores. Posteriormente numerosas investigaciones han estudiado las actitudes hacia las matemáticas y han profundizado acerca de la relación entre los afectos y las matemáticas. McLeod (1985, 1989), Lester, Garófalo & Kroll (1989), Shoenfeld (1985, 1992), Op't Eynde, De Corte, & Verschaffel (2002), Gómez-Chacón (2000, 2007, 2009), Callejo y Vila (2003), Maio & al. (2003), Gil, Blanco y Guerrero (2006), Mato & De la Torre (2010), Hannula (2002), Pérez-Tyteca (2012), Núñez-Peña, Suárez-Pellicioni & Bono (2013), son sólo algunos de los investigadores que han analizado la relación entre afectos y aprendizaje de las matemáticas. Sus estudios analizan las actitudes de los estudiantes hacia las

Lemus M. y Ursini S. (2016). Creencias y actitudes hacia las matemáticas. Un estudio con alumnos de Bachillerato. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 225-232). Málaga: SEIEM.

matemáticas en general y hacia tópicos específicos; la ansiedad hacia las matemáticas y como esta puede ser un predictor en la elección de carrera. Análogamente se han estudiado las creencias de los estudiantes de distintas edades hacia esta materia de estudio; los sistemas de creencias, su conceptualización y medida, así como la estructuración de las creencias. También hay resultados de investigación que señalan la interacción entre las creencias del alumno hacia sí mismo, en relación a las matemáticas, y su poder predictivo sobre el rendimiento en esta área de conocimiento. Varios estudios, realizados en distintos países, siguen aportando evidencias que confirman que las actitudes, las creencias y otros aspectos afectivos como, por ejemplo, la ansiedad en relación a las matemáticas, no solo condicionan el aprendizaje de esta materia sino que influyen fuertemente en la elección de carrera.

Este tipo de estudios cobra todavía más relevancia al considerar las tendencias actuales que promueven una educación enfocada al aprendizaje de la ciencia, la tecnología, la ingeniería y las matemáticas, conocida como educación STEM (acrónimo ingles de Science, Technology, Engineering and Mathematics). Recientemente la *STEM Education Coalition* (2015) ha destacado, en su reporte anual, el papel fundamental que para la sociedad del siglo XXI desempeñan estas áreas del conocimiento en la preparación de los estudiantes, puntualizando su importancia para su inserción en el campo laboral. En varios países, entre ellos México, se está promoviendo una educación STEM, que se propone mejorar la competencia de los alumnos en estos campos del saber. El éxito de la puesta en marcha de una nueva tendencia educativa está estrechamente ligado a las condiciones locales propias de cada país. Se necesita, por lo tanto, desarrollar en cada contexto investigaciones que aporten información que pueda favorecer el aprendizaje de los estudiantes en estos campos.

En México, ha habido estudios que han indagado las actitudes hacia las matemáticas de los estudiantes de distintos niveles educativos (por ejemplo: Eudave, 1994; Ursini, Sánchez & Orendain, 2004; Mercado, 2007; Sánchez & Ursini, 2010; Juárez, 2009; Ursini & Sánchez, 2008, 2011; Montes & Ursini, 2013), pero las creencias acerca de las matemáticas han sido todavía poco estudiadas. Tampoco se ha profundizado en la relación entre actitudes y creencias, y entre éstas y la intención de elección de carrera.

Los resultados que presentamos aquí se refieren a un estudio realizado con estudiantes mexicanos de último año de bachillerato, con el propósito de obtener información que nos permita, por un lado, formular algunas hipótesis acerca de la relación entre actitudes hacia las matemáticas y creencias acerca de esta materia de estudio; y, por el otro, establecer una relación entre actitudes, creencias e intención de elección de carrera de estudiantes mexicanos de bachillerato. Las hipótesis que formulemos serán corroboradas o refutadas en un estudio posterior, con una población más amplia.

MARCO TEÓRICO

Si bien numerosas investigaciones se han abocado al estudio de las actitudes hacia las matemáticas, todavía existen controversias en cuanto a los elementos que las componen, como ya lo señalaba Hart (1989) y, por lo tanto, no encontramos un marco conceptual unificado que soporte estos estudios. Entre las distintas perspectivas resalta, en particular, el Modelo Tripartita que establece que las actitudes tienen tres componentes: el cognitivo, que incluye creencias, expectativas y preferencias; el afectivo, que se refiere a sentimientos y emociones; y el conductual que incluye conductas e intenciones. Desde esta perspectiva, como ya lo mencionaba Hart (1989), una actitud se concibe como la predisposición evaluativa, que puede ser positiva o negativa, y determina las intenciones del sujeto e influye en su comportamiento. Queremos subrayar que, desde esta perspectiva, se considera que las creencias forman parte de la componente cognitiva de las actitudes.

Por otra parte, investigadores como Schoenfield (1985, 1992), McLeod (1985, 1989), Gómez-Chacón (2000, 2007), Guerrero & Blanco (2002), Mato (2009), Mato & De la Torre (2010) y Pérez-Tyteca (2012), Gómez-Chacón et al. (2014), que han indagado la relación del aprendizaje de las matemáticas y su enseñanza con los afectos, consideran que el dominio afectivo abarca las actitudes, las emociones y las creencias. Esto es, desde esta perspectiva, se consideran las creencias como un constructo distinto a las actitudes, si bien estrechamente relacionado y entrelazado con ellas, y se conciben como una componente del conocimiento subjetivo del individuo acerca de las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje.

Ciertamente hay diversidad de enfoques, lo cual ha llevado a algunos investigadores, como por ejemplo Rigo (2009), a reiterar que no hay consenso todavía en cuanto a una definición clara de qué son, en particular, las creencias y subrayar la necesidad de definirlas sin ambigüedad para clarificar su influencia en el aprendizaje de las matemáticas. También Villoro (2002) argumenta que no hay consenso en cuanto a qué caracteriza las creencias y qué las actitudes. De acuerdo a Schoenfeld (1992), las creencias acerca de las matemáticas son la perspectiva desde la cual cada persona se acerca al mundo matemático y pueden determinar la forma, los procedimientos, el tiempo e intensidad del esfuerzo con que abordará un problema dado. Gómez-Chacón et al. (2014) también consideran las creencias como un conjunto de entendimientos del estudiante acerca de las matemáticas y su aprendizaje, y señalan que las creencias son un factor que incide en la competencia del estudiante para el estudio de las matemáticas.

Coincidiendo con estos autores, en nuestro estudio consideraremos que las creencias son el conjunto de perspectivas que una persona tiene acerca de las matemáticas y su aprendizaje y propician u obstaculizan el desarrollo de las competencias en esta área del conocimiento.

En cuanto a las actitudes, para este estudio asumiremos el enfoque del Modelo Tripartita en el cual se considera que las actitudes tienen tres componentes: la cognitiva, la conductual y la afectiva. Cada una de estas componentes tiene, a su vez, distintas facetas. Desde esta perspectiva las creencias son sólo una faceta de una de las componentes de la actitud, la componente cognitiva.

Lo anterior nos permite, por un lado, estudiar las actitudes y, por el otro, profundizar en sólo una faceta de sus componentes.

No es el propósito de esta investigación contribuir a la discusión acerca de las definiciones de actitud y creencia, sino más bien proporcionar algún elemento empírico que ayude a establecer posibles relaciones entre actitudes hacia las matemáticas y creencias acerca de esta materia de estudio, además de relacionar las actitudes y las creencias de estudiantes de bachillerato con la intención de elección de carrera.

METODOLOGÍA

El diseño de esta investigación es de corte cuantitativo. Mediante escalas tipo Likert de 5 puntos, se recaba la información para determinar las actitudes y las creencias de los estudiantes hacia las matemáticas. Se analizan los datos aplicando estadística descriptiva y, con base en esta información, se formulan hipótesis acerca de posibles relaciones entre actitudes y creencias, así como la posible relación entre estos constructos y la intención de elección de carrera.

Sujetos

Se trabajó con 55 alumnos que estaban cursando el último año de bachillerato en una escuela pública de la Ciudad de México. Sus edades oscilaban entre 17 y 19 años. Hay que aclarar que en México, el bachillerato consta de 3 años, organizados en 6 semestres, y estos estudios son preparatorios para acceder al nivel universitario. En cada uno de los primeros 4 semestres de bachillerato, los alumnos cursan obligatoriamente un curso de matemáticas, mientras que al inicio del último año, al empezar el 5° semestre, tienen la opción de elegir seguir uno o dos cursos de matemáticas. Los cursos que se ofrecen son: Cálculo Diferencial e Integral (CDI) y Probabilidad y Estadística (PyE).

Por experiencia propia sabemos que, por lo general, los alumnos que no tienen intención de seguir una carrera con fuerte contenido matemático se inclinan por PyE y no por CDI, por lo tanto, decidimos recabar datos sea de alumnos que estaban cursando CDI (28 estudiantes) que de alumnos que cursaban PyE (27 estudiantes), en total se trabajó con 55 alumnos.

Instrumentos

Los instrumentos utilizados para la recolección de datos fueron: 4 sub-escalas del cuestionario de Fennema y Sherman (1976) que valoran las creencias acerca de las matemáticas; y 2 sub-escalas de la escala AMMEC (Actitudes hacia las Matemáticas y hacia las Matemáticas Enseñadas con Computadora) de Ursini y Sánchez, y Orendain (2004) que mide las actitudes hacia las matemáticas.

Las 4 sub-escalas de Fennema-Sherman que consideramos adecuadas para evaluar las creencias del alumnado fueron: Confianza hacia el aprendizaje de la matemática; Utilidad de la matemática; Ansiedad del alumno hacia el estudio de la matemática; y Motivación hacia el estudio de la matemática. Las cuatro sub-escalas son tipo Likert de 5 puntos y cada una tiene 12 afirmaciones en sentido positivo y 12 afirmaciones en sentido negativo.

Las dos sub-escalas de AMMEC son también tipo Likert de 5 puntos y tienen un total de 17 afirmaciones.

Los profesores de los grupos facilitaron la toma de datos permitiendo que sus alumnos, contestaran las sub-escalas durante la clase de matemáticas. Todas fueron administradas el mismo día a los 55 alumnos.

Análisis de datos

Se calculan los puntajes promedio que obtienen los estudiantes al contestar las sub- escalas y se tratan por separado los que corresponden a las actitudes y los que corresponden a las creencias. Por medio de análisis de distribución de frecuencias se delimitó la siguiente correspondencia entre puntajes promedio y tendencias positiva, neutra o negativa de la actitud:

tendencia positiva - puntaje promedio en el intervalo [3.5, 5]

tendencia neutra - puntaje promedio en el intervalo [2.8, 3.4]

tendencia negativa - puntaje promedio en el intervalo [1, 2.7])

Considerando la totalidad de los estudiantes se hace un análisis comparativo entre actitudes y creencias; se contrastan los puntajes promedio de las actitudes positivas, neutras y negativas con los puntajes promedio de las creencias. Diferenciando los alumnos por materia se analiza la distribución de las tendencias actitudinales y de las creencias.

RESULTADOS

Actitudes de los estudiantes

En cuanto a las actitudes que manifiestan los 55 estudiantes se obtuvo la siguiente distribución:

Alumnos con Actitud de tendencia positiva: 21 (puntaje promedio en el intervalo [3.5, 5])

Alumnos con Actitud de tendencia neutra: 24 (puntaje promedio en el intervalo [2.8, 3.4])

Alumnos con Actitud de tendencia negativa: 10 (puntaje promedio en el intervalo [1, 2.7])

Podemos observar que el número mayor de estudiantes, 24 (el 44%), manifiesta una tendencia actitudinal neutra, sin embargo, la tendencia positiva hacia las matemáticas también se destaca ya que 21 de los 55 alumnos (el 38%) están en esta categoría y sólo 10 alumnos (el 18%) muestran una tendencia actitudinal negativa hacia las matemáticas.

Creencias de los estudiantes
En cuanto a las creencias se obtuvo la siguiente distribución:
Alumnos con Creencias de tendencia positiva: 33 (puntaje promedio en el intervalo [3.5, 5])
Alumnos con Creencias de tendencia neutra: 17 (puntaje promedio en el intervalo [2.8, 3.4])
Alumnos con Creencias de tendencia negativa: 5 (puntaje promedio en el intervalo [1, 2.7])
Encontramos así que el mayor número de estudiantes, 33 (el 60%), manifiestan creencias positivas; 17 alumnos (el 31%) presentan creencias neutras; y sólo 5 alumnos (el 9%) tienen creencias negativas en relación a las matemáticas.

Análisis comparativo entre actitudes y creencias
Para analizar cómo se relacionan las actitudes con las creencias se resumen en la Tabla 1 los resultados obtenidos con las escalas empleadas.

Tabla 1. Resumen de los resultados de las sub-escalas aplicadas

Tendencias	Positivas	Neutras	Negativas	Total
Intervalo	[3.5, 5]	[2.8, 3.4]	[1, 2.7]	[1, 5]
Actitudes (alumnos)	21	24	10	55
Creencias (alumnos)	33	17	5	55

En la Tabla 1 se observa que no hay una distribución similar entre actitudes y creencias. El número de alumnos con creencias positivas es mayor que el número de alumnos que manifiesta una actitud positiva. Hay menos alumnos con creencias neutras que alumnos con actitud neutra y hay menos alumnos con creencias negativas que alumnos con actitud negativa. Estos resultados sugieren que no se puede establecer una relación directa entre el tipo de actitud y el tipo de creencias. No se puede, por lo tanto, afirmar que una creencia positiva necesariamente lleva a una actitud positiva o que una actitud negativa implica siempre una creencia negativa. Este resultado subraya, desde nuestro punto de vista, la importancia y la necesidad de estudiar más a fondo la relación que existe entre las creencias y las actitudes.
A fin de profundizar en esta relación se hizo un análisis comparativo contrastando, por separado, los puntajes promedio de las actitudes positivas, neutras y negativas con los puntajes promedio de las creencias.

Actitudes positiva vs. Creencias
Encontramos que los 21 alumnos que tienen actitudes con tendencia positiva, no siempre tienen asociado un valor positivo de creencias. En efecto, si bien para 17 alumnos (81%) coincidieron las actitudes positivas con las creencias positivas, los restantes 4 alumnos (19%) manifestaron creencias neutras.

Actitudes neutras vs. Creencias
De los 24 alumnos con actitudes neutras, sólo 8 alumnos (33%) mostraron tener creencias neutras; 15 alumnos (63%) manifestaron creencias positivas; y 1 alumno (4%) creencias negativas.

Actitudes negativas vs. Creencias
Aún cuando hubo 10 alumnos con actitud negativa, sólo 4 de ellos (40%) manifestaron creencias negativas mientras los restantes 6 (60%) tuvieron creencias neutras.
En la Tabla 2 se muestra la distribución de los alumnos de acuerdo a sus puntajes promedio al realizar el comparativo Actitudes vs. Creencias.

Tabla 2. Concentrado del comparativo Actitudes vs Creencias

	Actitudes	Creencias
Positivas	21	17 creencias positivas y 4 neutras
Neutras	24	15 creencias positivas, 8 creencias neutras y 1 creencias negativa
Negativas	10	4 creencias negativas y 6 creencias neutras

Estos resultados muestran que en una misma persona no siempre coinciden las tendencias actitudinales hacia las matemáticas y las creencias acerca de esta materia de estudio.

Actitudes, creencias y materia que cursan
También se analizó la distribución de las tendencias actitudinales y de creencias diferenciando los alumnos por materia (Probabilidad y Estadística - PyE; Cálculo Diferencial e Integral- CDI) obteniéndose las distribuciones que se muestran en la Tabla 3.

Tabla 3. Distribución de alumnos por materia de acuerdo a su Actitud

	Total de Alumnos	P y E	C D I
Actitud positiva	21	9	12
Actitud neutra	24	12	12
Actitud negativa	10	6	4
Total	55	27	28

Se puede observar que de los 21 alumnos con actitud positiva hacia las matemáticas 9 (43%) cursan PyE y 12 (57%) cursan CDI.

Los alumnos con actitud neutra se distribuyen por igual en las dos materias 12 (50%).

Se observa también que hay más alumnos con actitud negativa entre los que cursan PyE (6, o sea, 60%) que entre los que cursan CDI (4, o sea, 40%).

Análogamente, también para las creencias se realizó un conteo diferenciando los alumnos por materia obteniéndose las estadísticas que se muestran en la Tabla 4.

Tabla 4. Distribución de alumnos por materia de acuerdo a sus Creencias

	Total de Alumnos	PyE	CDI
Creencias positivas	33	15	18
Creencias neutras	17	7	10
Creencias negativas	5	5	0
Total	55	27	28

Se puede observar que de los 33 alumnos con creencias positivas acerca de las matemáticas, 18 (54%) cursan la materia de CDI y 15 de ellos (46%) son alumnos de PyE. Los alumnos con creencias neutras son 17, de los cuales 10 (58%) estudian CDI y 7 (42%) cursan PyE. Por último, hay 5 alumnos con creencias negativas y todos ellos son de PyE, mientras que no encontramos alumnos de CDI en esta categoría.

A fin de complementar estos resultados, en la Tabla 5 se presenta un comparativo de la distribución de alumnos de cada materia en actitudes y creencias hacia las matemáticas.

Tabla 5. Comparativo por materia de Actitudes y Creencias de los Alumnos hacia las matemáticas.

	Positivas		Neutras		Negativas		
	P y E	C D I	P y E	C D I	P y E	C D I	Total
Actitud	9	12	12	12	6	4	55
Creencias	15	18	7	10	5	0	55

Se observa que entre los alumnos que cursan CDI hay un número mayor con actitudes y creencias positivas que entre los que cursan PyE. Análogamente, en la categoría de actitudes y creencias neutras, el número de alumnos de la materia de CDI es mayor que el de PyE. No es así en el caso de actitudes y creencias negativas, donde el mayor número de alumnos corresponde a la materia de PyE. Queremos puntualizar que el haber escogido cursar CDI o PyE puede ser un buen predictor de la intención de elección de carrera futura.

Conclusiones

Los resultados de este estudio muestran que, en general, la mayoría de los alumnos de último año de bachillerato que participaron en este estudio, tienen actitudes positivas o neutras hacia las matemáticas y sólo unos cuantos manifiestan actitudes negativas.

En cuanto a las creencias, la mayoría manifiesta creencias positivas acerca de las matemáticas, si bien encontramos también alumnos con creencias neutras y unos pocos con creencias negativas.

Pudimos observar que en un mismo estudiante pueden convivir distintas combinaciones de tendencias actitudinales y de creencias. Si bien hubo estudiantes para los cuales las creencias y las actitudes eran ambas positivas, neutras o negativas, hubo también alumnos con creencias positivas o negativas y actitudes neutras y otros con creencias neutras y actitudes positivas o negativas. Consideramos este un resultado interesante, sobre el que hay que profundizar, dado que, si bien se sabe que las actitudes y las creencias son difíciles de modificar, el hecho de que convivan en un individuo tendencias divergentes en relación a las matemáticas, puede indicar una oportunidad para incidir sobre ellas en sentido positivo.

Respecto a la relación entre actitudes, creencias e intención de elección de carrera, encontramos que entre los que escogieron cursar PyE hay menos estudiantes con actitudes y creencias positivas y más estudiantes con actitudes y creencias negativas que entre los que cursan CDI. Como ya señalamos los estudiantes que escogen PyE evitan, por lo general escoger carreras con fuerte contenido matemático. Por lo tanto, estos resultados parecen confirmar, también para los estudiantes mexicanos, lo ya reportado por otros investigadores (p.ej. Fennema-Sherman, 1976; Pérez-Tyteca, 2012) acerca de la relación entre la intención de carrera y las creencias y actitudes hacia las matemáticas. Sin embargo, dado el número reducido de estudiantes que participaron en el estudio, para los estudiantes mexicanos podemos formularlo, por lo pronto, sólo como una hipótesis.

Las hipótesis que emanan de este estudio se corroborarán o, en su caso, refutarán al trabajar con un número de estudiantes mucho mayor. Actualmente estamos reaplicando este estudio con una población de 400 estudiantes. Los datos recabados se analizarán inicialmente usando estadística descriptiva y posteriormente se usará un acercamiento cualitativo para profundizar en la relación que hay entre actitudes y creencias, y entre estas y la intención de elección de carrera.

Referencias

Callejo, M., & Vila, A. (2003). Origen y Formación de Creencias sobre la resolución de problemas. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, *X* (2).

Eudave, D. (1994). Actitudes hacia las matemáticas de los maestros y de los alumnos de Bachillerato.

Educación Matemática, *6*(1), 46-58.

Fennema, E.S., & Sherman, J. (1976). Mathematics Attitudes Scale: Instruments Designed to Measure Attitudes toward the Learning of Mathematics by Females and males. U. Wisconsin, Madison, Wisconsin, EUA.

Gil N., Blanco L., & Guerrero E. (2006). El papel de la afectividad en la resolución de problemas matemáticos, *Universidad de Extremadura Revista de Educación, (340)*, 551-569.

Gómez-Chacón, I. M. (2000). *Matemática Emocional*. Madrid: *Narcea*.

Gómez-Chacón, I.M. (2007). Sistema de creencias sobre matemáticas en alumnos de secundaria. *Revista Complutense de Madrid*, *18*, (2), 125-143.

Gómez-Chacón, I.M. (2009). Actitudes Matemáticas: Propuesta para la transición del bachillerato a la Universidad. *Educación Matemática*, *21*, (3), 5-32. Santillana, México.

Gómez-Chacón, I.M., García–Madruga, J.A., Vila, J.O., Elosúa, M.R., & Rodríguez, R., (2014). The dual processes hypothesis in mathematics performance: Beliefs, Cognitive reflection, Working Memory and Reasoning. *Journal of Psicology and Education 29*,67-73., ELSEVIER. Consultada el 23 de mayo 2016 en www.elsevier.com/locate/lindif.

Guerrero, E. & Blanco, L. (2002). Diseño de un programa psicopedagógico para la intervención en los trastornos emocionales en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática* (ISSN: 1681-5653).

Hannula, M.S. (2002). Attitude towards mathematics: emotions, expectations and values. *Educational Studies in Mathematics*. *49*, 25-46.

Hart, L.E. (1989). Describing the affective dominie: Saying what we mean. In D. B. & V. Adams (Eds), *Affect and mathematical problem solving: A new perspective* 37-45 New York, Springer-Verlag.

Juárez, J.A. (2009). Actitudes y rendimiento en matemáticas usando la hoja electrónica de cálculo: Un estudio longitudinal comparativo con estudiantes de telesecundaria. Tesis Doctoral, no publicada, Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México.

Lester, F.K., Garofalo, J., & Kroll, D.L. (1989). Self-Confidence, Interest, Beliefs, and metacognition: Key influences on problem- solving behaviour. En D. B. McLeod, & V. Adams (Eds), *Affect and mathematical problem solving: A new perspective* New York: Springer-Verlag.

Maio, G., Bernard, M., Luke, M., & Olson, J. (2003). Ideologies, Values, Attitudes and Behaviours, *Handbook of Social Psychology*, 283-308, Kluwer Academic/Plenum Publishers.

Mato, M. D. (2009). Mejorar las actitudes hacia las actitudes hacia las matemáticas. *Galego Portuguesa de Psicología y Educación*, *18* (14).

Mato, M. D., & De la Torre, E. (2010). Evaluación de las actitudes hacia las matemáticas y el rendimiento académico. En M. J. González, M. T. González, & J. Murillo, *Investigación en Educación Matemática XIII*, 285-300. Santander SEIEM.

McLeod, D.B. (1985). Affective Issues In Research on Teaching mathematical Problem Solving E. A. Silver. Erlbaume, Hillsdale, N. J. New Jersey.

McLeod, D. (1989). *Beliefs, Attitudes, and Emotions*: New Views of affect in Mathematics Education, Affect and Mathematical Problem Solving. A New Perspective, 245-258, Springer - Verlag, New York.

Mercado, M. (2007). Actitud hacia las matemáticas y rendimiento. Tesis de Maestría, no publicada, Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México.

Montes, M.D. & Ursini, S. (2013). Chic en el análisis de las actitudes hacia las matemáticas de secundaria. VII Colloque International A.S.I. Analyse Statistique Implicative, Sao Paolo, Brasil, http:// sites.univ-lyon2.fr/ASI7.

Núñez-Peña, M. I., Suárez-Pellicioni, M., y Bono, R. (2013). Effects of math anxiety on student success in higher education. International Journal of Educational Research, 58, 36-43.

Op't Eynde, P., De Corte, E. & Verschaffel, L. (2002). Framing students' mathematics-related beliefs. In Leder, G. C., Pehkonen, E. & Törner, G. (eds), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* Kluwer Academic Publishers.

Pérez-Tyteca, P. (2012). La ansiedad matemática como un factor predictivo en la elección de carrera. Tesis Doctoral, U. de Granada, España.

Rigo, M. (2009). La cultura de racionalidad en el aula de matemáticas de la Escuela Primaria. Tesis Doctoral, no publicada, Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México.

Sánchez, G. & Ursini, S. (2010). Actitudes hacia las matemáticas y matemáticas con tecnología: estudios de género con estudiantes de secundaria. *Revista Latinoamericana en Matemática Educativa13*, 303-218.

Schoenfeld, A. H. (1985). Mathematical Problem Solving. Orlando, FL, EUA: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving metacognition and sense making in mathematics. En D. Grouws, Handbook for research on mathematics teaching and learning. 334-370. New York, EUA, Macmillan.

STEM Education Coalition (2015). Annual Report: Recuperado el 17 de mayo 2016 de http://www.stemedcoalition.org.

Ursini, S. y Sánchez, G. (2008). “Gender, technology and attitude towards mathematics: a comparative longitudinal study with Mexican students”. *ZDM Mathematics Education 40*, 559-577, DOI 10. 1007$_{s}$11858-008-01-20-1.

Ursini, S., & Sánchez, G. (2011). Actitudes y enseñanza de las Matemáticas. En Luis Mauricio Rodríguez Salazar, Ricardo Quintero-Zazueta, Abel Rubén Hernández Ulloa (eds.). *Razonamiento Matemático. Epistemología de la Imaginación. (Re)-pensando el papel de la Epistemología en la Matemática Educativa. VII*, 295-319. Barcelona, España: Gedisa.

Ursini, S., Sánchez, G., & Orendain, M. (2004). Validación y Confiabilidad de una escala de Actitudes hacia las Matemáticas y hacia las Matemáticas Enseñadas con Computadora. *Educación Matemática*, *16* (3), 59-78.

Villoro, L. (2002). *Creer, saber, conocer*. Siglo XXI, México.

FORMAS DE CONSTRUIR EL CONCEPTO DE FUNCIÓN INTEGRAL: DOS ESTUDIOS DE CASO

Ways to build the concept of integral function: two case studies

Aranda, C.[a], Callejo, M.L.[b]

[a]I.E.S. Número 3 La Vila Joiosa, [b]Universidad de Alicante

Resumen

Este trabajo forma parte de otro más amplio sobre la integral definida. El objetivo del estudio que se presenta es caracterizarcómo estudiantes de Bachillerato construyen el concepto de función integral en el contexto de un experimento de enseñanza diseñado según una trayectoria hipotética de aprendizaje y utilizando applets. De los quince estudiantes que participaron en el experimento de enseñanza se han seleccionado dos parejas que se encuentran en distintos momentos del proceso de abstracción reflexiva (proyección y reflexión) para hacer un estudio de casos.Los resultados indican dos características: identificar la relación entre un extremo de un intervalo y el valor del área bajo una recta en dicho intervalo, que es una forma de covariación simple; y ver la covariación compleja de las tres cantidades que varían simultáneamente y que intervienen en el concepto de función integral, es decir, la variable x, x ∈ [a, b], una función f(t), t ∈ [a, x] y la función integral $F(x) = \int_a^x f(t)$, *en casos sencillos.*

Palabras clave:*función integral, experimento de enseñanza, trayectoria hipotética de aprendizaje, razonamiento covariacional*

Abstract

This study is part of a research focused on the definite integral. The aim is to characterize how high school students build the integral function concept in the context of a teaching experiment designed according to a hypothetical learning trajectory and using applets. It has been chosen two couples of students that have participated and shown different moments of reflective abstraction, to do a study of cases. Our results indicated two characteristics: identifying the relationship between a bound of an interval and the value of the area under a straight line belonging to this interval, which is a way of a simple covariation; and identifying the complex covariation of the three quantities which vary simultaneously and which are involved in the concept of the integral function, that is to say, the variable x, x ∈ [a, b], a function f(t), t ∈ [a, x] and the integral function $F(x) = \int_a^x f(t)$, *in simple cases.*

Keywords: *integral function, teaching experiment, hypothetical learning trajectory, covariational reasoning*

INTRODUCCIÓN

La enseñanza y aprendizaje del Cálculo ha sido objeto de debate e investigación en las últimas décadas (Azcárate, Camacho-Machín, González y Moreno, 2015). Algunas investigaciones han puesto de relieve la importancia del *razonamiento covariacional* para comprender los conceptos fundamentales del Cálculo como límite, función derivada o función integral. Este tipo de razonamiento ha sido definido como *"las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades variables mientras se atiende a las formas en que cambian unas en relación a otras*" (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, y Hsu, 2002, p. 354). En el caso de la función integral Kouropatov y Dreyfus (2014) entiendenque para comprender su significado es necesario considerer

Aranda, C. y Callejo, M.L. (2016). Formas de construir el concepto de función integral: Dos estudios de caso. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 233-243). Málaga: SEIEM.

simultáneamente tres objetos matemáticos: x, $f(t)$ y $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, con $x\in[a,b]$ y $t\in[a,x]$, y entender cómo varía f en función de t y cómo varía F en función de x, es decir, la variación de la integral definida cuando x recorre el intervalo $[a, b]$, para lo cual es necesario el *razonamiento covariacional complejo*, pues hay que considerar cómo cambia cada unode los objetos implicados en relación a los otros dos. En el caso en que solo se ponen en relación dos variables se habla de *razonamiento covariacional simple*.

Por otra parte se subraya la importancia de la comprensión conceptual de los conceptos del Cálculo, más allá de la manipulación simbólica. Para ello se propone proporcionar contextos de aprendizaje donde se trabaje simultáneamente con distintostipos de representaciones con el apoyo de la tecnología (Hong y Thomas, 1997). Berry y Nyman (2003) investigaron sobre la relación entre el gráfico de la derivada de una función y el de la función. Sus resultados manifestaron que al comienzo de la actividad los estudiantes mostraban una visión algebraica del Cálculo y tuvieron dificultad para relacionar la gráfica de una función derivada y la función original, pero el uso de la tecnología permitió desarrollar una mejor comprensión de la aproximación gráfica al Cálculo. Camacho, Depool y Santos-Trigo, (2010) mostraron que la utilización de actividades programadas con las utilidades que ofrecen las tecnologías permiten un cierto progreso en el uso de aspectos gráficos y numéricos del concepto de integral definida, sin embargo, aunque Camacho y Depool (2003) encontraron que algunos alumnos manejaban varias representaciones semióticas, la mayoría tendían a utilizar un único sistema de representación.

El trabajo que aquí presentamos forma parte de otro más amplio sobre la construcción del concepto de integral definida. Nos centraremos en la parte de la construcción de la función integral. Nuestro objetivo es:

> Caracterizarcómo estudiantes de Bachillerato construyen el concepto defunción integral en el contexto de un experimento de enseñanza utilizando *applets*.

MARCO TEÓRICO

Nuestro marco teórico para analizar cómo estudiantes de Bachillerato construyen la función integral es el *mecanismo reflexión sobre la relación actividad-efecto* (Simon et al., 2004). Este mecanismotrata de describir la construcción de un nuevo concepto intentando operativizar la “transposición a un plano superior” y la “reconstrucción” a las que hace referencia Piaget para explicar el proceso de abstracción. Para ello ofrece “lentes teóricas” con el fin de analizar los conocimientos disponibles de los estudiantes y cómo los utilizan para construir nuevos conceptos.

Tzur y Simon (2004) han identificado dos fases en la elaboración de un nuevo concepto: la de *participación*, entendida como el proceso donde el alumno abstrae una regularidad en la relación entre la actividad realizada y el efecto producido, y la de *anticipación*que se refiere al uso de la regularidad abstraída en situaciones distintas a las que se llevó a cabo la abstracción.Roig (2008) ha identificado tres momentos en la fase de participación: *proyección, reflexión* y *anticipación local*. En el de *proyección* los alumnos construyen un conjunto de registros o unidades de experiencia, en el de *reflexión* abstraen la regularidad a partir de la información procedente del conjunto de registros, y en la de *anticipación local* aplican la regularidad identificada (la concepción matemática que organiza la situación) a nuevos casos particulares. Roig considera, en términos del mecanismo *reflexión sobre la relación actividad-efecto*, que “las acciones propias de la fase de proyección están anidadas en la coordinación de información que caracteriza la reflexión” (2008, p. 228), pues se produce en forma paralela a la generación de casos particulares.

Por otra parte los experimentos de enseñanza constructivista (Gravemeijer, 2004) contemplan Ciclos de Enseñanza de las Matemáticas (Simon, 1995) que comprenden: el conocimiento del profesor, las *trayectorias hipotéticas de aprendizaje* y la evaluación del conocimiento de los estudiantes; la evaluación proporciona nuevo conocimiento al profesor y cierra un ciclo de enseñanza. Para generar una trayectoria hipotética de aprendizaje es necesario conocer los conceptos previos de los estudiantes y tener presente los objetivos de aprendizaje, las tareas matemáticas que se usan para fomentar el aprendizaje y las hipótesis sobre el proceso de aprendizaje en el contexto de un conjunto particular de tareas. Estos dos últimos puntos son interdependientes y ahí entra en juego la manera en que se caracteriza el *mecanismoreflexión sobre la relación actividad-efecto*, porque se plantea la necesidad de seleccionar aquellas tareas que, desde las *actividades* disponibles para los alumnos, sean la base del aprendizaje pretendido (Simon y Tzur, 2004).

Para favorecer la construcción de los conceptos del Cálculo se propone el uso de la tecnología como instrumento de mediación semiótica (Ferrara, Pratt y Robutti, 2006), para representar estos conceptosen forma numérica, gráfica y algebraica. Estas representaciones no son meras ilustraciones de los conceptos, pues la tecnología permite "actuar" sobre ellas. Entre estas tecnologías se encuentra el uso de*applets*diseñados ad hoc, que se manejan con facilidad y realizan tareas específicas como por ejemplo visualizar una función y su función integral simultáneamente de forma que moviéndose sobre el gráfico de la función se va generando el gráfico de la función integral; la gráfica de la función integral se construye así de forma dinámica lo que permite constatar la relación entre una función y su función integral. Al mismo tiempo pueden aparecer en pantalla las coordenadas del punto que se "mueve" sobre el gráfico de la función y la expresión analítica de la función y su función integral.

MÉTODO

Participantes y contexto

Los participantes en esta investigación fueron 15 estudiantes de 2º de Bachillerato (17-18 años) de la modalidad de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud que participaron en un experimento de enseñanza. Se formaron 6 parejas y un trío agrupados por similar nivel académico. Estos alumnos habían estudiado en 1er curso el concepto de límite de una función en un punto con un enfoque procedimental y en 2º curso el concepto de derivada usando *applets* diseñados *ad hoc*. El papel de la profesora fue guiar a los estudiantes, aclarar dudas y moderar una puesta en común de cada sesión. Aquí presentamos dos estudios de caso de estudiantes que se encuentran en distintos momentos de la fase de participación.

La secuencia didáctica del experimento de enseñanza plantea el estudio de la integral definida a partir del cálculo del área de una superficie bajo una curva (Turégano, 1998) y se articula de la siguiente manera:

1. Cálculo del área del círculo por el método de "agotamiento".
2. Aproximación del área de superficies bajo una curva mediante suma de áreas de rectángulos.
3. Diferencia entre área bajo una curva en un intervalo e integral definida de la función definida por la curva en dicho intervalo: Definición de la integral definida.
4. Propiedades de la integral.
5. Introducción de la función integral, del teorema fundamental del Cálculo y la regla de Barrow.

En esta comunicación nos centramos en la introducción de la función integral. Los estudiantes resolvieron dos tareas que se presentan más adelante, a las que podían responder con la ayuda de *applets* diseñados ad hoc.

Trayectoria hipotética de aprendizaje de la construcción del concepto de función integral

La Figura 1 muestra la trayectoria hipotética de aprendizaje de la construcción de la función integral en relación a los momentos de la fase de participación.Nuestra hipótesis es que los estudiantes, tras familiarizarse con un applet dando valores a los parámetros m, pendiente, yn, ordenada en el origen de una recta de ecuación $y=mx+n$, y calcular el área bajo la recta en un intervalo fijo $[a, t]$, experimentaránvariando el extremo t del intervalo en casos particulares (con funciones constantes, lineales y afines), para obtener la función que expresa el valor del área bajo la recta. Esto les permitirá *relacionar*una función y su función integral e *inferir* que la función integral de una función representada por una recta es una función polinómica de grado 1 ó 2,*coordinando*así las representaciones geométricas (gráficas de las rectas y de la función integral) y algebraicas de una función y su función integral (ecuaciones de las rectas y de su función integral). Esto les permitirá aplicar las regularidades observadas a nuevas situaciones.

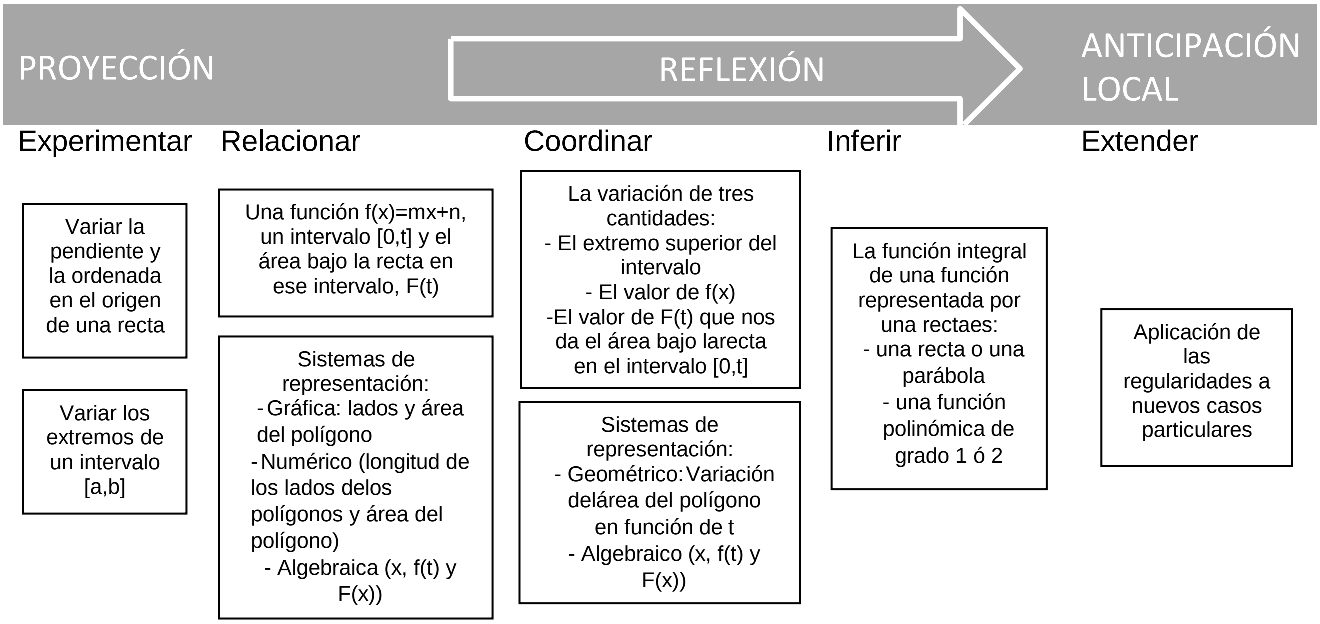


Figura 1. Trayectoria hipotética de aprendizaje para la construcción de la función integral, basada en los momentos de la fase de participación en el proceso de abstracción reflexiva

Se propusieron dos tareas con el objetivo de que los estudiantes generasen un conjunto de registros de experiencia de la relación entre una función y su función integral. El objetivo de la primera tarea (Función Integral I) era que los estudiantes llegaran a expresar la relación entre una función constante, lineal o afíny su función integral; para ello disponían de una guía de trabajo (Figura 2) y se podían apoyar en un *applet* donde podían modificar los parámetros m y n de una recta de ecuación $y=mx+n$ mediante deslizadores y los extremos de un intervalo $[a, t]$, lo que les permitía visualizar los polígonos cuya área debían calcular. En la segunda tarea (Función Integral II; Figura 3) se pedía dibujar las gráficas de las funciones que representan el área bajo una recta en un intervalo donde la función es positiva; los estudiantes podían verificar el resultado con ayuda de un *applet* que representaba la función integral de estas rectas (Figura 4).

Recogida y análisis de datos

Los datos son las acciones realizadas por los estudiantes con los*applets* en la resolución de las dos tareas, las declaraciones orales de las parejas o trío, que fueron registradas en archivos digitales, y las hojas de respuesta. Para analizarlos primero se hizo la trascripción de las comunicaciones oralesy las acciones realizadas con los*applets*. Se consideró como unidad de análisis cada una de las acciones o declaraciones -orales o escritas- de los estudiantes. Después se codificó cada unidad de análisis teniendo en cuenta las acciones realizadas por los estudiantes (experimentar, relacionar, inferir, coordinar y extender) y los distintos momentos de la fase de participación en el proceso de abstracción reflexiva (*proyección*, *reflexión* o *anticipación local*; Figura 1). Dos investigadores codificaron por separado las acciones y momentos y discutieron las discrepancias. Por último se hizo la descripción de las trayectorias de aprendizaje a través de las acciones realizadas y los distintos momentos de la fase de participación, y se agruparon las parejas de estudiantes dependiendo del momento de la fase de participación en que se encontraban.

Función integral I

I. Cuando **a**=0 y **t**=2, cambiando el valor de **m** y **n** en los deslizadores justifica que el área del cuadrilátero es la que se indica,
 - en el caso de rectángulos (**m**=0)
 - en el caso de triángulos (**n**=0)
 - en el caso de trapecios (**m**≠0 y **n**≠0)

II. Sin desplazar "a" mueve "t". Para valores fijos de m y n ¿Podrías obtener una fórmula para cualquier valor de t (t ≥0)?
Por ejemplo:
 - Si **m**=0, **n**=2
 - Si **m**=2, **n**=0
 - Si **m**=1, **n**=2

III. Comprueba la validez de las fórmulas cambiando el valor de t y sustituyendo en las fórmulas obtenidas.

IV. ¿Qué ocurre si para un valor de **m** y **n** dados, manteniendo fijo t, cambiamos el valor de **a**?

Figura 2. Guía de trabajo de la tarea 'Función Integral I'

Función integral II

Dibuja, aproximadamente, las gráficas de la funciones F_I y F_{II} que nos ofrezcan el valor del área bajo cada una de las gráficas siguientes desde 2 hasta x (para valores comprendidos entre 2 y 5)

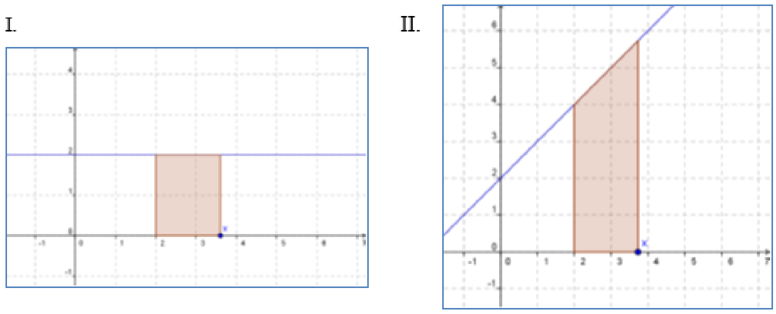


Figura 3. Tarea 'Función Integral II'

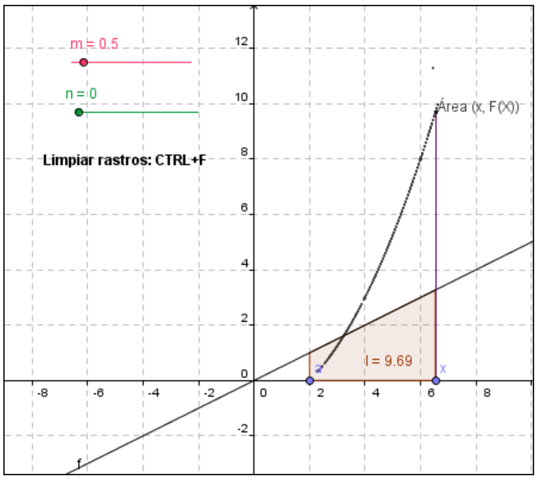


Figura 4. Applet para comprobar los resultados obtenidos en 'Función integral II'

RESULTADOS

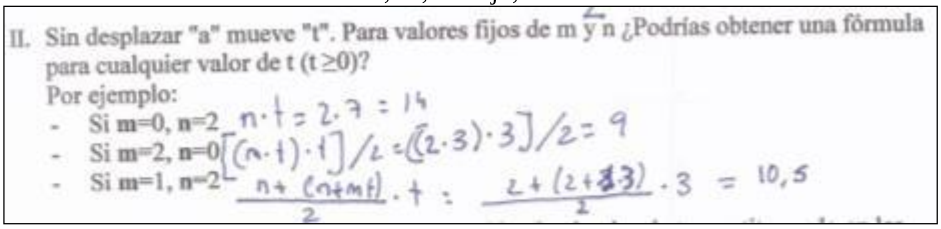
Presentamos el estudio de un trío y una pareja de estudiantes que muestran dos maneras de construir el concepto de función integral:

1. Sin evidencias de construcción de la función integral.
2. Construcción del concepto de función integral en casos particulares.

El trío 1(V-AV-AJ) se sitúa en el momento de *proyección* pues fue capaz de calcular el área bajo una recta en un intervalo fijo, pero no de relacionar como varía el área en función del extremo *t*variable del intervalo y del valor de $f(x)$, $x\in [a,t]$.

Para responder a la tarea Función Integral I, los estudiantes necesitan identificar tres objetos matemáticos, ya seade manera gráfica (el lado horizontal de un polígono sobre el eje de abscisas, el lado vertical perpendicular al anterior en el extremo derecho y la superficie del polígono), de manera numérica (longitud del lado horizontal y del lado vertical y valor del área del polígono) o en forma algebraica (t, $f(x) = mx+n$donde $x\in [a,t]$, y la función que expresa el valor del área del polígono en función de t) y cómo varían unos en relación a otros.

Estetríovisualizó los polígonos con ayuda del *applet* y expresósu área mediante fórmulas en función de los parámetros m y n de una recta de ecuación $y=mx+n$ y del extremo t del intervalo, siendo t fijo (bloque I). Cuando se le pidió una fórmula del área para cualquier valor de t (bloque II) escribieronlas fórmulas que expresan las áreas de los polígonos e interpretaron cada una de ellas no como una función sino como un objeto matemático donde hay que dar valores a las variables, como se muestra en la siguiente respuesta(Figura 5), donde dan a t los valores 7 y 3.


II. Sin desplazar "a" mueve "t". Para valores fijos de m y n ¿Podrías obtener una fórmula para cualquier valor de t (t ≥0)?

Por ejemplo:

- Si m=0, n=2 $n \cdot t = 2 \cdot 7 = 14$
- Si m=2, n=0 $[(n \cdot t) \cdot t]/2 = [(2 \cdot 3) \cdot 3]/2 = 9$
- Si m=1, n=2 $\frac{n + (n+mt)}{2} \cdot t = \frac{2 + (2+3)}{2} \cdot 3 = 10,5$

Figura 5. Respuesta del trío V-AV-AJ a la tarea “Función Integral I”

Esto lo expresaron en el caso en que m=2, n=0 diciendo:

> [218] AV: *t* por *m*, o sea *m* por *t*, por *t* partido 2. Es igual a 2 por 3 por 2, no, 2 por 3 por 3, igual a 6 por 3, 18, partido 2, 9.

Esta pareja no fue capaz de atender a la coordinación de tres cantidades variables (el extremo superior *t* del intervalo, el valor de *f(x)* y el valor del área bajo la recta en el intervalo [*0, t*]) y cómo varían unas en relación a las otras, por ello consideramos que se sitúan en el momento de *proyección*.

En cambio la pareja 2 (L-M), además de visualizar los polígonos en los bloques I, II y III,relacionó una función constante, lineal o afín y la función integral, y expresó esta relación gráfica y/o analíticamente. La forma en que esta pareja expresó el área de las superficies bajo las rectas en función de*t* sin darle un valor particular, es una evidencia de que sabía establecer una relación funcional entre el extremo *t* variable de un intervalo, la función *f(x) = mx+n* y el área bajo la recta en el intervalo [*0, t*] y expresarla analíticamente en función de la variable *t*, y de los parámetros *m* y *n*. Este comportamientopodemos considerarlo como una primera aproximación al concepto de función integral.

En segundo lugar,en la tarea Función Integral II esta pareja fue capaz de representar gráficamente la función integral de una función constante y afín (Figuras 6 y 7).Cuando se le pidió que representara gráficamente la función que expresa el valor del área bajo la gráfica de una función constante en el intervalo [*2, x*] comenzó apoyándose en un resultado obtenido anteriormente (el área bajo una recta de ecuación *y=mx + n*en el intervalo [*0, t*] es *(2n+mt)t/2*), y sustituyó los parámetros *n* y *m* por sus valores (*n*=2, *m*=0) y *t* por *x*; así obtuvo *f(x) = 2x*, pero comprobó dando valores que la expresión no era correcta -debido a que el extremo izquierdo no era 0- ytanteó cuál debería ser la expresión analítica, como muestra el siguiente diálogo:

> [255] L: 4-2, sería x-2, 2 por x-2
>
> [256] M: ¿Por qué es menos?
>
> [257] L: Pero es que si la x fuera 4, el área de esto sería 4-2, 2, por 2 [se están refiriendo a la base, 4-2, por altura, 2], 4.
>
> [258] M: Ah, es que pone desde 2, entonces si pone desde 2, empezaría aquí.
>
> [259] L: x-2.
>
> [260] M: Claro, menos 2. Pero por menos 2 detrás, 2 por -2.
>
> [261] L: ¿Pero no es 2 por x-2? Es que no es lo mismo 2x-2 que 2 por x-2.

Y siguió discutiendo cuál era la forma correcta, dando valores a *x*, lo que es una muestra de *razonamiento covariacional complejo*, atendiendo a la coordinación de trescantidades variables (el extremo superior *x* del intervalo, el valor de la función *y=2*,y el valor del área bajo la recta en el intervalo [*2, x*]) y cómo varía una en relación a las otras:

> [274] M: Entonces llegaría aquí. En 2 sería cero, en 3 habría subido al 2 ¿no? En 3 habría subido hasta aquí y sería 2 por 1.
>
> [275] L. ¿La tengo que dibujar?
>
> [276] M: Sí, tiene que pasar de ahí y tiene que llegar hasta ahí.

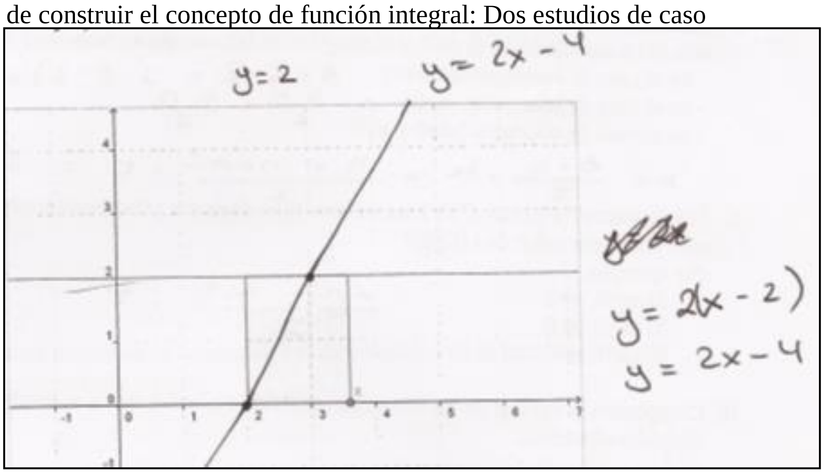


Figura 6. Respuesta de la pareja L-M a la tarea 'Función Integral II' (función constante)

Hacemos notar que estos estudiantes manejaron en este caso distintas representaciones de la función integral: algebraica (como conjetura y refinamiento de la misma), numérica(dando valores para comprobar la conjetura) y gráfica (como respuesta a la cuestión planteada), lo que les ayudó a dar la respuesta correcta. Por tanto, al establecer la relación entre una función y su función integral, mostró evidencias de coordinación de distintas formas de representación de una función.

Por otra parte no hemos encontrado evidencias de que estos estudiantes infieran que siempre la función integral de una función constante es una función lineal o afín, dependiendo de que el extremo *a* del intervalo [*a*, *x*] sea 0 o distinto de 0, lo que habría sido una segunda manifestación de la construcción del concepto de función integral.

Sin embargo, en el caso en que se pedía expresar el área bajo una recta que representa una función afín en el intervalo [*2*, *x*], la pareja L-M afirmó que la función que expresa el valor del área bajo una recta *"tiene que dar una parábola [...] porque de grado 1 tiene que pasar a grado 2"*. Esta afirmación, que luego comprobó dando valores pero sin hacer referencia al crecimiento de la función o a puntos singulares como el vértice, es una nueva muestra de *razonamiento covariacional*, pues establece una coordinación entre parejas de funciones. Esto pone de manifiesto cómo estos estudiantes van construyendo progresivamente el concepto de función integral, lo que se muestra en el siguiente diálogo donde un miembro de la pareja, M, lleva la iniciativa y el otro, L, le cuestiona:

[322] M: A ver, tiene que dar una parábola.

[323] L: ¿Por qué?

[324] M: Porque de grado 1 tiene que pasar a grado 2.

[325] L: Vale, entonces.

[326] M: Pero vamos a hacerlo, a ver, aquí es cero.

[327] L: ¿Que aquí qué?

[328] M: En ese valor ¿cuánto vale el área?

[329] L: ¿En 2? No entiendo lo que me estás diciendo. A ver, si x=3, el área de esto es 9.

Esta pareja siguió dando valores y dibujó la parábola, aproximadamente, y con errores en el gráfico (Figura 7), pero no llegó a expresar la ecuación de la parábola.

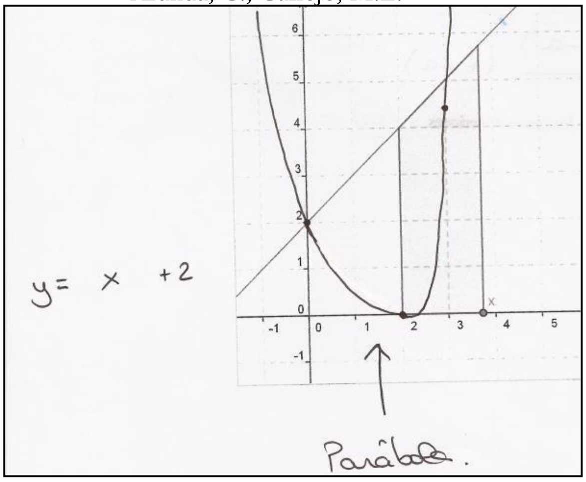


Figura 7. Respuesta de la pareja L-M a la tarea 'Función Integral II' (función afín)

Estos estudiantes han manejado en este apartado dos tipos de representaciones de la función integral: numérica(dando valores para comprobar la conjetura) y gráfica (representando la parábola que pasa por los puntos), pero no la algebraica. Esto podría explicarse porque no se apoyaron en el resultado obtenido en el bloque II de esta tarea, como hicieron en el caso de la función constante.

Podemos decir que esta pareja, a medida que ha ido resolviendo las tareas ha ido construyendo progresivamente el concepto de función integral, desde un *razonamiento covariacional* más simple a otro más complejo. En primer lugar los estudiantes relacionaron el extremo superior *x* del intervalo [*a*, *x*] con la integral definida de una función *f(t)* constante, lineal o afín en dicho intervalo; en segundo lugar relacionaron esta función *f(t)* y su función integral *F(x)* para valores positivos de la función, con x ∈ [*a*,*b*] y t ∈ [*a, x*]; en tercer lugar relacionan familias de funciones. En este proceso los estudiantes se apoyaron en distintos sistemas de representación: algebraico, gráfico y numérico. Por ello consideramos que están en el momento de *reflexión*.

DISCUSION

En este trabajo hemos caracterizado cómo estudiantes de bachillerato construyen el concepto de función integral en un experimento de enseñanza utilizando *applets*. Los resultados indican dos características que definen dos momentos de la transición de la fase de participación a la de anticipación en el proceso de abstracción reflexiva: *proyección* y *reflexión* (Figura 1).

Una característica común a los dos casos presentados es que los estudiantes llegaron a explicitar registros de experiencia que son necesarios para la construcción del concepto de función integral, pero que no son suficientes, identificando la relación entre un extremo de un intervalo y el valor del área bajo una recta en dicho intervalo, que es una forma de *covariación simple*. El salto cognitivo del momento de *proyección* al de *reflexión* se produce cuando los estudiantesson capaces de ver la *covariación compleja* (Sealey, 2006; Thompson y Silverman, 2008) de las tres cantidades que varían simultáneamente y que intervienen en el concepto de función integral, es decir, la variable *x*, *x*∈ [a, b], una función *f(t)*,*t*∈ [*a*, *x*] y la función integral $\mathrm{F(x)} = \int_a^x f(t)$, en casos sencillos

Por otra parte, el manejo de distintas representaciones (numéricas, algebraicas y gráficas), ayudó a la pareja que se encontraba en el momento de *reflexión* a identificar la función que representa el área bajo una recta en el intervalo [*a*, *x*] en casos sencillos, haciendo conjeturas y comprobaciones. Una conjetura que comprobó esta pareja fue que la función integral correspondiente a una función afín *"tiene que dar una parábola* […] *porque de grado 1 tiene que pasar a grado 2"*. Esto confirma los resultados de Berry y Nyman (2003) que indican que el uso de la tecnología usando distintos sistemas de representación, permite a los estudiantes desarrollar una mejor comprensión de la aproximación gráfica al Cálculo, superando la visión algorítmica y analítica. También Hong y Thomas (1997) mostraron que el manejo simultáneo de representaciones numéricas, gráficas y algebraicas de la integral usando hojas de cálculo y programas de cálculo simbólico, proporcionó un entorno favorable para construir una red de ideas relacionadas. Aranda y Callejo (2011) mostraron que el uso de tecnología ayudó a los estudiantes a relacionar simultáneamente distintos registros de representación, pues "*fueron capaces de relacionar distintas ideas usando argumentos variados para asociar la* *gráfica de una función con la de una de sus primitivas* […]. *Por otra parte las soluciones aportadas se apoyaron más en el pensamiento visual que en el analítico*" (p. 247).

REFERENCIAS

Aranda, C. y Callejo, M.L. (2011). Aproximación al concepto de función primitiva: un experimento de enseñanza con applets de geometría dinámica. En M. Marín, G. Fernández, L.J. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV*, (pp. 247-255). Ciudad Real: SEIEM.

Azcárate, C., Camacho-Machín, M., González, M.T. y Moreno M. (2015). *Didáctica del Análisis Matemático: Una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM*. La Laguna: Universidad de La Laguna.

Berry, J. S. y Nyman, M. A. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus. *Journal of Mathematical Behavior, 22*, 481-497.

Camacho, M. y Depool, R. A. (2003). Un estudio gráfico y numérico del cálculo de la Integral Definida utilizando el Programa de Cálculo Simbólico (CAS) Derive. *Educación Matemática, 15*(3), 119-140.

Camacho, M., Depool, R. y Santos-Trigo, M. (2010). Students' use of Derive software in comprehending and making sense of definite integral and area concepts. *CBMS Issues in Mathematics Education*, *16*, 35-67

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*, 352–378.

Ferrara, F., Pratt, D. y Robutti, O. (2006). The role and uses of technologies for the teaching of algebra and calculus. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future* (pp. 237-273). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education**.** *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 105-128.

Hong, Y. y Thomas, M. (1997). Using the computer to improve conceptual thinking in integration. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (Vol. 3, pp. 81–88). Lahti, Finland: University of Helsinki.

Roig, A. I. (2008). *Análisis de las fases del proceso de abstracción matemática en estudiantes de secundaria* (Tesis inédita de doctorado). Universidad de Alicante.

Sealey, V. (2006). Student understanding of definite integrals, Riemann sums and area under a curve: What is necessary and sufficient? En S. Alatorre, J.L. Cortina, M. Sáiz, y A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 46-53). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*, 114-145.

Simon, M. A. y Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An Elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning,6* (2), 91-104.

Simon, M. A., Tzur, R., Heinz, K. y Kinzel, M. (2004). Explicating a mechanism for conceptual learning: Elaborating the construct of reflective abstraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *35* (5), 305-329.

Thompson, P. W. y Silverman, J. (2008). The concept of accumulation in calculus. En M. P. Carlson y C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics* (pp. 43-52). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Turégano, P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias, 16*(2), 233-249.

Tzur, R. y Simon, M. A. (2004). Distinguishing two stages of mathematics conceptual learning. *International Journal of Science and Mathematics Education,2*(2), 287-304

SIGNIFICADO Y CONCEPCIONES DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS ESCOLARES

Meaning and Conceptions of School Mathematical Concepts

Fernández-Plaza, J. A., Castro-Rodríguez, E., Estrella, M., Martín-Fernández, E.,

Rico, L., Ruiz-Hidalgo, J. F. y Vílchez-Marín, M.

Universidad de Granada

Resumen

Este estudio ejemplifica un análisis de contenido según varias componentes de significado de un concepto matemático escolar, desarrollado para tres tópicos diferentes del currículo escolar de matemáticas. El trabajo muestra diversas concepciones inferidas de las respuestas obtenidas a través de la aplicación de cuestionarios semánticos y con tres grupos diferentes de estudiantes y de futuros maestros. Tres conceptos se han elegido: la fracción, como relación parte-todo, las razones trigonométricas, así como los números positivos y negativos. En el trabajo seejemplifica cada componente semántica diferente con solo uno de ellos. Los resultados muestran el dominio de tales nociones, sus diferentes interpretaciones, cómo han sido expresadas y los modos en que han sido usadas. Dichos resultados también muestran una variabilidad y riqueza de respuestas acerca de cada concepto, que se identifican y describen en términos de los componentes semánticos.

Palabras clave:*concepciones,cuestionario semántico,matemáticas escolares,significado de un concepto matemático,triángulo semántico.*

Abstract:

This study exemplifies a content analysis according to various components of the meaning of a mathematical school concept, developed with three different topics of the school mathematical curriculum. The work shows several conceptions inferred from responses obtained through application of semantic questionnaires and with three different groups of school children and pre-service teachers. Three concepts have been chosen: fraction, as a part-whole relationship, trigonometric ratios, as well as the positive and negative numbers, each of which exemplifies a single different component. The results show the domain of such notions, their different interpretations, how they have been internalized and the ways they are used. The results also show a variability and considerable wealth of responses, which have been identified and described in terms of components of meaning.

Keywords: *conceptions, semantic questionnaire, school mathematics, meaning of a mathematical concept,semantic triangle.*

INTRODUCCION

Sostenemos que comprender un concepto matemático es dotarlo de significado, es decir, conocer su definición, representarlo, identificar sus operaciones, relaciones y propiedades y sus modos de uso, su interpretación y aplicación. Esta afirmación se sigue dela noción de Frege (1996) sobre significado de un concepto matemático, quien la fundamenta en tres componentes:
Los signos, gráficos y notaciones que lo representan.

Fernández-Plaza, J. A., Castro-Rodríguez, E., Estrella, M., Martín-Fernández, E., Rico, L.; Ruiz-Hidalgo, J. F. y Vílchez-Marín, M. (2016). Significado y concepciones de conceptos matemáticos escolares. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 244-253). Málaga:: SEIEM.

La referencia, o evaluación semántica del concepto.
Los sentidos, o diversidad de modos en que pueda ser entendido, aplicado e interpretado.
La noción de significado utilizada en este trabajo se desarrolla extensamente en Rico, Lupiáñez y Molina (2013). En ese trabajose postula también que, en las matemáticas escolares, los conceptos adquieren una variedad de significados más allá del modo formal y simbólico con que vienen establecidos en el currículo y usualmente se enseñan.
Dado que nuestro interés por el significado está centrado en las matemáticas escolares, este trabajo considera como antecedentes distintas aproximaciones al estudio del significado de los contenidos en Educación Matemática,desarrolladas mediante ternas semánticas. Así, Radford (2003) identifica y trabaja con la terna interpretación–concreción–generalización; Vergnaud (1983) desarrolla su terna con las nociones de referente–invariantes–representaciones; Steinbring (1989, 2006) lo hace mediante los conceptos de signo/símbolo–objeto/contexto– concepto; mientras que Frege(1996), a quien seguimos, utiliza la terna signo-sentido-referencia.
Los tres componentes establecidos por Frege constituyen un triángulo semántico que usaremoscomo categorías para el análisis del significado de un determinado concepto, según distintos modos y momentos,enla matemática escolar. Uno de esos momentos ocurre cuando los profesores se proponen enriquecer elconocimiento delos escolares sobre los contenidos matemáticos,considerando los significados que previamente ellos manejen (Ponte y Chapman, 2008).
El objetivo de este estudioes mostrar la potencialidad de los componentes del triángulo semántico para analizar los significados de distintos conceptos matemáticos e identificar las concepciones que emplean y manifiestanlos escolares sobre esos mismos conceptos.
Mas concretamente, mostramos los significados parciales que grupos de estudiantes atribuyen y expresan para tresconceptos matemáticos escolares, establecidos en el currículo.
Para ello, elegimos trabajar con los conceptos de fracción,como relación parte-todo, razón trigonométrica y número entero. Cada uno de ellos centra nuestra reflexión en un componente de significado distinto. Recogemos las respuestas de distintos grupos de estudiantes de Educación Secundaria y de maestros en formación inicial sobre significados de esos conceptos. La reflexión sobre los restantes componentes, en cada caso, se presenta en otros trabajos relacionados (Castro-Rodríguez, 2010; Martín-Fernández, 2013; Vílchez-Marín, 2014).

TRIÁNGULO SEMÁNTICO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Rico (2012, pp. 52-53; 2016, En prensa) describe un modelo de significado de un concepto matemático escolar basado en la estructura ternaria de Frege como un marco interpretativo del conocimiento matemático de los estudiantes, que responde a las siguientes preguntas básicas: ¿cómo expresan losconceptos y nociones básicas?, ¿sobre quépropiedades o relaciones argumentan sus ideas matemáticas?, ¿qué signos emplean para ello?, ¿qué modos de uso identifican para el concepto?, ¿qué situaciones, fenómenos o contextos enmarcan,o están en el origen,de sus ideas matemáticas? Los componentes de dicho modelo son:

- La *estructura conceptual*, que comprende la red de conceptos, definiciones y propiedades, junto con aquellos argumentos, normas y otros procedimientos de los que derivan sus modos de razonamiento y sus criterios de veracidad. La referencia, con la cual los estudiantes evalúan la veracidad de su conocimiento acerca de un concepto,viene sintetizada mediante su definición individualdel mismo (Fernández-Plaza, En prensa).
- Los *sistemas de representación*, definidos por los conjuntos de signos, gráficos y reglas que hacen presente el concepto, muestran sus propiedades y lo relacionan con otros (Lupiáñez, En prensa).
- Los *sentidos*, que incluyen aquellos modos de uso, contextos, fenómenos, situaciones y problemas que están en el origen del concepto y lo dotan de carácter funcional (Ruiz- Hidalgo, En prensa).

Con la noción de *concepción*nos referimos a aquellas “parcelas” de significado (significados parciales) que emergen de las respuestas(verbales, gestuales, etc.) de los estudiantes ante las demandas que plantean tareas particulares que responden a una determinada caracterización, descripción o definición de un concepto. Una concepción expresa de modo parcial una referencia, unos sistemas de representación y unos sentidos propios. El carácter subjetivo de esta respuesta la diferencia del concepto matemático correspondiente. El análisis mediante los componentes semánticos muestra la diferencia entre el significado de un concepto matemático escolar y las concepciones o significados parciales de los alumnos (Fernández-Plaza, 2015, p.11). Esta interpretación de la noción idea de concepción ha sido abordada por Sierra, González y López (2000) y Vinner (1991).

METODOLOGÍA

Para recoger los significados que manifiestan los participantessobre las distintas nocionesaquí estudiadas (fracciones, razón trigonométrica y números enteros), se construyó en cada uno de estoscasos un cuestionario semántico distinto, con diversas tareas, cuestionario que se aplicó a estudiantes de cursos diferentes. Los cuestionarios semánticos recogieron indicios sobre los cuales escrutar el significado que los estudiantes encuestados establecieron para los conceptos matemáticos escolares mencionados. Esta tipología de cuestionarios se propone indagar qué propiedades de los conceptos identifican los sujetos, cómo los denominan y representan, que términos y argumentos emplean para dotarles de sentido, qué valores les atribuyen (Klok, 2014).

Más concretamente, las huellas que recogen los cuestionarios semánticossonpalabras, términos, signos, gráficas, frases, relaciones, argumentos, descripciones, gestos y otras notas que muestran un modo de apropiación por el sujeto de un determinado concepto.Los indicios recogidos mediante un cuestionario semántico acerca de un concepto matemático escolar muestran que, cuando un sujeto está*en contacto con* y recibe *formación acerca de* nociones matemáticas, interioriza total o parcialmente dichas nociones y las emplea para pensar con ellas y actuar a partir de ellas, es decir, ofrece pruebas de su comprensión y uso. Esas huellas tienen una variabilidad considerable; se pueden identificar y clasificar mediante los componentes y organizadores semánticos de un concepto matemático (Rico, 2012).

La tabla 1 resume la componente semántica y el contenido matemático tratados en cada cuestionario, junto conel número de participantes encada trabajo.

Tabla 6. Temas y participantes en cada uno de los estudios

Componente semántica	Contenido matemático	Estudiantes participantes
Estudio sobre la referencia	Concepto de fracción	358 maestros estudiantes de primer curso del grado de Educación Primaria
Estudio sobre el modo de representación	Concepto de razón trigonométrica	74 estudiantes de 1º de Bachillerato
Estudio sobre sentido y modos de usos	Concepto de número entero	31 estudiantes de 2º de Educación Secundaria Obligatoria

Los participantes responden al correspondiente cuestionario de forma individual. La duración de la prueba,sin tiempo máximo,no superó una sesión de clase. En las distintas aplicacionesestán presentes el profesor y uno de los investigadores.Los participantes han recibido instrucción sobre los contenidos encuestados, siempre en un curso o unos meses antes de su aplicación; en ningún caso tenían información previa sobre el cuestionario.

Los datos obtenidos fueron analizados mediante métodos cualitativos. Se utilizó un proceso inductivo para categorizar las respuestas y encontrar relaciones entre las diferentes categorías en los resultados producidos por los participantes (McMillan y Schumacher, 2006).

DISCUSIÓN

Los datos obtenidos de cada contenido sirven para ejemplificar el análisis relativo a un componente semánticodeterminado, segúnindica la tabla 1, los cuales pasamos a presentar en cada caso. En primer término se hace una breve descripción del componente semántico en cuestión, a continuación se recogen las cuestiones planteadas y, posteriormente, se describen las concepciones manifestadas por los estudiantes participantes mediante las respuestas recogidas por el cuestionario.

ESTUDIAR LA REFERENCIA: EL CASO DE LAS FRACCIONES

Comenzamos con la *referencia* o *estructura conceptual*ejemplificado por el concepto de fracción, basado en la relación parte-todo. En este caso el análisis muestra que cuandouna totalidad, simbolizada por T, se fragmenta o divide en n partes P_i disjuntas, con $T = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$ $1 \leq i \leq n$, con, cada una de dichas partes P_i presenta una relación con el todo $R(P_i,T)$. En el proceso de fragmentación de un todo, sus partes P_i pueden ser iguales: $P_i = P_j ,"i, j$. A cada una de esas partes o porciones iguales la designamos por P. En este caso, la relación entre una de las n partes iguales P de un todo T se convierte en una relación multiplicativa, que se llama relación parte-todo.

Esta conceptualización de la relación parte-todo comprende una serie de hechosy relaciones fundamentales: el verbo, que expresa la acción o intención de fraccionar un objeto en sus partes; el todo que es fraccionado; las partes en las que el todo es fraccionado; la igualdad de las partes; la relación entre cada parte y el todo.Con mayor detalle, esa estructura se puede ver en Castro-Rodríguez, Pita-Pantazi, Rico y Gómez (2015), donde se analizan el concepto desde las tres componentes del triángulo semántico.

Para identificar las concepciones de los escolares sobre este concepto proponemos la tarea 1, seleccionada de un cuestionario semántico sobre fracciones (Castro-Rodríguez, 2010):

Tarea 1:¿Qué es fraccionar? Explica verbalmente qué entiendes por fraccionar.

Esta tarea interroga a un grupo de estudiantes para maestro sobreel conceptode fraccionar.Las respuestas de los participantes las organizamos de acuerdo con la presencia o ausencia de los hechos y relacionesfundamentales de la relación parte-todo antes descritos.

Tabla 7. Niveles de respuestas para la tarea 1

Niveles	
(1)	Uno o varios verbos de acción
(2)	Uno o varios verbos de acción; hacen referencia a un todo
(3)	Uno o varios verbos de acción; hacen referencia a las partes
(4)	Uno o varios verbos de acción; hacen referencia a un todo y a las partes
(5)	Uno o varios verbos de acción; hacen referencia a las partes iguales
(6)	Uno o varios verbos de acción; hacen referencia al todo y partes iguales
(7)	Otros

La tabla 2 muestra una progresión de niveles de precisión en las respuestas, segúnsu complejidad,por la mayor o menor presencia de esos elementos.

Los seis niveles encontrados describen con diferentes grados de precisión cómoexpresar la relación estructural que define las fracciones. El primer nivel se caracteriza por incluir sólo uno o más verbos de acción. Estos verbos son dividir, distribuir, partir y sus combinaciones posibles. Este tipo de respuesta tiene un significado impreciso, en el que “fraccionar” se presenta sólo como una acción usando uno o más verbos.

El segundo nivel de precisión se establece a partir de las posibles combinaciones de estos tres verbos, así como la totalidad sobre la que se aplica esta acción. Dos respuestas que pertenecen a este nivel son “distribuir una cantidad” o “dividir un todo”.

El tercer nivel es el menos frecuente en las respuestas de los sujetos. Este nivel se compone de las posibles combinaciones de los tres verbos con referencia a las partes o el resultado de la acción de romper en partes. Tanto en este caso, como en el anterior, el significado de la relación es impreciso, ya que las respuestas no reflejan todos los datos que establecen la relación. Suponemos que este nivel expresa mayor precisión que el anterior, dado que la idea de la totalidad está implícita en la acción de crear partes. Un ejemplo de respuesta para este nivel es “partir o dividir en partes”.

El cuarto nivel está formado por tres datos: verbo de acción, la totalidad y las partes. Este nivel es el segundo más frecuente en las respuestas de los profesores en formación. Incluye respuestas tales como “dividir una cantidad en partes” o “dividir o repartir un todo en partes”.

El quinto nivel se identifica por un verbo de acción, que hace referencia a las partes iguales. En este caso, la acción de fraccionar se considera equitativa, ya que los sujetos especifican la naturaleza de las partes. En contraste con el nivel anterior, éste no menciona el todo o totalidad de la que provienen las partes, aunque se considera implícito en la respuesta.

Finalmente, la respuesta que expresa la idea más completa y a su vez más frecuente, está formada por un verbo de acción que hace referencia a un todo dividido en partes iguales. Este nivel representa el significado más preciso.

La figura 1 muestra una relación jerárquica entre los niveles de precisión.

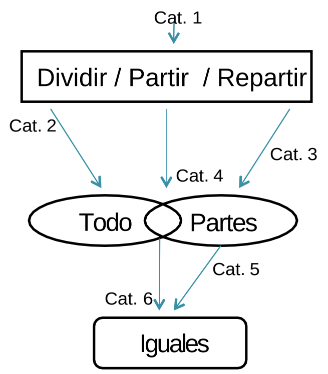


Figura 5.Relaciones entre los niveles de precisión de las respuestas a la tarea 1

ESTUDIAR LA REPRESENTACIÓN:EL CASO DE LA RAZÓN TRIGONOMÉTRICA

Resumimos en este apartado los resultados del análisis de las respuestas de un grupo de estudiantes de bachillerato, correspondientes a tareas que demandan representar las nociones matemáticas relacionadas con las razones trigonométricas

Representaciones de los escolares relacionadas con las nociones de razón trigonométrica

Expertos en educación matemática, han organizado los contenidos matemáticos escolares con criterios cognitivos. Tales criterios consideran el modo en que las personas los entienden, aprenden y utilizan. Para esa caracterización los expertos usan dos grandes campos: el campo conceptual y el campo procedimental (Bell, Costello y Küchemann, 1983). Complementariamente, diferencian tres niveles de complejidad en cada uno de ellos. En el campo conceptual destacan hechos, conceptos, y estructuras. En el ámbito de los procedimientos los tres niveles que se consideran son: destrezas, razonamientos y estrategias.

En la trigonometría impartida en la enseñanza secundaria se observan dos ideas prioritarias que identifican esos contenidos: los conceptos geométricos, relacionados con la razón trigonométrica, con la identificación de la relación como una constante característica de cada ángulo; y el concepto analítico, asociado a la función trigonométrica.

Este estudio se ha centrado en la razón trigonométrica y entre las nociones que la organizan, destacan tres: circunferencia, triángulo rectángulo y ángulo (Byers, 2010).

Para ejemplificar las concepciones de los escolares sobre lacomponente *representación* o *signo*, del concepto matemático escolar “razón trigonométrica”, se evaluaron las respuestas de 74 estudiantes a las cuestiones (Martín-Fernández, 2013, 2014a):

Tarea 2: Haz un dibujo en que se muestre el sen(30º).

Tarea 3: Haz un dibujo en que se muestre el cos (30º).

Tarea 4: Haz un dibujo en que se muestre alguna diferencia entre el seno y el coseno de un mismo ángulo.

Tras el análisis de las producciones, algunos de los diferentes modos de representar las razones trigonométricas son los siguientes: ángulo, ángulo interior de un triángulo, razón entre lados de un triángulo y longitud (ordenada de una función trigonométrica, coordenada cartesiana y distancia – lados de un triángulo y segmentos).

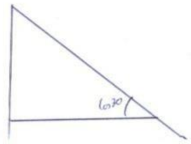


Figura 6. Representación del coseno como ángulo interior de un triángulo

En el ejemplo de la figura 2, encontramos que el sujeto incurrió en un error. Los errores ignoran el significado formal de un concepto. Los alumnos que cometen un error no consideran el significado formal de las representaciones y conceptos que lo trabajan. Sin embargo, las concepciones expresan y reúnen componentes parciales del significado de un concepto para un estudiante.

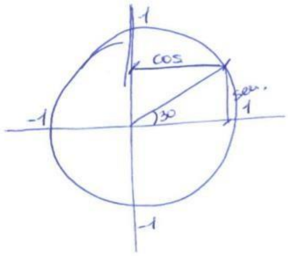


Figura 7. Representación del seno y coseno como longitud

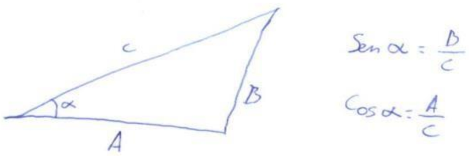


Figura 8. Representación del seno y coseno como cociente

Cada una de esas representaciones muestraun significado parcial de las nociones de seno y de coseno de un ángulo, es decir, expresan diferentes concepciones de las mismas. Una mayoría de producciones representaron cada razón trigonométrica como longitud (Martín-Fernández, 2014b).

ESTUDIAR EL SENTIDO: EL CASO DE LOS NÚMEROS ENTEROS

Para ejemplificar las concepciones de los escolares sobre la componente *sentido* del significado de un concepto matemático escolar,hemos elegido el tema de números enteros. Para ello se recogen algunas de las respuestas dadas a las siguientes tareas (Vílchez-Marín, 2014):

Tarea 5: Explica verbalmente qué entiendes por número positivo.
Tarea 6: Explica verbalmente qué entiendes por número negativo.

Consideramosaquellas respuestas que corresponden a la componente de sentido, en las que identificamos dos variantes o modos de uso: por un lado aquellas respuestas que transmiten sentido mediante términos o expresiones que indican posición; por otro lado aquellas que argumentan mediante una relación de orden; una tercera combina las dos opciones anteriores. Relación y orden se muestran como los sentidos principales que usan los escolares encuestados cuando quieren explicar en qué consiste un número positivo y en qué consiste un número negativo. En todos los argumentos la relación de posición o de orden se establece con respecto a cero.

1. Sentido posicional

El primer argumento identificado es el relativo a los distintos modos de expresar los números positivos/negativos mediante su ubicación relativa a 0, para lo cual, localizamos aquellas respuestas que expresan una relación de posición. En la tabla 3 aparecen las expresiones utilizadas por los alumnos.

Tabla 8.Relaciones de posiciónutilizadas en las actividades 5 y 6

Para número positivo	Para número negativo
A la derecha de 0	A la izquierda de 0
Por encima de 0	Por debajo de 0
Desde 0 hacia arriba	Desde 0 hacia abajo
Después de 0	Antes de 0
Detrás de 0	Delante de 0
Antes del –	Después del +
Para arriba de 0	

2. Sentido de orden

Un segundo argumento consta de aquellas respuestas dan sentido a los números enteros empleando una relación de orden.

Tabla 4. Expresiones de orden utilizadas en las actividades 5 y 6

Expresiones utilizadas para número positivo	Expresiones utilizadas para número negativo
Mayor que 0	Menor que 0
Supera el valor de 0	Tiene un valor inferior a 0
Siguen un orden a partir de 0	Siguen un orden inverso a partir de 0
Son superiores a 0	Son inferiores a 0

Los alumnos que dan estas respuestas las fundamentan en una estructura de orden utilizando expresiones como: "siguen un orden", y usan conceptos ordinales como "mayor", "menor", "superior" e "inferior", siempre con respecto a cero.

3. Sentido de posición y de orden

En un tercer nivel encontramos respuestas que combinan los dos niveles anteriores, lo cual hace un solo estudiante. Este sujeto hace una conexión entre la relación de orden respecto a cero y la relación de posición relativa a cero. Consideramos que el estudiante manifiestauna concepción más amplia al considerar los dos tipos de relaciones respecto a cero.

CONCLUSIONES

El objetivo de este estudio ha consistido en presentar una terna semántica y supotencialidad para analizar e interpretar los significados de los conceptos matemáticos escolares; empíricamente caracterizamos las concepciones que sobre esos conceptos tienengrupos de estudiantes que ya loshabían estudiado.

Para su ejemplificación hemos elegidotresconceptos matemáticos escolaresdistintos. Cuando sobre esos conceptos hemos interrogado acerca de cada uno de los componentes del triángulo semántico hemos obtenido una diversidad de respuestas, expresadas con diferentes términos, notaciones, argumentos y relaciones, en cada caso.

Las preguntas planteadas han pedido "explicar" y "representar"; sus respuestas e interpretaciones han consistido en expresar esa apropiación del significado de un concepto matemático escolar por un sujeto. Significado que es parcial, como muestran buena parte de las respuestas recogidas y su progresiva complejidad, lo cual ha permitido identificar niveles en su diversidad y mostrar una mayor o menor profundidad en las concepciones de los estudiantes.

Las concepciones inferidas proceden del análisis de las respuestas de los estudiantes según los tres componentes del triángulo semántico descrito, bien singularmente o por combinaciones entre ellos, concepciones que muestran distintos niveles de complejidad y su mayor o menor cercanía al concepto en cuestión.

Pensamiento y argumento, introspección y comunicación, son las vías que utiliza un sujeto para su apropiación de un concepto, que se manifiesta en su empleo con significado en el propio discurso. Hemos mostrado la diversidad de respuestas que proporcionan los estudiantes con cada uno de esos conceptos, escogiendo para cada uno de ellos una componente de significado diferente.

Inferimos que estas concepciones muestran que los estudiantes organizansus conocimientosmatemáticos y los expresan en términos de referencia, signo y sentido.

Las ideas expuestas en este trabajo son producto de la reflexión y de la práctica llevadas a cabo por un grupo de investigadores de la Universidad de Granada en la última década, estudios centrados en el Análisis Didáctico de los contenidos matemáticos escolares. Ese marco, sus métodose instrumentos, suponen una contribución para la investigación en educación matemática, ya que aportan una propuesta para el estudio del significado de los conceptos de las matemáticas escolares que incide en su enseñanza y aprendizaje. En cada caso la bibliografía de referencia remite a un tratamiento más detallado de las cuestiones presentadas.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado con ayuda del Proyecto «Conocimiento Didáctico del Profesor y Aprendizaje de ConceptosMatemáticos Escolares» (EDU2015-70565-P) del Plan Nacional de I+D+I (MICIN) y del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (Grupo FQM-193, Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico)

Referencias

Bell A., Costello J. y Küchemann D. (1983).*Research on learning and teaching.A Review of Research in Mathematical Education*. Windsor: NFER- Nelson.

Byers, P. (2010). Investigating trigonometric representations in the transition to collegemathematics. *CollegeQuarterly*, *13*(2), 1–10.

Castro-Rodríguez, E. (2010). *Fraccionar y repartir: un estudio con maestros en formación*. Máster Universitario de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Castro-Rodríguez, E., Pitta-Pantazi, D., Rico, L. y Gómez, P. (2016). Prospective teachers' understanding of the multiplicative part-whole relationship of fraction.*Educational Studies in Mathematics*, *92*(1), 129-146. Doi: 10.1007/s10649-015-9673-4.

Da Ponte, J. P. y Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. En L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 225-236). New York: Routledge.

Fernández-Plaza, J. A. (2015). *Significados escolares del concepto de límite finito de una función en un punto.* Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Fernández-Plaza, J. A. (En prensa). Análisis del contenido. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de Didáctica de la Matemática.* Madrid: Pirámide.

Frege, G. (1996). Estudios sobre semántica.*Escritos filosóficos* (pp. 147-264).Barcelona: Crítica-GrijalboMondadori.

Klok J. V. (2014). On the use of questionnaires in semantic fieldwork: A case study in modality. In A. Belkadi, K. Chatsiou y K. Rowan (Eds.), *Proceedings of Conference on Language Documentation and Linguistic Theory, 4.*London: SOAS.

Lupiáñez, J. L. (En prensa). Sistemas de representación. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de Didáctica de la Matemática.* Madrid: Pirámide.

Martín-Fernández, E. (2013). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de bachillerato respecto al concepto de razón trigonométrica. Un estudio exploratorio.* Máster Universitario de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Martín-Fernández, E., Ruiz-Hidalgo, J. F. y Rico, L. (2014a). Concepciones del seno y del coseno puestas de manifiesto por estudiantes de Bachillerato. En M.T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 455-464). Salamanca: SEIEM.

Martín-Fernández, E., Ruiz-Hidalgo, J.F. y Rico, L. (2014b).Meanings of sine and cosine as expressed by non-compulsory secondary school students.En S. Oesterle, C. Nicol, P. Liljedahl y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36*, Vol. 6, p. 168. Vancouver, Canada: PME.

McMillan, J. H. y Schumacher, S. (2006). *Research in education.*New York: Longman.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to learners' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 37-70.

Rico, L. (2012).Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 1,* 39-63.

Rico, L.(En prensa). Significados de los contenidos matemáticos. En L. Rico y A. Moreno (Eds.),*Elementos de Didáctica de la Matemática.* Madrid: Pirámide.

Rico, L., Lupiáñez, J. L. y Molina, M. (2013).*Análisis didáctico en Educación Matemática*.Granada: Comares.

Ruiz-Hidalgo, J. F. (En prensa). Sentidos y modos de uso de un concepto. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de Didáctica de la Matemática.* Madrid: Pirámide.

Sickle, J. V. (2011).A history of trigonometry Education in the United States 1776-1990.Unpublished doctoral dissertation, Columbia University, Nueva York, NY.

Sierra, M., González, M. T. y López, C. (2000).Concepciones de los alumnos debachillerato y curso de orientación universitaria sobre límite funcional y continuidad. *RevistaLatinoamericana de Investigación en MatemáticaEducativa, 3*(1), 71-85.

Steinbring, H. (1989). Routine and meaning in the mathematics classroom.*For the Learning of Mathematics, 9*(1), 24-33.

Steinbring, H. (2006). What makes a sign a mathematical sign? An epistemological perspective on mathematical interaction.*Educational Studies in Mathematics, 61,* 133-162.

Vergnaud, G. (1983).Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes,* 127-174. New York: Academic Press.

Vílchez-Marín, M. (2014).*Significados puestos de manifiesto por estudiantes de E.S.O. respecto al concepto de número entero. Estudio exploratorio.* Máster Universitario de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Vinner, S. (1991).The role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. En D. O. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer.

.

RECONOCIMIENTO DE PRÁCTICAS, OBJETOS Y PROCESOS EN LA RESOLUCIÓN DE TAREAS MATEMÁTICAS: UNA COMPETENCIA DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS[vi]

Recognition of practices, objects, and processes in solving mathematical tasks: a mathematics teacher's competence

Giacomone, B.[a], Godino, J. D.[a], Wilhelmi, M. R.[b] y Blanco, T. F.[c]

[a]Universidad de Granada; [b]Universidad Pública de Navarra; [c]Universidad de Compostela

Resumen

El análisis de las tareas matemáticas y de los distintos modos de abordarlas es necesario para poder comprender las dificultades potenciales y efectivas asociadas al aprendizaje. En este trabajo se presenta el diseño e implementación de una acción formativa en un curso de máster para futuros profesores de secundaria. El objetivo es desarrollar la competencia de análisis ontosemiótico, esto es, identificar y discriminar los tipos de prácticas, objetos y procesos puestos en juego en la resolución de tareas matemáticas que involucran visualizaciones. El diseño se apoya en el uso de algunas herramientas teóricas y metodológicas del enfoque ontosemiótico. El análisis de los datos está orientado a la identificación de hechos didácticos significativos relativos al diseño e implementación de la acción formativa. Los resultados revelan la complejidad que implica el logro de este tipo de competencia y su importancia para el desarrollo profesional docente.

Palabras clave: *análisis ontosemiótico, prácticas matemáticas, diseño didáctico, formación de profesores, visualización*

Abstract

The analysis of mathematical tasks and its different ways of solving them are necessary to understand the potential and actual students' learning difficulties. The design and implementation of a training intervention in a master course for prospective Secondary school teachers are presented in this paper. The goal is to develop competences of onto-semiotic analysis, that is identifying and discriminating the types of practices, objects, and processes put into play in the mathematical problems solving, which involve using visualizations. The design is based on the use of some theoretical and methodological tools of the onto-semiotic approach. The data analysis is focused on identifying significant didactical facts regarding the design and implementation of the training intervention. The results reveal the complexity of achieving this type of competence and its importance for teachers' professional development.

Keywords: *onto-semiotic analysis, mathematical practices, didactical design, teachers' training, visualization*

INTRODUCCIÓN

Un problema ampliamente aceptado, dentro del campo de la educación matemática, consiste en dilucidar el tipo de conocimiento didáctico-matemático que tiene, o que debería tener, el profesor de matemáticas para desarrollar su tarea docente de manera idónea (Chapman, 2014; Sowder, 2007). Sin duda, el trabajo de los profesores es una práctica compleja que requiere una combinación de tipos de conocimientos, competencias y habilidades; "no solo es importante saber qué matemáticas conocen los profesores sino también cómo las conocen y qué son capaces de movilizar para la enseñanza" (Chapman, 2014, p. 295).

Giacomone, B., Godino, J. D., Wilhelmi, M. R. y Blanco, T. F. (2016). Reconocimiento de prácticas, objetos y procesos en la resolución de tareas matemáticas: una competencia del profesor de matemáticas. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 254-262). Málaga: SEIEM..

Diversos autores se han centrado en el desarrollo de estrategias para promover el análisis y reflexión del profesor, sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; asimismo, brindan herramientas que permiten al profesor ser competente para describir, explicar y valorar, de manera sistemática, su propia práctica (Nolan, 2008). En estos trabajos se reconoce que el profesor debe tener conocimientos matemáticos y didácticos, pero también, debe ser competente en el uso de esos conocimientos para llevar a cabo el desempeño eficaz de la profesión.

En general, como señala Godino (2009, p. 19), es necesario establecer un sistema de categorías que permita tanto un análisis global de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas como de modelos que permitan un análisis detallado de cada uno de los tipos de conocimiento que se ponen en juego en una enseñanza efectiva de las matemáticas. De esta manera, consideramos necesario desarrollar herramientas que estén al alcance del profesor que le permitan, entre otros aspectos, referirse explícitamente a los objetos y procesos matemáticos que intervienen en la realización de las tareas matemáticas.

En este trabajo se pretende mostrar el tipo de análisis que estamos experimentando con futuros profesores de matemática centrado en el desarrollo de la *competencia de análisis ontosemiótico*, esto es su conocimiento y capacidad para identificar y describir los objetos y procesos implicados en tareas matemáticas escolares. A continuación, se describe el problema de investigación y el marco teórico. En la sección 3, se presenta el diseño formativo junto con el análisis *a priori* de la primera tarea aplicada, el cual sirve de ejemplo para mostrar la trama de objetos y significados que se ponen en juego en su resolución. En la sección 4, se discuten las respuestas de los futuros profesores a dicha tarea; asimismo, se muestran algunos ejemplos prototípicos de respuestas sobre otras tareas implementadas, que permiten tomar consciencia de la dificultad que exige el logro de la mencionada competencia. Finalmente, se incluyen a modo de conclusión, algunos aspectos sobre la importancia educativa de esta investigación para la formación de profesores de matemáticas.

MARCO TEÓRICO Y PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

El planteamiento de la acción formativa está apoyado en algunas herramientas teóricas del Enfoque ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007). En trabajos previos (Godino, 2009; Godino, Rivas, Castro y Konic, 2012; Pino-Fan y Godino, 2015) se ha iniciado el estudio de las posibilidades y retos ofrecidos por la aplicación de las herramientas teóricas del EOS al campo de la formación de profesores de matemáticas. Se asume que el profesor de matemáticas debe desarrollar la competencia específica de análisis e intervención didáctica, entendida como la capacidad de abordar los problemas propios de su profesión. Esto implica que el profesor debe conocer y saber usar las herramientas conceptuales y metodológicas pertinentes que le ayuden a describir, comprender y valorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

La mencionada competencia de análisis didáctico se puede descomponer en otras sub-competencias, las cuales se pueden identificar ligadas al uso de herramientas teóricas específicas, que hacen posible el abordaje de los problemas didácticos. Así, en el marco del EOS, el uso de la herramienta configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos, implica el desarrollo de la competencia de *análisis ontosemiótico*, mediante la cual el profesor está capacitado para describir, explicar y evaluar las prácticas matemáticas de los estudiantes al resolver problemas y estudiar los contenidos matemáticos pretendidos. La evaluación por competencias, que requieren los actuales currículos, supone un reto para los profesores, ya que para la identificación de dichas competencias es necesario hacer análisis pormenorizados de la actividad matemática de los estudiantes (Rubio, 2012). Este proceso analítico / reflexivo se puede interpretar como una actividad metacognitiva, ya que se realiza sobre los conocimientos puestos en juego en las prácticas matemáticas, o sea, se trata de un análisis sobre la cognición, una meta-cognición (D'Amore, Font y Godino, 2007).

En la realización de las prácticas matemáticas intervienen y emergen objetos de diversos tipos, de acuerdo a la función que desempeñan en dichas prácticas (elementos lingüísticos, situaciones-problemas o tareas, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos). Todos los objetos están interconectados entre sí mediante funciones semióticas referenciales y operacionales, formando *configuraciones ontosemióticas* de prácticas, objetos y procesos (Figura 1).

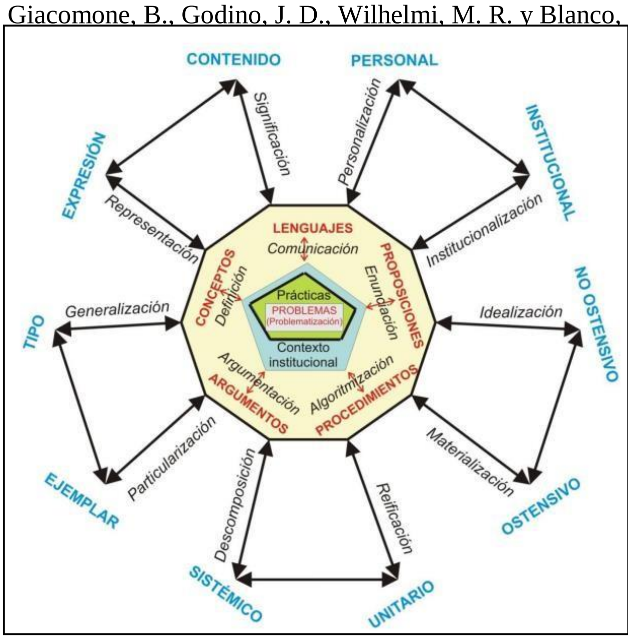


Figura 1. Objetos y procesos que intervienen en las prácticas matemáticas

A partir de la Tabla 1, discutiremos el papel que algunos de estos procesos (particularización-generalización; idealización-materialización; significación-representación; personalización-institucionalización) juegan en la aparición de los objetos primarios implicados tanto en el enunciado de la tarea de la Figura 2, como en la construcción de su solución. Con este ejemplo, se muestra la importancia que tienen las tareas que involucran visualización para dar cuenta de las relaciones complejas entre los tipos de lenguajes visuales/diagramáticos y analíticos/simbólicos, así como la dialéctica existente entre dichos objetos ostensivos y los objetos no ostensivos que necesariamente les acompañan.

Por ello, desde una perspectiva ontosemiótica del conocimiento y de la instrucción matemáticos, nos planteamos en la formación de profesores: ¿cómo desarrollar en los profesores la competencia de análisis de objetos y procesos intervinientes en la actividad matemática? En las secciones siguientes de este trabajo se describe el diseño, implementación y evaluación de una intervención formativa realizada con futuros profesores de Educación Secundaria mediante la cual tratamos de avanzar en dar respuesta a esta pregunta.

DISEÑO INSTRUCCIONAL

Método

En el marco del Máster de Formación de Profesorado de Educación Secundaria en Matemáticas, se ha desarrollado una intervención formativa con un enfoque propio de las investigaciones basadas en el diseño (Kelly, Lesh y Baek, 2008). El primer ciclo se implementó en el curso del año 2014-2015 con 54 estudiantes, durante 3 sesiones de dos horas cada una; el segundo, se implementó en el curso 2015-2016 con 52 estudiantes con la misma cantidad de sesiones. El análisis de los datos es básicamente cualitativo y está orientado a la identificación de hechos didácticos significativos (Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi, 2014) sobre el estado inicial de los significados personales de los estudiantes, el reconocimiento de conflictos y progresos en el desarrollo de la competencia pretendida.

Si bien las clases fueron grabadas en audio, en este trabajo se sintetiza el análisis de las respuestas que los estudiantes dieron en el segundo ciclo a partir de la información recogida de las anotaciones del observador participante (primer autor). Concretamente, el análisis a priori de las tareas y presentación de resultados se focaliza en la primera tarea implementada en este ciclo ya que permite indagar sobre los significados iniciales de los futuros profesores e iniciarlos en el proceso de conocimiento y competencia de la noción de configuración ontosemiótica.

Fases y metodología de implementación

La acción formativa comprende una primera fase de exploración inicial de los significados personales de los estudiantes, sobre la naturaleza de los objetos matemáticos y su capacidad para el reconocimiento de dichos objetos en las prácticas matemáticas. Los estudiantes trabajaron de manera individual, con la tarea 1 que se muestra en la Figura 2, a partir de un dibujo en perspectiva isométrica; seguidamente se presentaron y discutieron en clase las respuestas dadas por los estudiantes.

En la segunda fase de implementación, se propuso la lectura y discusión de un documento específico sobre el papel de la visualización en educación matemática (Godino, Giacomone, Blanco, Wilhelmi y Contreras, 2015), que incluía un ejemplo del tipo de análisis que se pretende realizar. Seguidamente se implementaron dos tareas trabajando en equipos de 2 o 3 estudiantes, seguidas de su presentación y discusión en el conjunto de la clase. En la tarea 2 se les pedía a los estudiantes que justifiquen las acciones realizadas para construir un cuadrado con GeoGebra; en la tarea 3 se les daba a los estudiantes un problema sobre fracciones y una solución aportada por un alumno basada en un diagrama de áreas; se les pedía a los estudiantes que justifiquen si la solución mostrada era correcta.

En la tercera fase, los estudiantes trabajaron de manera individual a partir de una cuarta tarea basada en una demostración del teorema de Pitágoras. La resolución no fue abordada en clase y se consideró como un instrumento de evaluación final.

Las tareas de la segunda y tercera fase, se plantearon sobre las siguientes consignas generales:

– Resuelve la tarea.
– Describe el procedimiento seguido, indicando las acciones que se deben realizar y las explicaciones necesarias que justifican las respuestas.
– Identifica los conocimientos que se ponen en juego en el enunciado y cada una de las prácticas elementales, completando la tabla incluida a continuación (añade las filas necesarias).

Uso e intencionalidad de las prácticas	*Enunciado y secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea*	*Objetos referidos en las prácticas (Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)*
…	…	…

– Además de los procesos de significación indicados en la tabla anterior identifica otros procesos matemáticos que están involucrados en la resolución de la tarea.

Fase 1: Exploración inicial de significados personales

La tarea 1 que se muestra en la Figura 2, corresponde a la exploración inicial de significados personales. El análisis *a priori* que se realiza en la Tabla 1 es un ejemplo ilustrativo que sintetiza el análisis ontosemiótico que se pretende que los estudiantes logren durante el desarrollo de la tarea. Este mismo análisis fue usado para apoyar la puesta en común de las respuestas elaboradas individualmente por los estudiantes.

Tarea 1. Exploración inicial

La figura adjunta muestra un edificio dibujado desde el ángulo frente-derecha.

1) Dibuja la vista del edificio desde atrás. Justifica la respuesta.
2) ¿Qué es para ti un concepto matemático? Identifica los conceptos matemáticos que intervienen en la resolución de la tarea.
3) ¿Qué es para ti una proposición matemática? Identifica las proposiciones matemáticas en la resolución de la tarea.
4) ¿Qué es para ti un procedimiento matemático? Describe el procedimiento matemático en la resolución de la tarea.
5) ¿Qué es para ti una demostración matemática? Elabora una justificación matemática para la respuesta dada en la tarea.
6) Uno de los conceptos que intervienen es el de cubo, usado para indicar cada una de las piezas que componen el ‘edificio’.
   a) Elabora al menos dos definiciones diferentes para el cubo como concepto geométrico.
   b) Indica otros usos o significados que puede tener la palabra ‘cubo’.
7) Indica qué papel desempeñan las proposiciones que has identificado en la justificación de la respuesta.
8) Describe otros posibles procedimientos que se podrían aplicar para resolver la tarea.

9) Describe una posible justificación de la respuesta que podría dar un estudiante usando algún tipo de material, secuencia de representaciones u otras explicaciones.

10) La figura geométrica dada se representa como una composición de piezas de forma cúbica.

   a) Identifica propiedades del cubo, como figura geométrica, que no se pueden representar de manera empírica.

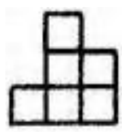
   b) Enuncia la tarea utilizando lenguaje natural u ordinario.

Figura 2. Tarea de exploración inicial de significados personales

Análisis ontosemiótico *a priori* de la resolución de la tarea

La Tabla 1 resume la configuración de objetos y significados involucrada en la resolución de la tarea. Para un análisis pormenorizado, el enunciado del primer ítem junto con su resolución y justificación esperada, son descompuestos en 7 unidades de análisis.

Tabla 1. Análisis ontosemiótico de la tarea inicial (Dibujo en perspectiva)

Uso e intencionalidad de las prácticas	*Enunciado y secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea*	*Objetos referidos en las prácticas (Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)*
Planteamiento del problema; interpretación de una perspectiva isométrica de un objeto físico tridimensional.	1) La siguiente figura muestra un edificio dibujado desde el ángulo frente-derecha. Dibuja la vista del edificio desde atrás.	Conceptos: perspectiva isométrica de un objeto tridimensional; punto de vista (o foco); puntos de vista opuestos; proyección ortogonal; plano de proyección; rectas proyectantes; rayo visual; cubo; composición de cubos; cuadrado; sistema de referencia tridimensional; frente, arriba, derecha; objeto visible, objeto oculto.
Inducir la elaboración de una justificación de la respuesta requerida.	2) Justifica la respuesta.	Concepto de justificación de una proposición geométrica (como convencimiento, a sí mismo y al otro, de la corrección de una respuesta).
Respuesta a la tarea solicitada.	3) La vista desde atrás debe ser la figura adjunta. 	Concepto: vista de alzado (trasero). Procedimiento: recuento de cubos por filas y columnas. Proposición 1: la vista de atrás es la figura adjunta.
Se establece una hipótesis fundamental para poder dar una respuesta racional a la tarea y se evoca una propiedad de las proyecciones ortogonales.	4) Suponiendo que las piezas dibujadas en perspectiva son cubos, las proyecciones ortogonales de las caras son cuadrados.	Concepto: cubo; proyección ortogonal; cuadrado. Proposición 2: las proyecciones ortogonales de un cubo son cuadrados.
Se evocan propiedades de las proyecciones ortogonales necesarias para justificar deductivamente la respuesta a la tarea.	5) Las proyecciones ortogonales conservan la forma, tamaño y posición relativa de los objetos proyectados.	Argumento: justificación de la proposición 2. Conceptos: forma, tamaño y posición relativa.
Se describen las posiciones relativas de las piezas que componen la construcción para justificar la forma de la proyección plana desde atrás.	6) Si me pongo detrás del edificio, a mi izquierda vería un solo cubo, en el centro tres cubos apilados y a mi derecha dos cubos apilados, porque en la perspectiva isométrica dada a la derecha-atrás hay un cubo; en medio-atrás hay 3 cubos; y finalmente, en la izquierda – frente, 2.	Conceptos: atrás, izquierda, centro y derecha. Proposición y su argumentación basada en los datos de la tarea.
Se evoca una propiedad previamente establecida para justificar la respuesta final.	7) Como las proyecciones ortogonales de las caras del cubo son cuadrados la vista del objeto debe ser la figura dada en 3)	Argumentación que justifica la proposición 1.

El análisis de los objetos y significados reflejados en la Tabla 1, se complementa con el reconocimiento de los procesos implicados en la resolución del primer ítem de la tarea. Sin embargo, no es el objetivo de este trabajo incluir un análisis más completo de la trama de funciones semióticas implicadas en el sistema de prácticas, tanto de tipo *referencial* (un objeto refiere a otro objeto) como *operacional* (uso pragmático de los objetos). Asimismo, es preciso señalar que los procesos de *particularización–generalización* y *materialización/idealización* están siempre presentes, como se ejemplifica a continuación.

- Procesos de particularización – generalización

En la tarea se da una vista particular de un objeto espacial y se pretende que se razone sobre el objeto en su totalidad. La solución pedida en la consigna 1, esto es, el dibujo de la parte de atrás, es la misma cualquiera que sea el tamaño y posición ortogonal de los diagramas, aunque es dependiente de la forma en que se compone el cuerpo espacial al que la tarea hace referencia. De esta manera, la proposición 2 y su argumentación, deben ser interpretadas de manera general, para cualquier cubo. Asimismo, dicha consigna admite múltiples y variadas generalizaciones cambiando la composición del objeto real representado; en particular, modificando la designación de las vistas como *perfil* (izquierdo/ derecho) o *alzado* (delantero /trasero). Así, se puede pedir la construcción y el reconocimiento de las diferentes vistas; de hecho, representa un problema prototípico dentro del área de dibujo técnico y geometría descriptiva.

- Procesos de materialización/idealización

La tarea muestra la representación material en la hoja de papel de un objeto real (el edificio) ideal (imaginado). Esta representación en perspectiva isométrica se refiere a la vista que un observador hipotético tendría del edificio ideal. Este tipo de perspectiva tiene la ventaja de permitir la representación a escala, y la desventaja de no reflejar la disminución aparente de tamaño que percibe el ojo humano. El dibujo del edificio es entonces una materialización de un objeto ideal: la vista de un edificio que tendría un hipotético observador. Los dibujos (en proyecciones isométricas y ortogonales) pueden ser interpretados cómo materializaciones de objetos ideales (composiciones de cubos) que facilitan la realización de las "acciones matemáticas" (reconocer las vistas) que se realizan sobre ellos.

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

La observación participante del proceso formativo implementado y el análisis de muestras de respuestas elaboradas por los estudiantes ha permitido extraer algunas conclusiones sobre las dificultades de comprensión de las consignas, los logros alcanzados y las posibilidades ofrecidas por el dispositivo (diseño de tareas) para identificar algunos hechos didácticos relevantes.

Durante el desarrollo de la primera fase (trabajo individual), se observó que los estudiantes no tenían claro cuál era la naturaleza de los objetos matemáticos primarios y sus significados. Dado el proceso de visualización que involucra el enunciado (perspectiva frente – derecha del edificio) y su solución (dibujo de la vista desde atrás), el reconocimiento de objetos matemáticos por parte de los estudiantes, se ha centrado en los objetos visuales perceptivos. Por ejemplo, reconocen como conceptos intervinientes y emergentes en la resolución: cubo, cuadrado, volumen, altura, giro, sistema de referencia, etc., pero ningún alumno refiere a las proyecciones ortogonales (Figura 3).

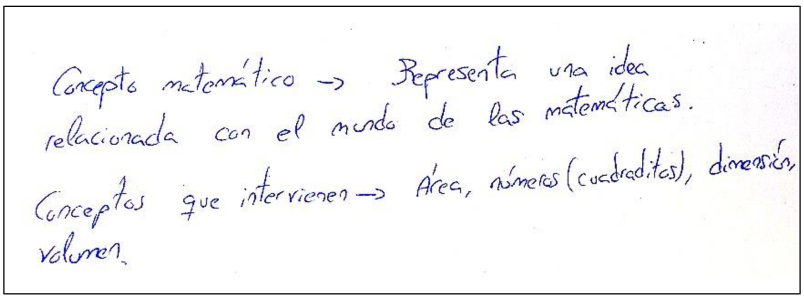

Concepto matemático → Representa una idea relacionada con el mundo de las matemáticas.
Conceptos que intervienen → Área, números (cuadraditos), dimensión, volumen.

Figura 3. Respuesta de un estudiante

La noción de proposición resulta también conflictiva en esta tarea; por ejemplo, el estudiante E_1 sugiere que una proposición es un supuesto del que se parte; para el estudiante E_2, la tarea es muy sencilla de resolver y la representación visual de la solución no contiene matemáticas.

E_1 La única proposición es la asunción de que las piezas son cúbicas.

E_2 Las proposiciones se aplican para demostrar teoremas. Esta resolución no tiene demostración, es simplemente dibujar lo que uno ve (...) Es un problema de dibujo técnico, no de matemáticas.

Los conflictos identificados se reflejaron en la puesta en común para manifestar, discutir y compartir la manera de entender dichas entidades y su papel en la práctica matemática. El objetivo era que los estudiantes compartieran la visión pragmatista y antropológica sobre el conocimiento matemático que postula el EOS, según la cual un concepto se concibe como una entidad funcional (que desempeña un papel en la práctica matemática), cuyo significado es fijado por una definición-regla; y una proposición es un enunciado al que se debe asignar un valor lógico de verdadero o falso.

En la consigna seis de la tarea (Figura 2), se les pide a los estudiantes que establezcan al menos dos definiciones diferentes para el cubo como concepto geométrico, lo cual causó cierto desconcierto en muchos estudiantes:

E_3 Existe un solo cubo geométrico, por lo tanto, tiene una única definición.

Luego, se pide a los estudiantes que indiquen otros usos o significados en contextos no geométricos asociados a la palabra ‘cubo’. Esto representó un reactivo para explicitar la diversidad de significados que puede tener un concepto o una proposición dependiendo del contexto en el que participan, así como aspectos relativos al lenguaje, tales como la polisemia o la homonimia.

Otro aspecto importante a destacar es la dialéctica compleja que existe entre los objetos *ostensivos* (representaciones) y *no ostensivos* (inmateriales, mentales o ideales) que se manifiesta en los diálogos registrados; así, por ejemplo, los estudiantes E_4 y E_5, responden a la pregunta del profesor “*¿Qué propiedades del cubo no se pueden representar empíricamente?”* de la siguiente manera:

E_4 Todas las propiedades del cubo se pueden representar empíricamente, menos las caras que están por detrás. Por ejemplo (señala el dibujo): esto es un cubo y lo estoy representando empíricamente; éstas son las aristas, éstas son las caras, (...)

E_5 Habría que medir las aristas y calcular las distancias entre caras opuestas. De esta manera se puede comprobar que, si son iguales, entonces es posible representarlo empíricamente.

La dualidad, ostensivo – no ostensivo, tiene un papel esencial en el EOS, ya que la actividad de producción y comunicación matemática no se puede realizar sin el concurso sinérgico entre ambos tipos de objetos (Font, Godino y Gallardo, 2013). Esta reflexión es necesaria porque permite a los futuros profesores tomar conciencia de que tales objetos son entendidos como las reglas de uso de los lenguajes visuales o analíticos que los representan.

En la última cuestión planteada, se les pide a los estudiantes que enuncien la misma tarea utilizando solamente lenguaje natural. La mayoría de los alumnos no supo expresar esta respuesta de manera correcta. Esto permitió discutir sobre los usos y limitaciones de los distintos lenguajes, reconociendo las posibilidades epistémicas y cognitivas de los medios visuales de expresión. De esta manera, el diálogo y la interacción cobran un papel clave en toda la intervención formativa.

Durante la implementación formativa, se adopta una observación y evaluación sistemática del progreso cognitivo de los estudiantes a través del trabajo en clase, la discusión en grupos, la puesta en común y los momentos de institucionalización. En el desarrollo de la primera fase, los estudiantes tuvieron muchas dificultades para el reconocimiento de objetos y significados, manifestando que este tipo de análisis es complejo. Esto es previsible: los estudiantes del Máster tienen un amplio conocimiento matemático *per se*; pero, sin embargo, están en un proceso de formación profesional y de adquisición de conocimiento didáctico (especializado).

En los momentos de discusión colectiva e institucionalización del trabajo didáctico, se profundiza en la importancia que tiene la justificación de una respuesta en el trabajo matemático con representaciones y visualizaciones en general. Como afirma Sherry, lo que importa más que construir un diagrama preciso es el conocimiento matemático implicado, el cual no está visible por ningún sitio; no está en los propios diagramas. “Cuando los estudiantes son incapaces de reconocer el conocimiento no es por deficiencias en los diagramas construidos sino en su incapacidad para comprender el sistema de relaciones conceptuales relevantes” (Sherry, 2009, p. 68).

El análisis de las respuestas de todo el proceso implementado, permite observar que los estudiantes logran avanzar en el reconocimiento de la diversidad de conceptos y procedimientos implicados en las prácticas matemáticas. Sin embargo, persisten ciertas dificultades, principalmente con la noción de proposición, cuya identificación resultó compleja. El foco de atención se pone en este objeto matemático dado que, en la evaluación final, se detectan confusiones que también se habían manifestado en la tarea inicial:

> E_6 Proposición: partimos del supuesto que las figuras sombreadas son cuadrados y triángulos rectángulos.
>
> E_7 Proposición: definición de área de un cuadrado.

El comentario de un estudiante registrado al final de ciclo implementado, se refiere al uso (significado) que se le asigna al término 'proposición' en las tareas:

> E_8 En todos los ejercicios, he tenido una dificultad con el término proposición, puesto que se refería a resultados concretos del ejercicio y desde el punto de vista matemático una proposición es algo que siempre se cumple y tiene una demostración.

Este estudiante está condicionado por el uso que se hace en las clases de matemáticas universitarias, y en los textos correspondientes, de los términos 'proposición', 'propiedad' y 'teorema'. En ese contexto, la matemática es un producto terminado, un sistema de conceptos y proposiciones demostradas. Esta concepción puede impedir comprender la actividad que realiza una persona, ya sea un matemático profesional o un estudiante, cuando se enfrenta a un problema. La práctica matemática comprende, no solo los momentos finales de sistematización y generalización de los resultados, sino que incluye también los momentos de indagación, de ensayos, pruebas y refutaciones, en los cuales se trata de formular los enunciados y aportar argumentos sobre su verdad o falsedad. Este hecho permite incidir en la necesidad, utilidad e importancia de aplicar herramientas que promuevan el desarrollo de competencias específicas de un profesor de matemáticas.

El tipo de análisis que se ha implementado, esto es, el reconocimiento y la gestión de los conocimientos en la realización de las tareas, permite que el futuro profesor, analice los objetos intervinientes y emergentes en la resolución, y tome consciencia de la diversidad de significados que se les atribuye en el contexto específico.

A MODO DE CONCLUSIÓN

El análisis ontosemiótico de las prácticas matemáticas propuesto, permite centrar la atención en la dialéctica que existe entre los objetos ostensivos y los objetos ideales o abstractos (esto es, objetos no ostensivos) implicados necesariamente en la solución comprensiva y competente de las tareas (Tabla 1). Se muestra que el uso de diagramas en la práctica matemática debe ir acompañado de otros medios de expresión no visuales para argumentar (comunicar, justificar y explicar) el desarrollo de las prácticas operativas y discursivas, como también el progreso en la tarea. La génesis del conocimiento matemático precisa de la reinterpretación de los lenguajes y del análisis de sus relaciones. Además, es preciso observar que los medios de expresión son *artefactos* (Lasa, Wilhelmi y Belletich, 2014) que conllevan el uso implícito de un sistema de objetos no ostensivos que dotan de significado a la actividad matemática concretada en los objetos ostensivos.

La discusión de resultados y las reflexiones aportadas a partir de los hechos didácticos significativos mostrados, nos permiten considerar que este tipo de actividades son un reto para los profesores en formación, resultando conflictivas la identificación y discriminación de los tipos de objetos y significados, ya que usualmente supone un cierto nivel de actividad metacognitiva a la que no están habituados. El factor tiempo es, quizás, la variable más importante que ha de considerarse para una gestión adecuada del proceso de enseñanza y aprendizaje, pero sin duda, dada la complejidad que requiere este tipo de competencia, no se dispone de tiempo suficiente, siendo una limitación en la implementación formativa. Por ejemplo, las respuestas de la evaluación final no pudieron ser discutidas en el aula, siendo necesario incorporar momentos de discusión sobre las dificultades detectadas y momentos para la negociación de significados.

A pesar de la cantidad y difusión de trabajos sobre la formación de profesores, el cambio significativo continúa siendo un desafío para muchos profesores (Chapman, 2014). El tipo de análisis que hemos descrito en este trabajo debería ser una competencia instrumental del profesor de matemáticas al permitirle reconocer la complejidad de objetos y significados puestos en juego en las actividades matemáticas, prever potenciales conflictos, adaptarlas a las capacidades de sus estudiantes y a los objetivos de aprendizaje. De acuerdo con Font, Planas y Godino (2010), el ciclo formativo que estamos experimentando con los futuros profesores incluye, además de las situaciones de estudio matemático de problemas seleccionados y del análisis de las relaciones duales epistémico-cognitivas, otros tres tipos de análisis: análisis de las interacciones en el aula, reconocimiento de las normas que condicionan y soportan la actividad de estudio matemático y valoración de la idoneidad didáctica global de experiencias de enseñanza y aprendizaje.

Referencias

Chapman. O. (2014). Overall Commentary: Understanding and Changing Mathematics Teachers. En J.–J. Lo, K. R. Leatham y L. R. Van Zoest (Eds.), *Research Trends in Mathematics Teacher Education* (pp. 295-309). Dordrecht: Springer International Publishing.

D'Amore, B., Font, V. y Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Paradigma, 28*(2), 49-77.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82*, 97-124.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje, 33*(2), 89-105.

Godino J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20,* 13-31.

Godino, J. D., Giacomone, B., Wilhelmi, M. R., Blanco, T. F. y Contreras, A. (2015). *Configuraciones de prácticas, objetos y procesos imbricadas en la visualización espacial y el razonamiento diagramático.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino_DiagramasEOS.pdf

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico - semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *34*(2/3), 167-200.

Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. y Konic, P. (2012). Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática, 7*(2), 1-21.

Kelly, A. E., Lesh, R. A. y Baek, J. Y. (Eds.) (2008*). Handbook of design research in methods in education. Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching.* New York, NY: Routledge.

Lasa, A., Wilhelmi, M. R. y Belletich, O. (2014). Una parcela para Laika. *Educação Matematica Pesquisa, 16(*4), 1089-1110.

Nolan, A. (2008). Encouraging the reflection process in undergraduate teachers using guided reflection. *Australian Journal of Early Childhood, 33*(1), 31-36.

Pino-Fan, L. y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma, 36*(1), 87-109.

Rubio, N. (2012). *Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos* (Tesis doctoral). Universitat de Barcelona, España.

Sherry, D. (2009). The role of diagrams in mathematical arguments. *Foundations of Science, 14*, 59-74.

Sowder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 157-224). Charlotte, N.C: NCTM and IAP.

i. Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación EDU2012-31869 y EDU2013- 41141-P, Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO).

EL DISCURSO MATEMÁTICO DEL PROFESOR: EJEMPLOS, EXPLICACIONES Y COHERENCIA LOCAL[vii]

The teacher's mathematical discourse: Examples, explanations and local coherence

Planas, N.[a], Fortuny, J. M.[a], Arnal-Bailera, A.[b], García-Honrado, I.[c]

[a]Universitat Autònoma de Barcelona, [b]Universidad de Zaragoza, [c]Universidad de Oviedo

Resumen

Se examina el discurso matemático de un profesor a lo largo de una discusión de clase, con inspiración en el marco MDI –Mathematical Discourse in Instruction. Se interpretan momentos de selección y secuenciación de ejemplos y explicaciones durante la resolución del problema del reparto de una apuesta en un juego interrumpido. Para ello, aplicamos una noción de coherencia local que alude al cumplimiento de condiciones sobre la selección, secuenciación y conexión de ejemplos y explicaciones. Se concluye que la coherencia local del discurso es mayor en los momentos en los cuales se aportan ejemplos con una función refutadora y desestabilizadora del razonamiento proporcional inicialmente utilizado por los alumnos, y a la vez explicaciones con una función modeladora hacia el concepto de probabilidad que se pretende introducir.

Palabras clave: *profesor de matemáticas, discurso matemático en la instrucción, procesos de ejemplificación, procesos de explicación, coherencia local.*

Abstract

Drawing on the MDI –Mathematical Discourse in Instruction– frame, we examine a teacher's mathematical discourse in whole-class discussion. We interpret some moments of selecting and sequencing examples and explanations during the resolution of the problem of the distribution of a bet in an interrupted game. For this end, we apply a notion of local coherence that alludes to the achievement of conditions about selecting, sequencing and connecting explanations and examples. We conclude that the local coherence of the discourse is higher when there are examples with a rebuttal and destabilizing function of the proportional reasoning initially used by students, as well as explanations with a modeling function toward the concept of probability that is to be taught.

Keywords: *mathematics teacher, mathematical discourse in instruction, processes of exemplification, processes of explanation, local coherence.*

INTRODUCCIÓN

En este estudio se realiza un análisis de la práctica educativa en la clase de matemáticas desde la perspectiva del discurso matemático del profesor. Esta temática se enmarca en el interés por la relación entre comunicación y matemática escolar. Nuestro objetivo es identificar características del discurso matemático del profesor de matemáticas en su gestión de la enseñanza en clase. Para ello, nos centramos en el análisis de la gestión de procesos de ejemplificación y de explicación.

En lo que sigue, resumimos el marco teórico y su uso para la interpretación de datos del discurso matemático de un profesor en parte de una sesión de un aula de secundaria. La sesión fue registrada en mayo de 2015, cuando el objetivo del análisis era la actividad matemática de los alumnos durante el trabajo en grupo y la posterior presentación de este trabajo en la puesta en común guiada por el profesor. Se dispone de la grabación en video de la discusión en la puesta en común, de la

Planas, N., Fortuny, J. M., Arnal-Bailera, A. y García-Honrado, I. (2016). El discurso matemático del profesor: Explicaciones, ejemplos y coherencia local. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 263-272). Málaga:: SEIEM.

transcripción y de las notas de observación en clase. El análisis de estas fuentes ahora se realiza para informar sobre la configuración del discurso matemático del profesor en la enseñanza.

PROCESOS DE EJEMPLIFICACIÓN Y DE EXPLICACIÓN

El discurso matemático del profesor durante la enseñanza es un componente decisivo de la práctica educativa del aula de matemáticas. Aquí se considera lo que el profesor dice y escribe en su interacción con los alumnos acerca de contenidos matemáticos. El discurso es, por tanto, la unidad observacional que interpretamos al escuchar o leer una emisión verbal en datos de clase. En nuestra investigación, el contexto es el de la clase de matemáticas y su cultura pedagógica y matemática específica (Steinbring, 2005). El constructo de *Mathematical Discourse in Instruction* (MDI en adelante), en el sentido atribuido por Adler y sus colegas (e.g., Adler y Ronda, 2015; Adler y Venkat, 2014), permite una aproximación al estudio del discurso matemático del profesor con independencia del estudio de la cultura específica del aula. El acceso parcial al MDI se piensa posible mediante el análisis de invariantes en la enseñanza, esto es, procesos matemáticos que acostumbran a repetirse con frecuencia tales como los de ejemplificación y los de explicación.

La literatura sobre el uso y análisis de ejemplos en la enseñanza de las matemáticas (e.g., Adler y Ronda, 2015; Blanco, Contreras y Figuereido, 2007; Rowland, 2008) apunta a los procesos de ejemplificación como un aspecto común y rastreable del discurso matemático del profesor. Desde la perspectiva del MDI, el análisis de procesos de ejemplificación no pretende indagar el conocimiento matemático del profesor que puede estar relacionado con seleccionar y secuenciar unos ejemplos concretos para la enseñanza de un contenido matemático. En su lugar, se prioriza el foco semántico, consistente en averiguar la función comunicativa de unos ejemplos en la enseñanza de una cierta generalidad matemática. Esta función es variable y se manifiesta mediante el papel de cada uno de los ejemplos en la actividad orientada a la enseñanza y al aprendizaje de la generalidad correspondiente. Así pues, tenemos un aula donde se propone una tarea que actúa a modo de particularización de una generalidad matemática (Radford, 2013) y un discurso del profesor para el desarrollo de la tarea donde son observables procesos de ejemplificación.

Otro invariante rastreable del discurso matemático del profesor son los procesos de explicación. Adler y Venkat (2014), Chico y Planas (2011) y Rowland (2012) son algunas de las investigaciones recientes sobre el uso y análisis de un tipo de explicaciones en la enseñanza de las matemáticas, las relativas a ejemplos. En clase a menudo las explicaciones toman ejemplos como datos o bien como respaldo de una garantía ofrecida mediante la apelación a conocimiento matemático ya adquirido. Desde la perspectiva del MDI, nos interesa indagar cómo unas determinadas explicaciones –su selección y secuenciación– se utilizan en la enseñanza de una cierta generalidad matemática que ha sido particularizada mediante una tarea y tratada con ayuda explícita de ejemplos. Ahora se prioriza el foco pragmático, consistente en averiguar cómo mediante razones matemáticas e inferencias, que involucran o aluden a ejemplos, el discurso del profesor contribuye a transitar entre la particularización que supone la tarea y la generalidad que se pretende enseñar.

En la próxima sección resumimos qué entendemos por coherencia local y cómo hacemos operativa esta noción en nuestra investigación, en relación con la presencia y el uso de procesos de ejemplificación y de explicación en momentos del discurso matemático del profesor en clase.

NOCIÓN DE COHERENCIA LOCAL

En Cobo y Fortuny (2000) se presenta una noción de coherencia discursiva para referirse a la organización del discurso pedagógico y matemático en clase de matemáticas, destacándose la explicitación de procesos matemáticos y conexiones entre ellos en la interacción verbal entre profesor y alumnos. En el actual estudio centrado en procesos de ejemplificación y de explicación en el discurso matemático del profesor, planteamos una noción de coherencia local que coordina: 1) la dimensión pragmática, reconocible en los enunciados declarativos habituales en la verbalización de ejemplos; y 2) la dimensión semántica, reconocible en los enunciados expositivos habituales en la verbalización de explicaciones. Bajo coordinación de ambas dimensiones y para momentos concretos de la enseñanza, decimos que hay coherencia local en el discurso matemático de un profesor si se cumplen las siguientes condiciones:

- selección y secuenciación adecuadas de ejemplos;
- selección y secuenciación adecuadas de explicaciones relativas a ejemplos; y
- conexión adecuada entre ejemplos y explicaciones.

El cumplimiento de estas tres condiciones no garantiza la coherencia del discurso en un sentido global puesto que hace referencia al análisis local de partes seleccionadas del discurso. Lo que ofrecemos es una noción de coherencia local que informa sobre ciertos aspectos del discurso con un cierto grado de aproximación; esta noción puede verse como un indicador de la calidad del discurso matemático del profesor, entendida aquí la calidad como la capacidad de desarrollar la enseñanza de las matemáticas de modos que posibiliten y promuevan la actividad matemática en clase y, con ello, la creación de oportunidades de aprendizaje matemático para los alumnos (Ferrer, Fortuny, Planas y Boukafri, 2014; Morera, 2013; Venkat y Adler, 2012).

Respecto a las condiciones enumeradas de coherencia local, decimos que las secuencias de ejemplos y explicaciones y las conexiones son adecuadas si introducen, en el discurso del aula, contenidos que posibilitan y contribuyen al desarrollo de la actividad matemática. Se trata, por tanto, de condiciones que interpretamos en concordancia con nuestra comprensión de la noción de calidad aplicada al discurso matemático del profesor. La introducción de ciertos contenidos matemáticos en clase, mediante ejemplos, explicaciones y conexiones, no implica necesariamente su aprendizaje pero sí conlleva la creación de oportunidades de aprendizaje para los alumnos que podrán ser o no aprovechadas (Ferrer y otros, 2014; Morera, 2013). Así, en nuestra noción *ad hoc* de coherencia local, “ser adecuado” alude tanto al desarrollo de la actividad matemática como a las oportunidades de aprendizaje que se facilitan a los alumnos al poner contenidos matemáticos a su disposición de forma verbal explícita en el discurso. Por otra parte y siguiendo a Duval (2006), interpretamos que el desarrollo de la actividad matemática es observable en las relaciones de transformación de representaciones de los contenidos matemáticos involucrados en una cierta tarea.

El profesor, en su enseñanza, tenderá a producir discursos localmente coherentes; no obstante, pueden darse momentos de coherencia local débil por distintos motivos. Esto puede ocurrir si se introducen ejemplos y explicaciones sin que se aborden las conexiones existentes, quedando implícita su inferencia y tratándose a nivel tácito una parte sustancial de los contenidos que se pretenden enseñar (ver Chico y Planas, 2011, para datos sobre la alusión en el discurso del profesor a conexiones entre contenidos que no se han establecido en clase). Los ejemplos, explicaciones y conexiones que se sugieran sin ser verbalizadas en el discurso no aportarán a la práctica evidencias del cumplimiento de las condiciones de coherencia local. Sin su presencia en el discurso tampoco se estará fomentando la creación de unas determinadas oportunidades de aprendizaje matemático para los alumnos. También pueden darse momentos de coherencia local débil cuando haya ejemplos y explicaciones que se verbalicen pero no con la suficiente claridad desde la perspectiva de las representaciones iniciales de los alumnos. En términos generales no se estará facilitando el desarrollo de la actividad matemática dado que se estará realizando una transformación de representaciones que no habrá tomado en cuenta las situaciones iniciales de los interlocutores.

Estas últimas consideraciones ponen de manifiesto la problemática existente a raíz de la diversidad de situaciones iniciales en los alumnos de un aula y la dificultad de fijar de manera homogénea y general lo que significa “ser adecuado” para el desarrollo de la actividad matemática y la creación de oportunidades de aprendizaje. En nuestra investigación, no olvidamos que las evidencias de participación en la actividad matemática de un alumno no son extensibles a la experiencia de otros alumnos en ese momento de la actividad. Entendemos que un momento del discurso matemático del profesor tendrá cierto grado de coherencia local si se aportan ejemplos, explicaciones y conexiones de modos que posibiliten y/o contribuyan a la participación observable en el desarrollo de la actividad matemática de al menos algunos de los alumnos. De ahí que debamos insistir en el hecho de que nuestra noción de coherencia local se examina con un cierto grado de aproximación puesto que, entre otras cuestiones, no incorpora la experiencia en clase de todos los alumnos. Por otra parte, si en el discurso del aula no hubiera evidencias observables de representaciones de alumnos, no se dispondría de “pruebas” que permitieran identificar el desarrollo de la actividad matemática a excepción de cambios en el propio discurso matemático del profesor.

LECCIÓN, TAREA, PARTICIPANTES Y MÉTODOS

La experimentación tuvo lugar en un aula con 27 alumnos de tercer curso de secundaria –14 y 15 años– y un profesor con varios años de experiencia en la enseñanza de las matemáticas. La primera autora, como observadora participante, colaboró en la planificación de tres tareas de resolución de problemas y en la grabación de las tres sesiones de clase de una hora de duración en las que se llevaron a cabo estas tareas, de las cuales aquí solo comentamos la primera. La dinámica común fue de trabajo en pequeño grupo y discusión en gran grupo, periodo en el cual el profesor fue solicitando a los grupos que compartieran sus ideas y que explicaran sus propuestas de resolución del problema en cuestión. La tarea de la primera sesión se enunció como sigue:

> Dos chicos juegan a lanzar una moneda de modo que uno gana 1 punto si sale cara y el otro 1 punto si sale cruz. Cada uno pone 3€ y deciden que el que gane 8 puntos se quedará con los 6€. Sin embargo, la partida se interrumpe cuando uno ha ganado 7 puntos y el otro 5. ¿Cómo se repartirán el dinero?

Se eligió por su riqueza argumentativa en las discusiones de clase documentadas en Goizueta (2015). Esta tarea se puede pensar como una de las múltiples particularizaciones que se pueden elaborar para trabajar en clase la siguiente generalidad (ver texto subrayado):

> Dos chicos juegan a lanzar una moneda de modo que uno gana 1 punto si sale cara y el otro 1 punto si sale cruz. Cada uno pone 3€ y deciden que el que gane 8 puntos se quedará con los 6€. Sin embargo, la partida se interrumpe cuando uno ha ganado *a* puntos y el otro *b*. ¿Cómo se repartirán el dinero?

En el aula no se habían visto contenidos de la teoría de la probabilidad y, en concreto, los alumnos no estaban familiarizados con la definición laplaciana para asignar una probabilidad a un suceso. En García-Cruz (2000) se examina el problema histórico del reparto de la apuesta en un juego interrumpido y sus posibilidades didácticas en la introducción de contenidos de probabilidad. Este autor considera el problema apropiado para la etapa escolar de secundaria porque puede ayudar a intuir la necesidad de la noción de probabilidad a la vez que cuestionar la validez del razonamiento proporcional en determinadas tareas. Goizueta (2015), por su parte, señala la dificultad de hacer emerger el razonamiento probabilístico en una etapa donde prevalece el razonamiento aritmético proporcional. Las aproximaciones de alumnos de estas edades a la resolución del problema tienden a basarse precisamente en el razonamiento proporcional, con atención a los puntos acumulados por cada jugador o a la ventaja de un jugador respecto al otro cuando se interrumpe la partida.

Para el análisis del discurso matemático del profesor a lo largo de la puesta en común, los turnos de habla del profesor se transcriben y filtran en búsqueda de evidencias de ejemplos, de explicaciones relativas a ejemplos y de conexiones. En el contexto de la generalidad particularizada mediante la tarea de la partida interrumpida, serán ejemplos aquellos enunciados donde se expongan otras particularizaciones alternativas de la misma generalidad. Habiendo siendo identificados los ejemplos, serán explicaciones relativas a ejemplos aquellos enunciados donde se declaren razones matemáticas que contribuyan a transitar entre lo particular incluido en uno o varios ejemplos y la generalidad que se pretende tratar. Finalmente, habiendo sido identificados los ejemplos y explicaciones, serán conexiones aquellos enunciados donde se establezcan relaciones entre ejemplos, entre explicaciones o bien entre ejemplos y explicaciones; esto es, donde se evidencie una cierta articulación entre distintos momentos y procesos del discurso matemático del profesor. El significado dado a las conexiones lleva a que el estudio de la tercera condición de coherencia local se realice en estrecha relación y durante el estudio de las dos primeras condiciones.

En las próximas secciones, mostramos el análisis con ayuda de turnos del discurso. Añadimos turnos de alumnos cuando conviene para entender mejor el discurso matemático del profesor dado que este discurso no se produce ajeno a la interacción en clase. El discurso del profesor es en parte una reacción a las intervenciones de alumnos; los procesos de ejemplificación y de explicación están sujetos a esta influencia y, en consecuencia, es previsible que se vayan adaptando según la comprensión que los alumnos muestran y que el profesor percibe en el discurso del aula. Por tanto, en el análisis de la coherencia local, al considerar si el discurso del profesor contribuye al desarrollo de la actividad matemática, se tiene en cuenta la comprensión expresada por los alumnos.

ANÁLISIS DE PROCESOS DE EJEMPLIFICACIÓN Y CONEXIONES

La siguiente transcripción se inicia tras la intervención de una alumna cuyo grupo ha propuesto una resolución según el reparto proporcional: 7/12·6=3,5€ para el primer jugador y 5/12·6=2,5€ para el segundo. En este momento, se observan hasta cuatro enunciados donde se introducen ejemplos (ver textos subrayados en la transcripción), siendo uno de ellos el ejemplo mismo de la tarea:

Profesor: Vale, habéis llegado a dos coma cinco y tres coma cinco euros. Ahora imaginad que la partida se interrumpe cuando uno ha ganado siete puntos y el otro todavía ningún punto. ¿Cómo se reparten el dinero si ocurre esto? Según vuestro grupo, hay que repartir los seis euros entre… ahora no son doce tiradas con siete y cinco puntos, ahora son siete tiradas. Pues… [en la pizarra 7/7·6 y 0/7·6], aplico lo que me habéis dicho y va a pasar que uno se queda con los seis euros y el otro con nada.

Alumna: Pues claro, porque no ha sacado ni un solo punto y el otro casi ha ganado.

Profesor: Vaya, o sea que vuestra manera os sigue pareciendo que funciona. ¿Y si la partida se interrumpe cuando uno ha ganado un punto y el otro está aún con cero puntos? ¿Entonces? Ahora no son ni doce ni siete tiradas… [en la pizarra 1/1·6 y 0/1·6]. Otra vez hay un jugador que se lleva todo el dinero, pero ahora ni siquiera estaba en la recta final para ganar.

Alumna: Ya, mala suerte. Solo han tirado una vez.

Profesor: Pero esto puede ocurrir, se puede interrumpir así de pronto. Incluso si solo da tiempo a dos tiradas, y uno saca dos puntos, entonces hacemos lo mismo y… [en la pizarra 2/2·6 y 0/2·6], un chico se lo va a volver a llevar todo, con solo dos puntos. ¡Solo ha conseguido dos puntos y los seis euros para él! ¿Seguís convencidos de que funciona?

De los ejemplos en el discurso del profesor, el segundo se corresponde con la tarea original donde la distribución de los puntos de la partida es a=7, b=5. Los otros ejemplos se corresponden con las particularizaciones alternativas: a=7, b=0; a=1, b=0; a=2, b=0. Los cuatro ejemplos se acompañan de la actividad de hallar el reparto del total del dinero según un modelo de repartición proporcional, que ha sido introducido por los alumnos. El discurso matemático del profesor adquiere una función refutadora y a la vez desestabilizadora de las parejas ejemplo-solución mediante un proceso de ejemplificación que crea oportunidades de experimentar un cierto conflicto en torno al uso del razonamiento proporcional en el contexto de la tarea dada. Al no tener este efecto la discusión del primer ejemplo-solución [“Vuestra manera os sigue pareciendo que funciona”], se proporcionan otras tres parejas ejemplo-solución. El ejemplo tercero parece querer refutar el argumento anterior de la alumna de que el que se lleva los seis euros “casi ha ganado”, mientras que el ejemplo cuarto parece querer rebatir la idea de esta alumna ante el tercer ejemplo cuando dice “solo han tirado una vez”. No se contemplan más ejemplos (e.g., a=7, b=7) que indiquen cómo continuar, con capacidad para generar la necesidad en los alumnos de modificar y ampliar su conocimiento y, en concreto, con una función modeladora orientada a explorar variables sustantivas de la generalidad que se pretende tratar y del razonamiento probabilístico subyacente.

Pasamos a discutir cómo estos ejemplos se han secuenciado y conectado entre ellos. La secuencia de variaciones numéricas que actúan de ejemplos problematizadores del reparto proporcional incluye la particularización extrema a=7, b=0 pero no concluye con ella. Así, para los dos últimos ejemplos, a=1, b=0 y a=2, b=0, se fija un resultado de 0 puntos siendo variable la cantidad de tiradas de la partida antes de la interrupción. Quizás los dos últimos ejemplos iban dirigidos a actuar como explicaciones de a=7 y b=0, lo cual estaría apuntando a una secuenciación subordinada de ejemplos dentro de la secuencia que incluiría la tarea original. Desde la perspectiva semántica, no obstante, en el discurso del profesor no se verbalizan relaciones entre secuencias de ejemplos. Este momento del discurso parece estarse adaptando a la comprensión que muestra una de las alumnas [“Pues claro, porque no ha sacado ni un solo punto…”; “Ya, mala suerte…”] cuando en dos ocasiones no parece percibir el conflicto que parece buscarse con el primer ejemplo donde b=0. En síntesis, todos los ejemplos nuevos que se aportan tienen en común la fijación de 0 puntos para uno de los jugadores, sin que se establezcan conexiones observables acerca de este aspecto en el discurso del profesor ni se establezcan conexiones entre los ejemplos nuevos y el original.

ANÁLISIS DE PROCESOS DE EXPLICACIÓN Y CONEXIONES

Tras la verbalización de los ejemplos presentados en la sección anterior, el discurso del profesor sigue con explicaciones en torno a las parejas ejemplo-solución halladas mediante la aplicación del razonamiento proporcional (ver textos subrayados). Se empieza del siguiente modo:

> Profesor: Hay algo que debería hacernos pensar. Hay algo que no me convence… La manera de repartir el dinero cuando quedan siete a cinco es bastante razonable, ¿verdad? Pero cuando solo se juega una partida, el mismo modo de repartir nos debería llevar a algo que fuera también bastante razonable. Pero seis euros para uno y nada para el otro, cuando apenas había empezado la partida, no sé, no veo que el mismo modo de proceder convenza por igual. Se saquen los puntos que se saquen y se interrumpa la partida cuando se interrumpa, deberíamos llegar a repartir el dinero siempre convencidos. ¿Qué se nos puede estar escapando? A lo mejor ni siquiera los dos coma cinco euros y los tres coma cinco deberían convencernos porque el modo de proceder luego nos lleva a seis y cero. Siempre debería funcionar.

En este momento, lo que dice el profesor es que el procedimiento de repartición mediante un modelo de reparto proporcional debe funcionar en todos las particularizaciones consideradas instantes antes. Con el fin de reflexionar sobre esta cuestión, se comparan dos ejemplos y las soluciones dadas por los alumnos: “La manera de repartir el dinero cuando quedan siete a cinco… los dos coma cinco euros y los tres coma cinco” y “Cuando solo se juega una partida… lleva a seis y cero”. En general, se sugiere que hay soluciones que no “funcionan” pero no se precisa qué significa “funcionar”; esto es, no se precisa ningún modelo matemático que represente todas las particularizaciones y lleve a soluciones que convenzan “por igual” ni tampoco se explicita el conflicto que parece buscarse al retomar los ejemplos a=7, b=5 y a=1, b=0 . Al cabo de unos segundos, al mencionar una variable aún no considerada (i.e. “puntos que faltan por ganar”), el discurso del profesor avanza hacia la generación del modelo probabilístico (ver textos subrayados):

> Profesor: ¿Alguien ha tenido en cuenta cuántos puntos les faltan para ganar la partida cuando uno lleva siete puntos y el otro cinco? ¿Y cuando uno de los chicos lleva un punto y el otro lleva cero puntos? Entonces, ¿cuántos puntos le faltan a cada uno para ganar? El chico que tiene solo uno y al que le queríais dar los seis euros solo le lleva un punto de ventaja al chico que no tiene ningún

punto, ese que queríais dejar sin nada de dinero. Tenemos que conseguir verlo de otro modo para que funcione. ¿Por qué decidimos los euros con los puntos que tienen? ¿Por qué no estamos viendo los puntos que les faltan?

Los puntos que faltan por ganar se introducen como dato y se plantean en relación con dos de los ejemplos. Es importante la referencia a la ventaja entre jugadores porque se comparan, desde otro punto de vista, el ejemplo original y la particularización "extrema". En a=1, b=0, la ventaja entre jugadores es inferior que en a=7, b=5. No se establece, sin embargo, conexión entre los puntos de ventaja y las posibilidades de alcanzar los puntos necesarios para ganar. Tampoco se verbaliza la contradicción entre el dinero que recibe cada jugador en estos ejemplos: en a=1, b=0 con una ventaja de 1 punto se lleva todo el dinero un jugador, mientras que en a=7, b=5 con una ventaja mayor el reparto es más equilibrado. A pesar de que el concepto de probabilidad y el modelo laplaciano están en el trasfondo de la propuesta de "verlo de otro modo" las particularizaciones y el valor de las soluciones halladas, se sigue sin precisar qué significa que las soluciones "funcionen". Algo más tarde, en conexión con la variable "puntos que faltan por ganar" y con ayuda de uno de los ejemplos, se señala la idea de "posibilidades de ganar", que es una variable sustantiva del modelo laplaciano. El discurso con énfasis en esta variable (ver textos subrayados) cambia de dirección sin concluirse la presentación de las demás variables del nuevo modelo:

Profesor: Vamos a volver a pensar que [la partida] se interrumpe cuando uno ha ganado siete puntos y el otro ninguno. Al chico que le falta un punto por ganar, ¿cuántas posibilidades tiene de ganar? ¿Qué puede pasar? Bueno… De todo lo que puede pasar, ¿qué le va bien a este chico? ¿Veis por dónde voy? Bueno… Antes vamos a hacer un poco de resumen de todo lo que hemos estado diciendo. Hemos visto que la partida puede ser de muchas maneras, ¿sí?

En la secuencia de explicaciones y en las conexiones que se establecen se observa una evolución hacia partes de los ejemplos no exploradas que llevan a la discusión de una variable sustantiva del modelo laplaciano. Se sugiere una distinción tácita entre variables que intervienen ("posibilidades de ganar") y que no intervienen directamente ("puntos que se tienen") en la comprensión del modelo probabilístico de reparto. La mención a "todo lo que puede pasar" supone un avance hacia el descubrimiento de otra aproximación a la tarea. El giro que toma el discurso del profesor al proponer resumir "todo lo que hemos estado diciendo" puede entenderse como una vuelta al modelo proporcional de reparto para que pueda ser explícitamente contrastado con el nuevo modelo. Hasta este punto se mantiene la utilización del razonamiento proporcional como base para la interpretación de los ejemplos y para la discusión de la necesidad de un razonamiento alternativo.

DISCUSIÓN DE LA COHERENCIA LOCAL DEL DISCURSO

Una vez analizados los ejemplos, las explicaciones relativas a ejemplos y las conexiones entre unos y otros en el discurso matemático del profesor durante momentos de la discusión en la puesta en común, pasamos a examinar el indicador de calidad de este discurso que hemos denominado coherencia local. De acuerdo con nuestra noción de coherencia local, en esta sección examinamos cómo la selección, secuenciación y conexión de ejemplos y explicaciones ha posibilitado y/o contribuido al desarrollo de la actividad matemática en el contexto de la tarea dada, favoreciendo en particular la creación de oportunidades de aprendizaje de la generalidad matemática involucrada.

En cuanto a la primera condición de coherencia local, hemos mostrado que los ejemplos son adecuados al aparecer con una clara función de refutar y desestabilizar el razonamiento proporcional introducido por los alumnos y visiblemente mantenido por una alumna. Esta función contribuye a desarrollar la actividad matemática en una dirección que lleva a la necesidad de buscar razonamientos alternativos para la interpretación de la tarea. En cuanto a la tercera condición de coherencia local, sin embargo, hemos visto que el discurso matemático del profesor no proporciona explícitamente las conexiones entre los ejemplos nuevos y el original, quedando estas conexiones sugeridas a nivel tácito mediante enunciados que aluden a particularizaciones posibles. Esto sin duda debilita el acceso de los alumnos a dichas conexiones y la creación de oportunidades de aprendizaje matemático acerca de las variables que deberían considerarse para comprender y resolver el conflicto que se manifiesta al comparar el reparto del dinero en distintos ejemplos.

En cuanto a la segunda condición de coherencia local, hemos visto que las explicaciones relativas a ejemplos son adecuadas, especialmente en el orden en el que se verbalizan dado que discriminan variables en relación con su intervención en el modelo laplaciano de reparto; en concreto, se relata que el reparto debe ser independiente de los puntos obtenidos hasta la interrupción de la partida y de la cantidad de tiradas. No obstante, a la vez se observa una circularidad recurrente en la secuencia de explicaciones en torno a la consideración y al cuestionamiento del razonamiento proporcional. El hecho de reflexionar sobre la necesidad de que el razonamiento aplicado sea válido para las distintas particularizaciones es relevante pero no está directamente dirigido a descubrir las variables que intervienen en el modelo de reparto que se busca. Hay en definitiva explicaciones que en sentido estricto son secundarias desde la perspectiva de la construcción del concepto de probabilidad y la comprensión del modelo laplaciano, y que no contribuyen a proporcionar el marco interpretativo de la tarea que se necesita. En cuanto a la tercera condición de coherencia local, las conexiones entre ejemplos y explicaciones se verbalizan con énfasis en el modelo proporcional de reparto y apenas con referencia a las variables del modelo laplaciano. De nuevo, como ocurre para las conexiones entre ejemplos, no parece que se favorezca la creación de oportunidades de aprendizaje respecto a estas variables, excepto para la variable "posibilidades de ganar". El resto de variables y la resolución del problema dentro del modelo probabilístico de reparto se ofrecerán poco después en la puesta en común como producto escrito en la pizarra y como reacción directa a la intervención de un alumno que dice: "Vale, ya sabemos cómo no se hace. Entonces ¿qué?".

A raíz de las consideraciones anteriores y para los momentos analizados, puede concluirse que la coherencia local del discurso matemático del profesor es mayor cuando se aportan ejemplos con una función refutadora y desestabilizadora del razonamiento proporcional utilizado por alumnos, y a la vez explicaciones con una función modeladora hacia el concepto de probabilidad que se pretende tratar mediante la discusión de particularizaciones del problema del reparto de la apuesta.

CONSIDERACIONES FINALES Y PROSPECTIVA

El constructo de coherencia local del discurso matemático del profesor, que por ahora hemos aplicado en relación a los procesos de ejemplificación y de explicación, es una herramienta analítica y teórica con potencial en el ámbito de la investigación del discurso en educación matemática. Los resultados presentados para el discurso de un profesor a lo largo de momentos de una discusión en una puesta en común dan cuenta de la complejidad de los procesos involucrados en la enseñanza y apuntan a la influencia de la interacción con los alumnos. Estos resultados ponen de manifiesto cómo el discurso del profesor posibilita y contribuye al desarrollo de la actividad matemática en clase y, con ello, refuerzan la interpretación de la coherencia local como indicador de calidad. En definitiva, se comprueba que el estudio de la coherencia local sirve para caracterizar aspectos del discurso matemático del profesor y también para indicar cómo desde este discurso se promueve el impacto de la enseñanza en el desarrollo de la actividad matemática.

Futuras conceptualizaciones más refinadas de la coherencia local del discurso matemático del profesor deberán incorporar maneras específicas de tener en cuenta cómo este discurso se adapta y modifica en la interacción. Las condiciones que hemos tomado para estudiar la coherencia local incluyen, por un lado, la perspectiva del alumno en interacción con el discurso matemático del profesor y, por otro, la perspectiva de las oportunidades de aprendizaje aportadas al alumno en contacto con este discurso. Falta una elaboración que permita fundamentar con rigor el análisis de la relación entre discurso del profesor y discurso del aula. Esta es una labor ardua que habrá de ser abordada. Se requiere una investigación que indague una conceptualización de coherencia local que pueda ser aplicable y que, en cierta medida, incorpore la comprensión que los alumnos desarrollan de la actividad matemática y su aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje (ver García-Honrado, Fortuny, Ferrer y Morera, 2016) que se facilitan durante el desarrollo de esta actividad.

Referencias

Adler, J. y Ronda, E. (2015). A framework for describing Mathematics Discourse in Instruction and interpreting differences in teaching. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, *19*(3), 237-254.

Adler, J. y Venkat, H. (2014). Teachers' mathematical discourse in instruction: Focus on examples and explanations. En H. Venkat, M. Rollnick, J. Loughran y M. Askew (Eds.), *Exploring mathematics and science teachers' knowledge. Windows into teacher thinking* (pp. 132-146). Londres: Routledge.

Blanco, L. J., Contreras, L. C. y Figuereido, C. A. (2007). Los ejemplos utilizados por los profesores en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas. En P. Bolea, M. Camacho, P. Flores, B. Gómez, J. Murillo y M. T. González (Eds.), *Comunicaciones de los grupos de investigación del X Simposio de la SEIEM* (pp. 83-96). Huesca: SEIEM.

Chico, J. y Planas, N. (2011). Interpretación de indicadores discursivos en situaciones de aprendizaje matemático en pareja. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M. M. Palarea (Eds.), *Actas del XV Simposio de la SEIEM* (pp. 319-328). Ciudad Real: SEIEM.

Cobo, P. y Fortuny, J. M. (2000). Social interactions and cognitive effects in contexts of area-comparison problem solving. *Educational Studies in Mathematics 42*(2), 115-140.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics 61*(2), 103-131

Ferrer, M., Fortuny, J. M., Planas, N. y Boukafri, K. (2014). Modos de actuación e interacción y generación de oportunidades de aprendizaje matemático. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Actas del XVIII Simposio de la SEIEM* (pp. 297-305). Salamanca: SEIEM.

García-Cruz, J. A. (2000). Historia de un problema: El reparto de la apuesta. *SUMA*, *33*, 25-36.

García-Honrado, I., Fortuny, J. M., Ferrer, M. y Morera, L. (2016). Análisis del aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje generadas en la discusión en gran grupo de un problema de transformaciones geométricas. En J. L. González, A. Berciano y M. T. Fernández (Eds.), *Actas del XX Simposio de la SEIEM* (ver este volumen). Málaga: SEIEM.

Goizueta, M. (2015). *Aspectos epistemológicos de la argumentación en el aula de matemáticas de secundaria*. Manuscrito de tesis doctoral. Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona.

Morera, L. (2013). *Contribución al estudio de la enseñanza y del aprendizaje de las isometrías mediante discusiones en gran grupo con el uso de tecnología*. Manuscrito de tesis doctoral. Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona.

Radford, L. (2013). Three key concepts of the Theory of Objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education, 2*(1), 7-44.

Rowland, T. (2008). The purpose, design and use of examples in the teaching of elementary mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 149-163.

Rowland, T. (2012). Explaining explaining. En S. Nieuwoudt, D. Loubscher y H. Dreyer (Eds.), *Proceedings of the 18th Annual Congress of AMESA* (Vol. 1, pp. 54-66). Potchefstroom, Suráfrica: AMESA.

Steinbring, H. (2005). *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction: An epistemological perspective.* Nueva York: Springer.

Venkat, H. y Adler, J. (2012). Coherence and connections in teachers' mathematical discourses in instruction. *Pythagoras, 33*(3), 1-8.

i. Esta investigación se ha realizado al amparo del Proyecto EDU2015-65378-P, 'Construcción de conocimiento matemático escolar: Discurso del profesor y actividad de enseñanza', MINECO. Se ha contado también con el apoyo de GIPEAM –Grup d'Investigació en Pràctica Educativa i Activitat Matemàtica, SGR2012-972, AGAUR.

ARTICULANDO CONOCIMIENTOS Y COMPETENCIAS DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS: EL MODELO CCDM[viii]

Articulating mathematics teachers' knowledge and competences: the DMKC model

Godino, J. D.[a], Batanero, C.[a], Font, V.[b] y Giacomone, B.[a]

[a]Universidad de Granada, [b]Universidad de Barcelona

Resumen

En esta comunicación describimos un modelo teórico que articula las nociones de competencia de análisis didáctico y conocimiento didáctico-matemático del profesor de matemáticas. Nos basamos en la conexión entre las prácticas matemáticas y los objetos implicados en su realización, asumida por el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. Las facetas que caracterizan los procesos de estudio aportan criterios para categorizar los conocimientos didácticos que el profesor necesita para la realización de prácticas matemáticas y didácticas. Adicionalmente dicho sistema teórico proporciona herramientas que permiten distinguir cinco sub-competencias, dentro de la competencia general de análisis e intervención didáctica propia del profesor de matemáticas. Por último, se refieren algunos trabajos empíricos en los cuales se está aplicando este modelo.

Palabras clave: conocimientos y competencias didáctico-matemáticas, formación de profesores, enfoque ontosemiótico

Abstract

In this paper, we describe a theoretical model that articulates mathematics teacher's didactical analysis competence and didactic-mathematical knowledge. We rely on the connection between mathematics practices and the objects involved in these practices, which is assumed by the onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction. The facets that characterize the teaching and learning processes provide criteria for categorizing the didactic knowledge that the teacher needs to perform these processes. Additionally, this theoretical system provides tools that serve to distinguish five sub-competencies within the mathematics' teacher general competence of didactic analysis and intervention. Finally, we refer some empirical work in which this model is being applied.

Keywords: didactic-mathematics knowledge and competences, teachers' training, onto-semiotic approach

INTRODUCCIÓN

Dentro del programa de investigación sobre formación de profesores de matemáticas, se proponen actualmente diferentes modelos teóricos que permiten analizar, mediante sistemas de categorías, el conocimiento requerido en la enseñanza de las matemáticas. Dichos modelos, (véase, por ejemplo, los propuestos por Ball, Lubienski y Mewborn, 2002; Pino-Fan y Godino, 2015; Rowland, Huckstep y Thwaite, 2005; Schoenfeld y Kilpatrick, 2008; Silverman y Thompson, 2008) permiten analizar la actuación del profesor, describir la práctica docente, evaluar los conocimientos requeridos para una buena enseñanza de las matemáticas y, consecuentemente, elaborar planes de formación de profesores. Desde el punto de vista de la investigación, la caracterización del conocimiento necesario para la enseñanza de las matemáticas, es un tema relevante, entre otras razones, debido a que nuestro conocimiento sobre el mismo es todavía limitado (Silverman y

Godino, J D., Batanero, C., Font, V y Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 273-282). Málaga: SEIEM.

Thompson, 2008, p. 499). Dicho conocimiento se viene gestando a la luz de diversas orientaciones teóricas.

Es bien reconocido que un cierto nivel de competencia matemática es un pilar fundamental en una buena enseñanza de las matemáticas. Es claro que el profesor de matemática ha de conocer y ser capaz de realizar correctamente las prácticas matemáticas necesarias para resolver los problemas matemáticos que propone o podría proponer a sus alumnos, es decir, los correspondientes a un cierto nivel educativo donde imparte su docencia. Además, el profesor debe saber articular las prácticas y problemas de un cierto contenido o nivel escolar, con los correspondientes a otros bloques temáticos o niveles educativos posteriores.

Hay también un acuerdo generalizado en que el profesor debe tener un *conocimiento especializado* del propio contenido, que incluye las transformaciones que se deben aplicar al mismo en los procesos de enseñanza y aprendizaje y las interacciones del contenido matemático a enseñar con diversos factores (psicológicos, sociológicos, pedagógicos, tecnológicos, etc.) que condicionan dichos procesos. No es tan usual tomar consciencia de la dialéctica compleja que existe entre los conocimientos y competencias del profesor; esta dialéctica, a su vez, viene matizada en los diferentes sistemas teóricos elaborados para la formación profesional del profesor.

El término competencia se ha utilizado de diferentes maneras en el campo de la educación matemática, generando un gran impacto en el desarrollo curricular, la práctica de la enseñanza y la evaluación, que se basa con frecuencia en el desarrollo de competencias (Lupiáñez y Rico, 2006; Puig, 2006; Font, 2011).

Schoenfeld y Kilpatrick (2008) introducen la idea de ‘proficiencia’ (*proficiency*) en la enseñanza de las matemáticas razonando sobre cómo ciertas formas de entender la competencia, pueden establecer el escenario para una discusión sobre una teoría de ‘proficiencia’ para la enseñanza de las matemáticas: “*Una teoría de la proficiency (en la enseñanza) dice lo que es importante – qué destrezas necesitan desarrollar las personas para llegar a ser proficientes*” (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008, p. 350). Los autores tratan de extender la noción de *proficiency* (introducida en Kilpatrick, Swafford y Findell, 2001 en la matemática escolar), que incluye: comprensión conceptual, fluidez procedimental, competencia estratégica, razonamiento adaptativo, y disposición productiva. Nosotros interpretamos el trabajo de Schoenfeld y Kilpatrick como una referencia a los conocimientos (y competencias) que deberían tener los profesores para que su enseñanza se pueda considerar de calidad (Godino, 2002, p. 18).

Desde el punto de vista del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007), el profesor debe ser capaz de analizar la actividad matemática al resolver los problemas, identificando las prácticas, objetos y procesos puestos en juego, y las variables que intervienen en los enunciados, a fin de formular nuevos problemas y adaptarlos a cada circunstancia educativa. El desarrollo de dicha competencia es un desafío para los formadores de profesores, debido a la diversidad de dimensiones y componentes a tener en cuenta.

Basándonos en los desarrollos teóricos del EOS y sus diversos aportes al campo de la formación de profesores, en este trabajo se propone un modelo que trata de articular diversas categorías de conocimientos y competencias didácticas del profesor de matemáticas. Se toma como indicador de competencia “una acción eficaz realizada en un determinado contexto con una determinada finalidad” (Font, 2011, p.18).

A continuación sintetizamos los fundamentos teóricos que apoyan el trabajo, seguido por un resumen de las distintas facetas y componentes que caracterizan los procesos de enseñanza y aprendizaje, y el sistema de competencias asociadas. Todo ello permite describir el mencionado modelo, que denominamos “conocimientos y competencias didáctico – matemáticas” (CCDM). Se finaliza con unas reflexiones sobre la utilidad que tiene el desarrollo de este tipo de herramientas y su puesta en acción en diversas investigaciones.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

El enfoque ontosemiótico (EOS) es un sistema teórico que trata de integrar diversas aproximaciones y modelos teóricos usados en la investigación en Educación Matemática. Se asumen presupuestos antropológicos y semióticos sobre las matemáticas, y se adoptan principios didácticos de tipo socio-constructivista e interaccionista para el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje (Godino et al., 2007). A continuación se presenta una breve descripción de las principales herramientas teóricas incluidas en este enfoque, que servirán de base para establecer un modelo específico de "conocimientos y competencias didáctico- matemáticas para el profesor de matemática", el cual denominaremos CCDM.

- *Sistema de prácticas* (operativas y discursivas): el EOS adopta como elemento central la actividad de resolución de problemas en la construcción del conocimiento matemático. La noción de sistema de prácticas (institucionales y personales) aporta la visión antropológica y pragmatista de las matemáticas e introduce el significado institucional y personal de los objetos matemáticos, distinguiendo diversos tipos de los mismos. La idea de significado institucional de referencia de un objeto o tema de estudio orienta el análisis sistemático de la literatura hacia la identificación de los diversos significados contextuales de los objetos y su articulación en un significado global u holístico. Este significado global se considera como la población de referencia (de situaciones – problemas) de la cual se seleccionarán muestras adecuadas a las circunstancias particulares de los procesos que se pretenden diseñar.
- *Configuración de objetos y procesos* matemáticos, *emergentes e intervinientes en las prácticas matemáticas.* La configuración ontosemiótica (de prácticas, objetos y procesos) responde a la necesidad de identificar los objetos y procesos implicados en las prácticas matemáticas que se realizan para la resolución de las situaciones - problemas cuya resolución competente se trata de desarrollar en los estudiantes. El reconocimiento explícito de tales objetos y procesos permite prever conflictos potenciales y efectivos de aprendizaje, evaluar las competencias matemáticas de los estudiantes e identificar objetos (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos) que deben ser recordados e institucionalizados en los momentos oportunos de los procesos de estudio.
- C*onfiguración didáctica*, o sistema articulado de roles docentes y discentes, a propósito de una configuración de objetos y procesos matemáticos ligados a una situación – problema. Constituye la principal herramienta para el análisis de la instrucción matemática (Godino, Contreras y Font, 2006). Las configuraciones didácticas y su secuencia en trayectorias didácticas tienen en cuenta las facetas epistémica (conocimientos institucionales), cognitiva (conocimientos personales), afectiva, mediacional (recursos tecnológicos y temporales), interaccional y ecológica que caracterizan los procesos de estudio matemático.
- La *dimensión normativa*, o sistema de reglas, hábitos, normas que restringen y soportan las prácticas matemáticas y didácticas, que generaliza las nociones de contrato didáctico y normas socio-matemáticas. El reconocimiento del efecto de las normas y meta-normas que intervienen en las diversas facetas que caracterizan los procesos de estudio matemático es uno de los factores explicativo de los fenómenos didácticos.
- La *idoneidad didáctica*, como criterio general, relativo a las circunstancias contextuales, de adecuación y pertinencia de las acciones de los agentes educativos, de los conocimientos puestos en juego y de los recursos usados en un proceso de estudio matemático (Godino, 2013). El sistema de indicadores empíricos identificados en cada una de las facetas constituye una guía para el análisis y reflexión sistemática que aporta criterios para la mejora progresiva de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En el marco del EOS las nociones de *conocimiento* y *competencia* se relacionan teniendo en cuenta las conexiones entre práctica y objeto. La práctica, como acción orientada al fin de resolver un problema o realizar una tarea, conlleva una capacidad o competencia por parte del sujeto que la realiza. Pero la realización competente de una práctica implica la intervención de objetos interconectados que regulan y emergen de la misma, los cuales constituyen el conocimiento declarativo o discursivo correspondiente. La dialéctica entre práctica y objeto, entre competencia y conocimiento, se puede mostrar mediante el *análisis ontosemiótico* de las prácticas matemáticas puestas en juego para la resolución de un problema matemático.

MODELO DE CONOCIMIENTOS DIDÁCTICO-MATEMÁTICOS DEL PROFESOR

En trabajos previos, se ha hecho un esfuerzo por reorganizar las dimensiones, facetas y componentes que caracterizan el conocimiento necesario para la enseñanza de las matemáticas, considerando los aportes teóricos de diversos modelos y proponiendo el denominado *conocimiento didáctico-matemático* (Godino, 2009; Pino-Fan y Godino, 2015).

Como se ha indicado en la introducción, el profesor de matemáticas tiene que conocer las matemáticas escolares del nivel educativo donde imparte, pero también debe poder articular esos conocimientos con los correspondientes a algunos niveles posteriores. Estos conocimientos constituyen el "conocimiento del contenido matemático *per se*" (Scheiner, 2015), que en el modelo propuesto desde el EOS constituyen, los conocimientos común (correspondiente al nivel en que se enseña) y ampliado (relativos a niveles superiores).

De acuerdo con la literatura en el campo de la formación de profesores citada en la introducción, los conocimientos puramente matemáticos no son suficientes para que el profesor organice, implemente y evalúe los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Los factores que influyen en dichos procesos son complejos, y es necesario tener también, un conocimiento más profundo de la matemática y su enseñanza, diferente del que adquieren los estudiantes, y que llamaremos *conocimiento didáctico-matemático*.

En la Figura 1 se presenta el modelo de conocimiento didáctico-matemático, que se superpone al conocimiento matemático per-se (común y ampliado), e incluye las siguientes facetas y componentes:

– *Faceta epistémica:* es el conocimiento de la pluralidad de los significados institucionales de cualquier objeto matemático, dependiendo de los diferentes contextos de uso, y el reconocimiento del sistema de prácticas, objetos y procesos implicados en cada significado parcial. Sería equivalente a lo que Ball, Lubienski y Mewborn (2002) denominan conocimiento especializado del contenido matemático, aunque en nuestro caso el EOS aporta un desglose analítico de sus elementos constituyentes.

– *Faceta cognitiva:* implica el conocimiento de cómo lo estudiantes aprenden, razonan y entienden las matemáticas y como progresan en su aprendizaje.

– *Faceta afectiva:* incluye los conocimientos sobre los aspectos afectivos, emocionales, actitudinales y creencias de los estudiantes con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.

– *Faceta instruccional:* conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas, organización de las tareas, resolución de dificultades de los estudiantes, e interacciones que se puede establecer en el aula.

– *Faceta mediacional*: conocimiento de los recursos (tecnológicos, materiales y temporales) apropiados para potenciar el aprendizaje de los estudiantes.

– *Faceta ecológica:* implica las relaciones del contenido matemático con otras disciplinas, y los factores curriculares, socio-profesionales, políticos, económicos que condicionan los procesos de instrucción matemática.

En realidad, todas estas facetas forman parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (línea punteada en la Figura 1), en la medida en que tales procesos ponen en juego algún contenido matemático, sea común o ampliado. Además, todas ellas se relacionan entre sí; por ejemplo, dada una tarea matemática determinada, el profesor debe ser capaz de movilizar la diversidad de significados que se ponen en juego (faceta epistémica) y también debe poder resolver la tarea utilizando distintos procedimientos, mostrar diversas justificaciones y explicaciones, o bien variarla para adaptarla a los conocimientos de los alumnos (facetas instruccional y cognitiva).

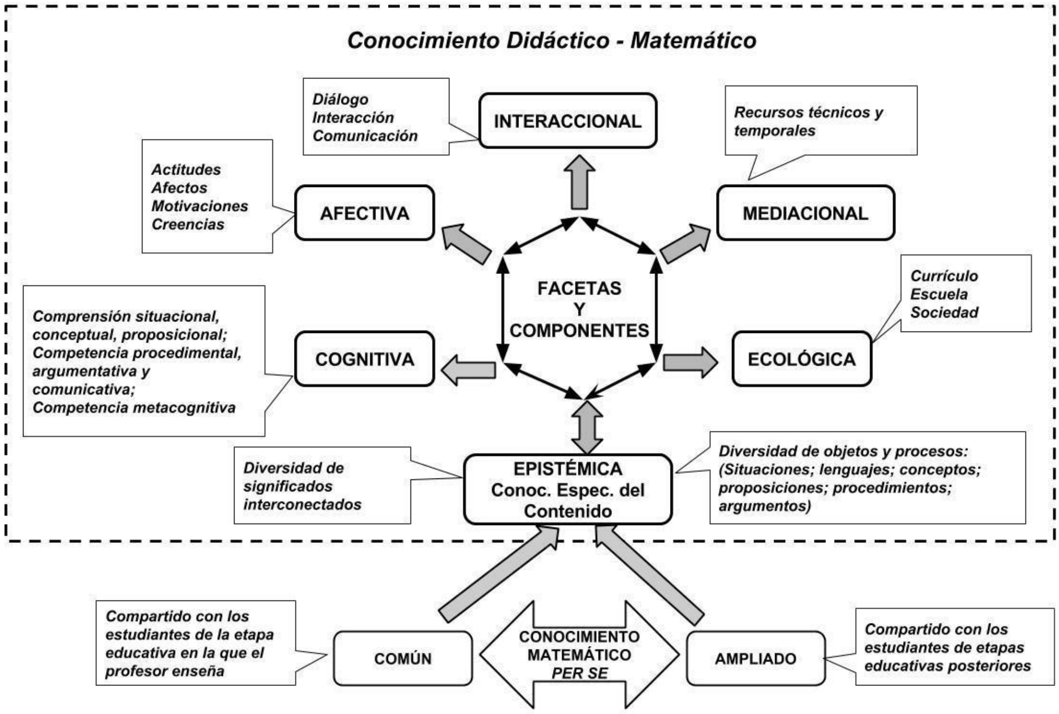


Figura 1. Facetas y componentes del conocimiento del profesor

El modelo de los conocimientos del profesor de matemáticas esquematizado en la Figura 1, puede proporcionar otro modelo sobre los conocimientos del formador de profesores de matemáticas. Si lo aplicamos al profesor, se supone que los conocimientos se refieren a un proceso de estudio matemático en que él está implicado, y por tanto, la faceta cognitiva y afectiva se refieren a estudiantes de matemáticas. En el caso del formador de profesores, se trata de un proceso de estudio de "didáctica de la matemática", donde los estudiantes son profesores de matemáticas en formación, a los cuáles se refieren las faceta afectivas y cognitiva. En la primera de dichas facetas se tienen en cuenta las creencias y en la segunda los procesos meta-cognitivos del profesor de matemáticas, las cuales deben ser conocidas y tenidas en cuenta por el formador. La formación de los profesores debe tener también en cuenta el conocimiento matemático *per se*, ya que los conocimientos didácticos involucran, así mismo, al contenido matemático.

A continuación, articulamos la noción de competencia con la de conocimiento didáctico – matemático y proponemos un desglose operativo de la competencia general de análisis e intervención didáctica utilizando las herramientas teóricas escritas en la sección 2.

HACIA UN MODELO QUE ARTICULE CONOCIMIENTOS Y COMPETENCIAS DIDÁCTICO-MATEMÁTICAS DEL PROFESOR

Se espera que el profesor de matemáticas esté capacitado para abordar los problemas didácticos básicos que están presentes en la enseñanza. Además, en las prácticas didácticas puestas en juego en la resolución de problemas didácticos también intervienen objetos matemáticos y didácticos específicos (conocimientos) que deben ser conocidos por el profesor.

Para desarrollar estas competencias y conocimientos, en el EOS se aportan determinadas herramientas teóricas y metodológicas, dando lugar a una *competencia general de diseño e intervención didáctica*, propia del profesor de matemáticas; dicha competencia general se compone de cinco sub-competencias, que se describen a continuación.

Competencia de análisis de significados globales

El conocimiento de la noción "sistemas de prácticas matemáticas operativas y discursivas", y sus diversos tipos (Godino et al., 2007), se corresponde con una *competencia de análisis de significados parciales de un objeto matemático y su articulación en un significado global*. El foco de atención ahora es la identificación de las situaciones – problemas que aportan los significados parciales o sentidos para los objetos, o temas matemáticos bajo estudio, y las prácticas operativas y discursivas que se deben poner en juego en su resolución. Esta competencia se requiere cuando el profesor trata de dar respuesta a las cuestiones:

– ¿Cuáles son los significados del objeto matemático (por ejemplo, cuáles son los diferentes significados de la probabilidad)? ¿Cómo se articulan entre sí?

Esta competencia será necesaria en la fase preliminar del proceso de diseño instruccional, donde el objetivo es construir un modelo de referencia que delimite, para el contenido abordado, los tipos de problemas y las prácticas operativas y discursivas requeridas para su resolución (p.e., qué significados de la probabilidad se considerarán). Los profesores deberán ser formados en el uso competente de esta herramienta para que este artefacto pase a ser un instrumento de su equipamiento profesional como docentes idóneos, implicando además la asunción de los presupuestos antropológicos subyacentes hacia las matemáticas.

Competencia de análisis ontosemiótico de prácticas matemáticas

En la resolución de los problemas o tareas matemáticas fijados en la primera fase del diseño, intervienen diferentes tipos objetos y procesos que hacen posible la realización de las prácticas correspondientes, los cuales debería conocer el profesor o tenerlos disponibles en su espacio de trabajo. Además, en las prácticas que se realizan en la resolución de problema emergen nuevos objetos que deben ser reconocidos de manera explícita por el estudiante para progresar en la construcción del conocimiento.

El profesor de matemáticas debe conocer y comprender la idea de configuración de objetos y procesos y usarla de manera competente en los procesos de diseño didáctico. Además, debe tener competencia para identificar dichos objetos y procesos intervinientes en las prácticas matemáticas; esta competencia le permitirá comprender la progresión de los aprendizajes, gestionar los necesarios procesos de institucionalización y evaluar las competencias matemáticas de los alumnos. Debe ser capaz de responder a las cuestiones:

– ¿Cuáles son las configuraciones de objetos y procesos matemáticos implicados en la resolución que son característicos de los diversos significados de los contenidos pretendidos? (configuraciones epistémicas).

– ¿Cuáles son las configuraciones de objetos y procesos puestas en juego por los alumnos en la resolución de los citados problemas? (configuraciones cognitivas).

Se trata de la *competencia de análisis ontosemiótico* de las prácticas matemáticas implicadas en la solución de las tareas instruccionales.

Competencia de análisis y gestión de configuraciones didácticas

El profesor de matemáticas debe conocer y comprender la noción de configuración didáctica (Godino et al., 2006), introducido como una herramienta para el análisis de las interacciones personales y materiales en los procesos de estudio matemático. Es decir, debe conocer los diversos tipos de configuraciones didácticas que se pueden implementar y sus efectos sobre el aprendizaje de los estudiantes, Además, ha de tener competencia para su uso pertinente en la implementación de los diseños instruccionales, la cual se puede describir como *competencia de gestión de configuraciones didácticas.* Debe poder responder al problema docente de cómo enseñar un contenido específico, que en el marco del EOS se concreta del siguiente modo:

– ¿Qué tipos de interacciones entre personas y recursos se implementan en los procesos instruccionales y cuáles son sus consecuencias sobre el aprendizaje?

– ¿Cómo gestionar las interacciones para optimizar el aprendizaje?

Gestionar la secuencia de momentos de exploración, comunicación, validación, institucionalización, sin adoptar posiciones transmisivas o constructivistas ingenuas, es una competencia clave para optimizar los aprendizajes (Godino, Batanero, Contreras y Cañadas, 2015).

Competencia de análisis normativo

Las distintas fases del diseño didáctico están apoyadas y son dependientes de una trama compleja de normas de distinto origen y naturaleza (Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009) y meta-normas (D'Amore, Font y Godino, 2007), cuyo reconocimiento explícito es necesario para poder comprender el desarrollo de los procesos de estudio matemático y encauzarlos hacia niveles óptimos de idoneidad. Por ejemplo, al estudiar las fracciones aparecen normas sobre su escritura o su forma de representación gráfica. También hay normas no matemáticas, como el tiempo dedicado al tema de las fracciones, libro que tiene el alumno o fechas en que se realiza la evaluación.

El profesor de matemáticas debe conocer, comprender y valorar la dimensión normativa y usarla de manera competente, siendo necesario, por tanto, diseñar acciones formativas para un uso instrumental de la misma. Se trata ahora de desarrollar la *competencia de análisis normativo* de los procesos de estudio matemático para responder a las cuestiones:

– ¿Qué normas condicionan el desarrollo de los procesos instruccionales?

– ¿Quién, cómo y cuándo se establecen las normas?

– ¿Cuáles y cómo se pueden cambiar para optimizar el aprendizaje matemático?

Competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica

Las cuestiones profesionales mencionadas anteriormente implican una mirada a nivel microscópico de la práctica docente, esto es, implican realizar análisis pormenorizados de actividades de resolución de problemas o de actividades de enseñanza y aprendizaje puntuales. En el marco del EOS se ha introducido la noción de idoneidad didáctica que orienta el análisis a nivel macroscópico de los procesos de estudio matemático. La idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como el grado en que dicho proceso (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como *idóneo* (óptimo o adecuado) para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (*aprendizaje*) y los significados institucionales pretendidos o implementados (*enseñanza*), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (*entorno*).

Fijado un tema específico en un contexto educativo determinado, por ejemplo, el estudio de las ecuaciones de segundo grado en educación secundaria, la noción de idoneidad didáctica (Godino, 2013) lleva a plantear las cuestiones,

– ¿Cuál es el grado de idoneidad didáctica del proceso de enseñanza – aprendizaje implementado sobre las ecuaciones de segundo grado?

– ¿Qué cambios se deberían introducir en el diseño e implementación del proceso de estudio para incrementar su idoneidad didáctica en un próximo ciclo de experimentación?

Para poder emitir un juicio fundamentado sobre la idoneidad didáctica de un proceso de estudio matemático es imprescindible que se conozcan los resultados asumidos en la investigación didáctica del tema correspondiente. Sería necesario proporcionar a los profesores revisiones sistemáticas de los resultados de las investigaciones e innovaciones realizadas en educación matemática sobre los aspectos epistémicos, ecológicos, cognitivos, afectivos, interaccionales y mediacionales. Esto lleva a plantear una cuestión previa:

– ¿Cuáles son los conocimientos didáctico–matemáticos resultados de las investigaciones e innovaciones previas realizadas sobre la enseñanza - aprendizaje de las ecuaciones de segundo grado?

La noción de idoneidad didáctica se ha introducido como una herramienta de apoyo para la reflexión global sobre la práctica didáctica, su valoración y mejora progresiva. El profesor de matemáticas debe conocer, comprender y valorar esta herramienta y adquirir competencia para su uso pertinente. Se trata de la *competencia de análisis de la idoneidad didáctica* de los procesos de estudio matemáticos.

Competencia general de análisis e intervención didáctica y conocimientos didácticos

Las competencias descritas anteriormente se pueden considerar como sub-competencias de una más amplia, propia del profesor de matemáticas, que es la de análisis e intervención didáctica, como se representa en la Figura 2.

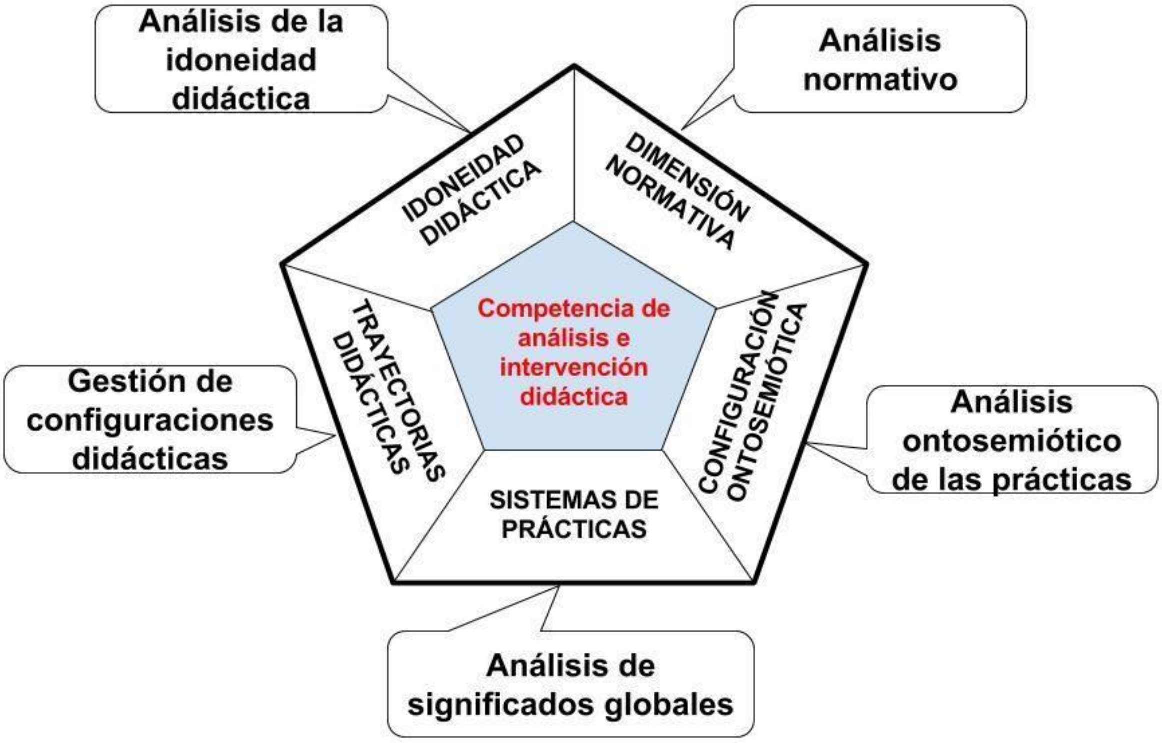


Figura 2. Componentes de la competencia de análisis e intervención didáctica

La articulación de las competencias y conocimientos didácticos se puede hacer de manera natural en el marco del EOS. En efecto, las prácticas matemáticas y didácticas son entendidas como acciones del sujeto orientadas hacia el fin de resolver un problema o realizar una tarea (no son meras conductas o comportamientos). Estas prácticas pueden ser de tipo discursivo - declarativo, indicando la posesión de conocimientos, o de tipo operatorio – procedimental, indicando la posesión de una capacidad o competencia. Ambos tipos de prácticas están imbricados, de manera que la realización eficiente de prácticas operatorias conlleva la puesta en acción de conocimientos declarativos, los cuales se pueden referir a la descripción de los instrumentos usados o a resultados previamente obtenidos que deben ser activados. A su vez la comprensión de los conocimientos declarativos requiere que el sujeto esté enfrentado a las situaciones que proporcionan la razón de ser de tales conocimientos e *implicado* (*disposición* para la acción) en su resolución eficiente.

REFLEXIONES FINALES

En este trabajo, hemos ampliado el modelo de "conocimientos didáctico – matemáticos" descrito en Godino (2009) y Pino-Fan y Godino (2015) incluyendo la noción de competencia didáctica del profesor de matemáticas, mostrando la relación estrecha y cooperativa entre las nociones de conocimiento y competencia. Las facetas, componentes y herramientas teóricas del EOS proporcionan criterios para categorizar tanto los conocimientos como las competencias, así como orientaciones para el diseño de acciones formativas, tanto para la evaluación como para el desarrollo de las mismas.

Aunque el planteamiento que hemos hecho en el artículo es básicamente teórico, destacamos que se vienen realizando numerosas investigaciones experimentales sobre los diversos componentes de este modelo CCDM. Por ejemplo, el trabajo reciente de Seckel y Font (2015) se centra en desarrollar la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica en la formación inicial de profesores de matemáticas; en el trabajo de Godino, Giacomone, Wilhelmi, Blanco y Contreras (2015) se diseñan e implementan acciones formativas para desarrollar la competencia de análisis ontosemiótico de prácticas matemáticas de futuros profesores de matemática de educación secundaria. Asimismo, se vienen aplicando numerosos talleres y seminarios como parte de cursos de máster de formación, como así también diversas publicaciones en actas de congresos. Para un mayor conocimiento sobre el tipo de implementaciones que se están realizando, se pueden consultar los trabajos en la web, *enfoqueontosemiótico.ugr.es*., en el apartado de "formación de profesores".

En consecuencia, el modelo CCDM abre un programa de investigación y desarrollo focalizado en el diseño, experimentación y evaluación de intervenciones formativas que promuevan el desarrollo profesional del profesor de matemáticas, teniendo en cuenta las distintas categorías de conocimientos y competencias didácticas descritas en este trabajo.

Referencias

Ball, D., Lubienski, S. y Mewborn, D. (2002). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (4º ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

D'Amore, B., Font, V. y Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Paradigma, 28*(2), 49-77.

Font, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Unión, 26,* 9-25.

Godino, J. D. (2002). Perspectiva ontosemiótica de la competencia y comprensión matemática. *La matematica e la sua didattica, 4,* 434-450.

Godino J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *20*, 13-31.

Godino J. D. (2013). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 11,* 111-132.

Godino, J. D., Batanero, C., Cañadas, G. R. y Contreras, J. M. (2015, febrero). Linking inquiry and transmission in teaching and learning mathematics. *Trabajo presentado en el Noveno Congreso de Investigación Europea en Educación Matemática (CERME 9),* (pp. 77-86). Praga, República Checa.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 26*(1), 39-88.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias, 27*(1), 59-76.

Godino, J. D., Giacomone, B., Wilhelmi, M. R., Blanco, T. F. y Contreras, A. (2015, noviembre). *Diseño formativo para desarrollar la competencia de análisis epistémico y cognitivo de profesores de matematica.* Trabajo presentado XIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática. Villarrica, Chile. Recuperado de http://villarrica.uc.cl/files/matematica/RI01RI19/RI%2001.pdf

Kilpatrick, J., Swafford, J. y Findell, B. (Eds.) (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* Washington, DC: National Academy Press.

Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2006). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencia y capacidades en el aprendizaje de los escolares. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (p. 454-467). Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses/ Universidad de Zaragoza.

Pino-Fan, L. y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma, 36*(1), 87-109.

Puig, L. (2006). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. En P. Bolea, Mª González y M. Moreno (Eds.). *Investigación en Educación Matemática. Actas del Décimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 107-126). Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses/Universidad de Zaragoza.

Rowland, T., Huckstep, P. y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(3), 255-281.

Scheiner, T. (2015). Lessons we have (not) learned from past and current conceptualizations of mathematics teachers' knowledge. En, K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.* (pp.3248-3253). Prague, Czech Republic.

Schoenfeld, A. y Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of proficiency in teaching mathematics. En D. Tirosh y T. L. Wood (Eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 321-354). Rotterdam: Sense Publishers.

Seckel. M. J. y Font, V. (2015). Competencia de reflexión en la formación inicial de profesores de matemática en Chile. *Praxis Educacional*, *11* (19), 55-75.

Silverman, J. y Thompson, P. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of mathematics teacher education, 11*(6), 499-511.

i. Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación EDU2012-31869, EDU2013- 41141-P y EDU2015-64646-P, Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO).

RELACIÓN ENTRE ESTADO DE CONOCIMIENTO EN FRACCIONES Y PROBLEMAS DESCRIPTIVOS DE FRACCIONES [ix]

Relation between fraction knowledge and descriptive fraction problems

Sanz, María T.[a]; Gómez, Bernardo[a]

[a]Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Valencia

Resumen

En este trabajo se examina la relación existente entre el estado de conocimiento previo en fracciones y los problemas descriptivos en los que a partir de un todo desconocido se quitan fracciones, iguales o desiguales, sucesivamente, pero siempre fracciones de lo que va quedando conociendo el resultado de quitar esas fracciones. Para ello se escoge una muestra de 85 estudiantes de 2º de Grado en Magisterio de la Universidad de Valencia a los que se les pasa un test inicial de conocimiento genérico de fracciones (Nicoloau et al. 2011, 2015) y en el segundo dos problemas descriptivos objeto de estudio. Se realiza un análisis descriptivo e inferencial de los datos y los resultados muestran un porcentaje elevado de alumnos con un Nivel Medio en conocimientos previos y una relación significa entre estos y los problemas objeto de estudio.

Palabras clave: *didáctica, matemáticas, problemas descriptivos, análisis racional, fracciones.*

Abstract

In this paper the relation between the state of prior knowledge on fractions and descriptive problems that from a stranger all fractions, equal or unequal successively removed, but always fraction of what is left knowing examines the result to remove those fractions. For this, a sample of 85 students in 2nd Grade Teachers. They passed an initial test of knowledge fractions (Nicoloau et al. 2011, 2015) and the second test with two descriptive problems under study. A descriptive and inferential data analysis is performed and the results show a huge percentage of students with a High Level in previous knowledge and means a relationship between them and the problems under study.

Keywords: *didactics, mathematics, descriptive problems, rational analysis, fractions*

INTRODUCCIÓN

En la enseñanza de las matemáticas y el aprendizaje, las fracciones es uno de los conceptos más difíciles tanto en niños como maestros (Ball, 1990; Boulet, 1998; Shifter, 1998; Tzur, 1999; Cramer, et al, 2002; Charalambos y Pitta-Pantazi, 2007; Luo, Lo, y Lee, 2011; Tobias, 2012).

En el presente estudio, se analiza la relación entre las habilidades de los estudiantes en fracciones y la resolución de los problemas descriptivos de fracciones. Nicolaou y Pitta-Pantazi (2011, 2015) consideran siete habilidades: (a) el reconocimiento de las fracciones, (b) las definiciones y explicaciones matemáticas sobre las fracciones, (c) argumentaciones y justificaciones acerca de las fracciones, (d) la magnitud relativa de las fracciones, (e) representaciones de fracciones, (f) las conexiones de fracciones con decimales, porcentajes y división, y (g) reflexión durante la solución de problemas de fracciones. Cinco de estas habilidades (b, c, e, f y g) son sugeridas en los estándares NCTM (2000) como importantes para la comprensión matemática de conceptos.

Sanz, María T. y Gómez, Bernardo. (2016) Relación entre Estado de Conocimientos en Fracciones y Problemas Descriptivos de Fracciones. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 283-291l). Málaga: SEIEM.

En Autor y Autor (2015) se realiza un estudio histórico-epistemológico sobre los problemas descriptivos de fracciones. Estos problemas que aparecen en los libros actuales remontan su historia en antiguas culturas matemáticas de Mesopotamia, Egipto, China e India. Los enunciados de estos problemas han evolucionado con el tiempo para adaptarse a los cambios sociales, los desarrollos matemáticos, y las teorías educativas dominantes en cada momento, al tiempo que conserva un contenido común matemático. Estos eran una parte esencial de la enseñanza de las matemáticas y se consideraban la culminación del aprendizaje aritmético. Sin embargo, el cambio en el modelo educativo, hizo disminuir la confianza en el poder educativo de estos problemas, hasta el punto de que muchos de ellos desaparecieron de los libros de texto, o se redujeron a un mero entretenimiento. En la actualidad, las propuestas del plan de estudios han cambiado creyendo en la resolución de problemas como una competencia básica en el desarrollo de la aritmética y pensamiento algebraico.

El objetivo de este trabajo es doble: (a) Examinar el rendimiento de los estudiantes en las habilidades sobre fracciones y en los problemas descriptivos aquí estudiados. (b) Analizar la relación entre ambos.

METODOLOGÍA

Estado del conocimiento previo

Previo a analizar el desempeño de los estudiantes en los problemas que conciernen a este trabajo, los alumnos realizan un Test Inicial. Este test está diseñado para evaluar el conocimiento de los estudiantes en fracciones, es decir, para obtener información de sus conocimientos previos sobre fracciones. Según las respuestas dadas a los alumnos se les clasificará en tres estratos: nivel bajo, nivel medio y nivel alto.

En primer lugar, a la vista de los estudios previos sobre fracciones se determinan las posibles dificultades:

- Sentido de fracción/Interpretación, son los llamados constructos: Operador, Parte-Todo, Cociente, Medida o Razón. En la práctica, los maestros anteponen la fracción como p*arte de un todo*. Lamon (2007) indica que esta interpretación de las fracciones es casi la única que se enseña a tal punto que las fracciones y la *parte de un todo* se han convertido en sinónimos.
- Representación gráfica (Bednarz et al., 2015) donde las partes se consideran como elementos del conjunto. Esto está vinculado a una concepción de la fracción como una comparación entre la parte (un número de piezas) para el conjunto (el número total de piezas en las que la imagen se divide).
- Contexto discreto o contínuo. Cuando se habla de un contexto continuo, para la enseñanza de las fracciones, se relacionan las unidades con el concepto de área o de longitud que corresponden a magnitudes cuya medida está asociada con los números reales; sin embargo cuando se mencionan contextos discretos, se hace referencia a conjuntos con elementos que puedan separarse, es decir a los que se puedan asociar con elementos del conjunto de los números naturales (Ruiz, 2013).
- Identificación de la unidad/todo. El concepto de totalidad como algo que se descompone, recompone y convierte ha sido el fundamento de la relación parte todo y un factor que da lugar y unifica los subconstructos de los números racionales (Kieren, 1976).
- Proceso de resolución (aritmético o algebraico) (Bednarz et al., 2015) se podría pensar que las fracciones se tratan como números, pero no es así cuando se analizan los resultados de los alumnos.
- Reconocer la operación que resuelve el problema.
- Obtención de denominador común (Bednarz et al., 2015) como si se tratara de comparar números naturales.

Nicolaou et al. (2015) presenta un test en el que evalúa siete habilidades en niños de sexto de primaria para el entendimiento de fracciones, de entre ellos en este trabajo se trabaja con,

- Reconocer fracciones equivalentes.
- Definir el concepto de fracción.
- Argumentación y justificación sobre fracciones.
- Reconocer la magnitud de una fracción.
- Representación gráfica.
- Relacionar fracciones con decimales, porcentajes y división.

Problemas Descriptivos "de lo que queda"

El objeto de estudio de este trabajo se centra en el análisis de un determinado tipo de problemas descriptivos, que tienen común un sintagma: "de lo que queda", que permite reconocerlos fácilmente. Este sintagma se refiere a la parte complementaria de una fracción "del todo" (cantidad total desconocida) sobre la que se aplica una nueva fracción, de acuerdo con la secuencia establecida en el enunciado del problema.

En trabajos anteriores (Autor et al. 2016) se presentaron estos problemas en el marco de un estudio histórico epistemológico sobre problemas descriptivos de fracciones.

Aquí el trabajo se centra en problemas en los que a partir de un todo desconocido se quitan fracciones, iguales o desiguales, sucesivamente, pero siempre fracciones de lo que va quedando. Se conoce el resultado de quitar esas fracciones. La elección se debe a que éste se trata del problema representativo de este conjunto. Un ejemplo es el que sigue,

> Un viajero de peregrinación da 1⁄2 de su dinero en Allahabad, 2⁄9 del resto en Benarés, 1⁄4 de lo que resta en peajes y 6⁄10 de lo que le queda en Patna. Después de hacerlo, le quedan 63 monedas de oro y regresa a casa. Dime la cantidad inicial de dinero. (Lilavati, 1150, p. 59)

Autor y Autor (2015) presentan la estructura genérica de este tipo de problemas, así como las componentes críticas. Se el. Se denominan componentes críticas a los elementos o información del enunciado cuya identificación hacen posible la resolución del problema.

Participantes, instrumentos y proceso de estudio

Los participantes en el presente estudio son 85 estudiantes de 2º Grado de Magisterio (rango de edad 19-35 años).

El cuestionario inicial comprende 10 tareas para medir las seis habilidades presentadas anteriormente.

En la Tabla 1 se presentan las tareas (columna derecha) así como la habilidad medida para cada una de las tareas (columna izquierda).

Tabla 9. Test Inicial

Constructos. Fracción como: operador, parte-todo, cociente, medida o razón.	Define FRACCIÓN de todas las formas que conozcas.
Representación Gráfica y Contexto. Por la literatura existente se conoce que a los estudiantes les cuesta reconocer la relación parte-todo en el contexto discreto.	a) Sandra tiene una cesta con manzanas y vende $\frac{1}{2}$ de las manzanas, Luis $\frac{3}{8}$ de las manzanas de la misma cesta. Representa gráficamente qué cantidad han vendido Sandra y Luis por separado, y qué cantidad han vendido en total. b) Sandra tiene una tarta y se come la mitad y Luis se come los $\frac{3}{8}$. Representa gráficamente qué cantidad han comido Sandra y Luis por separado, y qué cantidad han comido en total.
Operatoria (observar si la operatoria con fracciones es correcta (saber cada una de las operaciones así como obtención de denominador común) o existe carencia de normas de operatoria)	Calcula: a) $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{4}\div\frac{3}{4}$ d) $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(\frac{5}{2}-\frac{3}{2})$ e) $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}(\frac{5}{2}-\frac{3}{7})$

Resolución de problemas (en este caso no se obliga a realizar resolución gráfica, pero se analiza qué proceso de resolución (aritmético o algebraico)). Prob.1 En la primera pregunta se busca el conocimiento sobre magnitud de una fración. Prob.2 Deben de identificar la operación, y se puede detectar el concepto de proporción	**Prob.1** Sandra tiene una cesta con manzanas y vende $\frac{1}{2}$ de las manzanas, Luis $\frac{3}{8}$ de las manzanas de la misma cesta. ¿Quién vende más manzanas? ¿Qué cantidad han vendido en total? ¿Qué cantidad de manzanas queda en la cesta? Si en la cesta quedan 6 manzanas, ¿cuántas había al inicio? **Prob.2** Para intentar preparar un pastel de manzanas necesitamos 1/10 kg de manzanas. Si yo tengo 4/15 kg de manzanas, ¿cuántos pasteles podré preparar?

Tras delimitar el cuestionario se determina la clasificación del alumno en los tres estratos comentados anteriormente. Para ello cada habilidad es analizada y se determina en ella los niveles.

Constructos. Queda delimitado como Nivel Bajo/Medio la representación gráfica y mediante ejemplos. Y el Nivel Alto queda referido a la Verbalización / Detalle: Uso de palabras como Numerador, Denominador, Racional, Parte, Todo. (Figura 1)

Figura 9. Niveles en Constructos

Representación Gráfica y Contexto. Nivel Bajo es el que viene con la representación única del problema de la tarta (contínuo). Nivel Alto incluye la representación del problema de las manzanas (discreto) (Figura 2)

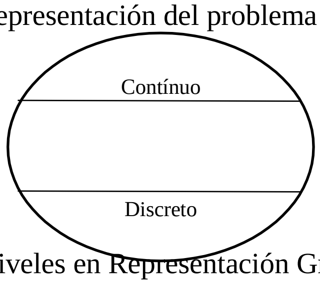


Figura 2. Niveles en Representación Gráfica y Contexto

Operatoria. En este caso se hace uso de una media ponderada en la que entrarán los conceptos: Suma, resta, Multiplicación, División, Mínimo Común Múltiplo, Orden de las operaciones. Cada concepto utilizado se le dará el valor de 1 y los pesos para cada ítem se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2. Pesos ítems operatoria

ITEM	*Peso*
Suma	1
Resta	1
Multiplicación	2
División	2
Mínimo Común Múltiplo	2
Orden de las operaciones	3

El resultado obtenido permite clasificar al alumno en los tres niveles considerados, siguiendo la siguiente regla: se clasificará en Bajo a aquellos que obtengan un resultado menor a 0.60, en Alto a aquellos que obtengan un 1, el resto se considerarán alumnos de nivel Medio.

Resolución de problemas. Se procede de forma análoga a lo realizado en operatoria, y los ítems considerados son Relacionar fracciones, Suma, Resta, Regla de Tres, Reconocer Operación. Los pesos en este caso se muestran en la Tabla 3

Tabla 3. Pesos ítems Resolución de Problemas

ITEM	*Peso*
Relacionar fracciones	1
Suma	1
Resta	1
Regla de Tres	2
Reconocer Operación	3

La clasificación de los alumnos en niveles sigue el mismo criterio que en el apartado de Operatoria.

El segundo cuestionario está compuesto por dos problemas objeto de estudio, en dos contextos distintos (ver Tabla 4).

Tabla 4. Cuestionario Problemas Descriptivos

1. Sea una cesta llena de manzanas. Van a ser repartidas. Se da un tercio del contenido. Tras esto se reparte un cuarto de lo que queda. Si en el cesto quedan 10 manzanas, ¿cuántas manzanas había al inicio? ¿Cuántas se ha quedado cada uno?
2. Sea una tarta de cumpleaños de la que me como un sexto, llega otro amigo y se come un cuarto de lo que queda. Un tercer amigo llega y se come un quinto de lo que quedaba. Tras esto se pesa lo queda y resulta que tenemos 200g, ¿cuánto pesaba la tarta al inicio? ¿Cuánto se ha comido cada uno?

Se determina el análisis de la resolución de los problemas según los siguientes criterios.

El primer paso será delimitar el Método de Resolución, aritmético, algebraico o ambos, ya que se les pidió a los alumnos que debían realizar los problemas por ambos métodos de resolución.

En segundo lugar analizar la traducción a lenguaje simbólico del sintagma “de lo que queda”.

En tercer lugar la identificación de la relación entre cantidades. Aquellos que optan por el método aritmético la regla de tres y los que resuelven por método algebraico plantear la *ecuación*.

Por último, si el resultado obtenido es el correcto o no.

RESULTADOS

En primer lugar se realiza un análisis descriptivo de las variables relacionadas con cada uno de los dos cuestionarios. (Ver detalle en Tabla 5 y 6)

Tabla 5. Porcentajes de los ítems del Test Inicial (%)

Nivel	*Constructos*	*Rep. Graf*	*Operatoria*	*Resolución de Problemas*
Alto	39.5	-	48.8	60.5
Medio	44.2	-	44.2	18.5
Bajo	14.0	100	7.0	21.0

Tabla 6. Porcentajes de los ítems de los Problemas 1 y 2 (%)

	Problema 1	*Problema 2*
Método de Resolución		
Algebraico	20.9	27.9
Aritmético	65.1	62.8
Ambos	11.6	7
Apoyo Gráfico		
Si	53.5	46.5
No	44.2	51.2
Sintagma “de lo que queda”		
Si	27.9	20.9
No	69.8	76.7

Relación entre cantidades		
Si	51.2	41.9
No	46.5	55.8
Resuelve		
Si	30.2	9.3
No	67.4	88.4

En rasgos generales se puede decir que el 44.2% de los estudiantes tienen un Nivel Medio en Operatoria y Constructos y un 60.5% de ellos un Nivel Alto en Resolución de Problemas, lo que contrasta con el 67.4% y el 88.4% de los estudiantes que no han sabido resolver el Problema 1 y 2 respectivamente. Esto lleva a pensar en que estos problemas tienen alguna complejidad didáctica que dificulta su resolución. Notar también que el Problema 1 es resuelto por el 30.2% y el Problema 2 por el 9.3%, sabiendo que la única diferencia entre uno y otro era la variable utilizada, discreta (P1) o continua (P2), lo que hace pensar que no siempre el contexto continuo es más sencillo que el discreto para la relación parte todo, lo que no sigue lo que algunos autores hablan respecto a los contextos discretos y contínuos (Ruiz, 2013).

Después del estudio descriptivo se ha estudiado que ítems evaluados en los Problemas 1 y 2 poseen relación con la Resolución final de los mismos, para ello se realiza un test Chi-Square de Pearson que mida la dependencia o independencia entre ambos con un nivel de significación del 5% (ver Tabla 7).

Tabla 7. Análisis de dependencia. Prueba Chi-Square (p-valor)

	Resuelve 1	*Resuelve 2*
Método de Resolución	0.001	0.000
Apoyo Gráfico	0.403	0.002
Sintagma "de lo que queda"	0.000	0.000
Relación entre cantidades	0.000	0.001

Se observa que existe una relación de dependencia en todos ellos ya que el p-valor obtenido es <0.05, a excepción del Apoyo gráfico con el Problema 1. Las hipótesis previas que se tenían eran que la elección del método de resolución y que la traducción al lenguaje simbólico del sintagma "de lo que queda" eran dos variables estrechamente relacionadas con la resolución correcta de estos problemas, y esto queda confirmado con los resultados obtenidos.

Por último, se ha buscado si hay una relación estadísticamente significativa con la resolución o no de los problemas objeto de estudio y los ítems del test inicial también con una prueba Chi-Square en las mismas condiciones que anteriormente (Tabla 8)

Tabla 8. Análisis de dependencia Test Inicial y Problema 1. Prueba Chi-Square (p-valor)

	Constructos	*Rep. Graf*	*Operatoria*	*Resolución de Problemas*
Método de Resolución				
Problema 1	0.007	-	0.166	0.067
Problema 2	0.001	-	0.076	0.178
Apoyo Gráfico				
Problema 1	0.073	-	0.036	0.611
Problema 2	0.589	-	0.028	0.060
Sintagma "de lo que queda"				
Problema 1	0.045	-	0.087	**0.004**
Problema 2	0.013	-	0.466	**0.018**
Relación entre cantidades				
Problema 1	0.035	-	0.015	0.095
Problema 2	0.000	-	0.087	0.233
Resolución				
Problema 1	0.557	-	0.190	0.006
Problema 2	0.605	-	0.709	0.076

Con estos datos se observa que existe relación significativa con los Constructos y los ítems del Método de Resolución, Sintagma de lo que queda y la Relación entre cantidades. En cuanto a la operatoria, únicamente existe relación con el Apoyo Gráfico y la Relación entre cantidades del Problema 1. Por último, se observa que la Resolución de Problemas tiene una relación significativa con el Sintagma de lo que queda y también con la Resolución del Problema 1.

Estos resultados permiten concluir (utilizando la Tabla 7 y la Tabla 8) que el Sintagma "de lo que queda" es la variable clave en este tipo de problemas y es la que dificulta la resolución de los mismos. Por tanto la investigación futura debería centrar su esfuerzo en determinar en qué momento se produce un corte, ya que estos problemas son explicados en Educación Secundaria y por tanto deberían ser resueltos por todos los alumnos incluidos en el estudio.

CONCLUSIÓN

En este trabajo se presenta un estudio sobre la relación entre las habilidades en fracciones de un alumno y un problema descriptivo de fracciones donde se van quitando partes de lo que queda a un todo desconocido y al final se conoce la cantidad tras el proceso.

Para medir las habilidades se ha construido un test inicial siguiendo a Nicoloau et al. (2015). En cuanto al cuestionario con los problemas objeto de estudio, se ha realizado tras un análisis histórico-epistemológico (Autor y Autor, 2015) y un análisis racional (Autor y Autor, 2015).

La muestra que participa en el estudio es de 85 alumnos procedentes de 2º Grado de Magisterio de la Universidad de Valencia. Tras realizar el análisis descriptivo e inferencial se confirma que existe una relación significativa entre las habilidades previas del alumnado y los problemas objeto de estudio de este trabajo. En particular se obtiene que la variable principal para obtener la resolución correcta de estos problemas es la traducción al lenguaje simbólico del Sintagma "de lo que queda".

Toda esta información puede ser útil para la enseñanza ya que los problemas adquieren protagonismo como objeto de estudio organizado y no como subproducto de otros aprendizajes, como ocurre en una enseñanza tradicional que presenta la resolución de problemas al modo de "ejercicio y práctica" para consolidar o aplicar los conocimientos adquiridos previamente.

Además, también puede ser útil para el investigador en pensamiento numérico y algebraico porque aporta un modelo de análisis histórico-epistemológico para el estudio de los problemas clásicos, no como piezas sueltas de un contenido matemático sino en relación con sus raíces y evolución.

Ahora el reto de los profesores e investigadores es mantener viva esa riqueza de conocimientos, evitar que caiga en el olvido, y adaptarlo a la enseñanza y a las características de los estudiantes, atendiendo al objetivo curricular que considera la resolución de problemas como una competencia básica.

Por último marcar que estos resultados notan importantes dificultades en los futuros maestros, referido a estos problemas. En futuros trabajos se va a proceder a realizar el mismo estudio en futuros profesores de matemáticas de Educación Secundaria, debido a que es allí dónde el currículum marca la enseñanza de los mismos. Con esto intentar observar dónde está el problema en la enseñanza, dado que ambos (futuros maestros y profesores) han recibido enseñanza reglada en sus trayectorias escolares (primaria y educación secundaria).

Referencias

Ball, D.L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(2), 132-144.

Bednarz, N., & Proulx, J. (2015). The (relativity of the) whole as a fundamental dimension in the conceptualization of fraction. Article presented at *CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.*

Boulet, G. (1998). Didactical implications of children's difficulties in learning the fraction concept. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *20*(4), 19-34.

Charalambos, Y.C., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students'understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, *64*, 293-316.

Cramer, K.A., Post, T.R., & delMas, R.C. (2002). Initial fraction learning by fourth- and fifth-grade students: A comparison of the effects of using Commercial Curricula with the effects of using the Rational Number Project. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*, 111–144.

Autor et al. (2016-In press).

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. En R.

Lesh (Ed.), *Number and measurement* (pp. 101-144). Columbus: ERIC-SMEAC.
Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. *In F. K. Lester (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 629-668). Charlotte, NC: Information Age Publishing.*
Lilavati (1150/2006). Lilavati Of Bhaskaracarya Treatise of Mathematics of Vedic Tradition. *En Patwardhan, K. S., Naimpally, S. A. y Singh, Dehli: Motilal Banarsldass Publisher Private Limited. 2ª ed*. (1ª ed. 2001).
Luo, F., Lo, J.-J., & Leu, Y.-C. (2011). Fundamental fraction knowledge of prospective elementary teachers: A cross-national study in the United States and Taiwan. *School Science and Mathematics*, *111*(4), 164–177.
Nicolaou, A., & Pitta-Pantazi, D. (2011). Factors that constitute understanding a mathematical concept at the elementary school: Fractions as the concept of reference. Article presented at *the 4th Conference of the Union of Greek Researchers in Mathematics Education* (pp. 351–361).

Nicolaou, A., & Pitta-Pantazi, D. (2015). The Impact of a teaching intervention on sixth grade student's fraction understanding and their performance in seven abilities that constitute fraction understanding. Article presented *at CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 309–315).*
Ruiz, C.A. (2013). La fracción como parte-todo y como cociente: Propuesta Didáctica para el Colegio Los Alpes IED. *Tesina presentada en Universidad Nacional de Colombia. Bogotá.*
Autor y Autor (2015).
Schifter, D. (1998). Learning mathematics for teaching: From a teacher' seminar to the classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *1*(1), 55-87.
Tobias, J.M. (2012). Prospective elementary teachers' development of fraction language for defining the whole. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(2), 85-103.
Tzur, R. (1999). An integrated study of children's construction of improper fractions and the teacher's role in promoting that learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(4), 390-416.

i Este trabajo se ha realizado en el marco de los proyectos de investigación del Ministerio de Ciencia e Innovación: EDU2012-35638 y EDU2015-69731-R (MINECO/FEDER)

RESOLUCIÓN POR SKYPE DE UNA TAREA DE VISUALIZACIÓN COOPERATIVA POR UNA PAREJA DE ESTUDIANTES DE TALENTO

A talented pair of students solving via Skype a cooperative task on visualization

Rafael Ramírez[a], María José Beltrán-Meneu[b], Adela Jaime[b] y Ángel Gutiérrez[b]

[a] Dpto. de Didáctica de la Matemática, Univ. de Granada,[b] Dpto. de Didáctica de la Matemática, Univ. de Valencia

Resumen

En este trabajo analizamos la transmisión de información entre dos estudiantes de alta capacidad matemática mientras resuelven, a través de videoconferencia, una tarea cooperativa de visualización. Las categorías que más afloraron en el análisis del discurso fueron informar, demandar información, sugerir, parafrasear y confirmar. Los indicadores que más manifestaron fueron validación, ampliación y paráfrasis. Los estudiantes manifestaron características del talento matemático como un alto compromiso con la tarea, a pesar de su dificultad, y buena capacidad para organizar los datos y para desarrollar estrategias eficientes de resolución.

Palabras clave: *estudiantes de altas capacidades matemáticas, trabajo cooperativo, análisis discursivo, visualización, videoconferencia.*

Abstract

We analyze the transmission of information between two mathematically talented students while solving, via videoconference, a cooperative task of visualization. The categories that emerged in our analysis of the discourse were inform, demand information, suggest, paraphrasing, and confirm. The more frequent indicators were validation, expansion and paraphrase. Students expressed characteristics of mathematical talent such as a high commitment to the task, despite its difficulty, and good ability to organize data and to develop efficient strategies of resolution.

Keywords: *mathematically talented students, cooperative work, discursive analysis, visualization, videoconference.*

INTRODUCCIÓN

Sigue siendo una línea abierta de investigación en el ámbito de la atención a estudiantes de altas capacidades cómo planificar actuaciones para subgrupos especiales que aporten evidencias del desarrollo de sus habilidades (Davis, Rimm y Siegle, 2014; Gallaguer, 2003, 2010). En particular, los alumnos con talento matemático son considerados alumnos de necesidades educativas especiales (Ministerio de Educación y Cultura, 2000; NCTM, 2000).

El trabajo cooperativo con otros estudiantes de alta capacidad ha resultado ser una estrategia educativa beneficiosa (Davis, Rimm y Siegel, 2014), si bien se necesitan investigaciones específicas que profundicen en los efectos de dichos agrupamientos (Robinson, 2003).

Para realizar estas tareas cooperativas, una primera dificultad es encontrar en el entorno escolar de un estudiante otros compañeros que, además de talento matemático, compartan un interés similar. Y más difícil todavía es ajustar los horarios. En este sentido, el uso de las nuevas tecnologías, en particular plataformas virtuales que permitan videoconferencias, como es el caso de Skype, pueden aportar un medio de comunicación adecuado para salvar las dificultades señaladas.

Ramírez, R., Beltrán-Meneu, M. J., Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2016). Resolución por skype de una tarea de visualización cooperativa por una pareja de estudiantes de talentoC. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 292-301). Málaga: SEIEM.

En este texto analizamos la resolución de una tarea cooperativa de visualización por dos estudiantes con talento matemático, conectados a través de videoconferencia, y apoyados por un tutor experto que intervenía sólo cuando lo consideraba imprescindible. Para facilitar la interacción, cada estudiante conoce unas pistas diferentes y complementarias a las de su compañero. Los objetivos de esta investigación son:

- Analizar el proceso discursivo de transmisión de información entre dos estudiantes con talento matemático durante la resolución de un problema de visualización de tipo cooperativo a través de videoconferencia.

- Localizar los indicadores discursivos que se manifiestan al intercambiar información sobre los datos y el proceso de resolución del problema y detectar las características de talento matemático exteriorizadas por los estudiantes en este contexto.

Ng y Nicholas (2007) presentan un marco conceptual para el aprendizaje online de estudiantes de alta capacidad, incluyendo características específicas de estos alumnos y adaptando las teorías de aprendizaje de Mayes y Garrison, Anderson y Archer. Este modelo enfatiza la interacción social como elemento de aprendizaje y da un papel importante al discurso mediante el cual los estudiantes comparten sus razonamientos al resolver problemas. Es precisamente en el diseño de estas tareas donde se manifiesta la necesidad de particularizar el modelo para el caso del talento matemático.

Son muchas las habilidades a las que los investigadores hacen referencia cuando observan las resoluciones de problemas por parte de estudiantes de talento matemático; algunas de ellas, sugeridas por Greenes (1981), Miller (1990) y/o Freiman (2006) son las habilidades para organizar y manipular hábilmente los datos, generalizar, trabajar los problemas de una forma flexible, transferir con destreza los conocimientos adquiridos a una nueva situación, desarrollar estrategias eficientes, cambiar de una estrategia a otra, buscar patrones y relaciones, y para mantener bajo control los problemas y su resolución.

Utilizar un problema de visualización en esta experiencia es adecuado porque juega un papel importante en las tareas de matematización (Arcavi, 2003; Guillén, 2010) y porque la exploración visual puede mejorar la resolución de problemas (Ozdemir et al., 2012) habiéndose encontrado en investigaciones recientes evidencias significativas de relación entre la habilidad de percepción visual y la habilidad matemática (Rabab´h y Veloo, 2015; Rivera, 2011). Sin embargo, numerosos autores han destacado la visualización como el núcleo de gran parte de la dificultad de aprendizaje de la geometría (Guillén, 2010) y, en relación con el talento matemático, diferentes estudios han mostrado la preferencia de estos estudiantes en general por los métodos no visuales (Presmeg, 1986) y las dificultades que manifiestan al comunicar argumentaciones visuales (Ramírez, 2012).

En relación a las características de la interacción en el trabajo cooperativo, aunque no contextualizados en alumnos con talento ni en tareas online, destacamos el trabajo de Cobo y Fortuny (2000), que analiza la naturaleza y la calidad de las interacciones que tienen lugar en la resolución de problemas entre parejas de niños de 16-17 años, el de Soller (2001), para identificar indicadores para que el aprendizaje sea efectivo, y el de Dekker, Elshout-Mohr y Wood (2006), donde se analiza la autogestión del trabajo cooperativo.

Aunque la videoconferencia como herramienta de aprendizaje ha sido poco utilizada en primaria y secundaria (Chua, 2006), algunos estudios han mostrado cómo estudiantes utilizando este medio mejoran sus habilidades de comunicación matemática (Gage, 2003), aumentan su motivación y mejoran su rendimiento en resolución de problemas (Martin, 2005) y han evaluado positivamente el uso de plataformas como Skype para el trabajo cooperativo (Alagic y Alagic, 2013).

En las actas de los simposios de la SEIEM, Gutiérrez y Jaime (2013) señalan que son escasas las presentaciones sobre estudiantes de altas capacidades matemáticas. En la Tabla 1 destacamos las comunicaciones relacionadas con el talento matemático, la visualización y otros trabajos que analizan aspectos del discurso utilizado en el trabajo en grupo o en entornos online.

De la revisión bibliográfica se concluye que es pertinente indagar sobre la interacción entre estudiantes con talento matemático que resuelven online y de manera cooperativa problemas, en particular problemas de visualización.

Tabla 1. Trabajos presentados en la SEIEM relacionados con este estudio

Visualización	Talento	Trabajo en grupo	Online
Revisión de investigaciones (Fernández, 2013).	Revisión de investigaciones (Castro, 2008).	Chico y Planas (2011).	Roig, Llinares y Penalva (2010).
	Unidad de enseñanza (Reyes-Santander y Karg, 2009).	Rosich, Rodríguez y García (2014).	
	Estrategias de resolución (Gutiérrez y Jaime, 2013).	Montoro y Gil (2015)	
Habilidades de visualización (Ramírez, Flores y Castro, 2010).			

MARCO TEÓRICO

La comunicación entre los participantes en el experimento (estudiantes y tutor experto) y las intervenciones de emisor y receptor son codificadas según la *Collaborative Learning Conversation Skill Taxonomy (CLCST)* de Soller (2001). Esta taxonomía ha sido usada para clasificar las habilidades de conversación en la resolución de problemas colaborativos de forma online en tiempo real. Para las interacciones emisor-receptor utilizamos los cuatro indicadores discursivos de Chico y Planas (2011): Refutación, validación, cuestionamiento y paráfrasis. La *refutación* se pone de manifiesto cuando una parte no acepta lo que se ha dicho, pudiendo rebatir con razones. La *validación* se presenta cuando una parte aprueba lo que se ha dicho, pudiendo afirmar con razones. El *cuestionamiento* surge cuando una parte expresa dudas o directamente pide razones en relación a lo que se ha dicho. La *paráfrasis* aparece cuando una parte repite o reformula lo que ha dicho el otro, pudiendo generar refutación, validación y/o cuestionamiento. También consideran que en un contenido matemático hay *ampliación* cuando una parte amplía o completa lo que ha dicho la otra parte, pudiendo adjuntar/complementar con razones. Estos indicadores, mirados en su conjunto, señalan implicación en la tarea matemática e intención argumentativa, están influidos por los respectivos significados habituales en situaciones de habla y, a su vez, inspirados en los intercambios de Cobo y Fortuny (2000).

Chico y Planas (2011) indican que existe una relación entre el uso de ciertos indicadores discursivos y los avances en la intención argumentativa de las estudiantes. La mayoría de intercambios con intención argumentativa vienen precedidos o acompañados por refutación y cuestionamiento y, en menor grado, validación.

METODOLOGÍA

Para este trabajo seleccionamos a dos estudiantes de 1º de ESO de Valencia y Granada, con alta capacidad matemática y que no se conocían previamente. La conexión entre los estudiantes, que nombraremos E1 y E2, se realizó a través de Skype. Cada estudiante estaba en su ciudad, acompañado por alguno de los investigadores.

Como tarea cooperativa se propuso resolver un problema de visualización del que cada estudiante desconocía la información de la que disponía el otro estudiante.

Antes de proponer la tarea, se presentó un ejemplo de cómo pasar de la representación isométrica de un módulo multicubo, situado en una cuadrícula, a la representación de sus vistas ortogonales: norte, sur, este y oeste. También se les mostró su representación en planta. A continuación, los dos estudiantes recibieron una hoja de instrucciones y una cuadrícula de 9x7 cuadrados con los puntos cardinales situados en los lados de la misma y casillas en las calles sur y oeste, para indicar su numeración. También se proporcionó a cada estudiante un juego de cubos Multilink de colores. Se proponen dos actividades, en la primera tienen que nombrar las calles de la cuadrícula y en la segunda tienen que utilizar dicha cuadrícula para colocar sobre ella unos edificios.

Para poder realizar la actividad cada estudiante dispone de unas pistas, recogidas en la Tabla 2, y de las imágenes de dos vistas (Figuras 1 y 2). Se les informa que pueden compartir todas las pistas pero que no pueden enseñarse por la cámara las vistas de los edificios que tienen cada uno.

Tabla 2. Pistas dadas a los estudiantes

	Jugador E1	Jugador E2
Nombre de las calles	Dirección norte-sur: números arábigos del 1 al 9, de oeste a este.	Dirección oeste-este: números romanos I-VII, de sur a norte.
Cantidad de edificios	Hay edificios de cuatro colores. Uno amarillo, dos verdes y tres rojos.	Hay 9 edificios en total.
Número de plantas	A igual altura, mismo color.	Los azules tienen tres plantas.
Perspectivas/vistas	Sur y oeste.	Norte y Este.
Normas de ubicación	Coinciden con cuadrados y no se tocan en ningún punto	-----------------------

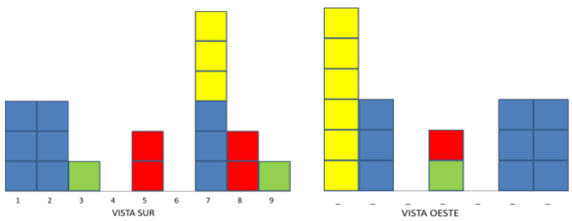


Figura 1: Vistas estudiante E1 (sur y oeste)

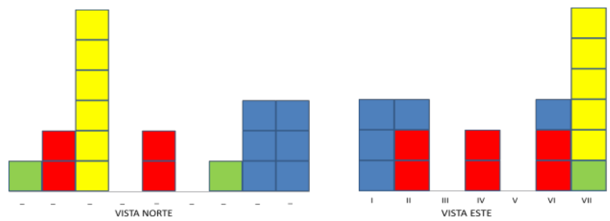


Figura 2: Vistas estudiante E2 (norte y este)

La resolución de la tarea requiere poner en juego varias de las características del talento matemático señaladas. Para poder compartir la información visual de la que disponen, deben organizar y manipular los datos, tanto los propios como los aportados por el compañero. Al enfrentarse a un problema novedoso, deben transferir con destreza sus conocimientos a esta nueva situación y, especialmente, deben desarrollar una estrategia eficiente en la resolución.

Hay elementos que aportan complejidad a la tarea. El problema no tiene solución única, ya que los edificios azules admiten varias posiciones posibles. Una pista importante, que los edificios no puedan tocarse, solo es conocida por uno de los estudiantes. Además la distribución de dos de los edificios rojos en una misma calle y el hecho de no ser perceptibles desde varias de las vistas, requiere una estrategia de colocación teniendo en cuenta otros edificios y todas las pistas del compañero. La recogida de información se efectuó mediante la grabación en video de cada alumno, así como del escritorio del ordenador que utilizó cada uno. Para el análisis de las interacciones de los estudiantes se utilizaron la taxonomía de Soller (2001) y los indicadores discursivos de Chico y Planas (2011), ya detallados.

ANÁLISIS DE LA INTERACCIÓN DE LOS ESTUDIANTES

La variable de estudio es la interacción llevada a cabo por la pareja de estudiantes en la transmisión y recepción de los datos del problema y el proceso de resolución. La dificultad de transmisión de información observada en algunos momentos, puso de manifiesto la importancia de considerar el papel del experto como guía en este tipo de tareas. Aunque los alumnos no solicitaron su ayuda en ningún momento, las intervenciones del experto fueron fundamentales para desbloquear situaciones y permitir el avance de la actividad. Una relación de las mismas se incluye en la Tabla 5.

Procedemos ahora a analizar el discurso de los estudiantes. Como se indica en las Tablas 3 y 4, hemos dividido el análisis en dos fases diferenciadas, según el sistema de referencia empleado para comunicar la situación de los edificios: sistema de referencia no unificado (30 primeros minutos de la tarea) o sistema unificado no estándar (30 minutos siguientes), y sistema de referencia estándar (30 últimos minutos). Las interacciones de los estudiantes las hemos clasificado según el tipo de indicador discursivo de Chico y Planas (2011): refutación (R), validación (V), cuestionamiento (C), paráfrasis (P) y ampliación (A), y en función del tipo de intervención del emisor y del receptor, según la taxonomía de Soller (2001). Indicamos también en las tablas las acciones producidas como resultado de cada interacción.

La Tabla 3 resume las intervenciones durante la primera fase del diálogo. En esta fase, los alumnos empezaron utilizando un sistema de referencia que les permitía leer de forma ascendente la numeración desde cada una de sus vistas. Al ser distinto el sistema de referencia utilizado por cada estudiante, hubo problemas en la comunicación de los datos. La comunicación era efectiva cuando tanto el emisor como el receptor indicaban el sistema de referencia que estaban utilizando:

E2: Tengo el 1 a la derecha del todo. O sea, las calles del norte van de derecha a izquierda. No, de izquierda a derecha. ¿Vale?

E1: Y en el oeste pasa lo mismo. En el oeste van de arriba abajo, y en el este de abajo a arriba.

E2: Claro, sí […] Entonces, yo tengo el amarillo en el 7 romano desde el este, o sea, tu 1 romano, y en el 7 de los normales.

E1: Sí, en mi 7 normal.

En cambio, cuando no concretaban respecto de qué sistema de referencia tomaban las coordenadas, cometían errores en la situación de los edificios. Tras darse cuenta por sí mismos de que esta estrategia comunicativa era poco operativa, decidieron unificar el sistema de referencia:

E2: Pero… un momento, creo que mejor que estar diciendo tu norte, mi sur, no sé qué, sería mejor que pusiésemos números comunes, porque, si no, va a ser un lío.

Tabla 3. Interacciones de la Fase 1

Fase	Emisor	Receptor	I. D.	Acción producida
Descripción de vistas sin unificación del sistema de referencia o con sistema unificado no estándar	Informa/pregunta por coordenadas.	Repite e informa.	P A	Situación de cubos en la cuadrícula, con errores.
	Demanda confirmación de coordenadas ajenas.	Confirma posiciones.	V	
	Sugiere posiciones de edificios.	Confirma.	V	
	E2 duda, sugiere recapitular.	E1 acepta.	C V	Recapitulación. Clarificación sistema de numeración. Se muestra situación de edificios por pantalla.
	E2 sugiere unificar el sistema de referencia.	E1 acepta.	V	Acuerdan el origen. No adaptan las vistas al nuevo sistema de referencia.

Tras probar con distintas opciones, llegaron a un acuerdo sobre dónde situar un origen de coordenadas común, pero no lo hicieron en la posición estándar de la primera actividad. En esta etapa transmitieron información errónea por no unificar la nueva numeración de la cuadrícula con la notación de las vistas. Esto provocó fallos tanto a la hora de emitir como de recibir la información. Como eran conscientes de que algo no cuadraba, decidieron comunicar la situación de algunos edificios mostrándolos por pantalla, pasando de un lenguaje oral a un lenguaje visual, inequívoco. En este punto tuvo que intervenir el experto para recomendar la numeración de las calles de la cuadrícula obtenida en la primera actividad. También tuvo que intervenir para que los alumnos tuvieran en cuenta la pista que indicaba que los edificios no podían tocarse por ningún punto.

Durante esta fase se produjeron las siguientes intervenciones por parte del emisor (ver Tabla 3): para informar o pedir información sobre las coordenadas de los edificios, para aventurar coordenadas de vistas ajenas (demandar confirmación), para sugerir posiciones de edificios, para expresar duda y pedir una recapitulación, y para sugerir la unificación de un sistema de referencia. Las respuestas por parte del receptor fueron: repetir, confirmar o estar de acuerdo con la información emitida, informar, ampliar la información o aceptar sugerencias.

La siguiente fase se inició tras la intervención del experto, que sugirió situar el origen de coordenadas en el lugar estándar. De nuevo, los alumnos modificaron la numeración de la cuadrícula pero no la de las vistas. Esto provocó incoherencias que se reflejaron en la transmisión de información incorrecta por cada estudiante. Las intervenciones del emisor en este punto (Tabla 4) fueron para informar sobre coordenadas, para aventurar coordenadas de vistas ajenas (demandar confirmación), para demandar información y para sugerir posiciones de edificios. Las respuestas del receptor fueron informar, asentir, dudar o cuestionar, pues en ocasiones la información interpretada no cuadraba con sus vistas.

La reacción del receptor en estos puntos fue sugerir una recapitulación aunque, debido a la incoherencia en la notación, no sirvió para solucionar el conflicto. Esto se tradujo en una nueva intervención del experto, que propuso la numeración correcta de las vistas.

Tabla 4. Interacciones de la Fase 2

Fase	Emisor	Receptor	I. D.	Acción producida
Descripción de vistas con sistema de referencia estándar	Informa sobre coordenadas de sus vistas (erróneamente).	Acepta, cuestiona, duda.	V C	Situación de cubos Multilink.
	Demanda confirmación de coordenadas ajenas.	Confirma, niega.	V R	
	Pregunta por coordenadas de edificios.	Informa.	V	
	Sugiere posiciones.	Acepta, cuestiona.	V C	
	Duda, sugiere recapitular.	Acepta.	C V	Recapitulación.
	Asegura posiciones de edificios que se tocan en un punto.	Cuestiona pista.	V C	Sugieren pasar a otra parte.
	Informa correctamente, sugiere y justifica.	Asiente y confirma.	V P	Situación de cubos Multilink.

A partir de este momento, la transmisión de las coordenadas por parte de los estudiantes fue correcta, así como la recepción. El problema mayor se produjo en la colocación de los edificios azules situados en las calles 1 y 2. En el siguiente diálogo vemos cómo los alumnos afirman erróneamente, con un alto grado de seguridad, que los edificios están en las casillas (1, I) y (2, II), lo que les lleva a cuestionar la pista sobre el no contacto de los edificios.

E1: Pues yo tengo otro azul en el (2, II). Estoy completamente seguro de que va ahí.

E2: Vale, a mí también me cuadra […] Yo estoy completamente seguro de que hay uno en el (1, I) […] Pero el problema es que se tocan en diagonal. […] No sé si en las instrucciones te pondrá que en diagonal se pueden poner […] Vamos a dejar este y vamos a pasar a otro.

En este punto fue necesaria otra intervención del experto para permitir el avance de la actividad: situar un edificio azul en la casilla (1, VI). A partir de este momento la interacción entre los estudiantes fue fluida y correcta, y los estudiantes rápidamente pudieron llegar a la solución del problema sin dudas ni cuestionamientos, justificando además algunas configuraciones.

Las Tablas 3 y 4 muestran que, durante ambas fases, las categorías de la taxonomía de Soller que más afloraron fueron informar, demandar información, sugerir, parafrasear y confirmar.

Otras categorías como la duda y el cuestionamiento aparecieron en menor medida. En paralelo, los indicadores discursivos de Chico y Planas que más se pusieron de manifiesto fueron validación, ampliación y paráfrasis. La refutación y el cuestionamiento aparecieron poco. Quizás esto se deba a una falta de confianza entre los alumnos, que no se conocían, o sea un indicador de que los alumnos estaban al mismo nivel y producían el mismo tipo de razonamientos.

Las intervenciones del experto se limitaron a evitar situaciones de bloqueo y a hacer notar a los estudiantes un error en las estrategias de resolución al no considerar una de las pistas de un jugador. En la Tabla 5 se resumen estas intervenciones.

Tabla 5. Intervenciones del experto

	Intervención experto	Acción estudiantes
Fase 1	Solicita leer pistas de nuevo.	E1 lee la pista olvidada, revisión.
	Sugiere tomar sistema de referencia estándar.	Cambian el origen de coordenadas pero no la numeración de las vistas.
Fase 2	Ayuda: Indica numeración vistas.	Cambian numeración vistas.
	Ayuda: da la pista de un edificio.	Se soluciona la tarea sin problemas.

CARACTERÍSTICAS DE TALENTO MATEMÁTICO MOSTRADAS

De entre las diferentes características diferenciadoras de los estudiantes con talento matemático propuestas en la literatura, el análisis del desarrollo del experimento nos ha permitido identificar algunas de ellas.

Los estudiantes manifestaron un *alto compromiso con la tarea*, ya que, a pesar de las dificultades que encontraron, no dieron muestras en ningún momento de querer abandonar. Sus reacciones en momentos de bloqueo fueron revisar y recapitular la información o cambiar el enfoque para abordar otras partes del problema. También manifestaron otras características del talento matemático como la *capacidad de organización de los datos* y el *desarrollo de estrategias eficientes*, por ejemplo organizando su trabajo según la altura de los edificios (de mayor a menor), descartando ubicaciones imposibles, o analizando las combinaciones posibles utilizando ensayo y error.

El hecho de resolver la tarea de visualización, que no era sencilla, también es un indicador de su alta capacidad. En investigaciones relacionadas con objetos tridimensionales y sus representaciones bidimensionales, se ha detectado la dificultad para comunicar con éxito la información visual (Hershkowitz, 1990; Ramírez, 2012). El rendimiento de los estudiantes en actividades que usan términos verbales de visualización (por ejemplo, arriba, cara, vistas anteriores, etc.) puede ser comprometido por el uso de un lenguaje no convencional más que por falta de cognición visual (Sack y Vazquez, 2008). En algunos estudios se han detectado errores de comunicación relacionados con el uso de códigos verbales y gráficos, como los errores relacionados con el uso de códigos verbales que llevaban a nombrar las partes de los objetos usando palabras de la vida diaria, o correspondiente a la geometría 2D (por ejemplo lado en vez de cara, cuadrado en vez de cubo), y usar expresiones ambiguas o expresiones incorrectas referidas a la posición o el movimiento del objeto (Gorgorió, 1998). Estas dificultades se evidenciaron durante el desarrollo de la tarea, en la que se vio que a los alumnos les costó más entenderse que deducir la ubicación de los edificios, una vez unificado el uso del lenguaje.

A pesar de que la resolución de esta tarea se prolongó durante aproximadamente 90 minutos, los estudiantes *no dieron muestras de cansancio*, como lo prueba el hecho de que aceptaron resolver otro problema a continuación.

CONCLUSIONES

El diseño de la tarea, repartiendo los datos entre los estudiantes, ha favorecido la necesidad de comunicación y transmisión de la información, dando un papel relevante a los dos participantes, uno de los requerimientos metodológicos beneficiosos en el trabajo cooperativo (Robinson, 2003). Los dos estudiantes de nuestro experimento han manifestado un rol similar en cuanto a los tipos de razonamiento, si bien el estudiante E2 tenía una participación más activa a la hora de promover el diálogo, preguntando o sugiriendo información cuando E1 se quedaba callado, y hacía uso de la recapitulación para organizar y validar la información obtenida hasta el momento.

La taxonomía de Soller (2001) y los indicadores discursivos utilizados por Chico y Planas (2011) han resultado operativos para analizar la transmisión de información por parte de los estudiantes con talento matemático a la hora de resolver problemas de visualización de manera cooperativa a través de videoconferencia. Las categorías que más afloraron fueron informar, demandar información, sugerir, parafrasear y confirmar, y los indicadores que más manifestaron fueron validación, ampliación y paráfrasis. Esto se puede interpretar como una confirmación del nivel análogo de razonamiento de los estudiantes.

El problema propuesto ha resultado ser un reto interesante y motivador para estos estudiantes (Diezmann, Carmel y Watters, 2002), al tratarse de un campo novedoso para ellos y del que desconocían estrategias previas para abordar la solución. Ello ha permitido identificar algunos rasgos de talento matemático de los estudiantes, como el compromiso con la tarea, a pesar de su dificultad, la ausencia de cansancio, el uso de estrategias eficaces o la forma de organización de los datos.

Respecto al papel del experto, ha resultado evidente la conveniencia de que exista un control por su parte. No ha sido necesario moderar el discurso o la falta de comunicación. Las actuaciones del experto han consistido en intervenciones puntuales, para resolver situaciones de bloqueo. Las dos intervenciones principales se debieron a una falta de entendimiento en cuanto a la utilización del sistema de referencia y la no consideración de una de las pistas sobre la ubicación de los edificios.

El uso de videoconferencias se ha destacado positivamente para aumentar la motivación y el trabajo cooperativo de estudiantes (Martin, 2005; Alagic y Alagic, 2013). Consideramos un aporte original de este trabajo la utilización de este medio para favorecer el trabajo cooperativo entre estudiantes de alta capacidad matemática y facilitar el análisis de las interacciones entre los estudiantes, ya que, en una situación de aula ordinaria, pueden no darse condiciones favorables para estos agrupamientos ni para este tipo de interacciones. En esta línea, este trabajo forma parte de un proyecto más general en el que se analizan otros elementos de la resolución de este tipo de tareas, como las estrategias utilizadas y las habilidades de visualización puestas en juego.

La investigación presentada es parte de las actividades de los proyectos de investigación *Análisis de procesos de aprendizaje de estudiantes de altas capacidades matemáticas de E. Primaria y ESO en contextos de realización de actividades matemáticas ricas* (EDU2012-37259, MINECO) y *Modelos de enseñanza y procesos de aprendizaje de las matemáticas: análisis multidimensional* (EDU2015-69731-R, MINECO/FEDER).

Referencias

Alagic, G., y Alagic, M. (2013). Collaborative mathematics learning in online environments. En *Visual mathematics and cyberlearning* (pp. 23-48). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 215–241.

Castro, E. (2008). Resolución de problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. J. Nieto (Eds.), Investigación en Educación Matemática XII (pp. 113-140). Versión electrónica disponible en <https://dl.dropbox.com/u/104572257/Actas/Actas12SEIEM.zip>.

Cobo, P. y Fortuny, J. M. (2000). Social interactions and cognitive effects in contexts of area-comparison problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 42*, 115-140.

Chico, J. y Planas, N. (2011). Interpretación de indicadores discursivos en situaciones de aprendizaje matemático en pareja. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 319-328). Ciudad Real: SEIEM.

Chua, B. L. (2006). Video-conferencing for the mathematics classroom: Mathematics and music for secondary school students. *The Mathematics Educator, 9*(2), 80-96.

Davis, G. A., Rimm, S. B., y Siegle, D. (2014). *Education of the gifted and talented* (6th ed.). Boston, MA: Pearson.

Dekker, R., Elshout-Mohr, M., y Wood, T. (2006). How children regulate their own collaborative learning. *Educational Studies in Mathematics*, *62*(1), 57-79.

Diezmann, Carmel M y Watters, J. J. (2002) Summing up the education of mathematically gifted students. En *Proceedings 25th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, pages 219-226, Auckland.

Fernández, T. (2013). La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 19-42). Bilbao: SEIEM.

Freiman, V. (2006). Problems to discover and to boost mathematical talent in early grades: A Challenging Situations Approach. *The Montana Mathematics Enthusiast, 3*(1), 51-75.

Gage, J. (2003) Videoconferencing in the mathematics lesson. Comunicación presentada en *British Educational Research Association Annual Conference*, Heriot-Watt University, Edinburgh.

Gallagher, J. J. (2003). Issues and challenges in the education of gifted students. En N. Colangelo y G. A. Davis (Eds.), *Handbook of gifted education* (third edition) (pp. 11-23). Boston: Allyn and Bacon.

Gallagher, J. J. (2010). Psychology, psychologists, and gifted students. En S. Pfeiffer (Ed.), *Handbook of giftedness in children* (pp. 1-11). Nueva York: Springer.

Gorgorió, N. (1998). Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation problems. *Educational Studies in Mathematics, 35*, 207-231.

Greenes, C. (1981). Identifying the Gifted Student in Mathematics. *Arithmetic Teacher*, *28*(8), 14-17.

Guillén, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación? En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T. A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 21-68). Lleida: SEIEM.

Gutiérrez, Á., y Jaime, A. (2013). Exploración de los estilos de razonamiento de estudiantes con altas capacidades matemáticas. *Investigación en Educación Matemática XVII*, 319-326. Bilbao: SEIEM.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition* (pp. 70-95). Cambridge, G.B.: Cambridge U. P.

Martin, M. (2005). Seeing is believing. The role of video-conferencing in distance learning. *British Journal of Education Technology, 36(3)*, 397-405.

Miller, R. C. (1990). *Discovering Mathematical Talent*. ERIC Digest E482. Washington, D.C.: Office of Educational Research and Improvement.

Ministerio de Educación y Cultura (2000). *Alumnos precoces, superdotados y de altas capacidades.* Madrid: Secretaría General Técnica del Ministerio de Educación y Cultura.

Montoro, A. B. y Gil, F. (2015). Explorando el flujo que experimentan los estudiantes para maestro de primaria al enfrentarse a tareas en grupo. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIX (pp. 391-400). Alicante: SEIEM.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principios y estándares para la educación matemática.* Cádiz: SAEM THALES.

Ng, W., y Nicholas, H. (2007). Technology and independent learning. *Roeper Review*, *29*(3), 190-196.

Ozdemir, S., Ayvaz-Reis, Z., y Karadag, Z. (2012). Exploring elementary mathematics pre-service teachers' perception to use multiple representations in problem solving. En Z. Karadag e Y. Devecioglu-Kaymakci (Eds.), *The Proceedings of the 1st International Dynamic, Explorative, and Active Learning (IDEAL) Conference*. Turkey: Bayburt University.

Presmeg, N. (1986). Visualisation and mathematical giftened. *Educational Studies in Mathematics, 17*(3), 297-311.

Rabab'h, B., y Veloo, A. (2015). Spatial Visualization as Mediating between Mathematics Learning Strategy and Mathematics Achievement among 8th Grade Students. *International Education Studies*, *8*(5), 1.

Ramírez, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático* (tesis doctoral no publicada). Granada: Universidad de Granada. Disponible en <http://fqm193.ugr.es/produccioncientifica/tesis/ver_detalles/7461/descargar>.

Ramírez, R., Flores, P., y Castro, E. (2010). Visualización y talento matemático: una experiencia docente. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T. A. Sierra, (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 499-510). Lérida: SEIEM.

Reyes-Santander, P., y Karg A. (2009). Una aproximación al trabajo con niños especialmente dotados en matemáticas. En M. J. González, M. T. González, y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 403-414). Santander: SEIEM.

Rivera, F. (2011). *Toward a visually-oriented school mathematics curriculum: Research, theory, practice, and issues* (Vol. 49). Springer Science y Business Media.

Robinson, A. (2003). Cooperative Learning and high ability students. En N. Colangelo y G. A. Davis (Eds.), *Handbook of gifted education (third edition)*, 282-292. Boston: Allyn and Bacon.

Roig, A. I., Llinares, S., y Penalva, M. C. (2010). Aprendiendo sobre la comunicación matemática. Características de las estructuras argumentativas de estudiantes para profesores de matemáticas en un entorno on-line. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T. A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 533-544). Lérida: SEIEM.

Rosich, N., Rodríguez, A. C., García, M. (2014). Estudio de la interacción de parejas de alumnos asiaticos china-paquistan en la resolución de problemas matemáticos. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (p. 601). Salamanca: SEIEM.

Sack, J. y Vazquez, I. (2008). Three-dimensional visualization: children´s non-conventional verbal representations. En O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX, 5* (pp. 217-224). México: Cinvestav-UMSNH.

Soller, A. (2001). Supporting social interaction in an intelligent collaborative learning system. *International Journal of Artificial Intelligence in Education (IJAIED)*, *12*, 40-62.

UNA APROXIMACIÓN A LAS ACCIONES MATEMÁTICAS DE NIÑOS DE 1 A 3 AÑOS

An approach to mathematical actions in children from 1 to 3-year-old

Alsina, Á.[a] y Berciano, A.[b]

[a]Universidad de Girona, [b]Universidad del País Vasco/EuskalHerrikoUnibertsitatea

Resumen

Se analizan las acciones vinculadas a los conocimientos matemáticos intuitivos que los niños menores de 3 años recopilan en el marco de experiencias informales. Para ello, se lleva a cabo un estudio exploratorio a partir de una metodología cuantitativa para analizar la frecuencia con la que 85 niños de 1 a 3 años realizan acciones asociadas a las matemáticas intuitivas e informales. Los resultados muestran: a) las acciones relacionadas con las cualidades sensoriales y los números y operacionesson las más habituales en todas las edades; b) las accionesvinculadas con las posiciones y las formas aparecen alrededor de los 2 años, y las acciones asociadas a atributos mesurables en los 3 años aproximadamente.

Palabras clave: *educación matemática infantil, matemáticas intuitivas e informales, escuela infantil, conocimientos matemáticos, contenidos matemáticos.*

Abstract

The actions associated with intuitive mathematical skills in informal experiences of children under 3-year-oldare analyzed. According to this objective, an exploratory study with 85 children aged from 1 to 3-year-old is designed. Usinga quantitative methodology, the frequency of the actions associated with the intuitive and informal mathematics is analyzed. The results show: a) the actions related to the sensory qualities and number and operations are the most common; b) actions related to the positions and forms appear around age 2, and the actions of measurable attributes appear from approximately 3 years.

Keywords: *childhood mathematics education, intuitive and informal mathematics, nursery school, mathematical skills, mathematical content.*

INTRODUCCIÓN

Actualmente existe un acuerdo generalizado sobre la importancia de la educación en general y la educación matemática en particular durante la primera infancia (Alsina, 2015). Hace ya una década, los ministros de la Unión Europea manifestaron que la educación y los cuidados de la primera infancia pueden producir rendimientos más elevados a lo largo del proceso de aprendizaje durante toda la vida, especialmente para los más desfavorecidos (Consejo de la Unión Europea, 2006). En la misma línea, en las conclusiones del Consejo de la Unión Europea sobre educación infantil y atención a la infancia se pone de relieve que un elevado nivel de calidad ofrece una amplia gama de beneficios a corto y largo plazo tanto para los niños como para la sociedad en general (Consejo de la Unión Europea, 2011). Por otro lado, laOrganización para la Cooperación y el Desarrollo Económico ha revelado que está claramente demostrado que los niños que tienen acceso a servicios de educación y cuidados de calidad durante la primera infancia obtienen resultados mucho mejores,

Alsina, A. y Berciano, A. (2016). Una aproximación a las acciones matemáticas de niños de 1 a 3 años. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 302-310). Málaga:SEIEM.

equivalente a un avance de uno o dos años escolares, en pruebas internacionales sobre competencias básicas, como PISA y PIRLS (OECD, 2007).

En el ámbito de la Educación Matemática, tal como señalan de Castro, Flecha y Ramírez (2015), varios autores de prestigio (Clements, 2004;Clements y Sarama, 2009) y diversas instituciones de referencia internacional, comoel Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de EEUU (NCTM), laAsociación Nacional para la Educación de la Primera Infancia (NAEYC) y elConsejo Nacional de Investigación (NRC), han ido extendiendopaulatinamente su reflexión sobre la educación matemática infantil a edades cada vezmenores, llegando a incluir el periodo de 0 a 3 años (Fuson, Clements yBeckman, 2009; NAEYC y NCTM, 2013; NRC, 2014).Como resultado, los currículos empiezan a reflejar también la presencia y larelevancia de la actividad matemática infantil desde el nacimiento (Fuson,Clements y Beckman, 2009).

En este contexto, son necesarias investigaciones que establezcan cada vez con mayor precisión qué matemáticas intuitivas e informales aprenden y usan los niños menores de 3 años.Los resultados de estos estudios deberían permitir una mayor profesionalización de los maestros y educadores que trabajan en el primer ciclo de la etapa de Educación Infantil, en el sentido expuesto por el NCTM (2015, p. 99): “los maestros de matemáticas reconocen que su propio aprendizaje nunca termina y buscan mejorar y perfeccionar su conocimiento matemático para la enseñanza, de la pedagogía matemática y su cognición de los estudiantes en cuanto aprendices de matemáticas”. Con este propósito, Alsina (2015) ha presentado recientemente les resultados de un estudio longitudinal realizado con los alumnos de siete Escuelas Infantiles durante el periodo 2011-2014, en el que se han concretado las primeras acciones vinculadas a conocimientos matemáticos que realizan los niños de 0 a 3 años.

Desde este marco, el objetivo de este nuevo estudio es determinar la aparición progresiva de estos primeros conocimientos matemáticos y su frecuencia, en función de la edad.

MATEMÁTICAS INTUITIVAS E INFORMALES ANTES DE LOS 3 AÑOS

El término “matemáticas informales” fue incorporado por Baroody (1987) en el ámbito de la educación matemática infantil para referirse a los conocimientos intuitivos que los niños recopilan en el marco de experiencias informales, y que permiten ir desarrollando su pensamiento matemático. El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos hace referencia también a las matemáticas intuitivas e informales, y considera que son un eslabón necesario para acceder a las matemáticas más formales: “la conexión más importante en los primeros aprendizajes matemáticos es la existente entre las matemáticas intuitivas, informales, que los niños han aprendido a través de sus experiencias, y las que están aprendiendo en la escuela” (NCTM, 2003, p. 136).

Diversos estudios han señalado algunos conocimientos matemáticos informales que adquieren los niños durante la primera infancia. Anderson (1997), por ejemplo, describe una gran variedad de experiencias numéricas informales en las que se implican niños de familias americanas de nivel medio-alto: actividades de conteo, nombrar y estimar cantidades de objetos, reconocer números escritos, operaciones de suma y resta con pocos elementos, usar números ordinales, estimar la igualdad numérica de dos colecciones y escribir números. De todas las actividades mencionadas, este autor indica que las actividades más frecuentes son las de conteo, nombrar cantidades de objetos y reconocer números escritos, mientras que las actividades de escritura de números son escasas. En la misma línea, Ginsburg, Klein y Starkey (1998) ponen de manifiesto que los niños interactúan con representantes escritos de los números a través de prácticas informales que son muy diversas: indicar la edad con los dedos, poner velas en un pastel, etc. Así mismo, como se ha indicado en la introducción, otros autores como Clements (2004), Clements y Sarama (2009), Fuson, Clements y Beckman (2009) y organismos como el NCTM, la NAEYC o el NRC han ido incorporando también la idea de que los niños adquieren conocimientos matemáticos informales antes de los 3 años (NAEYC y NCTM, 2013, NRC, 2014).

Con el propósito de avanzar hacia una mayor concreción de estos primeros conocimientos matemáticos, Alsina (2015, p. 34) indica que se refieren a las acciones recogidas en la tabla 1:

Tabla 1. Principales conocimientos matemáticos en la Escuela Infantil (Alsina, 2015, p. 34)

	Identificación	Comparación	Observación de cambios

Cualidades sensoriales	Reconocimiento de las características sensoriales de los objetos. Agrupaciones por criterios cualitativos.	Clasificaciones por criterios cualitativos. Ordenaciones por criterios cualitativos. Correspondencias cualitativas. Seriaciones.	Cambios cualitativos en los objetos y el entorno inmediato.
Números y operaciones	Comprensión de cuantificadores (muchos, pocos y algunos) y de cantidades de objetos (uno, dos, tres). Inicio del conteo de los elementos de una colección. Distinción entre números escritos y otros tipos de representaciones externas (letras, dibujos, etc.).	Correspondencias cuantitativas. Seriaciones.	Juntar, añadir, unir o reunir, agrupar, sumar, etc. Quitar, separar, restar.
Posiciones y formas	Reconocimiento de la posición relativa, la dirección y la distancia en el espacio. Reconocimiento de algunas propiedades geométricas elementales de las formas.	Relaciones espaciales. Relaciones simples a partir de las propiedades geométricas de las formas: clasificaciones, correspondencias y seriaciones.	Observación de cambios de posición (a través de giros, etc.) Observación de cambios de forma (deformaciones, composición y descomposición de formas).
Atributos mesurables	Reconocimiento de algunos atributos mesurables de los objetos (tamaño, masa, capacidad, temperatura, etc.). Identificación del tiempo (día, noche, mañana, tarde, etc.).	Relaciones simples a partir de los atributos mesurables de los objetos: clasificaciones, ordenaciones, correspondencias y seriaciones. Secuencias temporales.	Observación de algunos cambios a partir de composiciones y descomposiciones.

Los datos de estos estudios previos evidencian que los niños menores de 3 años tienen nociones intuitivas sobre matemáticas informales que sirven como fundamento para un posterior aprendizaje formal de las matemáticas en la escuela. El objetivo del estudio que presentamos, tal como se ha indicado, es determinar la aparición progresiva de estos primeros conocimientos matemáticos y su frecuencia, en función de la edad.

MÉTODO

Se ha llevado a cabo un estudio exploratorio a partir de una metodología cuantitativa para analizar la frecuencia con la que los niños menores de 3 años realizan accionesasociadas a las matemáticas intuitivas e informales.

Participantes

El estudio se ha llevado a cabo con 85 niños de cinco aulas (47 niñas y 38 niños) de una Escuela Infantil de la provincia de Girona (España), en un centro educativo de titularidad municipal que ofrece servicios a niños desde los cuatro meses hasta los tres años.

Tabla 2. Participantes en el estudio

Aula	Edad aproximada	Nº alumnos
1	1 año	12
2	1 año y medio	15
3	2 años	18
4	2 años y medio	20
5	3 años	20

Diseño y procedimiento

Para la obtención de datos se ha diseñado una instalación artística (figura 1), que se considera un espacio estético que fomenta la participación y el desarrollo de los niños (Abad y Ruiz de Velasco, 2014). La puesta en práctica de la propuesta educativa se ha dividido en cuatro fases:

1. Planificación del espacio: se construye la instalaciónen un espacio polivalente de la escuela, libre de otros estímulos y diferente del aula habitual de los niños. Los objetos (14 tiras de tela blanca o negra de 1’5 m.x10 cm. cada una y 55 cojines de cinco colores, de 10cm.x10cm. cada uno) se disponen ordenadamente, permitiendo que los niños puedan interactuar libremente con ellos.

Figura 1. Instalación artística

2. Presentación de la instalación artística: los niños de cada aula se dirigen, por turnos, al espacio polivalente. Se sientan alrededor de la instalacióny se inicia un diálogo a partir de preguntas que incidan en las características de los objetos (¿cuántos cojines hay?, ¿de qué forma o color son?, etc.). A continuación se les invita a interaccionar con los objetos durante un tiempo limitado, procurando finalizar la actividad antes de que decaiga el interés.

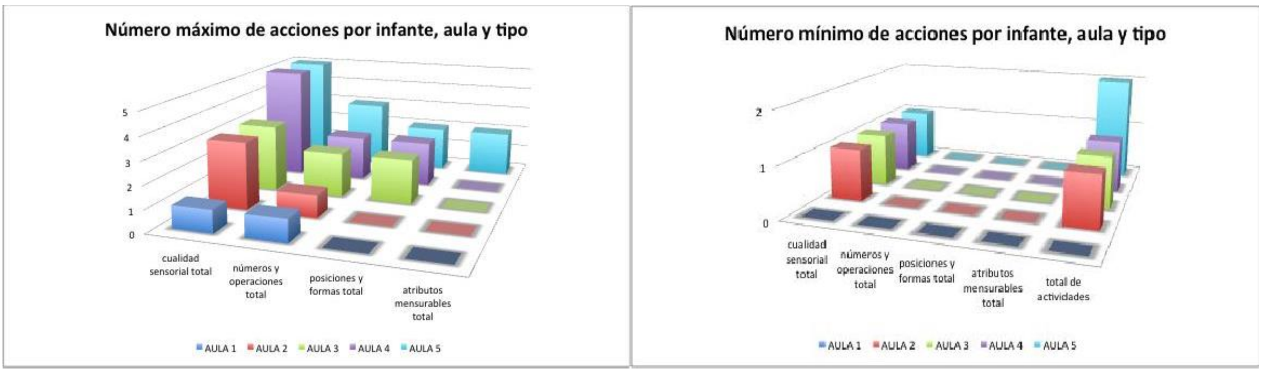
3. Exploración libre:los niños se mueven libremente por el espacio y manipulan, experimentan y juegan con los cojines de la instalación. En esta fase el papel de la educadora consiste en observar y documentar las acciones de los niños a través de fotografías, videos y notas para la obtención de datos, de acuerdo con el objetivo del estudio.

4. Recogida del material: la educadora, con la ayuda de los alumnos, recoge el material. Una vez recogido, el grupo de alumnos se dirige de nuevo a su aula habitual.

RESULTADOS

Resultados globales

Se presentan los datos relativos al número total de acciones documentadas, organizadas por bloques de contenido y edades respectivamente:



Gráficos 1 y 2: número máximo y mínimo de acciones

Si se examina el número máximo de accionespor infante en cada aula, se observaque los niñosdelas aulas 1 y 2 no realizan ninguna tarea relacionada con las posiciones y formas, mientras que en las siguientes edades algunos sí las realizan.En el caso de tareas relacionadas con los atributos mesurables, éstas no se dan hasta el aula 5, que corresponde a niños de 3 años aproximadamente (ver Gráfico 1).

Por otro lado, respecto al número mínimo de acciones por infante en cada aula, a partir del aula 2 todos los niños realizan al menos una acción relacionada con cualidades sensoriales, no así en el resto de tipos (ver Gráfico 2).

Media de accionessegún aula y tipología

En el gráfico 3se ve claramente como con el avance de la edad, de media, los niños interactúan más con la instalación, dando lugar a un mayor número de acciones y de variedad de las mismas. Igualmente se puede ver que de media las acciones relacionadas con posiciones y formas o atributos mesurables aparecen muy esporádicamente.

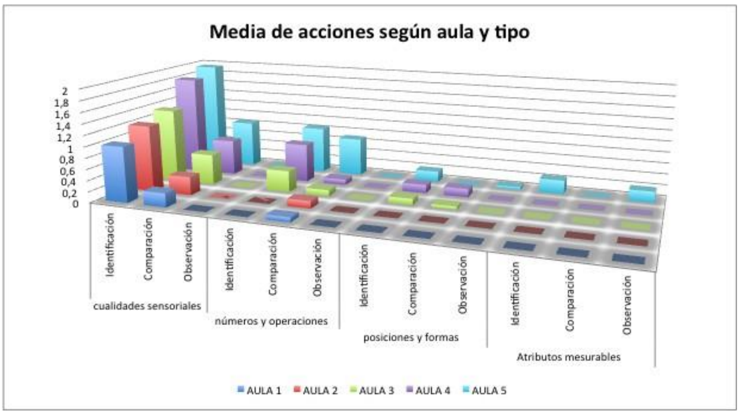


Gráfico 3. Media de acciones por aula y bloque de contenidos

Datos estadísticos generales: análisis por aula

Los alumnosdel aula 1 (1 año) realizan acciones de identificación (I.) y de comparación (C.) relacionadas con las cualidades sensoriales y los números y operaciones.Por ejemplo: reconocen las características sensoriales de los cojines (sobre todo el color) y en algunos casos identifican la cantidad de cojines (muchos, uno, etc.). De media, cada infante realiza 1.33 acciones y, en su mayoría, se refieren a la identificación de cualidades sensoriales (Gráfico 4). Igualmente, destaca que ningún niñorealiza ninguna acción destinada a la observaciónde cambios (O.C.).

Tabla 3. Datos estadísticos de las acciones de los niños del aula 1

	Cualidades sensoriales			Números y operaciones			Total de acciones
	I.	C.	O.C.	I.	C.	O.C.	Total
Media	1	0,25	0	0	0,08	0	1,33
D.T.	-	-	0	0	-	0	-
Total	12	3	0	0	1	0	16

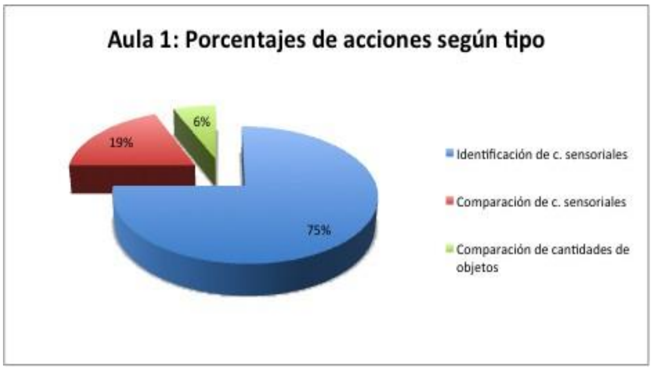
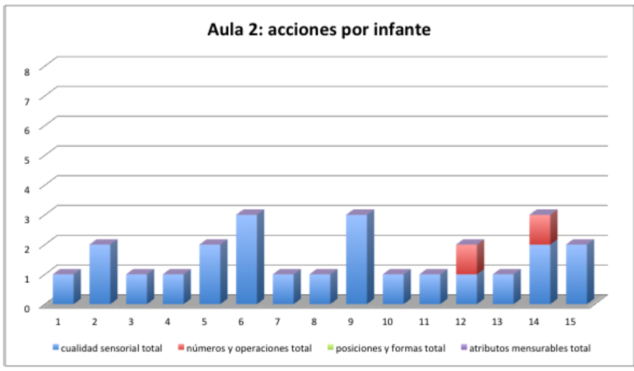


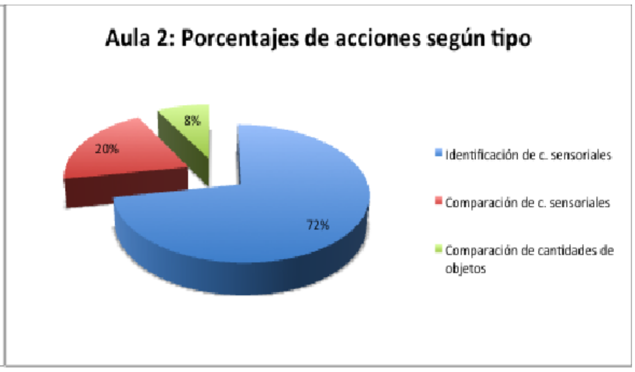
Gráfico 4. Porcentajes totales de tipos de acciones de los niños del aula 1

Los alumnosdel aula 2 (1 año y medio) también realizan acciones de identificación y de comparación relacionadas con las cualidades y los números y operaciones: reconocen las características de los cojines y hacen algunas agrupaciones y clasificaciones; usan términos para denominar la cantidad de cojines (muchos, uno, etc.). De media, cada infante realiza 1.66 acciones y, en su mayoría, se refieren a la identificación de cualidades sensoriales (Tabla 4 y Gráficos 5 y 6). De forma más concreta,un 86% de los infantes sólo realizan acciones relacionadas con cualidades sensoriales, y el 14% que realiza dos acciones, están relacionadas con cantidades de objetos.

Tabla 4. Datos estadísticos de las acciones de los niños del aula 2

	Cualidades sensoriales			Números y operaciones			Total de acciones
	I.	C.	O.C.	I.	C.	O.C.	Total
Media	1,2	0,33	0	0	0,13	0	1,66
D.T.	0,41	0,48	0	0	0,35	0	0,81
Total	18	5	0	0	2	0	25





Gráficos 5 y 6.Acciones por infante y porcentajes totales de tipos de acciones(Aula 2)

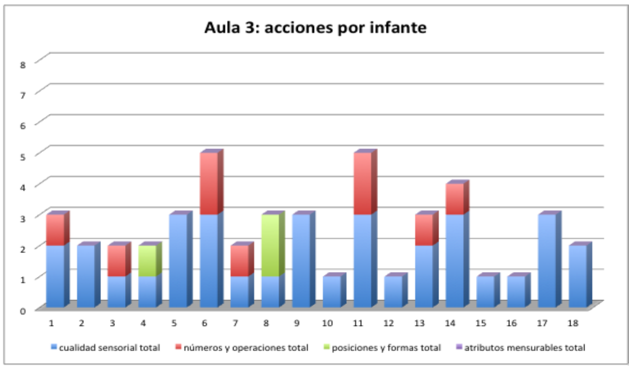
Los datos correspondientes a los niños del aula 3 (2 años) son los siguientes:

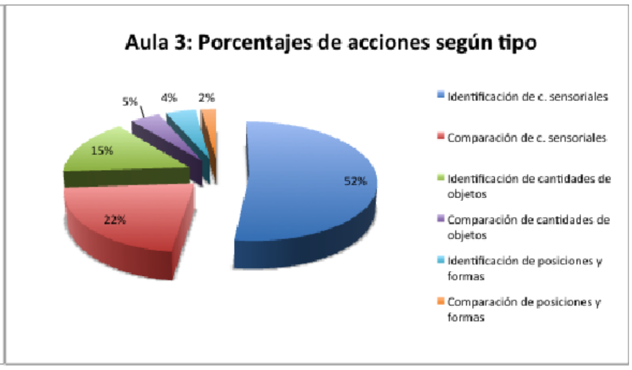
Tabla 5. Datos estadísticos de las acciones de los niños del aula 3

	Cualidades sensoriales			Números y operaciones			Posiciones y formas			Total de acciones
	I.	C.	O.C.	I.	C.	O.C.	I.	C.	O.C.	total
Media	1,33	0,55	0	0,38	0,11	0	0,11	0,05	0	2,55
D.T.	0,59	0,70	0	0,50	0,32	0	0,32	0,23	0	1,24
Total	24	10	0	7	2	0	2	1	0	46

En este grupo de edad ya aparecen acciones, aunque minoritarias, relacionadas con las posiciones y las formas: por ejemplo, los infantes reconocen su posición relativa (dentro, fuera) dentro de la instalación artística. Destaca que cada alumno realiza 2.55 accionesde media, pero ninguno realiza acciones destinadas a la observación de cambios. Finalmente, el porcentaje de acciones dedicadas a identificar las cualidades sensoriales y las cantidadesde objetos es predominante.

En un 50% de los casos, los alumnosrealizan al menos dos acciones distintas, mientras que el 50% restante se queda exclusivamente en aspectos relacionados con cualidades sensoriales. Del 50% que realiza dos acciones distintas, un 38,88% (7 de 18) realizan tareas relacionadas con los números y operaciones y el 11,11% restante (2 de 18), sobre posiciones y formas.





Gráficos 7 y 8. Acciones por infante y porcentajes totales de tipos de acciones(Aula 3)

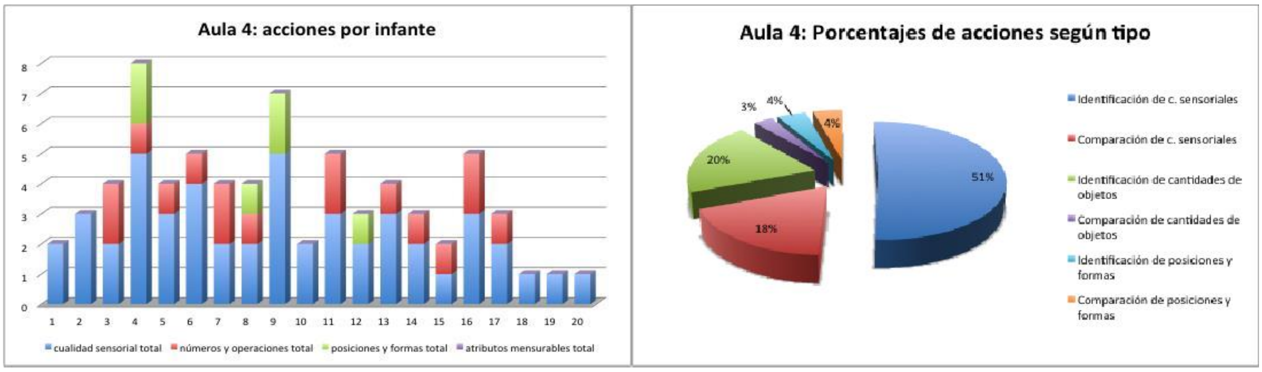
En relación a los niños del aula 4 (dos años y medio), los datos obtenidos son los siguientes:

Tabla 6. Datos estadísticos de las acciones de los niños del aula 4

	Cualidades sensoriales			Números y operaciones			Posiciones y formas			Total de acciones
	I.	C.	O.C.	I.	C.	O.C.	I.	C.	O.C.	Total
Media	1,8	0,65	0	0,7	0,1	0	0,15	0,15	0	3,55
D.T.	0,69	0,74	0	0,73	0,307	0	0,36	0,36	0	1,87
Total	36	13	0	14	2	0	3	3	0	71

Al igual que en el grupo anterior, en esta edad se observan acciones tanto de cualidades sensoriales, de números y operaciones como relacionadas con las posiciones y las formas. Por ejemplo, asocian cojines según el color; empiezan a construir series con un patrón de repetición elemental; realizan actividades de conteo; construyen líneas rectas con los cojines; etc. De media, cada infante realiza 3.55 acciones, pero ninguno de ellos realiza ninguna acción destinada a la observación de cambios. Finalmente, el porcentaje de acciones dedicadas a identificaciones tanto de cualidades sensoriales como de números y operaciones es predominante.

En un 70% de los casos, los infantes realizan al menos dos acciones distintas, mientras que el 30% restante se queda exclusivamente en aspectos relacionados con cualidades sensoriales.



Gráficos 9 y 10.Acciones por infante y porcentajes totales de tipos de acciones(Aula 4)

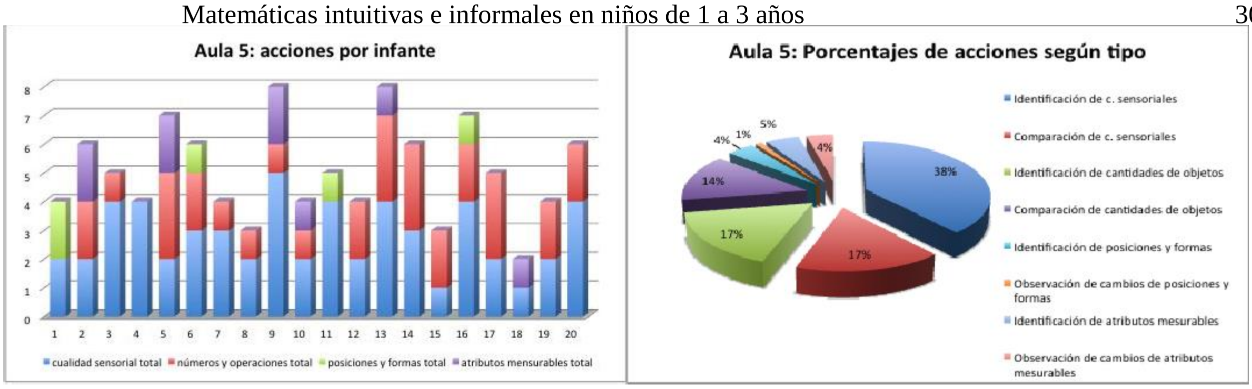
Los datos correspondientes a los niños del aula 5 (3 años), son los siguientes:

Tabla 7. Datos estadísticos de las acciones de los niños del aula 5

	Cualidades sensoriales			Números y operaciones			Posiciones y formas			Atributos mesurables			Totales
	I.	C.	O.C.	I.	C.	O.C.	I.	C.	O.C.	I.	C.	O.C.	total
Media	1,95	0,85	0	0,85	0,7	0	0,2	0	0,05	0,25	0	0,2	5,05
D.T.	0,60	0,87	0	0,67	0,73	0	0,41	0	0,22	0,44	0	0,41	1,66
Total	39	17	0	17	14	0	4	0	1	5	0	4	101

En los alumnos de aproximadamente 3 años ya aparecen acciones, aunque minoritarias, relacionadas con los atributos mesurables, como por ejemplo reconocer la longitud de una fila de cojines (larga). De media cada infante realiza 5.05 acciones, pero ninguno realiza acciones destinadas a la observación de cambios de cualidades sensoriales o de cantidades de elementos; pero sí en el caso de posiciones y formas o de atributos mesurables. Finalmente, el porcentaje de acciones dedicadas a identificaciones no es tan predominante como en edadesanteriores, dando lugar a una mayor diversidad de acciones.

También cabe destacar que, salvo en el caso de unalumno, en esta edad realizan al menos dos tipos de acciones distintas, estando una de ellas relacionada con cualidades sensoriales y la segunda con los números y operaciones en un 84%.



Gráficos 11 y 12. Acciones por infante y porcentajes totales de tipos de acciones(Aula 5)

CONCLUSIONES

Los datos obtenidos constatan que los niños menores de 3 años realizan acciones vinculadas a las matemáticas intuitivas e informales, en sintonía con los planteamientos de diversos organismos asociados tanto a la educación matemática como a la infancia (NCTM, 2003; NAEYC y NCTM, 2013; NRC, 2014). En relación a la frecuencia, se ha observado que la cantidad y variedad de acciones relacionadas con los distintos bloques de contenido aumenta con la edad, lo cual es una tendencia lógica que se puede explicartanto a partir de factores psicoevolutivos como por el efecto del proceso de enseñanza-aprendizaje.

La aportación quizás más novedosa, pues, es haber podido establecer el momento de aparición de las distintas acciones. Sin pretender generalizar, dado que somos conscientes que es preciso realizar nuevos estudios con otras muestras de niños y otras propuestas educativas, parece que la tendencia apunta hacia la siguiente dirección:

Cualidades sensoriales: en todas las edades se realizan acciones vinculadas a este bloque de contenidos, y en todos los casos son las más frecuentes. A medida que aumenta la edad se diversifican las acciones: los niños menores de 1 año y medio básicamente reconocen características sensoriales de los objetos, mientras que a partir de esta edad son capaces de realizar agrupaciones y otras acciones vinculadas a la comparación de dichas cualidades (clasificaciones, correspondencias cualitativas eincluso seriaciones con patrones de repetición muy simples).

Números y operaciones: los infantes de todas las edades analizadas realizan acciones vinculadas a aspectos cuantitativos. Sin embargo, las acciones de los niños de 1 año son muy limitadas y se reducen exclusivamente a comparar (perceptivamente) colecciones en función de la cantidad de objetos, mientras que a partir de los 2 años empiezan ya a realizar otras acciones más complejas como correspondencias cuantitativas, etc.

Posiciones y formas: las acciones asociadas con este bloque de contenido aparecen más tarde, a partir de los 2 años aproximadamente. Básicamente llevan a cabo acciones de identificación y de comparación (principalmente la posición relativa y algunas formas elementales).

Atributos medibles: se han observado acciones asociadas a las magnitudes exclusivamente en los niños de mayor edad (3 años aproximadamente). Las primeras acciones se asocian a la identificación de los atributos mesurables y a la observación de cambios por el efecto producido por el hecho de añadir o bien quitar.

Como decíamos, serán precisos nuevos estudios comparativos que permitan seguir concretando el momento de aparición y la frecuencia de las acciones asociadas a los conocimientos matemáticos intuitivos e informales, no para marcar el momento cronológico en el que todos los niños deben realizar una determinada acción, sino para ofrecer una orientación aproximada a los profesionales del primer ciclo de Educación Infantil que contribuya a una mayor comprensión de qué matemáticas pueden aprender y usar de forma comprensiva los niños menores de 3 años en la Escuela Infantil.

Referencias

Abad, J. y Ruiz de Velasco, A. (2014). Contexto de simbolización y juego. La propuesta de las instalaciones. *Aula de Infantil*, *77*, 11-15.

Alsina, Á. (2015). *Matemáticas intuitivas e informales de 0 a 3 años. Elementos para empezarbien.* Madrid: Narcea.

Anderson, A. (1997). Families and mathematics: A study of parent-child interactions. Journal of *Research in Mathematics Education, 28*(4), 484-511.

Baroody, A. (1987). *Children's Mathematical Thinking. A developmental framework for preschool, primary, and special education teachers.* Nueva York: Teachers College Press.

Clements, D.H. (2004). Major themes and recommendations. En D.H. Clements, J. Sarama y A.M. DiBiase (Eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 7-72). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Clements, D.H. y Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach.*Nueva York: Routledge.

Consejo de la Unión Europea (2006). Conclusiones del Consejo sobre eficiencia y equidad en educación y formación (DO C 298 de 8.12.2006).

Consejo de la Unión Europea (2011). Conclusiones del Consejo sobre educación infantil y atención a la infancia: ofrecer a todos los niños la mejor preparación para el mundo de mañana (DO C 175 de 15.6.2011).

de Castro, C., Flecha, G. y Ramírez, M. (2015). Matemáticas con dos años: buscando teorías parainterpretar la actividad infantil y las prácticas docentes. *Tendencias Pedagógicas*, *26,* 89-108.

Fuson, K. C., Clements, D. H. y Beckman, S. (2009). *Focus in prekindergarten: Teaching with curriculum focal points*. Reston, VA/Washington, DC: NCTM& NAEYC.

Ginsburg, H. P., Klein, A., y Starkey, P. (1998). The development of children's mathematical thinking: Connecting research and practice. En I.E. Siegel y A. Renninger (Eds.), *Handbook of child psychology: Child psychology in practice* (Vol. 4, pp. 401-476). Nueva York: John Wiley y Sons.

NAEYC y NCTM (2013). Matemáticas en la Educación Infantil: Facilitando un buen inicio. Declaración conjunta de posición. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *2*(1), 1-23.

NCTM (2015). *De los principios a la acción. Para garantizar el éxito matemático de todos.*Reston, VA: NCTM.

NCTM (2003). *Principios y estándares para la educación matemática.* Sevilla: Thales.

NRC (2014). Fundamentos cognitivos para la iniciación en el aprendizaje de las matemáticas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 3*(1), 21-48.

OECD (2007). *PISA 2006 Sciencecompetencefortomorrow'sworld.* París: OECD.

LOS MODOS DE REPRESENTACIÓN GRÁFICO LINEAL Y CARTESIANO EN LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE SUCESIÓN NUMÉRICA EN ESTUDIANTES DE SEGUNDO CICLO ENSEÑANZA SECUNDARIA OBLIGATORIA.

Lineal and cartesian graphics modes of representations inunderstanding of numerical sequence concept in secondary school students

Bajo Benito, José Mariano, Gavilán Izquierdo, José María, Sánchez-Matamoros García, Gloria,
Universidad de Sevilla.

Resumen

Esta investigación forma parte de un trabajo cuyo objetivoes la compresión del concepto de sucesión numérica en los estudiantes de secundaria. El enfoque proporcionado por distintos investigadores en relación a los modos de representación y las aportaciones de Piaget y García en relación al desarrollo de un esquema a través de los niveles intra, inter y trans, nos proporciona información sobre el desarrollo dela comprensión del concepto de sucesión numérica a través del uso de los modos de representación gráficos, lineal y cartesiano, por parte de los estudiantes en la resolución de una tarea.

Palabras clave: *Estudiantes de Secundaria, Esquema, Sucesiones Numéricas, Modos de Representación Gráfico.*

Abstract

The present paper is part of research that addresses the compression of the concept of numerical sequencein secondary school students. The perspective provided by the work of Piaget & Garcia related to the development of a schemethrough several levels (intra, inter and trans), it provides empirical evidence of how the students' use of the modes of representationswhen solving a task provides information of the development of understanding. This use allows us to go deep about the stages in the development of numerical sequence concept.

Keywords: *Secondary School Students,Schema,Numerical Sequences, Modes of Representations.*

INTRODUCCIÓN

En investigación en educación matemática los modos de representación tienen un papel relevante en el estudio de la comprensión de conceptos matemáticos. De manera general, se asume que el cambio de registros entre representaciones y la coordinación en las distintas representaciones es relevante para alcanzar una determinada comprensión (Duval, 2006).

En este sentido Duval destaca las dificultades de los estudiantes, relativos al cambio de registros de representación vinculados a una misma noción matemática. Es decir, cada representación tiene asociadas unas características propias del concepto, pero no todas. Por tanto para Duval la comprensión conceptual surge de la coordinación de varios sistemas de representación y no sólo de uno de ellos.

En relación a las investigaciones de conceptos del análisis matemático, diferentes autores han caracterizado el papel que han jugado los modos de representación, en límites (Pons, Valls y Llinares 2012) en funciones (Tall y Vinner, 1981) en derivadas (Ariza y Llinares, 2009;Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2006;Gavilán, 2010),en integrales (Boigues, Llinares y Estruch,

Bajo, J.M., Gavilán, J.M., Sánchez-Matamoros, G. (2016). Los modos de representación gráfico lineal y cartesiano en la comprensión del concepto de Sucesión Numérica. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp311-320). Málaga: SEIEM.

.

2010; González y Aldana, 2010; Orton, 1983; Aranda y Callejo, 2015),o en sucesiones (Przenioslo 2006; Roh, 2008).

Respecto a la comprensión del concepto de sucesión, distintas investigaciones han resaltado la importancia de la comprensión del concepto de sucesión como base para la comprensión de otros conceptos del análisis matemático, así por ejemplo, la comprensión del concepto de sucesión como lista numérica es un requisito previo para la comprensión de conceptos como series (Codes, 2013), límites (Mamona,1990; Roh, 2008; Sierpinska,1990),oen la introducción de la integral mediante las sumas de Riemann, (McDonald, Mathews y Strobel,2000).

Para Przenioslo (2006) la comprensión del concepto de sucesión como lista numérica es especialmente interesante por la diversidad de concepciones identificadas en su investigación vinculadas a diferentes modos de representación, analíticos (numérico y algebraico) y gráficos (recta numérica y plano cartesiano).

En este trabajo nos centramos en caracterizar el desarrollo de la comprensión del concepto de sucesión como lista numérica en estudiantes de Segundo ciclo de Enseñanza Secundaria Obligatoria a través del uso que hacen de los modos de representación gráfico-lineal (representación de las sucesiones como puntos de la recta numérica) y gráfico-cartesiano (representación de las sucesiones como puntos del plano cartesiano).

MARCO TEÓRICO

En esta investigación consideramos como marco teórico la teoría APOS (Arnon, et al., 2014), basada en el desarrollo de un esquema propuesto por Piaget y García (1983).La teoría APOSconsidera que *"un esquema para una parte específica de las matemáticas se define como la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente de un individuo en una estructura coherente y que pueden ser empleados en la solución de una situación problemática que involucre esa área de las matemáticas"*(Trigueros, 2005, p. 11).

Esta aproximación al desarrollo de un esquema, ha sido considerada en distintas investigaciones para caracterizar la comprensión de diferentes conceptos matemáticos (Ariza y Llinares, 2009; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2008; Vals, Pons y Llinares, 2011).Endichas investigaciones, un esquema se desarrolla pasando por tres niveles: INTRA – INTER – TRANS, que se suceden según un orden fijo mediante un mecanismo denominado "abstracción reflexiva" (Piaget y García, 1983/1989, p. 10). Sánchez-Matamoros, García y Llinares(2006) caracterizan los niveles del desarrollo de un esquema a través de los elementos matemáticos y las relaciones lógicas que llegan a establecerse entre ellos cuando los estudiantes resuelven una tarea:

Intra: uso de elementos matemáticos de forma aislada en algún modo de representación, sin establecer relaciones. Es decir, los modos de representación son considerados por el estudiante como distintos y no los relaciona cognitivamente. Los estudiantes pueden usar diferentes modos de representación, pero los ven como no relacionados. Para Arnon et al. (2014) un individuo en el nivel intra del desarrollo de un esquema se centra en acciones, procesos y objetos individuales sin relacionarlos.

Inter: uso de elementos matemáticos de forma correcta en algunos modos de representación y se establecen relaciones lógicas entre elementos matemáticos que se encuentran en el mismo modo de representación. Para Arnon et al. (2014) este nivel está caracterizado por la construcción de relaciones y transformaciones entre los procesos y los objetos que constituyen el esquema.

Trans: uso de elementos matemáticos de forma correcta en todos los modos de representación y se establece relaciones lógicas entre elementos matemáticos que se encuentran en diferentes modos de representación. Los estudiantes en este nivel han construido el objeto cognitivo de sucesión como lista numérica, y son conscientes de las relaciones que se establecen entre diferentes modos de representación llegando a la síntesis de los modos de representación. La estructura coherente subyacente de su esquema le ayudará a utilizar este esquema en nuevas situaciones.

Así mismo, Piaget y García (1983) consideran que cada fase o nivel (INTRA, INTER o TRANS) implican a su vez algunos subniveles siguiendo el mismo orden de progresión.

METODOLOGÍA

Participantes.

Los participantes en esta investigación son 105 estudiantes de 2º ciclo de Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO), (14-16 años), de un instituto de la ciudad de Sevilla: A estos estudiantes se les había introducido el concepto de sucesión numérica, estrategias para buscar regularidades numéricas en sucesiones de números enteros y fraccionarios, y progresiones aritméticas y geométricas como casos particulares de sucesiones (BOE, 5 del 5 de enero de 2007, p. 756) y (BOJA, 2007).

Instrumento de recogida de datos.

Identificamos los diferentes elementos matemáticos que constituyen el concepto de sucesión numérica a partir de la revisión de las investigaciones que se han realizado sobre dicho concepto y del análisis de diferentes libros de textos de distintos niveles educativos (ESO, Bachillerato y Universidad). A partir de dicho análisis se elaboró un cuestionario que constaba de cuatro tareas.

Se pasó el cuestionario a los estudiantes y respondieron a él en una sesión de clase, a continuación se verificaron las contestaciones dadas por los alumnos y sus argumentaciones, y confeccionamos un segundo cuestionario para cada alumno con el objetivo de profundizar en aquellas respuestas que no habían sido explicadaso que podían dejar alguna duda sobre su interpretación (Bajo et al., 2015). Para respondera este segundo cuestionario, los alumnos podían consultar el primer cuestionario contestado. Este segundo cuestionariofue contestado dos semanas después del primero.

En este trabajo nos centramos en las respuestas dadas en los dos cuestionarios a dos tareas (figura 1). La tarea 1 (figura 1), viene dada en modo gráfico-cartesiano y en su resolución el estudiante hará uso de diferentes elementos matemáticos vinculados al concepto de sucesión numérica. Es una tarea similara la utilizada por González, Medina, Vilanova y Astiz (2011). La tarea 2 (figura 1) proviene de Stewart (2006), enella se presentan sucesiones en tres modos de representación: expresión algebraica, gráfico-lineal y gráfico-cartesiano, y se pide a los estudiantes que relacionen el modo algebraico con uno de los modos gráficos. Esta tarea fue adaptada para nuestro trabajo de tal forma que no todas las expresiones algebraicas facilitadas se corresponden con alguno de los gráficos dados, en concreto la expresión a) y el gráfico 4) no se podían emparejar. En la figura 2 mostramos los elementos matemáticos vinculados a estas dos tareas del cuestionario. Estos elementos matemáticos se pueden representar en diferentes modos, en particular estamos considerando los modos numérico, algebraico y gráfico. En este último, distinguimos el lineal y el cartesiano. Por ejemplo, dada la sucesión en modo numérico {4, 6, 8….}, también se puede representar en modo algebraico a(n)=2n+2 , en modo gráfico-cartesianotal y como aparece en la gráfica de la tarea 1 (figura 1) y en modo gráfico-lineal similar a cómo aparece en la tarea 2 item 3) (figura 1).

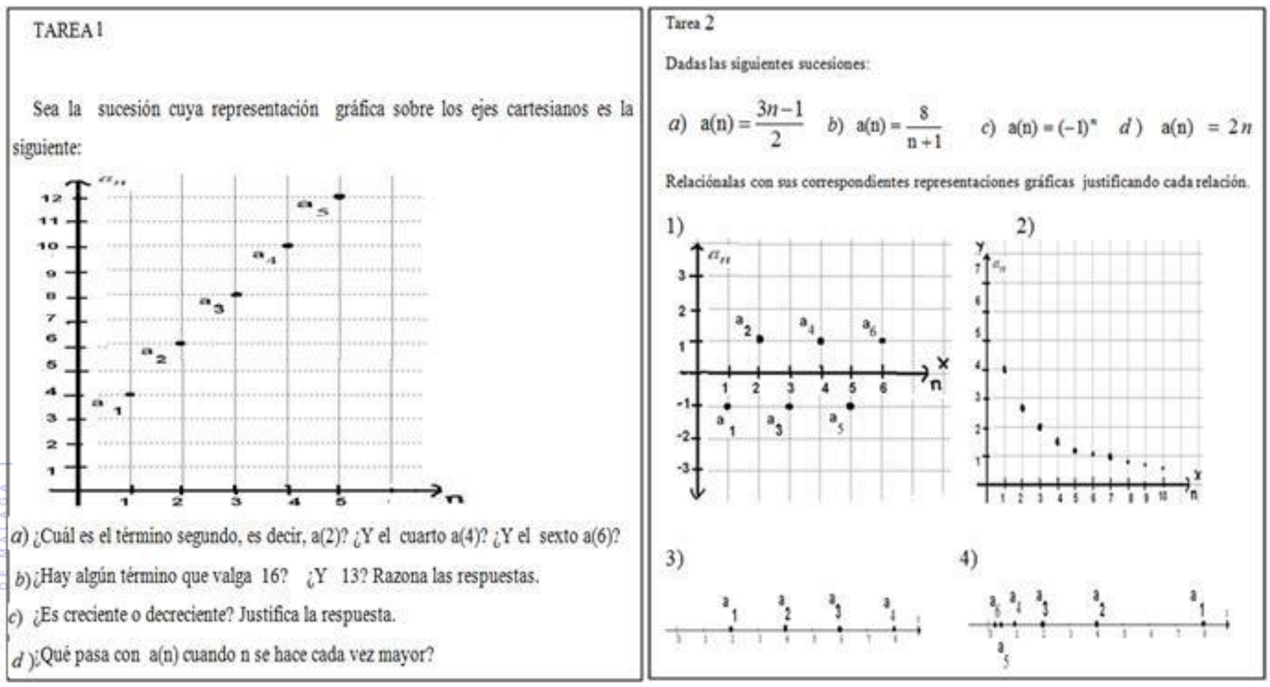


Figura 1. Tareas 1 y 2 del primer del cuestionario

ELEMENTOS DE SUCESIONES.
E1 Sucesión (como lista): secuencia de números Reales dispuestos en un orden, es decir, Para todo número natural n existe un número real.
E2 Términos: se definen como los integrantes de la sucesión, el lugar que ocupa lo determina su posición que se denota por un subíndice que pertenece a los números naturales.
E3 Término general: se define como el término que dependiendo de su posición, es decir, subíndice sabemos su valor, y se denota por "a_n" (con n perteneciente a los naturales)
E4 Progresión aritmética: sucesión donde cada término se obtiene del anterior sumándole una cantidad fija que denominamos diferencia.
E5 Progresión Geométrica: sucesión donde cada término se obtiene del anterior multiplicándole una cantidad fija que denominamos razón.
E6 Sucesión Creciente: se dice que una sucesión $\{a_n, n \in N\}$ es creciente si cada término es menor o igual que el término siguiente.
E7 Sucesión Decreciente: se dice que una sucesión $\{a_n, n \in N\}$ es decreciente si cada término es mayor o igual que el término siguiente.

Figura 2.Elementos matemáticos vinculados a las tareas del cuestionario

Procedimiento de análisis

El análisis se centró en identificar los elementos matemáticos y las relaciones lógicas, modos de representación, cambios de registro entre ellos y la coordinación en las distintas representaciones,que se ponían de manifiesto en las respuestas de los estudiantes en las diferentes tareas. Identificando, además, las formas de conocer el concepto de acuerdo con la teoría APOS. Los resultados que presentamos en este trabajo proceden del análisis de los dos cuestionarios contestados por cada uno de los estudiantes. A continuación mostramos cómo hemos realizado este procedimiento a través de un ejemplo.

El estudiante 3b7, en el primer cuestionario, en la resolución del apartado a) de la tarea 1 (figura 1) hace un uso correcto delos elementos sucesión (E1), término (E2) y término general (E3) en modo de representación gráfico-cartesiano, haciendo una lectura correcta de los términos de la sucesión dada en modo gráfico-cartesiano. Se produce un cambio de registro entre el modo gráfico-cartesiano y el modo numérico. Esta forma proceder del estudiante pone de manifiesto una concepción acción de la sucesión como lista numérica, ya que es posible calcular términos concretos que vienen directamente de la gráfica-cartesiana.

a) $a_2=6$, $a_4=10$, $a_6=14$ | Lo miramos en la sucesión

Figura 3. Respuesta del estudiante 3b7 al apartado a de la tarea 1 del primer cuestionario

El estudiante 3b7 en la resolución del apartado b) de la tarea 1 (figura 1) hace uso del elemento término general dado en forma recurrente para resolver la primera parte del apartado b).

b) 16, sí, a_7 = 13, no

Figura 4. Respuesta del estudiante 3b7 al apartado b de la tarea 1 del primer cuestionario

En el segundo cuestionario, le preguntamos qué sucede para el valor 13:

E: para el apartado b) dices que a7 vale 16 ¿por qué?

3b7: porque se ve en la gráfica

E: ¿y el valor 13?

3b7: no, pues va de dos en dos

Esta forma proceder del estudiante pone de manifiesto una concepción proceso de la sucesión como lista numérica, ya que le es posible calcular términos que no vienen explícitamente dados en la gráfica-cartesiana, a través de la reflexión sobre las acciones. El estudiante deduce el término identificando la secuencia general (es decir, la diferencia en una progresión aritmética (E4)).

Del análisis conjunto de los dos cuestionarios podemos concluir que el estudiante 3b7 hace uso correcto de los elementos matemáticos relacionados con los sistemas de representación numérico y gráfico-cartesiano y los coordina al realizar el cambio de registro de un modo de representación a otro para responder de forma correcta la tarea.

Este procedimiento de análisis se llevó a cabo de forma sistemática por el grupo de investigadores con todas las tareas del cuestionario de cada uno de los estudiantes, lo que permitió inferir el desarrollo de la comprensión del concepto de sucesión como lista numérica puesta de manifiesto por cada uno de ellos.

RESULTADOS

Los resultados del análisis de las respuestas de los estudiantes a los dos cuestionarios se muestran en la siguiente tabla (tabla 1), en la que se indica el número de estudiantes en cada nivel de desarrollo del esquema según hemos descrito en el marco teórico.

NIVELES	NUMERO DE ESTUDIANTES
INTRA	54
INTER	37
TRANS	14

Tabla 1. Número de estudiantes asignados a los diferentes niveles de desarrollo del esquema de sucesión.

En esta sección de resultados nos centrándonos en los 37 estudiantes situados en el nivel INTER del desarrollo del esquema. En el análisis de las respuestas hemos observado dentro de este nivel dos subniveles. Por un lado están los estudiantes que hacen uso de elementos matemáticos analíticos y/o gráfico lineal de forma correcta en la resolución de las tareas y muestran evidencias de cambios de registroentre los modos de representación analítico y gráfico-lineal, y no hacen uso del modo gráfico-cartesiano. Y por otro lado, están los estudiantes que hacen uso de los elementos matemáticos analíticosy/o gráfico (lineal y cartesiano) de forma correcta en la resolución de las tareas y muestran esbozos de síntesis de los modos de representación analíticoy gráfico (lineal y cartesiano).Esto permite considerar que los diferentes usos que se hacen del modo gráfico pueden ser considerados un indicador de subniveles del nivel INTER del desarrollo de la comprensión del esquema de sucesión como lista numérica.

Esta sección la hemos organizado en dos apartados, en un primer apartado mostramos el uso correcto del modo gráfico-lineal e incorrecto del modo gráfico-cartesiano, y en un segundo apartado mostramos el uso correcto del modo gráfico en sus dos formas (lineal y cartesiano).

Uso del modo de representación gráfico-lineal

El estudiante 4c30 nos muestra evidencias de que conoce los dos modos de representación gráfico para las sucesiones (gráfico-lineal y gráfico-cartesiano), así en la respuesta a la tarea 2 justifica de la siguiente forma "*las sucesiones pueden representarse en dos tipos de gráficos, con ejes cartesianos donde aparecen dos valores y en una línea en la que sólo se representa un valor*". Además, pone de manifiesto un uso correcto del modo gráfico-lineal al emparejar el apartado d) con el número 3) de las representaciones gráficas, justificando de la siguiente forma "*la representación número 3) corresponde a la sucesión d), puesto que la "a(n)" aumenta de dos en dos, ya que a(n)= 2n, por lo que a(1)= 2, a(2)= 4 y a(3)= 6*". Con esta respuesta el estudiante ha hecho una conversión entre modos de representación, de modo algebraico a modo gráfico-lineal de manera correcta al hacer el emparejamiento. Y justificarlo a través del uso de los elementos matemáticos de sucesión (E1), término (E2), término general (E3).

Sin embargo, no se pone de manifiesto el uso correcto por parte del estudiante de los elementos matemáticos cuando son dados en modo gráfico-cartesiano. Así en la tarea 1, este mismo estudiante 4c30 cuando se le pregunta por el valor del segundo término de una sucesión dada en modo gráfico-cartesiano, no es capaz de coordinar ambos ejes cartesianos respondiendo con los valores de la sucesión sin vincularlos al lugar que ocupan como término de la sucesión. Dicha coordinación se pondría de manifiesto si respondiera a(2)=6 , a(4)=10... en lugar de "*a(n)=6, a(n)=10…*" como contesta el estudiante. Esto puede ser considerado una manifestación de la no coordinación de ambos ejes del plano cartesiano, hecho que le ha impedido hacer uso de los elementos matemáticos de sucesión (E1), término (E2) y término general (E3) que usa en la tarea 2.Para confirma esta inferencia, observamos cómo el estudiante responde el apartado b)de la tarea 1, al preguntar si hay algún término que valga 16, el estudiante contesta "*si y=16, (7, 16), si x=16 (16, 34)*" (ver figura 6). Esto nos permite corroborar que este estudiante no sabe el significado de los ejes x e y cuando se trata de una sucesión numérica dada en forma gráfica- cartesiana, pues lo mismo asigna 16 como término de la sucesión (*y*), que como lugar que ocupa el término en la sucesión (*x*).

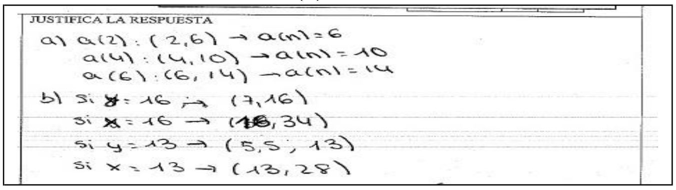

JUSTIFICA LA RESPUESTA
a) a(2) : (2,6) → a(n) = 6
a(4) : (4,10) → a(n) = 10
a(6) : (6,14) → a(n) = 14
b) si ~~y~~ = 16 → (7,16)
si ~~x~~ = 16 → (16,34)
si y = 13 → (5,5 ; 13)
si x = 13 → (13,28)

Figura 5. Respuesta del estudiante 4c30 a la tarea 1 del primer cuestionario.

Con el fin de seguir indagando sobre la comprensión del estudiante sobre las diferentes representaciones de modo gráfico (lineal y cartesiano), le preguntamos en el segundo cuestionario cuál de los dos tipos de gráficas (lineal, cartesiana) le resultaba más fácil y porqué, a lo que este estudiante contestó que le resulta más fácil el modo gráfico-lineal "*porque para ver los puntos en la cartesiana tengo fijarme en dos puntos distintos y en la lineal solo en uno*". Esta forma de responder del estudiante, evidencia la necesaria coordinación entre ambos ejes (lugar que ocupa y término correspondiente) en la representación cartesiana, hecho que no sucede en la representación lineal que no requiere coordinación.

Este estudiante ha hecho uso en la resolución de las tareas de elementos matemáticos en modo algebraico y en modo gráfico-lineal, haciendo cambios de registros entre dichos modos, pero no ha sido capaz de hacer uso correcto de estos mismos elementos matemáticos en modo gráfico-cartesiano. Esto pone de manifiesto que el uso por parte del estudiante de elementos matemáticos en modo gráfico-cartesiano durante la resolución de problemas es un indicador del nivel de comprensión del concepto de sucesión numérica.

Uso del modo de representación gráfico en sus dos formas (lineal y cartesiano)

El estudiante 3d5, hace uso de los elementos matemáticos sucesión (E1), término (E2), término general (E3) y progresión aritmética (E4)para responder de forma correcta el apartado a) de la tarea 1 (figura 6) ,mostrando además, que hace la conversión de modos de representacióndel modo gráfico-cartesiano a los modos algebraico y numéricode manera correcta.

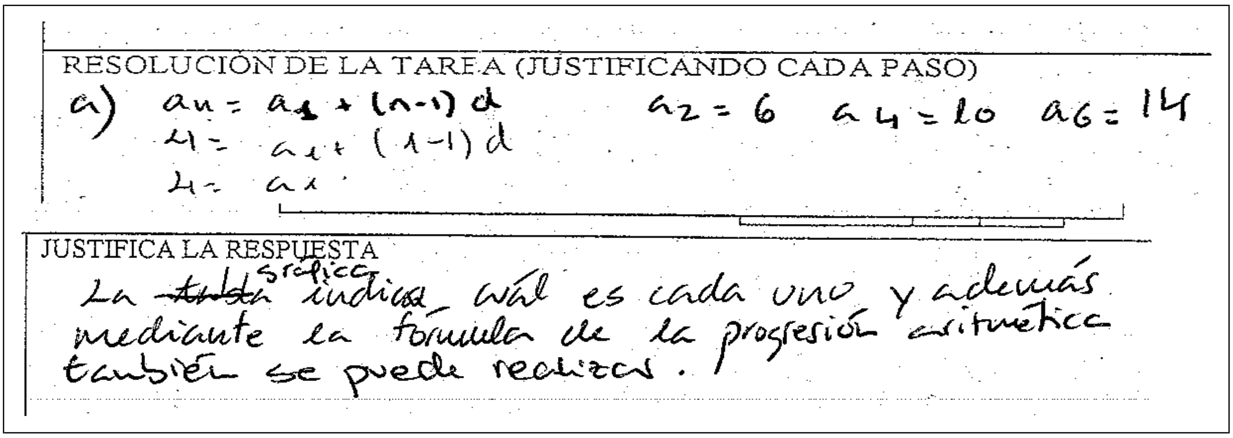
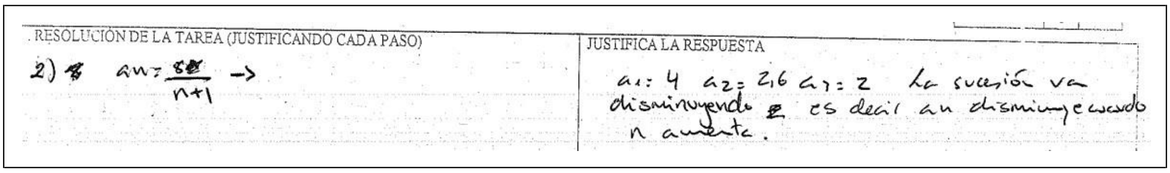

RESOLUCIÓN DE LA TAREA (JUSTIFICANDO CADA PASO)
a) an = a1 + (n-1) d   a2 = 6   a4 = 10   a6 = 14
4 = a1 + (1-1) d
4 = a1
JUSTIFICA LA RESPUESTA
La ~~tabla~~ gráfica indica cuál es cada uno y además mediante la fórmula de la progresión aritmética también se puede realizar.

Figura6. Respuesta del estudiante 3d5 al apartado a de la tarea 1 del primer cuestionario

Este estudiante justificasu respuesta haciendo un cambio de registro de la sucesión dada en modo gráfico-cartesiano a modo algebraico y numérico, es decir, 3d5 coordina los diferentes modos de representación de forma correcta.

En la resolución del apartado b) de la tarea 2, este estudiante hace uso delos elementosmatemáticos sucesión (E1), término (E2), término general (E3) y sucesión decreciente (E7) en modo algebraico y numérico para calcular los tres primeros términos de la sucesión, argumentando de forma correcta que es una sucesión que es decreciente: "*a_n disminuyendo n aumenta*", además cambia de registro estos elementos a modo gráfico-cartesiano al emparejar la gráfica 2) con la sucesión dada en modo algebraico b)en modo gráfico cartesiano (figura 7):


RESOLUCIÓN DE LA TAREA (JUSTIFICANDO CADA PASO)

2) $a_n = \frac{8n}{n+1}$ ->

JUSTIFICA LA RESPUESTA

a_1: 4 a_2= 2,6 a_3: 2 La sucesión va disminuyendo es decir an disminuye cuando n aumenta.

Figura 7. Respuesta del estudiante 3d5 al apartado a la tarea 2 del primer cuestionario.

Para el apartado a) de la tarea, hace uso de los elementossucesión (E1), término(E2) y término general (E3),sucesión creciente (E6) y sucesión decreciente (E7)en modosalgebraico y numérico y de los elementos en modo gráfico-cartesiano, el uso de estos elementos y su conversión de modos de representación a los modos gráfico lineal y cartesiano le hace afirmar que la sucesión dada por su término general en el apartado a) no se puede corresponder con la 4) es decir, 4) decrece y a) crece luego no coinciden, como responde en este apartado: "*Esta sucesión es errónea y no coincide con la gráfica ya que realmente la gráfica debería crecer, no decrecer como podemos ver en la gráfica*". Esta respuesta nos muestra la coordinación entre los diferentes modos de representación.

En la respuesta del apartado d) de la tarea 2 hace uso correcto de los elementos matemáticos sucesión (E1), término (E2) y término general (E3) y sucesión creciente (E6) para hallar los tres primeros términos de la sucesión y posteriormente comprobar a través de la conversión de modos de representación al modo gráfico-lineal que se corresponde con la gráfica 3), lo que justificade forma correcta:"*a_1=2, a_2 =4, a_3=6 La sucesión aumenta cuando n aumenta*". Mediante estas repuestas podemos observar la coordinación entre los diferentes modos de representación algebraico, numérico y gráfico lineal.

En el segundo cuestionario, al igual que con el estudianteanterior , con el fin de indagar sobre la comprensión del estudiante sobre las diferentes representaciones de modo gráfico (lineal y cartesiano), le preguntamos cuál de los dos tipos de gráficas (lineal, cartesiana) le resultaba más fácil y por qué, a lo que este estudiante contestó *"Me resulta más fácil de ver las gráficas de los ejes (refiriéndose al gráfico-cartesiano) ya que la sucesión está expresada de una forma más clara y limpia."*. Esta formade responder del estudiante, muestra la coordinación entre ambos ejes (lugar que ocupa y término correspondiente) en la representación cartesiana.

Lo que nos muestra que el uso correcto del modo de representación gráfico-cartesiano indica mayor grado dedesarrollo de la comprensión del esquema de sucesión como lista numérica que el uso correcto del modo de representación gráfico-lineal. Aquellos estudiantes que evidencian un uso correcto del modo gráfico-cartesiano, también son capaces de hacer un uso correcto del gráfico-lineal cuando lo exige la resolución de la tarea, pero no ocurre lo mismo en sentido inverso, es decir el uso correcto por parte del estudiante de elementos matemáticos del concepto de sucesión como lista numérica en modo gráfico-lineal no conlleva el uso de estos mismos elementos por parte del estudiante en modo gráfico-cartesiano cuando la resolución de la tarea lo exige, como queda evidenciado mediante la resolución de las tareas por parte de los estudiantes analizados.

CONCLUSIONES

El uso de diferentes sistemas de representación se ha considerado como un elemento clave para delimitar diferentes niveles de comprensión en matemáticas. Los resultados obtenidos en este trabajo, nos permiten concluir que distinguir entre el modo de representación gráfico-lineal y gráfico-cartesiano puede servir para caracterizar el desarrollo de la comprensión del esquema del concepto de sucesión como lista numérica en estudiantes de Educación Secundaria.

La consideración para la investigación de la comprensión del concepto de sucesión como lista numérica vinculada al modo de representación gráfico(lineal y cartesiano) nos permite abordar la identificación de diferentes subniveles de desarrollo del nivel inter, tal y como consideraba Piaget y García(1983).Los estudiantes caracterizados en el nivel INTER hacen uso correcto elementos matemáticos numéricos, algebraicos y/o gráfico lineal de forma correcta en la resolución de las tareas y muestran esbozos de síntesis de los modos de representación analítico y gráfico lineal. La diferencia de los subniveles de este nivel viene dada por el uso del modo gráfico cartesiano, 20 de los 37 estudiantes situados en el nivel INTER no hacen uso correcto del modo gráfico-cartesiano y 17 de los 37 estudiantes hacen uso correcto de este modo gráfico-cartesiano, en algunas situaciones (tabla 2).

SUBNIVELES DEL NIVEL INTER	NUMERO DE ESTUDIANTES
INTER 1	20
INTER	17

Tabla 2: Número de estudiantes asignados a los subniveles del nivel INTER.

La consideración de varios modos de representación, algebraico, numérico y gráfico-lineal y gráfico cartesiano, puede aportar indicadores de los diferentes niveles y subniveles de desarrollo de la comprensión del concepto de sucesión como lista numérica como ya señalábamos en trabajos anteriores (Bajo, Sánchez-Matamoros y Gavilán, 2015). La potencialidad de este trabajo ha sido poder diferenciar dentro del modo de representación gráfico, dos modalidades, el modo gráfico-lineal y el modo gráfico-cartesiano, como característico o indicador de subnivelesdel nivel de desarrollo INTER de comprensión vinculado al concepto de sucesión como lista numérica.

REFERENCIAS

Aranda, C. y Callejo, M.L. (2015). Perfiles de estudiantes en la comprensión de la aproximación al área de la superficie bajo una curva. En C. Fernández, M. Molina, N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX*(pp.123-131). Alicante: SEIEM.

Ariza, A. y Llinares, S.(2009) Sobre la aplicación y uso del concepto de derivada en el estudio de conceptos económicos en estudiantes de Bachillerato y Universidad. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(1), 121-136.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Berlin: Springer.

Bajo Benito, J. M., Sánchez-Matamoros, G. y Gavilán Izquierdo, J. M. (2015). Las progresiones como indicador de la comprensión del concepto de sucesión numérica en alumnos de segundo ciclo de enseñanza secundaria obligatoria. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 143-151). Alicante: SEIEM.

BOE (Boletín Oficial del Estado) (2007). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. (BOE nº 5,pp. 677-773). Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

BOJA (Boletín Oficial de la Junta de Andalucía) (2007). ORDEN de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía. (BOJA nº171, pp. 23-65). Sevilla: Consejería de Educación.

Boigues, F.J., Llinares, S. y Estruch, V.D. (2010). Desarrollo de un esquema de la integral definida en estudiantes de ingenierías relacionadas con las ciencias de la naturaleza. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13 (3), 129–158.

Codes, M., Delgado, M. L., González, M. T., y Monterrubio, M. C. (2013) Comprensión del concepto de serie numérica a través del modelo de Pirie y Kieren. *Enseñanza de las Ciencias*, 31(3), 135-154.

Duval, R.(2006). Un tema crucial en la Educación Matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *9*(1), 143-168.

Gavilán, J. M. (2010). *El papel del profesor en la enseñanza de la derivada. Análisis desde una perspectiva cognitiva*. Sevilla: Digital @tres.

Gonzalez, J., Medina, P., Vilanova, S. y Astiz, M. (2011). Un aporte para trabajar sucesiones numéricas con Geogebra. *Revista de Educación Matemática*, 26, 1-19.

González, M. T., y Aldana, E. (2010). Comprensión de la integral definida en el marco de la teoría APOE. En A. Contreras y L. Ordoñez (eds.) *Jornadas de investigación en didáctica del Análisis Matemático* (pp. 4-22). Baeza: SEIEM.

Mamona, J. (1990),'Sequences and series–Sequences and functions: Students' confusions', *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 21(2), 333–337.*

Michael A. McDonald, David M. y Mathews, K. H. S. (2000). Understanding sequences: A tale of two objects. *Research in Collegiate Mathematics Education IV, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island*, *8*, 77–102.

Orton, A. (1983). Students' understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics*, 14(1), 1-18.

Piaget, J., y García, R. (1983). *Psicogénesis e historia de la ciencia.*México:S. XXI. Editores.

Pons, J., Valls, J. y Llinares, S. (2012). La comprensión de la aproximación a un número en el acceso al significado de límite de una función en un punto. En A. Estepa et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 435-445). Baeza: SEIEM.

Przenioslo, M. (2006). Conceptions of a sequence formed in secondary schools. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *37*(7), 805–823.

Roh, K.H. (2008). Students' Images and their Understanding of Definitions of the Limit of a Sequence. *Educational Studies in Mathematics*, 69, pp. 217-233.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquemade derivada. *Enseñanza de las Ciencias, 24*(1), 85-98.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática.*Relime, 11*(2), 267-296.

Sierpinska,A.(1990), 'Some remarks on understanding in mathematics'. *For the Learning of Mathematics,*10(3), 24–36.

Stewart, J. (2006). *Cálculo, Conceptos y Contextos 3ª ed.*Valencia: S.A. EdicionesParaninfo.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, *17*(1), 5-31.

Valls, J., Pons, J. y Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(3), 325-338.

PATRONES EN EL DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO INFERENCIAL INFORMAL: INTRODUCCIÓN A LAS PRUEBAS DE SIGNIFICANCIA EN EL BACHILLERATO

Patterns in the development of informal inferential reasoning: introduction to significance tests in high school

Silvestre, E., Sánchez, E.

CINVESTAV-IPN

Resumen

En este trabajo se presentan los resultados iniciales de la aplicación de una actividad correspondiente a la introducción a las pruebas de significancia a estudiantes de bachillerato (17-18 años) con la intención de analizar el tipo de acciones y razonamiento que exhiben partiendo de que han sido instruidos en temas básicos de inferencia estadística mediante un enfoque informal (uso de simulaciones aleatorias y distribuciones muestrales). Se observó un uso y comprensión de conceptos estadísticos como variabilidad, distribución y valores críticos para generar un criterio de toma de decisiones, así como ciertos errores y limitaciones que podrían obstaculizar el desarrollo de un razonamiento inferencial informal apropiado.

Palabras clave: *Razonamiento inferencial informal, pruebas de significancia, distribución muestral.*

Abstract

In this paper we present the initial results of the application of an introductory activity correspondent to an introduction to significance tests in order to analyze the type of actions and reasoning that high school students (17-18 years) exhibit considering that they have been previously instructed on basic topics of inferential statistics with an informal approach (usage of random simulations and empirical sampling distributions). We observed a usage and understanding of statistical concepts such as variability, distribution and critic values aimed to generate a criteria for decision making and some errors and limitations that could inhibit an appropriate development of an informal inferential reasoning.

Keywords: *Informal inferential reasoning, significance tests, sampling distribution.*

INTRODUCCIÓN

Algunos investigadores han sugerido que diversos conflictos y limitaciones que se presentan, no sólo por parte de estudiantes en general sino también por profesores y profesionistas, a la hora de realizar inferencias estadísticas están relacionados con una formación y comprensión deficiente (o ausente) sobre conceptos estadísticos como variabilidad, variabilidad muestral y distribuciones muestrales. Por ejemplo, la revisión proporcionada por Herradine, Batanero & Rossman (2011) señala que las personas en general tienden a presentar creencias e intuiciones erróneas sobre muestreo e inferencia (por ejemplo, la heurística de la representatividad, ley de los números pequeños, incapacidad para inferir a partir de un número grande de muestras, entre otros) que la enseñanza tradicional no suele considerar e incidir dado que tiende a enfocarse en cálculos y procedimientos. En adición a esto, en el caso de México se incorpora un contenido muy limitado (o inexistente) sobre estadística inferencial al currículum matemático para niveles pre-universitarios, lo cual provee muy pocas o nulas oportunidades al estudiante de enfrentarse en un ambiente

Silvestre, E., Sánchez, E.. (2016). Patrones en el desarrollo del razonamiento inferencial informa. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp321-330). Málaga: SEIEM.

.

escolarizado a situaciones problema donde se exponga la necesidad de estimar con base en resultados muestrales. Esto se considera puede generar un “vacío” en su formación al no permitirle generar conocimientos que promuevan el desarrollo gradual de un de razonamiento tipo “puente” entre la lógica subyacente (operatividad y relaciones entre conceptos) y la utilización e interpretación de métodos básicos de inferencia formal (como un intervalo de confianza o una prueba de significancia). En reconocimiento de una problemática similar, ciertos investigadores han propuesto aproximaciones o métodos didácticos alternativos fuertemente relacionados al uso y comprensión de conceptos estadísticos, como variabilidad y distribuciones muestrales empíricas, así como una utilización recurrente de simulaciones aleatorias computarizadas para desarrollar métodos (informales) como solución en situaciones problema de inferencia estadística. Estas aproximaciones didácticas son denominadas a menudo como inferencia estadística informal (IEI).

El incidir en esta problemática nos ha motivado a plantear la pregunta de investigación: ¿qué tipo de razonamiento, basado en la observación y análisis de acciones y estrategias de solución, presentaría un estudiante de nivel bachillerato (momento en nuestro país donde suele aparecer el primer curso introductorio de Probabilidad y Estadística), que ha llevado a cabo un proceso de aprendizaje sobre distribuciones muestrales que incluye el uso de simulaciones aleatorias bajo un enfoque informal, frente a situaciones problema que requieren la aplicación (informal) de una prueba de significancia? Para abonar a la respuesta de esta pregunta, en esta comunicación se presentan los resultados y análisis preliminares de una actividad, que forma parte de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje general (THA) (Simon, 1995; Simon y Tzur, 2004), que corresponde a una introducción a las pruebas de significancia. Es importante tener en mente que el objetivo de esta aplicación no es de formación o aprendizaje, sino el de explorar e identificar patrones sobre el razonamiento de los estudiantes (errores, limitaciones, sesgos, etc.) cuando éstos se enfrentan por primera ocasión a una prueba de significancia y partiendo de que sus conocimientos previos incluyen a la distribución muestral, probabilidad y valores críticos.

A continuación se describen las consideraciones metodológicas del estudio; el diseño, desarrollo y resultados de la actividad; así como una serie de reflexiones generales derivadas del análisis del desempeño de los estudiantes.

ALGUNA LITERATURA RELACIONADA

Sobre distribuciones muestrales y el uso de la tecnología en la enseñanza de la estadística

Diversos elementos interrelacionados intervienen en el proceso de construcción, aplicación e interpretación de herramientas de inferencia estadística, tales como muestra y población, parámetro y estimador, variabilidad y distribución, probabilidad y confianza, entre otros. En particular, estudios realizados como el de Chance, delMas & Garfield (2004) y el de Liu y Thompson (2007) destacan que una comprensión deficiente o limitada sobre el concepto de distribución muestral puede opacar el desarrollo de un razonamiento apropiado sobre la inferencia estadística. Actualmente se ha desarrollado paquetería especializada en apoyar el proceso de formación de un estudiante en conceptos de inferencia estadística y probabilidad como Fathom, que permite, entre otras aplicaciones, la generación de simulaciones aleatorias que dan lugar a la emergencia de conceptos abstractos como la distribución muestral; mediante la modificación de parámetros de la distribución (tamaño de muestra, parámetro poblacional, número de muestras) se brinda al estudiante la posibilidad de estudiar el comportamiento de este concepto evitando un tratamiento que tradicionalmente es teórico. Esta recurso es clave para potencialmente promover el desarrollo del razonamiento estadístico de los estudiantes (Chance, Ben-Zvi, Garfield & Medina; 2007).

Sobre razonamiento inferencial informal

El trabajo realizado por distintos grupos de investigadores ha dado como resultado una variedad de definiciones sobre la IEI y el razonamiento en que se apoya (RII). Zieffler, delMas & Reading (2008) parten de distintas caracterizaciones de estos conceptos para brindar una sobre lo que significa el RII: “la forma en que los estudiantes usan sus conocimientos informales de estadística para crear argumentos basados en muestras observadas para sustentar las inferencias sobre la población desconocida” (p.44). Rossman (2008) describe una inferencia estadística como una generalización que va más allá de los datos disponibles hacia una población más grande, o la realización de una conclusión más profunda sobre la relación entre las variables (esto mediante un modelo probabilístico que relacione a los datos con dicha generalización o conclusión). También sugiere que las simulaciones aleatorias son una forma efectiva e informal para introducir a los estudiantes a la lógica de la inferencia estadística. Makar, Bakker & Ben-Zvi (2011) caracterizan la IEI como una generalización probabilística sobre los patrones revelados por la información (datos) disponibles; dicha generalización es el resultado de la aplicación de un razonamiento inferencial informal (RII). En este trabajo se adopta esta caracterización para el RII.

Sobre pruebas de significancia

Los errores sobre la comprensión e interpretación de las pruebas de significancia han sido uno de los más documentados en el último par de décadas en lo que se refiere a la didáctica de la estadística. Destacamos el estudio realizado por Vallecillos (1999) donde describe algunas concepciones erróneas sobre el tipo de prueba que ofrecen las pruebas de significancia (como lo es el asumirla como una prueba matemática de la verdad de cierta hipótesis). Batanero y Díaz (2015) describen errores comunes tales como la comprensión inadecuada del nivel de significancia (α) al considerarla como $\alpha = P(H_0$ es cierta | se ha rechazado $H_0)$ cuando en realidad es $\alpha = P($rechazar $H_0 \mid H_0$ es cierta$)$. En este último trabajo también se distinguen las diferencias entre los métodos de Fisher, Neyman y Pearson para una prueba de significancia y se brinda una descripción de lo que sería realizar una prueba de significancia bajo el método de Fisher (interés en rechazar una hipótesis nula con un cierto nivel de significancia) mediante un enfoque informal; finalmente se incluyen algunas consideraciones de cuidado sobre posibles limitaciones conceptuales que este procedimiento informal puede generar (como la falta de énfasis en la probabilidad condicional correspondiente al p-valor).

MÉTODO

Participantes/sujetos. Los antecedentes de los 42 estudiantes que participaron en el estudio son un curso de Estadística y Probabilidad I (completado en el semestre previo) donde se atendieron los contenidos de: representaciones gráficas, medidas de tendencia central y de variabilidad, enfoque clásico y frecuencial de la probabilidad, cálculo de probabilidad para eventos simples y compuestos; y lo correspondiente a los tópicos incluidos en la THA: distribución muestral empírica de proporciones, efectos del tamaño de muestra en la distribución, valores críticos (introducidos desde el inicio de la THA como valores muestrales a partir de los cuales los siguientes, menores o mayores, se consideran valores poco frecuentes/probables de ocurrir dado que representan el 10% o 5% de todos los obtenidos en la simulación) y cálculo de probabilidad de obtener cierto valor muestral a través de frecuencias relativas.

Recolección de datos. Los datos recabados constaron de hojas de trabajo (físicas) en donde los estudiantes respondieron los cuestionamientos; observaciones de dos profesores/investigadores que acudieron a la sesión (además de las de los presentes autores); y algunas entrevistas breves que fueron aplicadas durante y después de la aplicación de la actividad. La actividad fue realizada en una sesión de aproximadamente 1.5 horas.

Método de análisis. A partir de los datos recabados se realizó una codificación y categorización inicial que está basada en patrones recurrentes de acciones específicas que realizaron los estudiantes para resolver la actividad. Dichas categorías hacen referencia a la identificación y uso de los conceptos de variabilidad (muestral) y valores críticos (empíricos) de una distribución muestral. Estos códigos y categorías son utilizados para brindar mayoritariamente una descripción sobre el tipo de respuestas obtenidas a partir de lo cual se plantean patrones acerca del razonamiento exhibido por los estudiantes.

Descripción y estrategia de aplicación de la actividad. Los componentes (en términos de una THA) de la actividad son: a) objetivo de aprendizaje: que el estudiante realice una prueba de significancia mediante el enfoque de Neyman y Pearson de manera informal, es decir, que elija una de dos hipótesis H_0 o H_1 (nula o alternativa) como la más factible o plausible con base en la frecuencia relativa de obtención de un cierto valor muestral.

b) la actividad/situación problema se divide en tres momentos. En el primero el profesor organiza a los estudiantes en parejas y plantea la situación problema cuyo texto corresponde a: “Una fábrica dedicada la generación de componentes para computadora posee cuatro máquinas especializadas en producir tarjetas madre para laptop. De manera irremediable, cada máquina produce de forma aleatoria una cierta cantidad de tarjetas defectuosas en cierto período de tiempo. El departamento de control y calidad indica que las máquinas pueden presentar hasta 10% de tarjetas defectuosas en su producción, de lo contrario éstas deben ser enviadas a revisión para una posible reparación. Ahora, un equipo de técnicos recolectó en cierto día una muestra aleatoria de 120 tarjetas de cada máquina para analizar el número de tarjetas defectuosas que se presentan, obteniendo así los resultados: máquina A - 42 tarjetas defectuosas, máquina B - 21, máquina C - 27 y máquina D - 15. Con base en estos resultados muestrales, ¿cuáles máquinas consideras son necesarias mandar a revisión?”.

A partir del planteamiento de esta pregunta se abre un espacio de aproximadamente 15 minutos para que los estudiantes respondan el mismo de manera libre, produciendo y entregando así la primer hoja de trabajo al profesor. Una vez hecho esto, se inicia el segundo momento de la actividad en donde el profesor utiliza Fathom para generar un simulador de porcentajes muestrales dado un cierto parámetro poblacional conocido (figura 1, izquierda). Este simulador de porcentajes muestrales utiliza el contexto de una actividad de la THA que había sido previamente trabajada donde se simula la toma de muestras de una población finita constituida de frijoles negros y pintos (50% cada uno). Tras haber realizado y exhibido algunas simulaciones del porcentaje muestral, se retoma la pregunta inicial: “A partir de lo observado en el simulador, ¿cambiarías algo en tu respuesta anterior? (cuáles máquinas enviar a revisión y porqué)”. Se abre nuevamente un espacio para que los estudiantes respondan el cuestionamiento y entreguen la segunda hoja de trabajo al profesor.

Después de la entrega de la segunda hoja de trabajo, el tercer momento de la actividad se inicia donde el profesor utiliza un archivo previamente diseñado en Fathom donde se exhibe la simulación de una distribución muestral empírica en particular de 300 muestras aleatorias, cada una de 120 tarjetas provenientes de una máquina Z que se sabe cumple con tener un 10% de tarjetas defectuosas en su producción (figura 1, derecha). En esta gráfica se incluyen los valores críticos que corresponde al 95% de confianza y el promedio de la distribución muestral (líneas verticales).

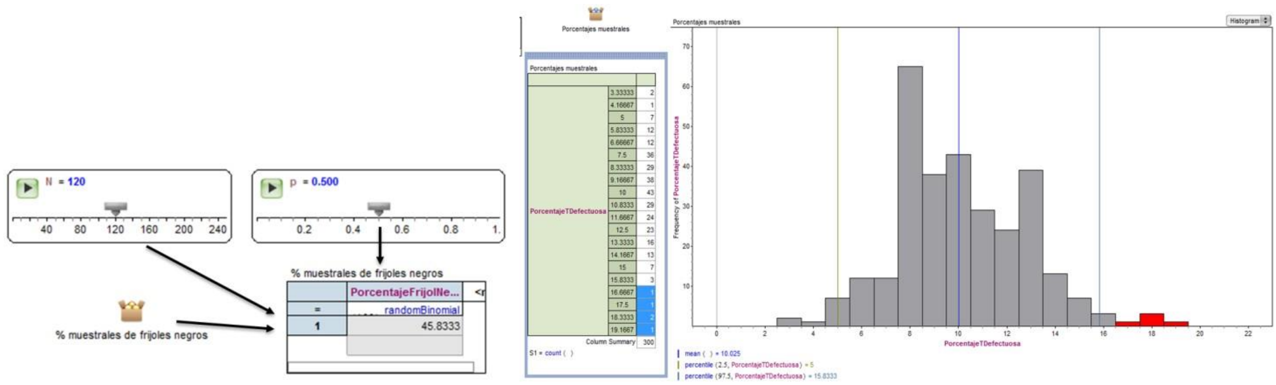


Figura 10. Simulación de un porcentaje muestral proveniente de una población con parámetro de 50% (izquierda) y simulación de una distribución muestral empírica de una población (máquina Z) con parámetro del 10% (derecha).

Tras haber realizado una explicación breve sobre los componentes del archivo (distribución muestral y valores agregados) que pertenecen a la máquina Z, se brinda a los estudiantes un espacio para que respondan la pregunta “Con base en lo observado en las simulaciones de la distribución muestral, ¿cuáles máquinas consideras son necesarias mandar a revisión?” y entreguen su tercer y última hoja de trabajo al profesor, concluyendo así con la aplicación de la actividad.

Como puede observarse, en el último momento de la actividad se plantean de forma implícita H_0 (el número de tarjetas defectuosas está controlado dado que es menor o igual al 10%) y H_1 (el número de tarjetas defectuosas excede el 10% permitido) a través de la comparación de los valores muestrales con la máquina Z. También es importante tener en consideración que los estudiantes no diseñan ni manipulan ninguno los archivos de Fathom mencionados durante la aplicación de la actividad, y que el nivel de significación está previamente establecido ya que se trabajaron valores críticos con niveles de 5% y 10% en actividades previas de la THA (en contextos y situaciones diferentes a las de una prueba de significancia).

Finalmente, el componente c) de la actividad corresponde a las hipótesis de aprendizaje para los cuestionamientos planteados. De acuerdo al orden de aparición de éstos, las hipótesis son: 1) los estudiantes no considerarán la variabilidad muestral que puede presentarse respecto al número de tarjetas defectuosas y enviarán todas las máquinas a revisión dado que sobrepasan el 10% permitido; 2) una vez que se observa que puede presentarse variabilidad muestral, los estudiantes enviarán a revisión las máquinas A y C dado que es muy poco probable (basados en la observación de la frecuencia relativa de aparición) que la variabilidad muestral genere porcentajes muestrales tan lejanos al 10%, pero generará dudas sobre esta decisión para B y D (¿producto de la variabilidad muestral o un porcentaje poblacional mayor al 10%?); 3) basado en su conocimiento previo de la distribución muestral, probabilidad y los valores críticos determinará que todas las máquinas, excepto D, deben ser enviadas a revisión dado que sus porcentajes muestrales están fuera del rango de los valores críticos, siendo entonces poco probable que esas máquinas (A,B y C) posean un porcentaje menor o igual al 10% de tarjetas defectuosas.

RESULTADOS

A continuación se describen las acciones realizadas por los estudiantes para cada momento de la actividad. En el primer momento de la actividad se obtuvo:

Tabla 1. Resultados del primer momento de la actividad.

Identifica y acepta variabilidad muestral (7 parejas)	*No acepta variabilidad muestral (14 parejas)*
Manda A, B y C a revisión pero duda, posterga o no envía D, 5 parejas.	Manda todas a revisión ya que exceden el 10%, 12 parejas.
Manda a revisión A y C pero duda en B y D, 2 parejas.	Manda todas a revisión pero señala la cercanía de D al 10%, 2 parejas.

Para este cuestionamiento se registraron 14 parejas (66.7%) cuya decisión fue enviar todas las máquinas a revisión dado que su valor muestral excede el 10% permitido; de éstas, dos señalan que el “error” de D hace no urgente la revisión de esta máquina pero igualmente mantienen la decisión de revisarla al igual que el resto. Como ejemplo de este tipo de respuestas, la pareja 8 (P8) respondió “mandaríamos a reparar todas las máquinas ya que el límite permitido de tarjetas defectuosas es el 10% y todas las máquinas rebasaron ese porcentaje, pues el máximo de tarjetas defectuosas que deberían salir serían 12 de una muestra de 120”. En cambio, siete parejas (33.3%) no envían a revisión todas las máquinas de una forma tan determinista y centran su atención en D o en D y B; de éstas cinco señalan explícitamente que el error en D es aceptable ya que la diferencia con el 10% es considerada muy pequeña debido a posibles variaciones y dos más brindan argumentos similares para D y B. Como ejemplo, P2 mencionó:

> Se mandarían a revisión las máquinas A, B y C de manera inmediata debido a que exceden el 10% que se permitía como margen de error. De la misma manera se mandaría a revisar la máquina D, pero esa, se haría dicha operación en un tiempo posterior, debido a que no hay mucha variación en el margen de error.

A pesar de haber generado una discusión y reflexión al momento del planteamiento del problema donde se hace énfasis en la naturaleza aleatoria de la cantidad de tarjetas defectuosas producidas en un cierto período de tiempo, estas respuestas sugieren que más de la mitad de los estudiantes no consideró la idea de que puede presentarse variabilidad muestral independientemente del porcentaje de tarjetas defectuosas que posea esa máquina en particular.

En el segundo momento de la actividad se obtuvo lo siguiente seccionado a partir de los resultados del momento previo:

Tabla 2. Resultados del segundo momento de la actividad según la clasificación inicial.

	Identifica y acepta variabilidad muestral (7 parejas)	*No acepta variabilidad muestral (14 parejas)*
Cambia decisión inicial	Incluye B en la no revisión, 2 parejas. Duda sobre revisar cualquier máquina, 1 pareja.	Considera ahora la variabilidad muestral y por lo tanto las máquinas B y D no se envían/dudan sobre mandarlas a revisión, 8 parejas. Considera lo anterior sólo para D, 3 parejas.

No cambia decisión inicial	Considera B y D/solo D se encuentra dentro de un rango aceptable de variación alrededor del 10%. 4 parejas.	Determina que la información que brinda el simulador no es relevante/útil, 3 parejas.

Para el grupo que parece identificó y aceptó inicialmente variabilidad muestral, dos parejas buscan refinar o precisar su decisión previa al observar las variaciones que se producen en las muestras a través del simulador y argumentan que los errores presentados son admisibles dentro de algún rango aceptable de variación alrededor del 10%; mientras que otra pareja parece entrar en conflicto y toma la postura "extrema" opuesta y sugiere reducir la variabilidad muestral aumentando el tamaño de muestra para obtener resultados muestrales más confiables. Asimismo cuatro parejas de este grupo refuerzan su decisión previa incorporando a su argumentación esta idea de un rango aceptable de variación alrededor del 10%. Como ejemplo de estas respuestas, P1 contestó (no cambia su decisión inicial):

> Porque se consideró que puede haber mucha variabilidad en el margen de error en las muestras, de manera que el % no va a ser igual ni exacto, puede aumentar o disminuir, pero la máquina D sigue teniendo el porcentaje menor y no tendría caso mandar a arreglarla, porque su % puede seguir siendo aceptable dentro del margen de error.

Por otro lado, del grupo que no consideró variabilidad muestral inicialmente, ocho parejas cambian su decisión inicial para D y B al incorporar esta idea de un rango aceptable de variación y tres parejas más lo hacen de la misma manera sólo para D. Como ejemplo de estas respuestas, P20 respondió (cambia decisión previa):

> Sí, en la máquina B no la mandaríamos a arreglar porque el simulador nos hizo recordar la variabilidad que puede haber en la muestra y no sobrepasa por mucho el límite establecido, ya que puede bajar o subir el % de tarjetas defectuosas siempre y cuando no sobresalga mucho. En la D considerando lo anterior no la mandaríamos a arreglar.

A pesar de que en general se observa que la mayoría de los estudiantes identifica e incorpora de alguna manera la variabilidad muestral a su decisión hasta este momento, tres parejas mantienen su postura inicial al no identificar esta idea dado que no relacionan lo que muestra el simulador de porcentajes muestrales (porcentaje muestral de frijoles de cierto tipo) con esta situación en particular. Finalmente, en el tercer momento de la actividad se exhibe una simulación de la distribución muestral empírica de la máquina Z (10% de artículos defectuosos) y se repite por última ocasión la pregunta inicial (cuáles máquinas enviar a revisión y porqué); obteniéndose los siguientes resultados generales:

Tabla 3. Resultados generales del tercer momento de la actividad

Utiliza valores críticos en su decisión (17 parejas)	Manda a revisar A, B y C pero no D. Utiliza apropiadamente el rango entre valores críticos (empíricos), 8 parejas.
	Manda a revisar A, B y C pero no D. Aplica criterio de cercanía del valor muestral al 10% y utiliza apropiadamente el rango entre valores críticos empíricos, 4 parejas.
	Manda a revisar A y C, no D y duda en B. Utiliza criterio de rango entre valores críticos pero duda en B, reconoce queda fuera de los límites, 2 parejas.
	Manda a revisar D o B y D pero no A y C. Aplica criterio de rango de valores críticos a la inversa, 3 parejas.
No utiliza valores críticos en su decisión (4 parejas)	Manda a revisar A, B y C pero no D. Utiliza criterio de cercanía respecto al 10%, 3 parejas.
	Mandar revisar A y C, no D y B. Utiliza criterio de cercanía al 10% y asume B y D como dentro de un rango aceptable, 1 pareja.

Encontramos que el 81% de las parejas utiliza los valores críticos en su regla de decisión sobre cuáles máquinas mandar a revisión. Ocho parejas se basan completamente en este criterio y mencionan que dado que los valores muestrales de A, B y C se encuentra fuera del rango de los valores críticos entonces son considerados valores muestrales muy poco probables (representan menos del 5% del total de las muestras) para una máquina con 10% de tarjetas defectuosas, por lo tanto estas máquinas deben ser enviadas a revisión; caso contrario en D que al pertenecer a este intervalo se considera un resultado muestral probable de obtener y por lo tanto no debe ser enviada a revisión. Como ejemplo de estas respuestas, P10 respondió:

> Mandaríamos a reparar las máquinas A, B y C porque los % de tarjetas defectuosas de estas máquinas quedan fuera de los valores críticos (representan el 2.5% de todos los valores obtenidos). La máquina D sería la única que no mandaríamos a reparar debido a que su % de tarjetas defectuosas entran en los valores críticos que representan el 95% de todos los valores obtenidos.

Asimismo, P3 respondió:

> Es seguro que se mandarían a reparar las máquinas A, B y C ya que son las que presentan mayor cantidad de tarjetas defectuosas y se encuentran fuera del rango de valor crítico superior (el rango 10-15%), por lo que la máquina D tiene menos probabilidad de producir tarjetas defectuosas.

Cuatro parejas utilizan este criterio pero no se deslindan del criterio de cercanía; es decir, consideran que si la distancia entre el valor muestral y el poblacional es muy elevada, bajo un criterio no especificado, entonces dicha máquina debe ser enviada a revisión y viceversa. Como primer ejemplo de esto, P17 contestó:

> Concluimos en que es necesario mandar a revisión las máquinas A, B y C ya que sus %'s sobrepasan por mucho el margen de error (10%), por lo que la máquina D sigue teniendo un % de error considerable dentro del rango, considerando la gráfica está dentro de los valores más probables de que las tarjetas no salgan defectuosas. Podemos decir que en las otras máquinas es menor la probabilidad de que se obtenga un 10% de error, por lo tanto un mayor número de tarjetas saldrían defectuosas.

Dos parejas aplican nuevamente el criterio del rango entre valores críticos pero no tienen claridad sobre una conclusión al observar que el valor muestral de B es el inmediato fuera del rango, siendo este un valor que sí aparece dentro de los porcentajes muestrales simulados y no los de A y C. Tres parejas aplican el criterio del rango entre valores críticos a la inversa, esto es, concluyen que si el valor muestral se encuentra dentro del rango entonces se espera produzca una mayor cantidad de tarjetas defectuosas y viceversa si se encuentra fuera de este, por lo tanto se determina se debe mandar a revisión B y D pero no A y C. Finalmente, el 19% de las parejas no incluyó en su decisión el criterio de los valores críticos de ninguna forma; tres parejas parecen ignorar estos valores y presentan dificultades para articular con mayor precisión argumentos basados en las simulaciones de la distribución muestral, apoyándose en mayor medida en el criterio de la cercanía, por ejemplo, P13 respondió:

> Mandaríamos a revisar las máquinas A, B y C ya que el % que se observa en las muestras es muy elevado lejano al 10% permitido. La máquina D no la mandaríamos a revisar ya que el 12.5% que se observa en la muestra es muy cercano al 10%. Después de realizar más muestras el valor se mantendría muy cercano a este 10%, caso contrario de las A, B y C que está muy alejado.

Una pareja aplica este criterio y menciona la existencia de cierto rango aceptable de variación pero de nuevo no parece hacer referencia alguna al rango de valores críticos que se menciona y exhibe en la gráfica.

CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

Como primer punto de reflexión, se enfatiza la estrategia mayoritariamente empleada por los estudiantes que corresponde a una utilización aceptable/apropiada de los valores críticos como valor de referencia para aceptar o rechazar una hipótesis; siendo esto contrario a la hipótesis de aprendizaje sobre la utilización de las frecuencias relativas como criterio de decisión (en la cual no se especifica de manera clara cuándo un valor muestral es considerado como probable o no probable).

Nótese que el empleo de los valores críticos no fue propuesto en ningún momento por el profesor durante la aplicación de la actividad y se considera más bien, que esto es producto del razonamiento inducido por las actividades previas de la THA en donde emergieron y se utilizaron conceptos fundamentales de la estadística (Burril & Biehler, 2011), tales como variabilidad, distribución, inferencia y muestreo. Esto sugiere que es posible hacer que sea el mismo estudiante quien proponga de manera razonada parte del método/procedimiento (formal) de una prueba de significancia, a pesar de que sea esta la primera ocasión en la que se enfrenta a este tipo de situaciones problema. En cierta medida esto contribuye a evitar la introducción de procedimientos de estadística inferencial en forma de receta (identificar y plantear H_0 y H_1, calcular los valores críticos correspondientes al 95% de confianza para una distribución muestral teórica de tipo binomial con n=120 y p=.1, calcular el estadístico de prueba para observar en qué región de la distribución se encuentra para así aceptar o rechazar H_0 y H_1), lo cual suele ocurrir en la enseñanza tradicional de estos tópicos.

Como segundo punto de reflexión, se observaron ciertos conflictos y limitaciones en el desempeño de los estudiantes. Por ejemplo, algunas parejas utilizaron expresiones verbales y textuales que no coinciden con lo que en realidad hacen referencia (algunos estudiantes utilizan indistintamente las expresiones “tamaño de muestra” por “número de muestras” cuando hacen referencia a la primer idea; otros mencionan “más porcentajes muestrales” para hacer referencia a la reducción de variabilidad cuando se aumenta el tamaño de muestra). Otros presentaron confusión sobre la cuantificación de las áreas de la distribución muestral con respecto a los valores críticos (se mencionan áreas de 85%, 90% como la que contiene el intervalo y 5% o 10% cuando se hace referencia al área que se encuentra en la cola derecha).

De este tipo de dificultades sobresale la falta de consideración de variabilidad muestral y ciertas confusiones y/o ausencias en el uso de un lenguaje probabilístico adecuado para expresar una conclusión sobre las máquinas a enviar a revisión (por ejemplo las respuestas de P10, P3 y P17); también se observa el uso de la expresión “mandar/enviar a reparar” en sustitución de “mandar/enviar a revisar” (por ejemplo en las respuestas de P1, P10 y P20), a pesar de que los profesores/investigadores utilizaron cuidadosamente la primera expresión durante todo el desarrollo de la actividad.

Si bien los estudiantes demuestran ser capaces de comprender apropiadamente cierta parte del procedimiento de una prueba de significancia, las dificultades señaladas en el párrafo anterior nos sugieren que éstos pueden estar concibiendo que dicho método posee un carácter determinista respecto a la naturaleza de verdad o falsedad de la hipótesis nula y alternativa. Por ejemplo, es posible que los estudiantes asuman que esta solución implica determinar con certeza que la máquina D sí posee un porcentaje de tarjetas defectuosas del 10%, exhibiendo quizás un sesgo que excluye la identificación de la naturaleza probabilística interviniente en el proceso de razonamiento a lo largo del proceso de solución. Se considera que en esta situación problema se enfatiza que el estudiante debe tomar una decisión ante la presencia de variabilidad e incertidumbre y esto puede hacerle ignorar la posibilidad de cometer un error una vez se ha aceptado o rechazado la hipótesis nula o alternativa (error tipo I en el caso de las máquinas B, C y D y del tipo II para la máquina A). Después de todo, los profesores/investigadores no señalaron explícitamente en ningún momento de la realización de la actividad que este problema enmascara trabajar con una probabilidad condicional clave que es el p-valor (en el caso de la máquina A la simulación arrojó un p-valor = $P(p \geq .175 \mid P = .1) \cong 2/300$); esto con el objetivo de poder observar las acciones que realizan los estudiantes de forma natural ante la información, recursos didácticos y conocimientos previos de los que disponen.

Como reflexiones finales, concluimos que las actividades trabajadas en la THA y la presentada en esta comunicación, pueden promover el desarrollo de un razonamiento inferencial informal que a su vez complementaría o se convertiría en la base de apoyo para comprender y utilizar apropiadamente tanto ideas estadísticas fundamentales, así como métodos formales de inferencia. Sin embargo, el uso constante de distribuciones muestrales empíricas y simulaciones aleatorias no garantiza que los estudiantes estén exentos de cometer errores conceptuales como los aquí expuestos.

Desde una perspectiva de formación o aprendizaje, la aplicación de este tipo de actividades en el aula permite hacer explícitas las creencias, intuiciones y conocimientos de los que disponen los estudiantes respecto a la inferencia estadística. Esto constituye una oportunidad para el profesor de incidir directamente en los posibles errores y limitaciones conceptuales que pueden presentarse (como la no identificación de la probabilidad condicional implicada en el p-valor), abonando así a la eficiencia y efectividad de un proceso de enseñanza y aprendizaje en condiciones reales en las que éste es llevado a cabo. Encontramos también que la incorporación de este tipo de actividades en edades tempranas de formación académica permite robustecer las experiencias y conocimientos de los estudiantes sobre la naturaleza y relaciones entre conceptos clave como variabilidad, distribución e inferencia; acciones que actualmente en nuestro país son considerablemente limitadas.

Desde una perspectiva de la investigación en educación estadística, sugerimos es necesario continuar con una exploración detallada de cómo es que los estudiantes razonan al momento de enfrentarse a escenarios donde es necesario realizar inferencias estadísticas; información que puede 1) ayudar a comprender las razones y motivos que originan diferentes errores conceptuales que comúnmente se presentan y 2) apoyar la creación de nuevas propuestas didácticas que buscan desarrollar y promover un razonamiento inferencial informal.

Referencias

Batanero, C. & Díaz, C. (2015). Aproximación informal al contraste de hipótesis. En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), *Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 2 (pp. 207-214). Granada, 2015.

Burril, G. & Biehler, R. (2011). Fundamental Statistical Ideas in the School Curriculum and in Training Teachers. In C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education* (pp. 57-69), 10. New York: Springer.

Chance, B., delMas, R. C., & Garfield, J. (2004). Reasoning about sampling distributions. En D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.). *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 295-323). Amsterdam: Kluwer Academic Publishers.

Chance, B., Ben-Zvi, D., Garfield, J., & Medina, E. (2007). The role of technology in improving student learning. *Technology Innovations in Statistics Education*, 1(1).

Harradine, A., Batanero, C. & Rossman, A. (2011). Students and teachers' knowledge of sampling and inference. In C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education* (pp. 235-246). New York: Springer.

Liu, Y., & Thompson, P. (2007) Teachers' Understandings of Probability, *Cognition and Instruction*, 25:2-3, 113-160.

Makar, K., Bakker, A. & Ben-Zvi, D. (2011). The Reasoning behind informal statistical inference. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1-2), 152-173.

Rossman, A. (2008). Reasoning about informal statistical inference: one statistician's view. *Statistics Education Research Journal*, 7 (2), 5-19.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 114–145.

Simon, M., & Tzur R. (2004). Explicating the Role of Mathematical Tasks in Conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory, *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 91-104.

Vallecillos, A. (1999). Some empirical evidence on learning difficulties about testing hypotheses. *Proceedings of the International Statistical Institute 52nd Session*. Helsinki: International Statistical Institute. Online: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.

Zieffler, A., Garfield, J., delMas, R. & Reading, C. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal*, 7(2), 40–58.

HACIA UNA RELACIÓN ENTRE EL ETM Y EL MTSK A TRAVÉS DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN

Toward a relationship between MWS and MTSK through the function concept

Espinoza-Vázquez, G[a]., Verdugo-Hernández, P[a]., Zakaryan, D[a]., Carrillo, J[b]., Montoya-Delgadillo, E[a].

[a]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile), [b]Universidad de Huelva

Resumen

El presente trabajo aborda la relación entre los modelos Espacio de Trabajo Matemático (ETM) y Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) a través del análisis de episodios de clases donde se trata el concepto de función, particularmente el cálculo de pre imágenes. En dichos episodios se identifican elementos que permiten un análisis complementario desde ambos modelos, posibilitando, de este modo, una profundización en la comprensión del conocimiento del profesor de matemática como actor común de ambos modelos. Concluimos con la síntesis de los elementos encontrados entre los subdominios del MTSK y los componentes del ETM.

Palabras clave: *concepto de función, ETM, MTSK.*

Abstract

This paper addresses the relationship between Mathematical Works Space (MWS) and Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) models through the analysis of lessons episodes where the function concept is treated, particularly the calculation of pre images. In these episodes elements that allow a complementary analysis are identified from both frames, enabling a deepening understanding of knowledge of the mathematics teacher as a common actor in both models. We conclude with a summary of the common elements found between subdomains of MTSK and the MWS components.

Keywords: *function concept, MWS, MTSK.*

INTRODUCCIÓN

Existen varios modelos para estudiar el conocimiento del profesor (e.g. Shulman, 1986; Ball, Thames & Phelps, 2008; Rowland, Turner, Thwaites & Huckstep, 2009; Godino, 2009), cada uno de ellos pone su mirada en aspectos particulares sobre el conocimiento e intenta comprenderlo desde su mirada. Somos conscientes de que adoptar una postura teórica supone poder observar aquello que el marco elegido permite observar, lo que conduce a una perspectiva, si bien profunda, sesgada por los límites del propio marco. La articulación de marcos teóricos se hace relevante para explotar la diversidad teórica como una fuente de enriquecimiento, considerando esta diversidad como un desafío y punto de partida para impulsar el desarrollo teórico mediante la articulación de teorías (Godino et al., 2013). La revista ZDM dedicó varios números a reflexionar sobre teorías de la Educación Matemática. Particularmente, este trabajo se enmarca en el paradigma de "networking of theories", que ha experimentado un importante auge en los últimos años (e.g. Sriraman y English, 2005; Bikner-Ahsbahs y Prediger, 2010; García y Wake, 2010). La dialéctica entre teorías responde a distintos contextos y problemáticas, inspirando investigaciones sobre estrategias de conexión entre teorías, entre las que se encuentran las comparaciones de teorías o la correspondencia entre sus componentes (e.g. Bikner-Ahsbahs y Prediger, 2010), así mismo Trigueros, Bosch y Gascón (2011) muestran tres modos para dicha conexión basados en la tipología de los problemas, el componente teórico y el componente metodológico.

Bajo, J.M., Gavilán, J.M., Sánchez-Matamoros, G.. (2016). Hacia una relación entre el etm y el mtsk a través del concepto de función. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp331-341). Málaga: SEIEM.

Por nuestra parte pretendemos realizar aportaciones a la relación entre dos modelos teóricos mediante la coordinación de elementos compatibles de cada teoría, en el sentido de Bikner-Ahsbahs y Prediger (2010), con el objetivo de complementar los aportes que puede hacer un modelo al otro.

En el cuarto Simposio de ETM se dio lugar a la reflexión sobre el diálogo entre el modelo del ETM (Kuzniak, 2011) y el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK por sus siglas en inglés de Mathematics Teacher's Specialized Knowledge) (Carrillo, Climent, Contreras & Muñoz-Catalán, 2013), teniendo como actor central para ambos al profesor de matemáticas y el conocimiento que pone en juego cuando diseña, implementa y adapta el ETM idóneo (Gómez-Chacón, Escribano, Kuzniak, & Richard, 2015). Asimismo, las discusiones sobre los trabajos presentados en este simposio pusieron de relieve el conocimiento especializado del profesor, destacando su potencialidad para profundizar en el estudio de su ETM idóneo y personal, y recíprocamente, cómo el estudio del ETM puede ayudar a "profundizar en las relaciones entre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas y las acciones de enseñanza que éste sustenta" (Carrillo, Flores-Merdano, Contreras & Climent, 2015, p. 469). De acuerdo con estas reflexiones tomamos los modelos ETM y MTSK para realizar un análisis en conjunto sobre la práctica de un profesor con el objetivo de mostrar algunas relaciones entre los componentes (o polos) del ETM y los subdominios del MTSK. Estas relaciones nos permitirán ampliar la perspectiva de ambos modelos y así enriquecer y profundizar en la comprensión del conocimiento del profesor mediante las aportaciones de los resultados del análisis de un modelo en el otro.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Espacio de Trabajo Matemático (ETM)

El objetivo principal del Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2011) es favorecer el funcionamiento del trabajo matemático en un contexto educativo. Para definir el ETM se introducen dos planos: epistemológico y cognitivo, que estructuran el ETM apoyando la comprensión tanto del modelo del trabajo matemático que se genera, como así también la articulación entre sus planos mediante tres génesis llamadas: semiótica, instrumental y discursiva (ver figura 1).

En el Espacio de Trabajo Matemático se identifican tres tipos de ETM (Kuzniak, 2011):

ETM de Referencia: La organización esperada de este espacio de trabajo es definida de manera ideal, solamente sobre la base de criterios matemáticos.

ETM Idóneo: El ETM de referencia debe ser acondicionado y organizado para volverse un espacio de trabajo efectivo e idóneo en una institución dada con una función definida.

ETM Personal: El ETM idóneo debe ser utilizado por los estudiantes y también por sus profesores. Cada uno se apropia y lo ocupa con sus conocimientos matemáticos y sus capacidades cognitivas. Este ETM es lo que llamamos un ETM personal.

Adicionalmente, el Espacio de Trabajo Matemático considera, según Kuzniak y Richard (2014), tres planos verticales, los cuales se activan por medio de una determinada tarea, y se conectan con diferentes fases de trabajo matemático (Kuzniak & Richard, 2014). Las tres fases son: descubrimiento y exploración, justificación y razonamiento, presentación y comunicación. Estas fases están definidas por un determinado número de competencias matemáticas cognitivas (Kuzniak & Richard, 2014), sobre la base de ciertas génesis y sus relaciones con el plano epistemológico. La primera fase está acompañada de la competencia "Descubrir", fundamentada en las génesis semiótica e instrumental, que generan el plano [Sem-Ins]. La segunda fase de justificación y razonamiento está acompañada de la competencia "Razonamiento", fundamentada en las génesis instrumental y discursiva, generadoras del plano [Ins-Dis]. Por último, la tercera fase, orientada hacia la presentación y comunicación, está acompañada de la competencia "Comunicación", sustentada en las génesis semiótica y discursiva, que generan el plano [Sem-Dis]. Estas fases son evidenciadas durante el trabajo matemático del individuo.

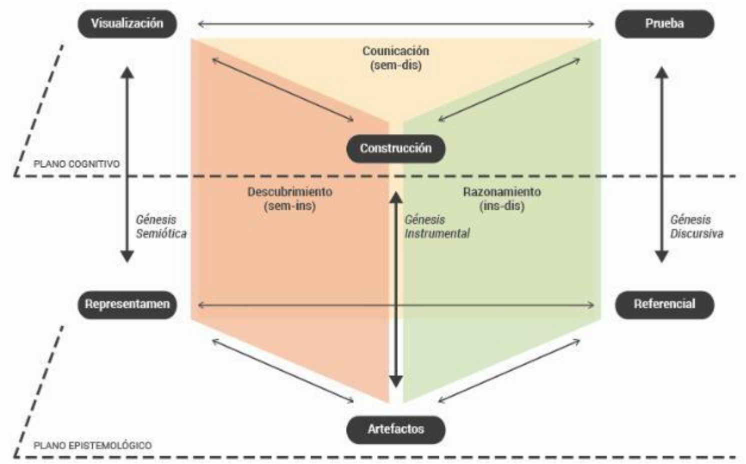


Figura 1. Planos del ETM (Kuzniak & Richard, 2014).

Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Mathematics Teacher's Specialized Knowledge, MTSK)

El MTSK es un modelo analítico que permite estudiar el conocimiento que muestra, posee y/o declara el profesor de matemática (Carrillo et al., 2013). Ha surgido principalmente de las dificultades de la aplicación del modelo de Ball et al. (2008) y las reflexiones en torno a las potencialidades de este modelo y otros (e.g. Rowland et al., 2009, Kilpatrick, Blume & Allen, 2006) que caracterizan el conocimiento del profesor.

El MTSK considera dos grandes grupos de conocimiento distinguidos para referirse al conocimiento del profesor: el Mathematical Knowledge (MK), que es el conocimiento de la matemática como disciplina científica en un contexto escolar, y el Pedagogical Content Knowledge (PCK), que abarca los objetos matemáticos como objetos de enseñanza-aprendizaje (Carrillo et al., 2014). Cada uno de estos grupos, llamados dominios, se ha dividido, con fines analíticos, en tres subdominios (Figura 2), y cada uno de ellos en categorías que caracterizan al subdominio y, en general, el conocimiento del profesor. El modelo otorga un lugar fundamental a la matemática y no la disocia de su proceso de enseñanza-aprendizaje, en este sentido la integración de conocimientos de distintos subdominios es lo que identifica el MTSK como conocimiento matemático especializado para la enseñanza y que solo tiene sentido para el profesor de matemáticas.

El MK corresponde al conocimiento propio de la disciplina que se enseña y está dividido en los siguientes subdominios:

Conocimiento de los Temas (KoT) integra el conocimiento de los contenidos que deben aprender los alumnos con una profundización mayor a éste. Abarca aspectos fenomenológicos, definiciones, propiedades y sus fundamentos del tema así como los registros de representación y procedimientos. Por ejemplo, el conocimiento de métodos de resolución de ecuaciones lineales forma parte del KoT.

Conocimiento de la estructura matemática (KSM) es el conocimiento de las relaciones entre distintos objetos matemáticos. Considera las conexiones interconceptuales entre temas que permiten relacionar los contenidos actuales (el tema) con contenidos anteriores (de simplificación) o posteriores (de complejización); también incluye las conexiones de contenidos con alguna propiedad común (transversales) y las conexiones auxiliares entre objetos. El conocimiento de la relación entre la ecuación $f(x)=0$ y los puntos de corte con el eje X es parte del KSM.

Conocimiento de la práctica matemática (KPM) es el conocimiento sobre las características del trabajo matemático, cómo proceder y generar conocimiento en matemáticas. Incluye las prácticas ligadas a la matemática en general y las prácticas ligadas a una temática en particular. El conocimiento sobre el uso de los cuantificadores para la elaboración de argumentos en demostraciones de propiedades para conjuntos finitos sería un ejemplo de este subdominio.

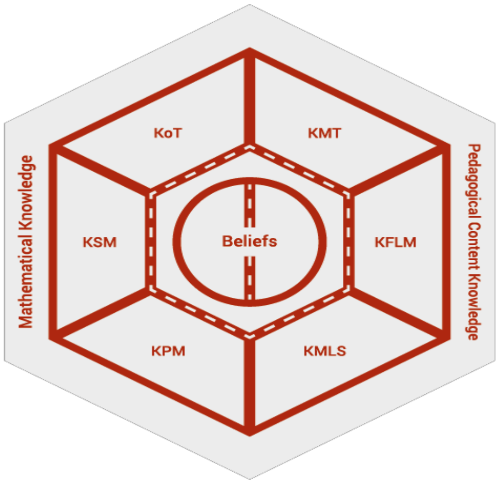


Figura 2. Subdominios del MTSK (Carrillo et al., 2013)

Por su parte, el PCK corresponde a los conocimientos propios de la labor de la enseñanza de la matemática y está dividido en:

Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) es el conocimiento sobre el aprendizaje de un contenido matemático. Abarca el conocimiento sobre las formas de aprendizaje, las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje, las formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático y concepciones de los estudiantes sobre matemáticas. Conocer que los estudiantes consideren fácil la evaluación del 0 o el 1 en una expresión algebraica es un ejemplo de este subdominio.

Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT) es el conocimiento del contenido matemático condicionado a la enseñanza del mismo. Comprende el conocimiento sobre teorías personales o institucionales de enseñanza, recursos materiales y virtuales y actividades, tareas, ejemplos, ayudas. El conocimiento de ejemplos de funciones representadas en un diagrama sagital con conjuntos finitos para potenciar la comprensión del concepto de función, es parte del KMT.

Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS) es el conocimiento sobre lo que está estipulado que aprendan los estudiantes. Incluye el conocimiento de los contenidos matemáticos requeridos a enseñar, conocimiento del nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado y secuenciación de diversos temas. El conocimiento del profesor sobre el conocimiento que tienen o que se espera que adquieran los alumnos sobre la resolución de ecuaciones es parte del KMLS.

Los subdominios expuestos son divisiones artificiales con fines analíticos del conocimiento del profesor y éstos no se presentan en forma aislada durante el análisis; es más, se espera observar distintas conexiones entre subdominios y categorías para poder interpretar el conocimiento del profesor. Este modelo incluye, además, al centro, el dominio de las creencias del profesor sobre la matemática y su enseñanza y aprendizaje, pues considera que ellas permean a todos los subdominios.

Tanto el ETM como el MTSK son modelos que permiten la observación y análisis del conocimiento que muestra el profesor, considerando algunos elementos que arrojan luz sobre la posibilidad de establecer complementariedad teórica al momento de realizar el análisis de la actuación docente. Por ejemplo, coinciden en que las representaciones, las definiciones, los algoritmos y los tipos de pruebas/demostraciones utilizados son, entre otros, parte del conocimiento del sujeto, por tanto es posible tomar estos puntos comunes para intentar establecer algún tipo de articulación entre ellos.

METODOLOGÍA

Este trabajo es de carácter cualitativo, bajo un paradigma interpretativo, pues adoptamos los modelos ETM y MTSK para observar y comprender a través de ellos el conocimiento que utiliza el profesor de matemáticas durante la enseñanza del concepto de función. Ponemos una particular atención en los momentos en que el profesor desarrolla tareas matemáticas como la determinación de la pre imagen de una imagen dada, o en una situación de enseñanza a los alumnos sobre las relaciones que hay entre los distintos objetos matemáticos que intervienen en la ejecución de esta tarea. Se presenta un estudio de un caso de tipo instrumental (Stake, 2007) dado por un profesor de matemáticas, que llamaremos Arturo (seudónimo), quien posee 10 años de experiencia docencia en educación primaria y secundaria, y 7 años en docencia universitaria. Arturo tiene el grado de licenciado en educación y, además, cuenta con un magister en matemáticas. Los colegas y superiores de Arturo lo reconocen como buen profesor, lo que es confirmado por las evaluaciones sobre la docencia consultada a sus alumnos en mecanismos oficiales de la universidad donde trabaja. Esto hace de Arturo un buen caso a priori para aportar información que permita visualizar los elementos y relaciones que se buscan.

La principal fuente de datos es el registro en vídeo y las transcripciones de las clases que destinó Arturo a la enseñanza del concepto de función. Hemos individualizado en estas transcripciones las intervenciones de los participantes mediante la siguiente notación: Arturo (P), Alumno (A), Alumnos (As). Adicionalmente contamos con las notas de campo recogidas durante la grabación de estas sesiones de clases.

Posteriormente se ha realizado el análisis de contenido (Bardin, 1996) de las transcripciones, definiendo episodios de clase de acuerdo a la identificación de objetivos del profesor durante la sesión, y tomamos como unidad de información las intervenciones de Arturo. Cada intervención de Arturo se ha revisado en búsqueda de evidencias de conocimiento especializado y elementos que permiten afirmar la activación de alguna génesis o planos verticales del ETM.

Para este trabajo nos enfocamos en dos episodios de clase en los que se propone la tarea de determinar la pre imagen de una imagen dada, bajo una función conocida. La elección de estos episodios se basa en la información que aportan sobre los elementos comunes que pueden evidenciarse desde ambos modelos (ETM y MTSK) y así articular los resultados en los análisis mediante la complementariedad teórica. Para efectos de este escrito intentaremos evidenciar la relación que se pueda establecer entre el ETM idóneo y sus componentes y los subdominios del MTSK. Estas relaciones podrán ser evidenciadas a través de las acciones del profesor que muestren un conocimiento particular respecto a la matemática y su enseñanza.

HACIA UNA RELACIÓN ENTRE EL MTSK Y EL ETM

A continuación mostramos extractos de los episodios que permiten la identificación de relaciones entre los subdominios del MTSK y las componentes del ETM. Centramos nuestra atención en la búsqueda de elementos que permitan caracterizar el ETM idóneo mediante la interpretación de la práctica del profesor y de su conocimiento identificado a través del MTSK.

La ecuación de primer grado como artefacto simbólico

En la clase anterior al episodio seleccionado, el profesor ha determinado la imagen de un elemento dada la correspondencia representada en un diagrama sagital, observando las "flechas" trazadas entre los elementos de un conjunto y el otro, o mediante la evaluación de la expresión algebraica que define a la función, que se ha convertido en la técnica privilegiada por él para que sus alumnos obtengan las imágenes. Arturo también ha trabajado en la identificación de pre imagen de una imagen dada mediante estimaciones o la realización del proceso inverso a lo establecido por la función, es decir, si la función dada es x+4 (sumar 4), la pre imagen estará dada por y-4 (restar 4), proponiendo la tarea ahora con el uso de otra representación (algebraica). Posteriormente, parece que Arturo lleva intencionadamente a sus alumnos al desequilibrio cognitivo cuando les solicita la determinación de pre imágenes para la función $f(x)=2x+1$, lo que puede ser considerado como un indicio de su conocimiento sobre las dificultades de los alumnos (KFLM).

En términos de ETM, la génesis semiótica activa la visualización al utilizar el diagrama sagital para mostrar las flechas trazadas entre los elementos del conjunto de partida y el de llegada. El conocimiento de este tipo de diagramación o representación es visto como parte del KoT de Arturo desde el MTSK. Estos elementos son utilizados por el profesor para diseñar el ETM idóneo, el que ha seleccionado el tipo de representaciones, los ejemplos dados y las explicaciones. La organización de estos componentes es vista desde el MTSK como parte del KMT de Arturo. El ETM idóneo que ha diseñado para aquellas sesiones incentivó la génesis semiótica para el abordaje de las tareas sobre determinación de imágenes.

El ETM idóneo pretende activar la génesis semiótica con el uso de representaciones gráficas y algebraicas, movilizando principalmente la componente de la visualización del plano cognitivo, junto con ello se genera un cambio de dominio: del Cálculo en un nivel de operatoria aritmética hacia el Álgebra con la manipulación de las expresiones algebraicas, que más adelante evidenciaremos.

En el siguiente extracto mostramos cómo el profesor conduce a sus alumnos al desequilibrio mencionado mediante una conversación que parece ser intuitiva, pero que intenta posicionar la ecuación como una herramienta considerable para el cálculo de la pre imagen de -1 bajo la función $f(x)=2x+1$.

P: Aquí [se refiere al ejercicio anterior], porque la función era simple [x+4], yo podía descubrir fácilmente a quién mandé para que la imagen fuera el 2, entonces aquí dijimos que era el -2, porque -2+4 me da 2.
Lo que yo quiero hacer es que encontremos una forma de hacer esto, independiente de la función que me den, hacer el mismo procedimiento independiente de la función y quiero que lo deduzcamos.
Aquí, como era simple, pude descubrir a quién mandé para que les diera el 2, por eso les cambié la función a una en que no sea tan evidente a quién mandé para que llegue al 0.
Aquí están pensando "ah, puede ser el -1", pero la imagen de -1 va a ser [calcula] -2+1=-1, ¿cierto? ¿Me sirve ese?... No me sirve. ¿Quién otro podría ser candidato?

Podemos observar, en esta intervención, que Arturo declara su objetivo respecto a determinar la pre imagen de un elemento dado mediante algún procedimiento sin recurrir a la estimación de la solución. El conocimiento de estos procedimientos para la determinación tanto de imágenes como de pre imágenes es parte del KoT de Arturo, lo que en términos del ETM idóneo se identifica en el polo referencial, sin embargo la intervención da cuenta sólo de un indicio de este conocimiento que será confirmado en la siguiente intervención. Se evidencia además el subdominio KFLM (conocimiento de dificultades y obstáculos de los alumnos) cuando señala el cambio de la función a trabajar para evitar las estimaciones y fomentar el uso de otras estrategias. Arturo da evidencia de conocer las dificultades/facilidades de sus alumnos para realizar este tipo de tareas. Además, en términos de ETM, observamos la intención de activar la génesis instrumental al proponer encontrar una forma general para el cálculo de pre imagen por medio del uso de la ecuación como artefacto simbólico, el cual predomina en el dominio del Cálculo.

El extracto que sigue (continuación del anterior) permite observar que el profesor dirige a los alumnos hacia el desarrollo de ecuaciones para permitir el cálculo de las imágenes de la función evitando las estimaciones, lo que da cuenta del diseño del ETM idóneo y de la inclusión de la ecuación en éste:

As: -1/2
P: El -1/2, ¿cómo descubrió que era el -1/2? ¿Cómo descubriste que era el -1/2?
A: Porque... Fue porque si coloco el -1 te daba -1, la mitad te iba a dar...
A: No fue al tanteo. Se deduce porque -1 no es y 0 tampoco entonces debe estar entremedio.
P: [dibuja el -1 como imagen para la misma función]
¿Cuál es la pre imagen del -1?
A: -1
P: [borra el -1 recién escrito, escribe el 5] ¿Del 5?
As: 2
P: 2, porque 2x2 son 4, +1 son 5, o sea que puede visualizar ya alguna forma de que esto [la expresión 2x+1] me tiene que dar 5, ¿no?
A: Creo que se le perdió un 2 porque 2x-2 es-4, y -4 +1 da -3. Dijo 2 positivo, -2 daría -4, más 1, -3
P: 2 por 2 son 4, +1 son 5, y esa es la imagen del 2.
A: Pero la... es negativa [ella ve -2x+1]
P: No, no es negativa, es 2x+1
A: ¿Por qué en la primera la puso como -2?

P: Porque metí un -1 a la función, y 2 por -1 es -2, por eso puse ahí. ¿Podemos encontrar una forma de encontrar la pre imagen sin estar jugando al tanteo?
As: Si
P: Si, lo que queremos es, por ejemplo, que esto nos diera 5, y si "esto quiere que me diera 5" se convierte en una ecuación… ¡Para eso vimos ecuaciones e inecuaciones antes!

Observamos que hay distintas entradas (planos activos) para resolver un mismo problema desde el punto de vista de los ETM idóneos, evidenciando dos aproximaciones distintas: la génesis semiótica y la génesis instrumental, privilegiando el plano vertical [Sem-Ins], poniendo en obra la fase de descubrimiento y exploración donde interactúan signos y herramientas. Este plano presenta diferentes entradas y puede comprenderse en sus distintas direcciones, por ejemplo, en este caso, desde el plano epistemológico al cognitivo: de manera diagonal, es privilegiado el artefacto junto a la visualización. El artefacto es la propia ecuación, que se evidencia en la última intervención de Arturo. Las direcciones hacia las distintas componentes nos indican las decisiones y caminos tomados por el docente en el diseño del ETM idóneo, las cuales ameritan ser estudiadas en todas sus direcciones.

La última intervención de Arturo también da cuenta de su conocimiento para determinar la pre imagen de un número dado como conocimiento de un procedimiento (KoT) y que este procedimiento utiliza la *ecuación lineal* como un elemento auxiliar, fuera del tema de funciones, para conseguir la solución. Se evidencia una conexión entre dos objetos matemáticos: la función afín y la ecuación lineal, vinculadas por la identificación de la relación entre imagen y pre imagen con la ecuación $y=f(x)$. Estos objetos están en dominios distintos; la función la ubicamos en el dominio del Cálculo, mientras que la ecuación se posiciona en el dominio del Álgebra. La conexión, desde la mirada del MTSK, corresponde a una conexión auxiliar en el KSM de Arturo.

A continuación Arturo propone la resolución de una tarea, a modo de ejemplo, sobre determinar la pre imagen de 4 en la función $f(x)=1-3x$.

P: Para que quedemos con esta idea por lo menos un poco más clara. Sea la función f(x)=1-3x, determinar la pre imagen de 4, ¿Qué tengo que hacer? Quiero que esto me dé como resultado 4, eso se reduce a que tengo 1-3x, que es la función que quiero que me de 4, y se traduce en resolver una ecuación en vez de estar buscando al tanteo cuál es ese resultado. ¿Sabemos despejar acá?
Esto quedaría equivalente a 1-4=3x y esto quedaría -3=3x y por lo tanto, x ¿cuánto tendría que ser?
As: -1
P: -1 ¿Cuál es la pre imagen del 4?... -1

Las intervenciones de Arturo nos aportan evidencia de su KoT, en este caso del conocimiento sobre los procedimientos asociados a la resolución de ecuaciones (conocimiento sobre cómo resolver una ecuación lineal), pues detalla los pasos a seguir para obtener la solución a la ecuación $1-3x=4$. Existe también un indicio sobre el conocimiento de los conocimientos previos de los estudiantes (KMLS) cuando pregunta retóricamente "*¿sabemos despejar acá?*", dando luces de que el profesor conoce que sus alumnos saben resolver este tipo de ecuaciones. En términos de ETM idóneo, se puede observar que Arturo muestra poseer un referencial acorde a la resolución de ecuaciones lineales, ya que, como se mencionaba anteriormente, éste detalla los procedimientos a seguir de la solución de la ecuación lineal a resolver.

En el siguiente extracto se observa cómo Arturo sintetiza lo estudiado:

P: En el conjunto de partida teníamos las pre imágenes de los que estaban acá, y aquí estaban las imágenes del conjunto de partida. Si aquí yo tenía el 10, el 10, por esta función que era 5x+1, llegaba como 51. Si aquí yo tenía 6, ¿a quién mande para que llegara como 6? Una forma es buscar un número que multiplicado por 5 y sumado con 1 me de 6. Yo tengo dos formas de encontrar esto. Va a depender del número, si encontrarlo es simple como encontrar la pre imagen de 6, que era buscar un número que multiplicado por 5 y sumado con 1 me diera 6…, pero ¿cuál va a ser la pre imagen del 10? ¿Es un número que sea tan simple de determinar?
As: No.
P: Si yo quiero la imagen del 10, el 10 lo hago pasar por la función y llega como 51, otra cosa es que yo quiera la pre imagen del 10, o sea que el 10 no está en el conjunto de partida, está en el

conjunto de llegada, entonces ¿a quién mandé para que ese número, al pasar por la función, llegara como 10?
Significa que la función me tiene que dar 10. Dijimos que encontrar pre imágenes era lo mismo que resolver una ecuación, porque quiero que la función 5x+1 me dé 10, entonces se convierte en una ecuación.
Cuando encuentro imágenes, tomo el valor, lo meto en la función y me arroja su imagen, pero cuando quiero pre imágenes yo tomo la función y lo igualo a ese valor que quiero que sea. Al despejar aquí, ¿qué me va a quedar?

A: 5x =9

P: 5x=9, por lo tanto x ¿a qué es igual?

As: 9/5

P: 9/5. Ese es la pre imagen del 10, que en ese caso no era fácil de determinar como lo fue la pre imagen del 6.

A: Es que yo puse 1,8 y también me da.

P: Para algunos, encontrar este valor [9/5] puede ser simple y para otros no, pero va a ser el resultado de resolver esta ecuación.

Se aprecia cómo el profesor mecaniza los procedimientos para obtener imágenes y pre imágenes, formalizando el uso de ecuaciones y valorizaciones de expresiones algebraicas como las técnicas que otorgan mayor certeza en la obtención del resultado buscado; si el número está en el dominio o en el recorrido corresponderá evaluar o resolver una ecuación para determinar su imagen o pre imagen respectivamente. Esto es evidencia, por una parte, del conocimiento sobre cuándo usar un determinado procedimiento (KoT), mientras que por otro lado se observa a Arturo dando las explicaciones sobre estos usos (KMT). Así mismo, el referencial del ETM idóneo del docente está compuesto por definiciones y propiedades de las funciones anteriormente utilizadas por el docente, quien, al focalizar su atención hacia las ecuaciones, cambia su referencial evidenciando un cambio de dominio del Cálculo hacia el Álgebra.

El profesor conecta la ecuación *y=f(x)* y los conceptos de imagen y pre imagen (KSM), destacando la identificación del elemento al conjunto de partida o al conjunto de llegada. El subdominio KFLM también está a la vista cuando Arturo se refiere a las dificultades o facilidades para abordar el problema de una u otra forma.

CONCLUSIONES

Una de las preguntas abiertas planteadas en Gómez-Chacón et al. (2015) ha sido cómo utilizar los planos verticales del diagrama del ETM como punto de encuentro entre los modelos considerando al profesor como elemento central. Nosotros hemos evidenciado algunas relaciones entre subdominios del MTSK y los polos de los distintos planos del ETM, las cuales nos señalan cómo la génesis semiótica e instrumental son activadas. El diseño del ETM idóneo de Arturo evoca el plano vertical [Sem - Ins], el cual tiene relación con la organización didáctica de los contenidos, el conocimiento de los temas, las características del aprendizaje de sus alumnos y el conocimiento de la estructura matemática.

En particular hemos evidenciado cómo el ETM idóneo y el MTSK pueden ser articulados, por ejemplo mediante las relaciones identificadas entre el polo referencial y el KoT, respectivamente. En nuestro caso, la definición y las propiedades de las funciones son los elementos que pueden ser observados simultáneamente desde ambos modelos, desde el ETM como parte del polo referencial y desde el MTSK como parte del KoT, existiendo una evidente intersección en estos puntos entre ambos modelos. Así también, mediante la génesis semiótica, es activado el polo de la visualización, el cual es articulado con las representaciones del KoT cuando el profesor utiliza el diagrama sagital para indicar con flechas las correspondencias entre los elementos del conjunto de partida con los elementos del conjunto de llegada.

Estos polos, identificados en el estudio del ETM, han sido relacionados con el subdominio KMT, pues en el diseño y organización del ETM idóneo, el profesor selecciona aquellos elementos que permitan al alumno comprometerse con las tareas y con el proceso de enseñanza-aprendizaje, lo que se traduce en elecciones sobre tipos de representación, ejemplos y explicaciones que potencien el aprendizaje del objeto de estudio.

En el caso de Arturo se ha observado un cambio de dominio al trabajar con el cálculo de imágenes y pre imágenes de funciones: desde el dominio del Cálculo al dominio del Álgebra. Este cambio se evidencia cuando Arturo recurre a la ecuación lineal (dominio del Álgebra) como un artefacto simbólico que le permite determinar pre imágenes de una función (dominio del Cálculo). Relacionamos este cambio con una conexión auxiliar del KSM, pues la ecuación es utilizada como un elemento auxiliar en la resolución de la tarea propuesta durante el estudio de las funciones y con la posibilidad de estudiar el ETM del profesor en distintos dominios, por ejemplo ETM$_{\text{Análisis}}$ o ETMÁlgebra.

La implementación de ambos modelos ha permitido un análisis más fino del conocimiento de Arturo, poniendo de relieve relaciones que necesitan ser profundizadas en posteriores investigaciones con el propósito de mejorar la caracterización de dichos modelos y de comprender mejor el conocimiento del profesor, lo que posibilitaría formas alternativas de abordar la formación y el desarrollo profesional del profesorado.

AGRADECIMIENTOS

Beca de Doctorado año 2015 Conicyt (21151243); Beca Complementaria año 2015 Conicyt (R.E.: 5359/2015); Proyecto ECOS-Conicyt C13H03. Beca de Doctorado año 2015 Conicyt (21150897). Proyecto EDU2013-44047-P.

Referencias

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Bardin, L. (1996). *El análisis de contenido*. Madrid: Akal Ediciones.

Bikner-Ahsbahs, A., & Prediger, S. (2010). Networking of theories: An approach for exploting the diversity of theorical approaches. En B. Sriraman & L. English (Eds.). *Theories of Mathematics Education: Seeking new frontiers* (pp. 483-506). Springer.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. In B. Ubuz, C. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (pp.2985-2994). Antalya: Middle East Technical University, Ankara.

Carrillo, J., Contreras, L.C., Climent, N., Escudero-Avila, D., Flores-Medrano, E., & Montes, M.A. (Eds.) (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Contreras, L.C., & Climent, N. (2015). El profesor en el marco de los ETM: el papel del MTSK como modelo de conocimiento. En I. Gómez-Chacón, J. Escribano, A. Kuzniak, & P. Richard (Eds.), *Actas del ETM 4* (pp. 461-471). Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Drouhard, J-Ph., & Kuzniak, A. (2015). Un point de vue multidimensionnel sur les outils et les instruments dans les Espaces de Travail Mathématique. En Mª I. Gómez-Chacón, J. Escribano, A. Kuzniak y P. Richard (Eds.). *Espacio de Trabajo Matemático, Actas Cuarto Simposio Internacional ETM*. Madrid: Publicaciones del Instituto de Matemática Interdisciplinar, Universidad Complutense de Madrid. ISBN: 978-84-606-9475-5. http://www.mat.ucm.es/imi/ETM4/ETM4libro-final.pdf

García, F., Wake, G. C. (2010). Estableciendo diálogos entre diferentes marcos teóricos: de los procesos narrativos a la teoría antropológica de lo didáctico. En Moreno, Mar; Carrillo, José; Estrada, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 315-326). Lleida: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión,* 20, 13-31.

Godino, J. D., Batanero, C., Contreras, A., Estepa, A., Lacasta, E., & Wilhelmi, M.(2013). Didactic engineering as design-based research in mathematics education.In B. Ubuz, C. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (pp. 2810-2819). Antalya: Middle East Technical University, Ankara.

Gómez-Chacón, I., Escribano, J., Kuzniak, A., & Richard, P. (Eds.). (2015). *Actas del ETM 4*. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Kilpatrick, J., Blume, G., & Allen, B. (2006). *Theorical framework for secondary mathematical knowledge*. Manuscrito no publicado, University of Georgia and Pensilvania State University.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathematique et ses Genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, *9-24*. Recuperado el 12 de junio de 2014 de: Laboratoire de Didactique André Revuz (EA 1547), http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/~kuzniak/publi/ETM_FR/Annales_16.pdf

Kuzniak, A. & Richard, P. (2014). Espacios de Trabajo Matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, RELIME, 17(1), 1-16.

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A., & Huckstep, P. (2009). *Developing primary mathematics teaching: reflecting on practice with the knowledge quarter*. London: Sage.

Sriraman, B., & English, L. (2005). Theories of mathematics education: A global survey of theoretical frameworks/trends in mathematics education research. *(ZDM) Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37*(6), 450–456.

Stake, R. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Madrid, España: Ediciones Morata.

Trigueros, M., Bosch, M., & Gascón, J. (2011). Tres modalidades de diálogo entre APOS y TAD. En M. Bosch et al. (Eds.), *Un panorama de la TAD.* (vol. 10, pp77-116). CRM documents. Bellaterra, Barcelona: Centre de Recerca Matemàtica.

RELACIONES FUNCIONALES QUE EVIDENCIAN ESTUDIANTES DE TERCERO DE EDUCACIÓN PRIMARIA Y SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN QUE USAN

Functional relationships evidenced by third graders and the representation they systems used

Pinto, E., Cañadas, M. C., Moreno, A. y Castro, E.

Universidad de Granada

Resumen

Este trabajo está integrado en una investigación más general cuyo interés esel estudio del pensamiento funcional que muestran estudiantes de educación primaria. Esta investigación es parte de un experimento de enseñanza de cuatro sesiones, en donde noscentramos en la última de estas, específicamente en las relaciones funcionales que identifican alumnos de tercero de educación primaria en la resolución del problema de las baldosas y los sistemas de representación que emplean aquellos que identifican relaciones funcionales. Los estudiantesparticipantes en nuestro estudio evidencian relaciones funcionales de correspondencia y covariación, predominando la primera. Utilizan con mayor frecuencia los sistemas de representación numérico y verbal y, en menor medida, el manipulativo y pictórico. Observamos también el uso de representaciones múltiples.

Palabras clave: *pensamiento algebraico, pensamiento funcional, sistemas de representación*

Abstract

This work is part of a wider investigation focussed on elementary students' functional thinking. This research is part of a teaching experiment of four sessions, where we focus on the last one, specifically we focus here on the functional relationships that third graders identify when solving the tiles problem. We also describe the representation systems that these students use. They evidence correspondence and covariation relationships, with predominance of the first one. These students use numerical and verbal representation systems most frequently numerical, and manipulative and pictorial representations, with less frequency. We also observe the use of multiple representations.

Keywords: *algebraic thinking, functional thinking, representation systems*

La investigación que presentamos se enmarca en la propuesta *early algebra*,la cual promueve la introducción del álgebra escolar, a través del pensamiento algebraico,desde los primeros niveles educativos (e.g., Blanton, 2008; Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest, 2006). Kaput (2008)considera que el pensamiento algebraico impregna la forma en que los sujetos hacen, piensan y hablan sobre las matemáticas, relacionando así el álgebraconla propia actividad humana y de la cual puede emerger.Cuando el foco matemático del pensamiento algebraico son las funciones, se habla del pensamiento funcional(Cañadas, Brizuela y Blanton, 2016), para el que es fundamentalel concepto de función, la relación entre cantidades involucradas y la variación conjunta entre ellas. Algunos investigadores han precisado el constructo "pensamiento funcional" en los términos que describimos a continuación. "Se centra en la relación entre dos (o más) variables; específicamente los tipos de pensamiento que van desde relaciones específicas a generalizaciones de relaciones" (Kaput, 2008, p. 143). El pensamiento funcional es "un proceso de construcción, descripción y

Pinto, E., Cañadas, M. C., Moreno, A. y Castro, E.. (2016). Relaciones funcionales que evidencian estudiantes de tercero de educación primaria y sistemas de representación que usan. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 341-350). Málaga: SEIEM..

razonamiento con y sobre las funciones. Este envuelve el pensamiento algebraico ya que incluye la construcción de una generalización sobre variables que se encuentran relacionadas" (Blanton, 2008, p. 30). Consideramos que el pensamiento funcional es una actividad cognitiva que se inicia y desarrolla al trabajar sobre las relaciones entre cantidades, específicamente cuando se ponen en funcionamiento conceptos determinados para responder a cuestiones específicas.

En los últimos años, se encuentran contenidos relacionados con el pensamiento funcional en los documentos curriculares de diferentes países (Merino, Cañadas y Molina, 2013). Algunos de esos documentos parten del marco teórico de Confrey y Smith (1991) para la enseñanza de las funciones, con base en la resolución de problemas en situaciones contextuales.Los autores señalados recogen la noción matemática de relación funcional para presentar dos aproximaciones para la enseñanza de las funciones. Posteriormente Smith (2008)define tres tipos de relaciones funcionales: (a) recurrencia, que supone identificar el patrón en una secuencia de valores; (b) correspondencia, en la que hace hincapié en la relación entre los pares correspondientes de la variable; y (c) covariación, en donde el foco se encuentra dado por el análisisde cómo dos cantidades varían al mismo tiempo y cómo los cambios que se producen en una afectan a la otra.

Las representaciones matemáticas corresponden a "aquellas herramientas —signos o gráficos— que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con los cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas" (Rico, 2009, p. 3). Es así como las representaciones permiten a los sujetos establecer una forma de acercarse y entablaruna relación con un determinado objeto matemático, entre las cuales se distinguen dos: simbólicas y gráficas. Las diferentes formas de representación o formas de expresar un determinado concepto matemático da origen a los sistemas de representación, que para Castro, Rico y Romero (1997) sonentendidos como una manera de expresar y simbolizar ciertas estructuras numéricas mediante el uso de signos, reglas y enunciados, en donde los sistemas de representación por sí solo no agotan al concepto al cual representan.Por su parte Goldin y Shteingold (2001) indican que cada sistema de representación se encuentra reguladoporun conjunto de reglas que están condicionadas por las matemáticas y por el concepto matemático específico. Sobre las funcionalidades de un sistema de representación, Kaput (1992) indica que estos son un sistema de reglas para identificar o crear caracteres, operar sobre y con ellos y establecer relaciones entre ellos. Tal como se ha indicado, un objeto matemático se puede expresar a través de diferentes sistemas de representación y en el caso del álgebra escolar, Molina (2014) destaca que "conviven diferentes sistemas de representación externas que ayudan a hacer presentes los objetos matemáticos abstractos" (p. 559), entre los cuales se encuentran, principalmente el lenguaje verbal, el simbolismo algebraico y los sistemas de representación tabular, gráfico y numérico.

Confrey y Smith (1991) recomiendan el uso de representaciones múltiples y transformaciones entre esas representaciones para la enseñanza de las funciones, en donde el uso de las representaciones permitiría que el sujeto exprese sus propias ideas sobre las funciones. Las representaciones múltiples implican el proceso de representar un objeto matemático de dos o más formas diferentes, y a su vez, se logre realizar traducciones entre ellas (Janvier, 1987).Cañadas y Figueiras (2011) denominan representación sintética a la combinación de dos o más representaciones, que al ser analizadas de manera aislada no aportan información específica sobre el proceso que está llevando a cabo el estudiante. Desde las ideas anteriores, definiremos representaciones múltiples como el empleo de dos o más representaciones en las cuales se apoya un determinado sujeto, en donde ambas entregan información que no podría ser analizada al considerarla por separadas.

Algunos estudios relacionados con el pensamiento funcional realizados recientemente en diferentes cursos de educación primaria dan cuenta de la posibilidad de fomentar y desarrollar este tipo de pensamiento algebraico en la educación primaria. Blanton, Brizuela, Murphy, Sawrey y Newman-Owens (2015) exploran sobre el pensamiento de los estudiantes al generalizar relaciones funcionales, llegando a identificar diferentes niveles al pensar sobre este tipo de relaciones. Cañadas y Fuentes (2015)describen las estrategias y sistemas de representación que empelan un grupo de estudiantes de primero de educación primaria en la resolución de un problema que involucra la relación funcional $f(x)=5x$. Estos estudiantes emplearon los sistemas de representación pictórico, simbólico y verbal. El sistema de representación pictórico fue el más frecuentemente utilizado, a excepción de una cuestión del problema donde se les preguntaba sobre generalización, donde el sistema de representación verbal fue el predominante. También se observan representaciones múltiples, destacando el uso de los sistemas de representación pictórico y numérico. Merino, Cañadas y Molina (2013) llevan a cabo una investigación sobre las estrategias y representaciones que utilizan estudiantes de quinto de educación primaria al trabajar una tarea de generalización que involucra la función $f(x)=2x+2$. Los principales resultados dan cuenta de la diversidad de sistemas de representación utilizados. La mayoría de estos alumnos emplearon representaciones múltiples. Destaca la combinación entre los sistemas de representación pictórico y verbal y, en menor medida, numérica y verbal.

OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

En este trabajo abordamos tres objetivos de investigación.

1.Identificar si los estudiantesde tercer curso de primaria dan muestra de pensamiento funcional.

2. Describir las relaciones funcionales que utilizan aquellos estudiantes que manifiestan pensamiento funcional.

3.Describir los sistemas de representación en los cuales se apoyan aquellos estudiantes que manifiesten pensamiento funcional.

MÉTODO

En este apartado describimos los sujetos participantes en la investigación, cómo diseñamos e implementamos la recogida de información y cómo llevamos a cabo el análisis de datos.

Sujetos

Trabajamos con un grupo de 24 estudiantes de tercero de educación primaria (8-9 años). La muestra fue intencional, según la disponibilidad del centro y de los docentes del mismo. Los estudiantes no habían trabajado previamente con problemas que involucraban relaciones funcionales anteriormente a nuestra intervención en el aula.

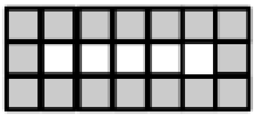
Recogida de información: experimento de enseñanza e instrumentos

Este trabajo se enmarca en una investigación más amplia centrada en tercero de educación primaria, en la que se lleva a cabo un experimento de enseñanza (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011). Por la naturaleza de la investigación, en cada sesión planteamos un problema contextualizado en el que aparecía involucrado una función lineal. En este estudio nos centramos en la cuarta y última sesión, específicamente en las respuestas escritas que brindan los estudiantes a un cuestionario. Esta sesión se corresponde con el último ciclo del experimento de enseñanza. Justificamos esta elección con base en la relación funcional implicada en el problema trabajado, que involucra tanto la estructura aditiva como la multiplicativa, y por ser la última que realizamos con ellos y estar los estudiantes más familiarizados con el equipo de investigación.

La sesión tuvo una duración de 120 minutos y tuvo varias partes. En la primera, la profesora-investigadora introdujo el problema. En la segunda, los alumnos trabajaban en gran grupo (puesta en común) sobre casos particulares relativos al problema. En la tercera, los alumnos trabajaban individualmente en cuestionarios individuales, aunque podían hablar con sus compañeros. El equipo de investigación (profesora-investigadora e investigadora de apoyo) resolvía dudas sobre la realización del trabajo de los alumnos. En la cuarta parte, se hizo una puesta en común en gran grupo sobre el trabajo realizado en las fichas con la guía de la profesora-investigadora. Un tercer investigador grabó la sesión con videocámara y registró notas significativas para la investigación. El análisis de datos que realizamos aquí se refiere al cuestionario individual en el que trabajaron los estudiantes.

El cuestionario empleadoestaba conformado por una situación problema que responde a la función $f(x) = 2x+6$, tal como se presenta en la figura 1. Además, dejamos materiales manipulativos que representaban los diferentes tipos de baldosas (cuadrados blancos y grises), por si querían utilizarlos en la resolución.

Un colegio quiere reformar el suelo de todos sus pasillos porque está ya muy estropeado. El equipo directivo decide enlosar los pasillos con baldosas blancas y con baldosas grises. Todas las baldosas son cuadradas y tienen el mismo tamaño. Las baldosas se van a colocar en cada pasillo de la manera que ves en la siguiente imagen.



El colegio contrata a una empresa para que reforme los pasillos de las tres plantas del colegio. Te pedimos que ayudes a los albañiles a contestar algunas preguntas que necesitan responder para hacer este trabajo.

Figura 1. Problema de las baldosas

A continuación de la presentación, planteamos las siguientes cuestiones, donde se solicitaban las respuestas y la justificación de las mismas.

C1. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 5 baldosas blancas?

C2. Unos pasillos son más largos que otros. Por eso, los albañiles necesitan diferente número de baldosas para cada pasillo. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 8 baldosas blancas?

C3. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 10 baldosas blancas?

C4A. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 100 baldosas blancas?

C4B. Ahora hazlo de una forma diferente y explícalo aquí.

C5. Los albañiles de una empresa siempre colocan primero las baldosas blancas y después las baldosas grises. ¿Cómo puedes saber cuántas baldosas grises si ya han colocado las baldosas blancas?

C6. En uno de los pasillos, por error los albañiles han colocado las baldosas grises antes que las blancas. Han colocado 20 baldosas grises, ¿cuántas baldosas blancas necesitan?

C7. En otro pasillo los albañiles también han colocado las baldosas grises antes que las blancas. Han colocado 56 baldosas grises, ¿cuántas baldosas blancas necesitan?

Análisis de datos

Analizamos las respuestas escritas de los estudiantes en los cuestionarios. Para la codificación de las respuestas de los alumnos, a cada uno de estos se le atribuyó un código específico, según la ubicación en la que se encontraban en el aula (Ai, con i=1, … 30). Para el análisis de la información, consideramos dos focos, que responden a los objetivos presentados: (a) relaciones funcionales y (b) sistemas de representación.

Para la determinación de aquellos estudiantes en los que es posible identificar una manifestación de pensamiento funcional en sus respuestas, nos centramos en la totalidad de respuestas entregadas por dicho estudiante, analizándolas de forma conjunta (Cañadas, en prensa). De este modo, consideramos que un estudiante pone de manifiesto pensamiento funcional cuando en dos o más respuestas se identifican una relación funcional.

Para abordar el objetivo relativo a las relaciones funcionales, consideramos las categorías que se corresponden con las relaciones funcionales descritas en el marco teórico: (a) recurrencia, (b) correspondencia y (c) covariación. Análogamente, sobre los sistemas de representación, consideramos los mencionados en el marco teórico, tomando las características específicas de la tarea: (a) verbal, (b) simbolismo numérico, (c) simbolismo algebraico, (d) pictórico y (e) manipulativo. Los sistemas de representación no son mutualmente excluyentes por lo que, para el análisis consideramos la posibilidad de que aparecieran representaciones múltiples y/o sintéticas.

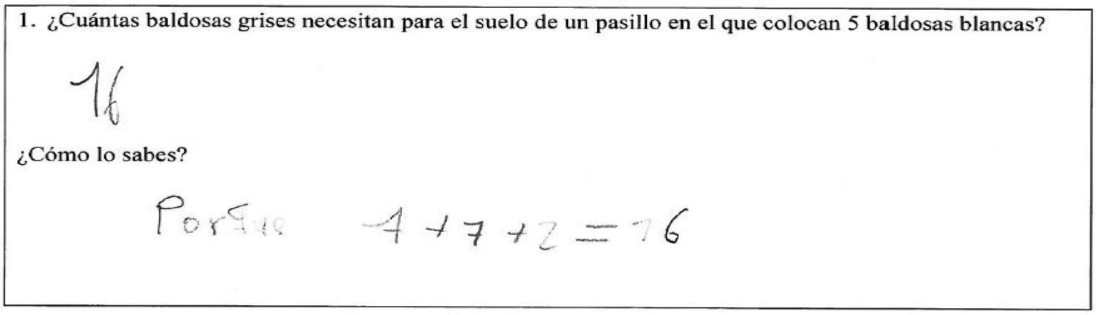
RESULTADOS

Todos los estudiantes respondieron a las tres primeras cuestiones del problema. En C4A. un estudiante no respondió, y enC4B., diez estudiantes no entregaron una respuesta escrita. En C5, C6 y C7 la cantidad promedio de alumnos que no respondieron las cuestiones es de ocho.

A continuación presentamos los resultados organizados según los dos focos de este trabajo: relaciones funcionales y sistemas de representación.

Relaciones funcionales

El estudiante A22 es un caso donde consideramos que manifiesta pensamiento funcional porque en más de dos cuestiones responde siguiendo una misma relación (ver figuras 2, 3 y 4).

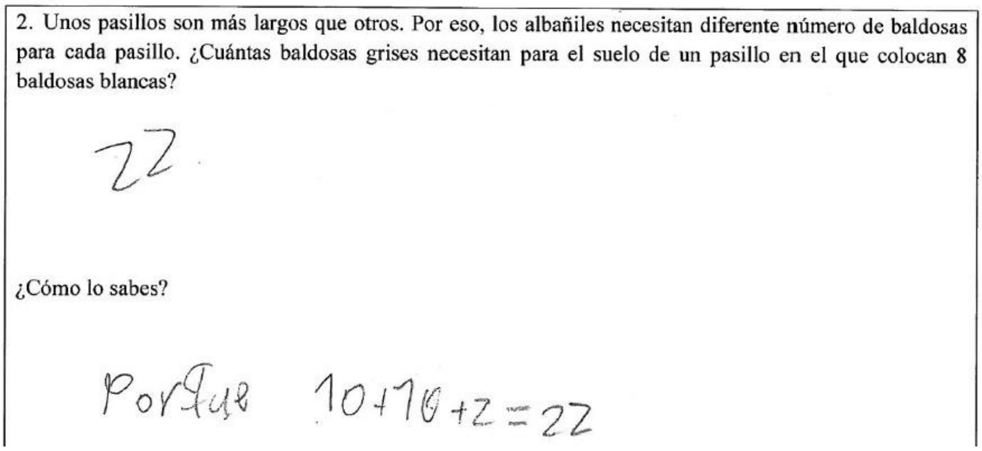

1. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 5 baldosas blancas?

16

¿Cómo lo sabes?

Porque 7+7+2=16

Figura 2. Respuestas de A22 en C1

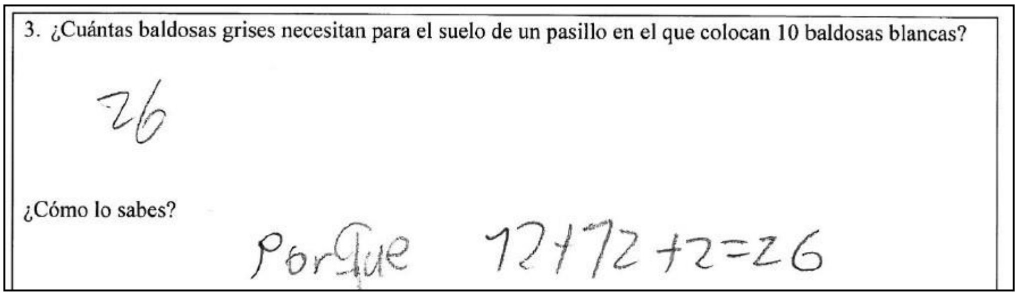

2. Unos pasillos son más largos que otros. Por eso, los albañiles necesitan diferente número de baldosas para cada pasillo. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 8 baldosas blancas?

22

¿Cómo lo sabes?

Porque 10+10+2=22

Figura 3.Respuestas de A22 en C2


3. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 10 baldosas blancas?

26

¿Cómo lo sabes?

Porque 12+12+2=26

Figura 4. Respuestas de A22 en C3

Como se observa en la figura 2, este estudiante considera el número de baldosas blancas dadas (5) y le añade dos (7). Así, tendría el número de baldosas grises en uno de los laterales (superior o inferior). A continuación, suma ese número consigo mismo (7+7), con lo que obtiene el número de baldosas grises en los laterales superior e inferior de las baldosas blancas. Finalmente, añade dos, que se corresponden con las baldosas a los lados derecho e izquierdo de las baldosas blancas (7+7+2). Utiliza esta misma relación funcional para los casos de 8 y 10 baldosas blancas (ver figuras 3 y 4). En los tres casos, se observa que relaciona pares de valores (a, $f(a)$) para valores de a correspondientes a los casos particulares (5, 8 y 10), y establece la relación con los números de baldosas grises 16, 22 y 26, respectivamente. Por eso interpretamos que la estudiante identifica una relación de correspondencia.

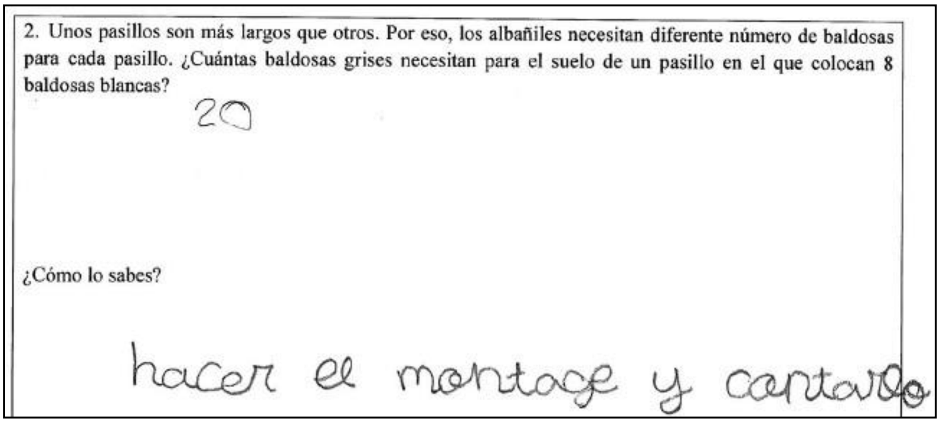
En síntesis, del total de respuestas analizadas, 11 estudiantes manifiestan pensamiento funcional, mientras que en 13 de ellos no es posible determinar este tipo de pensamiento a partir de sus respuestas. Sobre las relaciones funcionales que utilizan los 11alumnos que ponen de manifiesto este tipo de pensamiento a través de lascuestiones planteadas, ningún estudiante pone de manifiesto la relación de recurrencia. En la tabla 1 presentamos las relaciones funcionales que emplean aquellos estudiantes que manifiestan pensamiento funcional, por cada una de las cuestiones.

Tabla 1. Relaciones funcionales utilizadas por los estudiantes en cada cuestión

	Cuestiones															
	C1		C2		C3		C4A		C4B		C5		C6		C7	
	Relación funcional															
Alumno	Cr	Cv	Cr	Cv	Cr	Cv	Cr	Cv	Cr	Cv	Cr	Cv	Cr	Cv	Cr	Cv
A3						✓	✓				✓			✓	✓	
A5	✓		✓		✓		✓									
A6	✓		✓		✓		✓		✓			✓			✓	
A9			✓		✓		✓		✓			✓	✓		✓	
A11	✓		✓				✓		✓		✓		✓		✓	
A12				✓		✓										
A13					✓		✓		✓							
A14			✓		✓		✓		✓						✓	
A19	✓				✓											
A22	✓		✓		✓		✓		✓			✓	✓		✓	
A24					✓		✓		✓		✓					

Nota. C1, C2, C3, C4.A, C4.B, C5, C6, C7= cuestiones; Cr = correlación; Cv = covariación

La mayoría de las relaciones funcionales que evidencian los estudiantes de tercero son de correspondencia. También encontramos ejemplos de relaciones de covariación.En la figura 5 presentamos un ejemplo.



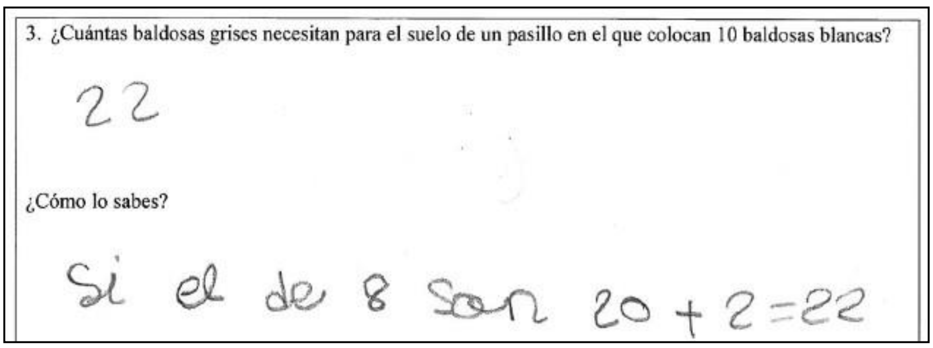


Figura 5. Respuestas de A3 en C2 y C3

La estudiante, a pesar de entregar una respuesta errónea, al responder la tercera pregunta utiliza el resultado obtenido en la pregunta anterior, sobre la que construye un procedimiento (sumar 2) para llegar a la respuesta. En este caso, observamos que la estudiante se centra en la variación que hay en el número de baldosas blancas (entre 8 y 10, hay un aumento de dos baldosas blancas) para calcular el número de baldosas grises, para las que concluye que la variación también ha de ser de dos. Por tanto, puesto que se centra en cómo la variación entre dos valores de la variable independiente afecta a la variación que se produce entre dos valores de la variable dependiente, se trata de una relación de covariación.

Sistemas de representación

En la tabla 2 organizamos los resultados relativos a los sistemas de representación empleados por los estudiantes en cada una de las cuestiones.

Tabla 2. Sistemas de representación empleados por cuestión

Alumno	C1	C2	C3	C4A.	C4B.	C5	C6	C7
A3	p	m	v; n	n	n	v	v	n
A5	n	n	n	n	0	0	0	0
A6	v	v	n	n	n	v	v	n
A9	p	n	n	n	v	v	v	v
A11	v	v; n	v	v; n	n	v; n	v; n	v;n
A12	v	v; n	n	n	v; n	v	0	0
A13	p	m	v	v	n	m	m	m
A14	p	v	v; n	n	n	v	v	v
A19	p; n	v	v; n	n	0	n	p	p
A22	n	n	n	n	v	v	n	n
A24	p	m	v; n	n	v; n	p	m	m

Nota. p = pictórico; n = numérico; v = verbal; m = manipulativo

La mayoría de los estudiantes emplean sistemas de representación verbal y numérico y, en menor medida, representaciones pictóricas y manipulativas. Los alumnos no emplean el simbolismo algebraico en ningún caso.

La figura6da cuenta del sistema de representación numérico en la argumentación del procedimiento utilizado.

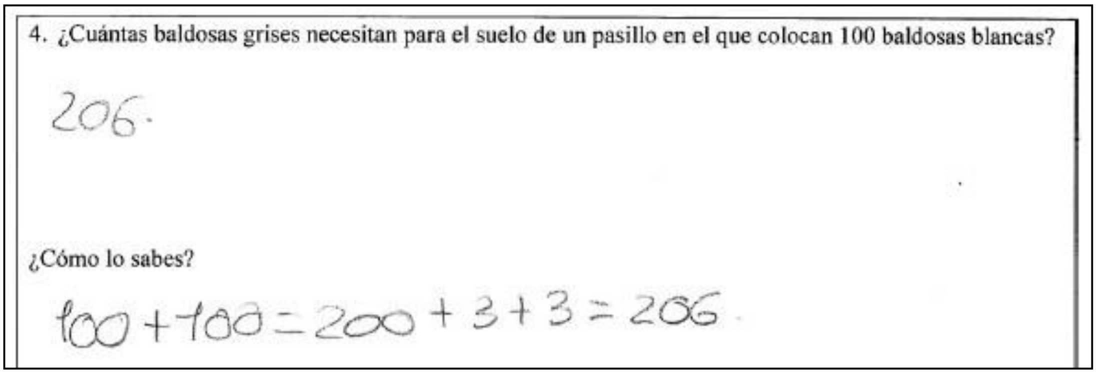


Figura 6. Sistema de representación numérico empleado por A24en C4A

Un ejemplo de un sistema de representación verbal está presente en la respuesta de A6 al responder la cuestión 1, quien establece en su justificación: “tienes que tener tres en cada lado y serían 6 y quedarían 10 = 16”.

Si bien hay respuestas en las cuales solo es posible determinar un tipo de sistema de representación empleado, destacamos algunasrespuestas en las cuales es posible identificar dos sistemas de representación diferentes en los cuales se apoyan los estudiantes para establecer la relación funcional: representaciones múltiples (ver figura 7).

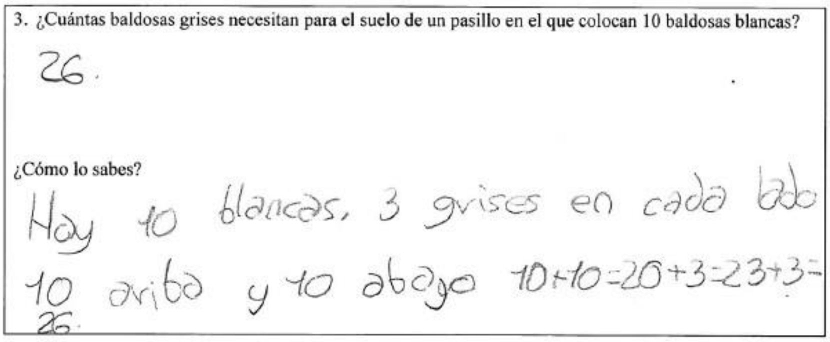


Figura 7. Sistema de representación múltiple de A24 en cuestión 3

En la figura 7 se observa que ambos sistemas de representación aportan información y, aunque tienen significados independientes, se necesitan para dar respuesta completa a la cuestión. Se considera una representación múltiple. En otros casos, observamos representaciones múltiples pero cada uno de los sistemas de representación no tienen significado por separado. Por ejemplo, A11 en la cuestión 6, expresa: "pues tres de los lados y 3 del otro lados 6, a 20 – 6 = 14 y la mitad de catorce 7. En total 7 baldosas". También se presentan los sistemas de representación numérico y verbal pero cada uno de ellos no tiene significado por separado, considerándose representaciones sintéticas.

DISCUSIÓN DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Las respuestas analizadas permiten abordar los objetivos de investigación planteados. Por un lado, hemos identificado los estudiantes de tercero de educación primaria que ponen de manifiesto pensamiento funcional en el problema planteado. Entre estos alumnos, hemos descrito el tipo de relación funcional que utilizan. Además, presentamos una primera aproximación al análisis de los sistemas de representación que estos estudiantes emplean en sus respuestas.

Referente a las relaciones funcionales, la correspondencia es la más empleada por estos estudiantes. La utilización con mayor frecuencia de esta relación funcional, entendida como la relación entre los pares correspondientes de la variable (Smith, 2008), es posible relacionarla con las experiencias a las cuales los estudiantes se encuentran más habituados, como puede ser el trabajo con patrones numéricos y la obtención de regularidades. En este sentido, parece que, de forma natural (porque no lo han trabajado en clase), los estudiantes han superado la relación de recurrencia, que es la que se suele trabajar a través de patrones en educación infantil y primeros cursos de educación primaria y se considera la más básica; pasando a relaciones en las que aparecen implicadas valores de las dos variables: correspondencia y covariación.

Los estudiantes participantes en la investigación utilizaron los sistemas verbal, numérico, pictórico y manipulativo. Consideramos que el empleo de sistemas de representación pictórico y manipulativo en las primeras cuestiones, donde los casos particulares correspondían con número pequeños. Sin embargo, en C4 se solicitaba determinar la cantidad de baldosas grises dadas 100 baldosas blancas, en donde no era posible manipular el material concreto entregado, así como el uso de sistemas de representación pictóricos no era factible de realizar dado el tiempo que requiere dicho procedimiento. El sistema de representación verbal aparece cuando los estudiantes explican sus respuestas, tal y como cabría esperar y como ha ocurrido en los antecedentes presentados con estudiantes de primero y quinto de educación primaria. A diferencia de los estudios anteriores, destacamos la escasa presencia del sistema de representación pictórico y la predominancia del numérico. Además, la inclusión del material manipulativo parece no haber tenido un impacto significativo, ya que fueron pocos los estudiantes que lo emplearon.

La existencia de sistemas de representaciones múltiples en algunas respuestas de los estudiantes, siguiendo las ideas de Confrey y Smith (1991), permiten analizar cómo dos diferentes sistemas se complementan entre sí y ambos permiten tener una comprensión más profunda de la idea matemática que subyace a la tarea. Complementando esta idea, Thompson y Chappell (2007) indican que estos tipos de representaciones han recibido la atención de los profesores de matemática como una posibilidad de que su uso facilite el aprendizaje de esta disciplina, asociada a la comprensión. Destacamos el uso de representaciones múltiples (algunas sintéticas) por algunos estudiantes, ya que nos permite identificar las relaciones y conexiones que los estudiantes pueden construir a partir del contenido matemático que subyace a la actividad.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencia EDU2013-41632-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España; y gracias a la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica del Gobierno de Chile (CONICYT), mediante su Programa de Formación de Capital Humano Avanzado a través de la Beca de Doctorado folio 72160307.

REFERENCIAS

Blanton, M. (2008). *Algebra and theelementaryclassroom: Transformingthinking, transformingpractice*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Blanton, M., Brizuela, B. M., Murphy, A., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015). A learningtrajectory in 6-year-olds´s thinkingaboutgeneralizingfunctionalrelationship. *JournalforResearch in MathematicsEducation, 46*(5), 511-559.

Cañadas, M. C. (en prensa). Introducción del pensamiento algebraico en educación primaria: un enfoque funcional. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas.*

Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior*, *41*, 87-103. http://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.10.004

Cañadas, M. C. y Figueiras, L. (2011). Uso de representaciones y generalización de la regla del producto. *Infancia y Aprendizaje*, *34*(4), 409-425.

Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). Alicante, España: SEIEM.

Carraher, D. W., Schliemann, A., Brizuela, B. M. y Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematicseducation. *JournalforResearch in MathematicsEducation*, *37*(2), 87-115.

Castro, E., Rico, L. y Romero, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las Ciencias, 15*(3), 361-371.

Confrey, J. y Smith, E. (1991). A frameworkforfunctions: Prototypes, multiplerepresentations, and transformations. En R. G. Underhill (Ed.), *Proceedings of the 13th anual meeting North American Chapter of the International GroupforthePsychology of MathematicsEducation*(Vol. 1, pp. 57-63). Blacksburg, VA: ConferenceCommittee.

Goldin, G y Shteingold, N. (2001). Systems of representations and thedevelopments of mathematicalconcepts. En A. Cuoco y F. Curcio (Eds.), *The roles of representation in schoolmathematics* (pp. 1-23). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Janvier, C. (1987). Representation and understanding: Thenotion of functions as anexample. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in theteaching and learning of mathematics (pp. 67-72). Hillsdale, N.J.: Lawrence ErlbaumAssociates.

Kaput, J. J. (1992). Technology and mathematicseducation. En D. A. Grouws (Ed.). *Handbook of researchonmathematicsteaching and learning*(pp. 515-556). New York, NY: Macmillan.

Kaput, J. J. (2008). Whatis algebra? Whatisalgebraicreasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.),*Algebra in the Early Grades* (pp. 5-17). New York; NY: Routledge.

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *2*(1), 24-40.

Molina, M. (2014). Traducción del simbolismo algebraico al lenguaje verbal: Indagando en la comprensión de estudiantes de diferentes niveles educativos. *Gaceta de la RSME*, *17*(3), 559-579.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. *PNA*, *4*(1), 1-14.

Smith, E. (2008). Representationalthinking as a frameworkforintroducingfunctions in theelementarycurriculum. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.),*Algebra in the Early Grades*(pp. 133-163). New York; NY: Routledge.

Thompson, D. R. y Chappell, M. F. (2007). Communication and representation as elements in mathematicalliteracy. *Reading &WritingQuarterly*, *23*(2), 179-196. http://doi.org/10.1080/10573560601158495.

CONOCIMIENTO PROFESIONAL PARA LA ENSEÑANZA DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN PRIMARIA: UNA PERSPECTIVA CURRICULAR

Professional KnowledgeforProblemSolvingInstruction: A CurriculumPerspective

Piñeiro, J. L., Castro, E. y Castro-Rodríguez, E.

Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo exponemos el conocimiento necesario para que un docente de primaria pueda desenvolverse con éxito al afrontar procesos de enseñanza que incluyan la resolución de problemas de matemáticas. Para ello, realizamos un análisis curricular a seis documentos oficiales de distintos países sobre sus prescripciones sobre resolución de problemas matemáticos.A través de un análisis de contenido, y partiendo de las categorías de conocimiento propuestas por Chapman (2015), hemos elaborado un nuevo modelo que permite describir el conocimiento profesional sobre resolución de problemas que exigen los currículos para enseñar este tópico. Los resultados muestran una imbricada red de conocimientos que los currículos requieren de los profesores al afrontar la enseñanza de la resolución de problemas en las matemáticas escolares.

Palabras clave: *conocimiento profesional, resolución de problemas, análisis curricular, educación primaria.*

Abstract

In this paper we present the need for a primary teacher can function successfully in addressing teaching processes that include mathematical problem solving knowledge. We perform a curriculum analysis tosix official documents of different countries on their prescriptions for solving mathematical problems. Through a contentanalysis and basedonthecategories of knowledgeproposedbyChapman (2015),wedeveloped a new modelto describe theprofessionalknowledgetroubleshootingdemanding curriculum forteachingthistopic. Theresults show anintricatenetwork of knowledgethatcurricularequireteacherstodealwithproblemsolving in schoolmathematics.

Keywords: *professional knowledge, problemsolving, curriculumanalysis, primaryeducation.*

INTRODUCCIÓN

Bajo el supuesto de que una mejor calidad en el conocimiento del profesor, mejorará el aprendizaje de sus estudiantes, se han desarrollado numerosas investigaciones centradas en el conocimiento profesional del profesor de matemáticas a lo largo de las últimas décadas(Ponte y Chapman, 2006). De estos trabajossurgen modelos teóricos que intentan describir el conocimiento del profesor de matemáticas (Ball, Thames y Phelps, 2008; Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013; Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005) y estudios internacionales como TEDS-M (Tatto et al., 2008) queintentan indagar sobre este constructo desde la formación inicial de futuros profesores de matemáticas.

Del mismo modo, la resolución de problemas matemáticos y su enseñanza ha concitado el interés de investigadores(Santos-Trigo, 2008). Lester (2013) menciona que la resolución de problemas es

Piñeiro, J. L., Castro, E., y Castro-Rodríguez, E. (2016). Conocimiento profesional para la enseñanza de la resolución de problemas en primaria: una perspectiva curricular. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 351-361). Málaga: SEIEM.

un área de estudio compleja y elusiva; dónde destaca cómo prioritaria la necesidad de investigar, entre otras cosas, sobre el conocimiento que el profesor debe poseer para su desarrollo profesional. El autor señala cinco cuestiones preocupantes sobre la instrucción en resolución de problemas: (a) la necesidad de reformular lo que entendemos por problema y por resolución de problemas, (b) la necesidad de conocer más sobre cómo mejorar las habilidades metacognitivas de los alumnos, (c) exigir al profesor ser competente en resolver problemas y no ser un solucionador experto de problemas, (d) establecer que la resolución de problemas tiene cabida en variadas líneas de investigación y (e) que esta, se debe configurar como una actividad cognitiva de alto nivel.

Lester (2013) enfatiza la poca atención al rol del profesor en la enseñanza de la resolución de problemas, la escasa investigación sobre lo que ocurre en la sala de clases, la centralización de estas investigaciones en el individuo y la inexistencia de teorías unificadoras que aún se mantienen como pertinentes. Esta situación no es muy distinta en España, dónde las investigaciones que tienen a la resolución de problemas como foco, se ocupandel resolutor o del problema; mientras que las centralizadas en los docentes, utilizan la resolución de problemas como contexto, más que como objeto de estudio (Sierra y Gascón, 2011).

En este contexto, son numerosas las iniciativas que han seguido esta línea. Sánchez, Carrillo, Vicente y Juárez (2015) indagan las interacciones que se producen entre profesor y estudiantes al realizar tareas de resolución de problemas en el aula, estableciendo comparaciones entre éstas, cuándo los problemas son rutinarios y no rutinarios. Giné y Deulefeu(2014), en un estudio sobre conocimientos y creencias en torno a la resolución de problemas, muestran cómo los profesores de secundaria presentan creencias y conocimientos adecuados a mayor nivel de estudios, mientras que los profesores de primaria presentan creencias inadecuadas, influidas por su poco conocimiento matemático y didáctico. Por otro lado, Felmer et al. (2015) muestran que los profesores poseen una concepción muy instrumentalizada de lo qué es un problema, no considerando al resolutor. Así mismo, sus prácticas pedagógicas plantean pocas tareas que permitan a sus alumnos resolver problemas.No obstante, a pesar del interés que suscita en la investigación en resolución de problemas matemáticos y el gran número de investigaciones realizadas, es escasa la investigación que caracterice el conocimiento profesional en este tópico.

Siguiendo las ideas de Shoenfeld (1992), entendemos la resolución de problemas como un proceso complejo en el que el sujeto tiene la intención de afrontar y no posee las estrategias para realizarlo (Piñeiro, Castro-Rodríguez y Castro, 2016), con este trabajo abordamos el conocimiento profesional desde una perspectiva curricular, con el fin de identificar el conocimiento necesario para que un docente de primaria pueda desenvolverse con éxito al afrontar procesos de enseñanza que incluyan la resolución de problemas de matemáticas.Para ello, analizamos los currículos de matemáticasde enseñanza primaria de seis países que presentan un desempeño extremo en los resultado obtenidos en la prueba PISA 2012 (OECD, 2014) y en base a los resultados presentamos una sistematización y caracterización del conocimiento profesional presente en tales currículos.

CONOCIMIENTO PROFESIONAL SOBRE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Basándose en los trabajos de Shulman(1986),Ball y colaboradores desarrollan un modelo de análisis del conocimiento profesional del profesor de matemáticas: *MathematicalKnowledgeforTeaching*[MKT](Ball et al., 2008). Este modelocontempla dos grandes subdominios: conocimiento del contenido y conocimiento didáctico del contenido, que a su vez se dividen en otros tres cada uno. Chapman(2015), con base en la investigación en resolución de problemas, desarrollaun nuevo modelo denominado “mathematicalproblem-solvingknowledgeforteaching” (p.20). La autora define este constructo como la competencia para la enseñanza de la resolución de problemas, comprendida por cuatro componentes. El primer componente de este modelo es la competencia en resolución de problemas, definida como lo necesario para aprender y realizar resoluciones de problemas con éxito.Junto a la competencia de resolución de problemas, encontramos el conocimiento del contenido (sobre problemas y sobre resolver problemas), el conocimiento didáctico del contenido (sobre los estudiantes como resolutores y sobre la enseñanza de la resolución de problemas); por último tenemos la dimensión afectiva y las creencias. Esta categorización no presenta una relación directa con el modelo de Ball y colaboradores (Ball et al., 2008; Hill y Ball, 2009). No obstante, coinciden en la división de dos subdominios: conocimiento del contenido y conocimiento didáctico del contenido.

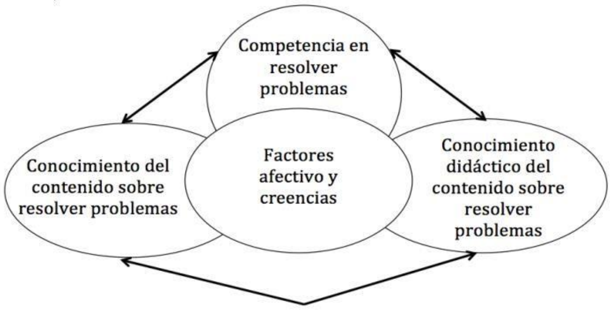


*Figura 11.*Modelo sobre el conocimiento para la enseñanza de resolución de problemas matemáticos(Chapman, 2015, p. 32)

OBJETIVO

Los currículos oficiales suelen incluir prescripciones sobre el papel que debe jugar la resolución de problemas en el aula. Con este trabajo nos proponemos determinar el conocimiento profesional necesario para que un docente de primaria pueda desenvolverse con éxito al afrontar procesos de enseñanza-aprendizaje que incluyan la resolución de problemas de matemáticas.

Para lograr nuestro objetivo consideramos necesario realizar tres acciones: a) analizar los currículos y sus exigencias sobre resolución de problemas matemáticos, b) determinar el conocimiento profesional presente y c) organizar los hallazgos en el modelo adaptado de Chapman (2015).

MÉTODO

En este estudio utilizamos un enfoque cualitativo no interactivo. También es importante señalar el carácter descriptivo, desprendido del análisis de contenido (Rico y Fernández-Cano, 2013).

Muestra y unidades de análisis

La muestra está constituida por documentos creados por organizaciones gubernamentales y que tienen un carácter público y oficial.Particularmente, consta de seis documentos curriculares de países cuyos desempeños en la evaluación PISA 2012 (OECD, 2014) representan sus extremos. De este modo, se escogieron dos países del tercio superior Finlandia y Singapur(Curriculum Planning and Development Division, 2007; National Core Curriculum for Basic Education, 2004), dos del tercil medio España y EE.UU.(Ministerio de Educación y Ciencia, 2014; NCTM, 2000) y dos del tercil inferior Chile y Argentina (Consejo Federal de Educación, 2011a, 2011b; Ministerio de Educación, 2012).

Se utilizaron dos tipos de unidades de análisis que conjuntamente aportan mayor fiabilidad al estudio: sintácticas y temáticas. Krippendorff(1990) señala la primera como elementos sintácticos naturales, cargados de fiabilidad debido a su pequeño tamaño. Para la segunda, destaca “su correspondencia con una definición estructural particular del contenido de los relatos, explicaciones o interpretaciones. Se distinguen entre sí sobre bases conceptuales, y del resto del material irrelevante por poseer propiedades estructurales deseadas” (p.90). Por tanto las unidades de análisis las definiremos como las frases u oraciones que hagan referencia explícita a las palabras “resolución de problemas”, “situación problema” y “problema”, pero que además incluyan elementos sobre lo que debería lograrse con ellas, cómo deberían trabajarse o que a través de ellas se logre otro cometido.

Otro aspecto importante en el diseño de la investigación es la necesidad de establecer la regla de numeración que guiará el análisis. En nuestro caso, se utilizó la regla de presencia y no la frecuencia, pues nuestro objetivo es describir un tipo de conocimiento específico en su totalidad, por tanto esta presencia o ausencia es significativa (Bardin, 1986).

Análisis y categorías

El procedimiento para establecer las categorías de análisis partió del modelo proporcionado por Chapman(2015), permitiendo que las unidades de cada currículo fueran clasificadas en dos grandes categorías y cada una de estas en tres subcategorías. Este proceso se utilizó para una primera organización de las unidades de análisis. Una vez realizado dicho análisis, se continuó con uno inverso, es decir, inductivo dentro de cada categoría. Este procedimiento permitió establecer subcategorías más específicas sobre el conocimiento de los profesores de primaria sobre resolución de problemas. El proceso intermedio, por el cual se construyeron las subcategorías, permitió construir los descriptores de cada categoría.La tabla 1 muestra el resultado final de nuestra categorización sobre ambos dominios de conocimiento profesional para la enseñanza de la resolución de problemas.

Tabla 1.Categorías de análisis

Categorías	**Subcategorías**
Conocimiento del contenido	
Problemas matemáticos	Caracterización de problema Clasificación de problemas según criterios diversos
Resolución de problemas matemáticos	Heurísticos generales Heurísticos específicos Estrategias de otras áreas de contenido Estrategias personales
Invención de problemas	Contextos Beneficios Estrategias
Conocimiento didáctico del contenido	
Conocimiento de los estudiantes como resolutores de problemas	Pensamiento de los estudiantes Dificultades de los estudiantes Conductas de resolutores exitosos
Conocimiento del papel de la resolución de problemas en la enseñanza-aprendizaje de la matemática	Enfoques o vías de acceso Metacognición Evaluación Estrategias metodológicas
Factores afectivos y creencias	Papel e implicaciones de diferentes emociones Rol del profesor

RESULTADOS

Loshallazgos los hemos organizado utilizando como eje el tipo de conocimiento involucrado: conocimiento del contenido sobre resolución de problemas y conocimiento didáctico del contenido sobre resolución de problemas. Estos se establecen desde una técnica analítica discriminante por la necesidad de extraer máximos que muestren todas las características de la resolución de problemas en los currículos, aunque también presenta algunas características de la técnica de conglomerado(Krippendorff, 1990).

Conocimiento del contenido sobre resolución de problemas

Un primer análisis se corresponde con el conocimiento del contenido y sus tres subcategorías: conocimiento sobre problemas, conocimiento sobre resolución y conocimiento sobre invención de problemas

Sobre el conocimiento referido a los *problemas*, se observan dos tendencias: un grupo de países (España, EE.UU. y Chile) cuyos documentos explicitan qué se entenderá por problema y sus clasificaciones, mientras otro grupo (Singapur, Finlandia y Argentina) que únicamente presenta en sus currículos algunas clasificaciones sobre los problemas que deberán aprender los estudiantes.

En lo que respecta al conocimiento sobre *resolver problemas* encontramos que todos los documentos analizados presentan contenidos referidos a heurísticos generales. No obstante, solo los de España, EE.UU. y Chile manifiestan heurísticos específicos, mientras que los de Estados Unidos y Argentina van aún más allá al plantear estrategias de otras áreas de contenido. Por último, los currículos de Finlandia y España no hacen mención a las estrategias personales de resolución. Con esto, podemos afirmar que el de EE.UU. es el documento más completo en esta categoría, seguido del de España, Chile y Argentina, y finalmente el de Singapur y Finlandia.

En la categoría de *invención de problemas*, nuevamente el currículo de EE.UU. es el que cumple con todas las categorías. Seguido del de Chile y Argentina, que cumplen con dos subcategorías:

explicitación de contextos dónde usarlos y estrategias posibles. Por su parte, en el de Singapur, Finlandia y España solo se hace referencia a estrategias en las que realizar la invención de problemas.

La tabla 2 muestra los países cuyos documentos hacen alguna mención a las categorías y subcategorías definidas.

Tabla 2. Presencia de conocimiento del contenido en currículos estudiados

		Currículos					
		Tercio superior		Tercio medio		Tercio inferior	
Categorías		Singapur	Finlandia	España	EE.UU.	Chile	Argentina
Problemas	CCpp			X	X	X	
	CCpc	X	X	X	X	X	X
Resolver problemas	CCrhg	X	X	X	X	X	X
	CCrhe			X	X	X	
	CCre			X	X		X
	CCrep	X			X	X	X
Invención de problemas	CCic				X	X	X
	CCib				X		
	CCie	X	X	X	X	X	X

Nota: CCpp=caracterización del problema; CCpc=clasificación de problemas según diversos criterios; CCrhg=heurísticos generales; CCrhe=heurísticos específicos; CCre=estrategias de otras áreas de contenido; CCrep=estrategias personales; CCic=penamiento de los estudiantes; CCib=beneficios; CCie=estrategias.

Conocimiento didáctico del contenido sobre resolución de problemas

Un segundo análisis corresponde al conocimiento didáctico y sus tres subcategorías: conocimiento sobre los estudiantes como resolutores, conocimiento sobre el papel de la resolución de problemas en los procesos de enseñanza aprendizaje y conocimiento sobre factores afectivos y creencias.

Situándonos en el conocimiento didáctico del contenido, en la categoría conocimiento sobre los *estudiantes como resolutores* todos los documentos estudiados, a excepción de los de España y Argentina, hacen mención al pensamiento de los estudiantes, la importancia de conocerlo y qué aspectos tener en cuenta. Sobre las demás categorías, solo las directrices deEE.UU. cumplen con mencionar conocimientos sobre las dificultades y las conductas de resolutores exitosos.

Referente al *papel que la resolución de problemas* debiese jugar en el aula, nuevamente EE.UU. es el único que cumple con la totalidad de las categorías. Singapur y Chile cubren casi la totalidad y España, Argentina y Finlandia solo mencionan el enfoque prioritario.

Finalmente, en la categoría de conocimiento sobre *factores afectivos y creencias*, todos los documentos hacen referencia a ellas, pero solo el deEE.UU. además, señala el papel del profesor.En este contexto, la tabla 3 muestra nuestros hallazgos en forma resumida.

Tabla 3. Presencia del conocimientos didáctico del contenido en currículos estudiados

		Currículos					
		Tercio superior		**Tercio medio**		**Tercio inferior**	
Categorías		**Singapur**	**Finlandia**	**España**	**EE.UU.**	**Chile**	**Argentina**
Estudiantes como resolutores	CDep	X	X		X	X	
	CDed				X		
	CDee				X		
Enseñanza de la resolución de problemas	CDpe	X	X	X	X	X	X
	CDpm	X			X		
	CDpv				X	X	
	CDpa	X		X	X	X	
Factores afectivos y creencias	CDae	X	X	X	X	X	X
	CDap				X		

Nota: CDep=pensamiento de los estudiantes; CDed=dificultades de los estudiantes; CDee=conductas de resolutores exitosos; CDpe=enfoques o vías de acceso; CDpm=metacognición; CDpv=evaluación; CDpa=estrategias metodológicas; CDae= papel e implicaciones de diferentes emociones; CDap=rol del profesor.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo de este estudio ha consistido en determinar el conocimiento necesario para que un docente de primaria pueda desenvolverse con éxito al afrontar procesos de enseñanza que incluyan la resolución de problemas de matemáticas. A partir de un análisis de los currículos de seis países, determinamos el conocimiento que sobre resolución de problemas han de tener los profesores de primaria.Somos conscientes que nuestros resultados no permiten una caracterización total del conocimiento profesional, pero pueden constituirse como punto de partida para el desarrollo de un modelo con mayor completitud.Es importante señalar que dicha caracterización se configura como una ampliación desde una perspectiva curricular del modelo establecido por Chapman (2015). Dicho modelo contempla la investigación más relevante sobre resolución de problemas; por tanto nuestros hallazgos pretenden ratificar dicho modelo, aclarando y profundizando algunos aspectos.

En este contexto, se puede afirmar que este conocimiento se configura de manera muy cercana al modelo aproximativo de enseñanza (Charnay, 1994), con esto nos referimos a que poner en juego todas las categorías, obliga a darle a la resolución de problemas un papel de fuente, lugar y criterio de aprendizaje. Esta idea, enfatiza el papel del docente en la planificación de situaciones que carguen de sentido a los saberes matemáticos, por tanto, el conocimiento que se exige al profesor es amplio y profundo.

Un aspecto que es transversal, que si bien no es objeto de nuestro trabajo pero concomita con él, es que en todos los currículos el enfoque que predomina sobre la enseñanza de la resolución de problemas esenseñar a través deella. Este aspecto es bastante coincidente con lo expuesto por Stacey(2005) al estudiar algunos currículos anglosajones. Este estudio muestra cómo se conceptualiza la resolución de problemas en diferentescurrículos, concluyendo que es una meta por sí misma y un camino para desarrollar objetivos más amplios.En esta misma línea, se observa que los currículos con mayor explicitación no se corresponden con un buen resultado en evaluaciones estandarizadas. Muchos son los factores que pueden influir este resultado, como la implementación del currículo o la formación y desarrollo profesional de los docentes, y que pueden ser objeto de estudio de futuros trabajos.

Como plantea Chapman(2015), es un conocimiento teórico y también práctico.Ambos aspectos se entretejen intricadamente en cada uno de los tipos de conocimientos. Esta idea se relaciona directamente con la naturaleza dual que presenta el concepto de competencia (Niss, 2006).Nos parece que las categorías propuestas por Chapman (2015) son un gran aporte al avance de la línea de investigación. Pero como ella misma expone, es necesario seguir desarrollando este modelo. A la luz de nuestro análisis, nos parece pertinente establecer ciertos ajustes y acomodaciones de las categorías.

Un primer aspecto se refiere a la inclusión de los factores afectivos dentro del conocimiento didáctico del contenido. En el modelo de Chapman es considerada como una dimensión que se relaciona con el conocimiento profesional en general, pero no forma parte del conocimiento del contenido ni del didáctico del contenido. En nuestro estudio se analizó como parte del conocimiento didáctico. No obstante, consideramos que al definir al conocimiento didáctico como lo necesario para la enseñanza y siguiendo lo establecido por Shoenfeld(1992) respecto a la incidencia del dominio afectivo en la resolución de problemas, este formaría parte del conocimiento didáctico además de ser una dimensión que permea el proceso de enseñar a resolver problemas. Es necesario que los profesores sean capaces de reconocer los diferentes factores y su incidencia, tanto en ellos mismos, como en sus estudiantes. Esto implica además un conocimiento del contenido; es decir, conocer aspectos teóricos de los factores afectivos.

Un segundo aspecto que debe ampliarse, se refiere a los problemas aritméticos de enunciado verbal [PAEV], debido al interés que han generado en los investigadores en didáctica de la matemática (Castro, 2008). Numerosas son las variaciones y especificidades de las clasificaciones, no obstante según sus características semánticas debiese formar parte del conocimiento para la enseñanza. Además, en este tipo de problemas encontramos variables que modificarán la demanda cognitiva que provean. Existen diversas clasificaciones de estas variables, la realizada por Kilpatrick (1978) es una de las más usadas y de mayor utilidad. De acuerdo con este autor, cualquier estudio sobre resolución de problemas en matemáticas involucra a un sujeto que resuelve unproblema o tarea bajo ciertas condicionesy que cada uno de esos tres componentes se definen como una clase de variable. Este último punto nos parece razón suficiente para que, además de formar parte del conocimiento sobre problemas, estéconsiderado enel dominio del conocimiento didáctico del contenido.

Finalmente, otro aspecto que nos parece pertinente ampliar es la invención de problemas. Champman (2015) sitúa a este conocimiento como un conocimiento del contenido, sin embargo,consideramos que también formara parte del conocimiento didáctico por las potencialidades para conocer el pensamiento de los estudiantes, su uso metodológico o evaluativo.

Así, a partir del análisis que hemos realizado, exponemos de forma resumida una propuesta sobre el conocimiento profesional del profesor de Educación Primaria a cerca de la resolución de problemas que combina las perspectivas investigativas y curriculares (tabla 4). Este modelo no pretende mostrarse acabado ni novedoso en su contenido, sino más bien ser un aporte en la sistematización del conocimiento del profesor sobre este tópico.

Tabla 4. Conocimiento profesional necesario para un profesor de primaria sobre resolución de problemas

	Conocimiento del contenido
Problemas matemáticos	Significado de problema; clasificaciones según objetivo de enseñanza, estrategia, etc.; Conocimiento especifico sobre PAEV y las variables de tarea, contexto y sujeto; que intervienen en su complejidad.
Resolución de problemas matemáticos	Comprensión dinámica de la heurística general de resolución de problemas; Conocimiento sobre estrategias o heurísticos específicos y sus usos. Ser competente al resolver problemas.
Invención de problemas	Estrategias de utilización de la invención de problemas, temporales y metodológicas. Saber inventar diversidad de problemas.
	Conocimiento didáctico del contenido
Conocimiento de los estudiantes como resolutores de problemas	Conocimiento sobre las formas de pensar la resolución de problemas por parte de sus alumnos (especialmente uso de representaciones y procesos de modelización); Dificultades más comunes y conductas de resolutores exitosos.
Conocimiento del papel de la resolución de problemas en la enseñanza-aprendizaje de la matemática	Conocer y aplicar tres formas de acceso a la resolución de problema: para, sobre y a través. Tener diversidad de estrategias de evaluación para promover el avance de los estudiantes. Conocer papel y usos de la metacognición en la enseñanza de la resolución de problemas. Saber conectar la resolución de problemas con otras áreas de la matemática y extramatemática.
Factores afectivos y creencias	Conocer las emociones, creencias y actitudes más comunes presentes en los estudiantes y como dirigirlas para que sean beneficiosas en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas.

Así mismo, esta propuesta que hacemos sobre el conocimiento profesional para la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos puede organizarse de distinta forma a como expone el modelo de Chapman (2015). Según nuestro análisis, este conocimiento se configuraría como se observa en la figura 2.

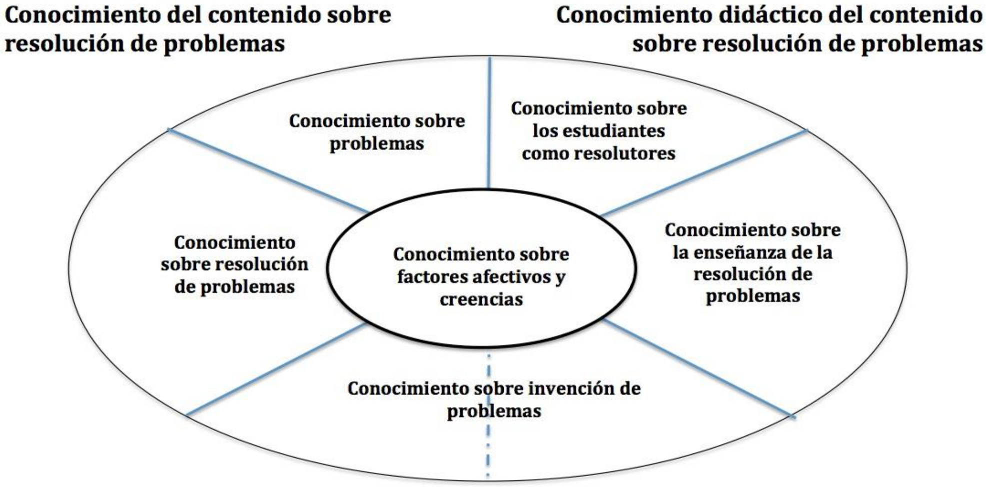


Figura 2. Conocimiento profesional sobre resolución de problemas.

Sin duda, el siguiente paso a desarrollar debe ser aplicar este marco de conocimiento profesional a profesores, tanto en ejercicio como en formación. Bajo nuestra mirada, este estudio y la clarificaciones que realizamos, contribuyen a aclarar el difuso y estancado panorama que presenta el uso de los problemas en el aula(Lester, 2013), pues da claves sobre los aspectos que se debiesen observar o cuales deberían ser los énfasis de las investigaciones futuras.Conjuntamente y por la misma razón, podría ser de utilidad en la construcción de cursos de formación o reestructuración de estos.

Finalmente, al encontramos frente una noción matemática que no se configura como un contenido matemático escolar sino que actualmente se entiende como una competencia, nos parece adecuado que un modelo que intente describir el conocimiento necesario para enseñar a resolver problemas se configure desde una perspectiva competencial. En este contexto, el modelo debiese contemplar la naturaleza dual de la competencia y sus tres dimensiones (Niss, 2006),e incorporar competencias pedagógicas a la propia competencia de resolver problemas (Niss,2006). Por tanto, y si bien este modelo es un avanceen el análisisdel conocimiento del profesor sobre resolución de problemas, consideramos que debiese continuar su ampliación y desarrollo, ajustándose a los requerimientos educacionales actuales.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Bardin, L. (1986). *El análisis de contenido*. Madrid: Akal.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, Ç. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (Vol. 8, pp. 2985-2994). Antalya: Erme.

Castro, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 113-140). Badajoz: SEIEM.

Chapman, O. (2015). Mathematics teachers' knowledge for teaching problem solving. *LUMAT*, *3*(1), 19-36.

Charnay, R. (1994). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En C. Parra y I. Sainz (Eds.), *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones* (pp. 51-64). Buenos Aires: Paidós.

Consejo Federal de Educación. (2011a). *Núcleos de aprendizajes prioritarios. 1° ciclo educación primaria. 1°, 2° y 3° años*. Buenos Aires: Ministerio de Educación.

Consejo Federal de Educación. (2011b). *Núcleos de aprendizajes prioritarios. 2° ciclo educación primaria. 4°, 5° y 6° años*. Buenos Aires: Ministerio de Educación.

Curriculum Planning and Development Division. (2007). *Mathematics Syllabus Primary*. Singapore: Ministry of Education.

Felmer, P., Perdomo-Díaz, J., Cisternas, T., Cea, F., Randolph, V. y Medel, L. (2015). La resolución de problemas en la matemática escolar y en la formación inicial docente. *Estudios Política Educativa*, *1*(1), 64-105.

Giné, C. y Deulofeu, J. (2014). Conocimientos y creencias entorno a la resolución de problemas de profesores y estudiantes de profesor de matemáticas. *Bolema*, *28*(48), 191-208.

Kilpatrick, J. (1978). Variables and methodologies in research on problem solving. En L. L. Hatfield y D. A. Bradbard (Eds.), *Mathematical Problem Solving: Papers from a research workshop* (pp. 7-20). Columbia, OH: ERIC/SMEAC.

Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido: teoría y práctica*. Barcelona: Paidós.

Lester, F. K. (2013). Thoughts about research on mathematical problem-solving instruction. *The Mathematics Enthusiast*, *10*(1y2), 245-278.

Ministerio de Educación. (2012). *Bases curriculares educación básica*. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación.

Ministerio de Educación, Cultura yDeporte. (2014). Real decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la educación primaria. *BOE*, (52), 19349-19420.

National Core Curriculum for Basic Education. (2004). *National core curriculum for basic education intended for pupils in compulsory education*. Helsinki: National Board of Education.

NCTM. (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. (SAEM Thales, Trad.). Sevilla: SAEM THALES.

Niss, M. A. (2006). What does it mean to be a competent mathematics teacher? A general problema illustrated by examples from Denmark. En Praktika, *23º Panellenio Synedrio Mathematikis Paideias* (pp. 39-47). Patras: Elleniki Mathematiki Etaireia.

OECD. (2014). *PISA 2012 results: What students know and can do (Volume I, revised edition, february 2014)*. París: OECD Publishing.

Piñeiro, J. L., Castro-Rodríguez, E. y Castro, E. (2016). Resultados PISA y resolución de problemas matemáticos en los currículos de educación primaria. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 5*(2).

Ponte, J. P. y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers knowledge and practices. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Rotterdam: Sense.

Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de Investigación, Formación de Profesores e Innovación Curricular* (pp. 1-22). Granada: Comares.

Rowland, T., Huckstep, P. y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*(3), 255-281.

Santos-Trigo, M. (2008). La resolución de problemas matemáticos: avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. J. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 159-192). Badajoz: SEIEM.

Sánchez Barbero, B., Carrillo, J., Vicente, S. y Juárez, J. A. (2015, mayo). Análisis de la interacción alumnos-profesor al resolver problemas no rutinarios en aulas de primaria. Trabajo presentado en*XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática.* CIAEM, Chiapas.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. En D. Grows (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). Nueva York, NY: Macmillan.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Sierra, T. y Gascón, J. (2011). Investigación en didáctica de las matemáticas en la educación infantil y primaria. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco yM. Palarea, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 125-164). Ciudad Real: SEIEM.

Stacey, K. (2005). The place of problem solving in contemporary mathematics curriculum documents. *The Journal of Mathematical Behavior*, *24*(3-4), 341-350.

Tatto, M. T., Schmidt, B., Senk, S. L., Ingvarson, L., Peck, R. y Rowley, G. (2008). *Teacher education and development study in mathematics (TEDS-M): Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics. Conceptual framework*. East Lansing, MI: Teacher Education and Development International Study Center, College of Education y Michigan State University.

RELACIONES FUNCIONALES IDENTIFICADAS POR ESTUDIANTES DE PRIMERO DE EDUCACIÓN PRIMARIA Y ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN FUNCIONES LINEALES

Functional relationships identified by first graders and problem solving strategies in problems that involve linear functions

Morales, R.[a], Cañadas, M. C.[a] , Brizuela, B. M.[b] y Gómez, P.[c]

[a]Universidad de Granada, [b]Tufts University, [c]Universidad de los Andes

Resumen

Este trabajo forma parte de una investigaciónque aborda el pensamiento funcional en alumnos de primaria en España. En el contexto de un experimento de enseñanza, implementamos dos sesiones de clase dirigidas a un grupo de 30 alumnos de primero de educación primaria (6 años) en las que ellos abordaron un problema que involucra una relación funcional lineal que busca promover dicho pensamiento. Al analizar las producciones escritas de los alumnos y las transcripciones de las sesiones, proporcionamosevidencias de pensamiento funcional y establecimos las estrategias que emplean los alumnos para resolver las diferentes cuestiones que constituyen el problema. Destacamos que la mayoría de los alumnos establecen relaciones entre variables.

Palabras clave: *early algebra, estrategias de resolución de problemas, pensamiento algebraico, pensamiento funcional.*

Abstract

This work is part of a wider research project that investigatesSpanish elementary students' functional thinking. In the context of a teaching experiment, we implemented two sessions with a group of 30 first graders (6 years of age). They worked on a problem that involves a linear functional relationship that tries to promote such thinking. Analysing the students' written productions and the sessions transcriptions, we provide evidence of functional thinking and we establish students' strategies to answer the different questions that constitute the problem.We highlight that most of the students identify correspondence relationships usingcomputational strategies.

Keywords: *algebraic thinking, early algebra, functional thinking, problem solving strategies.*

La investigación en *early algebra*ha puesto de manifiesto que los alumnos de educación primaria son capaces de trabajar contareas que involucran elementos algebraicosy que su introducción en este nivel educativo es adecuada y beneficiosa (p. ej., Blanton y Kaput, 2004; Brizuela y Martínez, 2012; Kaput, 1998). En ocasiones, se trata de mantener contenidos curriculares existentes, y otorgarlesun carácter másalgebraico (Carraher, Shliemann, Brizuelay Earnest, 2006).

El pensamiento funcional es uno de los enfoques del álgebra escolar adoptado en educación primaria e implicacentrarse en las relaciones entre dos cantidades que covarían. Se pretende que los alumnos puedan enfocarse en habilidades vinculadas a razonar sobre las relaciones entre cantidades que covarían, identificar patrones que subyacen de las relaciones, representar las relaciones, realizar procesos de generalización y justificar esos procesos (Blanton, Levi, Crites y Dougherty, 2011).

Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Gómez, P. (2016). Relaciones funcionales identificadas por estudiantes de primero de educación primaria y estrategias de resolución de problemas que involucran funciones lineales. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 362-371). Málaga: SEIEM.

Diversas razones justifican el interés por la introducción del pensamiento funcional en educación primaria:puede ayudar a superar dificultades en la comprensión del concepto de función en educación secundaria (Doorman y Drijvers, 2011); fomenta la capacidad para representar, justificar y razonarcon relaciones matemáticas (Blanton, Brizuela, Gardiner, Sawrey y Newman-Owens 2015; Kaput, 1998); esuna herramienta para la resolución de problemas (Warren y Cooper, 2005); y es una meta disciplinar en Educación Matemática (Rico, 2006). Estas razones justifican la incorporación de las relaciones funcionales en los currículos de educación primaria en países como Australia, Canadá, Chile, China, Corea, España, Estados Unidos, Japón y Portugal (Merino, Cañadas y Molina, 2013; MECD, 2014; MINEDUC, 2012). En este trabajo nos centramos en el pensamiento funcional de alumnos de primero de educación primaria (6 años) en el contexto español.

MARCO CONCEPTUAL Y ANTECEDENTES

Una visión amplia del álgebra escolar incluye el estudio de relaciones funcionales, patrones, generalización y relaciones numéricas, desarrollo y manipulación del simbolismo algebraico y de otros sistemas de representación (Kaput, 1998; Schliemann et al., 2003). El pensamiento funcional es un tipo de pensamiento algebraico. Se centra en las relaciones entre dos (o más) cantidades variables, enfatiza los procesos de generalización de esas relaciones (Smith, 2008), e implica pensar sobre funciones (Rico, 2006).

Smith (2008), con base en el trabajo de Confrey y Smith (1991) proponen tres tipos de relaciones que permiten dar cuenta del pensamiento funcional: (a) recurrencia, (b) correspondencia y (c) covariación. La recurrencia es la más elemental y se centra en aquel patrón que permite identificar un valor o varios valores de una variabledentro de la secuencia de valores de una de las variables, dejando implícita la secuencia de valores de la otra variable (Blanton y Kaput, 2005). La correspondencia se establece entre pares de las variables involucradas (a, $f(a)$) (Confrey y Smith, 1991; Smith, 2008). La relación de covariación implica identificar cómo cambian las cantidades de ambas variables de forma simultánea y coordinada (Blanton et al., 2011; Blanton y Kaput, 2005).

La investigación sobre el pensamiento funcional en alumnos deprimeros cursos de educación primaria es escasa, encontrándose en un estado incipiente de desarrollo.Blanton et al. (2015) estudian el pensamiento funcional en alumnos de primero (6-7 años) y detectan diferentes tipos de relaciones funcionales. Estos autoresidentificanocho niveles de pensamiento funcional, comenzando por un nivel pre-estructural, en el que los alumnos solo describen una regularidad en términos no matemáticos; pasan por relaciones de recurrencia, correspondencia y covariación; y llegan a manejar la función como objeto. Es en este último nivel en el que los alumnos perciben la generalidad de la relación entre las variables. Desde el punto de vista de las estrategias que emplean alumnos de estas edades en la resolución de problemas de relaciones funcionales,Blanton y Kaput (2004) describen el trabajo de los estudiantes en términos de patrones entre variables y las relaciones aditivas como el conteo de tres en tres y relaciones multiplicativas como el doble y el triple.Cañadas, Brizuela y Blanton (2016) describen las relaciones de covariación que identificanalumnos de 6 y 7 años. Estas autoras muestran cómo la estrategia empleada permite a los alumnos estar más vinculados al contexto extra-matemático (conteo de dos en dos) o al contexto intra-matemático(añadir un número a sí mismo) del problema.Cañadas y Fuentes (2015) identificanque los alumnos de primero de educación primaria emplean estrategias como conteo sobre dibujos; respuesta directa, donde no dan explicaciones a su respuesta; y creación de grupos de n elementos para abordar problemas que involucran la estructura multiplicativa del tipo $f(x)=nx$. Estosupone un avance hacia la estructura multiplicativa que está implicada en el problema. Con nuestro trabajo pretendemos encontrar evidencias del pensamiento funcional de los estudiantes de primero de educación primaria y complementar los resultados existentes sobre las relaciones funcionales que identifican estos estudiantes y las estrategias de resolución de problemas que emplean.

OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

Los objetivos de investigación de este trabajo son los siguientes.

- Identificar si los estudiantes de primero de educación primaria evidencian pensamiento funcionalcuando resuelven problemas que involucran relaciones funcionales, describiendo dichas relaciones.
- Identificar y describir las estrategias que emplean los estudiantes cuando resuelven problemas que involucran funciones.
- Establecer la relación entre las relaciones funcionales que identifican estos estudiantes y las estrategias que emplean.

MÉTODO

En el método, describimos los sujetos participantes en la investigación, el experimento de enseñanza diseñado que nos permitió abordar los objetivos propuestos, los instrumentos y procedimientos de recolección de información, y cómo llevamos a cabo el análisis de datos.

Sujetos

Los sujetos participantes en esta investigación fueron 30 alumnos de primero de educación primaria (6 años) de un centro escolar privado de Granada (España). La selección de la muestra fue intencional, de acuerdo con los objetivos de investigación y la disponibilidad del centro.Antes de la recolección de información, los alumnos presentaban los siguientes conocimientos previos: contar hasta cien, contar de dos en dos, de cinco en cinco y de diez en diez, y operar con la adición y sustracción con números de una y dos cifras.

Experimento de enseñanza

Diseñamos e implementamos un experimento de enseñanza(Molina, Castro, Molina y Castro, 2011) que contempló cinco sesiones de clase de unos noventa minutos cada una, aproximadamente en la mitad del curso académico. Cada sesión tuvo cuatro partes. En la primera, la profesora-investigadora introducía el problema. En la segunda, los alumnos trabajaban en gran grupo (puesta en común) sobre casos particulares relativos al problema. En la tercera, los alumnos trabajaban individualmente en unas fichas de trabajo. El equipo de investigación (profesora-investigadora e investigadora de apoyo) resolvía dudas sobre la realización del trabajo de los alumnos y les ayudaba cuando no sabían escribir algo que pensaban. En la cuarta parte, nuevamente se trabajaba en gran grupo sobre el trabajo realizado en las fichas. Un tercer investigador estuvo encargado de las grabaciones en video y de registrar notas significativas para la investigación.

Instrumentos y procedimientos de recogida de información

En este trabajo, nos centramos en las sesiones 4 y 5 del experimento de enseñanza. La selección se realizó por trabajarse una relación funcional que involucra una relación aditiva y porque, al ser las últimas sesiones, los estudiantes estaban más familiarizados con el equipo investigador. Los únicos conocimientos previos relativos al pensamiento funcional tienen que ver con las sesiones previas donde se trabajaron problemas que involucraban dos funciones lineales.En las sesiones 4 y 5 se trabajó un único problema con diferentes cuestiones y con las siguientes características: (a) involucra la función lineal y=x+5, (b) incluye casos particulares cercanos y lejanos, (c) incluye una relación directa e inversa entre las variables y (d) se trabajan los sistemas de representación verbal y tabular. Propusimos preguntas que consideraban el modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007). Comenzamos el trabajo con casos particulares cercanos, para pasar a los lejanos, hasta llegar a la generalización. El problema se enmarcó dentro de una situación de edades de dos hermanos (Carmen era cinco años mayor que Álvaro).Para este trabajo, consideramos la relación directa, proponiéndoles averiguar la edad de Carmen dada una edad de Álvaro. El enunciado del problema fue el siguiente: “dos niños, Álvaro y Carmen, se llevan cinco años, siendo Carmen cinco años mayor que Álvaro”. Algunas de las cuestiones planteadas fueron: cuando Álvaro tiene un año, ¿cuántos años tendrá Carmen?;cuando Álvaro tienedos años, ¿cuántos años tendrá Carmen?;cuando Álvaro tiene diez años, ¿cuántos años tendrá Carmen?;cuando Álvaro tiene treinta años, ¿cuántos años tendrá Carmen?;cuando Álvaro tiene cincuenta años, ¿cuántos años tendrá Carmen? Finalmente se proponía contestar a una cuestión que promovía la generalización: ¿Cómo calculas los años de Carmen? Estas cuestiones se propusieron en el gran grupo y en una ficha de trabajo en las que debían completar una tabla de forma individual. Grabamos las sesiones con videocámara. A cada una de las diferentes preguntas que se les hacían a los estudiantes sobre el problema se les denomina cuestiones.

Análisis de datos

Realizamos un análisis de datos mixto, que combina lo cualitativo y lo cuantitativo. En primer lugarrealizamos las trascripciones de las dos sesiones efectuadas, donde los alumnos respondían a las cuestiones planteadas por la profesora-investigadora, y recopilamos las producciones escritas de los alumnos en la ficha de trabajo. En segundo lugar,determinamos las cuestiones planteadas en el problema como unidades de análisis. En tercer lugar, categorizamos y clasificamos las unidades de análisis donde se evidenciabapensamiento funcional y qué relación funcional se observaba, de aquellas que no lo evidenciaban. Estas respuestas a su vez las clasificábamosde acuerdo a la estrategia empleada.

Las categorías de análisis utilizadas hacen referencia a cada uno de los dos objetivos planteados. Sobre las relaciones funcionales que evidencian el pensamiento funcional de los estudiantes, utilizamos las tres relaciones que se desprenden del marco teórico: *recurrencia*, *correspondencia* y *covariación*. Adicionalmente, consideramos el valor de "no evidencia relación funcional".

De las investigaciones previas surgen algunas estrategias que los estudiantes emplean como el conteo o la respuesta directa. Ante la escasez de investigaciones relativas a nuestro segundo objetivo de investigación, diseñamos las categorías tras una primera revisión de los datos, con base en la teoría fundamentada (Corbin y Strauss, 1990). Finalmente, diseñamos las siguientes categorías de análisis para las estrategias, que no son mutualmente excluyentes.

- *conteo*(con apoyo de dedos, palabras o tabla de cien). Un ejemplo de esto lo mostramos en el siguiente fragmento: "Trece (responde A23 a la cuestión de cuántos años tiene Carmen cuando Álvaro tiene ocho años, lo hace contando de uno en uno a partir de ocho empleando cada uno de los cinco de dedos de una mano)… luego justifica su respuesta "he puesto cinco en la mesa (pone cinco dedos sobre la mesa) y he seguido contando hacia adelante… desde el ocho… para llegar hasta trece".
- *operatoria*(sumas o restas empleando cálculo mental o escrito). Un ejemplo de cálculo mental se observa en el siguiente fragmento: "Si Carmen nació cinco años más que Álvaro, si Álvaro tiene once, le sumo cinco a once; sería dieciséis" (A29).
- *particulariza*(cuando a una cuestión general responde por medio de un caso particular). Un ejemplo de esta subcategoría es cuando un alumno responde a la pregunta "¿cómo calcularías la edad de Carmen?"por medio un caso particular "Si Álvaro tiene un año Carmen Seis".
- *relación directa como inversa* (intercambia los papeles de las variables dependiente e independiente). Un ejemplo es cuando un alumno responde a la pregunta "¿cómo calculas los años de Carmen?" con "quitándole cinco a los de Carmen". De esta forma, se podría encontrar el valor de la variable independientea partir de la dependiente, y no al revés.
- *respuesta directa*(solo presenta el resultado sin dar ninguna justificación de su trabajo);
- *inadecuada* (no se corresponde con la relación funcional involucrada en el problema).Un ejemplo es el siguiente fragmento.

Profesora-investigadora 1 (I1): Álvaro cumple cinco años… ¿cuántos tiene Carmen?
A1: Siete.
I1: ¿Siete? ¿La hermana tiene dos más?... Álvaro tiene cinco ¿cuántos años más tiene Carmen que Álvaro?
A1: Ocho

RESULTADOS

Tras introducir ejemplos del trabajo de algunos estudiantes con base en las categorías definidas, presentamos los resultados generales relativos a los objetivos de este trabajo: relaciones funcionales y estrategias de resolución de problemas.

Ejemplos del trabajo de los estudiantes

Seleccionamos algunos ejemplos del trabajo de los estudiantes, por ser más representativos y responder de mejor manera a nuestros objetivos de investigación. Primero mostramos un ejemplo de un alumno que no evidencia relación funcional y continuamos con otros alumnos que sí lo hacen.

Dentro de cada ejemplo, explicamos además la estrategia seguida en las respuestas dadas a las cuestiones.

No evidencian relaciones funcionales

A continuación, mostramos las respuestas de A3, quien no muestra evidencias de relación funcional. En la figura 1, mostramos partes de la tabla que A3 completó en la ficha de trabajo. Observamos que, por lo general, emplea una estrategia inadecuada frente a la propuesta de encontrar la edad de Carmen (columnas de la derecha, en ambas imágenes de la figura 1) dada la edad de Álvaro (columnas de la izquierdaen ambas imágenes de la figura 1). Solo para los tres años de Álvaro A3 utiliza una estrategia adecuada respondiendo 8 años para Carmen. Sin embargo, observamos que tanto en números cercanos como lejanos, suma diferentes números a la edad de Álvaro para obtener la edad de Carmen. Por tanto, no sigue ningún patrón para obtener la edad de Carmen.

3	8
4	11
6	74
9	16

71	85
80	95
84	105

Figura 1. Respuesta A3 en tabla

A3 no pone de manifiesto alguna relación funcional cuando se le pregunta la edad de Carmen cuando Álvaro tiene 3 años. El siguiente fragmento muestra la conversación de la profesora investigadora con este estudiante.

- I1: […] Si Álvaro tienes tres, ¿cuántos años tiene Carmen? […]
- A3: Ocho.
- I1: Ocho, ¿por qué?
- A3: Si Álvaro tiene tres y Carmen tiene otros cinco, porque si juntamos los tres, y cinco…dan ocho.
- I1: O sea que tú estás de acuerdo con lo que decía A28. Y ¿por qué el tres lo juntas con el cinco?
- A3: Porque Álvaro tiene tres años y Carmen tiene cinco y si los juntamos…

A3 interpreta que Carmen tiene cinco años y que esta cantidad se le debe sumar al número de años de Álvaro (3 años) para dar respuesta a la cuestión planteada. De este modo, consideramos que A3 no muestra evidencia de pensamiento funcional.A3 utiliza una estrategia con base en la operatoria.

Evidencian relaciones funcionales

A continuación mostramos respuestas de A30, interpretamos que pone de manifiesto pensamiento funcional. En la figura 2, mostramos que A30, tanto en números cercanos (imagen izquierda de la figura 2) como lejanos (imagen derecha de la figura 2) sigue el patrón de sumar cinco a la edad de Álvaro para calcular la edad de Carmen.De esta forma, A30 calcula el valor de la variable dependiente$f(a)$a partir del valor de la variable independiente$a$. Por tanto, establece la relación entre pares de valores de ambas variables, por lo que se trata de una relación de correspondencia.

9	14
10	15
12	17

71	76
80	85
84	89

Figura 2. Respuesta de A30 en tabla

Cuando A30 responde en la ficha de trabajo sobre la forma de calcular los años de Carmen, emplea una estrategia en que considera la relación directa como una relación inversa. Para encontrar la edad de Álvaro, A30 explica que lo hace “quitando cinco a los de Carmen”. Con la estrategia empleada por A30 se podría calcular la edad de Álvaro dada la edad de Carmen, sin embargo, aunque el alumno considere la pregunta de esta manera, la estrategia utilizada es correcta y al explicarla, podemos categorizarla como "considera la relación directa como una relación inversa".

El siguiente fragmento de la conversación de la profesora-investigadora con A30 corrobora la existencia de pensamiento funcional.

- I1: A ver, vamos a pensar. A21 nos estaba diciendo que si Álvaro tenía treinta años, Carmen tendría treinta y cinco ¿tú estás de acuerdo con eso?
- A30: Sí.
- I1: Y tú ¿cómo lo has hecho? ¿Cómo has llegado a ese treinta y cinco?
- A30: Pues, si tiene treinta, Carmen tendría más.
- I1: ¿Cuántos más?
- A30: Cinco…como tiene treinta, tiene treinta y cinco.

Así A30 expresa que tiene que agregar 5 al valor de la variable independiente (edad de Álvaro) para averiguar el valor de la variable dependiente (edad de Carmen). De esta manera A30 emplea una estrategia de operatoria,al considerar la situación como una relación directa.

A continuación, destacamos diferentes momentos en que A21 establece una relación de correspondencia empleando una estrategia de operatoria y llegando a expresar verbalmente una generalización de tal relación ,y una relación de covariación empleandotambién una estrategia de operatoria.

En la figura 3, mostramos que A21 tanto en números cercanos (imagen izquierda de la figura 3) como lejanos (imagen derecha de la figura 3) continuó el patrón de sumar 5 a la edad de Álvaro para encontrar la edad de Carmen. De este modo damos cuenta que A21 pone de manifiesto una relación de correspondencia porque calcula el valor de la variable dependiente a partir del valor de la variable independiente,sumando siempre cinco, y centrándose entre los pares de valores de ambas variables.

6	11
9	14
10	15

71	76
80	85
84	89

Figura 3. Respuesta de A21 en tabla

La respuesta de A21 en la ficha de trabajo sobre cómo encontró la edad de Carmen da cuenta del patrón seguido, él justifica que encuentra la edad de Carmen dada la edad de Álvaro "sumándole cinco".

En la sesión 5 corroboramos que A21 efectivamente identificó una relaciónfuncional de correspondencia empleando una estrategia de operatoria. En una cuestión donde I1 propuso encontrar la edad de Carmen cuando Álvaro tiene 10 años, A21 sumó 5 a 10 y de esta manera encontró la edad de Carmen. Por tanto, se centra en la cantidad de la variable independiente, a la que le suma 5, para encontrar la variable dependiente. De esta manera A21 identifica una relación funcional de correspondencia,empleando una estrategia de operatoria.Por su parte, A21 justifica su respuesta realizando una generalización, de tal modo que él suma cinco a la edad de Álvaro porque Carmen siempre tendrá cinco años más que Álvaro (línea 18).

- I1: […] Si por ejemplo Álvaro tiene diez… ¿Cuántos años tiene Carmen? A ver A21.
- A21: Quince.
- I1: Quince ¿por qué?
- A21: Porque, porque diez más cinco son quince.
- I1: ¿Por qué haces diez más cinco?
- A21: Porque, porque si Álvaro tiene diez Carmen siempre va a tener cinco más, son quince, porque diez más cinco.

Por otro lado, en otra cuestión relativa a encontrar la edad de Carmen en una tabla, A21 logró identificar una relación de covariación empleando una estrategia de operatoria. A21 explicó que cuando la edad de Álvaro aumenta en 1 se debe sumar 1 a la cantidad de años de Carmen (línea 24), como muestra el siguiente fragmento:

- I1: […] ¿Qué hacías siempre para saber cuántos años tiene Carmen?
- A21: Que yo lo he hecho así sumándole…mirando al de arriba…puesto es el cuatro y el de Álvaro…entonces el de abajo será el siguiente…entonces, era el cinco porque va en fila en uno.
- I1: O sea yo te pongo aquí el veintinueve (escribe el número veintinueve debajo del número veintiocho de la variable independiente de la tabla) tú rápidamente…
- A21: Serían treinta y cuatro. (La investigadora escribe el número treinta y cuatro debajo del número treinta y tres de la columna de la variable dependiente de la tabla de funciones).
- I1: ¿Por qué? ¿Me lo puedes repetir con este ejemplo?
- A21: Porque… uno más que veintiocho entonces también uno más que treinta y tres.

Resultados generales

Resumimos los resultados sobrelas respuestas en la tabla 1 de acuerdo conlas estrategias y las relaciones funcionales. A cada alumno le designamos una letra A y un número que va desde el 1 al 30.

Tabla 1. Respuestas de alumnos

	Estrategia					
Relación funcional	Conteo	Operatoria	Particulariza	R. directa como R. inversa	Respuesta directa	Inadecuada
Sin evidencia de relación funcional		A1-A3- A10-A15			A4	A1-A3-A4-A10-A15
Evidencia de relación funcional correspondencia	A2-A5-A11-A19-A23-A25-A26	A2-A7-A9- A12*-A13*-A14-A16*-A17*-A18*-A19*-A20*-A21*-A22-A24-A25*-A26-A28-A29*-A30	A6-A12-A20-A26-A27	A30	A14-A24-A26	
Evidencia relación funcional covariación	A22	A21				

Nota. * = generaliza; R = relación.

Como se observa en la tabla 1, casi todos los alumnos (29/30) respondieron al menos a alguna de las cuestiones propuestas. Veinticuatroalumnos identificaron una relación funcional de correspondencia. Dosde ellos además identificaron una relación de covariación.Ningún alumno identificó una relación de recurrencia.Por último,cinco alumnos no identificaron una relación funcional. De los veinticuatro alumnos que identificaron una relación funcional de correspondencia diez llegaron a realizar un proceso de generalización de esta relación, empleando el sistema de representación verbal.

De los cuatro alumnos que no identificaron una relación funcional, A1, A3, A10y A15emplearon estrategias de operatoria en algunas ocasiones y en otrasemplearon una estrategia inadecuada. A4 empleó una estrategia de respuesta directa y una estrategia inadecuada.

De los veinticuatro alumnos que identificaron una relación de correspondencia,diecinueve emplearon una estrategia de operatoria, siete estrategias de conteo, cincoparticularizaron, tres dieron una respuesta directay uno empleó una estrategia en que considera la relacióndirecta como inversa. Observamos que algunos alumnos emplearon varias estrategias en diferentes cuestiones. Por ejemplo, A12, A20 y A26 emplearon estrategias de operatoria y particularizaron. De los dos alumnos que identificaron una relación de covariación, A22 empleó una estrategia de conteo mientras que A21 empleó una estrategia de operatoria.

CONCLUSIONES

Con este trabajo aportamos mayor evidencia sobre las capacidades que tienen los alumnos de primero de educación primaria cuando se enfrentan a problemas que buscan promover el pensamiento algebraico, en especial el pensamiento funcional. Estos resultados generales confirmanaquellos obtenidos por las investigaciones previas que mencionan que alumnos de primeros niveles educativos tienen capacidades para abordar este tipo de problemas(p. ej., Kaput, 1998; Blanton et al., 2015; Blanton y Kaput, 2004; Cañadas, et. al., 2016; Cañadas y Fuentes, 2015) y, a su vez, los complementan por el tipo de relación funcional trabajado en este estudio.

Destacamos queningún alumno identificó la relación de recurrencia y que la mayoría identificó relaciones de correspondencia. Por tanto,el problema propuesto constituye un medio útil para promover en el aula el pensamiento funcional en alumnos de estas edades, yendo más allá de la recurrencia y pudiendo servir como mediadora hacia la generalización. El problema de edades planteado en esta investigación se puede trabajar en el aula como medio para promover el pensamiento funcional en alumnos de estas edades y así dar respuesta al llamado de Warren y Cooper (2005), quienes defienden la idea de introducir tareas que impliquen centrarse en las relaciones de covariación o correspondencia en vez de la recurrencia.

En ocasiones, algunos de los alumnos no manifestaron pensamiento funcional. Conjeturamos que esto se debió a que no entendieron lo que significaba "diferencia de edad" entre Carmen y Álvaro y menos aún que debían siempre conservar una diferencia de edad de cinco años entre Carmen y Álvaro. Algunos alumnos atribuyeron a Carmen una edad fija: 5 años.Otros alumnos sumaron a la edad de Álvaro cinco pero no lograron dar una respuesta en que evidenciaran la comprensión de esta diferencia de edad entre Álvaro y Carmen a través de los diferentes casos particulares planteados, mientras que otros alumnos sumaron cualquier otro número diferente a cinco y sin explicar el porqué de esta suma. Es destacable la intervención de la maestra de clase quien, a partir de la idea de "cumpleaños", logró que los alumnos entendieran la idea de "diferencia de edad", como se muestra en el siguiente fragmento:

(La maestra toma como ejemplos dos hermanas que tienen cuatro años de diferencia de edad)
Maestra:… esa es la diferencia que siempre, siempre vas a tener tú más que tú hermana… tú llegaste cuatro años antes (le muestra cuatro dedos)…Carmen llegó cinco años antes que su hermano Álvaro… Entonces ¿cuántos años tienes de diferencia con tu hermana?
Alumnos: Cuatro. […]

Destacamos que dos alumnos (A21 y A22) pudieron abordar adecuadamente cuestiones planteadas a través de dos tipos de relación funcional como correspondencia y covariación. Esto supone que un mismo alumno puede abordar un problema de relación funcional empleando más de un tipo derelación funcional.

Con este trabajo hemos dado cuenta de la factibilidad de llevar al aula este tipo de problemas como forma de fomentar el pensamiento algebraico a través del pensamiento funcional. Así mismo, este tipo de investigación se podría llevar a cabo con problemas en otros contextos y situaciones como forma de complementar este estudio y así decidir si el contexto influye en las respuestas que proporcionan.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencia EDU2013-41632-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España; y gracias a una beca CONICYT PFCHA 72150072.

REFERENCIAS

Blanton, M., Brizuela, B., Gardiner, A., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in six-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(5), 511-558.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (2011*). Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in Grades 3-5. Series in essential understandings*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Blanton, M. y Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Blanton, M. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. In M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group of the Psicology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Norway: Bergen University College.

Brizuela, B. M. y Martínez, M. V. (2012). Aprendizaje de la comparación de funciones lineales. En M. Carretero, J. A. Castorina, y A. Barreiro (Eds.), *Desarrollo cognitivo y educación:procesos de conocimiento y contenidos específicos* (Vol. 2, pp. 263-286). Buenos Aires: Editorial Paidós.

Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior, 41*, 87-103.

Cañadas, M. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, *1*(2), 67-78.

Cañadas, M. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: Un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). Alicante: SEIEM.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M. y Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(2), 87-115.

Confrey, J. y Smith, E. (1991). A framework for functions: Prototypes, multiple representations and transformations. In R. Underhill (Ed.)*Proceedings of the 13th annual meeting of the North American Chapter of The International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 57-63). Blacksburg, Virginia, U.S.A.

Corbin, J. y Strauss, A. (1990). Grounded theory research: procedures, canons, and evaluative criteria. *Qualitative Sociology, 13*(1), 3-21.

Doorman, M. y Drijvers, P. (2011). Algebra in function. En P. Drijvers (Ed.), *Secondary algebra education: Revisiting topics and themes and exploring the unknown* (pp. 119-135). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Kaput, J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. In S. Fennel (Ed.), *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum: Proceedings of a national symposium* (pp. 25–26). Washington, DC: National Research Council, National Academy Press.

MECD (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria* (Vol. BOE Nº 52, pp. 19349-19420). Madrid, España: Ministerio de Educación y Ciencia.

Merino, E., Cañadas, M. y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(1), 24-40.

MINEDUC (2012). *Bases curriculares de matemática educación básica*. Santiago, Chile: Ministerio de Educación de Chile.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, *29*(1), 75-88.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.

Rico, L. (2006). La competencia matemática en PISA. *PNA, 1*(2), 47-66.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., Brizuela, B. M., Earnest, D., Goodrow, A., Lara-Roth, S. y Peled, I. (2003). Algebra in elementary school. En N. A. Pateman, B. J. Dougherty, y J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 127-134). Hololulu, Hawaii: PME.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. Kaput, W. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-160). Nueva York, NY: Routledge.

Warren, E. y Cooper, T. J. (2005). Introducing Functional Thinking in Year 2: a case study of early algebra teaching. *Contemporary Issues in Early Childhood, 6*(2), 150-162..

LA TENDENCIA A RESTAR EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE M.C.D EN ALUMNOS DE PRIMARIA

The tendency for elementary school students to subtract in the resolution of GCD problems

González-Calero[a], J. A., Martínez[a], S., y Sotos[a], M. A.

[a]Universidad de Castilla-La Mancha

Resumen

En esta comunicación se presentan resultados de una investigación con alumnos de primaria sobre la resolución de problemas verbales ligados al concepto de máximo común divisor (m.c.d.) y mínimo común múltiplo (m.c.m.). Los principales objetivos de la investigación eran evaluar la competencia de los estudiantes en la resolución de este tipo de problemas y analizar los distintos patrones o procesos de resolución empleados. En particular, esta comunicación se centra en una dificultad que presentan los estudiantes en problemas cuya solución se corresponderíacon el m.c.d. de dos cantidades dadas en el enunciado. En este sentido, resultados, tanto cuantitativos como cualitativos,apuntan a que el origen de la dificultad podría deberse a que los estudiantes intentan relacionar las cantidades intervinientes en el enunciado mediante la sustracción atendiendo al tamaño de las cantidades conocidas y de la solución, sin involucrar en la resolución del problema las ideas de múltiplo y divisor.

Palabras clave:*mínimo común divisor, máximo común divisor, problemas verbales, educación primaria*

Abstract

This paper presents results from a study with primary students on solving word problems related to the concepts of greatest common divisor (GCD) and least common multiple (LCM). The main objectives of the research were to evaluate the students' competence in the resolution of such problems and analyze the different patterns or processes of resolution. In particular, this paper is focused on a difficulty related to problems solved using the GCD of two given quantities in the statement. In this sense, both quantitative and qualitative results are running that the origin of the difficulty could be due to students trying to relate the quantities involved in the statement through subtractionbecause of the size of the known quantities and the solution, without involving in the resolution the ideas of multiple and divider.

Keywords: *least common multiple, great common divisor, word problems, primary school education*

INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

Investigaciones en didáctica de las matemáticas señalan la existencia de dificultades en la comprensión y aprendizaje de la divisibilidad en general y, de manera más concreta, en los conceptos de máximo común divisor (m.c.d.) y mínimo común múltiplo (m.c.m.). Así, en la línea de investigación de la divisibilidad, Zazkis y Campbell (1996),en un estudio con estudiantes para maestros (en adelante, EPM)centrado en el concepto de divisibilidad y su relación con otros conceptos, observaron la falta de competencia de los estudiantes en este campo, así como una fuerte tendencia a la utilización de razonamientos puramente procedimentales.

González-Calero, J. A., Martínez, S., y Sotos, M. A. (2016). La influencia de las cantidades involucradas en el enunciado para la resolución de problemas de m.c.d. de alumnos de primaria. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 373-382). Lugar: SEIEM..

Además, dentro del estudio de la divisibilidad, existen dos conceptos, habituales en los currículos de educación primaria y secundaria, que resultan particularmente difíciles de comprender y utilizar por parte de los alumnos: el m.c.d. y el m.c.m. Así, Gutiérrez-Gutiérrez, Gómez y Rico (2016) acreditaron un conocimiento matemático insuficiente de las propiedades del m.c.d. y m.c.m. por parte de EPM a partir de los resultados del estudio internacional TEDS-M.

Brown, Thomas y Tolias (2002) y más tarde Bodí (2006) observaron que los estudiantes no eran capaces de reconocer la implicación del m.c.m. en problemas verbales si no se mencionaba explícitamente la expresión "mínimo común múltiplo" en el enunciado, aunque eran capaces de usar adecuadamente el algoritmo para el cálculo del m.c.m.Del mismo modo que sucede con el m.c.m., Noblet (2013) demostró que el conocimiento sobre el m.c.d. es limitado para los estudiantes en general y para los EPM en particular, lo que provoca graves dificultades en la creación y resolución de problemas de m.c.d.

Así pues, las investigaciones existentes en esta línea apuntan a que los conocimientos sobre estos conceptos suelen estar basados en reglas que carecen de explicaciones intuitivas para los alumnos (por ejemplo,Dias, 2005). En este sentido, Zazkis y Gadowsky (2001) consideran que esto es debido a que las prácticas docentes actuales se centran en el aprendizaje de los cálculos en lugar de la estructura y propiedades de los números.

Dentro de esta línea de investigación, acerca de los elementos m.c.d. y m.c.m., Martínez, González-Calero y Sotos (2015)observaron, a partir de una investigación con EPM sobre la resolución de problemas verbales ligados a estos conceptos,que estos estudiantes presentan una gran dificultad a la hora de decidir entre el m.c.d. y el m.c.m. A este respecto, resultados, tanto cuantitativos como cualitativos, apuntaban a que el origen de la dificultad podría deberse a que los estudiantes no involucran las ideas de múltiplo y divisor en la resolución, sino que se guían por las palabras clave del enunciado para desencadenar el cálculo algorítmico del m.c.d. o del m.c.m.

Aunque el origen de las dificultades de este tipo de problemas en particular y de los problemas aritméticos en general puede hacer referencia a multitud de consideraciones, en esta comunicación se estudia un tipo de dificultad relacionada con la influencia que pueden ejercer las cantidades presentes en el enunciado.En este sentido,dentro de la resolución de problemas, muchas investigaciones (véase, por ejemplo, Campistrous y Rizo (1999) oCapote (2005))apuntan a la tendencia de los alumnos a la ejecución inmediatasin realizar una reflexión previa del problema. De este modo, los alumnos, influenciados por las cantidades presentes en el enunciado, tratan de operarlas directamente sin realizar un análisis del problema e incluso sin comprender el enunciado.Este fenómeno se da incluso en problemas cuyos enunciados relatan situaciones absurdas, véanse por ejemplo los resultados obtenidos por estudiantes de primaria en el famoso problema *La edad del capitán*(Grenoble, 1980, citado en Puig y Cerdán, 1988).

En línea con los trabajos anteriores, Abreu y Velázquez (2013) realizaron una investigación sobre la resolución de problemas con alumnos de secundaria que evidenció una marcada tendencia a la ejecución inmediata al no lograr hacer una representación mental del enunciado y propusieron un sistema de procedimientos para evitar esta tendencia y contribuir al desarrollo del pensamiento relacional. Socas, Hernández y Palarea (2014), resumiendo resultados de los trabajos realizados en el campo de resolución de problemas y formación de profesorado en la Universidad de La Laguna, señalan que esta estrategia es habitual igualmente entre los EPM. Así, estos estudiantes son proclives a operar con los datos del problema, sin mostrar una clara comprensión del mismo y sin identificar las relaciones presentes en los problemas.

Bell, Fischbein y Greer (1984) realizaron un estudio con estudiantes de 12-13 años orientado a explorar cómo distintas variables (tamaño de los números, categoría semántica del problema o contexto) influían en la selección de la operación aritmética a emplear a la hora de resolver problemas multiplicativos de una etapa. En el seno de este trabajo observaron cómo determinadas concepciones numéricas erróneas están fuertemente influenciadas por aspectos tales como el contexto, de tal modo que los estudiantes pueden seleccionar la cantidad sobre la que operar y la operación a realizar en función del tamaño del número que se considera adecuado como solución en la situación dada. Por ejemplo, en uno de los problemas que plantearon (y que podría traducirse como: "Una libra de carne cuesta 2,56 libras. Un ama de casa paga dos libras por un trozo de dicha carne. ¿Cuánto pesará éste?") se observaron un número relativamente alto de respuestas en que la solución era calculada mediante una resta en vez de mediante una división. Mediante entrevistas determinaron que los estudiantes que daban esta respuesta habían entendido correctamente el enunciado del problema, es más, anticipaban que el trozo de carne debía pesar menos de una libra. Precisamente, esto los inducía a utilizar la resta, pues entendían que la división 2,56/2 debía descartarse porque la solución no tenía sentido mientras que la substracción 2,56–2 ofrecía una respuesta con orden de magnitud correcto. Nótese que, en esta estrategia, coexiste otra tendencia habitual entre los estudiantes: la de operar sobre la cantidad mayor.

MARCO TEÓRICO Y OBJETIVOS

La presente comunicación se engloba en el seno de un proyecto de investigación orientado en último término a la formación del profesorado de matemáticas en educación primaria. Este trabajose enmarca dentro de la línea de investigación del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013), el cual constituye una evolución del modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) (Ball, Thames y Phelps, 2008). En concreto, la comunicación que aquí se presenta, se encuadraría en una fase del mencionado proyecto con los siguientes objetivos: 1) analizar la competencia de alumnos de 6º de primaria en la resolución algorítmica de problemas verbales en situaciones de divisibilidad que involucren los conceptos de m.c.d. y m.c.m. y 2) evaluar la influencia de palabras clave del enunciado de un problema verbal que involucra los conceptos m.c.d. y m.c.m. en la resolución de estos alumnos.

Así, en esta comunicación se presentarán algunos resultados preliminares de esta investigación, prestando especial atención a un conjunto de actuaciones en las que los estudiantes acreditaron dificultades para resolver un tipo específico de problemas verbales. En particular, este trabajo se centra en ilustrar un fenómeno observado mediante el cual estudiantes denotaron una incapacidad para resolver adecuadamente los problemas relacionados con el m.c.d.En concreto, los estudiantes, trataban de relacionarlas cantidades conocidas, restándolas con el objeto de obtenerun divisor (fuese o no máximo) que cumpliese con las especificaciones del enunciado.

METODOLOGÍA

Con el fin de abordar los objetivos propuestos, se diseñó una investigación con dos etapas, una cuantitativa y otra cualitativa.

En el estudio cuantitativo participaron 155estudiantes de 6º curso de Educación Primaria de 4 colegios de la ciudad de Albacete.La recogida de datos tuvo lugar en el tercer trimestre, cuando todos los grupos habían trabajado ya los temas dedicados a divisibilidad.En esta fase de la investigación los participantes debían resolver una prueba escrita compuesta por cuatro problemas verbales. Se trata de problemas verbales en los que hay dos cantidades conocidas y la solución es el m.c.d. o el m.c.m. de los dos únicos datos dados en el enunciado. En concreto, el instrumento empleado en el estudio cuantitativo combina dos factores: 1) problemas cuya solución es el m.c.d. o el m.c.m. y 2) problemas en cuyo enunciado aparece la palabra clave *máximo* o la palabra clave *mínimo*. De la combinación de estos dos factores se obtienen los cuatro problemas empleados en la prueba escrita: 1) Problema *divmax* (problema con solución el m.c.d. de los datos del problema y en cuyo enunciado aparece la palabra clave *máximo*); 2) Problema *divmin* (solución el m.c.d. y palabra *mínimo*); 3) Problema *mulmax* (solución el m.c.m. y palabra *máximo*); y 4) Problema *mulmin* (solución el m.c.m. y palabra *mínimo*). Los enunciados de los problemas usados se presentan en laTabla1.

El análisis de las producciones de los estudiantes en el estudio cuantitativo debía permitir, además de dar respuesta parcialmente a los objetivos investigadores, la selección de participantes para la siguiente etapa de la investigación: un estudio cualitativo. Estafase de la investigación consistió en un estudio de casos, en el que se grabó a parejas de estudiantes resolviendo problemas verbales como los empleados en la prueba escrita. A partir de las producciones en lápiz y papel, se pretendía identificar patrones o tendencias de actuación a la hora de resolver los problemas y conformar parejas de interés para el estudio de casos. Así, el estudio de casos podría ofrecer información sobre los orígenes de las dificultades o tendencias mostradas por los estudiantes durante la resolución individual en lápiz y papel.

Tabla10. Enunciados de los problemas de la prueba escrita

Nombre	*Código*	*Enunciado*

Las Cuerdas	*Divmax*	Dos cuerdas, de 18 cm y 24 cm respectivamente, se quieren cortar en trozos iguales. Calcula el tamaño máximo de estos trozos.
Los Cables	*Divmin*	Se tienen dos cables, uno de 42 metros y otro de 35. Si se quieren cortar en el mínimo número de trozos iguales, ¿cuál será la longitud de los trozos?
Felipe y Alberto	*Mulmax*	Felipe y Alberto estudian en la misma universidad y coinciden de vez en cuando en algunas clases, prácticas, etc. Además, pase lo que pase, Felipe va a la cafetería cada 18 días y Alberto cada 15. Si hoy han coincidido en la cafetería, ¿cuánto tardarán como máximo en volver a verse?
El Faro	*Mulmin*	Un faro se enciende cada 12 segundos y otro cada 18 segundos. Si se acaban de encender a la vez en este momento, ¿cuál es el mínimo tiempo posible que debe transcurrir para que vuelvan a coincidir?

RESULTADOS

Resultados desde el estudio cuantitativo

La Tabla 2 presenta los resultados tras la codificación de las respuestas de los estudiantes en la prueba escrita. Se muestran los resultados desglosados para cada uno de los cuatro problemas. A la hora de codificar las respuestas se han considerado cuatro categorías diferentes: *Correcto*,*div↔mult, Resta* y *Otros*. La categoría *Correcto*da cuenta de todas aquellas resoluciones en las que es evidente que el resolutor ha intentado el cálculo adecuado del m.c.d. o m.c.m., ya sea algorítmicamente o por otro procedimiento (por ejemplo, mediante el uso de representaciones auxiliares). La categoría *div↔mult* hace referencia a aquellas resoluciones en que el resolutor confunde los divisores con los múltiplos o viceversa y no resuelve correctamente el problema. La categoría *Resta* corresponde a estudiantes que relacionan las cantidades presentes en el enunciado mediante una resta. Dentro de esta categoría, entre paréntesis, se muestra el número de alumnos que utilizan el resultado de la resta como divisor dando una solución correcta al problema pero sin utilizar un método razonado para la obtención del m.c.d. Por último, la categoría *Otros* comprendería aquellas actuaciones erróneas en las que el resolutor no ha abordado el problema o si lo ha hecho, lo ha hecho de manera errónea o incompleta sin que sus estrategias puedan clasificarse dentro de ninguna de las dos categorías definidas previamente.

Tabla 2. Resultados de la prueba escrita por problema y por tipo de dificultad

			Dificultades		
	N	*Correcto*	*div↔mult*	*Resta(*)*	*Otros*
Problema divmax	155	29	9	16 (8)	101
Problema divmin	155	24	13	21 (11)	97
Problema mulmax	155	60	8	33 (0)	54
Problema mulmin	155	54	13	23 (0)	65

(*) Estudiantes que realizan una resta y utilizan la diferencia como m.c.d.

A tenor de los datos, se observa que los resolutores encuentran muchas dificultades en la resolución de este tipo de problemas. De hecho, sólo 11 de los 155 estudiantes (7,1%) resolvieron con solvencia todos los problemas.

Además, comopuede observarse en la Tabla 2, los resolutores hallaron más dificultades en la resolución de problemas de m.c.d. En concreto, 20 alumnos resolvieron bien ambos problemas de m.c.d. (12,9%) frente a los 39 alumnos que resolvieron bien los 2 problemas de m.c.m. (25,2%).

Por otro lado, una de las hipótesis investigadoras que motivó el diseño del instrumento se sustentaba sobre la idea de que la palabra *máximo* y la palabra *mínimo* podrían llevar al estudiante al cálculo del m.c.d. y del m.c.m., respectivamente, sin una reflexión de la situación descrita en el enunciado. Sin embargo, a la vista de los resultados obtenidos,no parece apreciarse una diferencia significativa en el hecho de que en enunciado apareciese la palabra máximo (*divmax, mulmax*) o mínimo (*divmin, mulmin*). En cambio, sí que resulta destacablela tendencia de los alumnos a utilizar la resta de las cantidades involucradas en el enunciado como posible solución del problema, incluso algunos de ellos (el 5,2% en el problema *divmax* y el 7,1% en el problema *divmin)* creen que su procedimiento es adecuado al coincidir el resultado de la resta con el m.c.d. en estos problemas concretos. Este aspecto se verá con más detalle en el análisis cualitativo.

Resultados desde el estudio de casos

Un mes después derealizar la recogida de datos dela fase cuantitativa, se procedió a la grabación de la resolución de problemas de la prueba escrita por parte de parejas de estudiantes. Se seleccionaron participantes que hubieran mostrado comportamientos de interés desde el punto de vista investigador al resolver los problemas individualmente en lápiz y papel.En esta comunicación se presentan extractos de resoluciones de una de las pareja filmadas (Daniel-Sergio) con el fin de ilustrar la tendencia a realizar la resta de las cantidades explicitadas en el enunciado para la obtención del m.c.d., así como para ofrecer indicios explicativos del origen de estas actuaciones. En las Figuras 1 y 2 se muestran las resoluciones en la prueba escrita de Sergio a los problemas *divmin*y *divmax*, respectivamente.

En el estudio de casos a la pareja Daniel-Sergio se les propuso que resolvieran en pareja en la pizarra de un aula varios problemas, uno de ellos era el problema*divmin*, cuyo enunciado es el siguiente:

"Se tienen dos cables, uno de 42 metros y otro de 35. Si se quieren cortar en el mínimo número de trozos iguales, ¿cuál será la longitud de los trozos?"

A continuación, se presentan extractos de esta resolución donde se evidencia la tendencia a restar las cantidades involucradas en el enunciado para usar este valor como m.c.d.El protocolo se inicia con la lectura del enunciado por parte de Sergio y la escritura en la pizarra por parte de Daniel de "42m; 35m y ¿Trozos?".

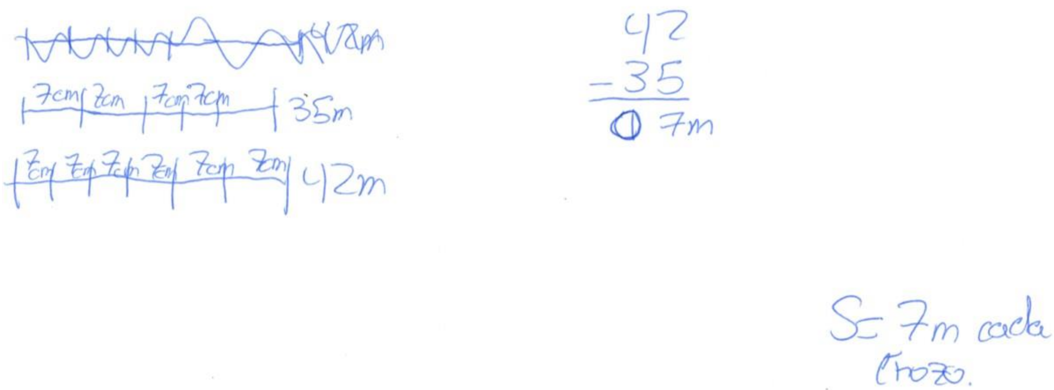


Figura 12. Resolución de Sergio del problema *divmin*

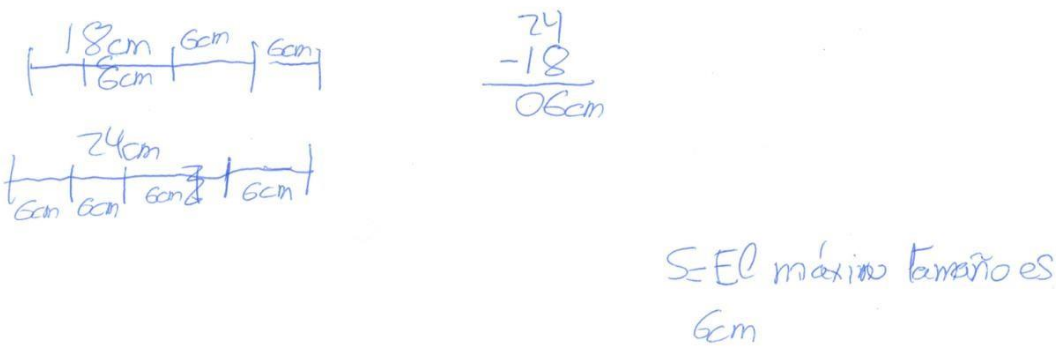


Figura 13. Resolución de Sergiodel problema *divmax*

Una vez leído el problema tratan de analizarlo, buscando el método de resolución:

7. S: ¿Hay que hacer lo mismo? (*haciendo referencia al problema que habían resuelto anteriormente que implicaba el cálculo del m.c.m.*)
8. D: Sí, lo de…lo de sacar los múltiplos.

9. S: Sí.

10. D: No, al revés, el mínimo.

11. S: Claro, mínimo…

12. D: No, tendríamos que dividir… Noo es así.

13. S: Pero a ver, si tenemos de 42 y 35 metros, tenemos que seguir hasta ver cuántos trozos se pueden hacer de cada… ¿no?

14. D: No sé, es que hay que sacar los metros de cada trozo.

15. (*Silencio de 5 segundos*)

16. D: O sea, la longitud de los trozos…

17. S: Claro, (…) éste va a medir 42…entre…entre 2, o entre 3… Sería entre 2, entre 3, entre 4…

Los primeros instantes del proceso de resolución evidencian que los estudiantes comprenden adecuadamente el objetivo y la necesidad de buscar un divisor común a ambos que sería la longitud de los trozos (ítems 12 y 17).A partir de ese momento, inician la búsqueda de un divisor común. No hay alusiones a la necesidad de que éste sea mínimo.

18. D: **Es que yo no sé qué operación habría que hacer**, porque está claro que si…

19. S: Y el 35, ¿qué? (*Insta a su compañero a que escriba también el número 35, al igual que ya había indicado el número 42*). Y sería, da igual a 42 entre 2, a 12…digo a… a 11, a 21 que diga…Ponlo, a 21…

20. D: No, pero podríamos hacerlo ya…

21. S: A 21 entre 2, luego si no da entre 3, entre 4…

22. D: **Lo podríamos sacar de 42, 35…es que así nos daría exactos, hasta llegar a cero…Mira así 42…35, el siguiente pues sería 35…28, 21, 14, 7…y ya 0.** (*Escribe: "42= 35, 28, 21, 14, 7, 0"*). Y aquí hacemos lo mismo…así de…sería una serie 35 menos 7, 28 menos 7, 21 menos 7, 14 menos 7, 7 menos 7, cero.

23. S: Pero es como…

24. D: ¡Yo que sé! ¡Ja! (*Ríe*). Pero así sabríamos que los trozos serían de 7…

25. S: Claro.

26. D: O…entonces, ¿cuál hacemos?

27. S: Sí porque…

28. D: O…dividimos y ya está.

29. S: No, así, si cabe a 7… (*Señalando lo que ha escrito en la pizarra el compañero*).

...

36. E: ¿Por qué es la solución 7?

37. D: Porque no, ehh al…Hemos ido restando de 7 en 7 y nos da, nos da exacto los trozos.

Los estudiantes muestran dificultades en identificar cómo obtener el divisor(ítem 18). Daniel opta por calcular el número relacionando los números intervinientes en el enunciado, restándolos y utilizando esta distancia para construir una serie que indicaría los trozos (ítem 22), con lo que Sergio se muestra de acuerdo (ítems 27 y 29). La sustracción repetida puede ser una actuación adecuada y con sentido, sin embargo, el problema se debe al modo erróneo de obtención del número 7 (ítem 24).

Una vez encontrado el valor, gracias a la resta de las dos cantidades, realizan la comprobación gráfica del resultado:

45. D: …una raya…Uff, qué mal, bueno…42 metros. Y otra aquí de 35. (*Dibuja dos líneas y encima de cada una escribe los metros que miden*).

46. S: Y caben a…ésta a…a 6 trozos… (*Señala la raya de 42 m*).

47. D: Mira así es…7 metros, 7 metros, 7, 7…sería así (*Divide la raya de 35 metros en trocitos y debajo de cada uno escribe el número 7*).

48. S: 4, 5, 4…trozos.

49. D: Aquí hay 5… (*Refiriéndose a la raya que representa el cable de 35 metros*). 7 por 5, 35, justos. Y aquí sería más pequeños, 7… (*Comenzando a dividir la raya que representa el cable de 42 metros*).

50. S: Claro.

51. D: …7, 7, 7, 7…1, 2, 3, 4, 5…justos, sí 7. (*Divide la línea en 6 trozos*).

Las verbalizaciones de ambos estudiantes indican que se sienten satisfechos con el resultado, pero dudan acerca del procedimiento de obtención del número 7 (ítems 23, 26 y 28). Así pues, y dado que el procedimiento se basa en la resta de las dos cantidades intervinientes en el enunciado, el entrevistador aboga por cambiar estos datos para comprobar si usarían el mismo procedimiento de resolución:

52. E: Vale, y si en vez de ser una de las cuerdas de 35 fuesen de 30…

53. D: De 30 y la otra, ¿de cuánto sería?

54. E: De 42.

55. D: De 30 y de 42…

56. S: Pues…42. **Restamos 42 menos 30**, salen 12. Y haríamos lo mismo de… (*Señalando la representación hecha por el compañero*) trozos de 12. Bueno…sí.

Los estudiantes abogan por utilizar el mismo tipo de resolución, restando las cantidades (ítem 56), lo que confirma el significado que le otorgan a la diferencia calculada a partir de los datos del enunciado. Cuando se les solicita la confirmación del resultado mediante una comprobación gráfica, advierten el error:

57. E: Dibújalo.

58. D: Espera, a ver… (*Le da la tiza al compañero*).

59. S: Aquí hemos…ehh…41 más 7, no, 35 más 7 son 42…Pues 30 más…12, serían 42.

60. D: Sí, bueno pero…tendríamos, tendrían que ser trozos iguales todos. Y que no te sobrase, ¿no?

61. S: Claro. Ahora tendríamos que hacer lo mismo, a ver…no, 42 está hecho. 30 (*Escribe: “30=”*) ehh, ya pero no son iguales…Si fuese 30… (*Silencio de 10 segundos*) pues…ehhhh… (*Borra el 30 que acaba de escribir con la mano*). Y teníamos…a ver…Si fuese de 30 pues…

Larepresentación gráfica permite a los estudiantes advertir que el método de resolución no es adecuado, ya que no cumple la condición de igualdad de los trozos exigida en el enunciado como ellos mismos verbalizan (ítem 61). A partir de ahí, se lanzan a la búsqueda de una solución alternativa, dividiendo por un número diferente a la resta pero aleatorio:

66. D: Podríamos buscar para dividir 42 y que te dé exacto. Y dividir 30 y que te dé exacto…

67. S: No, a ver…Se puede hacer ehh… 5 trozos de 6, como son **6 por 5**, 30, y ya está hecha la…

68. D: Hmm pero…tienen…y los dos cables se tienen que partir en trozos de la misma longitud.

…

77. S: (*Continúa mirando a la pizarra. Silencio de 18 segundos*). Tenemos que dividir ehh…que…

78. D: Es que para calcular los de 42 y 35 también podríamos haber dividido varias veces y ya…

79. S: Claro, **42 entre 2, entre 3**… ¿no?

80. D: Y lo del 30 también se podría dividir **30 entre 6, 5**…ó 30 entre 5, 6… Bueno no, sería el mínimo, sería 30 entre 5. Y, ¿42 entre 6?

81. S: **42 entre 6**…

…

88. D: Mira, a ver, te darían 7 trozos de, de, de 6 metros. Y abajo son… (*refiriéndose al número 30*) son 5 trozos de 6. A ver espera mira…

89. S: Sí, sí, sí, sí.

90. D: 42…dividimos los dos entre 6… Y aquí serían 7. (*Escribe la división 42 entre 6, cociente 7 y resto 0*).

…

95. S: De 42 serían 7 trozos de 6, y de 30 ehh…5 trozos de 6.

96. D: 5 trozos de 6, sí.

Las intervenciones señalan que los estudiantes utilizan un procedimiento de ensayo y error, buscando simplemente algún divisor a ambos números (ítems 67, 79 y 90) sin atender al tamaño de los trozos. Para comprobar este hecho el investigador pregunta:

97. E: ¿Y estás seguro de que no se pueden hacer los trozos mayores?

98. D: Podríamos dividir entre números más altos, a ver…

99. S: No pero…a ver…

100. D y S: (*Mirando a la pizarra* en silencio durante 10 segundos).

101. D: Yo creo que sería así…el resultado.

102. S: Sí.

CONCLUSIONES

En relación con la competencia en la resolución algorítmica de problemas verbales que involucren los conceptos de m.c.d. y m.c.m, los resultados presentados señalan serias dificultades por parte de los estudiantes de primaria.Así, el estudio ha puesto de manifiesto la dificultad para resolver adecuadamente problemas verbales que involucren los conceptos de m.c.d. y m.c.m. En particular, en la resolución de problemas de m.c.d, los estudiantes han manifestado la tendencia arelacionar las cantidades dadas en el enunciado de manera sustractiva, sin tomar en consideración la posibilidad de comparar sus divisores.

Las intervenciones de los estudiantes parecen señalarque los estudiantes están basando sus planteamientos en la búsqueda de un número que encaje en los datos del enunciado y en la previsión que hacen del tamaño de la eventual solución, y que para ello utilizan la operación resta. Este hecho puede estar altamente influenciado por los hábitos en la resolución de problemas aritméticos, que tienen con frecuencia los estudiantes de primaria, en los que la elección de una de las operaciones básicas entre las cantidades involucradas en el enunciado es clave y la aplicación de la operación identificada desemboca inmediatamente en la solución del problema (por ejemplo, Puig y Cerdán, 1988).Así parece que los alumnos reducen el análisis del problema a la búsqueda de la operación a aplicar influenciados por el tamaño de las cantidades conocidas y la semántica del problema. Estos resultados se alinean con los publicados por Bell, Fischbein y Greer (1984) para otra categoría de problemas verbales.

Desde un punto de vista didáctico, este tipo de resultados señalan la necesidad de incrementar la riqueza y variedad de los problemas verbales, considerando múltiples variables (por ejemplo, categorías semánticas o el tamaño de los números). Además, esta comunicación pone de manifiesto la utilidad de las representaciones auxiliares en la resolución de problemas, en este caso en la comprobación de los resultados, ya que facilita que los estudiantes pueden advertir por sí mismos sus errores y modificar sus líneas de actuación.

Referencias

Abreu, M. A., & Velázquez, D.C. (2012). Desarrollo del pensamiento relacional a través de la resolución de problemas matemáticos en la secundaria básica.*Opuntia Brava*, *45*(11). Recuperado de: http://www.opuntiabrava.rimed.cu/pdf/articulo_mauricio%20_OK_.pdf

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Bell, A., Fischbein, E., y Greer, B. (1984). Choice of operation in verbal arithmetic problems: The effects of number size, problem structure and context. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(2), 129-147.

Bodí, S. (2006). *Análisis de la comprensión de divisibilidad en el conjunto de los números naturales*. Tesis doctoral. Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Universidad de Alicante.

Brown, A., Thomas, K., & Tolias, G. (2002). Conceptions of divisibility: success and understanding. En S. Campbell, & R. Zazkis, *Learning and teaching number theory* (págs. 41-82). Westport: Ablex Publishing.

Campistrous, L. y Rizo, C. (1999). Estrategias de resolución de problemas en la escuela. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *3*(2), 31-45.

Capote, M. (2005). *La etapa de orientación en la solución de problemas aritméticos para la escuela primaria*. C. Habana: Pueblo y Educación.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8th Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: ERME.

Dias, A. (2005). Using lattice models to determine Greatest Common Factor and Least Common Multiple. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 730-738.

Gutiérrez-Gutiérrez, A., Gómez, P., & Rico, L. (2016). Conocimiento matemático sobre números y operaciones de los estudiantes de Magisterio. *Educación XX1*, *19*(1), 135-158.

Martínez, S., González-Calero, J. A. y Sotos, M. A. (2015). La influencia del enunciado en la resolución de problemas de m.c.d. y m.c.m. de estudiantes para maestro. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 343-350). Alicante: SEIEM.

Noblet, K. (2013). Preservice elementary teachers' understanding of greatest common factor story problems. *Proceedings of the 16th Annual Conference on Research in Undergraduate MAthematics Education* (págs. 219-225). Denver: Sigmaa.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Socas, M. M., Hernández, J., y Palarea, M. M. (2014). Dificultades en la resolución de problemas de Matemáticas de estudiantes para Profesor de Educación Primaria y Secundaria. En J. L. González, J. A. Fernández-Plaza, E. Castro- Rodríguez, M. T. Sánchez-Compaña, C. Fernández, J. L. Lupiáñez y L. Puig (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática - 2014* (pp. 145-154). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.

Zazkis, R., & Campbell, S. (1996). Divisibility and Multiplicative structure of natural numbers: preservice teacher's understanding. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(5), 540-563.

Zazkis, R. & Gadowsky, K. (2001). Attending to transparent features of opaque representations of natural numbers. In A. Cuoco (Ed.), *NCTM 2001 Yearbook: The roles of representation in school mathematics* (pp. 41–52). Reston, VA: NCTM.

LA VARIABILIDAD EN EL RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO INFORMAL DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

Variability in the Informal Probabilistic Reasoning of High School Students

Sánchez, E.[a]; Mercado, M.[b] y García, J.[a]

[a] Departamento de Matemática Educativa, México

[b] Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM, México

Resumen

En esta comunicación se exploran las respuestas de los estudiantes a dos tareas binomiales, de predicción y de distribución, para conocer cómo expresan la variabilidad en sus predicciones antes y después de actividades de simulación. Para la recolección de datos, se realizó un estudio de cuatro etapas con dos grupos de estudiantes, uno que no había tomado un curso de probabilidad y estadística, y otro que había tomado uno. La primera y cuarta etapa consistió en aplicar un cuestionario relacionado con una situación binomial b(x, 2, ½). En la segunda y tercera etapa, los estudiantes llevaron a cabo simulaciones físicas y con el software Fathom, respectivamente. En el análisis se destacan las dificultades que enfrentan los estudiantes en la integración de la variabilidad en sus razonamientos, a pesar de su experiencia con la simulación. Se proponen dos categorías para describir patrones de respuesta: dogmatismo teórico y compromiso empírico.

Palabras clave: *Variabilidad, razonamiento probabilístico informal, dogmatismo teórico y compromiso empírico.*

Abstract

This communication explores student responses to two binomial tasks, one of prediction and another of distribution, to know how they express variability in their predictions before and after simulation activities. To collect data, a four-step study was conducted with two student groups, one that had not taken a course on probability and another that had taken one. The first and fourth steps consisted of applying a questionnaire related to a binomial situation b (x, 2, ½). In the second and third steps, students undertook manipulative and virtual simulations, respectively. As a result of analysis the difficulties students face in integrating variability into their thoughts, despite their experience with simulation, are highlighted. Two patterns of student responses are proposed: Theoretical dogmatism and Empirical commitment.

Keywords: *Variability, informal probabilistic reasoning, theoretical dogmatism and empirical commitment.*

INTRODUCCIÓN

Un problema general en el aprendizaje de la estadística es entender la relación entre datos y modelo; los estudiantes deberían enfrentarse frecuentemente a sus diversas formas particulares que toma dicha relación durante el proceso de adquisición de sus conocimientos estadísticos. En el terreno del aprendizaje y la enseñanza de la probabilidad, una instancia de ese problema se presenta a la hora de estudiar las relaciones entre los enfoques clásico y frecuencial de probabilidad. La comprensión de tales relaciones no es un asunto menor, ya que involucra muchas sutilezas. Una probabilidad clásica (casos favorables entre casos posibles) tiene como sustento la simetría del

Sánchez, E, Mercado, M., y García, J. (2016). La variabilidad en el razonamiento probabilístico informal de estudiantes de Bachillerato. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 383-393). Málaga: SEIEM.

dispositivo generador de resultados aleatorios (monedas, dados, ruletas, urnas); por otro lado, bajo el enfoque frecuencial, una probabilidad se estima a partir de los resultados observados en una secuencia de realizaciones del experimento aleatorio, bajo el supuesto implícito de que en éste subyace una distribución de probabilidades. A diferencia de lo que ocurre en los fenómenos naturales en los cuales la construcción de un modelo teórico puede ser una tarea muy difícil (pensemos, por ejemplo, en las probabilidades de lluvia), en las situaciones de juego mencionadas, bajo el enfoque clásico se pueden construir modelos teóricos con cierta facilidad. Además, como las situaciones de juego son repetibles bajo condiciones similares, es posible generar conjuntos de datos y aplicar el enfoque frecuencial para calcular probabilidades. Más aún, tales situaciones pueden ser simuladas con programas computacionales, lo *que hace* que las hace ideales para investigar las relaciones entre azar y datos, o más en general, entre modelos y 'realidad'. Surge la pregunta: Los estudiantes de bachillerato, ¿cómo razonan cuando tienen que dilucidar sobre las relaciones entre datos y modelo? Como la variabilidad en los datos es inevitable es crucial que los estudiantes desarrollen un sentido de dicha noción y sepan cómo opera en el modelo. En este trabajo se revelan algunas formas en que los estudiantes razonan con la variabilidad en una situación binomial simple, antes y después de realizar actividades de simulación.

RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO INFORMAL

Aunque el razonamiento probabilístico y el razonamiento matemático tienen muchos rasgos en común, el primero no es sólo una parte del segundo. Para distinguirlos se puede apelar a las grandes ideas propuestas por Gal (2005) en su análisis del alfabetismo probabilístico; las nociones de aleatoriedad, variación, independencia y el par de ideas complementarias predicción/incertidumbre están en la base del sistema de enunciados probabilísticos y no forman parte de ningún otro sistema matemático. Decimos entonces que un razonamiento probabilístico consiste en un razonamiento en cuyos enunciados se presenta al menos una de las grandes ideas de la probabilidad. Gal (2005: 46-47) señala que "Algunos aspectos de esas ideas se pueden representar mediante símbolos matemáticos o términos estadísticos, pero su esencia no puede capturarse totalmente mediante notaciones técnicas". Este comentario se conecta con el interés de enfocar nuestra atención en el razonamiento informal. El razonamiento informal es un proceso en el cual los estudiantes construyen un modelo de la situación, articulando varios de sus elementos, y con base en dicho modelo, derivan consecuencias con la ayuda del sentido común y del conocimiento previo (Perkins, 1985). El razonamiento probabilístico informal es el razonamiento informal que involucra alguna de las grandes ideas de probabilidad.

ANTECEDENTES

Como el presente estudio se refiere al razonamiento probabilístico, los estudios sobre cada una de las grandes ideas se pueden considerar como antecedentes; sólo recientemente se encuentran estudios que incluyen varias de las grandes ideas simultáneamente. Primero mencionaremos algunos estudios importantes cuyo contenido probabilístico se refiere a una de las grandes ideas, y después otros que contienen más de una, incluyendo la variabilidad, como es el caso del estudio que aquí se presenta. Recientemente Batanero (2015) presentó un panorama de los problemas y resultados de las investigaciones sobre *aleatoriedad*, incluyendo sus propias publicaciones sobre el tema (Batanero y Serrano, 1999). Por su parte, estudios didácticos sobre la *independencia* tienen historia: Steimbring (1986), Truran y Truran (1997) y Ortiz (2002); este último hizo un estudio de las formas en que se introducen los conceptos probabilísticos en textos de bachillerato, entre ellos el concepto de independencia. Con relación a la *variabilidad*, hay una serie de trabajos que inician con Shaughnessy (1997), como se muestra en las reseñas de Sánchez, Borim y Coutinho (2011) y Del Pino y Estepa (2013). Para el presente trabajo son relevantes los estudios de variabilidad que se enfocan en la conexión entre los enfoques clásico y frecuencial de probabilidad y que se relacionan con el par de grandes ideas *predicción/incertidumbre*. En respuesta a la observación de Jones (2005: 368) acerca de que "… hay un vacío en la investigación asociada al enfoque frecuencial de probabilidad…" se han publicado varios artículos que informan de investigaciones sobre la articulación entre los enfoques clásico y frecuencial de probabilidad, la mayoría de las cuales se llevaron a cabo con el apoyo de recursos tecnológicos e incluyen el papel de la variabilidad. Por motivos de espacio mencionaremos sólo tres que consideramos representativos. Sthol, Rider, & Tarr (2004) exploraron las maneras en que niños de 6º grado hacen inferencias con base en datos obtenidos mediante experimentos físicos y simulación, sobre la legalidad o no de un dado. Ireland y Watson (2009) informan sobre la comprensión de estudiantes de 8º grado acerca de las relaciones de las varias componentes, en particular, la variabilidad y el tamaño de la muestra, involucradas en el tránsito de ‘probabilidades experimentales’ (concretas) a ‘probabilidades clásicas’ (abstractas). Konold et. al. (2011) señalan algunos peligros de la manera en que se suelen introducir en la enseñanza términos de probabilidad como “probabilidad experimental” y “probabilidad teórica”.

PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

En este estudio se explora la manera en que los estudiantes razonan con, o ignoran, la variabilidad cuando se enfrentan a una situación de predicción/incertidumbre en la que subyace la distribución binomial b(x, 2, ½). La variabilidad en una secuencia de resultados de un experimento aleatorio con referencia a un evento dado, se determina por las diferencias entre la probabilidad y la frecuencia relativa del evento. Para observar cómo los estudiantes consideran la variabilidad se les pregunta, antes y después de actividades de simulación, acerca de lo que esperan que ocurra cuando se sortea 1000 veces el control de la TV. En realidad, de manera velada se les pregunta lo que esperan como resultado de generar 1000 números aleatorios de la distribución b(x, 2, ½). Lo anterior para responder las preguntas de investigación: ¿Los estudiantes son capaces de percibir la estructura y variabilidad de dicha situación simple de probabilidad? ¿Qué cambios se producen en sus respuestas después de las actividades de simulación respecto a sus respuestas previas? ¿Qué patrones de respuesta se pueden identificar?

MÉTODO

El estudio se llevó a cabo a lo largo de cuatro etapas con dos grupos de bachillerato. El primer grupo estaba formado por 37 estudiantes quienes no habían aún llevado un curso de probabilidad y estadística; el segundo estaba formado por 66 estudiantes, los cuales ya habían cursado dicha asignatura. En la primera etapa del estudio, se les administró un cuestionario con varias preguntas, de las cuales en este trabajo sólo se informa de dos de ellas. En la segunda, se guio a los estudiantes para que realizaran actividades de simulación con monedas, observaran los resultados y con base en éstos, respondieran las preguntas del cuestionario. En la tercera etapa, simularon la situación en el software Fathom, repitieron un gran número de veces el experimento, observaron los resultados y nuevamente respondieron las preguntas. Finalmente, en una sesión posterior se les volvió a pedir que respondieran el cuestionario. La situación es la siguiente:

> La familia Pérez está compuesta por la mamá Ana, el hijo Beto y el papá Carlos. Todas las noches se reúne la familia para ver la televisión, pero nunca están de acuerdo sobre qué programa de televisión ver. A Ana le gustan las películas, a Beto las caricaturas y a Carlos le gusta ver programas deportivos. Como sólo hay un televisor en la casa, lo más sencillo sería que se turnaran el control de la televisión diariamente. Pero Beto les propone a sus padres algo más divertido: “¡A la suerte!”. Propone rifar el control jugando con el lanzamiento de dos monedas al aire al mismo tiempo, de la siguiente manera: Si no sale ninguna águila, gana la mamá Ana; si sale exactamente un águila, gana el hijo Beto; y si salen dos águilas, gana el papá Carlos. A los padres les parece justo y aceptan su propuesta.

Después de recibir la información anterior, a los estudiantes se les hicieron 13 preguntas, dos de las cuales son analizadas y reportadas aquí (que se vuelven a enumerar), a saber:

> Pregunta 1. ¿Qué crees que pasará si el control se rifa 1000 veces?
>
> Número de veces que gana Ana: ____
>
> Número de veces que gana Beto: ____
>
> Número de veces que gana Carlos: ____
>
> Pregunta 2. Asigna la probabilidad a cada valor de la variable, es decir, completa lo siguiente:
>
> Probabilidad de A (X = 0) = ____
>
> Probabilidad de B (X = 1) = ____
>
> Probabilidad de C (X = 2) = ____

Esta segunda pregunta es común en la enseñanza, pues sólo consiste en aplicar el procedimiento de la definición clásica de probabilidad o, en el caso de que se tengan datos disponibles, aplicar el enfoque frecuencial. Por el contrario, la pregunta 1 es un problema con mayor grado de dificultad para los

estudiantes en la medida en que se requiere considerar la distribución de probabilidad y un sentido de la variabilidad. Si suponemos que los estudiantes conocen la distribución, probablemente su respuesta sea 250, 500, 250; no obstante, en la práctica a ellos mismos les sorprendería más este resultado que, por ejemplo, 257, 510, 233. El primer resultado se juzga teniendo en cuenta las reglas de la probabilidad, mientras el segundo se juzga, probablemente, mediante la heurística de representatividad (Kahneman y Tversky, 1982). Surge la pregunta: ¿cuál de estas respuestas resulta de mejor calidad? En conversaciones de la vida cotidiana la variabilidad esperada se suele expresar cambiando la expresión "ocurrirá el evento X" por expresiones como "ocurrirá el evento X o algo parecido". La manera de traducir matemáticamente la expresión "…algo parecido" es utilizando desigualdades para definir rangos en los que cabe esperar los resultados; por ejemplo, considérese el evento: $E = \{(a, b, c) \mid a \varepsilon N, b \varepsilon N, c \varepsilon N, 200 \leq a \leq 300, 450 \leq b \leq 550, 200 \leq c \leq 300\}$ donde la probabilidad de E es un poco más que 0.8 u 80% (estimación realizada con el software Fathom); esta solución es la expresión matemática que permite considerar la variabilidad de la situación. No es razonable pretender que los estudiantes sin entrenamiento previo modelen de esta manera la variabilidad. Aunque en el nivel bachillerato ya cuentan con el lenguaje para hacerlo, no están acostumbrados a explotar las posibilidades de dicho lenguaje. No obstante, las respuestas que se aproximan a las frecuencias esperadas (como 257, 510, 233) puede considerarse como intentos de expresar la variabilidad.

Actividades de simulación. En la segunda etapa los estudiantes realizaron actividades de simulación. En equipos lanzaron varias veces dos monedas, de acuerdo al resultado de cada par de monedas, determinaban el valor de la variable y la registraban en tablas. Esto lo hicieron durante una clase, en la que reunieron los datos de cada grupo y los organizaron en tablas de frecuencias. Esta actividad sirvió para que se entendiera el sentido del problema y de la variable aleatoria que está en juego; notaron, por ejemplo, que los valores 0, 1 y 2 se presentan sin poderse predecir de antemano, pero que el valor 1 tiende a tener más ocurrencias. La actividad de simulación física fue muy útil para que los estudiantes entendieran la manera de funcionar del software cuando se pasó a la tercera etapa.

En la tercera etapa, el profesor mostró la elaboración de un programa en Fathom para simular la variable aleatoria. Se representa con 0 cuando la moneda cae de un lado (águila) y con 1 cuando cae del otro lado (sol). En una columna se sortean 1000 veces los valores 0 y 1 con probabilidad ½ cada uno; con lo que se representan los resultados de 1000 lanzamientos de una moneda. En una segunda columna se repite lo anterior para representar los resultados de la segunda moneda. En una tercera columna se suman los valores correspondientes; esto genera valores 0, 1 y 2; los cuales representan resultados de sortear la variable aleatoria binomial: $b(x, 2, ½)$. En el cuadro "Column Summary" de la figura 1, se representan las frecuencias absolutas de cada valor, en este caso 255, 494, 251; debajo de dicha figura se representa la gráfica de barras correspondiente.

Los estudiantes pueden repetir el sorteo de 1000 veces la variable de manera independiente las veces que quieran con sólo apretar una tecla. El software actualiza los resultados en la pantalla. Esto permite a los estudiantes investigar el comportamiento de los resultados. Pueden ver por ejemplo, que la tendencia de las ternas en la tabla "Column Summary" es que la frecuencias varían alrededor de los valores esperados. Añadiendo algunas instrucciones más, se puede estimar la magnitud de la variabilidad.

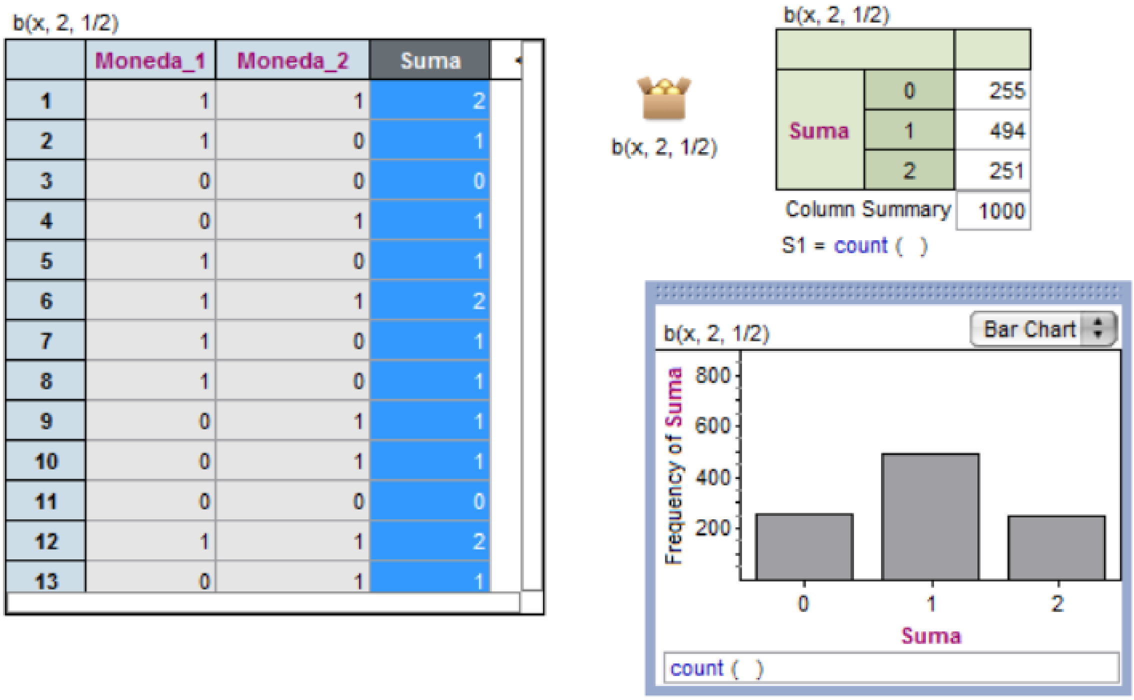


Figura 1. Pantalla del ordenador de la simulación en Fathom de 1000 lanzamientos de 2 monedas.

Procedimiento de análisis. En primer lugar, se clasifican las respuestas de cada pregunta, separando las correspondientes al pre- y al post-cuestionario, en categorías SOLO (Biggs y Collis, 1991). En segundo lugar, se consideran sólo las respuestas clasificadas en los niveles uni-estructural o mayor de ambas preguntas (separando las del pre y post-cuestionario) y sus frecuencias conjuntas se organizan en una tabla de doble entrada. La manera en que se forman las categorías SOLO es mediante la identificación y aislamiento de algunos aspectos relevantes (adecuados o no) en relación con la solución al problema. Estos aspectos o elementos relevantes son identificados o elaborados teniendo en cuenta tanto consideraciones teóricas como como rasgos comunes observados en las propias respuestas. Una vez establecidos estos elementos, se definen las categorías de pre-, uni- y mutli-estructural y relacional de manera similar, pero no exactamente, a cómo fue sugerido por Biggs y Collis (1991).

En general, los estudiantes respondieron a la pregunta 1 con tres números enteros, cada uno representando la frecuencia de los valores 0, 1 y 2. Tales respuestas no son correctas ya que la probabilidad de que las frecuencias reales coincidan con los números dados es muy pequeña, de donde no sería sensato esperar que ocurrieran las frecuencias previstas. Sin embargo, se pueden destacar algunos rasgos de las respuestas, en particular, relacionados con las nociones de variabilidad y distribución, de manera que permitan definir niveles de calidad para clasificarlas. Los aspectos de las tareas que proponemos para este fin son los siguientes [Llamaremos X a la variable aleatoria b(x, 2, ½)]:

1) *Coherencia:* la suma de las tres frecuencias es 1000. 2) *Forma de la distribución:* la frecuencia del valor X = 1 es mayor que la frecuencia de los valores X = 0 y X = 2. 3) *Variabilidad*: las frecuencias de 0, 1 y 2 caen respectivamente dentro de los rangos de 250 ± 50, 500 ± 50 y 250 ± 50. 4) *Ausencia de variabilidad*, las frecuencias de 0 y 1 son iguales. Se añade esta condición para distinguir las respuestas donde la variabilidad no se refleja; esto incluye respuestas: 250, 500 y 250.

Si una respuesta es incoherente, o bien, no cumple con las condiciones de la forma de la distribución y de la variabilidad es *Prestructural*. Si satisface la condición de la forma de la distribución, pero no de variabilidad, o de variabilidad, pero no de la forma de la distribución, o alternativamente, si satisface la condición 4 es *Unistructural*. Si las respuestas satisfacen la forma de la distribución y no las condiciones 3 y 4 es *Multistructural*; en este caso quiere decir que proponen una variabilidad muy amplia. Finalmente, si la respuesta satisface el patrón de distribución y variabilidad, pero no satisface 4 es *Relacional*.

Para responder la pregunta 2, los estudiantes también dan tres números. En este caso, la respuesta correcta es (¼, ½, ¼). Por razones de espacio, se describen directamente la categoría SOLO sin especificar antes los aspectos que las componen. Las respuestas se clasifican como *Prestructural* cuando 1) si se refieren a elementos extraños a la situación o son incomprensibles, y 2) cuando la respuesta consiste en tres números cuya suma es diferente de 1 o 100% sin ser proporcional a (1, 2, 1). Las respuestas se clasifican como *Unistructural* cuando cumplen alguna de las siguientes: 1) se asignan valores cuya suma es diferente de 1 o 100 (generalmente enteros) pero son proporcionales a (1, 2, 1); 2) los valores que proporcionan en la respuesta suman 100 o 1000, pero no son proporcionales a (1, 2, 1); 3) las respuestas son dadas con tres números decimales o fraccionarios cuya suma es 1, pero no son proporcionales a (1, 2, 1). Las respuestas que se clasifican en el nivel *Multistructural* cumplen con alguna de las siguientes condiciones: 1) proporcionan números decimales, fracciones o porcentajes cuya suma es 1 o 100%, con mayor probabilidad asignada a X = 1 que a las asignadas a X = 0 y X = 2; pero los valores están alejadas de las probabilidades teóricas (¼, ½, ¼); 2) en las respuestas se proporcionan valores cuya suma es 100 (generalmente números enteros, pero no necesariamente) y asignan mayor probabilidad a X = 1, pero se omite el signo "%"; y 3) expresan las probabilidades pero indicando que sólo son una aproximación, por ejemplo, "(alrededor de ¼, ½, ¼)". Las respuestas clasificadas en el nivel *Relacional* son distribuciones de probabilidad, algunas de las cuales son la distribución teórica y otras se obtienen a través del enfoque frecuencial.

La clasificación SOLO anterior se propone construir criterios para evaluar la calidad de las respuestas a cada pregunta de manera independiente. Sin embargo, la consideración conjunta de las respuestas a las preguntas 1 y 2 nos proporciona indicios de cómo reaccionan los estudiantes ante la variabilidad. Para organizar las respuestas conjuntas, se han realizado tablas de contingencia que dividen las respuestas de cada pregunta en dos clases complementarias. En la pregunta 1, una clase contienen las respuestas en las que se dan las frecuencias esperadas (250, 500, 250) y la otra contiene las respuestas restantes. Con respecto a la pregunta 2, se distinguen las respuestas en las que las probabilidades se obtienen mediante el enfoque clásico de las que se obtuvieron mediante el enfoque frecuencial.

Tabla 11. Categorías

	Frecuencias esperadas	Frecuencias diferentes a las esperadas
Enfoque clásico	*Dogmatismo teórico*	*Conexión de la teoría y los datos*
Enfoque frecuencial	*Relación borrosa entre la teoría y los datos*	*Compromiso empírico*

A continuación, se describe e interpreta cada categoría. Las respuestas clasificadas en *dogmatismo teórico* son aquellas que presentan las probabilidades teóricas y la predicción simplemente es calculada multiplicando la probabilidad de cada evento por el número de repeticiones del experimento (en este caso 1000). Los estudiantes cuyas respuestas se encuentran en esta categoría no son capaces de aprender las lecciones de la experiencia y, por lo tanto, en sus respuestas evitan o ignoran la variabilidad de la situación. Probablemente algunos de estos estudiantes ya conocían el enfoque clásico de probabilidad, pero de todos modos su forma de pensar es que un problema de predicción es sólo un problema matemático o teórico sin relación con los resultados de las situaciones reales.

Los estudiantes cuyas respuestas se clasifican en *compromiso empírico* descuidan la distribución teórica y proponen una distribución basada en el enfoque frecuencial. Para ellos no hay ninguna distribución subyacente a la situación puesto que lo que proponen es sólo una descripción de lo que vieron durante la simulación o en alguna experiencia previa. Aunque sus respuestas a la pregunta 1 son 3 números diferentes a las frecuencias esperadas, no se puede decir que consideran la variabilidad, ya que no consideran la distribución teórica como referencia para evaluar las diferencias.

Las respuestas con una mejor calidad serían aquellas en las que los estudiantes *conectan la teoría y los datos*, es decir, cuando aceptan una distribución teórica subyacente a la situación, pero se dan cuenta que en la práctica los resultados generalmente varían de los valores teóricos esperados, por lo que aceptan que la aleatoriedad no puede ser eliminada. Cuando lo hacen, es una indicación de que perciben la variabilidad e intentan expresarla. Esto les puede permitir entender la idea de la ley de los grandes números sobre la aproximación de las frecuencias a las probabilidades teóricas. Sin embargo, es necesario que trasladen las frecuencias a frecuencias relativas para compararlas con las probabilidades correspondientes.

Finalmente, las respuestas en la celda “frecuencias esperadas – enfoque frecuencial” sugieren una *relación borrosa entre la teoría y los datos*. Dichas respuestas son extrañas, ya que es difícil imaginar un argumento que conduzca a las frecuencias esperadas, sin conocer la distribución teórica de probabilidad.

RESULTADOS

En las tablas 2 y 3, se presentan las frecuencias de la clasificación en los niveles SOLO de las respuestas a las preguntas 1 y 2 del pre- y post-test. La tabla 2 se refiere a los estudiantes que no habían tomado un curso de probabilidad y estadística, mientras que la tabla 3 a los estudiantes que habían llevado el curso.

Tabla 2. Frecuencias de respuestas de acuerdo a los niveles SOLO del grupo sin curso de probabilidad y estadística. P = Preestructural, U = Uniestructural, M = Multiestructural, R = Relacional

	Pregunta 1						Pregunta 2				
	P	U	M	R	Total		P	U	M	R	Total
Pre-test	51%	34%	9%	6%	100%	Pre-test	34%	21%	13%	32%	100%
Post-test	17%	37%	20%	26%	100%	Post-test	11%	19%	27%	43%	100%

Cabe destacar que tanto en las dos preguntas, como en ambos grupos (tablas 2 y 3), las frecuencias de respuestas del post-test clasificadas en los dos niveles inferiores de SOLO (dos niveles superiores) son menores (mayores) que las correspondientes al pre-test. Esto significa que, en general, la calidad de las respuestas del post-test es mayor que la calidad de las respuestas del pre-test.

Tabla 3. Frecuencias de las respuestas de acuerdo a la categoría SOLO del grupo con curso de probabilidad y estadística. P = Preestructural, U = Uniestructural, M = Multiestructural, R = Relacional

	Pregunta 1						Pregunta 2				
	P	U	M	R	Total		P	U	M	R	Total
Pre-test	52%	45%	3%	0%	100%	Pre-test	48%	15%	0%	37%	100%
Post-test	27%	50%	0%	23%	100%	Post-test	4%	16%	12%	68%	100%

La tabla 4 se refiere a los datos de los estudiantes que no habían llevado un curso de probabilidad y estadística. En primer lugar, vale la pena poner atención en los resultados del pre-test. La frecuencia relativa de las respuestas clasificadas en “compromiso empírico” (ver tabla 1) es del 65% (9 de 14); clasificadas en “dogmatismo teórico” es de 14% (2 de 14); en “conexión de la teoría y los datos” es 14% (2 de 14) y en “relación borrosa entre la teoría y los datos" es 7% (1 de 14). En segundo lugar, poniendo ahora atención en los resultados del post-test, las frecuencias correspondientes son casi proporcionales a los datos anteriores, ya que en este caso el total es de 28: 68% (19 de 28), 14% (4 de 28), 11% (3 de 28) y 7% (2 de 28%). Lo relevante acerca de estos datos es que en ambos test la mayoría de las respuestas se clasifican en “compromiso empírico”.

Tabla 4. Frecuencias conjuntas de las respuestas a las preguntas del pre- y post- test (excluyendo el nivel Prestructural), del grupo sin curso de probabilidad y estadística.

	Pregunta 1					
Pregunta 2	Frecuencias esperadas		Frecuencias no esperadas		Total	
	Pre	Post	Pre	Post	Pre	Post
Enfoque clásico	14%	14%	14%	11%	28%	25%
Enfoque frecuencial	7%	7%	65%	68%	72%	75%
Total	21%	21%	79%	79%	100%	100%

La tabla 5 se refiere a los datos de los estudiantes que habían tomado un curso de probabilidad y estadística. Poniendo atención en los resultados del pre-test, 79% (19 de 24) se clasifican en “dogmatismo teórico”; 0% en “compromiso empírico”; 8.5% (2 de 24) en “conexión de la teoría y los datos” y 12.5% (3 de 24) en “relación borrosa entre la teoría y los datos”. Con respecto a los datos del post-test, las frecuencias correspondientes son 60% (26 de 43), 19% (8 de 43), 16.5% (de 43 7) y 4.5% respectivamente. Cabe destacar que la mayoría de las respuestas en ambos test se clasifican en "dogmatismo teórico"; además, en el pre-test ningún estudiante dio una respuesta clasificada en "compromiso empírico", pero después de las actividades de simulación se encuentra el 19% (8 de 43) en esta categoría.

Tabla 5. Frecuencias conjuntas de las respuestas a las preguntas del pre- y post- test (excluyendo el nivel Prestructural), del grupo con curso de probabilidad y estadística.

		Pregunta 1					
		Frecuencias esperadas		Frecuencias no esperadas		Total	
		Pre	Post	Pre	Post	Pre	Post
Pregunta 2	Enfoque clásico	79%	60%	8.5%	16.5%	87.5%	76.5%
	Enfoque frecuencial	12.5%	4.5%	0%	19%	12.5%	23.5%
	Total	91.5%	64.5%	8.5%	35.5%	100%	100%

DISCUSIÓN

El análisis anterior es principalmente descriptivo debido a que las categorías utilizadas fueron definidas a partir de los datos relativos al diseño de la situación. Sin embargo, algunos de sus rasgos o propiedades se pueden relacionar con conceptos emergentes de respuestas a otros problemas o situaciones relacionadas con la incertidumbre.

El *dogmatismo teórico* se relaciona con una posición que concibe a los objetos estadísticos como convencionales. Los estudiantes piensan que para encontrar una probabilidad o hacer una predicción existen un conjunto de pasos prestablecidos que se deben seguir. Analizar casos favorables entre casos posibles para encontrar la probabilidad y para hacer la predicción simplemente multiplicar la probabilidad por el número de veces que se repite el experimento. Esta manera de enfrentar los problemas pone mayor atención a las inferencias 'lógicas', pero descuida la consistencia de los resultados con las situaciones reales. El problema es que algunas de las inferencias que hacen los estudiantes en probabilidad y estadística no son apropiadas, por lo general, debido a la dificultad de incluir en ellas representaciones de la aleatoriedad y la variabilidad presentes en las situaciones. Observamos en este comportamiento de resolución similitud con sesgos presentes en creencias que emergen en otras situaciones; por ejemplo: "si la probabilidad de obtener 5 en la cara de un dado es 1/6, entonces ocurrirá exactamente un 5 al tirar seis veces el dado" o "si una muestra es aleatoria, entonces es como una réplica en miniatura de la población". Estas creencias se basan en inferencias que aparentan ser lógicas pero que bastaría un experimento simple para refutarlas.

El *compromiso empírico* se relaciona con una posición que concibe a los conceptos y resultados probabilísticos y estadísticos como reflejos o representaciones de una realidad del mundo físico o social; para quienes se ubican en esta posición, la validez de los resultados descansa más en su relación con situaciones reales que en una conexión lógica. Así, los estudiantes comprometidos empíricamente piensan que una probabilidad es una descripción de un estado preciso del mundo: el número de veces que ocurrió un evento entre el número de veces que se repitió y, de manera análoga, la predicción recoge rasgos que evidentemente se presentan en la experiencia, en particular, el de la variabilidad. La actitud de creer sólo en lo que se puede observar limita sus posibilidades de inferencia y teorización; para ellos la "probabilidad frecuencial" no es una aproximación a una probabilidad subyacente, pues esto requiere una conceptualización, sino una descripción de los datos; si los datos cambian, cambia la probabilidad. Hay otras situaciones donde se encuentra un comportamiento similar. Por ejemplo, cuando el concepto de *evento*, como se entiende en probabilidad, se identifica con el *resultado* porque este puede verse. También, el compromiso empírico se relaciona con el *enfoque al resultado* de Konold (1989) cuando la respuesta a una pregunta de probabilidad es evaluada como correcta o incorrecta si es coincidente o no con los resultados obtenidos.

El desarrollo de un razonamiento probabilístico y estadístico requiere la integración del modelo teórico con el contexto, combinando de manera conveniente las dos tendencias descritas arriba. En la exploración realizada, hemos considerado que las respuestas que identifican la distribución (¼, ½, ¼) y que reflejan la variabilidad, (por ejemplo, dando frecuencias como 252, 513, 235) contienen de una forma embrionaria la búsqueda de dicha integración. Esto es porque derivan de la definición clásica la distribución y predicen valores diferentes a los valores esperados (250, 500, 250), presumiblemente porque perciben que en la realización del experimento hay variabilidad.

A partir de nuestras observaciones es posible conjeturar una trayectoria hipotética en el desarrollo del razonamiento de los estudiantes. Consistiría en una tendencia al compromiso empírico al comienzo (en sus primeros acercamientos a la probabilidad los estudiantes buscan vincularla con situaciones reales); luego, con la instrucción se vuelve teórica (ahora se cree de manera dogmática en toda derivación con apariencia lógica). En un tercer momento se integran partes de ambas tendencias, se percibe lo teórico como una conceptualización abstracta de situaciones reales y no meramente su descripción. A su vez la derivación de resultados teóricos es una manera de revelar aspectos subyacentes en la realidad y no sólo de reflejar lo que ya se ve. En dicho proceso, la manera en que se integra la variabilidad es crucial.

El análisis realizado permite dilucidar algunas consecuencias para la enseñanza de la probabilidad. En primer lugar, desarrollar secuencias de enseñanza que problematicen la relación entre el modelo matemático y la realidad, en particular, entre las definiciones clásica y frecuencial, poniendo especial atención en la variabilidad de los resultados de sortear experiencias aleatorias. El desarrollo del razonamiento probabilístico debe integrar el modelo y los datos teniendo en cuenta la variabilidad, esto implica actividades de conceptualización y no sólo la descripción de resultados. Es ingenuo pensar que sólo con la realización de actividades de simulación y la observación de los resultados, los estudiantes puedan abstraer una distribución subyacente; pero también lo es, pensar que un enfoque teórico por sí mismo habilitará a los estudiantes para hacer la conexión con los datos.

REFERENCIAS

Batanero, C. (2015). Understanding randomness: challenges for research and teaching. Conferencia en *CERME 9: 9th Congress of European Research in Mathematics Education*. Praga, Febrero, 2015.

Batanero. C., & Serrano, L. (1999). The meaning of randomness for secondary school students. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(5), 558-567.

Biggs, J. B., Collis, K. F. (1991). Multimodal learning and the quality of intelligence behavior. En H. A. Rowe (Ed.), *Intelligence: Reconceptualization and measurement*, pp. 57-76. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Del Pino, J. y Estepa, A. (2013). La dispersión: breve análisis del concepto, su historia y estado de la investigación didáctica. *Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (SEIEM). Baeza, España.

Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemma. In G. A. Jones (Ed.), Exploring probability in school: challenges for teaching and learning (pp. 39-63). New York: Springer.

Ireland, S., Watson, J. (2009). Building a connection between experimental and theoretical aspects of probability. International Electronic Journal of Mathematics Education, 4(3). 339-370.

Jones, G.A. (2005). Reflections. In G.A. Jones (Ed.). Exploring Probability in School. Challenges for Teaching and Learning (pp. 367-372). New York: Springer.

Kahneman, D., Tversky, A. (1982). Variants of uncertainty. In D. Kahneman, P. Slovic, A. Tversky (Eds.), pp. 509 520.

Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction, 6,* 59-98.

Konold, C., Madden, S., Pollatsek, A., Pfannkuch, M., Wild, C., Ziedins, I., Finzer, W. Hortosn, N.J., Kazak, S. (2011). Conceptual challenges in coordinating theoretical and data-centered estimates of probability. Mathematical Thinking and Learning, 13(1 & 2), pp. 68-86.

Ortiz, J.J. (2002). *La probabilidad en los libros de texto*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada.

Perkins, D.N. (1985). Reasoning as imagination. Interchange 16(1), 14-26.

Sánchez, E., Borim, S., & Coutinho, C. (2011). Teachers’ understanding of variation. En Batanero, C., Burril, G., Reading, C. (Eds.). *Teaching Statistics in School Mathematics- Challenges for Teaching and Teacher Education. A joint ICMI/IASE Study* (pp. 211-221). New York: Springer.

Shaughnessy, J. M. (1997). Missed opportunities in research on the teaching and learning of data and chance. In F. Biddulph & K. Carr (Eds.), *Proceedings of the Twentieth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 6-22). Rotorua, New Zealand: University of Waikata.

Sthol, Rider, Tarr (2004). Making connections between empirical and theoretical probability: Students' generation and analysis of data in a technological environment.

http://www.probexplorer.com/Articles/LeeRiderTarrConnectE&T.pdf

Steinbring, H. (1986). L'independence stochastique. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, *7*(3), 99-118.

Truran, J. y Truran, K. (1997). Statistical Independence - One concept or two? Implications for research and for clasroom practice. En B. Philips (Ed.), *Papers on statistical education presented at ICME-8* (pp. 87-100). Swinburne University of Technology.

.

APRENDIZAJE DE ESTUDIANTES PARA PROFESOR SOBRE LA COMPRENSIÓN DEL LÍMITE DE UNA FUNCION EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

Prospective mathematics teachers' learning about high school students' understanding of limit concept

[a]Fernández, C., [b]Sánchez-Matamoros, G., [a]Callejo, M.L. y [a]Moreno, M.

[a]Universidad de Alicante, [b]Universidad de Sevilla

Resumen

Este estudio tiene como objetivo caracterizar cómo estudiantes para profesor desarrollan una mirada profesional en relación a la enseñanza-aprendizaje del límite de una función en un punto. Veinticinco estudiantes para profesor participaron en un entorno de aprendizaje diseñado ad hoc considerando las destrezas de identificar, interpretar y tomar decisiones de acción que conceptualizan la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes. Los resultados indican que el desarrollo de la mirada profesional se vinculó a reconocer los elementos matemáticos que son relevantes en la comprensión del concepto, a ser capaz de considerar diferentes progresiones en el aprendizaje, y a llegar a proponer y justificar decisiones de acción centradas en potenciar los procesos cognitivos que articulan la comprensión del concepto, más allá de las referencias curriculares.

Palabras clave: *aprendizaje del estudiante para profesor, mirar profesionalmente, concepto de límite.*

Abstract

The goal of this study is to characterize how do prospective teachers develop the noticing skill in relation to the teaching and learning of the limit of a function at a point. Twenty-five prospective teachers participated in a learning environment designed ad hoc considering the related nature of the skills of identifying, interpreting and deciding how to respond that conceptualize the skill of noticing students' mathematical thinking. Results indicate that the development of prospective teachers noticing implicated the recognition of the mathematical elements that are relevant in the concept understanding, the consideration of different progressions in the students' learning, and the proposal and justification of instructional decisions focused on enhancing students' cognitive processes that can articulate the concept understanding, beyond curricular references.

Keywords: *prospective teachers' learning, professional noticing, limit concept.*

INTRODUCCIÓN Y MARCO TEÓRICO

Las investigaciones centradas en la formación de futuros profesores de matemáticas destacan la importancia de la relación entre el conocimiento de contenido matemático y el conocimiento de matemáticas y los estudiantes (Ball, Thames y Phelps, 2008; Bartell, Webel, Bowen y Dyson, 2013; Spitzer, Phelps, Beyers, Johnson y Sieminski, 2011). Esta relación es necesaria para la realización de tareas profesionales como anticipar e interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes y tomar decisiones de acción. En este contexto, los estudios están mostrando que la identificación de los elementos matemáticos importantes (conocimiento de contenido matemático) juega un papel

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Callejo, M.L. y Moreno, M. (2016). Aprendizaje de estudiantes para profesor sobre la comprensión del límite de una función en estudiantes de bachillerato. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 394-402). Málaga: SEIEM.

fundamental en la interpretación de la comprensión del estudiante (Fernández, Llinares y Valls, 2012; Magiera, va den Kieboom y Moyer, 2013; Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares, 2015). Esta relación fundamenta las destrezas de identificar, interpretar y decidir que son la base de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes (Jacobs, Lamb y Philipp, 2010; Mason 2002).

Jacobs et al., (2010) conceptualizan esta competencia como estas tres destrezas interrelacionadas: identificar los elementos matemáticos importantes en las respuestas de los estudiantes; interpretar la comprensión del estudiante y decidir cómo responder teniendo en cuenta la comprensión del estudiante. Algunas investigaciones previas se han centrado en cómo los estudiantes para profesor aprenden a mirar de manera profesional el pensamiento matemático de los estudiantes en diferentes dominios matemáticos y han empezado a proporcionar características que definen el desarrollo de esta competencia. Por ejemplo Fernández et al. (2012) en el razonamiento proporcional, Schack et al. (2013) en la numeración temprana, Son (2013) con los conceptos de razón y proporción, Magiera, et al. (2013) en el pensamiento algebraico y Sánchez-Matamoros et al. (2015) en el concepto de derivada. Nuestro estudio se integra en esta línea de investigación y en particular se centra en caracterizar el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes en relación al concepto de límite de una función en un punto.

La selección de este dominio matemático viene dada porque diferentes investigaciones indican que el concepto de límite es una noción difícil (Cornu, 1991; Cottrill et al., 1996; Swinyard y Larsen, 2012; Williams, 1991). La dificultad que presentan los estudiantes para comprender la definición métrica del límite

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \partial > 0 \; tal\, que \; \forall x, \; 0 < |x-a| < \partial \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

puede ser el resultado de una comprensión insuficiente de su concepción dinámica (Blázquez y Ortega, 2002) que puede ser definida como: “Sea f una función y a un número real, el número L es el límite de la función f en el punto a, y se debiera escribir $\lim_{x \to a} f(x)$, si cuando x se acerca al número a más que cualquier aproximación, sus imágenes $f(x)$ se acercan a L más que cualquier otra aproximación fijada”

Algunas investigaciones (Cottrill et al., 1996; Swinyard y Larsen, 2012) indican que relacionar la coordinación de los dos procesos de aproximación con la cuantificación derivada de la concepción métrica hace el concepto de límite difícil para muchos estudiantes. Desde este punto de vista, los estudiantes deben coordinar un proceso de aproximación en el dominio con un proceso de aproximación en el rango a través de la función, considerando diferentes modos de representación, cuando tienen que encontrar el limite (Juter, 2006; Williams, 1991). Conocer las características de cómo los estudiantes de bachillerato comprenden el concepto de límite puede proporcionar a los estudiantes para profesor la información necesaria no solo para interpretar la comprensión de los estudiantes sino para tomar decisiones de acción basadas en la comprensión de los estudiantes.

El objetivo de nuestra investigación es caracterizar cómo estudiantes para profesor desarrollan la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes en el dominio específico del límite de una función en un punto. Es decir, caracterizar cómo los estudiantes para profesor aprenden sobre la progresión en el aprendizaje del concepto de límite de una función de los estudiantes de bachillerato.

MÉTODO

Participantes y contexto

Los participantes fueron 25 estudiantes para profesor matriculados en el Master Universitario en Profesorado de Educación Secundaria. Estos estudiantes para profesor procedían de diferentes grados o licenciaturas: matemáticos, físicos, ingenieros y arquitectos. Una de las asignaturas del Máster tiene como uno de sus objetivos que los estudiantes para profesor aprendan a identificar características de la progresión de la comprensión de estudiantes de educación secundaria. Esta asignatura está dividida en varios entornos de aprendizaje en los que se tratan diferentes tópicos matemáticos. El estudio presentado aquí se centra en el concepto de límite de una función en un punto.

Entorno de aprendizaje

El objetivo del entorno de aprendizaje es que los futuros profesores aprendan a identificar características de la progresión de la comprensión de los estudiantes de bachillerato y a proponer decisiones que ayuden a los estudiantes a progresar en su comprensión. El entorno de aprendizaje consta de 5 sesiones de 2 horas. En la sesión 1, los estudiantes para profesor resolvieron tres problemas sobre el concepto de límite de una función en un punto, tomados de libros de texto de bachillerato e indicando los elementos matemáticos y modos de representación que se usaban para su resolución (Figura 1). Para ello, usaron un documento con la definición de la concepción dinámica de límite y los elementos matemáticos que la conforman (Pons, Valls y Llinares, 2012): (i) función, (ii) aproximación lateral por la derecha y por la izquierda (en el dominio, y en el rango, tanto si son coincidentes como si no lo son), y (iii) coordinación, a través de la función, de los procesos de aproximación en el dominio y en el rango considerando distintos modos de representación (gráfico, algebraico y numérico).

Problema 1

Sea la función

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \le 1 \\ 4 & \text{si } 1 < x \le 2 \\ x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Calcula el límite de f (x) cuando:

a) x tiende a 1

b) x tiende a 2

Problema 2

Sean las tablas

x_1	0,8	0,9	0,99	...	1,2	1,1	1,01
$f(x_1)$	1,64	1,81	1,9201	...	2,44	2,21	2,0201

x_2	0	0.9	0.99	...	1.1	1.01	1.001
$g(x_2)$	0	-099	-0.9999	...	2.3	2.03	2.003

a) ¿a qué valor se acercan

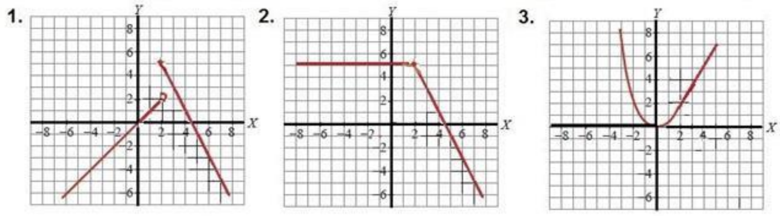
1. x_1 y x_2 por la derecha y por la izquierda
2. las imágenes de $f(x_1)$ por la derecha y por la izquierda
3. las imágenes de $g(x_2)$ por la derecha y por la izquierda?

b) ¿a qué valor se acercan

1. las imágenes de $f(x_1)$ en relación al valor que se acerca x_1
2. las imágenes de $g(x_2)$ en relación al valor que se acerca x_2?

Problema 3

Relaciona las siguientes gráficas con las afirmaciones a, b y c. Justifica tus respuestas



a) El límite de la función es 2 en x = 2

b) El límite de la función es 5 en x = 2

c) No existe el límite de la función en x = 2

Figura 14.

Problemas procedentes de los libros de texto sobre concepto de límite de una función en un punto usados en la sesión 1

En la sesión 2, los estudiantes para profesor debían anticipar respuestas hipotéticas de estudiantes de bachillerato a dichos problemas (Figura 2). El objetivo era que los estudiantes para profesor generaran respuestas hipotéticas que reflejaran diferentes niveles de comprensión del concepto de límite de una función en un punto en estudiantes de primero de bachillerato y que propusieran nuevos problemas que ayudaran a los estudiantes de bachillerato a avanzar en su comprensión.

a) Indica que tendría que hacer y decir exactamente María, una alumna de 1º de Bachillerato, en cada problema para indicarte que ha comprendido el objetivo de aprendizaje. Justifica tu respuesta a partir de los elementos matemáticos y modos de representación.

b) Indica lo que tendría que hacer y decir exactamente Pedro, otro alumno de 1º de Bachillerato, en cada problema para que muestre que tiene ciertas características de la comprensión del concepto de límite pero que no ha sido capaz de alcanzar el objetivo de aprendizaje pretendido. Justifica tu respuesta a partir de los elementos matemáticos y modos de representación.

c) Como profesor de estos alumnos propón tareas concretas:

- *para confirmar que María ha alcanzado el objetivo de aprendizaje pretendido. Justifica tu respuesta a partir de los elementos matemáticos y modos de representación.*
- *para que Pedro alcance el objetivo de aprendizaje pretendido. Justifica tu respuesta a partir de los elementos matemáticos y modos de representación.*

Figura 2. Cuestiones de la tarea de anticipación (Sesión 2)

En las sesiones 3 y 4, los estudiantes para profesor tenían que interpretar las respuestas dadas por cuatro estudiantes de bachillerato (Pablo, Rebecca, Luiggi y Jorge) a tres problemas en relación al límite de una función en un punto usando como referencia un documento que sintetizaba las características de la comprensión del concepto de límite desde investigaciones previas (Cornu, 1991; Cottrill et al., 1996; Junter, 2006; Pons, 2014; Swinyard y Larsen, 2012). Las respuestas de los cuatro estudiantes de bachillerato evidenciaban diferentes niveles de comprensión del límite de una función en un punto (Pons, 2014; Tabla 1).

La Figura 3 muestra los problemas utilizados y las respuestas de Pablo (alumno con nivel de comprensión alto).

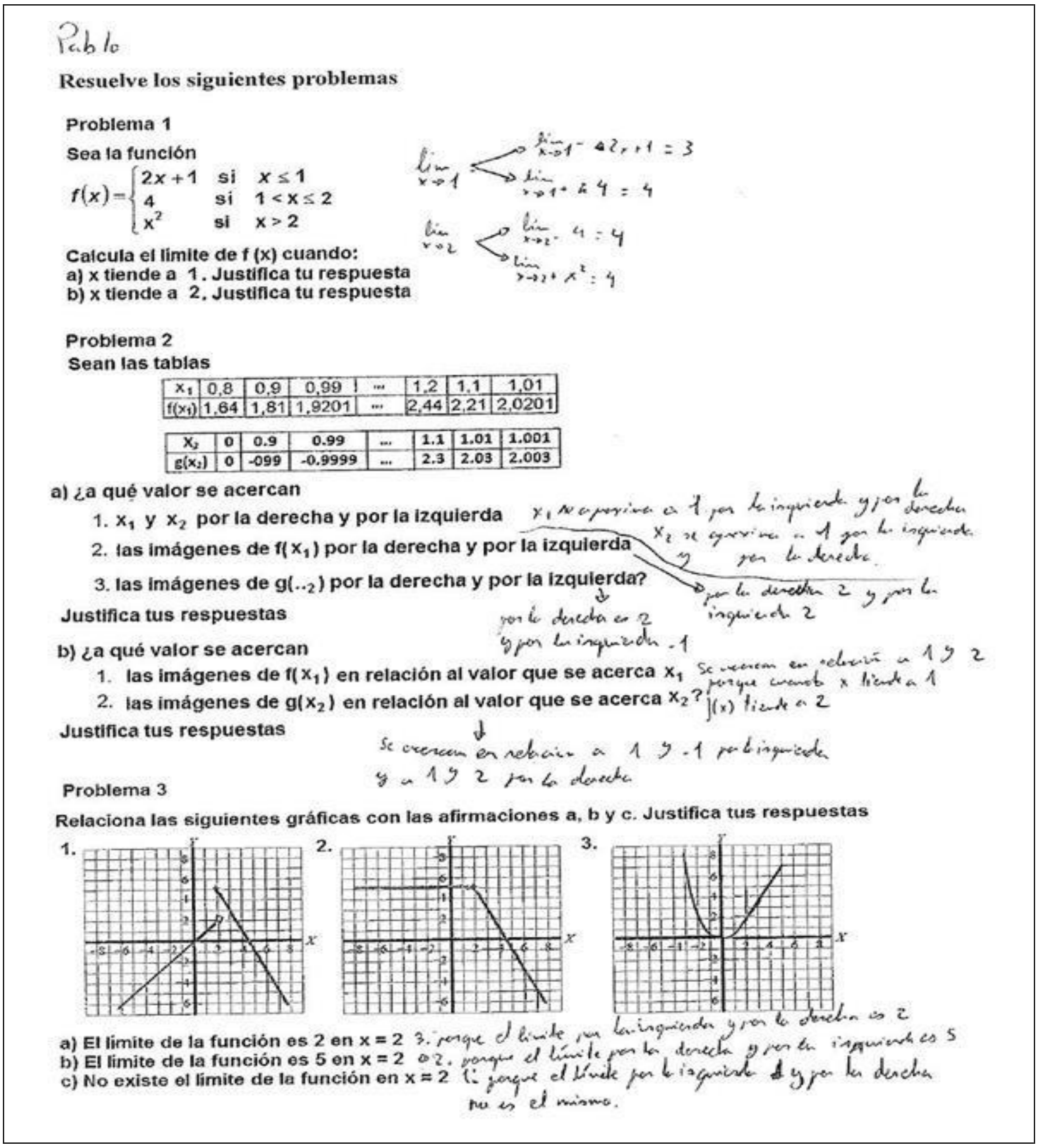
Tabla 1. Características de la comprensión del concepto de límite de cada estudiante de bachillerato

Estudiante hipotético	Características de su comprensión del concepto de limite derivadas de las respuestas a los tres problemas	Nivel comprensión
Pablo	coordinaba las aproximaciones en el dominio y en el rango en los tres modos de representación (analítico, numérico y gráfico)	Alto
Rebeca	solo coordinaba las aproximaciones en el modo gráfico (y cuando los límites eran coincidentes	Bajo
Luiggi	coordinaba las aproximaciones en el dominio y en el rango en los tres modos de representación	Alto
Jorge	coordinaba en modo numérico y gráfico (este último solo cuando los límites eran coincidentes)	Intermedio

Los estudiantes para profesor debían responder a las siguientes cuestiones:

- *Describe en cada uno de los problemas qué elementos matemáticos de la concepción dinámica de límite ha usado el "alumno X" para resolverlos e indica si ha tenido dificultades y por qué.*
- *A partir de las descripciones de cómo el alumno X ha realizado los tres problemas, ¿es posible identificar alguna característica de cómo el alumno X comprende el concepto de límite de una función en un punto? Justifica tu respuesta a partir delos elementos y los modos de representación.*
- *Considerando la comprensión de límite de una función de un punto del alumno X mostrada en la resolución de los problemas, diseña una tarea para mejorar esta comprensión. Justifica tu respuesta.*

En las cuatro primeras sesiones los estudiantes para profesor resolvieron las tareas en grupos de cinco y todas estas tareas fueron discutidas en clase. En la sesión 5, los estudiantes para profesor resolvieron una tarea similar a la propuesta en las sesiones 3 y 4 (interpretar y proponer nuevas tareas) de manera individual.



Pablo

Resuelve los siguientes problemas

Problema 1

Sea la función

$$f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{si} \quad x\le 1\\ 4 & \text{si} \quad 1<x\le 2\\ x^2 & \text{si} \quad x>2\end{cases}$$

Calcula el límite de f (x) cuando:
a) x tiende a 1. Justifica tu respuesta
b) x tiende a 2. Justifica tu respuesta

$\lim_{x\to 1}$ → $\lim_{x\to 1^-} 2x+1 = 3$; $\lim_{x\to 1^+} 4 = 4$

$\lim_{x\to 2}$ → $\lim_{x\to 2^-} 4 = 4$; $\lim_{x\to 2^+} x^2 = 4$

Problema 2

Sean las tablas

x_1	0,8	0,9	0,99	...	1,2	1,1	1,01
$f(x_1)$	1,64	1,81	1,9201	...	2,44	2,21	2,0201

X_2	0	0.9	0.99	...	1.1	1.01	1.001
$g(x_2)$	0	-099	-0.9999	...	2.3	2.03	2.003

a) ¿a qué valor se acercan
1. x_1 y x_2 por la derecha y por la izquierda
2. las imágenes de $f(x_1)$ por la derecha y por la izquierda
3. las imágenes de $g(.._2)$ por la derecha y por la izquierda?

Justifica tus respuestas

x_1 se aproxima a 1 por la izquierda y por la derecha
x_2 se aproxima a 1 por la izquierda y por la derecha
por la derecha 2 y por la izquierda 2
por la derecha es 2 y por la izquierda -1

b) ¿a qué valor se acercan
1. las imágenes de $f(x_1)$ en relación al valor que se acerca x_1
2. las imágenes de $g(x_2)$ en relación al valor que se acerca x_2?

Justifica tus respuestas

Se acercan en relación a 1 y 2 porque cuando x tiende a 1 f(x) tiende a 2

Se acercan en relación a 1 y -1 por la izquierda y a 1 y 2 por la derecha

Problema 3

Relaciona las siguientes gráficas con las afirmaciones a, b y c. Justifica tus respuestas

1. 2. 3.

a) El límite de la función es 2 en x = 2
b) El límite de la función es 5 en x = 2
c) No existe el límite de la función en x = 2

3. porque el límite por la izquierda y por la derecha es 2
2. porque el límite por la derecha y por la izquierda es 5
1. porque el límite por la izquierda y por la derecha no es el mismo.

Figura 3. Respuestas de Pablo a los tres problemas (nivel alto) proporcionadas a los estudiantes para profesor

El diseño del entorno de aprendizaje refleja las conexiones entre el conocimiento de matemáticas y el conocimiento sobre el aprendizaje de las matemáticas que se pretendía que se aprendiera y usara en anticipar posibles respuestas de los estudiantes y en interpretar progresiones en el aprendizaje a partir de un grupo de respuestas. Así, la sesión 1 se centra en la destreza de identificar los elementos matemáticos necesarios para la resolución del problema en los diferentes modos de representación (mencionados anteriormente). La sesión 2 se centra en la relación entre el contenido matemático y la comprensión de los estudiantes (relación entre el conocimiento de matemáticas y el conocimiento sobre el aprendizaje de los estudiantes de bachillerato). El objetivo de esta sesión es que los estudiantes para profesor se centren en esta relación ya que conjeturamos que es necesaria para el desarrollo de las tres destrezas que conceptualizan la competencia una mirada profesional. La sesión 3 se centra en la relación entre las destrezas identificar-interpretar y la sesión 4 en la relación entre las destrezas interpretar-decidir, en el sentido de que es necesario reconocer cómo los estudiantes de bachillerato usan los elementos matemáticos en la resolución del problema para interpretar su comprensión y después poder proponer decisiones de acción que les ayuden a progresar en su aprendizaje.

Análisis

Mediante un proceso inductivo, identificamos semejanzas y diferencias en la manera en la que los cinco grupos de estudiantes para profesor concebían la comprensión de los estudiantes de bachillerato sobre el concepto de límite de una función en un punto y cómo consideraban lo que podían ser evidencias de diferentes niveles de comprensión (progresión del aprendizaje).

Este proceso de análisis nos permitió generar dos categorías en la manera en la que los estudiantes para profesor consideraban lo que significaba *el aprendizaje del concepto de límite*. Por una parte, los que consideraban que el aprendizaje es *todo o nada* y los que podían reconocer *progresiones en el aprendizaje*. Aquellos estudiantes para profesor que entendían la comprensión como todo o nada consideraban solo dos tipos de respuestas en los estudiantes de bachillerato: aquellos estudiantes que comprendían todo, es decir, aquellos que coordinaban las aproximaciones en el dominio y en el rango en los diferentes modos de representación y aquellos estudiantes que no comprendían nada, es decir, no llegaban a coordinar en ningún modo de representación. Aquellos estudiantes para profesor que reconocían progresiones en la comprensión consideraron que la consolidación del aprendizaje del concepto de límite de una función en un punto está relacionada con ser capaz de usar la idea de la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango en una situación nueva para el estudiante. Estos estudiantes para profesor consideraban como evidencias de la falta de comprensión de la concepción dinámica de límite cuando el estudiante no realizaba aproximaciones laterales y coordinaciones en algún modo de representación.

En relación a las propuestas de enseñanza generadas, el análisis nos permitió identificar tres categorías: decisiones generales sobre la enseñanza-aprendizaje, decisiones basadas en contenidos curriculares y decisiones que consideraban la posibilidad de apoyar procesos cognitivos. Las dos últimas categorías tienen en cuenta la comprensión del estudiante, sin embargo las decisiones basadas en contenidos curriculares se basan en qué contenido matemático va después en el currículo y las decisiones basadas en procesos cognitivos se centran en proponer tareas con demanda cognitiva superior no centradas en qué contenido va después sino en los proceso cognitivos (por ejemplo, el proceso inverso o de desencapsulación del concepto).

RESULTADOS

Identificamos tres características en la manera en la que los estudiantes para profesor estaban aprendiendo sobre la progresión en el aprendizaje del límite de una función de estudiantes de bachillerato. Estas características vienen definidas por la relación entre los cambios experimentados a lo largo del entorno de aprendizaje sobre la manera de entender el aprendizaje del límite (vinculados a las tareas de anticipar e interpretar) y los cambios en la manera en la que generaban propuestas de enseñanza (vinculados a la tarea de tomar decisiones de acción).

Una primera característica está vinculada a los estudiantes para profesor que concebían el aprendizaje de los estudiantes como *todo o nada* y no cambiaron a lo largo de su participación en el entorno de aprendizaje (grupo G3). Estos estudiantes para profesor no reconocían los elementos matemáticos relevantes en el aprendizaje del límite y siempre realizaban comentarios generales sobre la comprensión de los estudiantes y al proponer tareas de enseñanza para apoyar la progresión en el aprendizaje de los estudiantes de bachillerato.

Una segunda característica está vinculada a los estudiantes para profesor que inicialmente concebían el aprendizaje como *todo o nada* y proponían decisiones de acción generales o vinculadas a la organización curricular del nivel educativo, pero que después de participar en el entorno de aprendizaje empezaron a reconocer diferentes niveles de progresión en el aprendizaje del límite e incorporaron a sus justificaciones de las decisiones de acción elementos relativos a los contenidos curriculares. Dos grupos de estudiantes para profesor evidencian esta característica (grupos G2 y G5). Estos estudiantes para profesor comenzaron su participación en el entorno de aprendizaje entendiendo la comprensión como dicotomía todo o nada (tarea de anticipación) pero cambiaron su manera de interpretar entendiendo la comprensión de los estudiantes de bachillerato como progreso. Estos estudiantes para profesor mostraron evidencias de identificar los elementos matemáticos de los problemas en los distintos modos de representación desde el primer momento. Esto les permitió identificar los niveles de comprensión de los estudiantes de bachillerato. Por ejemplo, los estudiantes para profesor del grupo G2, en la tarea de anticipación, consideraron como evidencia de la comprensión del límite de una función en un punto que los estudiantes de bachillerato fueran capaces de coordinar los valores de la x y los valores de $f(x)$ en los distintos intervalos de definición en diferentes modos de representación. Por ejemplo, para el modo analítico dieron la respuesta para María que aparece en la Figura 4 y la justificaron del siguiente modo:

> *[María, un estudiante hipotético con nivel alto de comprensión] Demuestra tener el concepto de función al utilizarlo correctamente a lo largo del ejercicio. Entenderíamos que no comprende el concepto si en el ejemplo eligiese siempre la misma rama o equivocadas. La idea de aproximación lateral en el dominio se corresponde con el hecho que selecciona adecuadamente la rama de la función. La idea de aproximación en el rango se demuestra cuando sustituye en el límite por la aproximación de la variable independiente. Demuestra coordinar cuando es capaz de establecer según la rama el valor del límite. Finalmente demuestra que entiende el concepto de límite y su existencia si comprueba la coincidencia de las aproximaciones calculadas en el rango.*

1)– $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x\leq 1 \\ 4 & \text{si } 1<x\leq 2 \\ x^2 & \text{si } x>2 \end{cases}$

a) x tiende a 1

$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 2x+1 = 3 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 4 = 4 \end{cases}$ $\neq \Rightarrow$ No existe el límite

b) x tiende a 2

$\lim_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 2^-} f(x) = 4 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = 4 \end{cases}$ $= \Rightarrow$ Existe el límite

Figura 4. Respuesta propuesta por G2 que podía evidenciar un nivel alto de comprensión en el nivel analítico (tarea de anticipación)

Para señalar evidencias de un nivel bajo de comprensión del concepto de límite de una función en un punto (anticipación de la respuesta de Pedro), indican que el estudiante sólo debería ser capaz de realizar aproximaciones laterales donde estaba definida la función en el punto. Por ejemplo, indicando: *"no entiende que la variable independiente se aproxima a un punto pero que nunca se alcanza"*, y podían asociar el límite al valor de la función en el punto. Se observa, por tanto, que el grupo G2 había identificado elementos matemáticos importantes (ver énfasis en la justificación de la respuesta de María), sin embargo entendía la comprensión de los estudiantes de bachillerato como "todo o nada".

Por otra parte, en la tarea de interpretación, el grupo G2 identifica elementos matemáticos importantes poniendo evidencias en todas las respuestas de los cuatro estudiantes a los diferentes problemas. La Figura 5 recoge cómo este grupo identifica los elementos matemáticos importantes en las respuestas del estudiante con un nivel alto de comprensión (Pablo) a los tres problemas (analítico, numérico y gráfico).

Problema 1

Pablo usa correctamente la idea de función y realiza correctamente las aproximaciones laterales. además es capaz de realizar la coordinación de los dos procesos de aproximación al establecer la relación entre el dominio y el rango. Sin embargo no concluye el ejercicio al no indicar si existe el límite o no. Después de haber leído los tres problemas se advierte que confunde el término 'aproximación' con el término 'límite', este es el motivo por el que da por concluido el ejercicio.

Problema 2

Interpreta correctamente los datos de la tabla, eso nos demuestra que usa correctamente la idea de función. Realiza correctamente las aproximaciones laterales y sabe realizar la coordinación a pesar de expresar los conceptos de forma deficiente.
En el aptdo a 1. Demuestra que realiza correctamente la aprox. en el dominio.
En el aptdo 2, 3 demuestra que realiza correctamente la aprox en el rango
Demuestra coordinación en el aptdo b.

Problema 3

Sabe manejar las representaciones gráficas de las funciones, realiza correctamente las aproximaciones laterales y coordina correctamente los procesos de aproximación en el dominio y en el rango. Sin embargo se aprecia en su discurso que confunde el concepto de aproximación y límite.

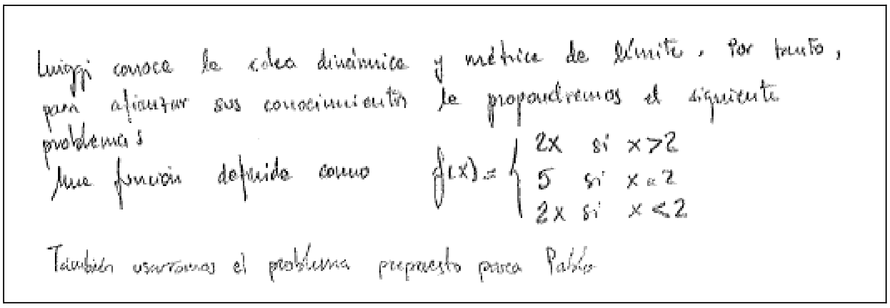
Figura 5. Respuesta del Grupo 2 a la cuestión "describe en cada uno de los problemas qué elementos matemáticos de la concepción dinámica de límite ha usado Pablo" (tarea de interpretar)

Además este grupo identifica las características de la comprensión de Pablo sobre el límite de una función en un punto identificando que estaría en un nivel 3 (alto) de comprensión (Figura 6).

PABLO COMPRENDE EL CONCEPTO DE LÍMITE PORQUE REALIZA BIEN LAS APROXIMACIONES POR LA IZQUIERDA Y LA DERECHA EN EL PUNTO ESTUDIADO, Y ES CAPAZ DE COORDINAR, EN LAS TRES FORMAS DE REPRESENTACIÓN. CONSIDERAMOS QUE PABLO ESTÁ EN EL NIVEL 3

Figura 6. Respuesta del Grupo 2 a la cuestión "a partir de las descripciones de cómo Pablo ha realizado los tres problemas, ¿es posible identificar alguna característica de cómo Pablo comprende el concepto de límite de una función en un punto? (tarea de interpretar)

El grupo G2 comenzó dando decisiones generales y el grupo G5 acciones basadas en contenidos curriculares, tras el cambio en su manera de interpretar ambos grupos dieron acciones basadas en contenidos curriculares. Por ejemplo, los estudiantes para profesor del G2 proponen como ejercicio para afianzar el aprendizaje de los estudiantes que habían interpretado como de nivel alto de comprensión (Luiggi y Pablo de la tarea de interpretar) el que aparece en la Figura 7. Este ejercicio se centra en una función con discontinuidad evitable justificada desde lo que establece el currículo.


Luiggi conoce la idea dinámica y métrica de límite, por tanto, para afianzar sus conocimientos le propondremos el siguiente problema:

Una función definida como $f(x) = \begin{cases} 2x & si\ x>2 \\ 5 & si\ x=2 \\ 2x & si\ x<2 \end{cases}$

También usaremos el problema propuesto para Pablo

Figura 7. Respuesta del G2 a la cuestión "considerando la comprensión de límite de una función de un punto de Pablo, diseña una tarea para mejorar esta comprensión" (tarea de interpretar)

Finalmente, la tercera característica del desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente viene evidenciada por la progresión de los estudiantes para profesor (G1, G4) que identificaron los elementos matemáticos importantes y los relacionaron con los diferentes niveles en la comprensión de los estudiantes de bachillerato tanto en la tarea de anticipación como en la de interpretación de las respuestas de los estudiantes. Aunque los estudiantes para profesor del grupo G1 iniciaron su participación en el entorno de aprendizaje proponiendo acciones basadas en contenidos curriculares y los estudiantes para profesor del G4 acciones basadas en procesos cognitivos, al finalizar su participación en el entorno de aprendizaje ambos grupos justificaron sus acciones de enseñanza basadas en procesos cognitivos que implicaban ejercicios en los que los estudiantes usaran los significados del limite para generar información sobre la función.

CONCLUSIONES

Este estudio tiene como objetivo caracterizar cómo estudiantes para profesor desarrollan una mirada profesional en relación a la enseñanza-aprendizaje del límite de una función en un punto. Caracterizamos este desarrollo considerando tres tipos de actividades profesionales. En primer lugar, cómo los estudiantes para profesor concebían el aprendizaje del concepto de límite a partir de la realización de *tareas de anticipar* respuestas de estudiantes a problemas de límite de función que evidenciaran diferentes niveles de comprensión. En segundo lugar *cómo interpretaban* respuestas de estudiantes de bachillerato para inferir niveles de progresión en el aprendizaje. Finalmente, cómo generaban y justificaban sus decisiones de enseñanza considerando sus interpretaciones de la comprensión de los estudiantes.

El desarrollo de la mirada profesional se vinculó a dos conexiones. En primer lugar, la relación entre el reconocimiento de los elementos matemáticos que deben ser usados por los estudiantes para evidenciar un nivel alto de comprensión del concepto de limite y la manera en la que se concibe la comprensión de los estudiantes de bachillerato. En segundo lugar, la relación entre la manera en la que se concibe la comprensión y cómo se justifican las decisiones de enseñanza que se proponen.

La manera en la que algunos de los grupos de estudiantes para profesor fueron incorporando los elementos matemáticos que son relevantes en la comprensión del concepto, la consideración de diferentes progresiones en el aprendizaje y la justificación de sus decisiones apoyadas en potenciar los procesos cognitivos en las tareas de anticipar, interpretar y cómo decidir, mostró evidencias del aprendizaje profesional de los estudiantes para profesor y por tanto diferentes niveles de desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes. Teniendo en cuenta cómo se estructuró el entorno de aprendizaje, estos resultados parecen indicar que dicha estructura ayudó a los estudiantes para profesor al desarrollo de las tres destrezas que conceptualizan esta competencia pues cuatro grupos de los cinco fueron capaces de identificar los elementos matemáticos importantes en las respuestas de los estudiantes, interpretar la comprensión de los estudiantes identificando diferentes niveles de comprensión y tomar decisiones de acción que podían ayudar a los estudiantes a progresar conceptualmente.

Este resultado subraya el desafío al que se enfrentan los formadores de profesores de matemáticas al tener que crear entornos de aprendizaje en los programas de formación que permitan el desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente ya que se deben superarse concepciones sobre el aprendizaje del tipo todo o nada y poder incorporar el conocimiento sobre el aprendizaje de las matemáticas en la justificación de sus decisiones de enseñanza. Además, los resultados de esta investigación aportan información para generar descriptores del desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas

Reconocimientos.

Esta investigación ha recibido el apoyo del Proyecto EDU2014-54526-R del Ministerio de Economía y Competitividad, España y del proyecto para grupos de investigación emergentes GV/2015/115 de la Conselleria de Educación, Cultura y Deporte de la Generalitat Valenciana.

Referencias

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407.

Bartell, T. G., Webel, C., Bowen, B. y Dyson, N. (2013). Prospective teacher learning: recognizing evidence of conceptual understanding. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*, 57-79.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO, 30,* pp. 67–83.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp.153-166). Dordrecht: Kluwer.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior, 15,* 167-192.

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through on-line discussions. *ZDM. Mathematics Education, 44,* 747-759.

Jacobs, V.R., Lamb, L.C. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Juter, K. (2006). Limits of functions as they developed through time and as students learn them today. *Mathematical Thinking and Learning, 8,* 407-431.

Magiera, M., van den Kieboom, L. y Moyer, J. (2013). An exploratory study of preservice middle school teachers' knowledge of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics, 84,* 93-113.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. London: Routledge-Falmer.

Pons, J. (2014). *Análisis de la comprensión en estudiantes de bachillerato del concepto de límite de una función en un punto*. Tesis Doctoral. Universidad de Alicante.

Pons, J., Valls, J. y Llinares, S. (2012). La comprensión de la aproximación a un número en el acceso al significado de límite de una función en un punto. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F.J. García y L. Ordóñez (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 435–445). Jaén: SEIEM.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. y Llinares, S. (2015). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of derivative concept. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*, 1305-1329.

Schack, E., Fisher, M., Thomas, J., Eisenhardt, S., Tassell, J. y Yoder, M. (2013). Prospective elementary school teachers' professional noticing of children's early numeracy. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16,* 379-397.

Son, J. (2013). How preservice teachers interpret and respond to student errors: ratio and proportion in similar rectangles. *Educational Studies in Mathematics, 84,* 49-70.

Spitzer, S., Phelps, C., Beyers, J., Johnson, D. y Sieminski, E. (2011). Developing prospective elementary teachers' abilities to identity evidence of student mathematical achievement. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*, 67-87.

Swinyard, C. y Larsen, S. (2012). Coming to understand the formal definition of limit: Insights gained from engaging students in reinvention. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(4), 465-493.

Williams, S. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*, 219-236.

ANÁLISIS DEL APROVECHAMIENTO DE OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE GENERADAS EN LA DISCUSIÓN EN GRAN GRUPO DE UN PROBLEMA DE TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS[x]

Analysis of the exploitation of mathematical learning opportunities created in the classroom discussion of a geometric transformation problem

García-Honrado, I.[a], Fortuny, J. M.[b], Ferrer M.[b], Morera, L.[b]

[a]Universidad de Oviedo, [b]Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

Esta comunicación trata sobre el aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje matemático generadas en una discusión en gran grupo de un problema de transformaciones geométricas en el que se utiliza GeoGebra para su resolución. Para ello se toman datos de cómo los alumnos de un grupo de 3º de la E.S.O. abordan el problema en un aula en dos momentos: antes de la discusión y tras la discusión. Esto permite observar la trayectoria de aprendizaje realizado. Se ejemplifica el estudio con una alumna. En el análisis se utilizan técnicas de lógica borrosa gracias a las cuales se definen distintos niveles de conocimiento procedimental que muestra la alumna en los dos momentos. A través de un sistema de reglas borrosas se obtienen distintos grados de aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje que se logran expresar a través de un párrafo.

Palabras clave*: oportunidad de aprendizaje matemático, aprovechamiento de una oportunidad de aprendizaje, lógica borrosa, descripción lingüística de un fenómeno, geometría.*

Abstract

This communication deals with the effectiveness of mathematical learning opportunities generated in a whole group discussion of a problem of geometric transformations in whose resolution GeoGebra is used. Data of the attempts to solve the problem before and after the whole group discussion are obtained in a classroom of 9th graders. This allows us to observe the learning trajectory of a concrete student. Fuzzy logic techniques are used to obtain the levels of procedure knowledge a student rises before and after the discussion. Through systems of fuzzy rules, the degrees of exploitation of learning opportunities are achieved and these results are expressed in a paragraph written in natural language.

Keywords: *mathematical learning opportunity, taking-up of a learning opportunity, fuzzy logic, linguistic description of a phenomenon, geometry.*

INTRODUCCIÓN

Esta comunicación versa sobre cómo los estudiantes son capaces de aprovechar oportunidades de aprendizaje matemático generadas en una discusión en gran grupo. En concreto, el estudio se realiza para una discusión en gran grupo con estudiantes de 3º de la E.S.O. resolviendo un problema de trasformaciones geométricas: giro y homotecia. Tras la identificación de las oportunidades de aprendizaje, se propone un modelo basado en la lógica borrosa para asignar ciertos valores de aprovechamiento de estas oportunidades de aprendizaje en un estudiante. Así se produce un texto escrito en lenguaje natural en el que se refleja la explicación de dichos valores.

García-Honrado, I., Fortuny, J.M., Ferrer, M., y Morera, L. (2016). Análisis del aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje generadas en la discusión en gran grupo de un problema de transformaciones geométricas. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 403-413). Málaga: SEIEM.

MARCO TEÓRICO

Para este trabajo nos movemos entre dos marcos teóricos: el de la generación y aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje; y el de la descripción de los modelos borrosos que nos permiten plasmar resultados acerca del aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje.

Sobre las oportunidades de aprendizaje: identificación y aprovechamiento

Actualmente existe mucha literatura sobre el tema de las oportunidades de aprendizaje matemático. Mayoritariamente las investigaciones se centran en la identificación, clasificación y efectividad de las mismas. En la presente comunicación utilizamos identificaciones y clasificaciones previas y nos centramos en elaborar un estudio en profundidad sobre el efecto que las oportunidades de aprendizaje provocan en los alumnos y cómo son capaces de aprovecharlas, lo que se relaciona con su efectividad.

Se parte de la concepción social del aprendizaje de Palincsar (1998), considerando que el aprendizaje surge durante las interacciones que se producen entre distintos miembros de la comunidad de aprendizaje: alumnos y profesor. Por este motivo, llevamos a cabo el estudio en la conversación instructiva llevada a cabo en la discusión en gran grupo, relacionando su efectividad con la generación y aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje matemático. Apoyamos su efectividad con el instrumento *Instructional Quality Assessment* (Boston, 2012), el cual está compuesto de diez rúbricas divididas en dos bloques: rigor académico y desarrollo de la discusión. Este instrumento nos permite conocer la calidad de las discusiones en gran grupo, la cual está estrechamente relacionada con las oportunidades de aprendizaje matemático que se generan y su aprovechamiento por parte de los alumnos. Esto es debido a que cinco de las diez rúbricas (dos en el bloque del rigor académico y tres en el bloque de desarrollo de la discusión) están ligadas con el papel del alumno. Las rúbricas en cuestión son las siguientes: Discusión entre estudiantes, Huella matemática, Participación entre los estudiantes, Conexiones entre los estudiantes y Respuestas de los estudiantes.

Para identificar las distintas oportunidades de aprendizaje matemático surgidas en la discusión en gran grupo (Ferrer, Fortuny, Planas y Boukafri, 2014), se propone dividir la discusión en episodios atendiendo a las dimensiones *discursiva*, relacionada con la interacción a lo largo de la discusión, e *instrumental*, relacionada con el uso de los distintos artefactos. A partir de estos episodios y de las distintas situaciones de interacción que transcurren en el aula, identificamos las oportunidades de aprendizaje matemático.

Con relación a las oportunidades de aprendizaje, Brewer y Stasz (1996) distinguen tres elementos: contenidos curriculares, recursos procedimentales y recursos instructivos. Los dos primeros relacionan contenidos y conocimientos, por lo que pueden etiquetarse como conceptuales y procedimentales. Entendemos los recursos instructivos como acciones que facilitan el aprendizaje de los alumnos y les permiten llegar a un nivel avanzado de adquisición (Ferrer, Fortuny y Morera, 2014). Por este motivo, etiquetamos este último elemento como argumentativo. Abedi y Herman (2010) afirman que existe una relación entre las oportunidades de aprendizaje generadas en el aula y el rendimiento de los estudiantes, aunque en este estudio cuantitativo los autores no formalizan cuando una determinada oportunidad de aprendizaje ha sido verdaderamente aprovechada por un estudiante.

En la presente comunicación llevamos a cabo un estudio cualitativo basado en el aprovechamiento que logra un alumno de algunas oportunidades de aprendizaje generadas en clase de matemáticas. En concreto, entendemos el aprovechamiento como la modificación del conocimiento matemático, bien sea conceptual o procedimental, que se evidencia tanto en las interacciones producidas durante la discusión en gran grupo como en los protocolos escritos del alumno (Ferrer, Doorman y Fortuny, 2015). Entendiendo las trayectorias de aprendizaje como descripciones del pensamiento de los alumnos seguido a través de rutas en la resolución de tareas matemáticas diseñadas para desarrollar sus niveles de pensamiento (Clements y Sarama, 2004), logramos determinar la trayectoria de aprendizaje concreta que sigue el alumno en la resolución de un problema matemático.

Sobre los modelos de lógica borrosa: representación de predicados y GLMP

La lógica borrosa o, en inglés, *fuzzy logic* es aquella que permite tratar formalmente conceptos imprecisos. Sus entidades básicas son los conjuntos borrosos (Zadeh, 1975), que pueden ser entendidos como representaciones de predicados graduales (García-Honrado y Trillas, 2011). Por ejemplo, si consideramos el predicado 'alto' definido como logro de un objetivo de aprendizaje, la lógica clásica, que trata con conjuntos binarios, solo permite determinar si el aprendizaje de un alumno es alto o no; mientras que la lógica borrosa asigna para cada alumno grados de cumplimiento del predicado en el intervalo continuo [0,1]: 0 si no lo cumple y 1 si lo cumple totalmente. Así se define una función que recrea el significado del predicado 'alto' en un nivel de aprendizaje, como se muestra en la Figura 1.

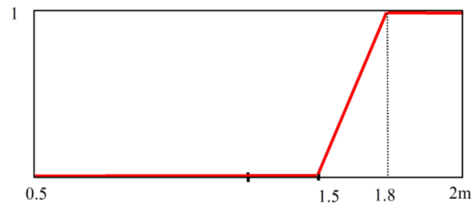


Figura 1: Conjunto borroso representando el predicado 'alto'

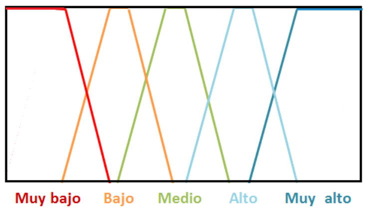


Figura 2: Conjuntos borrosos modelando las etiquetas lingüísticas

En oposición a conjuntos borrosos continuos como el de la Figura 1, que es una función continua definida sobre un intervalo [0.5,2], puede darse el caso de que el espacio sobre el que se defina el conjunto borroso sea discreto. Entonces se asignará un valor entre 0 y 1 a cada elemento de ese espacio, y llamaremos a esos conjuntos borrosos, discretos.

Zadeh también introdujo el concepto de variable lingüística, entendida como aquella que puede tomar valores lingüísticos como Muy bajo / Bajo / Medio / Alto / Muy alto. Cada uno de ellos se representa por un conjunto borroso continuo trapezoidal, debido a su simplicidad en la función (lineal definida por trozos) y a la posibilidad de ser definida por sus vértices. Al conjunto de los conjuntos borrosos que representa los valores que puede tomar la variable se le llama partición borrosa (Figura 2).

Combinando los problemas de control borroso con el actual auge de la conocida computación con palabras (Zadeh, 1996), surge el paradigma *Granular Linguistic Model of a Phenomenon* (GLMP) (Triviño y Sugeno, 2013), el cual consiste en hacer resúmenes lingüísticos de fenómenos complejos como puede ser el aprovechamiento de una oportunidad de aprendizaje. De hecho, en la literatura se pueden encontrar aplicaciones de este paradigma en la evaluación del aprendizaje de los alumnos (Sanchez-Torrubia, Torres-Blanc y Triviño, 2014).

METODOLOGÍA

En esta investigación se toman datos de una discusión en gran grupo en torno a un problema de trasformaciones geométricas en el que se utiliza GeoGebra para su resolución. Una vez conocidas las oportunidades de aprendizaje que se generan, a través del estudio de la discusión, analizamos los grados de aprovechamiento que presenta una alumna. Para ello distinguimos tres fases de desarrollo de la actividad: la primera fase en la que los alumnos entran en contacto con el problema llevando a cabo una resolución por parejas; la segunda fase, que se corresponde con la propia discusión; y una tercera fase en la que los alumnos hacen una reflexión escrita e individual de forma concluyente. De la primera y de la última fase disponemos de los ficheros generados en GeoGebra, con las notas aclaratorias hechas por los alumnos. En cuanto a la segunda fase, realizamos una trascripción de la discusión en gran grupo.

En todas las fases se aplica una rúbrica construida ex profeso para comprobar el aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje matemático que se generaron. Se analiza el hecho de identificar las transformaciones y averiguar los elementos que las caracterizan. Se hace una graduación de los niveles en los que se hagan estas identificaciones y averiguaciones:

- B = Bajo = lo menciona.
- M = Medio = hace una explicación sin reflexión.
- A = Alto = hace una explicación propia basada en pruebas empíricas o deducción formal.

Se asignan conjuntos borrosos discretos que explican el grado de nivel alcanzado en cada una de las fases, y a través de un sistema de reglas se define el aprovechamiento de las distintas oportunidades de aprendizaje a partir de los valores de la rúbrica.

Selección del problema matemático

Para propiciar que una discusión en gran grupo sea rica, se plantea la resolución de un problema que suponga un reto para los estudiantes y que permita que demuestren sus saberes aplicados a una situación nueva para ellos. El problema que se aborda en esta comunicación consiste en explicar qué transformaciones se necesitan para pasar de una figura a otra (Figura 3). Los alumnos han de conocer el giro y la homotecia y deben identificar en el dibujo los elementos que definen ambas transformaciones.

¿Cómo transformarías el polígono 1 de la izquierda para conseguir el 2 de la derecha? Explica con detalle tu respuesta.

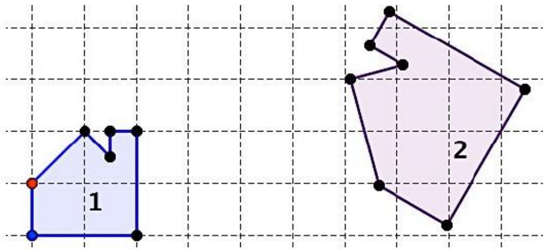


Figura 3. Enunciado del problema objeto de estudio

Contexto de la investigación

Los datos se tomaron en una clase de 3º de la E.S.O. durante el curso 2013-2014. La profesora que guió la clase presentaba una experiencia docente media y su centro educativo estaba ubicado en un entorno sociocultural medio-alto.

Los alumnos abordaron el problema con GeoGebra, una herramienta de geometría dinámica con la que estaban familiarizados. Para su resolución es imprescindible el uso de una homotecia y de un giro, no importando el orden en el que se realicen estas dos trasformaciones.

Las intervenciones de todos los participantes en la discusión en gran grupo se registraron en video y se transcribieron posteriormente para su análisis. Al finalizar la discusión se recogieron los ficheros de GeoGebra elaborados por los alumnos, tanto en el trabajo por parejas como individualmente después de la discusión en gran grupo. Dividimos la transcripción de la discusión en episodios atendiendo a las dimensiones discursiva e instrumental de la discusión. Utilizamos esta codificación de episodios para ejemplificar oportunidades de aprendizaje matemático, relacionando contenidos del conocimiento matemático, tanto procedimentales como conceptuales, con conjuntos de acciones instrumentales y discursivas producto de los procesos de interacción creados durante las clases de matemáticas (Ferrer, 2016).

IDENTIFICACIÓN DE LAS OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE

Tras la fragmentación por episodios de la discusión en gran grupo se detectaron oportunidades de aprendizaje. Estas oportunidades surgieron mayoritariamente de la interacción entre la profesora y los alumnos, fundamentalmente de las preguntas que ella realizó. En el siguiente fragmento:

Profesora: ¿Cómo me podéis demostrar que no se puede? ¿Qué argumento tenéis para convencerme de que no hace falta que busque porque no podré ir con una única transformación?

Alba: Con solo una homotecia no puede ser porque los puntos homólogos no coinciden.

Profesora: No se cortan todos en un punto. De acuerdo, esto sería un argumento.

Alba: Y como que la casa es más grande, no habría ninguna otra transformación que la hiciese más grande que no fuese la homotecia, entonces tendríamos que hacer dos como mínimo.

Se observa la oportunidad de aprendizaje argumentativa que caracterizamos matemáticamente por 'Darse cuenta que la resolución de un problema matemático puede requerir argumentos sobre la composición de dos transformaciones geométricas: homotecia y giro'. Del mismo modo se recoge otra oportunidad de aprendizaje argumentativa, caracterizada por 'Identificar la importancia de los argumentos obtenidos a través de la visualización para justificar la resolución de un problema geométrico'. Además, en el desarrollo de esta discusión también se observan oportunidades conceptuales como las siguientes:

- Identificar transformaciones geométricas con GeoGebra que resultan de componer un giro y una homotecia.
- Identificar distintos tipos de homotecia según el valor de la razón de semejanza.
- Reconocer la equivalencia entre ciertas transformaciones geométricas. En particular, entre un giro de 180º, una simetría central y una homotecia de razón -1.

Asimismo también queda recogida la oportunidad de aprendizaje procedimental consistente en utilizar GeoGebra para aumentar el área de una figura y realizar un giro.

ANÁLISIS DEL APROVECHAMIENTO DE LAS OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE

Estudiamos en profundidad el aprovechamiento que una alumna hace de las oportunidades de aprendizaje matemático creadas en la discusión en gran grupo, teniendo en cuenta que tanto las conceptuales como las procedimentales y las argumentativas giran en torno al concepto de giro y de homotecia. Utilizando una rúbrica construida para conocer el nivel de averiguación de los conceptos involucrados, se obtienen, en las tres fases de ejecución del estudio, valores sobre ese nivel. Los valores pueden ser: bajo, medio, alto, o valores intermedios.

Una vez conocido el nivel de averiguación de los dos conceptos: giro y homotecia, se compara el nivel entre la primera y la última fase a través de un sistema de reglas que nos proporciona el nivel de aprovechamiento de las oportunidades relacionadas con el giro y con la homotecia. Finalmente, a través de otro sistema de reglas podremos conocer el aprovechamiento general que cada alumno logró en la discusión en gran grupo.

Definición de la rúbrica

Una vez identificadas las oportunidades de aprendizaje las podemos dividir en dos bloques, uno relacionado con el giro y otro con la homotecia. Por lo que decidimos hacer una rúbrica que tuviera en cuenta las oportunidades de aprendizaje argumentativas, es decir, la necesidad de cada una de las trasformaciones y el nivel de argumentación que hicieron los alumnos para justificarlas. En concreto, distinguimos si solo las mencionó o hizo referencia a la proporcionalidad de sus lados y el mantenimiento de sus ángulos, en lo relativo a la homotecia, y a la igualdad de figuras y la modificación de la orientación, en lo relativo al giro.

Así mismo, recogemos las oportunidades de aprendizaje conceptuales y procedimentales teniendo en cuenta los elementos característicos de cada trasformación y su nivel de adquisición. En particular, distinguimos la elaboración de una tarea inmediata, como puede ser indicar cualquier centro de giro y luego realizar una translación; con la aplicación del conocimiento de que el centro de giro está a la misma distancia de un punto y su girado, y proceder a su identificación por medio de la construcción a través de la intersección de dos rectas mediatrices de segmentos que unen puntos homólogos de la figura original y la girada.

Proponemos una rúbrica que indique el nivel de adquisición, pudiendo un alumno mostrar aspectos de niveles distintos. Por ejemplo, aspectos de bajo y medio si menciona la necesidad de una homotecia por el aumento de área; intenta una justificación por lo que adquiere un nivel más alto que si solo lo mencionase, pero esta justificación no es la que se pretende a un nivel medio, donde al menos tendría que hablar de la proporción de la figura, o un nivel alto en el cual tendría que hacer referencia a sus lados y ángulos. Por lo tanto, en la rúbrica, para cada ítem de evaluación en lugar de indicar cruces en el nivel que alcanza indicaremos el grado con el que alcanza cada nivel. Ese grado será un número del intervalo [0,1] y la suma de los grados de cada ítem ha de ser 1.

Con relación al giro valoramos tres ítems: la averiguación de la necesidad de realizar un giro, la del centro de giro y la del ángulo del giro. Análogamente, con relación a la homotecia valoramos: la averiguación de la necesidad de realizar una homotecia, la del centro de homotecia y la de la razón de homotecia.

Definición de los sistemas de reglas para el GLMP

El GLMP distingue percepciones de primer y de segundo nivel que desembocan en la percepción global. En nuestro modelo las percepciones de primer nivel son las que obtenemos a partir de la rúbrica en la primera y la tercera fase. Definimos las percepciones de segundo orden como el aprovechamiento en las oportunidades de aprendizaje relacionadas con cada trasformación, y calculamos cada una de ellas con un sistema de inferencia borrosa compuesto por un sistema de reglas. El sistema es análogo para el giro y la homotecia, en lo relativo al giro:

1. Si el alumno averiguó el giro a nivel bajo en la primera fase y a nivel alto en la tercera fase, entonces el aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje relacionadas con el giro ha sido alto.
2. Si el alumno averiguó el giro a nivel bajo (respectivamente, medio) en la primera fase y a nivel medio (respectivamente, alto) en la tercera fase, entonces el aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje relacionadas con el giro ha sido medio.
3. Si el alumno averiguó el giro a nivel alto en la primera fase, entonces el aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje relacionadas con el giro ha sido bajo.
4. Si el alumno averiguó el giro a nivel bajo en la tercera fase, entonces el aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje relacionadas con el giro ha sido bajo.

Finalmente, se agregan los dos niveles de aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje indicando el aprovechamiento general que se ha hecho. Este último paso se hace a través de otro sistema de inferencia borroso compuesto por las reglas:

1. Si el aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje relacionadas con el giro y la homotecia ha sido alto (respectivamente, medio/bajo), entonces el aprovechamiento general de las oportunidades de aprendizaje ha sido alto (respectivamente, medio/bajo).
2. Si el aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje relacionadas con el giro ha sido alto (respectivamente, bajo) y el de las relacionadas con la homotecia ha sido bajo (respectivamente, alto), entonces el aprovechamiento general de las oportunidades de aprendizaje ha sido medio.

3. Si el aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje relacionadas con el giro ha sido medio (respectivamente, alto) y el de las relacionadas con la homotecia ha sido alto (respectivamente, medio), entonces el aprovechamiento general de las oportunidades de aprendizaje ha sido alto.

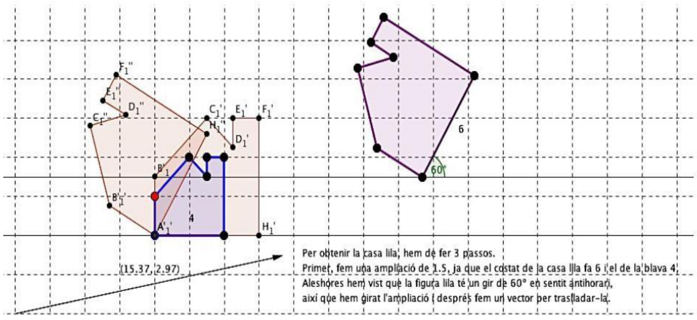
Con estos sistemas de reglas podemos elaborar un párrafo que resuma el nivel de aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje de un alumno. Además, si fuese necesario, podríamos obtener un valor numérico resumen del aprovechamiento global mediante el cálculo del centro de gravedad del mismo, como detallaremos más adelante.

ANÁLISIS DEL APROVECHAMIENTO DE UNA ALUMNA

Elegimos el caso de una alumna, Alba. Hacemos el análisis a través de sus ejecuciones en GeoGebra antes y después de la discusión en gran grupo y de su participación durante la discusión. Así mostramos la trayectoria de aprendizaje que Alba siguió en la resolución del problema.

Aplicación de la rúbrica y su evolución

Aplicamos la rúbrica construida a las tres fases. Respecto a la primera fase, Alba no menciona la necesidad de componer un giro y una homotecia y deja implícita su justificación. No obstante, posteriormente comenta la relación entre lados homólogos para justificar la razón de homotecia y justifica la obtención del ángulo de giro (Figura 4). Desde la primera fase, estos dos elementos, los justifica a un buen nivel que luego irá perfeccionando. Respecto al centro de giro y de homotecia, Alba no refleja un nivel avanzado en su identificación ya que los elige al azar.



[Para obtener la casa de la derecha hay que hacer 3 pasos. Primero, hacemos una ampliación de razón 1.5, ya que el lado de la casa violeta hace 6 y el de la azul 5. Entonces, hemos visto que la figura violeta tiene un giro de 60º en sentido antihorario, así que hemos girado la ampliación y después hacemos un vector para trasladarla.]

Figura 4. Resolución de Alba en la primera fase

En la segunda fase, durante la discusión (Figura 5), Alba argumenta que se necesitan al menos dos transformaciones haciendo hincapié en la necesidad de utilizar la homotecia. El hecho de hablar de "al menos dos" indica la posibilidad de eliminar la traslación. Además, introduce la posibilidad de añadir un deslizador en GeoGebra para calcular el valor del ángulo de giro consiguiendo una mayor profundidad en su conocimiento de las transformaciones.

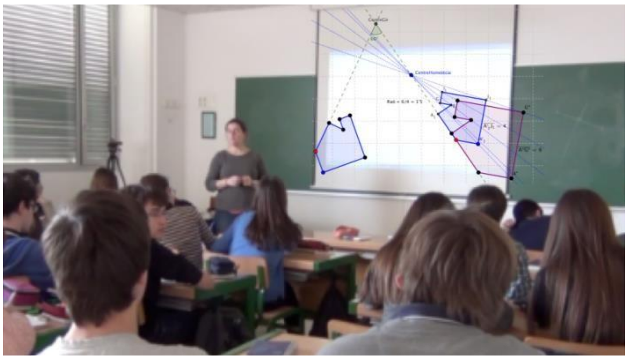


Figura 5: Discusión en gran grupo gestionada por la profesora (3º de la E.S.O.)

Profesora: Es que el 60 este… lo hemos visto muy claro, pero el 60 este… era cuando estaba aquí para llevarlo aquí abajo, pero ahora para llevarlo de aquí a aquí no tiene por qué ser 60.

Alba: Lo podemos hacer con un deslizador.

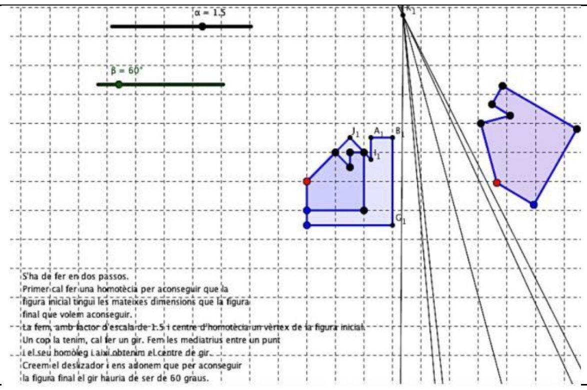
Profesora: ¿Cómo lo podríamos…? Bueno, con un deslizador lo podríamos hacer hasta que encaje. Pero, ¿qué tenemos aquí?

Alba: Podemos hacer una circunferencia porque podremos calcular el ángulo.

Profesora: A ver, primero de todo vamos a comprobarlo. Si yo hago una circunferencia por aquí que pase por aquí, ¿me pasa por dónde me tiene que pasar?

Todos: ¡Sí!

En lo que concierne a la tercera fase, la alumna muestra una mayor profundización en la obtención de los elementos característicos de cada trasformación. Define el centro de giro a través del cálculo de mediatrices de segmentos que unen puntos homólogos y utiliza deslizadores para justificar el ángulo de giro y la razón de homotecia. Estos elementos actúan como comprobadores de su primer razonamiento (Figura 6).



[Se tiene que hacer en dos pasos. Primero hay que hacer una homotecia para conseguir que la figura inicial tenga las mismas dimensiones que la figura final que queremos conseguir. La hacemos con factor de escala de 1.5 y centro de homotecia un vértice de la figura inicial. Una vez la tenemos, hay que hacer un giro. Hacemos las mediatrices entre un punto y su homólogo y así obtenemos el centro de giro. Creamos el deslizador y nos damos cuenta de que para conseguir la figura final el giro tendría que ser de 60 grados.]

Figura 6. Resolución de Alba en la tercera fase

Alba elimina de su construcción la traslación, indica el centro de homotecia, calcula el centro de giro razonadamente y hace uso de la herramienta de geometría dinámica para demostrar de forma empírica tanto el ángulo de giro como la razón de homotecia. Lo único a lo que no hace alusión en su protocolo escrito es a la necesidad de utilizar el giro.

Basándonos en este análisis conseguimos las puntuaciones recogidas en la Tabla 1. Para cada fase se puede representar un conjunto borroso discreto. En la primera fase se consigue una suma total de 3.2 de 6 posibles de nivel bajo (B), que denotaremos por 1; 1.5 de 6 de nivel medio (M), que denotaremos por 2; y 1.3 de 6 de nivel alto (A), que denotaremos por 3. Por lo tanto, lo expresamos como 0.53/nivel 1+0.25/nivel 2+0.22/nivel 3. Análogamente, obtenemos para la fase 2, 2.1/6 de B, 1.8/6 de M y 2.1/6 de A, o equivalentemente 0.35/1+0.3/2+0.35/3, y para la fase 3: 0.7/6 de B, 1.5/6 de M y 3.8/6 de A, o equivalentemente 0.11/1+0.25/2+0.64/3.

Tabla 12. Puntuaciones obtenidas en los tres niveles en las distintas fases

	Bajo			Medio			Alto		
Identifica …	Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 1	Fase 2	Fase 3
- Giro	0.7	0.7	0.7	0.3	0.3	0.3			
- Homotecia	0.5			0.5	0.5	0.2		0.5	0.8
- Centro de giro	1	0.7			0.3				1
- Centro de homotecia	1	0.7			0.3	1			
- Ángulo de giro				0.5	0.2		0.5	0.8	1
- Razón de homotecia				0.2	0.2		0.8	0.8	1

Para ver la evolución de Alba podemos representar los grados de adquisición en las distintas fases. Para ello calculamos el centro de gravedad de cada fase: 0.53*1+0.25*2+0.22*3=1.68 en lo relativo a la primera fase; y procediendo de igual modo, 2 en la segunda y 2.52 en la tercera. Así podemos representar gráficamente su evolución e ilustrar la trayectoria de aprendizaje que siguió Alba.

En concreto, observamos que Alba ha hecho un aprovechamiento creciente de la oportunidad de aprendizaje conceptual 'Identificar las transformaciones geométricas con GeoGebra que resultan de componer un giro con una homotecia', llegando a un nivel medio/alto (Figura 7).

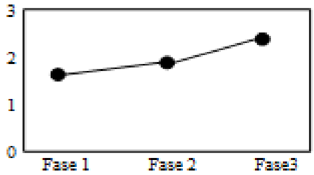


Figura 7: Evolución de Alba en las tres fases

Descripción lingüística del aprovechamiento

Con relación al giro, en la primera fase se consigue una suma total de 1.7 de 3 posibles de nivel bajo, 0.8 de 3 de nivel medio y 0.5 de 3 de nivel alto. Por lo tanto, lo expresamos como 0.56/1+0.26/2+0.16/3, con centro de gravedad 1.56. En la tercera fase, el centro de gravedad sería 2.43. Ambos centros de gravedad serán los inputs para el sistema de inferencia borroso de tipo Mamdani utilizando la t-norma del producto. Calculamos la salida con el programa FisPro (http://www7.inra.fr/mia/M/fispro/fispro2013_en.html) obteniendo un aprovechamiento: 2.65 con lo cual lo podemos considerar alto por su proximidad a 3 (Figura 8).

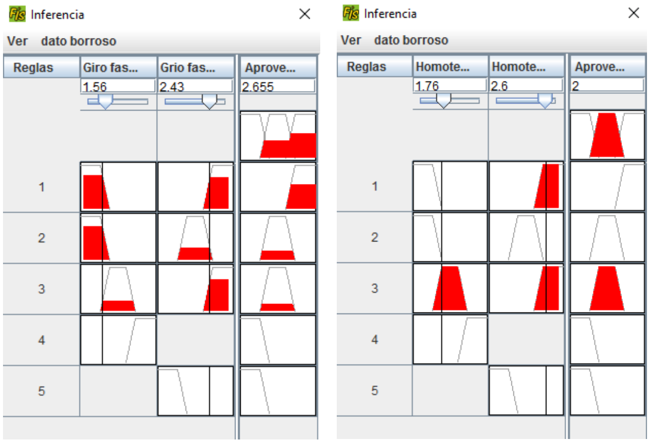


Figura 8: Salida del sistema para el aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje relacionadas con el giro y la homotecia, respectivamente

Para el cálculo del aprovechamiento total de las oportunidades de aprendizaje, hacemos el segundo modelo de inferencia utilizando como inputs las salidas anteriores y obtenemos un aprovechamiento global alto (3) de las oportunidades de aprendizaje. Por lo tanto, lingüísticamente se puede resumir el aprovechamiento de Alba con el siguiente párrafo:

La alumna Alba ha obtenido un nivel alto de aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje relacionadas con el Giro y un nivel medio de aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje relacionadas con la Homotecia. Por lo tanto, se considera que el aprovechamiento total ha sido alto.

CONCLUSIONES SOBRE EL APROVECHAMIENTO DE OPORTUNIDADES

La generación de oportunidades de aprendizaje es un requisito para crear discusiones en gran grupo de calidad, pero esta generación debe ir acompañada de cómo los estudiantes son capaces de aprovecharlas. En este trabajo hemos focalizado la atención en los alumnos y hemos presentado un estudio acerca del modo en que una alumna aprovecha las oportunidades de aprendizaje generadas en una discusión en gran grupo, de forma cuantitativa gracias al empleo de la lógica borrosa.

Hemos aplicado un modelo conocido como GLMP construido a través de técnicas de inferencia borrosa que nos permite, a través de una información, construir una descripción lingüística de nuestro objeto de estudio. La información la hemos obtenido a través de los ficheros de GeoGebra de una estudiante antes y después de la discusión; de su intervención en la discusión en gran grupo; y de una rúbrica definida para el aprovechamiento de unas concretas oportunidades de aprendizaje matemático surgidas en el aula. En futuros trabajos pueden seguir perfeccionándose estas técnicas borrosas en dos vertientes. La primera aplicando esta forma de proceder a nuevos modelos de valoración dentro del ámbito escolar. La segunda consistiría en perfeccionar los sistemas de reglas, estudiando su idoneidad y pudiéndose crear a partir de un aprendizaje basado en técnicas de *soft computing* utilizando una amplia base de datos.

Referencias

Abedi, J., y Herman, J. L. (2010). Assessing English language learners' opportunity to learn mathematics: Issues and limitations. *Teachers College Record*, *112*(3), 723-746.

Boston, M. D. (2012). Assessing the quality of mathematics instruction. *Elementary School Journal, 113*(1), 76-104.

Brewer, D. J., y Stasz, C. (1996). Enhancing opportunity to learn measures in NCES data. In G. Hoachlander, J. E. Griffith y J. H. Ralph (Eds.), *From data to information: new directions for the National Center for Education Statistics* (pp. 1-28). Washington, DC: US Department of Education.

Clements, D., y Samara, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 81-89.

Ferrer, M. (2016). *Estudio sobre la actuación docente y la interacción en la creación y aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje en el aula de matemáticas*. (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona. Bellaterra, España.

Ferrer, M., Doorman, M., y Fortuny, J. M. (2015). The classroom discussion and the exploitation of opportunities to learn mathematics. En K. Beswick, T. Muir, y J. Wells (Eds.), *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 289-296). Hobart, Australia: PME.

Ferrer, M., Fortuny, J. M., y Morera, L. (2014). Efectos de la actuación docente en la generación de oportunidades de aprendizaje matemático. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(3), 385-405.

Ferrer, M., Fortuny J. M., Planas N., y Boukafri K. (2014). Modos de actuación e interacción y generación de oportunidades de aprendizaje matemático. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 297-305). Salamanca, España: SEIEM.

García-Honrado, I., y Trillas, E. (2011). An essay on the linguistic roots of fuzzy sets. *Information Sciences*, *181*(19), 4061-4074.

Palincsar, A. S. (1998). Social constructivist perspectives on teaching and learning. *Annual Review of Psychology, 45*, 345-375.

Sanchez-Torrubia, M. G., Torres-Blanc, C., y Triviño, G. (2014). Modelo lingüístico del aprendizaje para la evaluación automática basada en criterios. En F. Bobillo, H. Bustince, F. J. Fernández, y E. Herrera-Viedma (Eds.), *Actas del XVII Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy* (pp. 417-422). Zaragoza, España: ESTYLF.

Triviño, G. y Sugeno, M. (2013). Towards linguistic descriptions of phenomena. *International Journal of Approximate Reasoning*, *54*(1), 22-34.

Zadeh, L. A. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning – III. *Information Sciences*, *9*(1), 43-80.

Zadeh, L. A. (1996). Fuzzy logic= computing with words. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on fuzzy systems*, *4*(2), 103-111.

Esta investigación se ha realizado al amparo del Proyecto EDU2015-65378-P, y de la beca FPI BES-2012-053575 (tercer autor), del Ministerio de Economía y Competitividad.

INTERACCIÓN ENTRE PARES: TERRENO DE APRENDIZAJE MATEMÁTICO Y DE ‘EMPATÍA MATEMÁTICA’

Peer Interaction: Arena of Mathematical Learning and ‘Mathematical Empathy’

Gómez-Lázaro, H. D., Rigo-Lemini M.

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, I. P. N., México.

Resumen

El trabajo versa sobre el intercambio de resoluciones a una tarea de comparación de razones que llevan a cabo parejas de estudiantes de tercer grado de secundaria. Siguiendo los principios de la teoría fundamentada y del análisis de los argumentos de Toulmin, en el documento se argumenta que para que una interacción sea provechosa son necesarios los conocimientos matemáticos así como una actitud de ‘empatía matemática’. Se sugieren también algunas ‘características notables’ para que una interacción sea cognitivamente útil y enriquecedora para la pareja, características que pueden ser interesantes referencias para futuras investigaciones y de utilidad para los docentes.

Palabras clave: *interacción entre pares, convencimiento, comparación de razones, empatía matemática.*

Abstract

The paper reports on exchanges amongst peers in 3rd year of secondary school, concerning their resolutions of a task on ratio comparison. Following the principles of Grounded Theory and Toulmin’s argument analysis, the paper argues that the mathematical knowledge and an attitude of 'mathematical empathy' are necessary if an interaction is to be fruitful. The paper moreover suggests some of the notable characteristics needed for an interaction to be cognitively useful and fruitful, characteristic that may be interesting references for future research and useful to teachers.

Keywords: *peer interactions, convincement, ratio comparison, mathematical empathy.*

ANTECEDENTES, PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN Y OBJETIVOS DEL TRABAJO

El trabajo que aquí se expone versa sobre el intercambio de resoluciones de una tarea de comparación de razones, que llevan a cabo parejas de estudiantes de 3er grado de secundaria, y se basa en el supuesto de que la interacción entre pares es propiciatoria de ciertos aprendizajes pero sólo bajo ciertas condiciones. Distintos investigadores sobre el tema (Goos, Galbraith & Renshaw, 2002; Smith, 2015; Stacey, 1992; Topping, 2005) han descrito los diversos factores que intervienen para que una interacción entre parejas de estudiantes resulte provechosa, aceptando que no siempre se presentan casos de éxito.

Sobre el aprendizaje que se da en el marco de la interacción entre pares, Smith (2015) revisa las diferentes modalidades que existen, complementando el trabajo desarrollado por Topping (2005). Ambos autores manejan diferentes tipos de interacción entre pares tales como la tutoría, asistencia, instrucción, agrupamiento, monitoreo o revisión. Estos trabajos cierran con una serie de sugerencias didácticas dirigidas a docentes o tutores, a quienes se les propone seguir reportando las dificultades encontradas, para que esto permita el re-diseño de nuevos cursos a docentes o el diseño y aplicación de nuevas estrategias. Goos, Galbraith & Renshaw (2002) también se centran en la investigación sobre la interacción entre pares y sobre la relación que guarda ésta con la zona de desarrollo

Gómez, H. D. y Rigo, M. (2016). Interacción entre pares: terreno de aprendizaje matemático y de ‘empatía matemática’. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), Investigación en Educación Matemática XX (pp. 414-423). Málaga: SEIEM.

próximo descrita por Vigotsky. Ellos puntualizan cómo es que las interacciones entre alumnos no siempre son productivas, aduciendo que las interacciones llegan a producir conflictos y que sus alcances llegan a ser limitados. Con base en evidencias empíricas de casos de interacción entre pares que resultan ser obstáculos para sus aprendizajes, y en el mismo tenor que los anteriores autores, Stacey (1992) asevera que “dos cabezas no siempre son mejores que una”.

Con el objetivo de profundizar en el tema se busca responder a la pregunta sobre ¿Cuáles son las características notables de las interacciones entre pares, que las hacen cognitivamente provechosas?; en el trabajo se argumenta que para que una interacción sea provechosa no sólo se necesita poner en la mesa de discusión conceptos y elementos de la matemática, sino también y de manera muy importante, lo que en este documento se denomina ‘empatía matemática’, la cual está relacionada, entre otras cosas, con la posibilidad que tienen los participantes de apuntar hacia los sustentos (garantías y respaldos) de los argumentos a rebatir para conseguir el convencimiento del interlocutor. En la comunicación también se argumenta que una interacción puede promover el aprendizaje de conocimientos matemáticos y de actitudes de ‘empatía matemática’ sólo bajo la guía de tutores sensibilizados al respecto y cuando la interacción entre pares cumple con lo que aquí se llaman ‘características notables’. Para sustentar de manera rigurosa lo que aquí se arguye, se introduce un análisis de caso realizado con las herramientas propuestas por Toulmin, a partir de las cuales se definen conceptos teóricos siguiendo los principios de la teoría fundamentada.

MARCO TEÓRICO

Sobre comparación de razones. En el trabajo de Gómez y García (2014) y en el de Gómez, Monje, Pérez-Tyteca y Rigo (2013) se sugieren variables que determinan las estrategias de resolución de tareas de comparación de razones, entre ellas están las de contexto, que los autores le llaman variable de los referentes. Por otra parte, se lleva a cabo un proceso de homogeneización de las normalizaciones cuando, considerando los datos y cuidando el factor de escala o la equivalencia, se cambia la forma en que originalmente se presentan las razones –e.g., en forma de porcentaje, fracción o número decimal- para poder hacerlas comparables (Cf. Fernández Lajusticia, 2009). Lamon (1999) por su parte, considera que para el razonamiento proporcional es fundamental una perspectiva relativa, en la que se incluyen relaciones multiplicativas, a diferencia de las perspectivas absolutas, en la que están involucradas solamente las estructuras aditivas.

Análisis funcional de los argumentos propuestos por Toulmin. En el ámbito de la investigación educativa que emplea el modelo de Toulmin (Pinochet, 2015), se afirma que un argumento se refiere a los discursos que un estudiante produce cuando trata de justificar sus conclusiones o explicaciones. Toulmin (2003) establece que se puede diferenciar la *afirmación* (C, por *claim*) cuyo valor se trata de establecer y los elementos justificatorios que se alegan como base de la afirmación, a los que denomina *datos* (D). Al presentar un conjunto determinado de datos como base para una afirmación estos pueden ser cuestionados. Para sostener la postura, aparecen proposiciones de diferente tipo: reglas, principios enunciados, etc., que permiten realizar inferencias en lugar de agregar información adicional; éstas son las *garantías* (W, por *warrant*). La garantía es incidental, explicativa y general; mientras que a los datos se apela explícitamente, a las garantías se apela implícitamente. Detrás de las garantías puede haber otras certezas que las impregnan de autoridad y de vigencia: el *respaldo* de las garantías (B, por *backing*). El tipo de respaldo alegado por las garantías varía de un campo de argumentación a otro y se puede presentar más de un tipo de respaldo por garantía. Éstos pueden expresarse en forma de enunciados categóricos y no siempre son explícitos. Por otra parte, los cualificadores modales (Q por *qualifier*) son elementos del modelo de Toulmin que indican el grado de fuerza con el que se sostiene la garantía. Para desarrollar el análisis de datos utilizando este método propuesto por Toulmin, en el presente trabajo se consideraron como afirmaciones a las respuestas que defendieron los estudiantes; como datos, los procedimientos o sustentos con los que los alumnos respaldaron la respuesta que defendieron; como garantías a las claves que representan el tipo de resolución que se llevó a cabo (Ver: *Sub-categorías asociadas a la resolución de la tarea)*; como respaldos a aquellas ideas o consideraciones matemáticas o extra-matemáticas sobre las que se construyó el tipo de resolución; y como cualificadores modales a los estados internos de convencimiento (que en lo que sigue se definen como ‘estados epistémicos de convencimiento’), los que se identifican con base en los criterios que aparecen en la Tabla 1.

Sobre los estados epistémicos. Como parte importante del análisis que se desarrolla aquí, se utiliza la propuesta de Martínez y Rigo (2014) para el análisis de estados internos como el convencimiento, la convicción, la certeza, la presunción o la duda en torno a hechos de las matemáticas. A esos estados internos les denominan ‘estados epistémicos’, e indican que, asociadas a sus aseveraciones de contenido matemático, los sujetos pueden experimentar estados internos de certeza (cuando le asocian el máximo grado de probabilidad a lo creído) o de presunción o duda (cuando le asocian grados menores de probabilidad a lo creído). En suma, proponen un instrumento para distinguir estados epistémicos en que consideran que se vivencia un grado de certeza, de presunción o duda, cuando se dan muestras de cubrir, en algún grado, los criterios que describen: Mitigadores o Enfatizadores del Lenguaje, Acción, Determinación, Interés o Consistencia. En la tabla 1 aparece el instrumento completamente desglosado.

Tabla 13. Instrumento para distinguir estados epistémicos de certeza y presunción o duda

Elementos del habla	La persona recurre a enfatizadores del lenguaje que pueden revelar un mayor grado de compromiso con la verdad de lo que dice, por ejemplo, cuando la persona usa el modo indicativo de los verbos (e.g., tengo). Cuando recurre a mitigadores del lenguaje el grado de compromiso es menor (e.g., convendría)
Acción	El sujeto realiza acciones consecuentes con su discurso.
Determinación	La persona manifiesta de manera espontánea y determinada su adhesión a la veracidad de un enunciado matemático indicando algún grado de determinación. Este grado puede ser mayor cuando el sujeto sostiene una creencia, a pesar de tener al colectivo en su contra. Incluso puede llegar a esforzarse por convencer a otros de la verdad de su posición.
Interés	Las participaciones de una persona que interviene con interés en torno a un hecho matemático específico durante un proceso de argumentación son:
	-Sistemáticas. Es decir, el sujeto contesta todas las preguntas dirigidas a él de la manera más detallada posible.
	-Informativas. Sus afirmaciones, procedimientos y/o resultados son suficientemente informativos.
	-Claras y precisas.
Consistencia	La persona muestra consistencia en sus distintas intervenciones.

INSTRUMENTOS Y MÉTODOS DE RECUPERACIÓN DE INFORMACIÓN EMPÍRICA

La investigación está inspirada en los principios de la teoría fundamentada (*Grounded Theory*) (Corbin & Strauss, 2015). Fieles a esos principios, la elaboración y el desarrollo de conceptos se ha hecho con base en los datos empíricos recabados en la investigación, mediante comparaciones constantes entre dichos datos, y aplicando continuamente un proceso iterativo de triangulación entre los conceptos de los investigadores, los datos empíricos y los términos teóricos tomados de la bibliografía.

La investigación consta de tres fases. En la primera se aplicó un cuestionario; del análisis de resultados se desprendió un conjunto de categorías de resolución. En la segunda fase se llevaron a cabo interacciones en las que parejas de estudiantes intercambiaron las resoluciones de la tarea que individualmente expusieron en el primer cuestionario. En la tercera fase los alumnos resolvieron de manera personal un cuestionario semejante al inicial.

Primera Fase: Cuestionario y Sujetos

Figura 1. La tarea de comparación de razones

Se aplicó a cada estudiante un cuestionario inicial que incluye una tarea de comparación de razones (con reajustes de la propuesta en Gómez, Monje, Pérez-Tyteca y Rigo 2013) (ver figura 1). Se pregunta ¿Cuál de las ofertas es la que más conviene? Como se puede observar, cada oferta se presenta con una normalización diferente, además de que la primera se diferencia de las otras dos por el referente del número de videojuegos que se ofertan en conjunto y por el referente del ordinal del videojuego sobre el que recae la oferta. Una resolución correcta conlleva un proceso de relativización para homogeneizar normalizaciones y referentes. Este instrumento se aplicó a los estudiantes de dos grupos de tercero de secundaria (de edades entre 14 y 15 años) de dos escuelas técnicas con un buen nivel de desempeño general (una que está dentro del 10% de las mejores de la Ciudad de México y otra dentro del 25%), con el objeto de que se tuvieran respuestas correctas y alumnos con capacidad de argumentar y contra-argumentar; el tercero de secundaria se eligió porque de acuerdo con el currículum, los alumnos ya cuentan con al menos 5 años de experiencia trabajando en temas de proporcionalidad.

Sub-categorías asociadas a la resolución de la tarea

En la primera fase del estudio se identificaron sub-categorías que hacen referencia a las estrategias más frecuentemente empleadas por los alumnos al resolver la tarea. Las sub-categorías identificadas son: *Compara ofertas* (CO): implica que en la resolución se lleva a cabo una comparación relativa entre las ofertas (R_O si se lleva a cabo; A_O si no se realiza). *Manipula componentes* (MC): implica la manipulación multiplicativa de los componentes internos de la tarea (e.g., que proponga costo por juego y luego trate de escalar el número de juegos para comparar) (R_C si manipula; A_C no lo hace). *Referente juegos en conjunto* (RJC): Hace referencia al número de juegos en conjunto por oferta ($-Rf_J$ significa que muestra dificultades al descomponer el número de juegos que se ofertan y utiliza un referente inadecuado para comparar, e.g., escala a 3 o 4 juegos; Rf_J indica que no se dejan ver dificultades). *Referente del ordinal al que se le aplica el descuento* (ROD): Hace referencia al número ordinal del juego sobre el que recae la oferta ($-Rf_O$ aparece cuando la resolución denota dificultades con la posición numérica del objeto sobre el que recae la oferta, e.g. indica que un juego extra a los ofertados conservaría el descuento; Rf_O indica que no se revelan dificultades). OC alude a *otras consideraciones*, ya sea que se haya utilizado la estrategia building up, que se hayan identificado algunos problemas ajenos a la razón y proporción o que no se hayan identificado dificultades de ningún tipo.

Tabla 2. Claves de categorización de las resoluciones de la tarea

CO	MC	RJC	ROD	OC	Clave
R_O	R_C	Rf_J	Rf_O	S/Problemas	R7
R_O	R_C	Rf_J	Rf_O	Valor unitario	$R6^{VU}$
R_O	R_C	Rf_J	Rf_O	Building up	$R6^{Bu}$
R_O	R_C	Rf_J	Rf_O	C/Problemas	R6
R_O	R_C	$-Rf_J$	Rf_O		$R5_O$
R_O	R_C	$-Rf_J$	Rf_O	Building up	$R5_O^{Bu}$
R_O	R_C	Rf_J	$-Rf_O$		$R5_J$
R_O	R_C	Rf_J	$-Rf_O$	Building up	$R5_J^{Bu}$
R_O	R_C	$-Rf_J$	$-Rf_O$		R4
R_O	R_C	$-Rf_J$	$-Rf_O$	Building up	$R4^{Bu}$
A_O	R_C	Rf_J	Rf_O		R3
A_O	R_C	$-Rf_J$	Rf_O		$R2_O$
A_O	R_C	Rf_J	$-Rf_O$		$R2_J$
A_O	R_C	$-Rf_J$	$-Rf_O$		R1
R_O	A_C	Rf_J	Rf_O		A6
R_O	A_C	$-Rf_J$	Rf_O		$A5_O$
R_O	A_C	Rf_J	$-Rf_O$		$A5_J$
R_O	A_C	$-Rf_J$	$-Rf_O$		A4
A_O	A_C	Rf_J	Rf_O		A3
A_O	A_C	$-Rf_J$	Rf_O		$A2_O$
A_O	A_C	Rf_J	$-Rf_O$		$A2_J$
A_O	A_C	$-Rf_J$	$-Rf_O$		A1

El tipo de resolución como categoría se utilizó como criterio para evaluar la comprensión que los estudiantes mostraron en cada una de las fases de la investigación sobre el tema de comparación de razones, asociado como garantía del argumento que se expuso. En la tabla 2 se muestra como se obtienen las claves de categorización de las resoluciones de la tarea con la combinación de todos los casos posibles y aparecen sombreadas las caracterizaciones de los tipos de resolución a las que recurrieron los alumnos cuyas interacciones aquí se analizan.

Segunda Fase: Interacciones, método y sujetos

En esta fase se determinó trabajar con la segunda escuela antes mencionada, ya que ahí se presentaron procesos de resolución más variados que en la otra. Con base en las categorías definidas en la fase anterior, se eligieron de entre los alumnos a cinco parejas con la característica de que mantuvieran posturas encontradas en relación a la resolución o solución de la tarea y que en su cuestionario inicial hayan ofrecido explicaciones amplias de lo que ahí habían hecho, con la intención de detonar durante la interacción el intercambio de ideas y procedimientos. En la interacción se solicitó que cada quien tratara de convencer a su compañero de que el procedimiento realizado por ellos en el cuestionario inicial era el más adecuado. El autor 1 actuó como mediador de las intervenciones.

Tercera Fase: Cuestionario final individual

Se propuso a los estudiantes que resolvieran de manera individual y por escrito una tarea semejante a la planteada en el cuestionario inicial, con la finalidad de detectar las posibles modificaciones en sus procedimientos de resolución y en sus cualificadores modales después de la interacción.

ANÁLISIS EMPÍRICO DE LAS INTERACCIONES

Categorías para el análisis de las interacciones

Las categorías con las que se interpretan las interacciones fueron resultado de un proceso de triangulación, como ya se explicó. No obstante, para fines de claridad se exponen antes del análisis.

Con base en una re-definición de la idea de *account* (recogida de Krummheuer, 1995, quien la toma de Garfinkel) y en los datos empíricos recabados en la investigación, en este documento se define la noción de '*account completo'* (a diferencia del '*account parcial'* caracterizado en otro escrito de los autores) que se da cuando a partir de un intercambio comunicativo el incremento de la comprensión y el convencimiento del que habla se presenta, de manera sincrónica, con el incremento de la comprensión y la modificación del convencimiento del que escucha. En este escrito se dice que cuando se da un proceso de *account completo* se ha generado una actitud de 'empatía matemática'. Con base en los grados de *accountability*, en la investigación se distinguen tres tipos de intercambio (productivo, de menor productividad y neutrales), de los cuales aquí sólo se describe uno:

Intercambio productivo (IP). Se presenta cuando (al menos) uno de los participantes pone en juego un *account* completo y por tanto una actitud de empatía matemática.

Análisis empírico de las interacciones. Interacción Raúl-José

Con base en los conceptos antes expuestos (intercambios productivos y no productivos, y *account)* se presenta en lo que sigue un análisis de la interacción de una pareja de alumnos, análisis del cual se desprenden algunas 'características notables' que pueden eventualmente promover el éxito en las interacciones entre pares (ver *Resultados de la investigación*).

En la tabla 3 aparece el análisis funcional de los argumentos desarrollados durante la interacción que se dio entre José y Raúl. Se respeta el espíritu analítico propuesto por Toulmin; sin embargo, aparece en forma tabular para dar cuenta de las relaciones que guardan las garantías y los respaldos en los que Raúl apoya sus afirmaciones, en relación con las garantías y respaldos en los que José sustenta sus contra-argumentos, y en los que se apoya el investigador.

Tabla 3. Análisis Funcional. Interacción Raúl-José.

<table>
<tr><th>S.</th><th>Datos</th><th>Cualificadores Modales</th><th>Gar.</th><th>Respaldo</th><th>Afirmación</th></tr>
<tr><td>Rin</td><td>RD1:<table><tr><td colspan="3">$1000 por juego.</td></tr><tr><td>Oferta</td><td>Costo de dos juegos</td><td>Costo de tres juegos</td></tr><tr><td>1 1/2</td><td>1500</td><td>2500</td></tr><tr><td>70% en 2°</td><td>1300</td><td>2300</td></tr><tr><td>3x2</td><td></td><td>2000</td></tr></table></td><td></td><td>RW1:
A5o</td><td>RBm1:
Estrategia de tipo absoluto. Ignora relaciones de proporcionalidad.

RBe1:
Considera que en la oferta 3x2 el tercer juego es gratis.</td><td>RC1:
3x2 es la mejor oferta porque te regalan uno.</td></tr>
<tr><td>Ri1</td><td>RD2:<table><tr><td>Oferta</td><td>J1</td><td>J2</td><td>J3</td><td>Total</td><td>Ícono</td></tr><tr><td>3x2</td><td>1000</td><td>1000</td><td>¡Gratis!</td><td>2000</td><td>☺</td></tr><tr><td>1 1/2</td><td>1000</td><td>500</td><td>1000</td><td>2500</td><td>☹</td></tr><tr><td>70% en 2°</td><td>1000</td><td>300</td><td>1000</td><td>2300</td><td>☺</td></tr></table>"sería mejor completar los 2000 para conseguir otro juego, porque el tercero te saldría a su precio original" "por pagar 700 o 500 (más) te llevarías un juego más gratis y eso es más diversión por un poquito menos de precio de que si lo compraras con otros métodos."</td><td>RQ2:
Alta presunción:
Utiliza un lenguaje corporal muy expresivo, señala, golpea el pizarrón, mantiene postura erguida y abierta, volumen de voz alto.
Utiliza íconos que reflejan su pensar sobre las ofertas.
Acción; Determinación; Consistencia.</td><td>RW2:
A5o</td><td>RBm2:
Estrategia absoluta, ignora relaciones de proporcionalidad.

RBe2:
Considera que en la oferta 3x2 el tercer juego es gratis.</td><td>RC2:
En la oferta 3x2 el tercero te sale gratis, está mejor éste, porque pagas menos por tres juegos.</td></tr>
<tr><td>Ii1</td><td>Y ¿qué pasa si en lugar de tres juegos, nos quisiéramos llevar cuatro? ¿Cómo quedarían ahora los costos? ¿Sigue conviniendo la primera oferta?</td><td>IQ1:
Consolida el argumento de R y no cuestiona RW1 ni RW2.</td><td>IW1:
A5o</td><td>IBe1:
Incita a completar estrategia Building Up por adiciones sucesivas.</td><td></td></tr>
<tr><td>Ri2</td><td>RD3:
Ok… si queremos cuatro… otros 1000, entonces serían supuestamente 3000…<table><tr><td>Oferta</td><td>J1</td><td>J2</td><td>J3</td><td>J4</td><td>Total</td></tr><tr><td>3x2</td><td>1000</td><td>1000</td><td>Gratis</td><td>1000</td><td>3000</td></tr><tr><td>1 1/2</td><td>1000</td><td>500</td><td>1000</td><td>500</td><td>3000</td></tr><tr><td>70% en 2°</td><td>1000</td><td>300</td><td>1000</td><td>300</td><td>2600</td></tr></table></td><td>RQ3:
Presunción:
Acción; Consistencia; Determinación. "Pero nadie se va a esperar tanto tiempo, yo sé que van a escoger está"
No cuestiona su procedimiento.
Lenguaje corporal abierto y muy expresivo.
Mitigadores del lenguaje: "En este caso te convendría…"</td><td>RW3:
A5o</td><td>RBm3:
Estrategia de adiciones sucesivas, no relativiza.

RBe3:
No acepta resultados alternos aun cuando se le han demostrado matemáticamente.</td><td>RC3:
En este caso te convendría mejor la número tres.
Pero nadie se va a esperar tanto tiempo, yo sé que van a escoger está (golpea el pizarrón dónde está marcada la oferta 3x2).</td></tr>
<tr><td>Ii2</td><td>¿Qué pasa si quiero seis juegos por ejemplo?</td><td></td><td>IW2:
A5o</td><td>IBm2:
Incita a completar estrategia tipo Building Up por adiciones sucesivas.</td><td></td></tr>
<tr><td>Ri3</td><td>RD4:
Entonces en la primera por seis serían 4000 morlacos… Seis, aquí son cuatro (analiza la segunda oferta)… entonces son 4500… ¡sí! mmm… (analiza la tercer oferta) son 2600 por cuatro… ya, 3900…</td><td>RQ4:
Alta presunción:
Acción.
Determinación.
No muestra cambios de perspectiva sobre el referente del número de juegos en conjunto.</td><td>RW4:
A5o</td><td>RBm4:
Completa análisis por adiciones sucesivas.

RBe4:
Se infiere que acepta el resultado por ser un caso particular, no cuestiona el procedimiento.</td><td>RC4:
Sí quiero llevarme seis juegos conviene más la tercera oferta.</td></tr>
<tr><td>Jr</td><td>JD1:
(Raúl) no sabía explicarlo y al final terminó resultando que la oferta que él decía no era la buena.</td><td></td><td></td><td></td><td>JC1: No me convence el procedimiento de Raúl.</td></tr>
<tr><td>Jin</td><td>JD2:<table><tr><td colspan="4">Descarta la 2a por la 3a;
propone precio: $1000</td></tr><tr><td>Oferta</td><td>Costo x2</td><td>Costo x3</td><td>Costo x4</td></tr><tr><td>3x2</td><td></td><td>$2000</td><td>$4000</td></tr><tr><td>70% en 2°</td><td>$1300</td><td></td><td>$2600</td></tr></table></td><td></td><td>JW2:
$R5_J^{Bu}$</td><td>JBm2:
Estrategia Building up incorrecta, normaliza e identifica la diferencia entre porcentajes.</td><td>JC2: Es mejor la oferta 70% en 2° porque pagas menos por 4 juegos.</td></tr>
<tr><td>Ji1</td><td>JD3a:
Supongamos que cada videojuego sale en 1000 pesos, entonces tenemos 3x2, entonces sólo pagaría 2, o sea 2000. Pero, si los divides entre tres, que es el número de juegos que te llevas, o sea, no te van a dar nada gratis, hay un presupuesto para cada videojuego. Entonces serian 666 por cada uno de los tres videojuegos. Y pues ya sacamos el 70% de 1000, da 700, entonces el segundo videojuego estaría saliendo en 300 pesos, y ya de dos videojuegos serían los 1300, por lo que de cuatro videojuegos serian 2600 y 2600 entre los cuatro videojuegos da 650 que es una menor cantidad que los 666 de los tres.

JD3b:
La segunda oferta la descartamos porque el 70% es mejor que el 50%.</td><td>JQ3:
Certeza:
Acción; Determinación; Consistencia; Interés.
Cambia la perspectiva de resolución.</td><td>JW3:
$R6^{VU}$</td><td>JBm3a:
Estrategia que considera el valor unitario como medio efectivo para comparar.

JBm3b:
Descarta una oferta por comparación de porcentajes.

JBe3:
Indica "no te van a dar nada gratis" y "hay un presupuesto para cada videojuego"</td><td>JC3:
650 por juego en la tercera oferta es una menor cantidad que 666 por juego en la primera.</td></tr>
<tr><td>Rr</td><td>RD5:
Si pero, ¿y si nada más quieres tres?... O sea, que tal si no tienes la posibilidad económica para comprarte eso…</td><td>RQ5:
Visos de duda:
Mitigadores de lenguaje: "te convendría"</td><td>RW5:
A5o</td><td>RBe5:
RC1, RC2, RC3.</td><td>RC5:
te convendría ese (señala la oferta 3x2)</td></tr>
<tr><td>Rr</td><td>RD5:
Si pero, ¿y si nada más quieres tres?... O sea, que tal si no tienes la posibilidad económica para comprarte eso…</td><td>RQ5:
Visos de duda:
Mitigadores de lenguaje: "te convendría"</td><td>RW5:
A5o</td><td>RBe5:
RC1, RC2, RC3.</td><td>RC5:
te convendría ese (señala la oferta 3x2)</td></tr>
<tr><td>Rf</td><td>RD6:
Se infiere propuesta de precio: $1000<table><tr><td>Oferta</td><td>No. de juegos</td><td>Costo</td><td>Costo por juego</td></tr><tr><td>4x3</td><td>4</td><td>3000</td><td>750</td></tr><tr><td>1 1/4</td><td>4</td><td>2500</td><td>625</td></tr><tr><td>70% en 2°</td><td>4</td><td>2600</td><td>650</td></tr></table>Por obvias razones es mejor un %75 que un 70% solamente.</td><td>RQ6:
Casi certeza con enfatizadores de lenguaje "por obvias razones"</td><td>RW6:
$R6^{Bu}$,
$R6^{Vu}$</td><td>RBm6:
Estrategia Building up con uso de valor unitario y comparación de porcentajes.</td><td>RC6:
Conviene más la de 1 ¼, por obvias razones es mejor un 75% que un 70% solamente</td></tr>
</table>

Participantes: R: Raúl; J: José. *Segmentos:* in: cuestionario inicial; r: respuesta ante intervención; i1, i2, etc.: intervención numerada. *Análisis funcional:* C: afirmación; D: dato; Q: cualificador; W: garantía; B: respaldo

Raúl, primera intervención. Los procedimientos de Raúl se encuentran muy apegados a perspectivas de tipo absoluto y aditivo (las garantías, tanto de su cuestionario inicial como las de sus intervenciones subsecuentes, corresponden a la categoría A5o); pareciera que el principal problema de este alumno consiste en que no considera el referente del número de juegos en su conjunto ($-Rf_J$); esto lo llevó a segmentar las ofertas y a pensar que tiene sentido, en el contexto de la tarea, el comprar juegos sueltos, posicionándose así en una postura absoluta a partir de la cual pierden significado las comparaciones multiplicativas y, por supuesto, la proporcionalidad. En su primera intervención Raúl preservó las garantías y los respaldos que ya estaban presentes en el argumento de su cuestionario; ahí se observa lo dicho: él ignoró las ventajas que le ofrece cada oferta, considerando que es indistinto comprar cualquier número de juegos. A pesar de que en esa intervención intentó mostrar un alto grado de presunción, al usar un lenguaje corporal muy expresivo, una postura erguida y abierta, alto volumen de voz, cubriendo criterios de *acción* y *determinación*, es posible que en el fondo no haya estado tan convencido de su argumento matemático, ya que su estrategia, no sólo en esta intervención sino a lo largo de toda su participación, consistió en ofrecer argumentos matemáticos (los ya comentados, que por cierto no son los más correctos y eficientes) complementados con razones extra-matemáticas (e.g, 'en la oferta 3x2 te regalan uno') como 'para reforzar', contraponiéndose así al criterio de *consistencia*.

Raúl y el investigador. El investigador contra-argumentó a Raúl con la intención de hacerle ver que podía escalar el número de juegos hasta conseguir un número adecuado para comparar todas las ofertas. Sin embargo, los planteamientos del investigador no apuntaron ni a las garantías ni a los respaldos de tipo matemático empleados por el alumno, es decir, no pusieron en entredicho que en el marco de la tarea, carece de sentido el concebir los juegos aisladamente, dejando de considerar las relaciones que éstos guardan con el resto de juegos incluidos en cada oferta; el investigador, por otra parte, tampoco cuestionó las garantías y los respaldos de tipo extra-matemático argüidos por Raúl.

Por lo antes dicho, se puede entender perfectamente que, como respuesta a las intervenciones del investigador, Raúl en su segunda participación (Ri2) no sólo no cuestionó su estrategia de adiciones sucesivas, sino que la fortaleció. Esto se observa en la afirmación RC3, en la que tiene frente a él dos soluciones a la tarea que resultan contradictorias entre sí. Raúl acepta sin conceder el argumento matemático propuesto por el investigador, pero apoya decididamente el suyo apelando a recursos extra-matemáticos ("nadie se va a esperar tanto tiempo, yo sé que van a escoger ésta"), siendo consistente con su anterior respuesta y complementando y reforzando esa postura. En su siguiente intervención afirma "Si quiero llevarme seis juegos entonces conviene más la tercer oferta" (RC4); no obstante, no parece tomar conciencia de la contradicción entre esa postura y la asumida por él, porque da la impresión de que no comprende lo que está en el fondo de la resolución que le propone el investigador, la que acepta por concesión y por tratarse de "un caso particular y específico" distinto al que él plantea. Hasta este momento la postura de Raúl parece inamovible; en él no hay incremento en el conocimiento ni generación de duda.

José y Raúl. A diferencia de la intervención del investigador, José puso el acento justo en la garantía inconveniente (RW2: A5O) que implícitamente asume Raúl, conforme a la cual él considera que puede comprar cualquier número de juegos; se enfoca también en los respaldos de Raúl (RBm3 y RBm4) que refuerzan su estrategia de adiciones sucesivas. José muestra que es capaz de cuestionar el procedimiento y los argumentos de Raúl, y muestra también que ha escuchado atentamente a su compañero y que tiene la sensibilidad para entender sus argumentos: con su propuesta de utilizar el valor unitario como estrategia que respeta las relaciones de proporcionalidad (JW3, JBm3a) apunta hacia la garantía con la que Raúl sustenta su estrategia de resolución de tipo aditivo y cuando indica, entre otras cosas, que "no te van a dar nada gratis" (JBe3) apunta directamente hacia el respaldo extra-matemático de Raúl (RBe2).

A pesar de lo anterior, Raúl sigue empeñado en defender su postura y se niega a aceptar frente a su compañero que fue convencido; sin embargo, se infiere que en Raúl existen indicios de duda debido al contraste entre la manera en la que él sostiene la afirmación RC3 "yo sé que van a escoger ésta" (con cierta firmeza) y la forma de sustentar el argumento extra-matemático RC5, en el que utiliza "te convendría", que es un mitigador del lenguaje que denota duda (Martínez y Rigo, 2014). Aunque Raúl entiende la parte matemática, está muy apegado a su respuesta y hace lo necesario, como pasar por encima de argumentos matemáticos y argüir razones extra-matemáticas, para soportar su respuesta. Sin embargo, este asomo de duda se convierte en conocimiento y seguramente en alta presunción cuando muestra, en su cuestionario final, una respuesta contundente en la que utiliza las estrategias que le explicó José: utiliza el valor unitario (retomando la garantía de José JW3a: R6VU) y compara porcentajes como lo hace su compañero en su intervención (JBm3b). Abandona además todas sus posturas retóricas y sus argumentos extra-matemáticos, centrándose sólo en los argumentos matemáticos. Lo anterior permite sugerir un posible cambio de estado epistémico a raíz del cambio de estrategia con la que se le cuestionan sus afirmaciones, garantías y respaldos.

José. En José también se observa una evolución. Él pasa de una resolución basada en Building up (con error) y descarte de ofertas por comparación de porcentajes, a una del tipo de valor unitario que utiliza al tomar la decisión de afrontar el reto que Raúl le plantea. En ese sentido, se considera que la explicación de Raúl es un detonador importante en este proceso de trabajo matemático. Aunque en su cuestionario final José regresa a la estrategia Building Up, su comprensión de las posibles resoluciones de este tipo de tarea de comparación de razones queda al descubierto cuando opta por una estrategia que no deja lugar a dudas para tratar de convencer a su compañero.

Consideraciones sobre la interacción. Lo antes dicho deja ver que la interacción de José (en relación a Raúl) es de tipo productivo, que la de Raúl (en relación a José) resultó un detonador y que la del investigador es neutral. Como se puede colegir de los datos empíricos antes expuestos, en la interacción de tipo productivo se presentan las siguientes condiciones: Raúl (R) incluyó en su planteamiento algo que para José (J) representó un reto; R puso en duda su planteamiento en algún momento; J se interesó por asumir el reto de convencer a R; y de manera muy relevante y significativa, J puede identificar las garantías y los respaldos en los que el R soporta su argumento, y contra-argumentar en consecuencia; finalmente, R utiliza los procedimientos explicados por su compañero para resolver una tarea similar.

En relación al *account* que vivencia José se puede decir que es de tipo completo, ya que él se convence a sí mismo y convence a su compañero de que su procedimiento de resolución es el más adecuado para resolver este tipo de tareas, al tiempo que incrementa su comprensión y la de su compañero, ya que Raúl, como se vio, utiliza los procedimientos de José en el cuestionario final. Con todo ello, José no sólo muestra que es capaz de utilizar el lenguaje matemático de su compañero y también el coloquial. Revela que en el fondo, José es sensible a las dificultades que en el ámbito matemático exhibe su compañero, relacionadas con el tema de la comparación de razones que se pone en juego al resolver la tarea, y que es sensible también a ciertas necesidades afectivas de Raúl. A esa sensibilidad que un alumno muestra hacia el otro, en la que se complementa lo disciplinar con lo afectivo, en este documento se denomina ‘empatía matemática’.

RESULTADOS: CARACTERÍSTICAS NOTABLES PARA UNA INTERACCIÓN PRODUCTIVA

A partir de los datos empíricos recabados y del análisis del caso aquí expuesto, se sugiere que una interacción entre dos estudiantes A y B es productiva si se presentan las ‘características notables’ que a continuación se describen:

- Que B exponga argumentos que representen un reto para A.
- Que A escuche, entienda y se ponga en el lugar de B, comprometiéndose a superar el reto que le presenta su compañero.
- Que a partir de lo anterior, A sea capaz de identificarlas garantías y los respaldos sobre los cuales B sostiene sus argumentos y los refute sin dejar lugar a dudas.
- Que B escuche y entienda a su compañero y, en ese proceso, incremente su comprensión y cambie su convencimiento y que dé muestras de ello, utilizando alguno(s) argumentos que le ha explicado A.
- Que a partir de una actitud de empatía matemática, uno de los participantes (A) obtenga *account* completo, es decir, que en el proceso de tratar de convencer y de incrementar la comprensión del otro (B) se incremente su propia comprensión y su convencimiento.

CONSIDERACIONES FINALES

Sobre los resultados de un trabajo previo, en el que se desvelan las características de las resoluciones de alumnos de 14 y 15 años de edad sobre una tarea de comparación de razones, y siguiendo los principios de la teoría fundamentada, la presente investigación hace una propuesta para identificar, definir y sistematizar características notables que hacen que un proceso de interacción, en el que dos alumnos intercambian resoluciones de dicha tarea, resulte productivo, neutral o no productivo, así como identificar, re-definir y caracterizar los procesos denominados *account* y *empatía matemática*. Como se ha visto a lo largo de este escrito, estas categorías teóricas permiten avanzar algunas explicaciones posibles sobre un fenómeno interesante en la didáctica de las matemáticas, pero poco aclarado en la literatura, relacionado con el éxito (o fracaso) de las interacciones entre pares; estas categorías permiten también sugerir una serie de estrategias, dirigidas al profesor, para promover interacciones provechosas entre sus alumnos. Sin duda, los procesos socio-educativos aquí estudiados resultan opciones muy ricas y propicias para el aprendizaje de las matemáticas. No obstante, es importante considerar los diversos pormenores que se pueden presentar, ya que no son una alternativa que garantiza el éxito. Entre otras cosas, los docentes deben de tener 'sensibilidad matemática' para identificar los componentes de los argumentos de los alumnos, pero también una 'sensibilidad emocional' para identificar y promover actitudes de empatía matemática entre ellos.

REFERENCIAS

Corbin, J. & Strauss, A. (2015). *Basics of Qualitative Research. Techniques and procedures for development Grounded Theory. 4e*. Los Angeles: Sage.

Fernández Lajusticia, A. (2009). *Razón y Proporción. Un estudio en la Escuela Primaria*, Valencia, España: Universitat de Valencia, Departament de Didàctica de la Matemàtica.

Gómez, B. y García, A. (2014). Componentes críticas en tareas de comparación de razones desiguales. En M. T. González; M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 375-384). Salamanca: SEIEM.

Gómez, B., Monje, J., Pérez-Tyteca, P y Rigo, M. (2013). Performance on ratio in realistic discount task. In B. Ubuz, Ç. Haser& M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 293-302).

Goos, M., Galbraith, P. & Renshaw, P. (2002). Socially mediated metacognition: creating collaborative zones of proximal development in small group problem solving. *Educational Studies in Mathematics 49*, (pp. 193-223).

Krummheuer G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding*. NJ: Lawrence Erlbaum.

Martínez, B., Rigo, M. (2014). ¿La certeza implica comprensión? En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 445-454). Salamanca: SEIEM

Pinochet, J. (2015). El modelo argumentativo de Toulmin y la educación en ciencias: una revisión argumentada. *Ciência & Educação, Bauru, 21(2),* 307-327.

Smith, T. (2015). Peer Interaction. *Research Starters: Education (Online Edition)*. Recuperado de: <http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=ers&AN=89164361&lang=es&site=edslive>.

Stacey, K. (1992) Mathematical Problem Solving in Groups: Are Two Heads Better Than One? *The Journal of Mathematical Behavior*, *11(3)* 261-275

Topping, K. (2005). Trends in Peer Learning. *Educational Psychology, 25(6).* 631-645

Toulmin, S. (2003). *The uses of argument*. Cambridge: Cambridge University Press

COMPORTAMIENTO DE ESTUDIANTES DE MAESTRO AL MEDIR EL VOLUMEN

Pre-service primary teachers´ behavior measuring volume

Montoro-Medina, A.[b] , Gil-Cuadra, F.[a], Moreno-Carretero, M.F.[a]

[a] Universidad de Almería, [b] Universidad Camilo José de Cela

Resumen

Las magnitudes y su medida, por su uso cotidiano, son un contenido de las matemáticas escolares que los estudiantes para maestro de primaria deben dominar. Estos estudiantes presentan lagunas cuando se les proponen tareas para el desarrollo de la competencia de comparación y medida de la capacidad y del volumen. En el presente trabajo se aportan tareas de este tipo y se identifican las estrategias, los errores y dificultades que cometen los estudiantes, al resolverlas. Además, se describe una actuación realizada en el aula para que los estudiantes detecten y superen las estrategias erróneas.

Palabras clave: *comparación de magnitudes, capacidad, volumen, errores, estrategias, maestros en formación.*

Abstract

Because of their everyday use, measurement is a scholar mathematical content that preservice primary school teacher must master. These students have some gaps when task for the development of comparison and measurement of volume and capacity are proposed. In this paper we describe this kind of tasks and the strategies, the difficulties and the mistakes made by student solving the tasks. Moreover, these strategies were recorded and broadcast in the classroom for students to analyze and overcome wrong strategies.

Keywords: *Magnitude comparison, capacity, volume, mistakes, strategies, preservice teachers.*

INTRODUCCIÓN

A pesar de la importancia que juega la medida en la vida diaria y su inclusión en los currículos de las diferentes etapas educativas, muchos adultos muestran un dominio insuficiente de las competencias de medida (Pizarro, Gorgorió, y Albarracín, 2014). Esto tiene su origen, probablemente, en una limitada experiencia del aprendizaje de estos contenidos durante la educación obligatoria.

Consideramos imprescindible subsanar estas deficiencias educativas que se han mantenido de manera persistente, incluso a pesar de las indicaciones incluidas en las distintas normativas curriculares. Por ello, cobra especial relevancia la formación de los futuros profesores de Primaria puesto que serán los encargados de diseñar, desarrollar y evaluar tareas que promuevan en los escolares un dominio significativo de la medida. Nuestra experiencia como formadores de maestros nos muestra que estos estudiantes inician su formación con lagunas en este ámbito, por ejemplo, tienen dificultades para resolver problemas sencillos que requieran diferenciar las distintas magnitudes (área-perímetro, área-volumen, volumen-capacidad, volumen-masa…), o que impliquen realizar operaciones con unidades de medida del tiempo, conversiones de unidades y estimación de la medida de la cantidad de magnitud de un objeto (Shen y Jackson, 2013). Recientemente, Passelaigue y Munier (2015) después de analizar el nivel de dominio de los estudiantes para profesor en Francia, concluyen que los futuros profesores no diferencian los conceptos de

Montoro, A. , Gil F.[a], Moreno, M.F (2016). Comportamiento de estudiantes de maestro al medir el volumen. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), Investigación en Educación Matemática XX (pp. 424-433). Málaga: SEIEM.

atributo/cualidad y medida, siendo la noción de atributo/cualidad la menos comprendida. En este sentido, consideramos que proponer a los futuros profesores tareas relacionadas con la comparación de cualidades favorecerá el dominio de estos conceptos. En definitiva, resulta evidente que para poder enseñar estos contenidos es imprescindible dominarlos previamente, y además, tener las habilidades necesarias para proponer e implementar tareas de aula que permitan que sus escolares las adquieran.

Por esta razón, nuestro propósito es formar maestros competentes para enseñar a los escolares las magnitudes y su medida, esto es, que los estudiantes para maestro desarrollen las competencias necesarias para enfrentarse, con ciertas garantías, a la enseñanza de las magnitudes y su medida.

Para propiciar el logro de dicho objetivo planificamos una investigación de diseño cuyo fin era ver si un determinado modelo de formación conducía a formar maestros competentes en el campo de la medida. Concretamente planificamos un experimento de enseñanza porque “más allá de crear diseños efectivos para algún aprendizaje, se persigue explicar por qué el diseño instruccional propuesto funciona y sugerir formas con las que puede ser adaptado a nuevas circunstancias” (Molina y otros, 2011, 76). Este diseño está desarrollado en Gil, Montoro y Moreno (2016). En el presente trabajo aportamos parte de esta investigación: el diseño de tareas para el desarrollo de la competencia de comparación y medida de la capacidad y del volumen y la identificación de las estrategias, los errores y las dificultades encontradas al resolver dichas tareas.

Marco de referencia

Es amplio el esfuerzo realizado sobre el tratamiento de las magnitudes y la medida dentro de la formación en matemática y su didáctica en el ámbito de maestros de Primaria. Parte de esos trabajos proponen un modelo de enseñanza que se compone de cuatro apartados: percepción, comparación, medida y estimación (Olmo, Moreno y Gil, 1989; Gil y Moreno, 2001; Moreno, Gil y Frías, 2001). Se plantea la medición de una magnitud como un proceso que se inicia con la percepción y construcción de la magnitud y se completa con su medida y su estimación. Este no es un proceso lineal, ni se desarrolla de modo secuencial según sea la magnitud: longitud, masa, capacidad, volumen, etc.

A grandes rasgos, podemos destacar tres grandes competencias implícitas en el sentido de la medida: reconocimiento y comparación de cualidades, comprensión y aplicación del proceso de medir y desarrollo de estrategias para estimar (Moreno, Gil y Montoro, 2015).

A nivel general pretendemos probar la utilidad de este modelo de enseñanza de las magnitudes y su medida en la formación de maestros. Tras varios ciclos de experimentación en los que se ha ido adaptando una secuencia de actividades para articular el modelo, para el experimento de enseñanza, pretendemos por una parte comprobar, adaptar o en su caso modificar la secuencia de actividades que proponemos a los estudiantes, y por otra contrastar los aspectos globales a trabajar dentro de cada apartado.

En este trabajo nos vamos a centrar en el desarrollo de la comparación y medida del volumen exterior (espacio ocupado) e interior (capacidad) de objetos cotidianos. Cabe destacar que la comparación puede realizarse entre cantidades o entre sus medidas, así existen cuatro formas de realizar la comparación: directa (superponiendo, utilizando balanzas,…), indirecta (mediante un intermediario que permita trasladar el tamaño de uno junto al del otro para realizar la comparación), a través de su medida o a través de la estimación de sus medidas.

Concretamente, en esta fase nos proponemos constatar el grado de desarrollo de la competencia de comparación y medida del volumen que alcanzan los estudiantes para maestro, en un semestre dedicado a la medida. Para esto pretendemos, ante tareas de comparación y medida de la capacidad y el volumen:

O1: Describir las estrategias utilizadas por los estudiantes para su resolución.

O2: Identificar los errores y dificultades que surgen a los estudiantes a la hora de resolverlas.

METODOLOGÍA

Dentro del marco global del experimento de enseñanza, para tratar de alcanzar estos objetivos concretos se ha planteado un estudio exploratorio e interpretativo con los estudiantes de la asignatura Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría y la Medida de segundo curso de Maestro de Primaria de la Universidad de Almería.

En dicha asignatura se proponía una prueba inicial para ver el nivel de dominio de las magnitudes y su medida; en las clases teóricas se planteaban situaciones de comparación y medida de las distintas magnitudes, cómo resolverlas y se identificaban los principales errores y dificultades de los niños de primaria (Vergnaud y otros, 1983), (Reece y Kamii, 2001); en las clases prácticas los estudiantes trabajaban en grupo de 4 o 5 para resolver tareas de comparación y medida de las distintas magnitudes; además se realizaba un examen final sobre contenidos de medida y su didáctica.

Como se describe en Gil, Montoro y Moreno (2016), y dentro del proceso del experimento de enseñanza, las tareas de las clases prácticas se seleccionaron en función de la experiencia acumulada durante varios cursos. La elección de las tareas fue guiada por el criterio de que a los estudiantes les parezcan sencillas y no les bloqueen por no saber por dónde empezar, pero a la vez no sean triviales, esto es, que durante su desarrollo les surjan dificultades que trabajando colaborativamente puedan superar. De este modo los estudiantes se ven obligados a afrontar el reto y reelaborar las estrategias de comparación previas para incluir estas nuevas situaciones implícitas en las tareas. Nuestro propósito es que como consecuencia, se produzca un aprendizaje tanto del contenido matemático, como de contenido didáctico de la comparación de magnitudes: conocimiento de los errores, uso de esos errores para plantear actividades que faciliten a los escolares la reelaboración de sus estrategias y cambiarlas por otras de mayor nivel, uso de materiales y recursos, gestión de aula en sesiones de trabajo en grupo, etc.

Se grabó a 8 grupos durante la realización de la tarea de comparación del volumen y la capacidad (primera sesión práctica de la asignatura) y a 5 grupos realizando la tarea de medida de la capacidad y el volumen (segunda sesión práctica de la asignatura). Dicha grabación tuvo lugar en otro espacio distinto al aula-taller que utilizaban sus compañeros para clase para evitar los ruidos procedentes del trabajo de otros grupos. La participación en la investigación fue voluntaria, por lo que de los grupos de estudiantes que dieron su consentimiento para la grabación, la selección se realizó procurando que haya una diversidad respecto a sus destrezas matemáticas, nivel de interés, género.

Además, a raíz de esta investigación, modificamos la planificación previa y dedicamos una sesión de grupo docente a analizar la validez de las estrategias puestas en práctica por los estudiantes a la hora de realizar estas tareas. Para ello, realizamos un montaje con las grabaciones en las que se resumían las estrategias utilizadas, las dificultades y/o cuestiones que se habían planteado y cómo le habían dado respuesta…

En una prueba inicial, aplicada durante varios cursos para conocer el nivel inicial de los estudiantes, se incluyen cuestiones para ver si se diferencia unas magnitudes de otras, por ejemplo, capacidad y volumen o volumen y masa, si conocen las relaciones entre las distintas unidades y si son capaces de resolver sencillos problemas de medida. Esta prueba nos ha permitido comprobar a lo largo de los años que los estudiantes acceden con lagunas en su formación, por ejemplo, la distinción de magnitudes o la estimación.

Respecto a los contenidos que abordamos en este trabajo cabe señalar que no distinguen el volumen de la superficie y que cometen errores al relacionar las unidades de medida de la capacidad y del volumen, por ejemplo, para responder a cuantos litros equivale un centímetro cúbico.

Las tareas

Como hemos dicho más arriba, se asignaron dos sesiones de prácticas al estudio de la magnitud volumen. La primera enfocada a la comparación, donde se trabajó la tarea de comparación del volumen y la capacidad y una segunda sesión orientada a la medida, donde se propuso la tarea de medida de la capacidad y el volumen. Además, las tareas estaban diseñadas para que surgieran las dificultades que experimentan los escolares de primaria (Vergnaud y otros, 1983; y, Reece y Kamii, 2001) y que previamente se habían trabajado en las sesiones de teoría. En lo que sigue vamos a describir el objetivo de las tareas, el material y recursos que se pusieron a disposición de los estudiantes y, posteriormente, recopilamos tanto las estrategias que usaron para resolverlas como los errores y dificultades identificados durante su desarrollo.

Tarea de comparación

Como se puede ver en la Figura 1, donde aparece el enunciado del apartado dedicado a la comparación de la capacidad que se entregó a los estudiantes, el objetivo de esta tarea era ordenar, a ojo, distintos objetos atendiendo a su capacidad y comprobar dicha ordenación.

a. Ordena los envases según su capacidad, a simple vista. Puedes coger las botellas si lo consideras necesario.

	Ordenación
Participante 1	
Participante 2	
Participante 3	
Participante 4	
Participante 5	

b. Ordena los envases según su capacidad, ayudándote de agua. Explica paso a paso, la estrategia que sigues.

Figura 1. Enunciado de la tarea de comparación. Parte I: Capacidad

Se pretendía que los estudiantes, al resolver las tareas, quedasen sorprendidos por los resultados y fueran conscientes de que a veces la vista engaña. Esto contribuiría a percibir que la capacidad de estimar y/o comparar magnitudes hay que educarla, aprendiendo a aislarla de otras cualidades de los objetos. Para lograr tal fin, se proporcionaron botellas con formas muy diferentes y algunas de ellas muy similares en capacidad. En concreto, se facilitaron recipientes con medidas poco usuales (botellas de agua de 1.25l y 0.75l), de materiales distintos (botella de vino de cristal con 0.75l, botella de suavizante de plástico de 1.25l y otra de 3l) y distinta forma (2 botellas de agua de 2l de marcas poco usuales en la comunidad y una de 1.5l). Es decir, se mezclan recipientes con formas y medidas con las que están familiarizados y otras más extrañas (Figura 2, izquierda).

Figura 2. Estudiantes realizando la tarea de comparación

El apartado de la comparación del volumen de objetos tenía el mismo objetivo: ordenar a ojo y comprobar dicha ordenación. Sin embargo, el enunciado proporcionado contenía, además, el enunciado del Principio de Arquímedes (Figura 3).

En este caso, se presentaban tres objetos del entorno: dos piedras y un bote de espuma de afeitar vacío (este último, flota) con un volumen muy similar (Figura 2, derecha). La forma irregular de los objetos y la ausencia de recipientes graduados dificultan su medida directa, por lo que se fuerza la utilización de estrategias de comparación directa o indirecta.

a. Ordena las piedras y el bote de espuma según el volumen, utilizando únicamente la vista y el tacto.

	Ordenación
Participante 1	
Participante 2	
Participante 3	
Participante 4	
Participante 5	

b. Comprueba el orden correcto, utilizando un líquido (Arquímedes). Explica paso a paso, la estrategia que sigues y las dificultades que te encuentras.

Principio de Arquímedes: "Si llenamos un recipiente con un líquido y sumergimos (completamente) un objeto en él. El volumen de dicho objeto es el mismo que el volumen del líquido que desaloja."

Figura 3. Enunciado de la tarea de comparación. Parte II: Volumen

Tarea de medida

La segunda tarea se centró en la aplicación de procedimientos de medida de capacidad, y volumen a distintas partes del cuerpo humano. Esta contextualización en partes de cuerpo humano pretende que los estudiantes vayan interiorizando esas medidas y las usen posteriormente como referentes de estimación. Las partes del cuerpo seleccionadas fueron las manos, la boca y los pulmones, pues son más fácilmente relacionables con sólidos, líquidos y gases. Aquí nos centramos en lo relativo a capacidad y volumen. Se les propuso a los estudiantes medir la capacidad de un puñado o de una almorzada o ambuesta, la capacidad de una bocanada y la capacidad pulmonar (Figura 4).

Rellena la tabla con la medida correspondiente a cada uno de los participantes e identifica un recipiente que tenga capacidad similar. Explica en cada caso el procedimiento seguido.

Capacidad	Participante 1	Participante 2	Participante 3	Participante 4	Recipiente de tamaño similar
Puñado					
Almorzada					
Trago					
Capacidad pulmonar					

Figura 4. Enunciado de la tarea de medida

El objetivo de la tarea de medida de la capacidad era que los estudiantes aplicaran un procedimiento conocido para calcular la capacidad de un recipiente (llenarlo de un líquido) a una situación familiar (trago) y lo adapten para el caso de recipientes que no pueden contener líquidos. La meta última es que los estudiantes profundicen en el concepto de capacidad comprendiendo que depende tanto del recipiente como del contenido, por ejemplo, un cesto de caña no puede contener agua pero si naranjas. Para la medida de la capacidad pulmonar debían detectar que, en el caso particular de un globo de aire, capacidad y volumen coinciden. Por lo que, en esta circunstancia, el problema a resolver sería similar al de la tarea de comparación del volumen, pero debían de adaptar la estrategia para medirlo (en la tarea anterior no era necesario).

Se les proporcionaron recipientes de diferentes tamaños (unos graduados y otros no), balanzas, reglas, agua, un recipiente lleno de lentejas, globos,… todos ellos situados en la mesa de trabajo para ofrecerles la posibilidad de poder usarlos (Figura 5). Cabe señalar que para no inducir la forma de resolución de la tarea siempre había más materiales de los necesarios, incluyendo algunos que si no tenían las ideas claras podían inducirles a errores.

Figura 5. Estudiantes realizando la tarea de medida

DESARROLLO DE LAS TAREAS

En este apartado se describen las estrategias llevadas a cabo por los estudiantes a la hora de resolver las tareas, las dificultades que encontraron y los errores cometidos. Además, se incluyen algunas de las secuencias que se utilizaron en la sesión de retroalimentación y que ilustran las afirmaciones que se realizan. En estas secuencias aparece el profesor identificado con una P y los estudiantes con las iniciales E1 a E5 para distinguir unos de otros. Esta distinción E1 a E5 simplemente se utiliza para describir cómo fue el diálogo, por lo que el estudiante al que se asigna E1 en el segundo diálogo no tiene por qué coincidir con E1 en el primer diálogo.

Tarea de comparación

En este caso, en la parte relativa a comparación de capacidad los estudiantes utilizaron esencialmente dos estrategias de comparación: medir con la botella más pequeña el resto de recipientes y comparar las medidas; y el trasvase de líquidos del recipiente más grande al siguiente viendo que sobraba líquido (o al contrario).

La primera de las estrategias era desechada rápidamente ante la dificultad de medir con unidades no estándar (las medidas no eran exactas) y se adoptaba la segunda. Sin embargo, se observa que cuando la estimación del orden de la capacidad de las botellas no es correcto, los estudiantes cometen errores por no realizar algunas comprobaciones y/o hacen otras que son innecesarias, no haciendo uso de la propiedad transitiva de la capacidad. Un ejemplo de esto se puede ver en la secuencia que se muestra a continuación. Se puede apreciar que los estudiantes han elegido ordenar los recipientes a ojo, de mayor a menor, y verter el agua de un recipiente al siguiente, empezando por el mayor. Además, como se ve en la línea 12, ponen el recipiente G entre el E y el F, sin comprobar previamente su hipótesis de que G es más pequeño que F (cuando, de hecho no lo es).

1. E1: Esta es más grande (G). Por poco pero es más grande (que D).
2. E3: Échalo que cabe (mientras vierten D en H).
3. E1: Entra más o menos, sí.
4. E1 a E2: B es más grande que D y H, y ésta más grande que F (tras verter H en F).
5. Tras verter F en E y E en G
6. E3: Pues ya está, G es más grande que E.
7. E2: Después de la F va la G. Después la E.
8. E1: Pues ya está, esta (E) es más pequeña que esta (G).
9. E1: Esa (C) es más pequeña porque se ha llenado y la otra no estaba llena.
10. P: ¿Cuál es la más pequeña y porqué?
11. E1: Esa (C) es más pequeña porque se ha llenado y la otra no estaba llena.
12. P: ¿cuál es el orden entonces?
13. E1 y E2: Esto va así. [Ponen G entre E y F]
14. E1: Hemos echado este (E) aquí (G) y no se había llenado.

En el caso de la comparación del volumen, una vez más, aparece una tendencia a la comparación a través de la medida. Los estudiantes prefieren utilizar recipientes graduados para sumergir los objetos en agua. Solo cuando los objetos no caben en uno graduado se recurre a otro no graduado.

Sin embargo, como se puede ver en las líneas 14 a 20, el hecho de que el bote de espuma flotara, hizo que tuvieran que analizar qué es lo verdaderamente importante a la hora de calcular el volumen de un objeto: ¿qué sucede cuando flota? ¿Qué sucede si metemos la mano o si le ponemos peso encima para sumergirlo? ¿Influye la "presión" o fuerza que realizamos sobre el objeto? ¿Se puede quitar el tapón e introducir por separado el tapón y el bote? Algunos grupos se plantearon explícitamente estas cuestiones pero ninguno llegó a darles respuesta, todos las obviaron.

15. E1: Anda que como flote…
16. E4: Tenemos que atarle algo.
17. E1: Le metemos el dedillo.
18. E4: Tenemos que atarle algo.
19. E1: ¿Qué le vas a atar? Entonces ya pesa lo del bote más lo otro.
20. E4: Por eso, le quitamos el volumen del otro.
21. E2: Tú déjalo, si mientras se quede dentro…

Nos encontramos con errores como sumergir parcialmente los objetos (líneas 28 a 31) o meter la mano y no tener en cuenta que ésta también tiene volumen.

22. E3: Lo echamos todo en el mismo sitio (E3 señala un recipiente no graduado con agua).
23. E1: Lo echamos todo en el mismo sitio y vemos lo que suba el agua, ¿no?
24. E2: ¿Queréis que lo haga yo?
25. E1: En el cubo mejor, es más… (E1 mira el cubo que tiene más cerca que está graduado)
26. E4: Vamos metiendo todo a ver hasta dónde llegan.

27. E2: Pero tienes que llenar más el cubo para ver hasta dónde llega.
28. E1: ¿Por qué? Ya ves hasta donde sube.
29. E1 y E4: Llega hasta aquí.
30. E2: Pero no está entero metido.
31. E4 a P: ¿Podemos apuntar?
32. E1: Ah, es verdad, no está entero.
33. E1: Pues yo creo que no tiene nada que ver.
34. E4: Da igual que lo pongas con el lleno (el recipiente) o lo pongas a un nivel.

Entre las dificultades, vemos que algunos grupos muestran la necesidad por medir la cantidad de agua inicial para marcar el nivel, luego meter el objeto y volver a marcar el nivel alcanzado, otros sumergen cada objeto en un recipiente distinto con la misma cantidad inicial de agua y marcan el nivel alcanzado, y otros se plantean si pueden presionar el bote de espuma, pues según ellos tendrían que medir de alguna manera la fuerza con lo que lo hacen, incluso, alguno lo resuelve poniéndole una piedra encima.

Finalmente, lo resuelven utilizando estrategias como sumergir los objetos introduciéndolos todos con la mano hasta un mismo nivel y ven el nivel que alcanza el líquido; llenar completamente el recipiente, introducir el objeto y medir el agua que se derrama con un recipiente graduado; marcar el nivel de agua inicial y final para completarlo con agua. Como puede apreciarse en las líneas 33 y 34 es la conclusión a la que llega uno de los grupos.

Tarea de medida

Tanto para el caso de medir la capacidad del puñado o de la almorzada, los estudiantes, rápidamente, cogen lentejas y las pesan, unos colocándolas directamente sobre el peso y otros colocándolas en un recipiente y luego desquitándoles el peso de este (eliminando la tara). Varios grupos realizan un intento de estandarizar la medida del puñado como media de los pesos de los puñados de los integrantes del grupo.

Sólo un grupo de los cinco grabados, después de haber pesado dos puñados se plantea que la capacidad se mide en litros y miden lo que ocupa un puñado de lentejas usando un recipiente graduado.

Aunque para el puñado no se puede utilizar el agua, para la almorzada sí pero todos siguen trabajando con lentejas y nadie se plantea hacerlo con agua.

En el caso de la medida del trago, todos los grupos usan agua, solo uno se plantea usar lentejas pero rápidamente descartan la idea por los riesgos implícitos al llenarse la boca de esta legumbre. El procedimiento seguido varía de unos grupos a otros: Utilizando una probeta graduada, la llenan de agua hasta una determinada graduación, por ejemplo 100 ml, se llenan la boca con el agua de la probeta y para determinar la capacidad pedida le restan el agua que ha quedado en la probeta. Otros se llenan la boca con agua del grifo, la echan en un recipiente graduado y miden la cantidad de agua. Sólo un grupo, llevado por la inercia de pesar el puñado y la almorzada de grano, llega a pesar una bocanada de agua para medir la capacidad. El resto no tiene dificultades sobre con qué unidades medir, de hecho, para aumentar la precisión de la medida un grupo se plantea utilizar una probeta de menor diámetro (líneas 34 a 38).

35. E4: 50, bueno un poco más, aproximadamente.
36. E3: Pues échalo aquí (uno más estrecho).
37. E5: Pero eso son mililitros.
38. E4: Esto también.
39. E3: Pero como es más ancho…

En el caso de la capacidad pulmonar, ninguno de los grupos tiene dificultad para enfrentarse a la tarea: todos eligen un globo y lo inflan de un tirón con el aire que tienen en los pulmones. Los problemas surgen cuando tiene que medir el aire contenido en el globo. Deben medir la cantidad de aire que tienen en los pulmones a través del cálculo del volumen del globo que lo contiene.

Al igual que en el caso de la capacidad del puñado y la almorzada, eligen como estrategia pesar el globo vacío e inflado. En este caso, como podemos ver en las líneas 39 a 51, la sorpresa de que la balanza marca 2g en las dos situaciones, a pesar de que tiene precisión hasta los miligramos, hace que invaliden el procedimiento, aunque ninguno cuestiona el porqué de esa medida. La conclusión a la que llegan es que el aire no pesa.

40. E2: Cero (Utilizan una balanza corriente)
41. E1: Esa no pesa.
42. E3: Mm… Espera a ver… (Utiliza la balanza de precisión)
43. E5: Ahí no cabe.
44. E3: Tenemos que ponerlo hasta que quede equilibrado.
45. E4: Pesa más el globo.
46. E2: Coge la chiquitilla.
47. P: 2 gramos.
48. E4: Pesan lo mismo, pero debería de pesar más porque hay más aire. (Prueban con el globo de otro compañero).
49. E5: Un poquitín menos, pon 1.7 o 1.8.
50. P: A mi se me ocurriría pesar uno vacío.
51. ¿Qué conclusión sacamos?
52. E4: Que el aire no pesa.

De estos grupos, uno se plantea medir la circunferencia del globo inflado con una regla rígida y como se les resbala rechazan el procedimiento.

Solo un grupo actúa diferente a los demás, aunque han inflado un globo se plantean soplar el aire directamente dentro de una probeta invertida llena de agua y sumergida en un barreño con agua, y ver el agua que desplaza. Lo descartan por no tener una probeta de ese tipo o una pajita a mano. Después intentan hacer lo mismo con el aire del globo pero no son muy habilidosos y se les sale fuera de la probeta. Este grupo a continuación se plantea enterrar el globo en arena fina dentro de un recipiente graduado y ver la cantidad de arena que desplaza el globo.

Finalmente, todos los grupos terminan sumergiendo el globo y midiendo el agua que desplaza. Al igual que en la comparación del volumen, miden el agua que se derrama al llenar el recipiente de agua completamente, o bien miden el agua que se requiere para que el nivel alcance el logrado cuando estaba el globo dentro.

Discusión y conclusiones

Sobre la información recogida, y una vez identificadas las estrategias y detectados los errores, se han realizado dos tipos de análisis, uno durante la recogida de información y otro a posteriori (Kemmis y Wilkinson 1998). En el primer tipo se encuadra la revisión de los vídeos para extraer las distintas formas de resolver las tareas propuestas en los talleres y se analiza su validez, así como las ventajas e inconvenientes de cada una de las respuestas correctas. A partir de este material se montó un vídeo integrando las distintas actuaciones realizadas por los estudiantes y que han quedado descritas en el apartado anterior. En clase se visionó este vídeo y se fueron discutiendo con los estudiantes la validez de las estrategias puestas en juego, los interrogantes planteados y cómo se solucionaban esos conflictos.

Con esto se consigue proporcionar retroalimentación a la vez que se hace consciente a los futuros maestros de la gran variedad de respuestas que pueden aportar sus escolares, de la importancia de evaluarlas, y de que ellos deberán ser capaces, no sólo de resolver las tareas, sino de juzgar la validez de los razonamientos que aparecerán.

También se reflexiona con los estudiantes sobre la posibilidad de realizar en la escuela tareas semejantes a las que ellos han experimentado en los talleres y cómo adecuarlas a los distintos niveles.

Además, durante esta sesión de reflexión y valoración del contenido del video se apreció un cambio en la actitud de los estudiantes. Mientras que inicialmente los errores los concebían como evidentes y superados después del visionado del video y de la discusión de aula de las estrategias correctas y las dificultades, los estudiantes ya no veían lo errores como algo superado sino como propios (aunque ellos no fuesen los que aparecían en el video) y tomaban conciencia de la necesidad de reelaborar la estrategia o incorporar otras nuevas.

En la valoración final de la asignatura los estudiantes destacaron que las tareas de comparación y de medida les motivaron mucho pues reconocían que no solo habían aprendido al realizarlas sino que también eran fácilmente adaptables al trabajo en un aula de primaria.

Este análisis nos hace pensar que no basta con presentarles a los estudiantes para maestros los errores de los escolares sino que les motiva más y los asimilan mejor si los errores los consideran como propios o experimentan que ellos mismos los pueden cometer.

Otra idea que se ha mostrado muy potente ha sido la de ver a un/a compañero/a cometiendo el error, eso le ha hecho ponerse en su lugar. Este planteamiento debemos incorporarlo siempre que sea posible a nuestras aulas pues estimula a la vez que afianza los aprendizajes.

En las pruebas de evaluación de final de curso los estudiantes no volvieron a mostrar los errores anteriores lo que nos permitió afirmar que habían aprendido esos contenidos. En futuras investigaciones profundizaremos en analizar si el aprendizaje que se había producido era a corto plazo o era permanente.

Referencias

Frías, A.; Gil, F. y Moreno, M. F. (2001) Introducción a las magnitudes y la medida. Longitud, masa, amplitud, tiempo. En E. Castro (Coord.). *Didáctica de la matemática en la educación primaria*. Madrid: Síntesis.

Gil, F. Montoro, A.B. y Moreno, M. F. (2016). Magnitud y su medida en la formación inicial de maestros de primaria. Diseño de una investigación. En Castro, E. Castro, E. Lupiáñez, J.L., Ruiz, J.F. y Torralbo, M. (Edts). *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico*. Granada: Comares

González, M. J. y Gómez, P. (2011). Magnitudes y medida. Medidas directas. En I. Segovia y L. Rico (Coords.). *Matemáticas para maestros de Educación Primaria*. Madrid: Pirámide.

Kemmis, S. y Wilkinson, M. (1998). Participatory action research and the study of practice. En B. Atweh, S. Kemmis & P. Weeks (Eds.), *Action research in practice: Partnerships for social justice in Education*. London: Routledge.

Molina, M; Castro, E.; Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. Enseñanza de las ciencias, 29(1), pp. 75-88.

Moreno; M. F.; Gil, F. y Frías, A. (2001). Área y volumen. En E. Castro (Coord.) *Didáctica de la matemática en la educación primaria.* Madrid: Síntesis.

Moreno; M. F.; Gil, F. y Montoro, A. B. (2015). Sentido de la medida. En P. Flores y L. Rico (Coords.) *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*. Madrid: Pirámide.

Olmo, M. A.; Moreno; M. F. y Gil, F. (1989). *Superficie y volumen: ¿algo más que el trabajo con fórmulas?* Madrid: Síntesis.

Passelaigue, D. y Munier, V. (2015). School teacher trainees' difficulties about the concepts of attribute and measurement. *Educational Studies in Mathematics*, 89, pp.307–336.

Pizarro, N., Gorgorió, N., Albarracín, L. (2014). Aproximación al conocimiento para la enseñanza de la estimación de medida de los maestros de primaria. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 523-532). Salamanca: SEIEM.

Reece, C. S. y Kamii, C. (2001). The Measurement of Volume: Why Do Young Children Measure Inaccurately? *School Science and Mathematics*, 101(7) E356-61.

Shen, J. y Jackson, D. F. (2013). Measure the Volume of a Tree: A Transformative Modeling Lesson on Measurement for Prospective Middle-school Science Teachers. Journal of Science Teacher Education 24: 225–247

Vergnaud, G.; Rouchier, A.; Desmoulieres, S.; Landre, C.; Marthe, P.; Ricco, G.; Samurcay, R.; Rogalski, J. y Viala, A. (1983). Une experience didactique sur le concept de volume en classe de cinquieme - 12-13 ans. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 4(1), pp. 71-120.

LAS ACTIVIDADES DE MEDIDA EN EL LIBRO DE TEXTO: UN ESTUDIO DE CASO[xi]

Measurement activities in textbooks: a case study

Elena Mengual, Núria Gorgorió, Lluís Albarracín

Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

En la siguiente comunicación se muestra el análisis de los temas del bloque de medida propuestos por una editorial de libros de texto de matemáticas en la etapa de educación primaria. Para ello, hemos realizado un estudio de casos con una de las editoriales más ampliamente utilizadas en Cataluña. El análisis está basado en la jerarquización de tareas (Gairín, Muñoz y Oller, 2012) y en la cuantificación de las frecuencias con las que aparecen determinados tipos de actividades que pone de manifiesto la existencia de una incidencia desigual de los contenidos de medida tratados en el libro de texto, que tiende a presentar la medida de forma aritmetizada.

Palabras clave: *medida, libro de texto, jerarquización de tareas.*

Abstract

The following communication shows an analysis about the proposed content by one of the publishing house of mathematical textbooks in the primary education. With this aim, we have made a case study with one of the most widely used publishing houses in Catalonia. The analysis is based on the hierarchy of tasks (Gairín, Muñoz and Oller, 2012) and on the quantification of the frequencies with which certain types of activities appear that highlights the existence of an unequal treatment of contents included in the textbook, which tends to present an arithmetization of the measure.

Keywords: *measurement, textbook, hierarchy of tasks.*

INTRODUCCIÓN

La medida constituye una de las principales actividades humanas a partir de las que se desarrolla la matemática. Está presente en todas las culturas puesto que permite comparar, ordenar, estimar o calcular, con más o menos precisión, distintas magnitudes (Bishop, 1999). El estudio de la medida ofrece la oportunidad de aprender y de aplicar otros contenidos matemáticos permitiendo establecer conexiones entre diversas partes de las matemáticas, y entre las matemáticas y otras áreas (Godino, 2004), especialmente en las ciencias experimentales donde se trabaja con valores numéricos obtenidos al efectuar medidas. En el ámbito matemático, la medida es un tópico de gran riqueza ya que en ella confluyen aspectos geométricos, aritméticos, estadísticos, del concepto de función, de resolución de problemas y, además, desarrolla habilidades y destrezas entre las que se encuentran la creatividad y la habilidad de pensar (Godino, 2004). Además, cuando trabajamos la medida, también desarrollamos el razonamiento y el pensamiento lógico (Clements y Sarama, 2009).

En nuestra investigación nos centramos en el tratamiento de la medida por parte de una editorial de libros de texto de matemáticas en la etapa de educación primaria. Este recurso educativo ha tenido y tiene una implementación y un uso muy extendido en el aula de matemáticas (Fan, 2013). Incluso en tiempos en los que los contenidos digitales han entrado en las aulas, donde el impacto de la tecnología es un hecho evidente, el libro de texto todavía ocupa un lugar central dentro de los distintos recursos docentes para llevar a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje (Pepin, Gueudet y Trouche, 2013). Por tanto, parece claro que los libros de texto han tenido y tienen una gran influencia sobre lo que se enseña en el aula de matemáticas.

Mengual, E., Gorgorió, N. y Albarracín, L. (2016). Las actividades de medida en el libro de texto: un estudio de caso. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 435-443). Málaga: SEIEM

Investigaciones previas han puesto de manifiesto una desnaturalización del tratamiento del aprendizaje de la medida en el libro de texto de forma que los contenidos propios de la medida se substituyen por actividades en las que el peso se centra en procesos aritméticos (Chamorro, 2001; 2003). Aunque las investigaciones encontradas en este sentido corresponden a la ley que estaba entonces en vigencia (LOGSE), en estudios como el de Díez, Cañadas, Picado, Rico y Castro (2016) podemos observar que los contenidos apenas varían entre la LOGSE y la LOE. Los libros de texto analizados se enmarcan dentro de esta última ley. Dada la importancia en los procesos educativos de la medida, en este estudio analizamos el tratamiento de los contenidos de medida en una editorial de libros de texto a partir de las actividades que propone utilizando una jerarquización de tareas elaborada por Gairín, Muñoz y Oller (2012). Nos hemos centrado en analizar las diferentes actividades de los libros de una de las editoriales más ampliamente utilizadas en Cataluña (MEC, 2013) en toda la etapa de educación primaria. Una vez analizado este contenido, se compara con la información recogida en el currículo oficial de la comunidad autónoma de Cataluña.

DEL CURRÍCULO AL LIBRO DE TEXTO

Alsina (2000) recoge cuatro tipos de currículo que se desarrollan en diferentes contextos y lugares. Se denomina currículo oficial al conjunto de documentos oficiales propuestos por las autoridades educativas que elaboran los programas de las diferentes asignaturas, señalando los contenidos, objetivos, criterios de evaluación, etc., y que permite a las instituciones educativas dirigir esfuerzos para la mejora de la enseñanza de las matemáticas (Giménez, Goñi, Guerrero y Velázquez, 2000). El currículo potencial está determinado en diversas publicaciones docentes y materiales como pueden ser los libros de texto y desarrolla el currículo oficial desde un punto de vista teórico y práctico. En tercer lugar, el currículo impartido es el que desarrolla el profesor a lo largo del curso y, por último, el currículo aprendido es el adquirido por el alumnado. En esta misma línea, tal y cómo recogen Monterrubio y Ortega (2009), "*es el propio manual el que determina el currículo real*" (p. 38). Según Torres (1991), el libro de texto se encontraría dentro del currículo interpretado por intermediarios y sirve de nexo de unión entre la parte legislativa y la práctica educativa.

El libro de texto juega un papel importante en el aula debido a que la mayoría de los maestros utiliza este recurso la mayor parte del tiempo, como ha sido documentado en numerosos trabajos (Pepin, Gueudet y Trouche, 2013). En la misma línea, el estudio TIMMS, que se centra en medir los conocimientos de matemáticas y ciencia de los estudiantes de cuarto y octavo grado en todo el mundo, recoge que la mayoría de los maestros de matemáticas utiliza el libro de texto como fuente principal escrita cuando se seleccionan los recursos para la enseñanza (Alajmi, 2012). Por su parte, Fan (2013) considera el libro de texto como una variable intermedia en el contexto de la educación que se ve afectada por unas variables independientes (factores que afectan al desarrollo del libro de texto) y que, a su vez, influyen en otras variables dependientes (factores afectados por los libros de texto).

LA MEDIDA EN EL LIBRO DE TEXTO

Tal y como señala Luelmo (2001), no existe un acuerdo unánime sobre cuál es el proceso de enseñanza más adecuado para desarrollar el trabajo de la medida. Si bien en teoría el profesorado y los investigadores reconocen las ventajas de determinados enfoques, las prácticas del aula y los libros de texto reflejan posturas muy diferentes. En este sentido, Chamorro (2001) pone de manifiesto el fenómeno de la aritmetización de la medida en la enseñanza, es decir, la colonización de la medida por parte de la aritmética. Los libros de texto, tanto de primaria como de secundaria, incluyen casi exclusivamente cálculos aritméticos para las actividades presentadas en los temas de medida, y existe una escasez de actividades de composición y recomposición de figuras, de medición directa con unidades no convencionales, de estimación, y mucho menos de problemas complejos e interesantes que podrían aumentar la motivación del alumnado.

En la etapa educativa correspondiente a la educación primaria se aborda superficialmente la definición de unidades de medida para centrarse rápidamente en la manipulación numérica, donde prevalece el fenómeno de aritmetización de la medida (Luelmo, 2001). Por tanto, se puede afirmar que hay una clara sustitución de saberes donde los problemas de medida se sustituyen por problemas aritméticos, los procesos de medición por el uso de fórmulas y las conversiones, que ocupan más de la mitad del tiempo que se dedica en el aula a la medida (Chamorro, 2001). Por otro lado, las actividades prácticas, como pueden ser las mediciones, son casi inexistentes y se realizan con muchos obstáculos materiales y de gestión del aula (Chamorro, 2003). En relación con la superficie, se continúa sin utilizar actividades que conlleven el pavimentado, únicamente se utilizan cuadrículas en contextos alejados de la vida real, pues no se pide a los alumnos que midan la superficie de objetos cotidianos familiares (Chamorro, 2001).

JERARQUIZACIÓN DE TAREAS MATEMÁTICAS

En la literatura sobre Educación Matemática aparecen numerosas referencias relativas al conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental. Los orígenes de ambos términos remiten al trabajo seminal de Hiebert y Lefevre (1986), en el que se define el conocimiento conceptual como el caracterizado por la riqueza de sus relaciones, como una red conectada de conocimiento donde cada una de estas relaciones es tan importante como cada parte separada de información. Asimismo, una unidad de conocimiento conceptual no puede ser una pieza aislada de información, sólo puede ser parte del conocimiento conceptual si el individuo es capaz de reconocer sus relaciones con otras partes de la información.

Por otro lado, estos autores (Hiebert y Lefevre, 1986) afirman que el conocimiento procedimental está compuesto por dos partes distintas: la compuesta por el lenguaje formal y representación simbólica de la matemática y los algoritmos o reglas para completar tareas matemáticas. Es decir, la secuenciación de instrucciones que se realizan de forma lineal. Para Arrieta (1995), los procedimientos son "*los conocimientos en cuanto actuaciones, a las destrezas, estrategias, métodos, técnicas, usos y aplicaciones*" (p.14). Una característica aquí importante es que en el sistema procedimental, los procedimientos están jerárquicamente dispuestos de forma que algunos procedimientos están incrustados en otro como sub-procedimiento (Hiebert y Lefevre, 1986; Arrieta, 1995). Esta afirmación coincide con la aportación teórica propuesta por Gairín, Muñoz y Oller (2012) donde se describe una jerarquización de tareas para la resolución de actividades matemáticas. Esta jerarquización divide las tareas matemáticas necesarias para realizar una actividad como sigue:

A. Tareas Principales: tareas que claramente constituyen el objetivo principal de la actividad.

B1. Tareas auxiliares específicas: Son aquellas tareas que juegan un papel instrumental para alcanzar la solución de un problema o ejercicio en el que aparecen tareas principales sobre contenidos específicos.

B2. Tareas auxiliares generales: Tareas matemáticas que ha realizado el alumno a lo largo de su formación matemática anterior. Estas tareas auxiliares se agrupan, atendiendo a su naturaleza, en tareas de tipo aritmético, geométrico, de medida, gráfico y de representación, entre otras.

En este estudio utilizamos la jerarquización de tareas de Gairín, Muñoz y Oller (2012) en el análisis de las actividades de medida del libro de texto de educación primaria para clasificar las distintas tareas que surgen en la resolución de dichas actividades.

OBJETIVOS

Ante la situación expuesta, nos preguntamos sobre la forma en la que una de las editoriales más vendidas de libros de texto de matemáticas en Cataluña trata las actividades de medida. Dado que el libro de texto es el principal referente de contenidos en un gran número de aulas de matemáticas, nuestro estudio va encaminado a determinar si el uso del libro de texto es adecuado para cubrir los contenidos y objetivos de la etapa de educación primaria determinados por los currículos oficiales. Este propósito nos lleva a definir los siguientes objetivos de investigación:

1. Caracterizar las actividades de medida propuestas por una editorial de libros de texto, en concreto Vicens Vives, a partir del análisis de tareas principales, auxiliares específicas y auxiliares generales.

2. Contrastar la frecuencia de los bloques de tareas de medida identificadas con la propuesta curricular.

METODOLOGÍA

Para llevar a cabo este estudio, realizamos una investigación cualitativa desde un paradigma interpretativo analizando el contenido de los libros de texto desde la perspectiva del conocimiento matemático implicado. Dentro de los diferentes tipos de estudios cualitativos, esta investigación se enmarca dentro de la tipología de estudio de casos. Pretendemos que este estudio de caso, tal y como señala Stake (1998), abarque la complejidad de un caso particular y nos permita desarrollar unas herramientas de análisis con las que podamos establecer una metodología extrapolable a los materiales de otras editoriales de forma más rápida.

Para ello, hemos escogido como datos para el análisis los libros de texto de matemáticas de la editorial Vincens Vives para toda la etapa de educación primaria, por ser una de las editoriales más vendidas en Cataluña y en España (MEC, 2013). Por tanto, los libros de esta editorial son ampliamente utilizados en las aulas de matemáticas de primaria en España y gozan de una alta aceptación entre el profesorado. El currículo que siguen los libros de Vicens Vives analizados es el recogido en el Decreto 142/2007, de 26 de junio, por el cual se establece la ordenación de la enseñanza de educación primaria en Cataluña. En este currículo los contenidos del bloque de medida se dividen en la comprensión de las magnitudes medibles, de las unidades y del proceso de medir, y en la aplicación de técnicas e instrumentos adecuados para medir.

En nuestro estudio hemos analizado las diferentes actividades relacionadas con la medida que aparecían a lo largo del libro de texto en los tres ciclos. En total se han analizado 1912 actividades: 1002 del ciclo superior, 766 del ciclo medio y 144 del ciclo inicial.

Descripción del proceso de análisis

En este apartado recogemos una ejemplificación del tipo de análisis realizado que presente ilustrar cómo se han analizado los libros de texto. Para llevar a cabo el análisis nos valemos de la aportación teórica propuesta por Gairín, Muñoz y Oller (2012), que nos sirve de guía para describir y clasificar las diferentes tareas involucradas en la resolución de cada actividad de medida.

Nuestro primer paso fue resolver cada una de las actividades identificando los pasos necesarios para la solución de las mismas y los diferentes tipos de tareas según la aportación teórica de Gairín, Muñoz y Oller (2012). Una vez realizado este análisis, nuestro segundo paso consistió en agrupar las diferentes actividades según la tarea principal identificada. Este último paso nos permitió general esquemas para cada tipo de tarea principal presente en el libro de texto donde se muestra el conocimiento conceptual y procedimental que se pone en juego para la realización de las actividades asociadas a esa tarea principal.

El ejemplo seleccionado para ilustrar el proceso de análisis es una actividad de 6º de primaria donde el alumno debe realizar una suma de expresiones complejas de tiempo que se muestra en la Figura 1. Para resolver esta actividad, el alumno debe combinar y coordinar diversos conceptos y procedimientos trabajados anteriormente en otras actividades propuestas por el libro de texto.

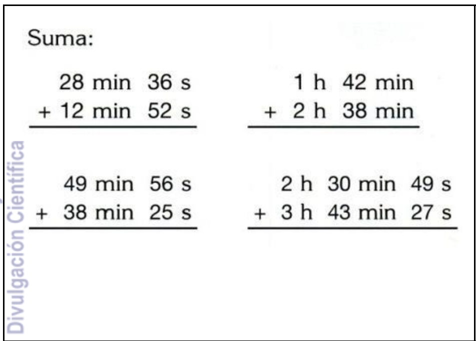


Figura 1. Actividad de 6º de Primaria propuesta por el libro de texto.

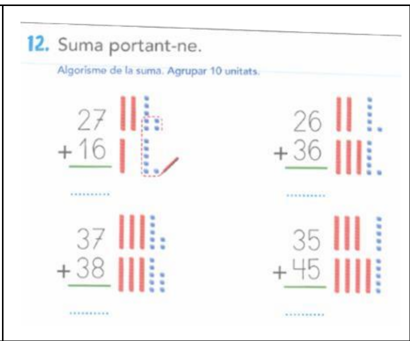


Figura 2. Actividades relacionada con la suma de expresiones complejas de tiempo, la suma de naturales (1º)

Figura 3. Actividades relacionada con la suma de expresiones incomplejas de capacidad (4º)

El primer paso previo requiere el dominio de una operación aritmética básica, la suma. Desde el primer curso de educación primaria los alumnos se enfrentan a actividades cuyo objetivo principal es la realización de esta operación aritmética, como se muestra en la Figura 2. La siguiente fase consiste en la suma de dos expresiones incomplejas de una magnitud de medida (Figura 3). Para poder realizar esta operación es necesario que las medidas que vamos a sumar estén expresadas en la misma unidad.

Cuando el alumno llega a enfrentarse a actividades donde debe sumar o restar expresiones complejas de tiempo, debe dominar la suma o resta de dos números naturales cualesquiera y la suma o resta de expresiones incomplejas de tiempo. De esta manera, en la Figura 4 mostramos la caracterización de las tareas a realizar para resolver la actividad de la Figura 1 a partir de la jerarquización de tareas propuesta por Gairín, Muñoz y Oller (2012). Se muestra en detalle del proceso para realizar esta actividad y todas aquellas en las que se ven involucrados cálculos con expresiones complejas de una medida. Este esquema se lee de izquierda a derecha y describe un posible procedimiento para la realización de la actividad donde se van realizando las diferentes tareas para dar solución al mismo. Los pasos que se describen dentro del recuadro en el que se enmarca cada tarea es el conocimiento procedimental. Por otro lado, el conocimiento conceptual se sitúa fuera estos marcos. Como no es lo mismo sumar que restar expresiones complejas de tiempo se ha querido diferenciar esto en el cuadro pintando de color naranja el camino asociado a la resta y de morado el camino asociado a la suma.

Este esquema permite establecer la caracterización de las diferentes tareas necesarias para resolver la actividad. En concreto, la tarea principal de esta actividad y por tanto el objetivo de la misma es sumar expresiones complejas de tiempo. La tarea auxiliar específica es la suma de expresiones incomplejas y la tarea auxiliar general se corresponde con una tarea de tipo aritmético donde hay que realizar una suma. Ambas tareas tienen asociado tanto el conocimiento conceptual como procedimental. Para resolver la suma de expresiones complejas de tiempo es necesario conocer los siguientes contenidos: las unidades para medir una magnitud de tiempo, la relación entre las unidades y cuál es esa relación, la idea de cambio de base sexagesimal y el algoritmo de la suma en base decimal entre las mismas unidades. Todos estos contenidos conforman el conocimiento conceptual para abordar esta actividad. El esquema también incluye los aspectos particulares para las actividades de resta, cuando es necesario pedir prestada una unidad a otra mayor para poder restar en el caso de que el minuendo sea 0 o menor que el sustraendo.

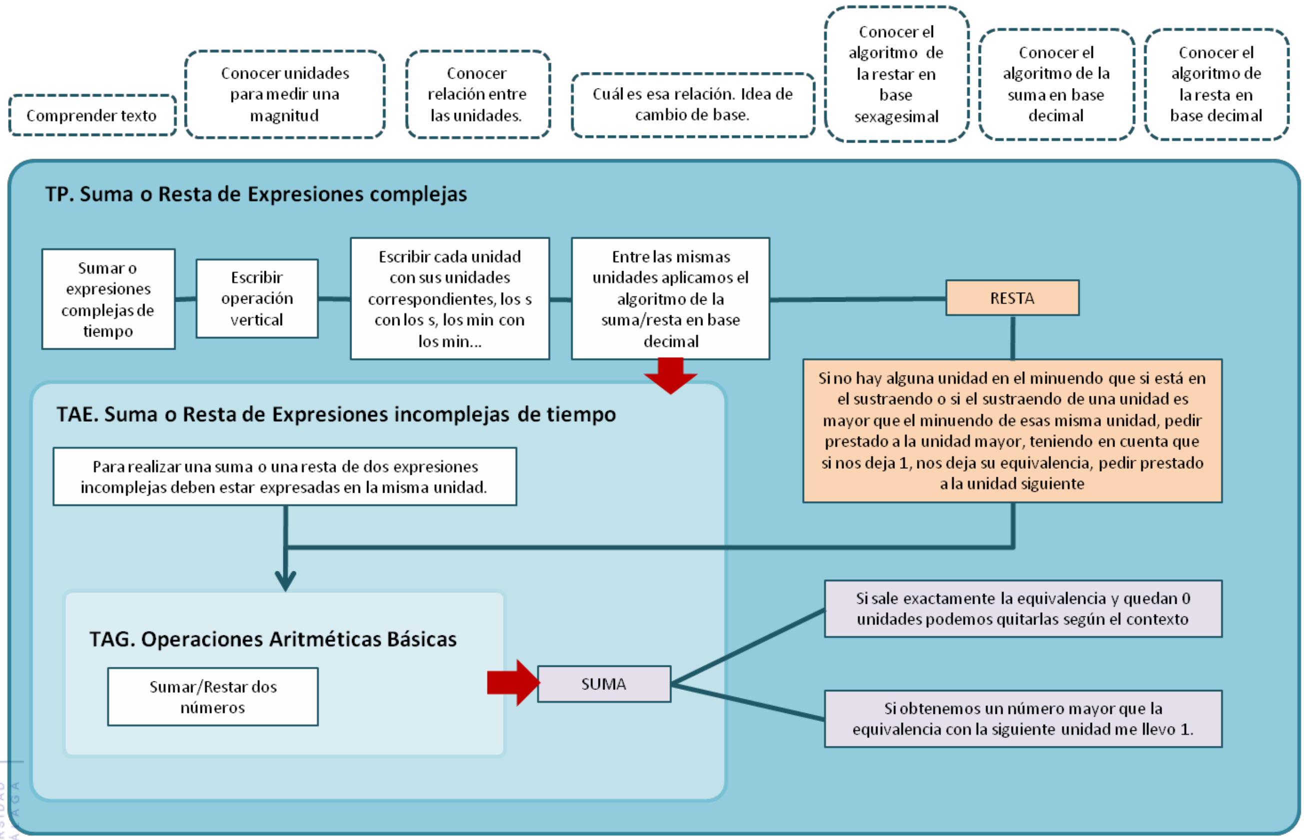


Figura 4. Esquema de resolución propuesto para la actividad de la Fig. 1 que permite caracterizar las diferentes tareas necesarias para la resolución

Este tipo de análisis se realiza para todas las actividades de medida de los libros de texto analizados y nos servimos del programa informático NVivo9 para codificar las distintas tareas en las tres categorías (tareas principales, auxiliares específicas y auxiliares generales) para generar los resultados que mostramos a continuación.

RESULTADOS

A continuación presentamos los diferentes tipos de resultados obtenidos a partir del análisis de las tareas matemáticas promovidas en los libros de texto escogidos.

Clasificación de actividades por su tarea principal

A partir de la categorización de las diferentes tareas principales que se tratan en los libros de texto analizados, encontramos una caracterización de las tareas promovidas en las actividades de medida. Entendemos que esta caracterización es un primer tipo de resultados en el sentido que nos permite determinar el tipo de trabajo matemático que conforma el currículo potencial propuesto por el libro de texto. Agrupamos las tareas principales identificadas en bloques de contenido que hemos extraído del currículo oficial. En la tabla 1 recogemos un listado exhaustivo de las tareas principales identificadas agrupadas en bloques de contenido de acuerdo con la tabla anterior. Incluimos el bloque PCM que corresponde a problemas contextualizados en la medida. Un ejemplo extraído del libro de texto analizado que se ajusta a esta definición es el siguiente:

Una pastilla de un medicamento contiene 25 mg de azúcar. Calcula los gramos de azúcar que se necesitan para fabricar 6.000 pastillas de este medicamento.

Tabla 1. Listado de tareas principales identificadas en el análisis agrupadas por bloques de contenido

	Bloque de contenido	Tareas principales
MU	Magnitudes y selección de unidad.	Identificar magnitudes y medidas en un texto Elegir la unidad o medida más apropiada
CO	Comparación y ordenación de medidas	Ordenar diferentes medidas Comparar diferentes medidas
MED	Medir	Medir, estimación del error en una la medida, y dibujar una medida con el instrumento adecuado.
EX	Leer y escribir medidas.	Leer medida de un instrumento ya presente en la actividad. Interpretación de husos horarios.
CUO	Cambio de unidades y operaciones	Proceso de cambio de unidades. Relacionar expresiones en distintas unidades. Cambiar la expresión de una medida de forma compleja a incompleja y de forma incompleja a compleja. Suma y resta de expresiones complejas de tiempo.
MMG	Medidas Geométricas	Cálculo por recuento de elementos concepto de unidad de medida. Cálculo a partir de una medición. Cálculo por aplicación de una fórmula.
EST	Estimar	Estimar una medida.
ESC	Proporciones y Escalas	Uso de proporciones y escalas entre valores numéricos de medidas.
PCM	Problemas contextualizados en la medida	Sumar, restar (de forma directa o calculando un sumando para que se cumpla una igualdad), multiplicar, dividir y comprobar el resultado de operaciones. Redondear. Escribir una fracción mixta como un número decimal. Elegir objetos cuya suma sea una medida establecida.
OTRAS	Introducción al álgebra	Tareas relacionadas con la introducción de procedimientos algebraicos.

Frecuencias por tipo de tarea principal

Presentamos en este apartado los resultados de frecuencia relativa de las tareas principales identificadas en las tareas de medida para poder mostrar un mayor nivel de detalle sobre la enseñanza de la medida propuesta por los libros de texto analizados. Para simplificar la presentación de los datos, agrupamos las diferentes tareas en los bloques de contenido presentados en la Tabla 1. En concreto, la

Figura 5 muestra las frecuencias relativas de los bloques de contenidos de las tareas principales identificadas en las actividades de medida del libro de texto separadas por ciclo.

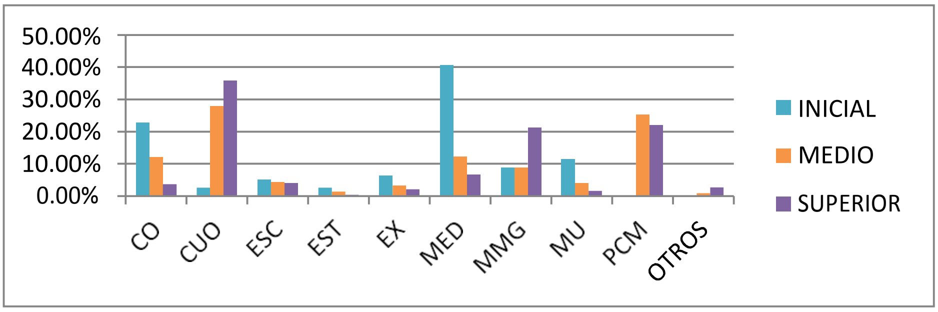


Figura 5. Porcentajes de las tareas principales de medida identificadas agrupadas por bloques de medida y separadas por ciclo.

Los resultados mostrados evidencian un tratamiento desigual de los diferentes procesos y conceptos asociados a los contenidos de medida. En concreto, podemos observar que la identificación de magnitudes y la elección de unidades, que podemos entender como uno de los aspectos clave para la fundamentación de la medida, tiene una presencia escasa y que disminuye progresivamente durante la etapa de educación primaria. Las actividades de este bloque (MU) tienen un mayor tratamiento en el ciclo inicial, en el que representa un 11,39% de las tareas principales, y disminuye en los ciclos posteriores ocupando sólo un 3,92% de las tareas principales en el ciclo medio y un 1,53% de las tareas en el ciclo superior. Es destacable la práctica ausencia de actividades en las que se promueva la estimación de medida, que aparece en la literatura como un aspecto clave para la interiorización del concepto de unidad de medida (Clements y Sarama, 2009). La frecuencia para cada uno de los ciclos de actividades de estimación de medida (EST) es del 1,75% en el ciclo inicial, 1,16% en el ciclo medio y del 0,36% en el ciclo superior.

En contraposición, la propuesta del libro de texto para el aprendizaje de la medida parece basarse en aspectos como la comparación y ordenación de medidas y en aspectos instrumentales como el cambio de unidades. La frecuencia de aparición de las actividades de cambio de medidas y operaciones (CUO) es del 2,53% en el ciclo inicial, 27,88% en el ciclo medio y del 35,88% en el ciclo superior. Los procesos de medición directa tienen una alta incidencia en el primer ciclo pero su presencia disminuye en los ciclos medio y superior. El porcentaje de incidencia de las tareas principales de este bloque (MED) varía del 40,51% en el ciclo inicial al 12,21% en el ciclo medio y al 6,68% en el ciclo superior.

En las dos últimas etapas se observa una alta presencia de actividades de medida contextualizadas en forma de problema para los alumnos, pero si observamos en detalle la forma de estas actividades podemos observar claramente el fenómeno de la aritmetización de la medida que indica Chamorro (2001). Observamos que algunos de los bloques de contenidos con mayor presencia en los libros analizados son los que presentan los índices más altos de actividades de medida que han sido aritmetizadas, como serían las relacionadas con los cambios de unidades o los problemas contextualizados. Ahora bien, dentro de los diferente bloques de medida encontramos actividades cuya donde prima el dominio de conceptos y procedimientos aritméticos. Un ejemplo claro de este tipo de actividades es la medida indirecta de figuras geométricas. Aunque es importante considerar también esta parte de la medida no debemos perder de vista la importancia que les brinda el libro de texto, donde el porcentaje de actividades de medición indirecta en cada bloque es:

Tabla 2. Porcentaje de actividades de medida indirecta en el bloque MMG

	C. INICIAL	C. MEDIO	C. SUPERIOR
MMG de forma indirecta	0%	85,42%	62,86%

Por tanto, un 6,28% de las actividades del ciclo medio y un 12,46% de las actividades del ciclo superior se basan en la aplicación de una fórmula. De esta manera, si tenemos en cuenta que las actividades que se encuentran dentro de los bloques de PCM y CUO también requieren del dominio de conceptos y procedimientos aritméticos, los porcentajes de actividades numéricas en cada bloque y por cada etapa son:

Tabla 3. Porcentaje de actividades aritmetizadas en cada ciclo por bloques.

	C. INICIAL	C. MEDIO	C. SUPERIOR
CUO	2,53%	27,88%	35,88%
MMG de forma indirecta	0,00%	6,28%	12,46%
PCM	0,00%	25,35%	21,95%
TOTAL	2,53%	59,51%	70,29%

Conforme avanzamos en la etapa de educación primaria el tipo de actividades aritmetizadas es mayor, de hecho, los porcentajes del ciclo medio y superior son muy elevados. En toda la etapa de educación primaria, encontramos que el 60,62% de las actividades están aritmetizadas.

CONCLUSIONES

El análisis realizado nos permite comprobar la afirmación de Chamorro (2001) sobre la aritmetización de la medida en los libros de texto analizados al mismo tiempo que hemos podido cuantificar este fenómeno en este estudio. Entendemos que la elección de las actividades presentes en el libro de texto analizado está orientada al trabajo individual en el aula sobre el soporte del papel, con lo que difícilmente pueden trabajarse de igual forma los contenidos de medida especificados en el currículo. Este hecho nos remite al tipo de trabajo matemático realizado en las aulas que es preferido por los maestros, que son los encargados de elegir los materiales didácticos utilizados.

De los resultados observamos que, tal y como recoge Luelmo (2001), el trabajo promovido por el libro de texto pretende centrarse en la manipulación numérica se busca que los alumnos efectúen conversiones u operaciones con seguridad y rapidez. Aunque hayamos identificado actividades en las que se propone que los alumnos realicen mediciones, hemos observado que el libro de texto no invita a los alumnos a realizar una descripción oral, gráfica y escrita de la medida de las distintas magnitudes así como a contrastar y analizar diversas estrategias de medida, que forma parte del currículo oficial y aparece en los tres ciclos. Asimismo, las mediciones directas se realizan exclusivamente dentro de las magnitudes de longitud y área. Por otro lado, la anticipación e interpretación del error de una medida apenas se considera dentro de las tareas analizadas y, en su mayoría, se hace desde la perspectiva de la interpretación del error obtenido. Dado que el error en la medida es inherente al proceso de medición, podemos intuir que la acción de medir se presenta de forma irreal. Este tratamiento presenta una forma sesgada e incompleta de la medida, ya que proporciona la falsa creencia de que los procesos de medida siempre son exactos.

Detectamos dos grandes ausencias en propuesta didáctica como son la construcción de los conceptos de magnitud, de unidad de medida y el uso de la estimación de medidas en el aula. En particular, la ausencia de la construcción matemática del concepto de estimación podría estar relacionado con el hecho de que existe una idea preconcebida externa a la educación matemática que le resta importancia (Pizarro, Gorgorió y Albarracín, 2014). Los resultados de nuestro estudio confirman que el trato que ofrece el libro de texto estudiado al trabajo de medida está orientado a tratarla como si fuera un entorno para el trabajo aritmético, con lo que se produce una desnaturalización de los objetivos de medida a trabajar.

A partir de los resultados obtenidos en este trabajo, entendemos que la herramienta de análisis desarrollada permite una descripción de gran valor de los contenidos curriculares actividades y el estudio presentado debe extenderse a las propuestas de otras editoriales. De la misma forma, consideramos que el presente estudio puede complementarse con el análisis de la evolución de los conceptos de medida presentados para estudiar si se adecúa a las propuestas de aprendizajes marcadas en el currículo. Este estudio es el resultado de un trabajo más amplio donde se estudia también la evolución de las distintas tareas a lo largo de la etapa de educación primaria. Tareas que en una determinada etapa son principales pasan a un segundo plano en forma de tareas auxiliares en cursos posteriores.

Referencias

Alajmi, A. H. (2012). How do elementary textbooks address fractions? A review of mathematics textbooks in the USA, Japan, and Kuwait. *Educational Studies in Mathematics, 79*(2), 239–261.

Alsina, C. (2000). Mañana será otro día: un reto matemático llamado futuro. En J.M. Goñi (Ed.), *El currículo de matemáticas en los inicios de siglo XXI*. Barcelona: Graó.

Arrieta, M. (1995). Los procedimientos en Geometría. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, (3), 13-20.*

Bishop, A. J. (1999). *Enculturación matemática: la educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós.

Clements, D. & Sarama, J. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. New York: Routledge.

Chamorro, M. C. (Coord.) (2001). *Dificultades del aprendizaje de las Matemáticas*. Madrid: MEC.

Chamorro, M. C. (2003). El tratamiento escolar de las magnitudes y su medida. En M.C. Chamorro (Ed.), *Didáctica de las matemáticas* (pp.221-244). Madrid: Pearson.

Díez, A. Cañadas, M.C., Picado, M., Rico, L. y Castro, E. Magnitudes y su medida en el currículo de primaria en España (1945-2013). *Revista de currículum y formación del profesorado, 20*(1), 341-363.

DOGC (2007). Decret 142/2007, de 26 de juny, pel qual s'estableix l'ordenació dels ensenyaments de l'educació primària.

Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM*, *45*(5), 765-777.

Gairín, J.M., Muñoz, J.M., Oller, A.M. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 261 - 274). Jaén: SEIEM

Giménez, J., Goñi, J., Guerrero, S. y Velázquez, F. (2000). Introducción. En J. Goñi (Ed.), *El currículo de matemáticas en los inicios del siglo XXI* (pp.7-11). Barcelona: Graó.

Godino, J.D. (2004). *Matemáticas para maestros* [versión electrónica]. España: Universidad de Granada. Recuperado el 24 de marzo de 2014 de: http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/8_matematicas_maestros.pdf

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Luelmo, M.J. (2001). Medir en secundaria: algo más que fórmulas. X Jornada para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas. *Actas del X JAEM* (pp. 727-737). Zaragoza.

MEC (2013). *Panorámica de la Edición Española de Libros 2013*. Madrid: MEC.

Monterrubio, M.C. y Ortega, T. (2009). Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 37-53). Santander: SEIEM.

Pepin, B., Gueudet, G., & Trouche, L. (2013). Investigating textbooks as crucial interfaces between culture, policy and teacher curricular practice: two contrasted case studies in France and Norway. *ZDM, 45* (5), 685-698.

Pizarro, N., Gorgorió, N., Albarracín, L. (2014). Aproximación al conocimiento para la enseñanza de la estimación de medida de los maestros de primaria. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 523-532). Salamanca: SEIEM

Stake, R. E. (1998). *Investigación con estudio de casos.* Madrid: Morata.

Torres, J. (1991). *El curriculum oculto*. Madrid: Morata.

i [1] La investigación que se presenta ha sido financiada por el Proyecto Caracterización del conocimiento disciplinar en matemáticas para el grado de educación primaria: matemáticas para maestros, I+D, RETOS, Dirección General de Investigación (ref. EDU2013-4683-R). Los autores pertenencen al Grupo de Investigación Educació matemàtica i context: competència matemàtica (EMiC:CoM), reconocido como Grupo de Investigación Consolidado y financiado por la Direcció General d’Universitats (ref. 2014SGR 00723).

LA CONTEXTUALIZACIÓN SOCIAL EN LOS LIBROS DE TEXTO DE EDUCACIÓN PRIMARIA DE MATEMÁTICAS DE LA INDIA

Social context in the primary education mathematics textbooks in India

Ramis-Conde, I. [a], Molina, D. [b], Hope, A. [c]

[a]Facultad de Educación de Cuenca, Universidad de Castilla la Mancha, [b]ETSI de Ciudad Real, Universidad de Castilla la Mancha, [c]Facultad de Filosofía y Letras, Universidad Autónoma de Madrid

Resumen

La India presenta un formato público y universal de libros de texto para todas las escuelas de Primaria. En estos, la contextualización de los problemas toma un papel principal en la que factores sociales generan un escenario en el cual la resolución adquiere un sentido real. En este artículo se analiza la contextualización de dos capítulos de los libros de cuarto y quinto curso de Primaria de la India; y se muestra cómo la contextualización de los problemas presentados atiende a objetivos específicos del plan de desarrollo del estado Indio.

Palabras clave*: libros de texto, contextualización, India, etnomatemáticas.*

Abstract

The Indian State provides mathematics textbooks at Elementary Levels in public schools. The textbooks context represents a principal role in which social factors generate a scenario where the mathematical resolution of the problems has a real meaning. In this article, we analyze the context of two chapters from 4th and 5th primary levels in India. We show how the context of the textbook problems attends specific objectives of the Indian State Development Plan.

Keywords: *textbooks, problem context, India, ethnomathematics.*

INTRODUCCIÓN

En el momento inmediato de enfrentarse a un problema matemático la contextualización representa un elemento central en la motivación para resolverlo. La contextualización de situaciones matemáticas da sentido a la necesidad de resolver los problemas (Ezeife, 2002; Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015; Ascher y Ascher, 1997; Freudenthal, 1986). Motivar al niño a resolver un problema determinado a partir de una buena contextualización no es un problema trivial. Transciende de lo puramente matemático ya que se necesita abordar realidades dentro de los intereses particulares del niño (Díaz y Poblete, 2001; Freudenthal, 1986; Blanco-Nieto, 1993). Distintos experimentos en el área de las etnomatemáticas han demostrado que las particularidades del entorno son determinantes en el modo de aprendizaje (Yackel, 1996). Es por tanto que el entorno del niño determina un espacio donde se deben buscar contextos matemáticos adaptados a este. A largo plazo, el uso de buenas contextualizaciones ayuda a proveer de un sentido general a la materia y luchar contra creencias y actitudes negativas hacia las matemáticas. El caso de los libros de texto de Educación Primaria presenta un entorno específico en el cual las contextualizaciones deben de estar bien diseñadas para dotar de sentido a las matemáticas.

En la India existe un formato de libro de texto estatal generalizado para todas las escuelas públicas. La colección de la etapa referente a Primaria lleva el título de *Math Magic* (Math Magic, 2010),

Ramis-Conde, I., Molina, D., y Hope, A. (2016). La Contextualización Social en los Libros de Texto de Educación Primaria de la India. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 445-454). Málaga: SEIEM

diseñada en la Universidad de Delhi. Los libros de Math Magic están inspirados en el currículo oficial de la India 2005, el *National Curriculum Framework 2005* (National curriculum framework, 2005; National focus group on teaching of Mathematics, 1986). Este establece los siguientes cinco pilares fundamentales que definen un marco para la actividad docente: 1. buscar una conexión de las matemáticas con la realidad, 2. buscar una enseñanza no basada en la memorización de conceptos sino en la comprensión, 3. enriquecer el curriculum explorando espacios más allá de los libros de texto, 4. hacer exámenes más flexiblemente e integrar esta dinámica en el día a día de la clase, y 5. comprometer el aprendizaje a los principios democráticos del país. Se hace referencia explícita al uso de los libros de texto estableciendo el carácter relativo de esta herramienta. Como consecuencia, el diseño de estos deberá estar basado en estos cinco pilares fundamentales en la medida de lo posible.

Más allá de los elementos tradicionales de este tipo de leyes, el National Curriculum Framework (2005) también hace mención explícita a un plan de desarrollo estratégico para ayudar a poblaciones desfavorecidas (Bhagwati, 2011). El National Curriculum Framework (2005) reconoce explícitamente los problemas derivados de la pobreza en la educación:

> Aspirations for education are belied by endemic poverty and unequal social relations, and by lack of adequate provision of schooling of equitable quality/ Aspiraciones para la educación están en contradicción con la pobreza endémica y la falta de escolarización adecuada y una calidad equitativa.

Es por tanto que los libros de texto tienen objetivos sociales ligados a este plan. Esta estrategia se ve reflejada en la contextualización de los problemas matemáticos de los libros. Como resultado, se presentan contextualizaciones matemáticas que son de interés *per se* y no textos incluidos como enunciados de problemas que distan de la vida cotidiana del niño, como ocurre en muchos de los problemas presentados en los libros de texto españoles.

A partir de analizar la contextualización de los libros Math Magic, se pueden detectar tres objetivos no exclusivamente matemáticos que persigue la colección. Estos son:

- Aumentar la percepción positiva del niño y de su entorno familiar hacia las matemáticas.
- Luchar contra problemas de escolarización en poblaciones pobres.
- Utilizar las matemáticas como herramienta de formación profesional desde edades tempranas.

Es por tanto un ejemplo específico del uso de contextualizaciones matemáticas desde la Educación Primaria para abordar problemas que atañen a la comunidad del niño en un entorno matemático creativo. Esta dimensión de la contextualización puede ser de interés para la comunidad de didactas españoles a la hora de diseñar contextualizaciones más ricas e interdisciplinares, así como reflexionar sobre la naturaleza holística del contexto de los problemas matemáticos.

LOS LIBROS DE TEXTO COMO HERRAMIENTA SOCIAL

La India es el país en el que la diversidad cultural y sociológica es posiblemente la más amplia del planeta. Reconoce 22 idiomas distintos así como una variedad étnica enorme. Problemas de pobreza, escolarización, marginación social y de género (Wu, Goldschmidt, Boscardin, y Azam 2007) presentan a día de hoy un reto principal para el estado Indio. Investigaciones llevadas a cabo en Uttar Pradesh revelaron que durante la etapa de Educación Primaria, el 41% de los niños no puede leer un párrafo simple, el 56% no sabe escribir y el 63% no es capaz de realizar sumas básicas (Banerjee et al., 2005).

En este escenario, una herramienta como el libro de texto que es distribuida masivamente en todas las escuelas públicas debe de ser utilizada de forma que se obtenga el mayor beneficio de esta en todas las áreas, y no únicamente en matemáticas. Un ejemplo muy gráfico de esto se puede observar en la fotografía de la Figura 1. Las páginas de los capítulos que tratan nociones de medida incluyen una regla en el margen. Este elemento transciende la educación matemática, así se evita que familias desfavorecidas tengan que comprar una regla. Si bien este es un ejemplo un tanto *materialista*, el verdadero potencial del libro como herramienta social se desarrolla en el ámbito de la contextualización.

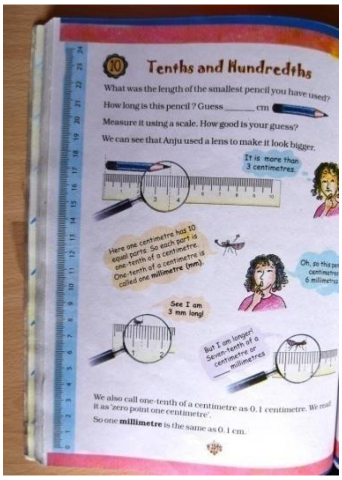


Figura 15. Fotografía de una página del libro de Math Magic de quinto curso de Primaria. El margen lateral incluye una regla milimetrada.

En los libros de texto de la India abundan los capítulos en los que la propia contextualización es la que determina el temario a tratar. A nivel matemático esta estructura da una prioridad a situaciones matematizables y modelizables sobre ejercicios repetitivos. Además, permite abordar problemas interdisciplinares y buscar contextualizaciones que determinen problemas reales concernientes a las poblaciones a las que está dirigido el texto.

En este formato, las distintas temáticas matemáticas se mezclan e intercalan dentro de cada capítulo, siguiendo una marcada intención de trabajar el pensamiento divergente (Hudson, 1966; Orton, 2003; Wall y Varma, 1972) y distintos estilos de aprendizaje (Cassidy, 2004). Además, los elementos tales como definiciones, fórmulas, etc. no suelen aparecer de forma explícita en el libro. Así, dentro de las posibilidades de un libro de texto se puede decir que tiene una aproximación constructivista.

Esta estructura de libros requiere un esfuerzo extra por parte del docente. Si el temario no viene explicitado en el texto, debe de conocerlo y dominarlo, y a la vez ser capaz de relacionar las actividades propuestas en el libro con conceptos matemáticos específicos. Enseñanzas de marcado carácter constructivista deben de relacionarse con objetivos claros de aprendizaje, tales como definiciones y algoritmos para evitar quedar únicamente en un plano meramente intuitivo (Ball, 2005). Desde este punto de vista, se asume un elevado riesgo: es frecuente que en zonas geográficas en desarrollo problemas de base en la formación de los maestros. En un experimento llevado a cabo para medir la profesionalidad de los maestros en India en áreas rurales, los resultados mostraron que el 25% de los maestros estaban ausentes en las clases y el 50% no estaba ejerciendo labores de docencia durante las visitas de los investigadores (Kremer, Miguel y Thornton, 2004).

Contextualización en torno al ladrillo

En esta sección analizamos una contextualización del primer capítulo del libro de cuarto curso de Primaria. El capítulo genera un historia alrededor del ladrillo, el cual es el protagonista. A partir de distintas situaciones relacionadas con este objeto aparecen problemas matemáticos de diversa índole.

La estructura del argumento parte de un universo cercano al niño, comenzando en una escuela y presentando los distintos mosaicos que forman los ladrillos del suelo. Los ejercicios de la primera parte se centran en el reconocimiento de patrones geométricos, movimientos y diseño de mosaicos. Se introducen preguntas no matemáticas, así como preguntas de corte creativo trabajando desde una perspectiva holística, como por ejemplo

> ¿Qué patrón de mosaico te gusta más?
>
> Dibuja un patrón de mosaico (sin presentar ningún tipo de plantilla).

Posteriormente el escenario se amplia a contextos más aplicados del ladrillo en la construcción. Por ejemplo, el ejercicio de corte creativo y artístico mostrado en la Figura 2.

Este es el dibujo de un bonito jaali. Ahora colorea algunos ladrillos de rojo y crea tu propios patrones de jaali en el muro de abajo.

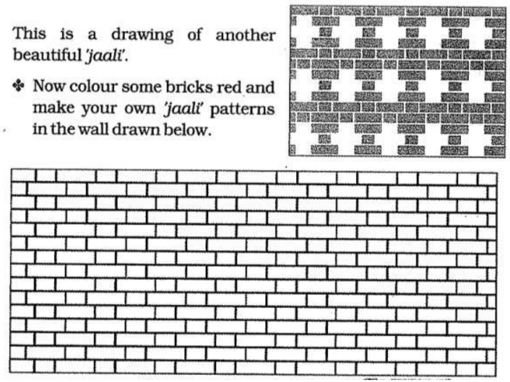


Figura 2: Ejercicio de corte creativo en el que se pide diseñar un *Jaali*

En esta transición del argumento empieza a aparecer un carácter formador de las matemáticas: al niño se le está instruyendo a diseñar distintos tipos de *jaalis.* A medida que se introduce el ladrillo como herramienta fundamental de la construcción, los ejercicios adquieren un carácter marcadamente aplicado. Se relacionan las propiedades geométricas del ladrillo con la construcción como el ejercicio mostrado en la Figura 3.

¿Cuál de los dos muros crees que es más fuerte?

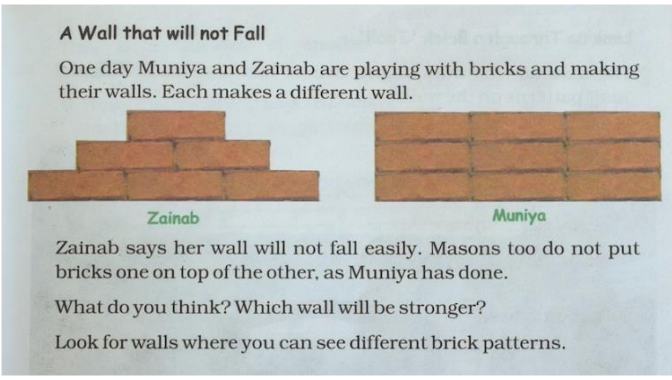


Figura 3: ejercicio creativo con aplicación real

Un análisis más profundo muestra cómo se relaciona el entorno lúdico infantil, "*playing with bricks* / jugar con ladrillos", y el mundo adulto de construcción, "masons do not / los albañiles no…". Esto da un contexto real al ejercicio. A la vez, da una pista implícita: "los albañiles no lo hacen como Muniya", antes de utilizar un par de preguntas abiertas, "¿Qué piensas? ¿Cuál de los muros será más fuerte?". Se convierte además en un problema experimental: intentar hacer murallas resistentes con bloques o ladrillos de verdad, y en una reflexión sobre cómo son los muros que han visto (ambos "*masons do not…*" y "*look for walls where you can see different brick patterns* / busca muros donde puedes ver distintos patrones de ladrillos"). El título también funciona para dar una pista "a *wall that will not fall* / un muro que no caerá". Las pistas llevan al niño a un punto de hipotetizar con dos cuadros de experiencia para llegar a la solución adecuada. La última pregunta ayuda a confirmar la hipótesis: si todos los muros son como el muro de Zainab, hay una razón, y la razón es que es el más fuerte.

En la parte final del capítulo se presentan problemas de medida y cálculo relacionados con la construcción, producción y compraventa de ladrillos:

Busca un ladrillo y mídelo. ¿Cuánto mide de ancho, largo y alto?

Muniya quiere construir un muro de un metro de altura. ¿Cuántos ladrillos tendrá que poner?

Bhajan ha decidido comprar ladrillos de Brichkabad. Ha comprado tres mil ladrillos. ¿Cuánto ha pagado?

La selección de ejercicios anteriores es representativa de la variedad matemática en cuanto a temario y modos de pensamiento del capítulo y la colección. De esta forma, es la contextualización (en torno al ladrillo) el elemento que determina el temario matemático a tratar en el capítulo y no a la inversa. A lo largo del capítulo se pueden diferenciar los tres objetivos principales (mencionados en la introducción del artículo) de extensión social:

1) *Aumentar la percepción positiva del niño y de su entorno familiar hacia las matemáticas*. La contextualización identifica las matemáticas con situaciones cercanas a él como es el universo escolar. Pero no solamente es la escuela el entorno desde el cual se pretende motivar al niño. También situaciones del universo laboral familiar juegan un rol motivador.

Tradicionalmente la manufacturación del ladrillo ha sido un oficio familiar en la India (Bhukuth y Ballet, 2006). La imagen inferior derecha de la Figura 4 reconoce este estatus mostrando a diferentes miembros de una familia trabajando. Los hijos han ayudado en el proceso de modelado de ladrillos y como consecuencia se mejoraban los ingresos familiares. Este escenario determina un paradigma en la escolarización. Familias muy pobres necesitan de la ayuda de sus hijos para subsistir y se producen problemas de absentismo y desescolarización.

2) *Luchar contra problemas de escolarización en poblaciones pobres*. En situaciones de bajos recursos económicos ocasionalmente se emplea a los niños desde edades tempranas para mejorar las ganancias familiares. Se presenta el reto de transmitir a los padres la importancia de escolarizar a sus hijos en vez de enviarles a trabajar (Bhagwati, 2011; Bhatty, 2011). Hacer comprender a los padres que las matemáticas son una herramienta útil en entornos conocidos por ellos multiplica las probabilidades de escolarización de los niños. Una contextualización que pueda ser entendida por los padres como una solución a sus problemas es además una buena propaganda de la escuela.

3) *Utilizar las matemáticas como herramienta de formación profesional desde edades tempranas*. Elegir situaciones matematizables reales ayuda a transferir conocimientos aplicables, independientemente de su puesta en práctica en un futuro o no. Todos los problemas presentados en el capítulo son de aplicación real en el mundo de la construcción. Por tanto a la vez de enseñar matemáticas se está iniciando la formación del niño en un oficio.

Queda destacar que en la actualidad, el enfoque de elegir una imagen de producción de ladrillos como negocio familiar exhibe cierto sesgo de la realidad. Durante la reciente expansión económica de la India se estima que han llegado a trabajar unos diez millones de personas en la producción de ladrillo. El crecimiento del sector inmobiliario está tornando la balanza hacia la producción a nivel industrial. La degradación de las condiciones laborales resulta en casos cercanos a la esclavitud, incluida la esclavitud infantil (*bond children*) (Human rights watch, 1996; Antislavery, 2008; Wainwright, 2004).

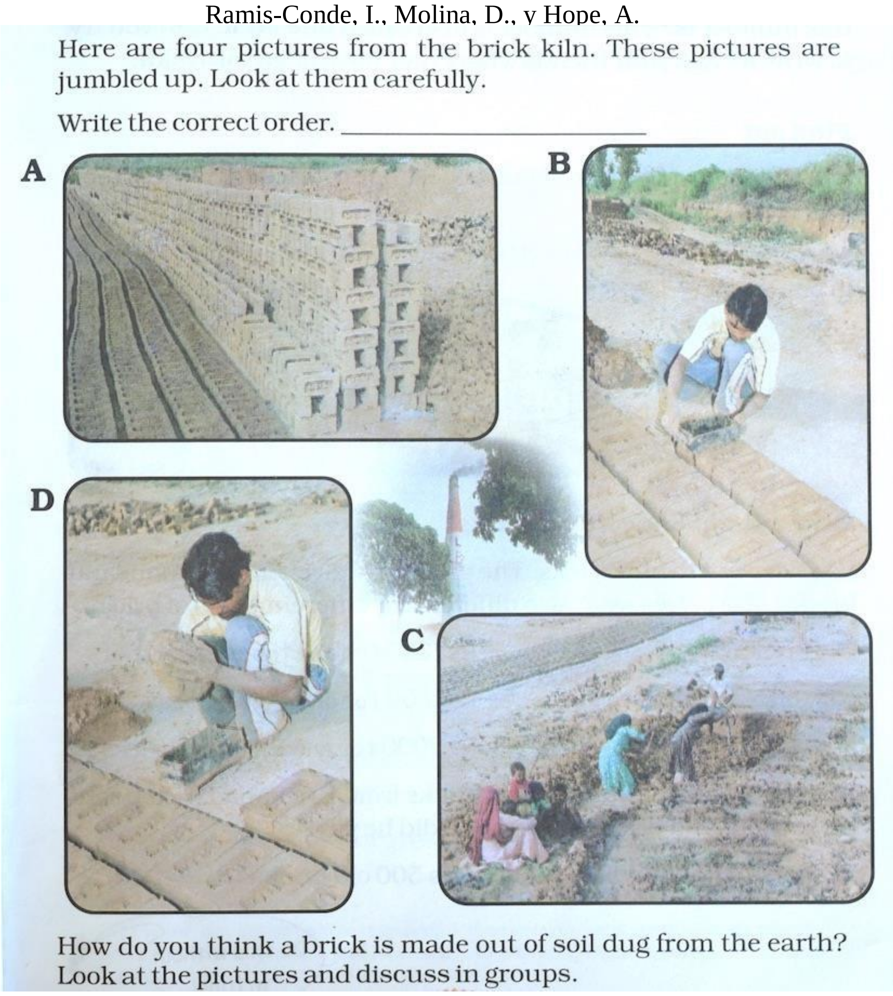


Figura 4: Fotografía mostrando un ejercicio de ordenación cronológica de la producción del ladrillo

Contextualización en torno a la pesca

No es únicamente el entorno de la construcción donde se presentan objetivos sociales. En el primer capítulo del libro de quinto curso de Primaria la temática principal es la pesca. De nuevo, el capítulo comienza por una contextualización cercana a la realidad del niño para acercarse al universo laboral.

En las comunidades pesqueras los oficios están divididos por géneros (Wu, Goldschmidt, Boscardin, y Azam 2007). Es tradición que los hombres se dediquen a pescar mientras que las mujeres venden el pescado en los mercados. Esta separación de géneros se va a ver reflejada en las páginas de los libros de texto, tanto a nivel ilustrativo como a nivel matemático. La Figura 5 muestra las ilustraciones de un capítulo dedicado a la pesca del libro de quinto curso de Primaria. Los hombres van a pescar y las mujeres venden el pescado en el puerto.

Los problemas asociados a las ilustraciones de los hombres se centran en la medida:

> ¿Cuántos peces puede cargar cada tipo de barco en siete viajes?
>
> ¿Cuánto puede recorrer un barco a motor en seis horas?
>
> ¿Cuánto tarda un barco en recorrer 85 Km?

Mientras que los asociados a imágenes de mujeres se centran en situaciones de compra-venta:

> ¿A qué precio por Kg Fazila vendió el pez emperador?
>
> Floranma ha vendido 10 Kg de gambas hoy. ¿Cuánto ha ganado?
>
> Gracy ha vendido 6 Kg de pez espada. Mini ha ganado tanto dinero como Gracy. ¿Cuántos Kg de sardinas ha vendido Gracy?

La separación de oficios en el sector pesquero es tradicional en casi todos los países en desarrollo y se sabe que tiene efectos directos en la escolarización y aprendizaje desde el comienzo de la escuela hasta la adolescencia. En países como Ghana, en edades cercanas a la adolescencia, los niños comienzan a salir a pescar, mientras que las niñas venden las capturas (Lewis y Lockheed, 2007; Strutt y Kepe, 2010; Tengey y Oguaah, 2002). Esta tradición representa un factor importante en el temprano abandono de la escuela.

Este capítulo centrado en la pesca incide en la importancia de las matemáticas para poder desemplear estos oficios eficientemente. Los problemas matemáticos presentados adquieren una cuestión de máxima importancia. Si bien las mujeres son las encargadas de administrar la economía de la familia a partir de las ventas del pescado, sobre el hombre recaen factores de supervivencia en el mar. En este escenario los problemas de compra-venta y métricos adquieren una relevancia muy superior a cualquier otra contextualización. La contextualización también tiene una labor de concienciación importante. El siguiente párrafo alude a los problemas económicos en pequeñas comunidades pesqueras:

> Hoy en día los pescadores están preocupados. Existen algunos barcos muy grandes (trawlers) en el sector. Salen a la alta mar y utilizan grandes redes de arrastre. De esta forma recogen muchos peces y dejan muy pocos cerca de la orilla. Además pescan en alta mar muchos días seguidos.
>
> Estos barcos también pescan los peces más pequeños, que no han crecido todavía. Los pescadores en barcos pequeños siempre dejan a estos peces atravesar sus redes y que vuelvan al mar. Eligen sus redes de tal forma que sólo capturan a los grandes peces.

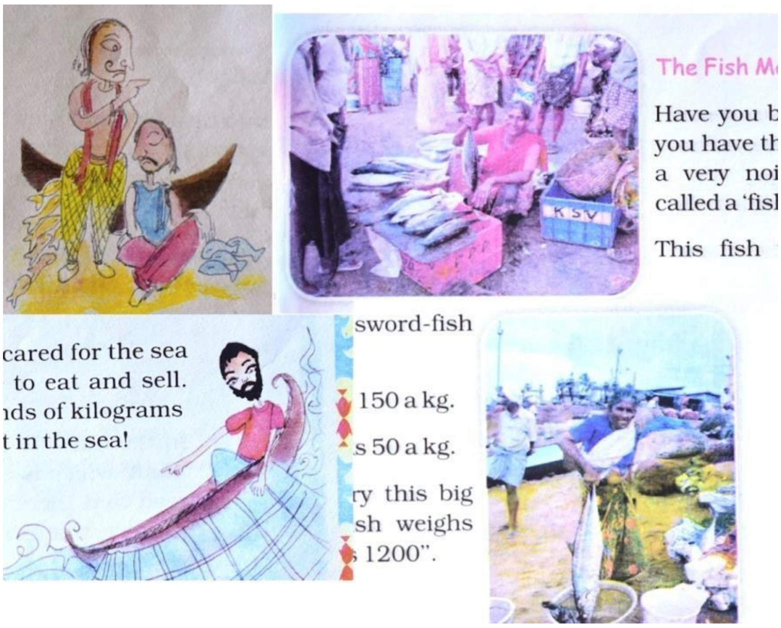


Figura 5: representaciones mostrando la separación de oficios en la pesca

El agotamiento de los calderos es la causa de este problema generalizado en muchas comunidades pesqueras del planeta. Los barcos más grandes y la pesca internacional con métodos agresivos agotan los recursos. El impacto económico en las familias tiene un patrón general a nivel internacional. El descenso de las capturas afecta a la economía de las familias pescadoras hasta llevarlas a situaciones de endeudamiento. En los casos extremos, los pescadores establecen préstamos arriesgados con bancos o prestamistas. Piden créditos para pagar materiales de pesca y combustible en situaciones cercanas a la quiebra. Los siguientes problemas matemáticos relacionan el crédito con la compra de material necesario para la pesca:

> Gracy pidió un crédito al banco de 4000 rupias para comprar una red de pesca. Si devuelve al mes 345 rupias por un año entero. ¿Cuánto dinero en total acaba pagando al año?
>
> Jhansi y su hermana pidieron un crédito al banco de 21.000 rupias para comprar una barca. Si devolvieron 23.520 rupias en un año. ¿Cuánto dinero devolvieron al mes?

Si la pesca es buena se paga el crédito y se continúa. En las ocasiones en las que el crédito no puede ser pagado, las familias llegan a la ruina y se producen consecuencias negativas. Entre ellas el abandono de la familia por parte del progenitor, la desescolarización de los niños como consecuencia de la carencia de recursos o la venta del niño a mafias esclavistas. Algunas de las acciones para tratar estos problemas están basadas en sistemas de microcréditos y cooperativas (Backstrom y Peterson, 2013; Tietze y Villareal, 2003). Los libros de texto de la India van a mostrar esta realidad también en ejercicios matemáticos específicos:

> La reunión del Meenkar Bank acaba de empezar. Fazila es la presidenta. Veinte pescaderas han formado su propio banco. Cada una ahorra 25 rupias al mes y las ingresa en el banco.
>
> ¿Cuánto dinero consigue el grupo en un mes?
>
> ¿Cuánto dinero conseguirá en diez años?

En familias en las que el nivel matemático es muy básico, tener un miembro que pueda hacer predicciones sobre plazos de pagos de créditos, operaciones de compra-venta y cálculos marítimos elementales tiene un valor añadido: el niño puede ayudar a su familia desde la escolarización. De nuevo se pueden diferenciar los tres objetivos observados en el capítulo del ladrillo. 1. Objetivo motivador hacia el niño: se presentan problemas de la vida cotidiana con aplicación real. 2. Objetivo de escolarización: concienciar a los padres de que es rentable para la familia escolarizar a sus hijos, en este caso independientemente del sexo (Lewis y Lockheed, 2007). 3. La presentación de las matemáticas como una herramienta laboral: se presenta la enseñanza de las matemáticas como una herramienta de formación para los hijos desde la Educación Primaria.

CONCLUSIONES

El rol de la contextualización de los libros de texto de Primaria es un elemento importante que trasciende más allá de lo meramente matemático. El contexto social de un país puede ser utilizado para crear libros que ayuden a desarrollar el interés por las matemáticas y que den una visión más aplicada de estas. El caso particular de la India muestra desde el currículo oficial y a través de los libros de texto una iniciativa explícita de ayudar a mejorar distintas problemáticas sociales. Este escenario dota a las matemáticas de Primaria de un carácter que en países como el nuestro carecen.

Los oficios tradicionales ofrecen un entorno para el desarrollo de la enseñanza matemática muy bueno. Las cuentas, las medidas, el estudio de las formas, etc. son llevadas a cabo por personas. Mientras que un niño para comprar un bien en un comercio tradicional debe dominar el cálculo mental; en países desarrollados cada vez son más frecuentes los supermercados en los que tanto el cliente como el vendedor confían absolutamente en el algoritmo que ha resuelto la caja automática. Las transacciones a granel más comunes en países en desarrollo implican experiencias de medida y el conocimiento de las unidades de medida, estos procesos son poco frecuentes en las sociedades más avanzadas, incluso para los adultos.

Problemáticas reales generan escenarios matematizables donde se produce un *feedback* educativo en la sociedad: aprender matemáticas no representa únicamente un conocimiento o una herramienta para ser utilizada en un futuro laboral. Es un elemento que puede ayudar a las familias desde el momento de escolarización del niño. El aporte de aprender esta materia en casa es claro, y por lo tanto la escolarización se presenta como algo útil.

En países como España (de dónde son originarias las instituciones a las que pertenecen los autores del artículo), es cuestionable si situaciones que se consideran como cercanas al niño en los libros de texto como problemas de compra-venta, medidas, etc.; forman a día de hoy verdaderamente parte de la vida cotidiana del niño, ¿representan un verdadero problema desde el punto de vista que él sienta una necesidad por resolverlo? Si no es así merece la pena reflexionar sobre la forma en la que se están presentando las matemáticas en los libros y preguntarse si no se está cayendo en una visión excesivamente curricular. Es cierto por otra parte que la comparación con situaciones en las que las matemáticas surgen con naturalidad por necesidades de supervivencia es extrema; pero no es una reflexión banal, y sería bueno reflexionar más profundamente sobre cómo dotar de más significado a las matemáticas, no únicamente a través de los libros de texto.

Referencias

Ascher, M. y Ascher, R. (1997). Ethnomathematics. En A. Powell y M. Frankenstein (Eds.). *Ethnomathematics, Challenging Eurocentrism in Mathematics Education* (25-50). Albany: State. University of New York Press.

Upadhyaya, K. P. (2008). Poverty, discrimination and slavery: The reality of bonded labour in India, Nepal and Pakistan. *London, Anti-Slavery International*.

Banerjee, A., Banerji, R., Duáo, E., Glennerster, R., Khemani, S., Mullainathan, S., y Shotland, M. (2005). The Impact of Information, Awareness, and Participation on Learning Outcomes. *MIT Department of Economics. Cambridge, M.A. Mimeo.*

Ball B. (2005). Functional mathematics. *Mathematics teaching*, *191*, 14.

National focus group on teaching of Mathematics. (1986). *National Council of Educational Research and Training.*

Blanco- Nieto, L. B. (1993). Una clasificación de problemas matemáticos. *Epsilon*. 25, 49–60.

Backstrom, C., y Peterson, M. (2013). How does a government lower primary school in india work with Mathematics: a study on how teachers mathematical beliefs affect the norms operating in classroom. (Tésis doctoral). *Lärarexamen. Handledare: Ange handledare Matematik och lärande*.

Bhagwati, J. (2011). Indian reforms: yesterday and today. *Indian Journal of Economics and Business*, *10*(1), 1–10.

Bhatty, K. (2011). Educational deprivation in India: a survey of field investigations. *Economic and political weekly*. *33* (27), 1731-1740.

Bhukuth, A., y Ballet, J. (2006). Is child labour a substitute for adult labour?: A case study of brick kiln workers in Tamil Nadu, India. *International Journal of Social Economics*. *33*(8), 594-600.

Cantoral, R., Montiel, G., y Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso matemático escolar en los libros de texto, una mirada desde la teoría socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 9–28.

Cassidy, S. (2004) Learning styles: an overview of theories, models, and measures. *Educational Psicology*. 24, 419-444.

Díaz M. V., y Poblete, A. (2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. *Números*, 45, 33-41.

Ezeife, A. N. (2002). Matehematics and culture nexus: the interactions of culture and mathematics in an aboriginal classroom. *International Education Journal*. *3*(3), 176–187.

Freudenthal, H. (2002). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. *Dordrecht: Springer Netherlands.*

Hudson, L. (1966). Contrary Imagination. *Penguin. Harmondsworth*.

Kremer, M, Miguel, E., y Thornton, R. (2004). Incentives to Learn. *Manuscript, Havard University Department of Economics.*

Math Magic. (2010). National Council of Education, Research and Training. *NCERT. Shveta Uppal, Editor.*

Lewis, M., & Lockheed, M. E. (2007). Exclusion, gender, and education: Case studies from the developing world: A companion volume to 'Inexcusable Absence'. Washington: *Center for Global Development*.

National curriculum framework, (2005). *NCERT*. New Delhi: *Publ. Dep. Secretary, National Council of Educational Research and Training*.

Orton, A. (2003). Didáctica de las matemáticas. *Ministerios de Educación y Deportes. Ediciones Morata, S.L.*

Strutt, C., y Kepe, T. (2010) Implementing Education for All—Whose agenda, whose change? The case study of the Ghana National Education Campaign Coalition. *International Journal of Education*. *30*, 369-376.

Tietze, U., y Villareal, L. V. (2003). Microfinance in fisheries and aquaculture: Guidelines and case studies. Rome: Food and Agriculture Organization of the United Nations. Tengey, W., & Oguaah, E. (2002). The little Ghanaian slaves: A cry for help: Child trafficking in Ghana (a research report). Accra, Ghana: African Centre for Human Development.

Tucker, L. (1996). The small hands of slavery: Bonded child labor in India. New York: *Human Rights Watch.*

Wall, W.D., y Varma, V.P. (1972). Avances en la psicología de la educación. *University London Press. Ediciones Morata S.L.*

Wu, K.B., Goldschmidt, P., Boscardin, C.K. y Azam M. (2007). Girls in India : Poverty, location and social disparities. Maureen A. Lewis, Mardaline E. Lockheed, M. Editores. *Centre for Global development, Wasinghton D.C.*

Yackel, E., y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for research in mathematics education, 27*, 458–477.

Wainwright, O., (miércoles, 8 de enero de 2014). Blood bricks: how India's urban boom is built on slave labour. *The Guardian.*

ANÁLISIS DE LAS DECISIONES DEL PROFESOR DESDE LA PERSPECTIVA DE LA OBSERVACION PROFESIONAL

Analysis Of Teacher's Decisions From The Professional Noticing Perspective

Garzón Castro D.

Universidad del Valle

Resumen

Estainvestigación analiza las decisiones que toman los profesores de matemáticasen momentos de enseñanzaen que emergen oportunidades pedagógicas (periodos en el discurso de la clase que proveen condiciones para la construcción de significado por los alumnos). Con esta finalidad, se diseñó y evaluó un instrumento que permite dicho análisis. Se llevó a cabo un estudio de caso exploratorio, que incluyóclases de dos profesores de secundaria. Las grabaciones de las clases son la fuente central de este estudio. Para su análisis, se abordaron dos perspectivas: la habilidad del profesor para responder a la comprensión matemática del estudiante, yel estudio de momentos de enseñanza en relación con el pensamiento matemático del estudiante, los significados matemáticos y las oportunidadespedagógicas. El resultado central determina el reconocimiento de decisiones asociadas con momentos de enseñanza en que emergen oportunidades pedagógicas.

Palabras clave: *decisiones del profesor, momentos de enseñanza, pensamiento matemático del estudiante, discurso matemático en clase, prácticas de enseñanza*

Abstract

We present an research that is oriented at studying the decisions of teachers in teaching moments resorting to dialogue and emerging opportunities for pedagogical transformation. For this purpose, an exploratory case study was performed. It included classes of two high school teachers who promoted the resolution of problems of geometric construction. For their analysis, two perspectives were taken into account: the teacher's ability to respond to math students' understanding and the observation of teachable moments regarding student's mathematical thinking, significant mathematics and learning opportunities. The analysis of the results determines the recognition of the decisions associated wich teachable moments in emerging pedagogical opportunities.

Keywords: *teacher's decisions, teachable moments, student's mathematical thinking, mathematical discourse in the classroom, teaching practice.*

INTRODUCCIÓN

Un punto de acuerdo entre la comunidad de investigadores en Educación Matemática, los diseñadores de política educativa y los formadores de profesores es el énfasis dado en la enseñanza de las matemáticasal aprendizaje y el pensamiento matemático del estudiante (NTCM, 2000; NationalResearch Council, 2001). De este acuerdo se deriva la necesidad de indagar sobre cómolos profesores en sus prácticas aprovechan el pensamiento matemático de los estudiantes.A través de esta investigación sepretende establecer relaciones entre acciones del profesor, tales como por ejemplo preguntar, y su toma de decisiones en la gestión de clase. De acuerdo con lo anterior, la pregunta de investigación es la siguiente: ¿Cómo están relacionadas las decisiones de los profesores con sus acciones y afirmaciones en momentos de enseñanza en los que se reconocen oportunidades pedagógicas?

Garzón Castro, D. (2016). Análisis de las decisiones del profesor desde la perspectiva de la observación profesional. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 455-464). Lugar: MÁLAGA.

Los objetivos para la investigación son: (a)diseñar y evaluar un instrumento de análisis para aplicar a las decisiones de los profesores en momentos de enseñanza durante la gestión de clase, (b) analizar las decisiones en momentos de enseñanza en los queemergen oportunidades pedagógicas.

Stockero y Van Zoest (2013), Leatham y al.(2015), y Sun y van Es (2015)respecto a las decisiones del profesor enrespuesta a la comprensión del estudiantereconocen y analizan momentos que contribuyen a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.Así mismo, la importancia de los resultados obtenidos a partir de este enfoque de investigaciónse debe a que:(a) contribuye a comprender la enseñanza que aprovecha el pensamiento matemático del estudiante para el aprendizaje, (b)los momentos de enseñanza identificados son instrumentos para fundamentar el aprendizaje del profesor, (c)contribuye en la formación de profesores a la observación profesional del pensamiento matemático del estudiante, (d)en la gestión de clase enfatiza en actuar con el pensamiento matemático del estudiante. Los estudios elaborados tienen un carácter exploratorio y examinan momentos de enseñanza con profesores en servicioy los datos provienen de videos de enseñanza. No obstante,esta investigación se enfoca en la práctica de profesores en servicio.

MARCO TEÓRICO

EnEducación Matemática se reconoce la *pericia en la observación profesional del profesor*como perspectiva teórica para el estudio de la enseñanza; se enfatiza en una mirada que da cuenta de su segmentación en procesos que se articulan entre sí. Nuestro estudio, se ubica en la articulación de las siguientes dos perspectivas teóricas:

La observación profesional del pensamiento matemático del niño

En el estudio de la enseñanza*la pericia en la observación profesional del pensamiento matemático del estudiante*(Professional noticing of children'smathematicalthinking), "segúnJacobs, Lamb yPhilipp" (2010) se define como el conjunto interrelacionado de tres habilidades: identificar las estrategias usadas por los estudiantes,interpretar las comprensiones de los estudiantes y decidir que responder a las comprensiones de los alumnos.La habilidad de decidir que responderse considera intencionada por parte del profesor y consistente con el pensamiento matemático del estudiante en una situación dada.

Oportunidades pedagógicas ysignificados matemáticos

Leatham y al. (2015) planteanotra perspectiva teórica que se refiere conocida como *MOST*[7], la cual permite analizar características de los momentos de enseñanza documentadas en la investigación que se articulan entorno a: *El pensamiento matemático del estudiante (PE), las matemáticas significativas (MS) y las oportunidades pedagógicas de aprendizaje (OP)*. Además, el Most suministra un vocabulario para caracterizar momentos de enseñanza enfatizando el análisis del pensamiento matemático del estudiante. A continuación se caracterizan cada una de las componentes del Most.

El *PE* se caracteriza por: (i) una acción observable que provee la evidencia *suficiente* para formular inferencias que permiten describir las matemáticas del estudiante, (ii) es posible articular una *perspectiva matemática* con las matemáticas del estudiante.

En la construcción de significados matemáticos (MS)se considera la perspectiva matemática relacionada con las matemáticas del estudiante, y alude a momentos de enseñanza en los cuales las matemáticas del estudiante pueden ser usadas para la comprensión matemática. Las metas matemáticas para el aprendizaje son determinadas por un profesor, o un observador externo. Se reconocen mediante los siguientes criterios: (i) *Las matemáticas apropiadas*. La perspectiva matemática apropiada es accesible a los estudiantes acorde con sus experiencias matemáticas, genera un reto para los estudiantes. (ii*) Las matemáticas centrales*. La perspectiva matemática está relacionada con un objetivo de aprendizaje de la clase.

Una *oportunidad pedagógica*(*OP*) hace referencia a un momento en el discurso en el que se generan condiciones para la construcción de significados por parte del alumno. Una oportunidad pedagógica se

[7]La expresión "MathematicallySignificantPedagogicalOpportunitytoBuildonStudentThinking", la utilizaremos en su versión abreviada MOST.

presenta cuando se cumplen dos criterios:(i) manifestación del PE como necesidad intelectual del alumno(la amplitud) y si el profesor responde o no a esa manifestaciónen el momento que surge(timing).

Los momentos de enseñanza que crean apertura incluyen: (a) respuestas correctas que involucran un nuevo razonamiento, (b) una respuesta que involucra una concepción común o matemática, (c) una contradicción matemática, (d) un razonamiento incompleto o incorrecto y (e) preguntas como por las causas, o generalización de preguntas.

Leatham y al.(2015) reconocen como el *Most* provee un mecanismo para analizar y desarrollar las habilidades que configuran *la observación profesional*, a partir de: i) Identificar ejemplos representativos del pensamiento matemático de los estudiantes desde una *perspectiva matemática* para dar cuenta de acciones que generan *oportunidades de aprendizaje en clase*, ii) Determinar si acciones particulares del *pensamiento matemático* del estudiante pueden manifestarse en clase para provocar transformaciones pedagógicas, y, iii) Determinar si un momento de aprendizaje en clase genera un ambiente propicio de los estudiantes hacia la comprensión matemática. Elementos que han sido considerados en esta investigación en el diseñodel instrumento Most-Noticing.

Sherin, Russ yColestock(2011) para dar cuenta de la *observación profesional del profesor*,optaron por una aproximación metodológica que consiste en la realización de inferenciasa partir de videos de prácticasde enseñanza. Se asume que las grabaciones son parte de lo que el profesor proporciona como prueba determinante de lo que informa. Tal perspectiva ilumina la metodología adoptada.

METODOLOGIA

El enfoque adoptado para esta investigación es cualitativo. Se recurre al método de la teoría fundamentada (Bikner-Ahsbahs, Knipping yPresmeg, 2015), para el diseño deun estudio de caso exploratorio en el que las clases de dos profesores de secundaria en servicio (Eva y Andrés) fueron grabadas en video. Los datos fueron recogidos de una investigación anterior[8].

La seleccionade los profesores se enfocó en los siguientes criterios: (i) necesidad de continuar con su desarrollo profesional, (ii) voluntad de participar y enseñanza enfocada en el aprendizaje del estudiante, y (iii) vinculados a programas de formación de profesores de la Universidad del Valle, en Colombia, y con un mínimo 5 años de experiencia. Recurrimos a videos de las clases de Eva (4 sesiones de clase) sobre problemas de construcción geométrica usando regla no graduada y compás, y la clase de Andrés (7 sesiones de clase) sobre construcciones geométricas usando doblado de papel.

Procedimiento

*Fase I. Recolección y organización de los datos***.** Revisión de cada una de las sesiones de clase de Eva y Andrés, para reconocer rasgos de sus interacciones con los estudiantes y realizar la transcripción de los videos de enseñanza.

Fase II.Diseño del instrumento Most-Noticing. Diseñodel instrumento Most – *Noticing* a partir de ocho componentes (ver Tabla 1) con dos propósitos: el de reconocer momentos de enseñanza en que se evidenciael pensamiento matemático de los estudiantes y de analizar las habilidades que articuladas estructuran la observación profesional del profesor.

En la parte izquierda de la tabla se describe quien inicia la acción en las interacciones profesor-estudiante (Turno) y se transcriben las interacciones.

Tabla 1.

Instrumento Most – Noticing

Turno	Transcripción de las interacciones	Acciones y formulaciones profesor	Acciones y formulaciones estudiante	PE	MS	OP	Observaciones respecto al momento

[8]Arce, j.,Castrillon G., Garzón D., Pabón O.A. & Vega, M.(2012). Informe final del proyecto caracterización de los vínculos entre los recursos pedagógicos y el conocimiento matemático en la enseñanza de las matemáticas. (Contrato Nº364-2009).

Se consideraron interrogantes derivados de los criterios que propone el MOST (ver marco conceptual):

- PE: ¿Es posible observar algún resultado matemático del estudiante? ¿En qué consiste? ¿En qué momento se produjo? ¿Qué genera la intervención del profesor? ¿Qué estructura conceptual involucra el problema propuesto? ¿Es coherente el contenido matemático tratado en clase con el contenido del problema propuesto? ¿Pueden los estudiantes avanzar en sus aprendizajes?
- MS: ¿Se adecuan los problemas y/o tareas a la experiencia matemática del estudiante? ¿Permiten las estrategias propuestas intencionalmente por el profesor que el estudiante alcance el objetivo propuesto? ¿Es la comprensión matemática un aspecto central para el aprendizaje en esta clase?
- OP: ¿Proveen los problemas o tareas propuestas por el profesor un descubrimiento o elaboración de nuevos aprendizajes? ¿En qué momentos de la actividad matemática de los estudiantes se genera un descubrimiento o elaboración de nuevos aprendizajes? ¿Qué aportan los problemas y/o interrogantes formulados por el profesor a la actividad matemática del estudiante? ¿En qué momento de la resolución de un problema el estudiante tiene la oportunidad de progresar en el logro de los aprendizajes matemáticos? ¿Puede el discurso transformarse en una oportunidad de aprendizaje?

Finalmente, en la parte derecha del instrumento se registraron rasgos destacados de la información obtenida al comparar por fila o columnas.

Fase III. Usos del instrumento Most-Noticing. Utilizamos el instrumento Most-Noticing en la identificación y descripción de episodios de enseñanza.Se entienden los episodios como periodos durante los cuales la clase se compromete con un tipo de actividad coherente. Además de cumplirlas siguientes condiciones: (a) Hacen posible identificar una meta específica; (b) Permiten caracterizar las matemáticas del estudiante. La segmentación de los videos en episodios, permitió reconocer un total de ocho episodios (cinco de Eva y tres de Andrés).

Análisis de los datos

Los datos se analizaron en tres fases: (a) codificación, (b) análisis de las acciones y formulaciones del profesor, (c) análisis de las acciones y formulaciones de los estudiantes. Reconocimos tres fases, sobre los cuales se fundamentó el análisis de procesos estructurales de la observación profesional del profesor (Teppo, 2015).

(a).Codificación. Mediante el método de comparación constante, se asignaron códigos a los segmentos video transcrito. En éste procedimiento se aplicó codificación abierta (análisis en el cual se denominan y categorizan los fenómenos según sus propiedades). Se identificaron 25 códigos que designan las acciones de Eva y 12 de Andrés. Se utilizó el mismo procedimiento de codificación para las acciones de los estudiantes. En la codificación se escribieron notas analíticas para analizar la introducción de nuevas categorías respecto a algunas ya establecidas, se reconocieron categorías comunes a ambos casos, la comparación entre categorías al describir características de momentos de enseñanza y los procesos asociados con el Noticing y elMost.Así por ejemplo, se elaboró un cuadro comparativo de la codificación de los dos casos. Se compararon las categorías comunes, reduciéndose el número de categorías acuñadas para describir interacciones entre Eva – estudiantes y Andrés – estudiantes.

La trayectoria que describe la orientación de los análisis en los cuales interviene la codificación es la siguiente: Codificación (fase transversal), análisis acciones y formulaciones de los profesores, análisis de las acciones y formulaciones de los estudiantes, análisis de cada proceso componente del noticing en relación con las acciones, análisis de las interacciones entre procesos.

(b). Análisis de las acciones y formulaciones del profesor. En la Tabla 2 se ilustra las acciones y formulaciones del profesor en dos categorías a las cuales se les asignaroncódigos abiertos:

- Preguntar: Eva y Andrés formularon preguntas para interactuar con la clase, un grupo de estudiantes o con un estudiante que presenta sus estrategias de solución.
- Instruir: Eva y Andrés formularon instrucciones para completar procedimientos de construcción y reconocer su finalidad.

Tabla2.

Categorías descriptivas de las acciones y formulaciones del profesor

Accionesy formulaciones del profesor	Descripciones de la intencionalidad	Ejemplos[9]
Preguntar	1. Explicitar un procedimiento de construcción 2. Justificar un procedimiento de construcción 3. Constatar un hecho geométrico	1.1 Andrés: "*¿Cómo lo hiciste?*" 2.1 Andrés: *Esta línea [se refiere el doblez del papel] ¿la obtuviste porque sí, así no más?* 3.1 Eva: *¿Está bien que él llame B a ese punto?*
Instruir	1. Reconocer la finalidad de un procedimiento de construcción 2. Completar un procedimiento de construcción	*1.* Eva: *¿Para qué hicisteel arco?* *2.* Andrés: *Ahora necesito que esta línea se extienda…*

(c) Análisis de las acciones y formulacionesde los estudiantes

Respecto al análisis de las acciones y formulaciones de estudiantes, la Tabla 3 las presenta agrupadas en dos categorías:

- Explicar: Comprender la justificación de un procedimiento de construcción y determinar los pasos que estructuran un procedimiento de construcción.
- Apropiar recursos para la construcción geométrica: Está asociado con el uso de la regla no graduada y el compás y con el uso del doblado de papel.

Tabla 3.

Categorías descriptivas de las acciones y formulaciones del estudiante

Acciones y formulaciones de los estudiantes	Descripción	Ejemplo[10]
Explicar	1. Justificar el proceso de construcción. 2. Establecer el procedimiento de construcción o partes del mismo.	1. A1 toma el compás y mide respectivamente el lado AC. 2. A1 ubica el compás sobre el segmento AB, de tal modo que coloca la aguja en A y el otro extremo en B.
Apropiar recursos para la construcción geométrica	1. Usar la regla no graduada y el compás en la resolución de problemas de construcción eg métrica. 2. Usar el doblado de papel para resolver problemas de construcción geométrica de geometría plana.	1.A1 afirma que con el compás (episodio 4, Eva). 2. A6 hace un doblez sobre el papel y marca el punto sobre el este para trazar la línea que pasa por dicho punto, la cual es perpendicular. Dobla el papel utilizando como soporte el borde recto de una hoja.

RESULTADOS

Se identificaron como procesos a las habilidades (identificar, interpretar y decidir) quedeterminan la pericia en la observación profesional del profesor. Se abordaron a partir de: La identificación de las matemáticas del estudiante para caracterizar el PE, la articulación de lo particular de un momento de enseñanzacon una meta más amplia para caracterizar las MS y el análisis de momentos de

[9] Los ejemplos de Eva provienen de un momento de uno de los episodios identificados en los cuales el problema propuesto era construir un triángulo congruente a un triángulo dado y la meta "construir un triángulos congruente a un triángulo dado usando regla no graduada y compás". Los ejemplos de Andrés provienen de un momento extraído del episodio en el cual el problema formulado era:Dados dos puntos cualquiera A y B, y el punto P. Construir una línea que pasa por P y sea perpendicular a la línea determinada por A y B."

[10] Los ejemplos en los cuales se alude al estudiante A1, provienen de un momento de enseñanza que se inscribe en el episodio de la clase de Eva, en el cual el problema propuesto fue "construir un triángulo congruente a un triángulo dado usando regla no graduada y compás". La intervención de A6 corresponde se ubica en un momento del episodio en el cual se pide al estudiante construir la perpendicular a una recta y que pasa por un punto.

enseñanzaque responden a la comprensión del estudiante para caracterizar las OP y establecer el lugar de las decisiones del profesor en clase.

Caracterización del pensamiento matemático PE

El análisis permiteconstruir un perfil de momentos de enseñanza.En la resolución de problemas de construcción geométrica, el PE está ligado a acciones del estudiante, tales como explicar y apropiar recursos para la construcción geométrica; se trata deacciones asimétricas a las del profesor, que regulan la interacción mediante acciones como preguntar e instruir (Ver Tabla 3).

El PE se interpreta como un sistema que articula acciones del estudiante con acciones del profesor en la resolución de un problema.

En los análisis comparativos se reconoció la importancia que tiene en la interacción con los estudiantes la acción preguntar, en relación con la identificación de las necesidades de aprendizaje del estudiante. Nuestro resultado reafirma productos de investigaciones previasque muestran como las preguntas de profesores pueden posicionar las matemáticas del estudiante respecto a la perspectiva matemática, dado que apoyan la comprensión del estudiante. Es así como se reconoce que posterior a la formulación de una pregunta por un profesor en clase, crecen lasposibles variaciones que experimentan las preguntas que se formulan posteriormente por parte del profesor ylas respuestas de los estudiantes (Frankey otros, 2009).

Caracterización de las matemáticas significativas del estudiante (MS)

El análisis permite caracterizar las MS en funciónde la*gestión de clase para las* matemáticas *significativas*. La Tabla 4 ilustra en categorías cuyos rótulos han sido obtenidos por codificación abierta*: preguntar*, *enfatizar en una meta específica* y *organizar la actividad de clase*.

Tabla 4.

Caracterización gestión de clase de las matemáticas significativas

Gestión del profesor en clase	Descriptores	Ejemplos[11]
1.Preguntar	Descrito en la tabla 4	¿Cómo sabemos que ese es ángulo recto? (línea4).
2. Enfatizar en una meta específica	2. Reconocer la meta sea implícita o explícita en relación con un problema.	2. Resolver el problema de la trisección de un ángulo mediante el doblado de papel.
3. Organizar la actividad de clase	1 Relacionar la actividad propuesta con otras actividades de clase. 2 Auspiciar la participación en clase.	1. Andrés: Estos fueron los métodos que tenemos para poder trazar. (Línea 8).
4.Instruir	1 Reconocer la finalidad de un procedimiento 2. Completar un procedimiento de construcción geométrica	2 Andrés: Mira qué pasó con esta línea (la recién construida) cuando tú lo mandas a este lado de acá. Dóblelo. (Línea 6) .:

Por ejemplo, en el momento de enseñanza "Trazo de la perpendicular a una recta mediante el doblado de papel", Andrés tenía como meta resolver el problema de la trisección de un ángulo mediante el doblado de papel, y les propone a sus estudiantes construir la perpendicular a una recta dada por un punto dado. Propone la organización del trabajo en parejas. Reseñamos algunas líneas para ilustrar las MS:

1. A:…plasmó mediante dobleces sobre el papel su estrategia de solución al problema.
2. Andrés: muestra como hiciste esta línea, [así porque así] la pasó por esa línea y ya.

[11]Los ejemplos que ilustran cada uno de los descriptores corresponden al momento de enseñanza "trazo de la perpendicular a una recta mediante el doblado de papel".

3. A:Usted [refiriéndose al profesor] no dijo que tenía que formarse un ángulo recto.
4. Andrés: ¿Cómo sabemos que ese es ángulo recto? Por ejemplo, antes hicimos una pequeña prueba donde nos dioque fuera como un ángulo recto. Yo lo que quiero saber es cómo construiste esta línea de acá [señalando sobre el papel uno de los dobleces]. Si quieres, hazlo nuevamente aquí [entregando a A6 un trozo blanco de papel] y vas explicando.
5. A:colocó una línea cualquiera, hizo un doblez sobre el papel. Marcó el punto sobre el papel. Para trazar la línea que pasa por el punto y es perpendicular A6 recurre a doblar el papel utilizando como soporte el borde recto de la hoja del taller efectuó el doblez.
6. Andrés: Mira qué pasó con esta línea [la recién construida] cuando tú lo mandas a este lado de acá. Dóblelo.
7. A:.Al doblar expresó las líneas coinciden.
8. Andrés: Estos fueron los métodos que tenemos para poder trazar.

Caracterización de las oportunidades pedagógicas (OP)

Los análisis en los que se recurrió al instrumento*Most- Noticing* proporcionaron un perfil demomentos de enseñanza en los cuales es posible reconocer OP, por medio de una matriz bidimensional que relaciona acciones y formulaciones de los estudiantes, y la gestión de clase de las MSpor el profesor. En el proceso de abstracción de categorías se obtuvo el perfil de los momentos de enseñanza por medio de codificación axial.

Como rasgos de los momentos de enseñanza en los cuales es posible reconocer OP encontramos que:

- Cumplen la condición de articular componentes del procedimiento de construcción y su justificación.
- La naturaleza del recurso es relevante cuando los estudiantes hacen uso de la regla no graduada y el compás o el doblado de papel y el profesor formula preguntas cuya intencionalidad es justificar el procedimiento de construcción.
- En la relación entre la apropiación de recursos por el estudiante que busca incorporary la gestión del profesor, estos se clasifican en relación con la naturaleza del recurso por apropiar y las formas de participación que el profesor promueve en clase.
- El diálogo juega un papel central en los momentos de enseñanza para promover oportunidades pedagógicas de aprendizaje.

La toma de decisiones de Eva y Andrés, se observa en momentos de enseñanza en los que es posible reconocer las OP, el diálogo y dilemas de enseñanza. Se reconocierondecisiones de respuesta a la comprensión de los estudiantes como: Se retoman las heurísticas de los estudiantes,mediante una instrucción recuerda una propiedad geométrica, recurre a preguntar para que el estudiante explique, responde solo al estudiante que propone la estrategia de solución, deja de lado en las estrategias de solución de los estudiantes las representaciones que utilizan.

En la tabla 5, se presenta una síntesis del momento de enseñanza“Trazo de la perpendicular a una recta mediante el doblado de papel”.En ella quedan reflejadas las OP, decisiones del profesor a partir de la gestión en clase de los dilemas en la enseñanza.

Se analizó el discurso de Andrés con A6 desde la perspectiva de las explicaciones en la enseñanza. El diálogo es entendido como interacción explicativa, como una conversación que tiene el propósito tanto de construir como transmitir conocimiento entre los estudiantes (LeinhardtySteele, 2005). Reconocimos cómo las explicaciones de Andrés se plasmaron en los distintos componentes de la gestión de clase.

El resultado respecto a las decisiones de respuesta a la comprensión del estudiante, ratifica una tipología ya existente que clasifica las decisiones de respuesta a momentos pivote para la enseñanza de las matemáticas (Stockero y Van Zoest, 2013). Lo anterior, porque es posible establecer una correspondencia entre las decisiones identificadas (Tabla 5) y las categorías que contempla la tipología: Ignorar o descartar de plano (6), reconocer pero continúa con lo planeado (5), enfatizar en el PE (4), y extender y hacer conexiones (2 y 3).

Tabla5

Descripción de las relaciones OP y decisiones

Categoría	Descripción	Criterios
Oportunidad pedagógica	El estudiante explicó el procedimiento de construcción geométrica por medio de una heurística. En la gestión de clase, retomó una propiedad discutida para justificar el trazo de la perpendicular a la recta dada. La apertura se generó cuando el estudiante elaboró una respuesta incompleta. El profesor solicitó al estudiante justificar el procedimiento de construcción, y le pidió explicase la perpendicularidad entre la recta dada y la obtenida mediante el doblez.	Línea 5
	En las interacciones del profesor con los estudiantes, descrita en relación con la clase fue dominante una relación unilateral.	Línea 1
Dilemas de la enseñanza	En la gestión de clase de Andrés subyace el dilema de la representación de contenidos .Porque se reconocieron distintas maneras de representar y justificar la relación de perpendicularidad entre la recta dada y la construida mediante el doblez. Incluso en los procedimientos de solución de distintos estudiantes. Pero no se explicitó y no se aprovechó la oportunidad. Se hizo manifiesto el dilema de la creación y uso de una comunidad ya que la discusión se restringió a la interacción con el estudiante que propuso la estrategia de solución, sin promover la discusión en el grupo o tomar en consideración las propiedades que se ponen en juego en otras estrategias de solución.	Líneas 6 y 8
Toma de decisiones	1.Retomó las heurísticas del estudiante 2. Mediante una instrucción recordó una propiedad geométrica. 3. Retomó propiedades geométricas estudiadas previamente. 4. Recurrió a preguntar para que el estudiante explique. 5. Enfatizó en responder al estudiante que propone la estrategia de solución, pero lo planeado en el tiempo no posibilito la discusión entre estudiantes. 6 Poco considero en distintas estrategias de solución el uso de las representaciones de los estudiantes.	

Discusión de resultados y conclusión

Esta investigación contribuye a analizar las decisiones que toman los profesores de matemáticas en momentos de enseñanza en los que emergen oportunidades pedagógicas para la transformación del pensamiento matemático de los estudiantes.Nosotros contribuimos a este campo de investigación caracterizando el PE, las MS y las OP. Tal caracterización ha evidenciado, en relación con las oportunidades pedagógicas, los siguientes rasgos:

Reconocer “momentos de enseñanza” en que están presentes ciertas oportunidades pedagógicas, para lo que es determinante el papel otorgado a las explicaciones en la enseñanza y, en particular, al diálogo a partir de las relaciones entre las acciones del estudiante (ver Tabla 3) y las acciones y formulaciones del profesor (ver Tabla 2).
Describir las manifestaciones de los dilemas de enseñanza a partir de acciones y afirmaciones del profesor. Así, acciones como preguntar en el momento de enseñanza concreto de “construcción de triángulos congruentes” corresponden a una de las manifestaciones que permite reconocer el dilema del niño como pensador. En el caso de Andrés, las manifestaciones del dilema de la representación están asociadas con una afirmación y una instrucción para describir.
La comparación de la gestión de clase de Eva y Andrés, en relación con actividades comunes, tales como preguntar (ver la Tabla 2)**,** permite reconocer la importancia de este tipo de actividad para el desarrollo de pensamiento matemático del estudiante.
Las decisiones de los profesores en cada momento de enseñanza permiten apreciar su relación con acciones de respuesta del profesor, así como con los dilemas de enseñanza identificados en el diálogo entre profesor y estudiantes.
El aporte novedoso de esta investigación lo determina la posibilidad de estudiar acciones y afirmaciones del

profesor en momentos de enseñanza y sus entornos en los casos objeto de estudio. Relacionando estas acciones con las decisiones del profesor haciendo uso del marco analítico que provee el enfoque *Most*.

Referencias

Ball, D. L.(1993). With an eye on the mathematical horizont: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *ElementarySchool Journal*, 93(4), 373- 397.doi: 10.1086/461730

Bikner-Ahsbahs A., Knipping C., yPresmeg N. (Eds.) (2015*). Approaches to qualitative research in mathematics education:* Examples of methodology and methods. DOI: 10.1007/978-94-017-9181-6-1.

Franke, M. L., Webb, N. M., Chan, A. G., Ing, M., Freund, D., yBattey, D. (2009). Teacher questioning to elicit students' mathematical thinkingin elementary schoolclassrooms.*Journal of Teacher Education*, 60, 380-392.doi:10.1177/0022487109339906.

Jacobs, V., Lamb, L. y Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for research in mathematics education*, 41, 169-200.

Leatham, K. R., Peterson, B. E., Stockero, S. L. y Van Zoest, L.R. (2015). Conceptualizing mathematically significant pedagogical opportunities to build on student thinking. *Journal for research in mathematics education,* 46(1), 188-124.

Leinhardt, G.y Steele M. D. (2005). Seeing the complexity of standing to the side: Instructional dialogues. *Cognition and instruction*, 23(1), 87-163.

National Council of Teachers of Mathematics.(2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

National Research Council. (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. In J. Kilpatrick, J. Swafford, yB. Findell (Eds), *Mathematics learning study committee, center foreducation, , divisionofbehavioral and social sciences and education*. Washington, DC: National Academic prees.

Sherin, M.G., Russ, R. S., yColestock, A. A. (2011). Accesing mathematics teachers' in the moment noticing. In Shering, M. G, Jacobs, V. R., y Philipp, R. A. (Eds.).*Mathematics teacher noticing: Seeing through teacher' eyes*. New York: Routledge.

Stockero, S. L. y Van Zoest, L.R. (2013). Characterizing pivotal teaching moments in beginning mathematics teachers`practice. *Journal of mathematics teacher education*, 16(2), 125-142.

Sun, J. y van Es, E. A. (2015). An exploratory study of the influence that analyzing teaching has on preservice teachers` classroom practice. *Journal of teacher education*, 66(3), 201-214.

Teppo, A. R. (2015). Grounded theory methods. In Bikner-Ahsbahs A., Knipping C. yPresmeg N. (Eds.).*Approaches to qualitative research in mathematics education* (3-21).New York: Springer. doi: 10.1007/978-94-017-9181-6-1.

INFLUENCIA DEL CONTEXTO EN EL USO E INTERPRETACIÓN DE MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN AFECTADAS POR VALORES ATÍPICOS

Influence of the context in the use and interpretation of measures of centralization affected by outliers

Martínez, Mª L[a].; Huerta, M. P[b]

[a]FloridaUniversitària, [b]Universitat de València

Resumen

En esta investigación estamos interesados en analizar hasta qué punto el uso e interpretación de las medidas de centralización están influidas por el contexto en el que se formulan los datos y si la presencia de valores atípicos entre ellos influye en la elección del mejor representante del conjunto de datos proporcionados. Se analizan las respuestas de los estudiantes a un cuestionario de problemas desde el punto de vista de su dificultad y de la influencia que tienen el contexto y los valores atípicos sobre su resolución.

Palabras clave: *didáctica, matemáticas, práctica educativa, contextos, medidas de centralización.*

Abstract

In this research we are interested in analyzing to what extent the use and interpretation of the measures of centralization are influenced by the context in which data are made and if the presence of outliers between them influences the choice of the best representative of a data set. We analyze students' responses to a questionnaire of problems from the point of view of its difficulty and the influence of the context and outliers on its resolution.

Keywords: *didactics, mathematics, educational practice, contexts, measures of centralization.*

INTRODUCCIÓN

Muchos trabajos de investigación siguen mostrando las dificultades que tienen los estudiantes al tratar con tareas de contenido estadístico en el que los significados, y no tanto los cálculos estén presentes. Nos referimos al uso e interpretación de las medidas de centralización, con sus medidas de dispersión correspondientes, como la mejor manera de representar, describir o estimar el comportamiento de un conjunto de datos. No nos referimos, en cambio, a sus cálculos sino a su uso e interpretación, que según se informa puede depender del contexto en el que los datos están expresados (Batanero, Godino y Navas, 1997). Este trabajo está en esa misma línea. Pretende ver hasta qué punto el uso e interpretación de las medidas de centralización están influidas por el contexto en el que se formulan los datos y si la presencia de valores raros, extraños o atípicos (estadísticamente hablando) entre ellos influye en la elección de su mejor representante. Cuanto mejor entendamos estas dificultades mejor podremos hacer aportaciones para mejorar el razonamiento estadístico de los ciudadanos.

En este trabajo nos centramos en el estudio de la resolución de problemas estadísticos ante la presencia de la variabilidad de los datos, por estudiantes de diferentes niveles educativos y formación. En particular, estudiamos la influencia que el contexto y el formato de los datos en el que se formulan los problemaspuedan tenersobre las resoluciones de los estudiantes.

Los objetivos específicos en este trabajo son los siguientes:

Martínez, Mª L. , y Huerta, M. P. (2016). Influencia del contexto en el uso e interpretación de medidas de centralización afectadas por valores atípicos. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 465-475). Málaga: SEIEM

a.Identificar y medir los niveles de dificultad de los problemas considerados en relación con el contexto en el que se ha situado dicha resolución.

b. Evaluar la representatividad de la media aritmética para el resolutor ante la presencia de valores atípicos.

En este sentido, existe un claro consenso en que los problemas estadísticos, en los que la pregunta del problema no se refiere exclusivamente a un cálculo o aplicación de un algoritmo dado, léase el calcular una media, es una tarea difícil para los estudiantes. Pues bien, queremos medir esta dificultad y ver hasta qué punto está relacionada con la tarea propuesta.

La influencia de los valores atípicos, su consideración o no en la determinación de una medida de centralización, puede depender de múltiples factores. Incluso lo que estadísticamente sea calificado como valor atípico, aquel cuyo valor dista más de 1,5 veces el valor f_s, desde el cuarto más cercano (superior o inferior), siendo $f_s$la cuarta dispersión (Devore, 2005). Lo que estadísticamente se califica como valor atípico puede que para un resolutor no sea más que un valor extraño o raro, producto de un error en la anotación o de un error en la observación. En estos casos, puede ser lícito eliminar esos valores y seguir con el análisis. Pero puede que no sea este su origen, entonces debe considerarse en el análisis global del conjunto de datos al que pertenece (Anderson, Sweeney y Williams, 2010). Pero esto depende del observador y más cuando éste no tiene claro si el dato observado es estadísticamente atípico o por el contrario es extraño o raro y decide considerarlo o no en su análisis.

INVESTIGACIONES PREVIAS

Numerosas investigaciones se han interesado de algún modo u otro por las medidas de posición central o tendencia central, informándonos de que siempre presentan dificultades en el alumnado. Estas dificultades se extienden incluso a los futuros maestros. Así, Reading y Pegg (1996) ya observaron que los niños de grados 7 a 12, al reducir un conjunto de datos en uno solo que los representara, mostraban dificultad a la hora de dar un argumento o justificar su elección. Únicamente un número pequeño de estudiantes fueron capaces de justificarloen relación con características del conjunto de datos y no de otra manera.Batanero, Godino y Navas (1997) realizan un estudio sobre las dificultades de comprensión de los promedios con profesores de primaria en formación y observan que éstos presentan dificultades en el tratamiento de los ceros y valores atípicos en el cálculo de los promedios, posiciones relativas de media, mediana y moda en distribuciones asimétricas, elección de la medida de tendencia central más adecuada en una determinada situación y el uso de los promedios en la comparación de distribuciones.Estrada, Batanero y Fortuny (2003), en una muestra con367 futuros maestros,mediante un cuestionario de respuesta múltiple exploran el efecto que tiene la presencia de un valor atípico en un conjunto de 9 datos (mediciones) al considerar la media como mejor estimación de una cantidad desconocida, en un contexto de medida. Reportan que el 47% de los futuros profesores escogieron la respuesta correcta, lo que implica que más de un 50% de ellos no consideraron la posibilidad de descartar el valor atípico como no pertinente para la obtención del valor real más probable. Mayén, Díaz y Batanero (2009) exploran en tareas de resolución de problemas el uso y la interpretación de la mediana como mejor representante de una distribución dada. La tarea, abierta y formulada en un contexto de medida de los pesos de 9 niños, consiste en dotar de significado a la noción “peso del niño mediano” y comparar la mediana y la media como mejor representante del conjunto de datos al que se le añade un valor “atípico”, tal vez exagerado en el contexto en el que se está planteando la tarea. Se enfrenta así la escasa robustez del cálculo de la media ante la presencia de valores atípicos con la robustez de la mediana, y el sentido común a la hora de considerarcomo atípico un valor en un contexto dado y reconsiderar su validez para determinar qué usará para calcular su mejor representante: la media, mediana o moda. También, enfrentan la calificación de un valor como “atípico”, estadísticamente hablando, y atípico o extraño por el contexto en el que se está considerando este valor. Los resultados indican que la media es más robusta para el usuario, pues un 45% la prefiere frente al 30% que prefiere la mediana, ante la presencia de un valor atípico entre los datos.Ortiz y Font (2014), en un estudio realizado con estudiantes de primer curso de Magisterio, revelaron en su investigación que siguen dándose importantes dificultades relacionadas con la comprensión de los estudiantes de la media aritmética y sus propiedades.Pero una cosa es calcular medidas de tendencia central o de centralización para un conjunto de valores dados y otra ajustar una medida de centralización a un conjunto de datos en los que perece haber presencia de valores raros, anómalos, atípicos; en cuyo caso, hay que considerar la representatividad de la medidas anteriores para describir la “tipicalidad” de los datos (GrothyBergner, 2006). Estos autores otorgan el nivel SOLO más sofisticadoa aquellos estudiantes que son capaces de observar que la media está altamente afectada por datos atípicos, mientras que la mediana y la moda no lo están (ibid., p. 53).

A la media se le concede muchas veces el significado de valor típico o representativo de una distribución dada (GrothyBergner, 2006, p. 52), lo que hace que en distribuciones simétricas la media se sitúe en el centro del rango de variación de los datos y sea su mejor representante, pero si esto no es así, entonces deja de serlo a favor de la mediana o de la moda (Batanero, Godino, Vallecillo, Green y Holmes, 1994).

Generalmente, los trabajos que hemos presentado toman como fuente de datos las respuestas del alumnado a cuestionarios muy conocidos por la investigación. Pero, dichas respuestas no siempre son analizadas teniendo en cuenta el contexto en el que se formulan y el formato de datos que es propio del contexto, factores que pueden ser influyentes en los resolutores (Ben-Zvi y Garfield, 2004). Mooney, Langrall y Nisbet (2006) examinan el rol que juega el conocimiento del contexto al interferir o ayudar a estudiantes de nivel medio en sus respuestas a problemas que plantean una comparación de conjuntos de datos. Demuestran que el uso del conocimiento del contexto varía y que se puede describir y clasificar. Recientemente, Orta, Sánchez y Altamirano (2015), al explorar el razonamiento de profesoras en formación acerca de la dispersión de los datos en problemas que involucran riesgos, concluyen que el contexto y el formato de presentación de los problemas ejercen mayor influencia en la resolución que la estructura del problema.

METODOLOGÍA

Muestra

El cuestionario fue cumplimentado por un total de 188 alumnos y alumnas (ver su distribución en Tabla 1).La muestra no fue seleccionada de forma intencionada. Participó todo el alumnado matriculado en los diferentes grupos que estaba presente en el momento de la administración del cuestionario. El alumnado de secundaria cursaba la opción B de 4º y“simultaneidad” cursaba simultáneamente Educación Infantil y Primaria (cursando 4º de Infantil y 3º de Primaria durante el desarrollo de la prueba).

Tabla 14. Distribución de la muestra por niveles educativos: Educación secundaria obligatoria,4º curso, (ESO). Estudiantes de 2º grado de Educación Infantil (MI) y Primaria (MP), estudiantes de simultaneidad (MS), en EI y EP, y estudiantes que actualizan su diplomatura a grado (MA).

Nivel	*N*	*%*
ESO	72	38,30
MI	44	23,40
MP	35	18,62
MS	16	8,51
MA	21	11,17
Total	188	100,00

El alumnado no recibió instrucción específica para esta investigación sobre medidas de centralización y dispersión. Sus conocimientos previos correspondían a la formación recibida anteriormente en función de su etapa educativa. Los estudiantes de secundaria, los de MI y de MP no habían sido instruidos aún en contenidos de Estadística en el momento en el que se les administró el cuestionario. Solamente los cursaron los alumnos de MS dentro de la asignatura de Matemáticas para maestros.

Los datos fueron recogidos mediante la administración de un cuestionario constituido por 4 problemas, cada uno de ellos con dos apartados, completando un total de 8 ítems para los que el estudiante podía disponer de calculadora si lo estimaba oportuno. Se trata de problemas de respuesta abierta, creados por los investigadores. A lo largo de los problemas del cuestionario se planteaba la comparación de tres distribuciones, considerada como una competencia estadística básica. Se repiten las preguntas en contextos y formatos de datos diferentes; se podría decir que los problemas coincidían en el fondo, pero no en la forma. Este planteamiento respondía al diseño intencionado de los investigadores.Los problemas P1 y P2 se formularon en el contexto estadístico-social, descritos por dos variables cuantitativas, una discreta en el P1 y la otra continua en el P2. De igual modo hicimos con los problemas P3 y P4 formulados en el contexto estadístico-salud (ver anexo).

Una forma de investigar posibles influencias de las variables independientes de los problemas, contexto y formatos, sobre los resolutores, consiste en determinar las dificultades asociadas. Para medirlas seguimos la metodología propuesta por Carles, Cerdán, Huerta, Lonjedo y Edo (2009) para los problemas de probabilidad. Las dificultades consideradas, Dificultad apreciada del problema (DAP), Dificultad (global) y restringida del Problema (DP y DPR, respectivamente), Dificultad de la solución (DSP) y de su descripción (DDRES y DDRESC) son conceptualmente las mismas que allí y pretender medir el porcentaje de éxito como, por ejemplo, en: Dificultad del problema (DPR): $DPR = 100 - \left(\frac{resultado}{abordado}\right) \times 100$ fórmulas en las que las expresiones literales hablan del número de resolutores que abordan el problema, que dan un resultado o un número correcto. En todos los casos, la dificultad oscila entre 100, máxima dificultad y 0nula.

Por otra parte, como los cálculos pueden estar basados o no en la utilizaciónde medidas estadísticas, para que la respuesta del problema se considere correcta, es necesario acompañar el razonamiento de una medida de dispersión que permita asegurar que la reducción de los datos es la adecuada. Las respuestas que no usen un razonamiento basado en parámetros estadísticos se codificarán como NRE (No Razonamiento Estadístico). Las respuestas que usen un razonamiento basado en parámetros estadísticos que no sean centrales se codificarán como RENC (Razonamiento Estadístico No Central). Las respuestas que usen un razonamiento basado en medidas centrales con análisis de la dispersión de los datos se codificarán como RECC (Razonamiento Estadístico Central Completo). Como consecuencia de la experimentación, se ha observado que el único análisis de la dispersión que realiza el alumnado es el cálculo del rango que, en ocasiones, puede estar o no acompañado del reconocimiento de valores atípicos. En consecuencia, contemplaremos dentro de este tipo de respuestas aquellas que calculen la media aritmética con y sin el valor atípico para valorar la representatividad de la media. Daremos por correcta la respuesta en la que el alumnado haga referencia a la variabilidad, sin realizar cálculos de la dispersión de los datos, y acompañe la reflexión con el cálculo de la mediana o de la media aritmética (sin considerar la observación atípica para el caso de la media). Si no se realiza este análisis, se codificarán como RECI (Razonamiento Estadístico Central Incompleto).

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Sobre las dificultades de los problemas

La tabla siguiente (Tabla 2) muestra las dificultades asociadas a los problemas leídas globalmente.

Tabla 2. Dificultades globales de los problemas en %, sin considerar contextos y formatos, máxima 100.

Problema\Dificultad	DAP	DP	DPR	DSP	DDRES	DDRESC
P. 1.1	2,66	4,26	1,64	43,17	11,67	97,48
P. 1.2	4,79	6,38	1,68	88,27	32,39	97,48
P. 2.1	4,26	5,32	1,11	91,67	20,22	97,89
P. 2.2	20,21	20,74	0,67	99,33	44,30	98,80
P. 3.1	8,51	10,64	2,33	22,09	9,52	98,03
P. 3.2	11,17	11,70	0,60	20,96	28,31	97,48
P. 4.1	10,11	11,70	1,78	76,33	21,08	97,71
P. 4.2	28,19	31,38	4,44	97,04	42,64	98,65

El gráfico siguiente (Gráfico 1) permite una comparación de las dificultades dependiendo del problema considerado.

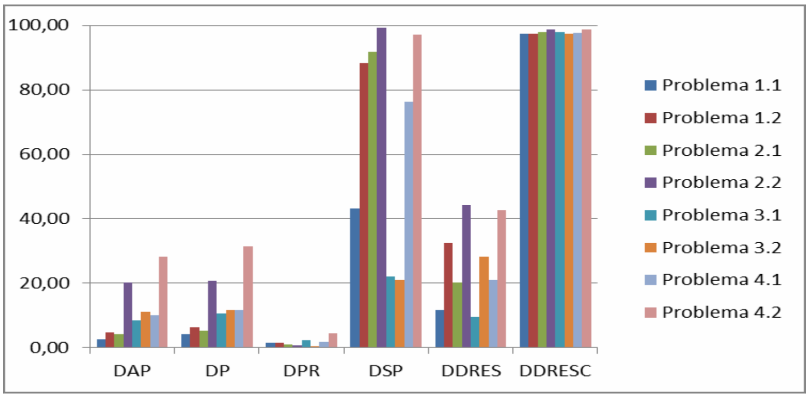


Figura 1. Dificultades globales de los problemas por tipo de dificultad

De él se desprende que, independientemente del problemas del que se trata, justificar una respuesta basándose en razonamientos estadísticos es una tarea casi imposible para la muestra de estudiantes considerada (DDRESC>97%), aunque estos lo intentan (DDRES<45%), intento que depende de lo que se pregunta en el problema (mayor en la cuestión 2 que en la 1). Esta dificultad se corresponde con la dificultad apreciada mayoren la tarea de ordenación de muestras por razones estadísticas que la tarea de escoger el mejor representante, destacando este hecho en el problema P2.2 y P4.2 (DAP>20%), cuyas preguntas hacen referencia al valor esperado. Por otra parte, si observamos aisladamente la capacidad de dar respuestas correctas a los problemas, podemos llegar a concluir, erróneamente, que el problema P3 es el menos difícil (DSP<22% aprox.). Sin embargo, si consideramos la solución numérica junto con la descripción de las respuestas, la percepción cambia. Esto es debido a que en el problema P3 el resolutorpuede dar conel tratamiento más efectivo con diferentes cálculos erróneos como, por ejemplo, sumar los metros caminados por los niños y niñas. Es cierto que, en este problema, la media aritmética en el grupo 3 es superior a la media de los grupos 1 y 2. La media de este grupo es representativa y no posee observaciones atípicas. En consecuencia, el resolutorque ha respondido a partir del cálculo de la media aritmética proporciona una respuesta numérica correcta. No obstante, no se da por correcta la respuesta si no está acompañada de una medida de dispersión o de una reflexión respecto a la presencia de observaciones atípicas.

Los resultados muestran también que el problema P1 es el que presenta una menor dificultad apreciada para los resolutores (DAP< 5% para ambos ítems).Este problema está formulado en un contexto en el que se habla de ingresos anuales por familia y, en este tipo de situaciones, parece que todos podemos dar nuestra opinión, ya sea con fundamentos estadísticos o idiosincráticos. El segundo problema con una DAP menor ha sido el P2.1, que también está formulado enel mismo contexto. Sin embargo, la dificultad apreciada ha aumentado cuando hemos utilizado el término verbal “esperas”. Este hecho se ha repetido cuando se ha vuelto a usar al formular el problema P4.2. Ya hemos mencionado que en apariencia el problema P3 parecía presentar menos dificultades a los estudiantes, pero si se realizaba un análisis exhaustivo de las dificultades del problema entonces esto no era tan evidente.

Representatividad de la media aritmética para el alumnado ante la presencia de valores atípicos

Los datos se presentan en términos relativos con respecto al alumnado que ha respondido a los diferentes problemas.En la tabla 3puede observarse como el porcentaje mayor de alumnos que usan un razonamiento estadísticocompleto corresponde a los maestrosde actualización (MA),seguido de primaria (MP) y secundaria (ESO), pero con valores tan bajos que no permiten obtener ninguna conclusión. El alumnado que ha realizado este tipo de razonamiento conoce que es preciso descartar la observación atípica antes de proceder al cálculo de la media aritmética, ya que ésta es muy sensible a los valores extremos. Tal como se afirma en Batanero, Godino y Navas (1997:3), "se trata de discriminar entre el simple conocimiento algorítmico de la fórmula de cálculo,…, de la comprensión relacional del concepto". Elporcentaje global de respuestas estadísticamente correctas esmuy bajo, 5 alumnos de un total de 188 han sido capaces de dar esta respuesta en el conjunto de lamuestraconsiderada (2,66%). Los futuros maestrosde infantil y de simultaneidad no proporcionan ninguna respuesta correcta. A la vez, son los estudiantes de simultaneidad quien mayoritariamente proporcionan razonamientos no estadísticos, después de MI y ESO. El alumnado de simultaneidad proviene del grado de maestro de infantil.

A excepción de un alumno de actualización, que ha utilizado la mediana como medida central, el resto de alumnado ha utilizado la media aritmética. Esto indica que consideran que la media es preferible a la mediana o moda como mejor representante de un conjunto de datos, aunque no han considerado necesario considerar ydesechar el valor atípico en todos los casos, tal y como refleja la columna RECI. Por ello, más del 68% del alumnado de MIse ha quedado con el conocimiento algorítmico, siendo este el grupo más numeroso en el que se había elegido la media como mejor representante de los datos.

Tabla 3. Uso de parámetros estadísticos problema P1 (en%)

	NRE	RENC	RECC	RECI
ESO	78,46	0,00	1,54	20,00
MI	48,83	4,65	0,00	46,52
MP	28,57	0,00	2,86	68,57
MS	87,50	0,00	0,00	12,50
MA	42,86	9,52	14,29	33,33

Comparado con el problema P1, la preguntas planteada en P2 da lugar a una disminución en el porcentaje de alumnado que daba una respuesta correcta, incrementándose el número de resolutoresque ofrece una respuesta basada en cálculos estadísticos centrales incompletos y disminuyendo el de losque no basaban su respuesta en razonamientos estadísticos (Tabla 4). En este problema, se pedía de forma explícita el tiempo medio por lo que era de esperar que se dieran estos resultados. De nuevo,la formulación de la pregunta influye en la resolución y se manifiesta como una variable de la tarea influyente.

Tabla 4. Uso de parámetros estadísticos problema P2 (en %)

	NRE	RENC	RECC	RECI
ESO	70,31	3,12	0,00	26,57
MI	30,23	0,00	0,00	69,77
MP	14,28	0,00	2,86	82,86
MS	73,33	0,00	0,00	26,67
MA	42,86	0,00	9,52	47,62

En la tabla siguiente (Tabla 5), observamos que siguen siendo contados los casos en los que se realiza una resolución basándose en cálculos estadísticos correctos, ahora en el problema 3.

Tabla 5. Uso de parámetros estadísticos problema P3 (en %)

	NRE	RENC	RECC	RECI
ESO	60,35	8,62	1,72	29,31
MI	33,33	5,13	0,00	61,54
MP	14,71	0,00	5,88	79,41
MS	68,75	0,00	0,00	31,25
MA	28,57	28,57	4,76	38,10

El reconocimiento de observaciones atípicas por parte del alumnado es una condición necesaria para que se conciencie de su influencia en el cálculo de la media aritmética. Sin embargo, no es una condición suficiente de cara a la búsqueda de medidas alternativas que representen la reducción de datos de forma correcta. A continuación mostramos dos respuestas de alumnos que involucran la presencia de observaciones atípicas y comentamos cómo evalúan estas observaciones.

Colectivo	Dioptrías										
Doctores	3	0	0	2	1.75	0.5	0	2	2.25	0.5	12
Graduados	0	2	0	0	0	1.5	1.6	1.25	2.25	0.75	9'35
Sin estudios superiores	2	2	0	1	0.5	0.25	1.5	1	2.75	3.5	14'5

Figura 2. Modificación de datos problema P4 del alumno 151

El alumno observa en la tabla el valor 16 (Figura1) y considera que es un valor extraño en relación con el resto de la muestra. No considera la posibilidad de la existencia de observaciones atípicas, directamente decide modificar el valor extraño reconvirtiéndolo en 1.6, un valor mucho más normal dentro del conjunto de valores observados en el contexto de las dioptrías.

① Público : 1250 : 10 = 125 h de media
Privado : 1340 : 10 = 134 h de media
Conectado : 1250 : 10 = 125 h. " "

En el privado estan más tiempo conectados a internet ya que la media es 134 h. Pero pienso que por que un niño/a sobrepasa las horas.

Figura 3. Respuesta al problema P2.1 del alumno 160

La respuesta refleja que el alumno reconoce que la media se ve afectada por la observación atípica, ya que afirma que la media es 134 h porque un niño/a sobrepasa las horas. Sin embargo, no modifica los cálculos ni su respuesta, que la acepta matizada por el comentario. Puede que la respuesta le acomode mejor de esta manera

Los estudiantes no siempre reconocenla función de las observaciones atípicas ya que, pese a ser reconocidas, no tiene en cuenta cómo afecta su consideración al cálculo de la media aritmética en cualquier caso. Es más, los estudiantes de MI no las han descartado en ningún problema y los de MS únicamente en el problema P4. Destaca los componentes de MA al descartar la observación atípica en todos los problemas, aunque en pequeños porcentajes. En particular, ha habido un alumno de actualización que ha utilizado la mediana y otro medias recortadas para responder a los problemas ante la presencia de observaciones atípicas. Así, el nivel SOLO más abstracto, considerado enGrothyBergner (2006), puede ser considerado para muy pocos estudiantes de nuestras muestras, pues en generalno son capaces de observar el efecto que producen los valores atípicos sobre la media y su representatividad. En comparación con los resultados obtenidos por Estrada, Batanero y Fortuny (2003), obtenemos peores resultados al sobrepasar el 50% de futuros maestros que no descartan el valor atípico para el cálculo de la media aritmética en los problemas que hemos considerado. Llegan a alcanzar, dependiendo del problema y del colectivo, el 100% que ni siquiera reconoce la presencia de una observación atípica, rara o extraña.

CONCLUSIONES

Cuando los problemas se formulan en la manera en la que se han formulado en nuestro cuestionario, conteniendo valores atípicos y tablas con tamaño de colecciones de datos diferentes, la influencia, tanto del formato de los datos como del contexto en el que se formulan, se muestra como un factor que condiciona las dificultades de los problemas. Hemos visto que los problemas que se enunciaban en un contexto estadístico-social presentaban menos dificultad para el alumnado a la hora de abordarlos y dar una respuesta que los enunciados en un contexto estadístico-salud a pesar de que los problemas planteados presentaban la misma complejidad en sus cálculos. Además, los términos en que se planteaba la pregunta también influían en la dificultad del problema y, en particular, en el hecho de tener que proporcionar un valor esperado. El reconocimiento de una observación atípica permitía al alumnado dar una respuesta correcta al problema; este reconocimiento se basaba en su conocimiento del contexto ya que, al no calcular los cuartiles ni realizar gráficos de cajas y bigotes, no tenía herramientas para caracterizar las observaciones atípicas. Creemos que es muy significativo que los estudiantes hayan aceptado el problema y tratado de dar una respuesta al mismo, aunque basándose casi exclusivamente en su conocimiento sobre el contexto en el que estaba formulado, puesto que el proceso de resolución implicaba la identificación de una observación atípica y su influencia en la solución ha sido determinante.

Aunque el cálculo de las medidas centrales no presentaba dificultad, la mayoría de los estudiantes se limitaron a calcular la media aritmética sin tener en cuenta si era representativa o no. Salvo contadas excepciones, no calcularon otras medidas centrales y, en caso de hacerlo, correspondió a la moda. Únicamente un alumno calculó la mediana tras observar la presencia de una observación atípica que determinó a través del contexto.

Además, hemos encontrado las mismas dificultades en la comprensión de las medidas centrales que Batanero, Godino y Navas (1997) en relación con el tratamiento de los ceros y valores atípicos en el cálculo de medidas centrales y el uso de promedios en la comparación de distribuciones. El alumnado, en general, demostró no conocer que la media aritmética debe ir acompañada de la desviación típica para valorar si es adecuada o no a la hora de dar respuesta a la comparación de distribuciones ni tampoco se planteó el uso de medidas de tendencia central más allá de la media aritmética. Esto es debido a la falta de uso de la idea de dispersión, ya que aunque algunos calcularon el rango de forma correcta, no llegaron a captar el significado de variabilidad ni su utilidad en la comparación de dos distribuciones. En consonancia con la investigación realizada con futuros maestros de primaria de Ruiz, Arteaga y Batanero (2009), nuestros resultados sugieren que, para el alumnado, las medidas centrales resultan más intuitivas que las medidas de dispersión y no las considera necesarias para comparar distribuciones. Hemos de mencionar que únicamente 14 alumnos de nuestra investigación, de un total de 188, afirmaron conocer el uso del modo estadístico en la calculadora.

Resumiendo, si la esencia del razonamiento estadístico es para Wild y Pfannkuch (1999) el concepto de distribución, y un requisito para comprender la distribución es la variabilidad, los resultados de nuestra investigación indican que ni tan siquiera los maestros en activo poseen este razonamiento. Concluimos que el contexto y el formato de los datos deberían tenerse en cuenta a la hora de diseñar secuencias de enseñanza o trabajos de investigación relacionados con la comparación de conjuntos de datos a tenor de lo expuesto en este trabajo y, rogamos encarecidamente, que la formación de los maestros pase por una atención a estos problemas. El alumnado, en sus primeros años de escolaridad, apenas adquiere una perspectiva algorítmica de las principales medidas estadísticas, manifestando grandes dificultades en interpretar los resultados obtenidos. El recurso excesivo de fórmulas estadísticas y la utilización de problemas descontextualizados tiene como resultado “alumnos mal preparados para el estudio de la estadística, a nivel superior, y adultos estadísticamente analfabetos” (Batanero y Díaz, 2010: 6).Un enfoque alternativo a la enseñanza actual debería estar basado en el análisis de datos como medio para la resolución de problemas como los que hemos utilizado en este estudio.

Referencias

Anderson, D.E.; Sweeney, D.J. y Williams, T. A. (2010).*Estadística para Administración y Economía* (10ª ed.). México: Thomson.

Batanero, C. yDíaz, C. (2010). Training teachers to teach statistics: what can we learn from research? *Statistique et enseignement*, *1*(1), 5-20. Recuperado el 11 de junio, de http://statistique-etenseignement.fr/ojs/

Batanero, C.; Godino, J. D. y Navas, F. (1997). Concepciones de maestros de primaria en formación sobre los promedios. Recuperado el 10 de junio de 2014, de http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Logse.pdf

Batanero, C.; Godino, J. D.; Vallecillos, A.; Green, D.R. y Holmes, P. (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts.*International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 25:4, 527-547. DOI: 10.1080/0020739940250406.

Ben-Zvi, D. yGarfield, J. (2004). Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking: Goals, Definitions, and Challenges. In D. Ben-Zvi, y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 3-15). Dordrecht: Kluwer.

Carles, M.; Cerdán, F.; Huerta, M. P.; Lonjedo, M.A. y Edo, P. (2009). Influencia de la estructura y del contexto en las dificultades de los problemas de probabilidad condicional de nivel N0. Un estudio exploratorio con estudiantes sin enseñanza previa. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 173-185). Santander: SEIEM.

Devore, J. (2005). Probabilidad y Estadística para ingeniería y ciencias. México D.F.: Thomson

Estrada, A.; Batanero, C. y Fortuny, J.M. (2003). Dificultades de los profesores en formación en conceptos estadísticos elementales. En E. Castro (ed.) *Investigación en educación matemática: Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*(pp. 201-212). Granada: SEIEM.

Groth, R. E.y Bergner, J. A. (2006).Preservice Elementary Teachers' Conceptual and Procedural Knowledge of Mean, Median, and Mode. *Mathematical Thinking and Learning, 8*(1), 37-63, DOI: 10.1207/s15327833mtl0801_3

Mayén, S.; Díaz, C. y Batanero, C. (2009). Conflictos semióticos de estudiantes con el concepto de mediana. *Statistics Education Research Journal, 8*(2), 74-93.

Mooney, E.; Langrall, C. yNisbet, S. (2006). Developing a model to describe the use of context knowledge in data explorations. Recuperado el 12 de julio de 2015, de http://www.researchgate.net/publication/29462444_Developing_a_Model_to_Describe_the_Use_of_Context_Knowledge_in_Data_Explorations

Orta, J.A.; Sánchez, E. y Altamirano, J. A. (2015). Interpretación de la dispersión de datos en contexto de riesgo por profesoras en formación. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 441-450). Alicante: SEIEM

Ortiz, J.J. y Font, V. (2014). Pre-service teachers' common content knowledge regarding the arithmetic mean.*REDIMAT, 3*(3), 192-219. Recuperado el 10 de junio de 2015, de http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2014.51

Reading, C. yPegg, J. (1996). Exploring understanding of data reduction. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 187-194). Universidad de Valencia, España.

Ruiz, B.; Arteaga, P. y Batanero, C. (2009). Competencias de futuros profesores en la comparación de datos. En L. Serrano (Ed.), *Tendencias actuales de la investigación en educación estocástica* (pp. 57-74). Málaga: Gráficas San Pancracio.

Wild, C. yPfannkuch, M. (1999).Statistical thinking in empirical enquiry.*International StatisticalReview,* 67(3), 223-265.

Anexo. Enunciado de los problemas. Un ejemplo

Problema 1

En un edificio A, de la periferia de Valencia, viven 10 familias cuyos ingresos anuales en miles de euros son: 220; 17.5; 22; 19; 16.5; 20.5; 21; 19.5; 24; 19. En otro edificio B, del centro de Valencia, viven 12 familias cuyos ingresos anuales en miles de euros son: 43; 44.5; 37; 39; 40; 43; 37; 33; 42; 37; 46; 37. En un tercer edificio C, de un pueblo del interior, viven 10 familias cuyos ingresos anuales en euros son: 22000, 19000, 18000, 21000, 21000, 20000, 24000, 24000, 25000, 18000.

1. ¿Qué edificio crees que sería el mejor representante de las familias con mayor poder adquisitivo? ¿Por qué?

2. Si tuvieras que ordenar los edificios anteriores de mayor a menor poder adquisitivo, ¿cómo lo harías? ¿En qué orden quedarían? Justifica la ordenación.

Problema 3

En una clínica infantil para niños y niñas con problemas para caminar, se ha creado tres grupos. A cada grupo se le ha aplicado una técnica diferente de aprendizaje. Al final del tratamiento, se ha realizado una prueba consistente en el número de metros que cada niño anda, seguido y sin caerse. Los resultados para los tres grupos han sido los siguientes:

Grupo	Metros caminados por cada niño/a														
1	1	2	1	2	2	4	1	1	3	2	1	4	2		
2	1	1	2	1	3	2	15	4	1	2	3	4	1	1	
3	2	2	3	1	4	5	2	2	3	3	1	3	5	4	5

1. ¿En qué grupo consideras que el tratamiento ha sido más efectivo? ¿Por qué?

2. Si tuvieras que ordenar los tratamientos de mayor a menor efectividad, ¿cómo lo harías? ¿En qué orden quedarían? Argumenta tu respuesta.

EL PORTAFOLIO COMO HERRAMIENTA PARA DESARROLLAR Y EVALUAR LA COMPETENCIA REFLEXIVA EN FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICA[xii]

The Portfolio As A Tool For Evaluating The Reflective Develop And Competition In Future Teachers Mathematics

Seckel, MJ[a] y Font, V[b]

[a]Universidad Católica de la Santísima Concepción, [b]Universidad de Barcelona

Resumen

En esta investigación se presenta un estudio de caso único para profundizar sobre el uso del portafolio para desarrollar la competencia reflexiva en futuros profesores de primaria con mención en matemática. El estudio siguió una metodología cualitativa, analizando los datos obtenidos a partir de entrevistas y análisis de documentos. Con el análisis de los datos se pudo evidenciar que los estudiantes que desarrollan todas las tareas solicitadas en portafolio logran un progreso en el desarrollo de la competencia en estudio y, además, se distinguen los tipos de obstáculos para su desarrollo.

Palabras clave: *Formación inicial, desarrollo de competencias, competencia reflexiva.*

Abstract

In this investigation, a single case study is presented to deepen the use of reflective portfolio to develop competition in future primary teachers majoring in mathematics. The study followed a qualitative methodology, analyzing the data obtained from interviews and document analysis. With the analysis of the data it was evident that students who develop all the tasks requested in portfolio achieved progress in the development of competition in the study and also the types of obstacles to development are distinguished.

Keywords: *Initial training, skills development, reflective competition.*

INTRODUCCIÓN

El auge de las competencias en el ámbito educativo llevó a la necesidad de tener recursos evaluativos coherentes con la complejidad de las mismas. Distintos autores proponen que para evaluar competencias es necesario recurrir a la evaluación "auténtica" (Bravo y Fernández, 2000; Palm, 2008; Marín, Arbesú, Guzmán y Barón, 2012), entendida como una evaluación que pretende evaluar lo que las personas hacen en el contexto de una situación real. Desde esta perspectiva, en el ámbito de la educación superior, evaluar competencias implica plantear estrategias evaluativas que se centren en la realización, por parte de los estudiantes, de tareas con un grado de dificultad adecuado al momento formativo (Fernández, 2010). En el caso de la formación del profesorado, Opazo, Sepúlveda y Pérez (2015) manifiestan que los futuros profesores valoran el uso del portafolio, la autoevaluación, la observación y las exposiciones orales como instrumentos de evaluación que promueven el desarrollo de tareas auténticas, es decir, tareas que se sustentan en contextos reales. En estas evaluaciones, el portafolio es considerado un recurso que permite una excelente experiencia reflexiva, ya que su construcción favorece un proceso de retroalimentación y

Seckel, MJ[a] y Font, V. (2016). El portafolio como herramienta para desarrollar y evaluar la competencia reflexiva en futuros profesores de matemática. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 476-485). Málaga: SEIEM.

promueve procesos reflexivos que, en el caso de los profesores, les permite evaluar y mejorar su práctica (Shulman, 1999).

Considerando lo anterior, hemos estimado relevante analizar el trabajo llevado a cabo por una profesora, quien propone trabajar a través de un portafolio para desarrollar y evaluar la competencia reflexiva en futuros profesores de primaria con mención en matemática que estudian en una universidad chilena. Se trata de un estudio de caso que pretende tener información de cómo las tareas propuestas por la profesora fomentan el desarrollo de la competencia reflexiva en sus alumnos, en particular, se pretende encontrar evidencias de un determinado nivel de desarrollo. marco de referencia

Según Weinert (2001), los enfoques por competencias pueden clasificarse en tres grandes grupos: a) Enfoque cognitivo, b) Enfoque motivacional y c) Enfoque integral o de acción competente. De acuerdo a esto, la conceptualización de competencia que usamos en este trabajo se realiza desde la perspectiva de la acción competente, considerándola como el conjunto de conocimientos, disposiciones, etc. que permite el desempeño eficaz en los contextos propios de la profesión de las acciones citadas en su formulación. Dicho en términos aristotélicos, se trata de una potencialidad que se actualiza en el desempeño de acciones eficaces (competentes). Se trata de una conceptualización que es coherente, o al menos no contradictoria, con la propuesta del Ministerio de Educación de Chile, quienes entienden por competencia lo que un profesor debe saber y poder hacer en su vida profesional. Además, en la propuesta del ministerio se considera que las competencias se construyen a partir del desarrollo de un conjunto de conocimientos y habilidades que debería manejar un profesor para llegar a enseñar en el nivel escolar que le corresponde.

Esta formulación del término de competencia debe ser desarrollada para ser operativa, y para ello hay que realizar una caracterización de la competencia (definición, niveles de desarrollo y descriptores) que permita su desarrollo y evaluación. El desarrollo de competencias en la formación inicial de profesores requiere, por parte de sus formadores, de una propuesta de tareas que permitan su desarrollo de manera progresiva. A su vez, el formador debe considerar un plan para evidenciar dicho progreso y evaluar su desarrollo. De acuerdo a lo planteado por Font, Breda y Sala (2015), Seckel (2016), Seckel y Font (2015) y Font y Adán (2013), el punto de partida para el desarrollo y evaluación de una competencia debe ser una tarea que produce la percepción de un problema profesional que se quiere resolver, para lo cual el futuro profesor debe movilizar habilidades, conocimientos y actitudes, para realizar una práctica (o acción) que intente dar solución al problema. Además, podemos esperar que dicha práctica se realice con más o menos éxito (logro) y, a su vez, dicho logro se puede considerar una evidencia de que la persona puede realizar prácticas similares a las que están descritas por alguno de los descriptores de la competencia, el cual se suele asociar a un determinado nivel de competencia (figura 1).

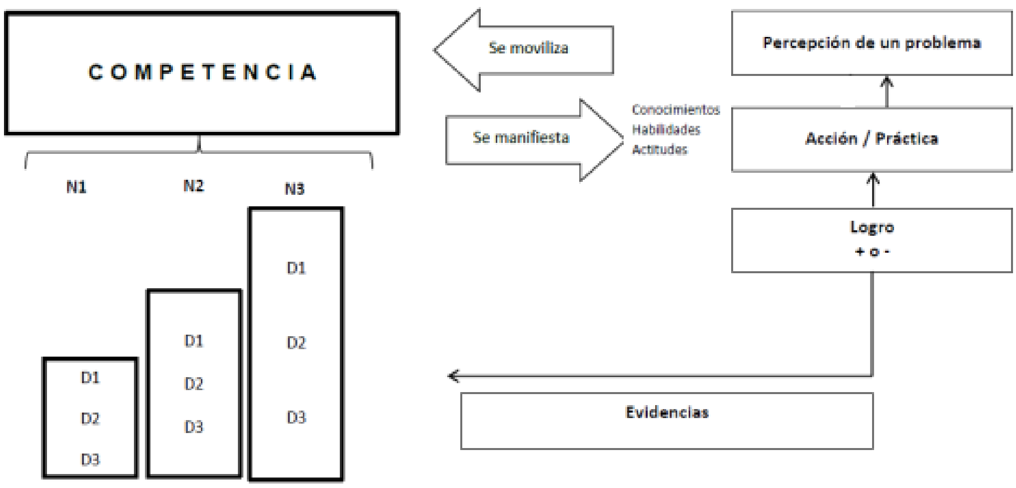


Figura 1. Conceptualización de competencia.

En cuanto al desarrollo de la competencia reflexiva, distintos autores se han interesado en investigar sobre cómo deben ser los procesos formativos para desarrollarla (Nolan, 2008; Giménez, Font y Vanegas, 2013), mostrando técnicas, pautas u orientaciones que son útiles para ello. En el ámbito de la formación inicial de profesores de matemática, Godino y Batanero (2008) consideran que los procesos de orientación (reflexión guiada) no se limitan únicamente a la reflexión que surge de la práctica de los futuros profesores, sino que también debe estar presente en las tareas que se presentan en los procesos de formación académica, de manera que los estudiantes vinculen la teoría con la práctica. Ahora bien, una vez diseñadas las tareas, el profesor debe considerar un plan para evidenciar el progreso de sus estudiantes, para lo cual puede considerar el proceso descrito en la figura 1. En nuestro trabajo utilizamos la conceptualización de competencia propuesta en dicha figura para analizar el progreso que manifiestan los estudiantes que participan en un ciclo formativo propuesto por una profesora para desarrollar la competencia reflexiva, apoyándonos además, en una caracterización de ésta (ver tabla 1). Dado que la profesora propuso a los estudiantes la elaboración de un portafolio, fue posible recolectar evidencias que se pueden relacionar con los descriptores de los niveles de desarrollo de la tabla 1.

Tabla 1. Niveles de desempeño de la competencia reflexiva

Competencia de reflexión
Analiza críticamente su práctica pedagógica y la de otros docentes en función de su impacto en el aprendizaje de los estudiantes, y propone y fundamenta cambios para mejorarla.

Nivel 1	*Nivel 2*	*Nivel 3*
D1. Conoce el sistema educativo nacional, sus fines y objetivos, su estructura, la normativa que lo rige, sus principales logros y los desafíos y metas que tiene. D2. Conoce algunos constructos del área de educación Matemática que permiten la reflexión sobre la práctica. D3. Realiza análisis poco elaborados de procesos de instrucción, con observaciones generales en las que se tiene poco en cuenta la especificidad de las matemáticas.	D4. Conoce constructos del área de Educación Matemática que permiten la reflexión sobre la práctica y la valoración de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. D5. Describe y/o explica la práctica pedagógica poniendo énfasis solo sobre algún aspecto parcial (por ejemplo, sobre todo en función de su impacto en el resultado del aprendizaje de los estudiantes) pero tiene en cuenta la especificidad de las matemáticas. D6. Propone cambios para mejorar la práctica futura con poca fundamentación teórica.	D7. Describe, explica y valora (holísticamente y críticamente) la práctica pedagógica usando herramientas propuestas en el área de Educación Matemática. D8. Propone cambios para mejorar la práctica futura basada en el uso de herramientas para observación y evaluación de clases fundamentadas en la literatura del área de Educación Matemática.

En el ámbito de la formación inicial del profesorado, el uso del portafolio se justifica a través de lo planteado en distintas investigaciones en las que se sostiene que no solo es un instrumento adecuado para un tipo de evaluación auténtica si no que, además, se reconoce como un instrumento facilitador de la reflexión que permite alcanzar un aprendizaje donde se integra la teoría y la práctica (Cano, 2005; Seldin, 2004).

Barberá (2005) señala que trabajar por medio de un portafolio puede ser una tarea compleja no solo para los estudiantes sino también para el formador y, al igual que Rodrígues (2013), presenta algunos elementos claves para llevar a cabo un buen trabajo en base a un portafolio. Estos autores coinciden en tres aspectos, los cuales tienen relación con el rol del profesor durante el proceso formativo:

1. Motivación para el trabajo: el trabajo por portafolio requiere de una motivación permanente, donde los estudiantes comprendan el motivo de su elaboración y se sientan implicados en el trabajo que se les solicita.

2. Calidad de la retroalimentación: el acompañamiento y el diálogo que se genera entre la profesora y los estudiantes en torno a las tareas del portafolio requiere de un alto nivel de profundidad, de manera que se convierta en una instancia más de aprendizaje y se consigan los niveles de reflexión esperados.

3. Criterios claros de evaluación: si el portafolio persigue la evaluación de competencias, entonces se deben presentar criterios claros conocidos por todos los estudiantes desde el inicio del trabajo.

Asimismo, Rodrígues (2013) plantea que podemos encontrar tres tipos de portafolios dependiendo de la finalidad que se le asigne: 1) evaluativos, 2) de seguimiento de procesos y 3) reflexivos. En el caso que hemos analizado, el trabajo de portafolio implicó características de los tres tipos, es decir, tenía como finalidad el desarrollo de la competencia reflexiva en el periodo de un semestre académico (que implica seguir el proceso y diseñar tareas para la reflexión) y la evaluación de su desarrollo.

Dado que nuestro interés es comprender de manera global lo que ocurre en un ciclo formativo para desarrollar la competencia reflexiva en futuros profesores de matemática, consideramos que no se debe poner atención, únicamente, a las evidencias recolectadas a través de los portafolios sino que, además, es necesario analizar el rol del formador durante el ciclo formativo. Por esta razón, analizaremos el trabajo realizado por la profesora en base a los tres elementos mencionados en los párrafos anteriores.

METODOLOGÍA

Se trata de un estudio de caso único (Stake, 2007) compuesto por una profesora (quien propone el trabajo de un portafolio) y quince estudiantes que debían resolver seis tareas (figura 2) de un portafolio a través de un trabajo en grupo (tres integrantes en cada grupo).

ESTRUCTURA

Introducción (Contextualizar al lector. ¿Cuáles son las características del colegio donde focaliza la reflexión? ¿Cuáles son las características del docente a cargo de la asignatura de matemática? ¿Cuáles son las características de los alumnos? Etc.

Tarea 1: Valoración de un episodio de clase sin conocer los criterios de idoneidad.

Tarea 2: Valoración de un episodio de clase después de conocer los criterios de idoneidad (comparar su desempeño y comentar sobre esto).

Tarea 3: Diseñar y aplicar un diagnóstico para conocer el nivel de aprendizaje de los niños y niñas respecto a la temática en estudio. Relacionar los resultados con el mapa de complejidad matemática de proporcionalidad visto en la asignatura.

Tarea 4: Reflexión sobre la práctica matemática de un docente (ajena).
- Recoger evidencias de una unidad didáctica en la que se trate la temática en estudio (planificaciones, copia del cuaderno de un alumno, páginas del texto de estudio trabajadas, guías de trabajo, pruebas, calificaciones que obtuvo el curso, etc.).
- Reflexión y valoración de la unidad didáctica en base a los criterios de idoneidad.
- Rediseñar la unidad a partir de la reflexión.

Tarea 5: Reflexión sobre la práctica matemática propia
- Realizar una intervención basada en el rediseño de la unidad y mostrar las evidencias de la clase (planificación, guía de trabajo, powerpoint, etc.).
- Reflexión y valoración de la intervención en base a los criterios de idoneidad.
- Rediseño (mencionar los aspectos que deben ser mejorados y cómo podría hacerlo).

Tarea 6: Autoevaluación de la competencia reflexiva. Comentar y/o graficar sobre su estado inicial (antes de conocer los criterios de idoneidad) y su estado final (después de conocer y trabajar con los criterios de idoneidad).

Figura 2. Resumen de las tareas del portafolio.

Los datos o unidades de análisis se han obtenido de entrevistas y un portafolio. Para analizar el rol de la profesora durante el proceso de formación se realizaron 5 entrevistas al finalizar el ciclo formativo. Una entrevista a la profesora, dos entrevistas a estudiantes que entregaron el portafolio y, las otras dos, a estudiantes que no entregaron el portafolio. Por su parte, para analizar el progreso alcanzado por los estudiantes, se decidió analizar el portafolio del único grupo que hizo la entrega de éste dando respuesta a las siete tareas solicitadas.

Cabe señalar, que el ciclo formativo propuesto por la profesora consideraba sesiones de trabajo en las que ella enseñaba como marco de referencia para orientar los procesos reflexivos los criterios de idoneidad didáctica (epistémico, cognitivo, interaccional, emocional, mediacional y ecológico) propuestos en el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e instrucción Matemática (EOS a partir de ahora) (Godino, Batanero y Font, 2007; Breda, Font y Lima, 2015). Por esta razón, hemos considerados dichos criterios como categorías de análisis (Breda y Lima, 2016; Seckel, 2016; Breda, Pino-Fan y Font, 2016) para clasificar las evidencias encontradas en el portafolio analizado haciendo, a su vez, relaciones entre los descriptores de competencia reflexiva vistos en la tabla 1 con dichos criterios (ver tabla 2).

Tabla 2. Relación de descriptores con tipos de evidencia

Descriptor	*Tipos de evidencia*
D1	Ecológica y, en menor grado, epistémica.
D2	Algunas de estas facetas: epistémica, cognitiva, emocional, mediacional, interaccional o ecológica.
D3	Algunas de estas facetas: epistémica, cognitiva, emocional, mediacional, interaccional y ecológica. Sin tener en cuenta la especificidad de las matemáticas.
D4	Considera las facetas epistémica, cognitiva, emocional, mediacional, interaccional y ecológica.
D5	Algunas de estas facetas: epistémica, cognitiva, emocional, mediacional, interaccional y ecológica. Teniendo en cuenta la especificidad de las matemáticas.
D6	Algunas de estas facetas: epistémica, cognitiva, emocional, mediacional, interaccional y ecológica.
D7	Todas las facetas con sus componentes y descriptores, teniendo en cuenta la especificidad de las matemáticas.
D8	Todas las facetas con sus componentes y descriptores, dando énfasis en los ámbitos que es necesario mejorar.

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Para analizar el rol de la profesora durante el proceso de formación se realizaron diferentes entrevistas y se clasificaron las unidades de análisis considerando tres categorías: 1) motivación, 2) evaluación y 3) retroalimentación. Se hicieron cinco entrevistas cuyo objetivo era conocer las percepciones de los participantes (estudiantes y profesora) respecto al desarrollo del ciclo formativo, diseñando para ello un guión de entrevista con preguntas basadas en las tres categorías mencionadas. Por ejemplo, en el caso de la entrevista a la profesora el tipo de pregunta para analizar la motivación fue ¿De qué manera cree que se hubiese conseguido mayor participación? Con los datos obtenidos, se realizó un proceso de triangulación que consistió en: 1) contrastar las visiones de los estudiantes que entregaron el portafolio con las de los estudiantes que no lo entregaron, 2) encontrar los puntos de encuentro que hay en las respuestas de los estudiantes y 3) encontrar los puntos de encuentro entre los estudiantes y la profesora.

De acuerdo a este proceso, describiremos las percepciones de los participantes respecto a las tres categorías que nos propusimos analizar (motivación, retroalimentación y evaluación). Además, daremos ejemplos de algunas intervenciones de los participantes que corresponden a fragmentos no consecutivos de las entrevistas donde “E1, E2, E3 y E4” corresponde a los estudiantes y “P” a la profesora.

Motivación: Al finalizar el ciclo formativo, tanto las estudiantes como la profesora, continúan sosteniendo que el desarrollo de la competencia reflexiva y el trabajo solicitado a través del portafolio es importante, sin embargo, hubo dos grupos que no entregaron el portafolio y otros dos que, pese a haberlo entregado, no desarrollaron todas las tareas solicitadas. Con las entrevistas, se pudieron distinguir dos dificultades que provocaron desmotivación en algunos alumnos: 1) poca claridad en las instrucciones de algunas tareas y 2) falta al contrato didáctico, dado que la profesora incorporó una tarea que no había anunciado en el momento que presentó el trabajo del portafolio a sus estudiantes.

1. E1: “en algunas tareas no entendíamos lo que teníamos que hacer”.

2. E2: “necesitábamos más explicación en algunas tareas, no entendíamos que hacer. Preguntaba a mis compañeros, pero veía que estaban igual”.

3. E3: “nunca entendí lo que teníamos que hacer con el mapa de complejidad de la proporcionalidad que nos mostró la profe”.

4. E4: “al principio estábamos trabajando, pero cuando agregaron otra tarea nos confundimos, nos dio rabia”.

5. P: “me cuesta transmitir motivación en los estudiantes para que realicen sus tareas, creo que eso es una debilidad”.

6. P: “creo que los estudiantes no lograron comprender el uso que debían darle al mapa de complejidad de la proporcionalidad y yo no enfaticé mucho en eso”.

Retroalimentación: Los estudiantes recibieron una formación para orientar sus reflexiones en base a los criterios de idoneidad didáctica propuestos en el EOS. Respecto a esto, todos los entrevistados manifestaron que dichos criterios son útiles, sin embargo, consideran que se necesita un mayor acompañamiento por parte de la profesora, sobre todo para abordar la idoneidad epistémica.

1. E1: “reflexionar sobre la idoneidad epistémica era difícil, hubiese sido mejor trabajar en clases para poder ir preguntándole a la profesora”.

2. E2: “me hubiese gustado que la profesora nos dijera más cosas cuando nos revisaba la tarea. Miraba lo que teníamos y decía que teníamos que seguir avanzando”

3. E3: “Habían indicadores de la pauta que no lograba relacionarlos con el material que teníamos, creo que ahí faltó que la profe nos dijera cómo debíamos trabajar o quizás darnos ejemplos”.

4. E4: “necesitábamos más orientaciones para poder comprender algunos criterios de idoneidad, al principio se ven fáciles pero solo algunos son fáciles. El epistémico no es fácil, eso creo yo”.

5. P: “creo que en una próxima oportunidad dedicaría más tiempo para trabajar en clases. Quizás no estaban tan preparados para un trabajo autónomo, necesitaban más de mi ayuda”.

Evaluación: En el diseño del ciclo formativo la profesora se propuso trabajar en base a una evaluación compartida, es decir, una vez que se presentara el trabajo del portafolio a las estudiantes, realizaría una sesión de trabajo para construir, con ellos, una pauta con indicadores que permitieran evaluar el trabajo solicitado. Dicho trabajo no se concretó y la profesora tampoco propuso una pauta de evaluación o rúbrica, lo que provoca desorientación por parte de los estudiantes y, en el caso de las estudiantes que entregaron el portafolio, poca claridad respecto a sus fortalezas y debilidades.

1. E1: “al final ni supe que tenía bueno o que tenía malo”.

2. E2: “solo tuve una nota, no se el porqué de esa nota”.

3. E3. “no sabía que quería que hiciéramos”.

4. E4. “nunca supe cómo nos iba a evaluar, solo sabía que la ponderación de la nota era muy poco para todo el trabajo que había que hacer”.

5. P: “intenté hacer la sesión para construir la pauta pero las alumnas no participaron, yo creo que no estaban acostumbradas a esa modalidad”.

6. P: “finalmente no hice una pauta, fui asignando cierta puntuación en la medida de la complejidad de cada tarea y ahí calcule la nota”.

Con el análisis de esta última categoría podemos observar que la profesora no tenía claridad respecto al progreso en el desarrollo de la competencia reflexiva que alcanzó el grupo de estudiantes que abordó todas las tareas que se solicitaron en el portafolio (se limitó a poner una calificación al producto final). Por esta razón, hicimos un análisis de las evidencias encontradas en el portafolio y, de esta manera, determinar el nivel de desarrollo antes de presentarles los criterios de idoneidad (inicial) y después de explicárselos (final). Un ejemplo de dicho análisis inicial para la tarea 1 se describe a continuación. En esta tarea se esperaba que los estudiantes explicasen el contexto del curso en el que centrarían su reflexión (entorno socioeconómico, tipo de escuela, condiciones físicas del centro, características del grupo de alumnos, etc.). Esta tarea no estaba pautada, es decir, los estudiantes tenían libertad para dar a conocer las características que ellos considerasen importantes y, por ejemplo, en la respuesta que entregó el grupo 1 (G1), determinados párrafos de su registro escrito (ver tabla 3) se pueden considerar evidencias de conocimientos relacionados con algunas de las seis facetas (epistémica, cognitiva, ecológica, interaccional, mediacional y emocional) consideradas en el modelo de análisis didáctico propuesto por el EOS (Font, Planas y Godino, 2010).

Tabla 3.Tipos de evidencias en la tarea 1

Faceta	*Evidencia*
Cognitiva	G1: "en la asignatura de matemática se visualiza una evidente dificultad para alcanzar los objetivos propuestos" (en relación al curso que analizarían).
Ecológica/Epistémica:	G1: "El profesor de matemática a cargo del curso tiene un gran dominio de los contenidos del currículum".
Emocional	G1: "en cuanto a la relación establecida entre el docente y sus alumnos, se puede señalar que no existe mucha empatía entre ambos, puesto que el profesor es muy serio e inflexible".

El grupo G1, en la tarea 1, utilizó conocimientos relacionados las facetas cognitiva, epistémica/ecológica y emocional lo cual se puede considerar una evidencia del descriptor D2 (nivel 1) de la tabla 2 "Conoce algunos constructos del área de educación Matemática que permiten la reflexión sobre la práctica".

El análisis completo de todas las tareas del portafolio del grupo G1 nos permitió caracterizar el nivel de desarrollo de su competencia reflexiva al final del ciclo formativo (tabla 4).

Tabla 4. Análisis del portafolio

Estado	Tareas	Tipos de evidencias	Descriptores	Nivel de reflexión
Inicial	Nº1	Cognitiva, ecológica y emocional	D2: Conoce algunos constructos del área de educación Matemática que permiten la reflexión sobre la práctica	Nivel 1
	Nº2	Epistemica, cognitiva, interaccional, mediacional y emocional.	D3: Realiza análisis poco elaborados de procesos de instrucción, con observaciones generales en las que se tiene poco en cuenta la especificidad de las matemáticas.	
Final	Nº0	Ecológica y, en menor medida, epistémica.	D1: Conoce el sistema educativo nacional, sus fines y objetivos, su estructura, la normativa que lo rige, sus principales logros y los desafíos y metas que tiene.	Nivel intermedio, entre el nivel 1 y nivel 2 de desarrollo. A pesar de que Presentan evidencias del nivel 2 (D4 y D6), sus reflexiones aun no tienen en cuenta la especificidad de las matemáticas.
	Nº3	Considera las facetas epistémica, cognitiva, mediacional, emocional, interaccional y ecológica.	D4. Conoce constructos del área de Educación Matemática que permiten la reflexión sobre la práctica y la valoración de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.	
	Nº4	Cognitiva	D3. Realiza análisis poco elaborados de procesos de instrucción, con observaciones generales en las que se tiene poco en cuenta la especificidad de las matemáticas.	
	Nº5	Considera las facetas epistémica, cognitiva, mediacional, emocional, interaccional y ecológica.	D4. Conoce constructos del área de Educación Matemática que permiten la reflexión sobre la práctica y la valoración de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.	
	Nº6	Emocional y cognitiva	D6. Propone cambios para mejorar la práctica futura con poca fundamentación teórica.	

Las tareas 1 y 2 correspondían a actividades diagnósticas propuestas por la profesora y, de acuerdo a los tipos de evidencias encontradas en ellas, nos llevó a determinar que, antes de trabajar con los criterios de idoneidad didáctica, las estudiantes se encontraban en el nivel 1 de desarrollo. Las siguientes tareas se desarrollaron una vez que se les presentó los criterios de idoneidad didáctica y, con las evidencias encontradas, logramos determinar que las estudiantes avanzaron a un nivel intermedio, entre el nivel 1 y 2 de desarrollo.

CONSIDERACIÓN FINAL

El análisis de las evidencias del portafolio organizadas según los criterios de idoneidad didáctica permite inferir que el grupo de estudiantes consiguió un ligero aprendizaje, ya que estos pasaron de estar en un nivel 1 de competencia reflexiva a un nivel de transición (entre el nivel 1 y el nivel 2). Una posible explicación de que no hubiese un mayor desarrollo de la competencia reflexiva es que la evaluación del portafolio que realizó la profesora, tal como se ha señalado antes, se focalizó en el producto final y no en el proceso. Esta posible explicación, se corrobora con la información obtenida en las entrevistas, la cual mostró que los estudiantes estaban descontentos con la evaluación realizada por la profesora, en particular, de la falta de retroalimentación recibida mientras ellos entregaban las diferentes partes (o tareas) del portafolio.
Como limitación importante de esta investigación hay que señalar que las entrevistas fueron realizadas solo a cuatro estudiantes, que fueron los únicos que estuvieron dispuestas a participar.

REFERENCIAS

Barberá, E. (2005). Calificar el aprendizaje mediante la evaluación por portafolios. *Perspectiva Educacional, formación de profesores*, *45*, 70-84.

Bravo, A., y Fernández, J. (2000). La evaluación de competencias frente a los nuevos modelos de evaluación auténtica. *Psicothema*, *12*(2), 95-99.

Breda, A., Font, V., y Lima, V. M. R. (2015). A noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, 8(2),1-41.

Breda, A., y Lima, V.M.R. (2016). Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un master para profesores de matemáticas en servicio. *REDIMAT*, *5*(1), 74-103.

Breda, A., Pino-Fan, L.. y Font, V. (2016). Establishing criteria for teachers' reflection on their own practices *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (en prensa).

Cano, E. (2005). *El portafolio del profesorado universitario. Un instrumento para la evaluación y para el desarrollo profesional*. Barcelona, España: Octaedro/ICEUB.

Fernández, A. (2010). La evaluación orientada al aprendizaje en un modelo de formación por competencias en la educación universitaria. *Revista de Docencia Universitaria*, *8*(1), 11-34.

Font, V. y Adán, M. (2013). Valoración de la idoneidad matemática de tareas. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 283-291). Bilbao: SEIEM.

Font, V., Breda, A. & Sala, G. (2015). Competências profissionais na formação inicial de professores de matemática. *Praxis Educacional* 11(19), 17-34.

Font, V., Planas, N., y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33(1), 89-105.

Godino, J. D., y Batanero, C. (2008). *Formación de profesores de matemáticas basada en la reflexión guiada sobre la práctica*. Trabajo presentado en VI Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, Puerto Montt, Chile. Resumen recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/fprofesores_reflexion_guiada_22dic08.pdf

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, 39(1), 127-135.

Marín, R., Arbesú, M.I., Guzmán, I. y Barón, V. (2012). El empleo del portafolio en la formación evaluación de competencias docentes. *Voces y silencios: Revista latinoamericana de Educación*, *3* (1), 5-21.

Nolan, A. (2008). Encouraging the reflection process in undergraduate teachers using guided reflection. *Australian Journal of Early Childhood*, *33* (1), 31-36.

Opazo, M., Sepúlveda, A., y Pérez, M. L, (2015). Estrategias de evaluación del aprendizaje en la universidad y tareas auténticas: percepción de los estudiantes. *Diálogos Educativos*, 15, 19-33.

Palm, T. (2008). Performance Assessment And Authentic Assessment: A conceptual analysus of the literatura. *Practical Assessment Research & Evaluation*, *13*(4), 1-11.

Rodrigues, R. (2013). *El desarrollo de la práctica reflexiva sobre el quehacer docente, apoyada en el uso de un portafolio digital, en el marco de un programa de formación para académicos de la Universidad*

Centroamericana de Nicaragua. (Tesis doctoral inédita). Universidad de Barcelona, Barcelona.
Seckel, M.J. (2016). *Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación general básica con mención en matemática.* (Tesis doctoral inédita). Universidad de Barcelona, Barcelona.
Seckel M. J. y Font V. (2015). Competencia de reflexión en la formación inicial de profesores de matemática en Chile. *Práxis educacional*, 19, 55-75.
Seldin, P. (2004). *The teaching portfolio. A practical guide to improved performance and promotion/Tenure Decisions.* Boston, Massachusetts: Anker Publishing Company, Inc.
Shulman, L. (1999). Portafolio del docente: una actividad teórica. En N. Lyons (Comp.*), El uso de portafolio. Propuestas para un nuevo profesionalismo docente* (pp. 45-62). Buenos Aires, Argentina: Amorrortu.
Stake, R.E. (2007). *Investigación con Estudios de Casos.* (4 Ed.). Madrid, España: Morata.
Weinert, F. (2001). Concept of competence: A conceptual clarification. In D. Rychen & L. Salganik (Eds.), *Definition and selection key competencies* (pp. 45–65). Gottingen: Hogrefe & Huber.

I Trabajo realizado en el marco de proyecto de investigación XXXX EDU2015-64646-P (MINECO/FEDER, UE) y proyecto 11150014 (FONDECYT, Chile).

RELACIONES ENTRE LAS DIMENSIONES DE LAS ACTITUDES HACIA LAS MATEMÁTICAS EN FUTUROS MAESTROS

Relationships between the dimensions of the attitudes towards mathematics in Primary Teachers students

Soneira, C., Naya-Riveiro, M.C., de la Torre, E., Mato, D.

Departamento de Pedagogía y Didáctica

Facultade de Ciencias da Educación, Universidade da Coruña

Resumen

En este trabajo se estudian las relaciones entre distintas dimensiones de las actitudes hacia las Matemáticas de los estudiantes del Grado en Educación Primaria de la Universidad de A Coruña del 1.er y 3.er curso recogidas durante tres años académicos consecutivos.

Para ello se aplica el cuestionario de actitudes PAC de Naya-Riveiro, Soneira, Mato y Torre (2014) con una fiabilidad Alfa de Cronbach de 0.921 a una muestra de 308 estudiantes. El instrumento está formado por 19 ítems con cinco opciones de respuesta tipo Likert y tres dimensiones que miden el autoconcepto, la percepción que tiene el alumno de su profesor y el agrado hacia las Matemáticas.

Los resultados muestran que existe una relación monótona creciente entre las distintas dimensiones de las actitudes en ambos cursos y que éstas se mantienen de un curso a otro.

Palabras clave: *actitudes hacia las Matemáticas, maestros en formación, cuestionario, correlación.*

Abstract

In this work, we study the relationships between the different dimensions of the attitudes towards mathematics in Primary Teacher students of A Coruña University of first and third degree.

In order to do so, we apply the PAC attitude questionnaire of Naya-Riveiro, Soneira, Mato and Torre (2014) with a Cronbach´s Alpha coefficient of 0.921 to a sample involved 308 students. The questionnaire is made up of 19 items with five Likert type response and three dimensions that measure self-concept, the student's perception of their math teacher and liking for mathematics.

Results show that there exists an increasing monotone relationship between all different dimensions of the attitudes in both courses and that such relationships are stable.

Keywords: *attitudes towards mathematics, degree primary teacher education, questionnaire, correlation.*

Soneira, C., Naya-Riveiro, M.C., de la Torre, E. y Mato, D. (2016). Relaciones entre las dimensiones de las actitudes hacia las Matemáticas en futuros maestros. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 486-494). Málaga: SEIEM

INTRODUCCIÓN

Es relevante la proporción de estudiantes con perfil antimatemático en la mayoría de titulaciones universitarias, especialmente aquellas circunscritas a Ciencias Sociales que tienen en su Plan de estudios asignaturas de matemáticas. El rechazo llega hasta el punto de ser uno de los ámbitos de mayor complejidad en Educación, motivado por el reducido número de estudiantes que logran grados de competencia adecuados y satisfacción por su desempeño (Barrantes y Blanco, 2006).

Asimismo, los resultados hallados por Naya-Riveiro, Soneira, Mato y Torre (2015) indican que el alumnado del Grado en Educación Primaria muestra diferencias significativas en el agrado hacia las Matemáticas y en la percepción que tiene el alumnado de su competencia matemática dependiendo del itinerario de acceso a la titulación y del curso.

Por lo tanto, dado que nuestro interés como formadores en Matemáticas es mejorar esas actitudes, nuestro objetivo es conocer si existe relación entre *la percepción del profesor de matemáticas por parte del alumnado* con *el agrado hacia las matemáticas, o entre la percepción del profesor de matemáticas por parte del alumnado* con la *percepción que tiene el alumnado de su competencia matemática* o entre la *percepción que tiene el alumnado de su competencia matemática* con *el agrado hacia las matemáticas*, ya que son las dimensiones en las que se agrupan los ítems del cuestionario PAC (Percepción, Agrado y Competencia) de Naya-Riveiro, Soneira, Mato y Torre (2014) instrumento utilizado en este estudio, de los futuros maestros.

MARCO TEÓRICO

Conforme a los estudios de Hidalgo, Maroto y Palacios (2005), Tahar, Ismailb, Zamani, y Adnan (2010) y Adelson y McCoach (2011) la dificultad y apatía por los contenidos matemáticos guarda relación con las actitudes del individuo hacia la materia que, conforme avanza de curso, van deteriorando el gusto por esta área de conocimiento.

Es importante destacar que la dimensión afectiva fue excluida del proceso de aprendizaje hasta hace poco tiempo por ser considerada negativa y amenazante para la racionalidad (Álvarez y Ruiz Soler, 2010). No obstante, hoy se sabe que los afectos constituyen variables permanentes en el ser humano que le dan significado a todas sus vivencias y se convierten en serios obstáculos para desplegar, de manera normal, la capacidad de aprender (Miñano y Castejón, 2011; Palacios, Arias y Arias, 2014). A este respecto, Kargar, Tarmizi y Bayat (2010) destacan que las perturbaciones emocionales, en matemáticas, se traducen en conductas reactivas o defensivas, como por ejemplo la ansiedad, desinterés, apatía, frustración, angustia y temor. En el caso de la población objeto de nuestro estudio es especialmente relevante por cuanto van a ser los docentes del mañana y sus actitudes y creencias sobre qué son y cómo se enseñan las matemáticas van a estar presentes en todo momento (Op't Eynde, De Corte y Verschaffel, 2006; Hodgen y Askew, 2007).

Algunos autores evidencian que ciertas vivencias como el miedo, la dificultad, el agrado, el autoconcepto, la percepción del profesor por parte del estudiante o las experiencias de naturaleza emocional asociadas a las matemáticas (diversión o aburrimiento,…), actúan de forma conjunta como un factor de atracción o de rechazo hacia la materia (Perry, 2010; Maroto, Hidalgo, Ortega y Palacios, 2013). De hecho, condicionan al sujeto de tal manera que llega a percibir y reaccionar de un modo determinado ante los nuevos contenidos y los nuevos cursos; muestra escaso interés, disminuye las aptitudes, merma los logros y le ocasiona una formación previa limitada (Barrantes y Blanco, 2006).

Por otra parte, numerosos estudios ofrecen resultados sobre la incidencia de las actitudes en la percepción que tiene el alumno de su profesor, observando una apreciable correlación que, si es negativa, el prejuicio que le ocasiona al alumno es tal que se hace a la idea de no ser apto para esta materia, presta una menor atención a los contenidos, mínimo compromiso con el estudio y una relación superficial con la materia (Caballero, Blanco y Guerrero, 2008; Charalambos, Panaoura y Philippou, 2009; Ertekin, 2010; Dogan, 2012).

En esta línea, Dee (2007) señala que uno de los factores más influyente en la aparición de emociones negativas relacionadas con las matemáticas es el método docente, sobre todo aquel que potencia la pasividad del alumno. También Estrada, Bazán y Aparicio (2013) afirman que si el profesor utiliza métodos tradicionales (clases magistrales) el rendimiento y las actitudes de los alumnos son inferiores al conseguido con métodos participativos.

Por su parte, Gargallo, Pérez, Serra, Sánchez y Ros (2007) subrayan que el aprendizaje en el aula rescata la importancia de comprender el aprendizaje en ámbitos específicos ligados a las tareas y experiencias que el profesor le ofrece al alumno.

Conforme a Sakiz, Pape y Hoy (2012) el apoyo emocional y afectivo que recibe el estudiante de matemáticas influye en su devenir escolar y determina la percepción de eficacia y el agrado que sienta por las matemáticas; un elemento que sirve de empuje directo para que el alumno se esfuerce e, indirectamente, para lograr un mejor rendimiento.

Con respecto a la percepción que tiene el alumnado de su competencia matemática, An, Ma y Capraro (2011) dicen que se podría equiparar al autoconcepto, autoeficacia o expectativa de éxito; lo que supone una de las categorías de las actitudes que mayor peso predictivo suele tener en el rendimiento posterior. En este sentido Pérez-Tyteca, Monje y Castro (2013) lo ubican dentro de las creencias sobre uno mismo como aprendiz de matemáticas.

En esta misma línea, Lutovac y Kaasila (2011) relacionan la percepción que tiene el alumno de sí mismo con respecto a la matemática con las creencias acerca del éxito o el fracaso; más concretamente, con las atribuciones de casualidad, siendo el gusto por las matemáticas un motivo interno controlable. Y es que las creencias que tenemos sobre nosotros mismos y sobre las matemáticas, la actitud y motivación con la que afrontamos una tarea y las emociones que sentimos mientras la realizamos son determinantes a la hora de aprender. La falta de motivación intrínseca, genera en el estudiante un enfoque superficial de aprendizaje, pues no prevé la cantidad de esfuerzo que debe dedicar a distintas actividades escolares ni el grado de compromiso que se adquiere (Pérez-Tyteca, Monje y Castro, 2013). Al no asumir el rol de estudiante, el rendimiento en el aprendizaje es bajo, surge la desmoralización, la frustración y el cuestionamiento y se sienten inseguros con la materia y en qué situaciones se manifiesta dicha inseguridad. En este sentido el reconocimiento de que el estudiante es bueno en matemáticas, resulta ser socialmente gratificante y tiene connotación con el prestigio, eleva la autoestima, y fortalece el autoconcepto de la persona. De ahí que, en las últimas décadas, un número importante de investigaciones en Didáctica de la Matemática se centren en estos aspectos (Gómez-Chacón, 2010).

Tanto es así, que Fernández Cezar y Aguirre Pérez (2010) señalan que según sean los sentimientos fuertes y definidos hacia la materia antes de iniciar su formación, y los pensamientos relativos a las propias capacidades, así será el aprendizaje Y, lamentablemente, los estudiantes de Grado en Educación Primaria llegan, a veces, a la Universidad con preconcepciones y actitudes negativas hacia las materias de matemáticas (Dogan, 2012; Hodgen y Askew, 2007).

Por este motivo, Poulou (2007) y Kunter, Tsai, Klusmann, Brunner, Krauss y Baumert (2008) consideran de especial relevancia para el futuro docente la toma de conciencia de la autoeficacia percibida, el autoconcepto profesional, la motivación, el agrado por lo que el futuro maestro va a enseñar, el entusiasmo hacia el saber matemáticas y hacia las matemáticas, la buena percepción de su profesor, etc. Para ello, sus propuestas se dirigen hacia el feedback que puede recibir el estudiante en su periodo de formación, así como de las posibles estrategias de autoevaluación y evaluación presentes en los programas de las instituciones educativas. Y es que estos mismos factores de eficacia profesional parecen correlacionar significativamente con las actitudes hacia el cambio o la implementación de planes de innovación en matemáticas (Yazici y Ertekin, 2010).

Colón Rosa (2012) recomienda que se estudien las actitudes al inicio del curso con el fin de modificar y adaptar las estrategias y que se realicen actividades que ayuden a los alumnos a identificar sus actitudes para poder mejorarlas. Así mismo, Lutovac y Kaasila (2011) apuntan a que la evaluación del proceso al finalizar la asignatura sirve para analizar los aspectos afectivos y motivacionales con los que el alumno se enfrentó a la materia, y así comparar como empezó y como termina su relación con la matemática.

Por todo lo dicho anteriormente, y por la necesidad de que los futuros Maestros de Educación Primaria se contagien de actitudes positivas, seguridad y gusto por las matemáticas y las transmitan a sus alumnos centramos nuestra investigación en estudiar las relaciones que puedan existir entre las distintas dimensiones de las actitudes hacia las matemáticas de nuestro alumnado. Además, esto nos permitirá conocer si la formación en Educación Matemática recibida en sus estudios universitarios les ayuda a cambiar esas relaciones, y esto, para el docente universitario debe servir de reflexión y mejora de su trabajo profesional.

MÉTODO

Participantes

En este estudio participaron de forma voluntaria los estudiantes del Grado en Educación Primaria de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de A Coruña (España) matriculados en las materias Educación Matemática I de 1.er curso y Educación Matemática III de 3.er curso durante los años académicos 2012-2013, 2013-2014 y 2014-2015. Esta investigación complementa una iniciada en el curso escolar 2012-2013 (Naya-Riveiro, Soneira, Mato y Torre, 2014), por ello los datos recogidos comenzaron en dicho curso. El alumnado de 1.er curso responde al cuestionario antes de tener contacto con la materia de Educación Matemática I en sus estudios universitarios y el de 3.er curso al finalizar la última materia de Educación Matemática (Educación Matemática III). En particular, esto es importante para los autores del estudio porque les permite conocer si las relaciones entre las actitudes del futuro docente cambian con la formación recibida en su etapa universitaria.

La población está formada por 835 estudiantes (468 de 1.er curso y 367 de 3.er curso) y la muestra por 308 estudiantes (154 de 1.er curso y 154 de 3.er curso). El alumnado de la muestra abarca un amplio rango de calificaciones. Cabe señalar que un sesgo del trabajo es el hecho de que los autores son los mismos que ejercen docencia en estas materias y que cada estudiante tuvo al menos dos profesores distintos.

Materiales

Se aplicó el “Cuestionario de actitudes hacia las Matemáticas para futuros maestros PAC (Percepción, Agrado y Competencia)” de Naya-Riveiro, Soneira, Mato y Torre (2014) con 19 ítems con cinco opciones de respuesta tipo Likert distribuidos en 3 dimensiones

Dimensión I: Percepción del profesor de Matemáticas por parte del alumnado. Compuesto por 9 ítems que hacen referencia al trato que tiene el sujeto con su profesor, si se siente animado o no por su profesor, si logra despertar su interés por las matemáticas y cómo son las clases.

Dimensión II: Agrado hacia las Matemáticas. Formado por 6 ítems que se refieren a la satisfacción, al valor que se le otorga de cara al futuro y a la utilidad de las Matemáticas, tanto desde el punto de vista racional y cognitivo como desde la perspectiva afectiva y comportamental.

Dimensión III: Percepción que tiene el alumnado de su competencia matemática. Integrado por 4 ítems que aluden a la confianza del estudiante en sí mismo.

Este cuestionario tiene una fiabilidad alfa de Cronbach de 0.921, un índice de Kaiser-Meyer-Olkin con valor .930 y para la prueba de esfericidad de Bartlett se obtuvo $\chi^2=3747.433$ con gl=171 y $p \leq .000$.

Procedimiento

El cuestionario PAC se aplicó on-line de forma anónima, bajo la plataforma Moodle.

Para el tratamiento estadístico general de los datos se utilizó el paquete estadístico IBM SPSS v.21.0.

Para analizar la relación entre las distintas dimensiones de las actitudes, se estudió la correlación Dimensión I-Dimensión II; Dimensión I-Dimensión III y Dimensión II-Dimensión III mediante el coeficiente de correlación de Pearson para los alumnos de l.er curso en los tres años académicos y para los del 3.er curso. Este índice es de los más usados en este tipo de estudios (Pardo, Ruiz y San Martín, 2009).

Para aceptar o rechazar la hipótesis nula, se consideró una significatividad asintótica de .005.

RESULTADOS

Los resultados se estructuran en dos subapartados. En el primero se estudia la relación de las distintas dimensiones de las actitudes hacia las matemáticas para el alumnado de 1.er curso del Grado en Educación Primaria, y en el segundo, para el alumnado de 3.er curso.

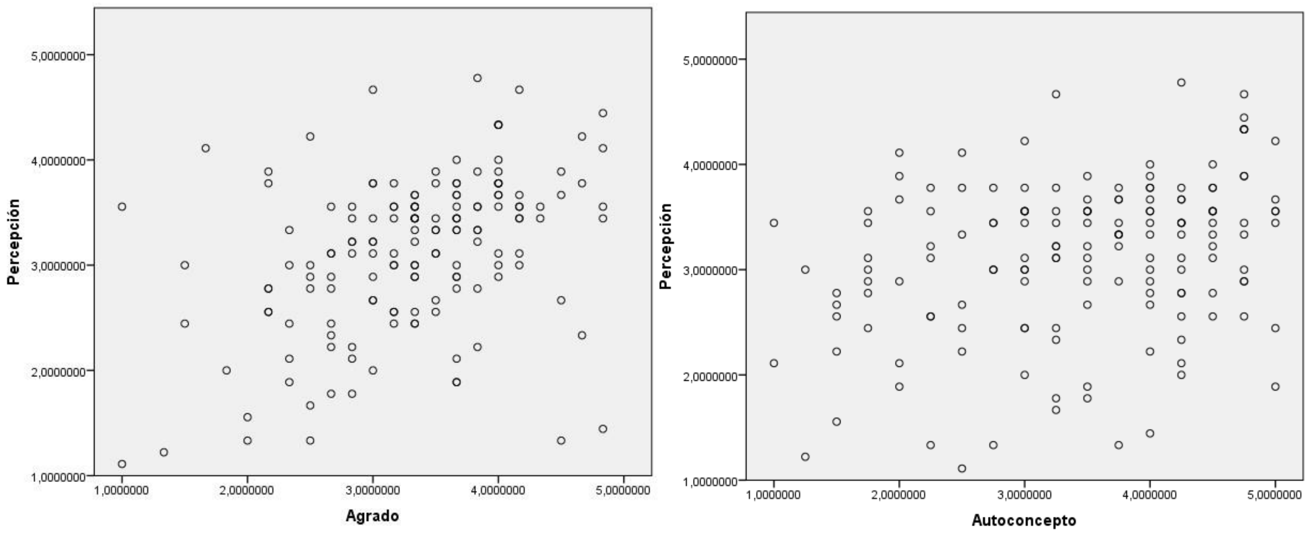
Estudio para el alumnado de 1.er curso

Los coeficientes de correlación de Pearson fueron los siguientes:

- para la relación Dimensión I-Dimensión II r = .401 (p≤.001),
- para la relación Dimensión I-Dimensión III r = .301 (p≤.001),
- y finalmente, para la relación Dimensión II-Dimensión III r = .615 (p≤.001).

A la vista de los valores podemos afirmar que existe una relación monótona creciente para cada par de las dimensiones de las actitudes.

Ilustramos estas correlaciones con los gráficos de dispersión recogidos en las Figuras 1, 2 y 3.



Figuras 1 y 2: Gráficos de dispersión para el alumnado de 1.er curso entre la Dimensión I y II, y la Dimensión I y III, respectivamente.

Estudio para el alumnado de 3.er curso

Los coeficientes de correlación de Pearson fueron los siguientes:

- para la relación Dimensión I-Dimensión II r = .529 (p≤.001),
- para la relación Dimensión I-Dimensión III r = .504 (p≤.001),

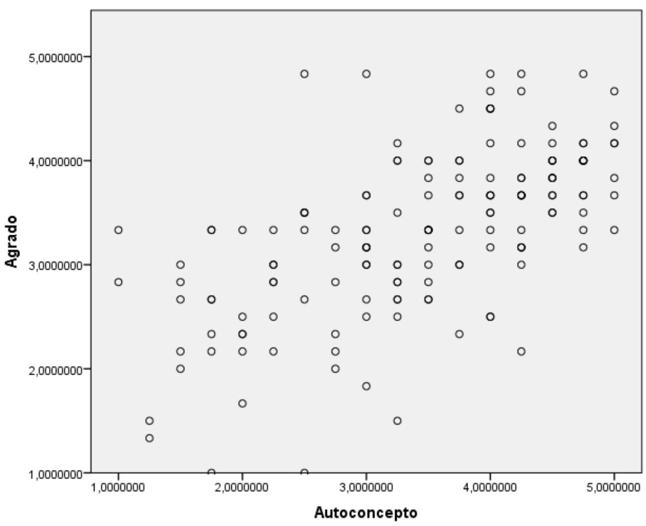
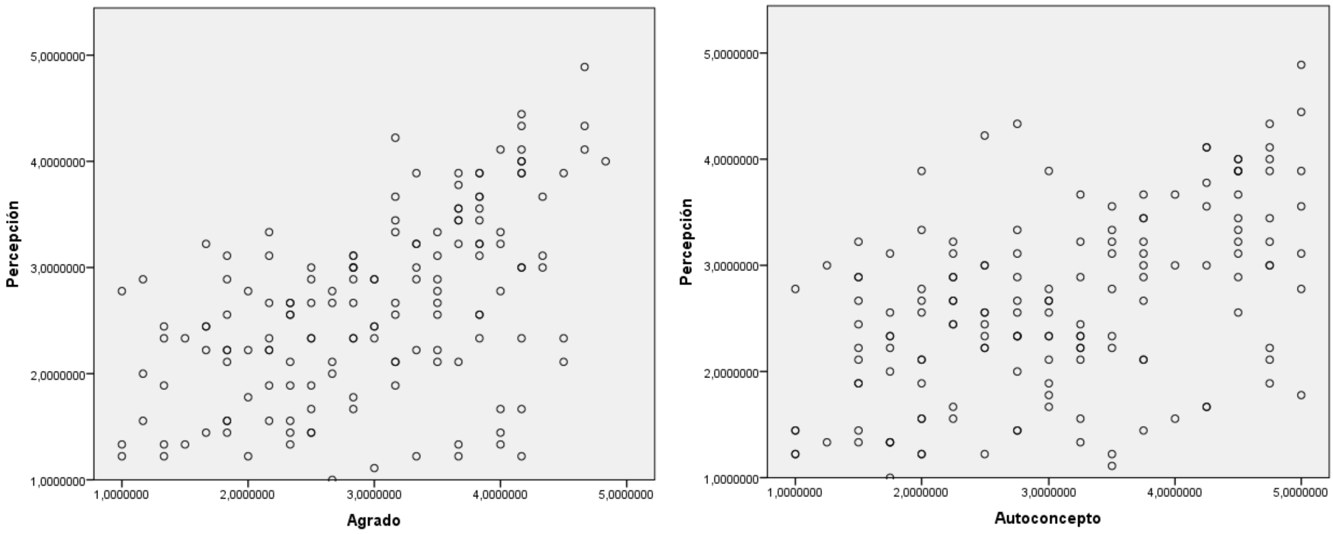


Figura 3: Gráfico de dispersión para el alumnado de 1.er curso entre la Dimensión II y III.

- y finalmente, para la relación Dimensión II-Dimensión III r = .578 (p≤.001).

A la vista de los valores podemos afirmar que existe una relación monótona creciente para cada par de las dimensiones de las actitudes.

De nuevo ilustramos gráficamente las correlaciones con los gráficos de dispersión recogidos en las Figuras 4, 5 y 6.



Figuras 4 y 5: Gráficos de dispersión para el alumnado de 3.er curso entre la Dimensión I y II, y la Dimensión I y III, respectivamente.

CONCLUSIONES

Observando los resultados se puede concluir que la relación entre las distintas dimensiones es estadísticamente significativa y monótona creciente en todos los casos y en ambos cursos. Esta relación incrementa su intensidad para la *percepción del profesor de Matemáticas por parte del alumnado* y el *agrado hacia las Matemáticas* en el alumnado de 3.er curso con respecto al alumnado de 1.er curso. Ocurre el mismo fenómeno, incluso con mayor intensidad para la relación entre la *percepción del profesor de Matemáticas por parte del alumnado* y la *percepción que tiene el alumnado de su competencia matemática*. Sin embargo, decrece la intensidad de la relación entre el *agrado hacia las Matemáticas* y la *percepción que tiene el alumnado de su competencia matemática*, si bien tal decrecimiento es casi despreciable.

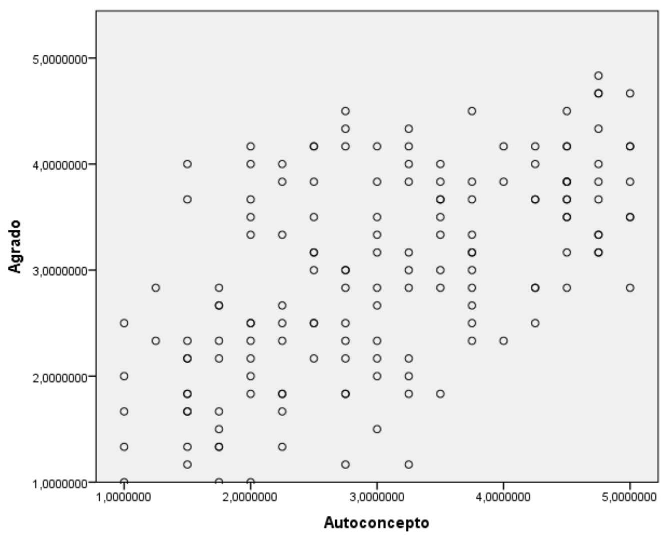


Figura 6: Gráfico de dispersión para el alumnado de 3.er curso entre la Dimensión II y III.

Observamos entonces que el tipo de relación entre las distintas dimensiones de las actitudes no varía después de haber cursado todas las materias de Educación Matemática del Grado en Educación Primaria.

Esto apunta en la misma dirección que lo indicado por Op't Eynde, De Corte y Verschaffel (2006) y Hodgen y Askew (2007) sobre el hecho de que las actitudes hacia las Matemáticas son estables y una vez adquiridas difíciles de modificar. Para el profesorado de matemáticas este fenómeno debe ser objeto de reflexión, pues varios estudios indican que las actitudes se transmiten de docente a discente (Palacios, Arias y Aria, 2014; Montero, Pedroza, Astiz y Vilanova, 2015), y por otra parte, vemos que una vez consolidadas en el discente son estables. Entonces, los maestros en ejercicio deberían reflexionar sobre sus propias actitudes y tener en cuenta las de sus estudiantes desde los primeros cursos de escolarización, para evitar la consolidación de actitudes negativas y conseguir que el autoconcepto de los alumnos sea bueno y sientan agrado hacia las matemáticas.

Sin embargo, el incremento del grado de asociación entre la dimensión *percepción del profesor de Matemáticas por parte del alumnado y cualquiera de las otras dos en* 3.^{er} curso con respecto al 1.^{er} curso, nos permite concluir que el docente universitario tiene un papel relevante en la posible modificación de las actitudes hacia las Matemáticas en los futuros maestros. Es fundamental que el profesorado sea consciente de este hecho y reflexione sobre el mismo, procurando aplicar programas de intervención en su práctica docente.

En cuanto a las limitaciones del estudio se debe tener en cuenta que cada estudiante tuvo varios docentes a lo largo de su formación universitaria. Por otra parte, no se analizó el posible efecto de la calificación obtenida en cada materia de Educación Matemática con las diferentes dimensiones de las actitudes estudiadas, siendo una posible línea de investigación futura; así como diseñar métodos o planes de mejora del dominio afectivo del alumnado.

REFERENCIAS

Adelson, J. L. y McCoach, D. B. (2011). Development and psychometric properties of the math and me survey: Measuring third through sixth graders' attitudes toward mathematics. *Measurement and Evaluation in Counseling and Development*, 44(4), 225-247. doi: 10.1177/0748175611418522

Álvarez Y. y Ruiz Soler, M. (2010). Actitudes hacia las matemáticas en estudiantes de ingeniería en universidades autónomas venezolanas. *Revista de Pedagogía*, 31(89), 225-249.

An, S. A., Ma, T. y Capraro, M. M. (2011). Preservice Teachers' Beliefs and Attitude About Teaching and Learning Mathematics Through Music: An Intervention Study. *School Science and Mathematics*, 111(5), 236–248. doi: 10.1111/j.1949-8594.2011.00082.x

Barrantes, M. y Blanco, L. (2006): A study os perspective primery teachers' conceptions of teaching and learning school geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9, 411-436.

Caballero, A., Blanco, L. J. y Guerrero, E. (2008). El dominio afectivo en futuros maestros de matemáticas en la universidad de Extremadura. *Paradigma*, 29(2), 157-171. Consultar en http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_pdf&pid=S1011-22512008000200009&lng=es&nrm=iso&tlng=es

Charalambos, Y. Ch., Panaoura, A., y Philippou, G. (2009). Using the history of mathematics to induce changes in preservice teachers' beliefs and attitudes: insights from evaluating a teacher education program. *Educational Studies in Mathematics,* 71(2), 161–180. doi: 10.1007/s10649-008-9170-0

Colón Rosa, H. W. (2012). *Actitudes de estudiantes universitarios que tomaron cursos introductorios de estadística y su relación con el éxito académico en la disciplina* (Tesis doctoral, Puerto Rico, Departamento de Estudios Graduados de la Facultad de Educación de la Universidad de Puerto Rico). Consultar en la base de datos ProQuest Dissertation and Theses. (UMI No.3545601).

Dee, T. S. (2007). Teachers and the gender gaps in student achievement. *Journal of Human Resources*, 42(3), 528-554. doi.: 10.3368/jhr.XLII.528

Dogan, H. (2012). Emotion, Confidence, Perception and Expectation. Case of Mathematics, *International Journal of Science and Mathematics Education,* 10(1), 49-69.

Ertekin, E. (2010). Correlations between the mathematics teaching anxieties of preservice primary Education mathematics teacher and their beliefs about mathematics. *Educational Research and Reviews*, 5(8), 446-454.

Estrada, A. Bazán, J. y Aparicio, A. (2013). Evaluación de las propiedades psicométricas de una escala de actitudes hacia la estadística en profesores. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 3, 5–23.

Fernández Cezar, R. y Aguirre Pérez, C. (2010). Actitudes iniciales hacia las matemáticas de los alumnos de grado de magisterio de Educación Primaria: Estudio de una situación en el EEES. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 23, 107-116.

Gargallo, B., Pérez, C., Serra, B., Sánchez, F. y Ros, I. (2007). Actitudes ante el aprendizaje y rendimiento académico en los estudiantes universitarios. *Revista Iberoamericana de Educación*, 42(1), 1-11. Consultar en: https://ruidera.uclm.es/xmlui/bitstream/handle/10578/1340/fi_1286380667-Union_023_013.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Gómez-Chacón, I. M. (2010). Tendencias actuales en investigación en matemáticas y afecto. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T. A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 121-140). Lleida: SEIEM.

Hidalgo, S., Maroto, A. y Palacios, A. (2005). El perfil emocional matemático como predictor del rechazo escolar: relación con las destrezas y los conocimientos desde una perspectiva evolutiva. *Revista Educación Matemática*, 17(2), 89-116.

Hodgen, J. y Askew, M. (2007). Emotion, Identity and Teacher learning: Becoming a Primary Mathematics Teacher. *Oxford Review of Education*, 33(4), 469-487.

Kargar, M., Tarmizi, R. A. y Bayat, S. (2010). Relationship between Mathematical Thinking, Mathematics Anxiety and Mathematics Attitudes among University Students. *Procedia Social and Behavioral Sciences* 8, 537-542.

Kunter, M., Tsai, Y.M, Klusmann, U., Brunner, M., Krauss, S. y Baumert, J. (2008). Students' and mathematics teachers' perceptions of teacher enthusiasm and instruction. *Learning and Instruction*, 18(5), 468-482.

Lutovac, S. y Kaasila, R. (2011). Beginning a pre-service teacher's mathematical identity work through narrative rehabilitation and bibliotherapy. *Teachingin Higher Education*, 16(2), 225-236. doi: 10.1080/13562517.2010.515025

Maroto, A., Hidalgo, S., Ortega, T. y Palacios, A. (2013) Afectos hacia la docencia de las matemáticas en futuros maestros. En Y. Morales y A. Ramirez (Eds.) *Memorias. I CEMACYC* (pp. 1-9). Santo domingo, República Dominicana. Consultar en: http://www.centroedumatematica.com/memorias-icemacyc/111-385-1-DR-C.pdf.

Miñano, P y Castejón, J.L. (2011). Variables cognitivas y motivacionales en el rendimiento académico en Lengua y Matemáticas: un modelo estructural. *Revista de Psicodidáctica*, 16(2), 203-23.

Montero, Y. H., Pedroza, M. E., Astiz, M. S. y Vilanova, S. L. (2015). Caracterización de las actitudes de estudiantes universitarios de Matemática hacia los métodos numéricos. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 17(1), 88-99. Consultar en: http://redie.uabc.mx/vol17no1/contenido-montero-etal.html

Naya-Riveiro, M. C., Soneira, C., Mato, M. D. y de la Torre, E. (2014) Cuestionario sobre actitudes hacia las matemáticas en futuros maestros de Educación Primaria. *Revista de Estudios e Investigación en Psicología y Educación*, 1(2), 141-149.

Naya-Riveiro, M. C., Soneira, C., Mato, D. y de la Torre, E. (2015) Actitudes hacia las matemáticas y rendimiento académico en función de los estudios de acceso y curso en futuros maestros. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), 2015. Investigación en Educación Matemática XIX. Alicante: SEIEM.

Op't Eynde, P., De Corte, E. y Verschaffel, L. (2006). "Accepting emotional complexity": A socio-constructivist perspective on the role of emotions in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 63(2), 193-207.

Palacios, A., Arias, V. y Arias B. (2014). Las actitudes hacia las matemáticas: construcción y validación de un instrumento para su medida. *Revista de Psicodidáctica*, 19(1), 67-91.

Pérez-Tyteca, P., Monje, J., y Castro, E. (2013). Afecto y matemáticas. Diseño de una entrevista para acceder a los sentimientos de alumnos adolescentes. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 4, 65-82.

Perry, C. A. (2010). Motivation and attitude of preservice elementary teachers toward mathematics. Morehead State University. School Science and Mathematics, 111(1), 2-10. doi: 10.1111/j.1949-8594.2010.00054.x

Poulou, M. (2007). Personal teaching efficacy and its sources: student teachers' perceptions. *Educational Psychology*, 27(2), 191-218. doi: 10.1080/01443410601066693

Pardo, A. Ruiz, M.A. y San Martín, R. (2009). *Análisis de datos en Ciencias Sociales y de la Salud I*. Madrid: Síntesis.

Sakiz, G., Pape, S. J. y Hoy, A. W. (2012). Does perceived teacher affective support matter for middle school students in mathematics classrooms? *Journal of School Psychology*, 50(2), 235-255. doi:10.1016/j.jsp.2011.10.005

Tahar, N. F., Ismail, Z., Zamani, N. D., y Adnan, N. (2010). Students' attitude toward mathematics: The use of factor analysis in determining the criteria. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 8, 476-481. doi: 10.1016/j.sbspro.2010.12.065

Yazici, E. y Ertekin, E. (2010). Gender differences of elementary prospective teachers in mathematical beliefs and mathematics teaching anxiety. *World Academy of Science, Engineering and Technology International Journal of Social, Behavioral, Educational, Economic, Business and Industrial Engineering*, 4(7), 1643-1646. Consultar en: http://waset.org/Publication/gender-differences-of-elementary-prospective-teachers-in-mathematical-beliefs-and-mathematics-teaching-anxiety/15003

LA CONSTRUCCIÓN DE LA CULTURA DE RACIONALIDAD EN UNA CLASE DE MATEMÁTICAS

Building a Culture of Rationality in a mathematics class

Rodríguez-Rubio, S. G. y Rigo-Lemini, M.

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N.

Resumen

Mediante una mirada longitudinal y dinámica de los datos recabados en una clase ordinaria de matemáticas (secundaria), y siguiendo los principios de la Teoría Fundamentada y el modelo de Toulmin para interpretar los argumentos, en la investigación se profundiza en el concepto de 'Cultura de Racionalidad' -relacionada con las normas de sustentación y de interacción que se dan en un aula de matemáticas ordinaria-, introducida por los autores en trabajos previos. Con base en las nociones propuestas en el presente documento, de sucesiones de argumentos productivos y sucesión de argumentos reproductivos, asociadas a las intervenciones de consolidación y de cambio, es posible dar cuenta de algunos procesos de construcción de la Cultura de Racionalidad en la clase y es posible también tipificar, con cierto detalle y precisión, la Cultura de Racionalidad que prevalece en el aula estudiada.

Palabras clave: *argumento, Cultura de Racionalidad, Teoría Fundamentada, interacción en el aula*

Abstract

Taking a longitudinal and dynamic view of the data collected in a regular mathematics class (secondary school), and following the principles of the Grounded Theory and the Toulmin Model to interpret the arguments, the authors of the research delve into the concept of Culture of Rationality' –related to the norms for sustentation and interaction that arise in a regular math class-, introduced by the authors in previous papers. Based on the notions proposed in this paper, dealing with successions of productive arguments and succession of reproductive arguments associated with consolidation and change interventions, it is possible to account for some of the processes involved in building a Culture of Rationality in class. It is moreover possible to characterize, with certain detail and precision, the Culture of Rationality that prevails in the classroom studied.

Keywords: *argument, culture of rationality, grounded theory, in-class interaction*

ANTECEDENTES Y EL PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La justificación es uno de los rasgos paradigmáticos de la actividad matemática. La comunidad de matemáticos ostenta prácticas habituales de justificación de las proposiciones, que se plasman a través de sus criterios de rigor (e.g, estrictamente hablando, actualmente sólo se aceptan como justificaciones válidas las demostraciones deductivas inscritas en teorías axiomáticas). Estas normas de sustentación definen una 'Cultura de Racionalidad' de los matemáticos en un período específico de la historia. La Cultura de Racionalidad de los matemáticos no es permanente, sino que se ha ido transformando, siendo un acompañante fiel de la evolución de la propia disciplina. Las comunidades que se congregan en los salones de clase de matemáticas también poseen prácticas rutinarias para fundamentar los hechos de la disciplina; en otras palabras, ellas igualmente comparten una Cultura de Racionalidad, la cual prevalece en el aula por un período de tiempo dado.

En sus propios términos, de esto ya han dado cuenta varios investigadores. Por ejemplo, Yackel y Cobb (1996) interpretan y explican algunos aspectos relacionados con las prácticas de sustentación que se dan en el aula. Acuñan para este propósito la noción de norma sociomatemática, que hace referencia a los criterios que un profesor y sus estudiantes negocian para determinar lo que cuenta,

Rodríguez, S. G. y Rigo, M. (2016). La construcción de la Cultura de Racionalidad en una clase de matemáticas. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 494-504). Málaga: SEIEM.

por ejemplo, como una explicación matemática aceptable. En el estudio, ellos muestran que este tipo de normas se constituyen de forma interactiva e ilustran en el aula cómo los agentes de clase regulan los argumentos matemáticos e influyen en las oportunidades de aprendizaje. Por su parte Planas y Gorgorió (2001) se centran en averiguar las “posibles interferencias en el aprendizaje que en el aula pueden derivarse de las diferentes interpretaciones de las normas matemáticas” (p. 135).

Otros investigadores se han interesado por estudiar la racionalidad real de los alumnos al elaborar argumentos (e.g., Durand-Guerrier et al., 2012) o han analizado el comportamiento racional de los agentes en la clase de matemáticas (e.g., Boero y Morselli, 2009). Estos estudios han retomado el modelo de Habermas, integrado por tres componentes: racionalidad epistémica, racionalidad teleológica y racionalidad comunicativa.

Las interacciones entre los agentes de la clase desempeñan un rol importante en el establecimiento de las formas de sustentar las afirmaciones matemáticas que surgen en el aula. Al respecto, Krummheuer (1995) por ejemplo, centra su estudio en el análisis de los argumentos en clase, y apunta la necesidad de considerarlos bajo la óptica de la interacción social y no como procesos que se llevan a cabo por una sola persona. Cobb (1995) por su parte, identifica dos tipos de interacciones que se dan en clase, las unívocas, en las que la opinión de uno de los participantes es la que domina, y las multívocas, en las que hay desacuerdo entre los copartícipes porque cada uno supone que su razonamiento es válido y trata de explicarlo; éstas últimas son las que el autor considera que generalmente son más productivas para el aprendizaje de las matemáticas. Jones y Herbst (2012) se enfocan en el papel del maestro en la enseñanza de la prueba y la demostración, centrando su atención en teorías que “iluminan la interacción profesor-alumno en el contexto de la práctica de enseñanza en el día a día de los profesores de matemáticas” (p. 262). En su trabajo se plantean contribuir en el examen de los marcos teóricos que ofrezcan elementos para comprender el desarrollo de la prueba y la demostración en las aulas de matemáticas de distintas latitudes.

A diferencia de los estudios que retoman una noción predeterminada de racionalidad, establecida sobre criterios dados de evaluación (Boero y Morselli, 2009), el objetivo general de la investigación consiste en afinar la categoría de Cultura de Racionalidad definida por los autores de este escrito en trabajos previos (Rigo, 2009; Rodríguez & Rigo, 2015a, 2015b); para este propósito se acude a la Teoría Fundamentada, específicamente al muestreo teórico. A partir de una re-visita a los datos empíricos, esta herramienta analítica permite profundizar en los conceptos (que previamente habían sido derivados de esos datos empíricos), dando la posibilidad de identificar otros distintos o de reconocer propiedades que antes no era posible distinguir. Así, con base en esos principios metodo-lógicos se introducen, en el presente documento, nuevos conceptos, el de sucesión de argumentos productivos y reproductivos e intervenciones de consolidación y cambio, que permitirán dar cuenta, hacia el final del escrito, de cómo en general se construye la Cultura de Racionalidad en el aula, y que actuarán como indicadores para caracterizar la Cultura de Racionalidad que prevalece en salón ordinario de matemáticas. Las preguntas orientativas que guiaron la investigación son entonces: ¿cómo se construye, en general, la Cultura de Racionalidad en una clase de matemáticas? y ¿con qué criterios se puede tipificar la Cultura de Racionalidad de una clase específica de matemáticas?

MARCO TEÓRICO INTERPRETATIVO

Análisis funcional de los argumentos con el Modelo de Toulmin

El modelo de Toulmin (1985) se utilizó como herramienta analítica para organizar, en forma de argumentos, las resoluciones que en clase se ofrecieron a las tareas ahí presentadas. De acuerdo a este modelo un argumento está integrado por una conclusión (C); en el estudio se consideran como conclusiones a las proposiciones de contenido matemático que hacen referencia a ideas completas, susceptibles de ser verdaderas o falsas y corresponden a los resultados de las tareas planteadas en la clase. En el argumento también participan las evidencias (E) que, en el estudio, coinciden con los sustentos proporcionados por los agentes de la clase para obtener la conclusión de la tarea, concordando con la resolución dada para resolverla; ésta incluye los procedimientos llevados a cabo por ellos, como la aplicación de alguna regla o la elaboración de cálculos que, como menciona Krummheuer (1995), se producen de manera persistente en la educación primaria y coinciden con el argumento. Otro componente del argumento son las garantías (G); se trata de reglas de inferencia, creencias generales, teoremas en acción y consideraciones que no se cuestionan y que responden a la pregunta ¿qué licencias de inferencia permite pasar de E a C? El respaldo (R) que apoya a la garantía es otro componente del argumento y ofrece su cimiento teórico, práctico o experimental. Mientras las conclusiones y las evidencias son explícitas, las garantías y los respaldos son implícitos y aquí han sido re-construidos a partir de las producciones de los agentes de la clase.

Sobre la Cultura de Racionalidad

El concepto de Cultura de Racionalidad se ha acuñado en el marco de la investigación cuyos resultados parciales aquí se exponen. Las ideas iniciales relacionadas con el concepto de Cultura de Racionalidad han sido construidas en trabajos previos, con base en los resultados empíricos ahí recabados (e.g., Rodríguez y Rigo, 2015a, 2015b). En esos trabajos se han identificado dos componentes principales de la Cultura de Racionalidad:

Normas de sustentación. Prácticas habituales y más aceptadas de sustentación o de elaboración de argumentos que los agentes de clase llevan a cabo en el aula para soportar los hechos de las matemáticas (cf., normas sociomatemáticas de Yackel y Cobb, 1996).

Normas sociales sobre el reparto de responsabilidades y sobre las formas de interacción. Hace referencia al agente de clase que habitualmente le corresponde argumentar (i.e., dar las conclusiones y las evidencias, y eventualmente las garantías), y al que le toca sancionar los argumentos y las conclusiones dadas, y apunta también hacia las formas de interacción que para argumentar se dan cotidianamente en clase (cf., normas sociales de Planas y Gorgorió, 2001).

El concepto de Cultura de Racionalidad introducido en este trabajo no consiste en un conjunto de criterios evaluativos que se apliquen para medir o evaluar la racionalidad de una clase, a diferencia de otras investigaciones (Boero y Morselli, 2009); se trata de pautas orientativas y exploratorias que permiten des-cubrir la racionalidad que prevalece en un aula ordinaria de matemáticas para distinguir sus características y cualidades más sobresalientes, sin establecer ningún juicio de valor.

METODOLOGÍA

Técnicas analíticas empleadas

La investigación que aquí se reporta fue desarrollada siguiendo los principios de la Teoría Fundamentada (Corbin y Strauss, 2015), cuyo objetivo central consiste en construir, a partir de apoyos empíricos, conceptos teóricos que expliquen fenómenos sociales. Específicamente, en el trabajo se acude al muestreo teórico, técnica interpretativa que parte de conceptos construidos previamente (sobre datos empíricos) para realizar, con base en ellos y tomándolos como una guía, un nuevo análisis. Este análisis se puede hacer considerando nuevos datos empíricos o re-visitando los que previamente se tenían; la intención central de ese análisis consiste en poder adicionar otras propiedades y dimensiones de un concepto previamente construido, lo que da la posibilidad de que se vaya ‘saturando’, es decir, que se vaya puliendo y vaya ganando en profundidad y riqueza.

Específicamente, el muestreo teórico se aplica en este escrito al concepto de Cultura de Racionalidad antes expuesto, con sus dos componentes básicos; orientados por ese concepto, se regresa a los datos empíricos para re-interpretarlos ahora con una mirada longitudinal y dinámica, con el objeto de revelar propiedades y dimensiones de ese concepto que antes no resultaban visibles.

Métodos de recuperación de datos y sujetos que participaron en el estudio

Los datos empíricos provienen de un estudio de caso, conformado por la profesora Noemí, con dos años de servicio, y su grupo de trabajo integrado por 42 alumnos de primer grado de educación secundaria. La razón de su elección (de un total de tres profesores) obedeció a que era la que presentaba mayor tendencia hacia la justificación matemática. Cuando fue observada, enseñaba el tema ‘Reparto proporcional’, para lo cual empleó un enfoque didáctico basado en la resolución de problemas. Para el análisis que aquí se expone se examinó la secuencia didáctica que versa sobre ese tema, y que tuvo una continuidad temática, didáctica y pedagógica; la secuencia fue impartida por la profesora en seis módulos de 50 minutos cada uno, los cuales fueron videograbados y transcritos. La secuencia didáctica se fragmentó en episodios, en cada uno se propusieron uno o varios argumentos (o resoluciones) para dar sustento a una conclusión, que como se dijo, coinciden con la solución a cada una de las tareas propuestas en clase. Para este reporte se analizaron 37 episodios y 74 argumentos.

ANÁLISIS EMPÍRICO

La re-interpretación de los datos dio inicio con un examen puntual de cada argumento, considerando sus componentes de acuerdo al modelo de Toulmin. Este análisis ha permitido, en la re-visita de los datos, caracterizar cada argumento acudiendo a dos componentes funcionales: las garantías y los respaldos. En la última columna de la Tabla 1 se describen las garantías que, en el marco del presente trabajo, se identificaron en la secuencia didáctica observada. Los respaldos que se distinguieron en esta investigación aparecen descritos en la 1ª y 2ª columna de dicha Tabla.

Tabla 1. Garantías y Respaldos identificados en la secuencia didáctica

Tipo de respaldo del argumento		Nombre de la garantía asociada al tipo de respaldo	
Matemático	Idea formal escolar de proporcionalidad	JE	*Justificación empírica.* Cuando se justifica una regla con base en el análisis de casos particulares.
		EP	*Explicitación de proceso.* Cuando se explicita el proceso que se llevó a cabo durante la instanciación de una regla.

		RIFE	*Repetición enriquecida de una instanciación de una regla* (e.g., cuando se da un cambio de registro). Esta garantía se presenta cuando se lleva a cabo la repetición de la aplicación de una regla en un argumento que tiene la misma conclusión que uno previo.
		IFE	*Instanciación de una regla formal escolar* (cuando se aplica una regla que ya ha sido justificada en la clase o se ha explicitado el proceso de su aplicación)
	Idea intuitiva de proporcionalidad	II	*Instanciación de una regla intuitiva* (cuando se aplica la regla sólo con bases de conocimientos intuitivos. Esto se infiere a partir de lo que otros autores han denominado como estrategias espontáneas de '*building up*' (e.g., Hart, 1984), conforme a las cuales utilizan factores escalares sencillos en lugar recurrir al factor de proporcionalidad.
Extra-matemático	Idea operatoria de proporcionalidad	RIO	*Repetición de la instanciación operatoria de una regla* (cuando de utiliza la misma regla instanciada previamente para soportar la misma conclusión)
		IO	*Instanciación operatoria de una regla* (se hace la instanciación (o aplicación de la regla) bajo la consideración de que es válida por pertenecer a la disciplina)
		RP	*Razones prácticas* (el resultado es válido porque es fácil de obtener)

Una vez identificados y caracterizados los argumentos, con base en sus garantías y respaldos, se jerarquizaron como aparecen en la Tabla 1. Se utilizó un criterio basado en el tipo de respaldos; en el nivel más bajo se colocaron los argumentos con respaldo extra-matemático, asociados a ideas operatorias de la proporcionalidad, después se consideraron los argumentos con respaldos matemáticos, poniendo primero los soportados en ideas intuitivas de proporcionalidad y, finalmente, en la parte superior, se colocaron los argumentos orientados por ideas acordes con la proporcionalidad formal escolar.

Posterior al análisis puntual se delineó la trayectoria de los argumentos identificados en la secuencia didáctica, respetando el orden de aparición en clase. La representación de la trayectoria se organizó considerando los distintos componentes de los argumentos: la conclusión, las evidencias, las garantías, los respaldos y las reglas, tomándose también en cuenta los agentes que los ofrecieron. Una representación de esas trayectorias se despliega en la Tabla 2.

Tabla 2. Trayectoria de los argumentos y de participación

Respaldos	Garantías	Número del argumento																																				
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
Matemáticos / Formal Escolar	JE							PIM		PIM				VU			PIM	VU	PF																			
Matemáticos / Formal Escolar	EP		PIM																																			PIM
Matemáticos / Formal Escolar	RIFE															VU						PIM		VU		VU		PIM				PIM				PIM		
Matemáticos / Formal Escolar	IFE						PIM		PIM						VU					PIM	PIM		VU		VU		PIM				PIM		VU	PIM	PIM		PIM	
Matemáticos / Intuitiva	II	PIM											VU																									
Extra Mat / Operatoria	RIO					R3						R3																		R3								
Extra Mat / Operatoria	IO			R3							R3																		R3									
Extra Mat / Operatoria	RP				R3																																	
	AE	A	M	A	M	M	A	M	A	A	A	M	A	M	A	M	M	M	M	M	A	M	A	M	A	M	A	M	A	M	A	M	A	M	A	M	A	M
	EC	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	6	1	2	1	2	1	1	1	1	1	2	1	2	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	1	2	1	2
	AC	A					A						A		A		M	M	M	A	A		A		A				A				A		A		A	
	C	1					3						4		5		6	7	8	9	10		11		12				13				14		15		16	

Respaldos	Garantías	Número del argumento																																				
		38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74
Matemáticos / Formal Escolar	JE																										R3											
Matemáticos / Formal Escolar	EP						VU						VU																									
Matemáticos / Formal Escolar	RIFE		PIM		PIM					PIM										PIM		PIM															R3	
Matemáticos / Formal Escolar	IFE	PIM		PIM		VU		PIM	PIM		PIM	VU		PIM	PIM	PIM	PIM	VU	PIM		PIM							PF	PF	R3	R3	R3	R3	PIM	R3	R3		R3
Matemáticos / Intuitiva	II																																					
Extra Mat / Operatoria	RIO																																					
Extra Mat / Operatoria	IO																						R3	R3	R3	R3												
Extra Mat / Operatoria	RP																																					
	AE	A	M	A	M	M	M	A	A	M	A	A	M	A	A	A	A	A	A	M	A	M	M	M	M	M	M	A	A	M	M	M	M	A	M	A	M	M
	EC	1	2	1	2	1	2	1	2	3	1	1	2	1	1	1	1	1	2	3	1	2	1	1	1	1	1	2	3	4	1	2	1	1	2	1	2	3
	AC	A		A		M		A			A	A		A	A	A	A	A			A		A	A	A	M	M				M		A	A		A		
	C	17		18		19		20			21	22		23	24	25	26	27			28		29	30	31	32	33				34		35	36		37		

Significados de las garantías: JE: Justificación empírica; EP: Explicitación de proceso; RIFE: Repetición enriquecida de la instanciación de una regla; IFE: Instanciación de una regla formal escolar; II: Instanciación de una regla intuitiva; RIO: Repetición de la instanciación operatoria de una regla; IO: Instanciación operatoria de una regla; RP: Razones prácticas.
Significados de las reglas: PIM: Propiedad isomórfica de la multiplicación; VU: Valor unitario; PF: Propiedad funcional; R3: Regla de tres.
C: Conclusión; AC: Agente de la clase que proporcionó la conclusión; EC: Evidencia que soporta la conclusión; AE: Agente que ofreció la evidencia.

Las distintas conclusiones que se ofrecieron en clase se presentan numeradas en la última fila de la Tabla 2; en la penúltima fila se hace referencia a los agentes que las proporcionaron. Asociadas a una conclusión, que recuerde el lector, coincide con la solución de la tarea, en clase se brindaron una o más evidencias (la resolución de la tarea), las que se numeran en la ante-penúltima fila; y cada evidencia la proporcionó un agente de clase (al que se hace referencia en la fila superior a las evidencias). Por ejemplo, para la conclusión 1, proporcionada por un alumno, se ofrecieron en clase 5 evidencias que ofrecieron un alumno, la maestra, un alumno y las últimas dos, la maestra.

En cada evidencia se activó una determinada regla: las reglas que se movilizaron en la secuencia didáctica fueron: la regla de tres (R3), la Propiedad isomórfica de la multiplicación (PIM) (Vergnaud, 1989) (factor escalar), el valor unitario (VU) y la propiedad funcional (PF) (Vergnaud, 1989) (constante de proporcionalidad). Las reglas aparecen en la casilla en la que se intersecta la fila de la garantía en la que se sustenta la evidencia, con la columna de la evidencia. Así por ejemplo, en el argumento 1, asociado a la primera conclusión, un alumno activó la PIM mediante la instanciación de una regla intuitiva (II); o en el argumento 17, asociado a la conclusión 7, la maestra movilizó el valor unitario (VU) y validó esa regla a través de una justificación empírica (JE).

Los respaldos y las garantías se nombran (por sus siglas) en la primera y segunda columna de la Tabla 2, organizadas como lo están en la Tabla 1. Los argumentos brindados a lo largo de la secuencia didáctica aparecen numerados en la segunda fila de la Tabla 2. Ahí se ve que el número total de argumentos identificados es 74. La Tabla 2 también está organizada de forma horizontal, lo que permite identificar episodios. Cada episodio está organizado a partir de una conclusión; en cada episodio los agentes de la clase soportan la conclusión con base en una o más evidencias, y relacionadas a ellas, como ya se dijo, pueden activarse una o más reglas distintas entre sí.

Considere ahora el lector el caso de una misma regla (la que aparece en distintas evidencias, mismas que pueden estar ligadas a una misma conclusión y pertenecer a un mismo episodio, o a conclusiones distintas y pertenecer a diferentes episodios). En estas circunstancias, de invarianza de reglas a lo largo de distintos argumentos, los respaldos pueden ser similares (como en el caso de los argumentos 7 y 9 pertenecientes al episodio 3, en donde la regla que se activa es la PIM y los respaldos son iguales ya que están soportados en consideraciones matemáticas y en una idea de proporcionalidad formal escolar), o pueden ser distintos (los argumentos 3 y 63 comparten la misma regla, la R3, pero los respaldos son distintos, ya que el primero es extra-matemático basado en una idea de proporcionalidad operatoria y el segundo es matemático que hace alusión a una idea de proporcionalidad formal escolar).

Esta condición particular, en la que se consideran argumentos que contienen la misma regla, involucra parejas de argumentos; de hecho, en lugar de parejas se puede pensar en sucesiones de más de dos argumentos. Por ejemplo, una sucesión de argumentos con invarianza de regla está representada por los argumentos 3, 4, 5, 10, 11, 28, 29, 59, 60, 61 y 62, que comparten R3.

Ahora bien. Estas sucesiones de argumentos que comparten la misma regla, pueden compartir también el mismo respaldo, como sucede con la sucesión antes expuesta, cuyos argumentos coinci-den en un respaldo extra-matemático y en una idea operatoria de proporcionalidad. En estas sucesiones, definidas mediante un patrón específico: misma regla y mismo respaldo, es posible distinguir un fenómeno didáctico sobresaliente. Y es que esas sucesiones de argumentos representan potencialmente la oportunidad para que en clase se consolide una regla, de acuerdo a un determinado tipo de respaldo, que de alguna manera orienta la manera de sustentar el uso de esa regla. Se podría tratar de un ‘momento de la técnica’ (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997); estos momentos resultan imprescindibles para que “el estudiante se familiarice con ciertas técnicas hasta alcanzar un dominio tan robusto de las mismas que llegue a utilizarlas como algo ‘natural’” (p. 279) o hasta que dejen de ser problemáticas y se lleguen a rutinizar…” (p. 287). A partir de aquí “estas técnicas podrán ser consideradas de manera oficial como técnicas ‘adquiridas’ por los alumnos, pasando a formar parte del medio matemático de la clase” (p. 279). A este tipo de sucesiones, en este documento se les llama ‘sucesiones de tipo reproductivo’ porque, como se dijo, de alguna manera ayudan a consolidar el dominio de la regla en ciernes. Una sucesión de tipo reproductivo es la que aparece en el párrafo precedente. En la transcripción de clase (v. Tabla 2) se ejemplifica este tipo de sucesiones. Los argumentos 13, 14 y 15 conforman una sucesión de tipo reproductivo ya que comparten la misma regla (VU, que introduce un alumno) y el mismo respaldo (idea de la pro-cionalidad formal escolar). En este caso los tres argumentos no comparten la misma conclusión (C5) y por tanto no están en el mismo episodio.

Hay, por otra parte, sucesiones de argumentos que comparten la misma regla pero distinto respaldo, donde el último tiene un nivel superior de complejidad que los precedentes; a estas se les llama sucesión de argumentos de tipo productivo. Un ejemplo es la sucesión antes descrita, 3, 4, 5, 10, 11, 28, 29, 59, 60, 61 y 62 articulada toda ella en torno a una aplicación operatoria de la Regla de tres pero complementada ahora con el argumento 63, en donde esa Regla se justifica empíricamente, dando lugar a un argumento sustentado matemáticamente. Estas sucesiones de argumentos son productivas porque para justificar la regla se ponen en juego elementos matemáticos más complejos, lo que incide de manera importante en la solidez del conocimiento que consiguen los alumnos. En la Tabla 3, los argumentos 12 y 13 son una sucesión de tipo productivo, ya que comparten la misma regla (UV), pero poseen respaldos distintos, uno soportado en una idea de la proporcionalidad intuitiva y otro, en una idea de la proporcionalidad formal escolar.

A las intervenciones de los agentes de clase que dan lugar a sucesiones de tipo reproductivo en este trabajo se les llama intervenciones de consolidación, porque ayudan a reforzar el dominio de una regla. A las que dan lugar a sucesiones de tipo productivo, se les llama intervenciones de cambio, porque modifican el nivel de complejidad de acuerdo al cual se sustentan las conclusiones. Intervenciones de consolidación se dan en la sucesión de los argumentos 13, 14 y 15, ya que en éstos como se dijo, se repite la misma regla con el mismo respaldo; la intervención de la maestra para proponer la evidencia del argumento 13 es de cambio, porque en ella se preserva la misma regla que en el argumento 12, pero los respaldos ya cambian: mientras este último se basa en una teoría de proporcionalidad intuitiva, el otro se apoya en una idea de proporcionalidad escolar.

Tabla 3. Transcripción y análisis de sucesiones de argumentos de tipo reproductivo y productivo

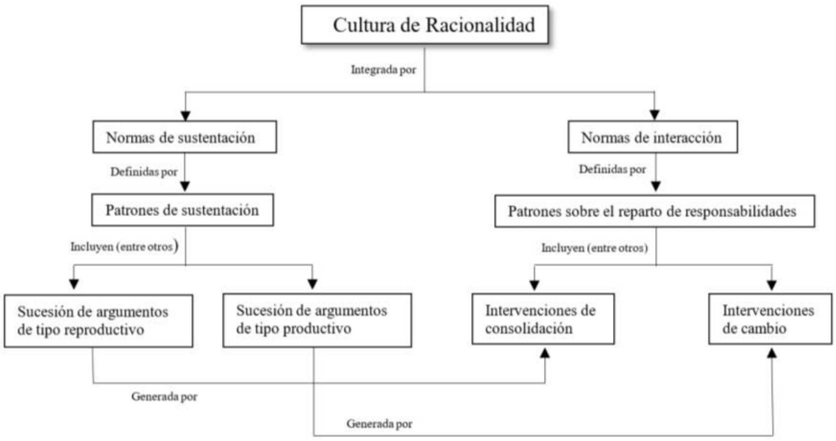
<table>
<tr><td colspan="5">Episodio 4. Resolución de la tarea planteada por la maestra, correspondiente a la secuencia didáctica donde un estudiante ofreció la conclusión 4 (C4), quien se apoyó de la evidencia 1 (E1). El enunciado de la tarea fue: Si para preparar 3 litros de agua de limón se necesitan 12 limones y 6 cucharas de azúcar, cuántos limones y cuántas cucharas de azúcar se necesitarán para preparar 12 litros.</td></tr>
<tr><th>Conclusión</th><th>Evidencia</th><th>Garantía</th><th>Respaldo</th><th>Argumento</th></tr>
<tr><td rowspan="2">C 4: A
Se divide 12 entre tres para saber cuánto equivale un litro</td><td>E 1: Alumno<table><tr><th>Litros de agua de limón</th><th>No. de limones</th><th>Cucharadas de azúcar</th></tr><tr><td>3</td><td>12</td><td>6</td></tr><tr><td>6</td><td>24</td><td>12</td></tr><tr><td>12</td><td>48</td><td>24</td></tr></table>4 / 3)12   12 x 4 = 48   6 x 4 = 24</td><td>G 1: Instanciación de una regla intuitiva (VU)</td><td>R 1: Matemático. Teoría de la proporcionalidad intuitiva</td><td>12</td></tr>
<tr><td>E 2: Maestra
Sacó el valor unitario. Si divide entre tres, tres entre tres nos da a uno…Si tú tienes…el valor de ingredientes para un litro de agua de limón…puedes tener el valor para cualquiera… como le decía a los otros grupos, cuando nos mandan a comprar tamales, no llegamos con el señor de los tamales y le decimos: ¿cuánto tengo que pagar por tres tamales?, entonces te vas con tu regla de tres, ah entonces por 12 que me pidió mi mamá yo tendría que pagar…No! preguntas: cuánto cuesta un tamal y entonces multiplicas por la cantidad de tamales que le vas a comprar…a esto le vamos a llamar el valor unitario…para un litro cuánto necesito de cada cosa.</td><td>G 2: Justificación empírica de la instanciación de una regla intuitiva (VU)</td><td>R 1: Matemático. Teoría de la proporcionalidad formal escolar</td><td>13</td></tr>
<tr><td colspan="5">Episodio 5. Resolución de la tarea planteada por la maestra, correspondiente a la secuencia didáctica donde un estudiante ofreció la conclusión 5 (C5), quien se apoyó de la evidencia 1 (E1). El enunciado de la tarea fue: Si para preparar 3 litros de agua de limón se necesitan 12 limones y 6 cucharas de azúcar, cuántos limones y cuántas cucharas de azúcar se necesitarán para preparar 10 litros.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">C 5: A
Para preparar 10 litros de agua de limón se necesitan 40 limones y 20 cucharadas de azúcar</td><td>E 1: Alumno
Sería lo de un litro que es cuatro limones y dos cucharadas…si multiplico los 10 litros por los demás que se necesitan [número de limones y de cucharadas de azúcar] son 40… 10 por 2 sería 20.</td><td>G 1: Instanciación de una regla formal escolar (VU)</td><td>R 1: Matemático. Teoría de la proporcionalidad formal escolar</td><td>14</td></tr>
<tr><td>E 2: Maestra<table><tr><th>Litros de agua de limón</th><th>No. de limones</th><th>Cucharadas de azúcar</th></tr><tr><td>1</td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>12</td><td>6</td></tr><tr><td>6</td><td>24</td><td>12</td></tr><tr><td>10</td><td></td><td></td></tr><tr><td>12</td><td>48</td><td>24</td></tr></table>Así es que necesitas 40 limones y 20 cucharadas de azúcar…ya tengo el valor unitario [se apoya de los datos de tabla que ella, posterior a la evidencia del alumno, elaboró para explicar]…10 por 4, cuarenta y 10 por 2, 20</td><td>G 2: Repetición enriquecida de la instanciación de una regla (VU) para dar aval institucional</td><td>R 2: Matemático. Teoría de la proporcionalidad formal escolar</td><td>15</td></tr>
</table>

RESULTADOS DEL ANÁLISIS

Reconceptualización de la Cultura de Racionalidad

El análisis precedente, basado en el muestreo teórico, en el que se re-visitaron los datos empíricos a partir de una mirada longitudinal y dinámica, y siempre orientada por la categoría inicial de Cultura de Racionalidad, ha llevado a identificar nuevos conceptos: sucesión de argumentos de tipo productivo y de tipo reproductivo, y las intervenciones de consolidación y de cambio. Estas intervenciones lo que consolidan o cambian es la forma de argumentar o justificar. Es decir, consolidan o cambian los patrones de sustentación, incidiendo así directamente en la Cultura de Racionalidad, porque como se dijo inicialmente, esa Cultura de Racionalidad es un conjunto de patrones de sustentación y de patrones de interacción de acuerdo a los cuales los agentes de clase argumentan los resultados de las tareas que ahí se proponen. Las relaciones entre la categoría inicial de la Cultura de Racionalidad y las nuevas propiedades de la categoría aparecen en el Diagrama 1. Ahí se muestran los conceptos iniciales asociados a esa categoría: normas de sustentación y normas de interacción; las normas de sustentación contienen, entre otros, patrones de sucesiones de argumentos de tipo reproductivo y de tipo productivo. Por su parte, las normas de interacción incluyen entre otros, patrones de intervenciones de consolidación y de cambio. Estas últimas están entrelazadas con las normas de sustentación como se muestra en el Diagrama 1. Todos estos conceptos están nucleados alrededor de lo que se perfila como la categoría central, la de Cultura de Racionalidad.

Diagrama 1. La Cultura de Racionalidad y conceptos relacionados



La Cultura de Racionalidad en el aula de matemáticas de la maestra Noemí

Los nuevos conceptos permiten dar cuenta de cómo eventualmente se construye la Cultura de Racionalidad en una clase, mediante sucesiones de argumentos de tipo productivo y reproductivo e intervenciones de consolidación y de cambio, lo que proporciona la oportunidad de desentrañar más agudamente aspectos de su naturaleza.

Pero las nuevas categorías identificadas en este trabajo también funcionan como indicadores que ofrecen la posibilidad de caracterizar de manera más detallada y escrupulosa la Cultura de Racionalidad que prevalece en un aula cualquiera; en particular, la Cultura de Racionalidad que impera en el aula observada.

En la clase observada es posible identificar, a nivel de episodio, que para una conclusión (de un episodio) se ofrecieron en la mayoría de los casos, más de una evidencia (¡incluso seis!), lo que permite suponer que los alumnos tienen la experiencia viva de que es posible sustentar una misma conclusión de varias formas. En la Tabla 3 se puede reconocer cómo de 37 conclusiones que surgieron en la secuencia didáctica, en 22 de ellas (casi 60%) se proporciona más de una evidencia, mientras que en el resto se ofrece sólo 1.

En la secuencia didáctica observada, de los 74 argumentos que allí se presentaron, 11 (cerca del 15%) fueron el remate de sucesiones productivas, mientras que 63 formaron parten de sucesiones reproductivas. Esta presencia de ambos tipos de sucesiones de argumentos aporta riqueza a la Cultura de Racionalidad, al conjugar lo procedimental con lo conceptual.

Con las categorías introducidas también se consigue distinguir el papel que juegan los agentes de la clase en la construcción de la Cultura de Racionalidad. En el caso de la clase analizada, es claro que es a los niños a los que les toca llevar a cabo las intervenciones de consolidación o presentar la sucesión de argumentos de tipo reproductivo, mientras que a la maestra le corresponde transformar el patrón de sustentación mediante intervenciones de cambio: de los 74 argumentos totales, los alumnos participaron en 34; de éstos, 33 argumentos forman parte de sucesiones reproductivas y sólo uno culminó una sucesión de tipo productivo; por su parte, la maestra participó en 40 argumentos; de éstos, 30 argumentos integran sucesiones de tipo reproductivo y 10 representaron la culminación de sucesiones productivas.

A nivel general se puede decir que en la clase observada se dan distintos tiempos de incubación o consolidación de una regla. Por ejemplo, la secuencia reproductiva asociada a la regla de tres es prolongada, es decir el período de fortalecimiento que da la maestra para que los alumnos se preparen en el dominio de esta técnica es largo, de hecho dura casi toda la secuencia didáctica y es sólo hasta el final que decide cambiar de patrón de sustentación, mediante una intervención de cambio, para justificarla empíricamente. A diferencia de esto, en otras reglas como la PIM, es en un mismo episodio que la maestra decide reemplazar el patrón de sustentación, de una instanciación intuitiva a una explicitación del proceso. Es posible que esto obedezca a que en la regla de tres ella consideró necesario darles tiempo a los estudiantes para que la asimilaran, para que la asumieran como una regla 'natural' -como dice Chevallard et al (1997)- y que en el caso de la PIM posiblemente la docente se percató que los alumnos previamente poseían ya un dominio de la regla y que no era necesario dar tanto tiempo de incubación.

Se puede decir, en general, que en la clase de la maestra Noemí los niños introducen las reglas (generalmente a nivel operatorio o intuitivo), marcando la pauta inicial de cómo sustentar, mientras que su mentora, bajo su criterio, los detiene el tiempo necesario para que las asimilen y las fortalezcan; el ciclo se cierra cuando ella ofrece, mediante una intervención de cambio, evidencias más sólidas y fundamentadas de las reglas. Así que los niños introducen y participan en el afianzamiento de la regla, esto es, se involucran en las intervenciones de consolidación, mientras la maestra es la que concurre en las intervenciones de cambio, al decidir cuándo y cómo modificar las formas de sustentación.

Lo anterior habla de una Cultura de Racionalidad en la que hay equilibrio entre las sucesiones de argumentos de tipo reproductivo y de tipo productivo, ya que se da el tiempo necesario para fortificar la regla con una cierta forma de sustentación y se da también el tiempo para profundizar en ese sustento. No obstante, es una Cultura de Racionalidad poco 'constructivista' o poco negociada, en el sentido de que es la maestra la que ofrece los argumentos más sólidos y fundamentados; es ella la que marca el ritmo y las orientaciones.

CONSIDERACIONES FINALES

Las nuevas categorías asociadas a la Cultura de Racionalidad permiten explicar fenómenos relacionados con su construcción. Da cuenta de que la Cultura de Racionalidad no es fija en una clase, que se va movilizando constantemente, de acuerdo a la presencia de sucesiones productivas o reproductivas. Y da cuenta también del agente sobre quién recae, en sus intervenciones, la responsabilidad de sostener una manera de sustentar o de modificarla, ya para profundizar o bien para ofrecer argumentos más limitados conceptualmente. Esto seguramente dependerá del tema en cuestión, de las características de la maestra, en particular de su enfoque didáctico, así como de los estudiantes que ahí participen.

Las nuevas categorías dan la posibilidad también de tipificar la Cultura de Racionalidad prevalente en una clase de matemáticas. Por ejemplo, de la presencia de sucesiones de argumentos de tipo productivo en un episodio, se desprende la diversidad de evidencias que profundizan en las previas, lo que dicho en otras palabras, permite mostrar la existencia de distintas formas de sustentar y ahondar en una misma conclusión. De la presencia de la sucesión de argumentos de tipo reproductivo en clase, por otra parte, se deriva la multiplicidad de evidencias similares que permite consolidar una regla. Para el caso de que en clase sólo se ofrezca una evidencia para cada conclusión, se puede desprender como consecuencia la pobreza en la argumentación y posiblemente una ausencia de negociación en las políticas de racionalidad, las que pueden recaer sólo en una minoría de los agentes de la clase, con preponderancia quizás del profesor.

Si en una clase se presenta un desequilibrio entre sucesiones de argumentos de tipo productivo y reproductivo, posiblemente se consigue con esto una Cultura de Racionalidad raquítica, con pocas opciones de argumentación y de negociación. Un ejemplo típico son las clases de las escuelas de matemáticas, en donde generalmente se dan argumentos deductivos pero pocos argumentos de otros estilos (experimentación con software o analogías, por ejemplo); otro ejemplo prototípico es la clase de primaria o secundaria en la que prevalecen los argumentos por repetición o de tipo operatorio. A diferencia, el equilibrio entre los dos patrones de sucesiones de los argumentos conjugaría muy posiblemente aspectos procedimentales del aprendizaje con los conceptuales, lo que daría riqueza a la clase y a la racionalidad. Por otra parte, un desbalance de las intervenciones a favor de ciertos agentes, por ejemplo del profesor, impediría a los alumnos beneficiarse de los resultados cognitivos que propicia la acción y la interacción en la clase. Sería deseable que los profesores reflexionaran sobre el tipo de Cultura de Racionalidad que ellos, con conciencia o sin ella, promueven en su clase y determinaran si en realidad responde a sus objetivos didácticos.

Referencias

Boero, P., & Morselli, F. (2009). Towards a comprehensive frame for the use of algebraic language in mathematical modelling and proving. In M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (Eds.), *Proc. 33rd Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, pp. 185-192. Thessaloniki: PME.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* Barcelona: Horsori.

Cobb, P. (1995). Mathematical learning and small-group interaction: Four case studies. In P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 25–129). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Corbin, J., & Strauss, A. (2015). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory* (4nd ed.). California, USA: Sage Publications, Inc.

Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S., & Tanguay, D. (2012). Examining the role of logic in teaching proof. In G. Hanna y M. De Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 369-389). New York: Springer.

Hart, K. M. (1984). *Ratio: Children's strategies and errors*. Windsor, England: NFER-NELSON Publishing Company.

Jones, K. & Herbst, P. (2012). Theories and contexts. In G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (pp. 261-277). New York: Springer.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. En P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229–270). New York, USA: Routledge.

Planas, N. y Gorgorió, N. (2001). Estudio de la diversidad de interpretaciones de la norma matemática en un aula multicultural. *Enseñanza de las Ciencias*, 19(1), 135-150.

Rodríguez, S. G. & Rigo, M. (2015a). The culture of rationality in secondary school: An ethnographic approach. In Beswick, K., Muir, T., & Wells, J. (Eds.) (2015). *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 89-96). Hobart, Australia: PME.

Rodríguez, S. G. y Rigo, M. (2015b). Cultura de racionalidad y procesos de enculturación en la escuela secundaria. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), 2015. *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 477-484). Alicante: SEIEM.

Rigo, M. (2009). *La cultura de racionalidad en el aula de matemáticas de la escuela primaria*. Disertación doctoral no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I. P. N. México, D. F. México.

Toulmin, S., Rieke, R., & Janik, A. (1984). *An introduction to reasoning*. New York, USA: Macmillan.

Vergnaud, G. (1989). *Multiplicative structures*. In J. Hiebert & Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades (Vol. 2, pp. 141-161). Reston: NCTM.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458–477.

EVALUACIÓN DEL POTENCIAL DE CREATIVIDAD MATEMÁTICA EN EL DISEÑO DE UNA C-UNIDAD

Evaluating mathematical creativity affordances in the design of a c-book unit

Sala, G.[a], Barquero, B.[a], Monreal, N.[b], Font, V.[a], Barajas, M.[a]

[a] Facultad de Educación, Universidad de Barcelona [b] Tecnocampus, Universitat Pompeu Fabra

Resumen

Este trabajo se centra en el proceso de diseño y evaluación de unidades didácticas que se proponen promover el pensamiento matemático creativo (PMC), las denominadas c-unidades. Dicho diseño, en manos de un grupo mixto de diseñadores, es seguido por la evaluación del potencial que estas c-unidades presentan en promover la creatividad matemática en sus futuras experimentaciones. En este trabajo nos centramos en presentar las principales herramientas usadas para realizar dicha evaluación y, centrándonos en el caso del diseño de una c-unidad sobre un estudio inter-disciplinar de historia-arqueología y matemáticas, ejemplificaremos algunos de los criterios considerados en su diseño, del producto final generado y del proceso de evaluación sobre su potencial creativo y los resultados generados.

Palabras clave: *creatividad matemática, pensamiento matemático creativo, c-unidad, criterios de diseño, herramientas de evaluación*

Abstract

This paper focuses on the task design process and evaluation of the teaching sequences to foster creative mathematical thinking (CMT), the so-called c-book units. This design, in hands of mixed teams of designers, is followed by the evaluation of the potential or affordances that the c-book unit presents to promote CMT in its later implementations. In this research, we focus on presenting the main tools used to carry out this CMT potential evaluation. We centre on the case of a c-book unit design, about an inter-disciplinary study linking history with mathematics, to exemplify some of the criteria of its design process, the final product and its CMT potential evaluation process and some of the results obtained.

Keywords: *mathematical creativity, creative mathematical thinking, c-book unit, task design principles, CMT evaluation tools*

INTRODUCCIÓN

Este trabajo se centra en el proceso de diseño colaborativo de un nuevo tipo de recurso educativo digital, los llamados c-libros, compuesto por las denominadas *c*-unidades (*c* en referencia a creatividad). Equipos mixtos de diseñadores con distintas formaciones, ámbitos profesionales e intereses se encargan del diseño conjunto y colaborativo de las *c*-unidades con el objetivo de producir un diseño innovador de unidades didácticas que promuevan la creatividad matemática y el pensamiento matemático creativo (PMC) en sus futuros usuarios. Este estudio, desarrollado en el contexto del proyecto europeo "MCSquared", se propone el desarrollo de la tecnología y de las herramientas necesarias para dar soporte a, por un lado, el proceso de diseño colaborativo de las c-unidades y, por otro lado, la evaluación del potencial que estas presentan para promover el PMC en los futuros estudiantes que podrían ser foco de experimentación y de análisis. En este trabajo en

Sala, G., Barquero, B., Monreal, N., Font, V., y Barajas, M. (2016). Evaluación del potencial de creatividad matemática en el diseño de una c-unidad. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 505-514). Málaga: SEIEM.

particular, nos centramos tanto en el proceso de diseño como el producto final que resulta, las c-unidades. Y nos fijaremos, más concretamente, en los principios que se proponen para el diseño de las c-unidades (Kieran, Doorman & Ohtani, 2016) y en la forma cómo se encara su evaluación sobre el potencial que estas presentan para promover el PMC en los procesos enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La llegada al aula de estas c-unidades, aunque no es el objetivo central de este proyecto ya que este se centra principalmente en el contexto del propio proceso de diseño y evaluación de las c-unidades resultantes, se está llevando a cabo en la actualidad con una selección de unidades.

En el proyecto MCSquared, participan cuatro equipos responsables del diseño de unidades (España, Francia, Grecia y Reino Unido), que han formado localmente los equipos de diseñadores responsables del diseño de c-unidades durante tres ciclos consecutivos de diseño (de Enero 2014 hasta Enero 2016). Estos equipos de diseñadores son las que denominamos *comunidad de interés* (CdI) (Fisher, 2001) que surgen en este proyecto extendiendo la noción más popularizada de comunidad de prácticas (Wegner, 1998). En términos generales, la configuración de estas CdI han incluido miembros involucrados directamente en la enseñanza de las matemáticas en distintos niveles educativos y aportando diferentes perspectivas de actuación (profesores de Primaria, de Secundaria y de Universidad), pero a la vez incluyendo un punto de apertura de la escuela a la sociedad, con otros profesionales externos al mundo de la enseñanza matemática (editoriales educativas, desarrolladores de tecnología educativa, investigadores de otras áreas de conocimiento, etc.) que han podido problematizar y cuestionar el papel de la creatividad en las matemáticas, en su enseñanza y en el diseño de actividades para promover el PMC. Su configuración ha sido crucial ya que, además de ser las responsables del diseño de las *c*-unidades, su diversidad ha asegurado una riqueza y complementariedad de dominios de conocimiento, culturas y perspectivas que ha añadido a la CdI un potencial creativo en relación a las tareas de diseño y evaluación que se les ha ido solicitando en el transcurso del proyecto.

En nuestro caso, la CdI española ha constado de entre 18 y 23 personas, dependiendo del ciclo de diseño, entre las cuales han intervenido personas con perfiles diversos. El diseño de las c-unidades se ha realizado en tres ciclos consecutivos en los cuales se han formado subgrupos de diseñadores para cada una de las c-unidades a diseñar: 2 en el primer ciclo, 5 en el segundo y 8 en el tercer y último ciclo. Todo proceso de diseño de una c-unidad ha pasado por un proceso cíclico de diseño compuesto por distintas fases: (a) formación del equipo mixto de diseñadores (entre 4 y 6 miembros de la CdI) de la c-unidad de acuerdo con sus intereses y con la intención de incorporar perfiles variados; (b) delimitación de la temática, cuestiones a tratar y herramientas matemáticas y tecnológicas necesarias para el diseño de la c-unidad; (c) acuerdo y elaboración del 'protodiseño' de la c-unidad y de los criterios de diseño a tomar en consideración; (d) diseño de la c-unidad en la plataforma del c-libro; (e) evaluación interna (por el equipo de diseñadores) y finalización de la c-unidad, y (f) evaluación del potencial que tiene la c-unidad para promover la creatividad matemática y el PMC, incorporando miembros de la CdI no participes en el diseño. Internamente a la CdI, hay un subgrupo de investigadores en Educación y en Didáctica de las Matemáticas (con un total de 4-5 personas) el cual, además de formar parte de los equipos de diseñadores, aportaban la visión más teórica a las tareas de diseño y análisis matemático-didáctico que se solicitaba en ciertas etapas de proceso.

En relación a estas etapas genéricas que sigue todo proceso de diseño de una c-unidad, nos centraremos en tratar el problema de investigación que puede formularse en los términos siguientes: *¿Qué criterios de diseño se generan en el proceso de producción de las c-unidades para promover la creatividad matemática y el pensamiento matemático creativo? ¿Qué herramientas de evaluación se pueden considerar para evaluar el potencial de creatividad matemática de estas c-unidades diseñadas?*

Debemos notar que este trabajo va a centrarse más específicamente en presentar algunas de las herramientas centrales usadas para tratar la segunda de las cuestiones relativa a la evaluación del potencial de creatividad matemática que contiene una c-unidad. Aunque, de acuerdo con muchos de los trabajos precedentes, como Silver (1997) o Leikin (2009), esta cuestión es inseparable de la primera ya que muchos de los indicadores y medidores que proponen estos autores sobre la creatividad matemática se proponen bajo suposiciones de qué es la creatividad matemática y cómo se propone promover a través del diseño de cierto tipos de tareas. Por ejemplo, Silver (1997) propone las actividades basadas en "problem-posing" y "problem-solving" como base para el diseño de tareas para promover el PMC. Cuando este mismo autor se propone medir la creatividad matemática reformula los términos más clásicos de "Fluidez, Flexibilidad, Originalidad y Elaboración" (Torrance, 1988, entre otros) sobre la creatividad matemática, en términos de formulación de preguntas y resolución de situaciones problemáticas. A continuación vamos a presentar algunos de los fundamentos teóricos y metodológicos más importantes que, después de tres ciclos de diseño de c-unidades, se han ido desprendiendo de las tareas de diseño y de evaluación que se requerían. Nos vamos a centrar entonces en el caso del diseño de una c-unidad sobre un estudio inter-disciplinar de historia-arqueología y matemáticas (*¿Qué esconden estas ruinas?,* correspondiente al ciclo 3 de diseño), para poder ejemplificar con más concreción algunas de las características y criterios considerados en su proceso de diseño, así como la puesta en uso de las herramientas consideradas para la evaluación sobre su potencial creativo.

Componentes teóricas y metodología de la investigación

El análisis y la evaluación de la promoción de la creatividad matemática (CM) y del pensamiento matemático creativo (PMC) ha sido una de las tareas centrales del proyecto MCSquared. Esta evaluación se ha decidido aproximar en dos niveles de análisis, distintos aunque complementarios. En primer lugar, el *primer nivel de análisis* se centra en identificar las concepciones sobre la creatividad matemática y el PMC de los miembros de la CdI (cada CdI independientemente) y cómo estas concepciones han impactado en la consideración y definición de criterios de diseño de las c-unidades.

En relación a la CdI española, durante el primer ciclo del proyecto, se abordaron intensamente las tareas relativas a este primer nivel de análisis, más concretamente, en identificar las concepciones de PMC que presentaban los diseñadores a partir de la elaboración de una encuesta y un guión de entrevistas que recogía una gran variedad de interpretaciones descritas en la literatura sobre CM y sobre la promoción del PMC, Bolden, Harries & Newton (2010), Leikin et al. (2013), Sriraman (2009), Haylock (1997), entre otros (su descripción y los resultados obtenidos pueden consultarse en Barquero, Richter, Font & Barajas, 2014), como también confrontarlas con los criterios de diseño y de evaluación que tomaban en consideración en las dos c-unidades que se diseñaron dentro de este primer ciclo. Aunque no fue hasta el segundo ciclo de diseño cuando, después de analizar las características y criterios de diseño comunes entre las producciones y evaluaciones de las cuatro CdI y, sobretodo, ante la necesidad de establecer criterios y herramientas más explícitas (y medibles) de evaluación del potencial de PMC, cuando se empezó a abordar el problema de investigación anteriormente presentado. Al finalizar este segundo ciclo, el equipo interno de investigación analizó todos los criterios de diseño (preguntados explícitamente para cada c-unidad), las formas cómo estos se habían integrado en la c-unidad y las herramientas provisionales de evaluación, y se pusieron de manifiesto distintos aspectos:

(a) Cuando los miembros de la CdI se proponen explicitar los criterios de diseño y de evaluación, raramente se refieren directamente a la CM o PMC, si no que recurren a la *descomposición* de estos conceptos en *distintas dimensiones o procesos de la actividad matemática* cuya integración a través del diseño de tareas ayudaría a promover la CM, por ejemplo: incorporar problemas o preguntas que permitan problematizar el conocimiento de los estudiantes o incorporar espacios donde los estudiantes puedan plantear nuevas cuestiones (*formulación de cuestiones* o *problematización*), explorar, usar y combinar diferentes representaciones de los objetos/conceptos matemáticos (*combinación de representaciones*), establecer conexiones extra- e intra-matemáticas (*conexiones*), ofrecer herramientas para que los estudiantes puedan evaluar o validar sus propuestas (*evaluación/validación*), entre otras. La propuesta de esta descomposición y de las dimensiones o categorías a considerar se basó en los trabajos desarrollados en dos marcos teóricos principales, el del enfoque ontosemiótico (ver, por ejemplo, Malaspina & Font, 2010) y en de la teoría antropológica de los didáctico con la consideración de los momentos didácticos y de algunas propuestas de diseño de actividades matemáticas (Bosch & Gascón, 2014).

(b) Hay la suposición compartida que la *creatividad matemática emergerá de la interacción* e *integración* de estas distintas dimensiones o procesos.

Partiendo de este primer análisis, se propusieron las primeras herramientas de evaluación, acordada por toda la CdI local y particularizada para cada c-unidad dependiendo de los criterios de diseño que el subgrupo de diseñadores hubiera acordado. Más concretamente, una vez el equipo de diseñadores habían acordado los criterios de diseño de la c-unidad, el equipo interno de investigadores analizaba las dimensiones o procesos que se proponían integrar (normalmente aparecían unas 6-8 dimensiones) y, a partir de aquí, se proponía la herramienta de evaluación del potencial de PMC. Una vez se había terminado con el diseño, se solicitaba al equipo de evaluadores (normalmente se solicitaba esta evaluación a miembros de la CdI que no habían formado parte del equipo de diseñadores de la c-unidad) valorar cada dimensión con una escala entre 1 (= integración débil de la dimensión) y 4 (= integración fuerte de la dimensión) dependiendo del grado de acuerdo sobre la integración de esta dimensión en la forma final de la unidad. La Figura 1 muestra dos representaciones de las evaluaciones obtenidas al finalizar en segundo ciclo de diseño de dos unidades distintas. En ellas, cada vértice se obtiene a partir de la puntuación media de cada categoría (donde la puntuación mínima es el centro del polígono regular y la puntuación máxima es cada uno de sus vértices). Así, la proporción del polígono interior respecto al exterior da una primera descripción gráfica-numérica del potencial del PMC de cada c-unidad y cada arista interior nos indica aquellas dimensiones que han sido mejor (o peor) integradas en el diseño final.

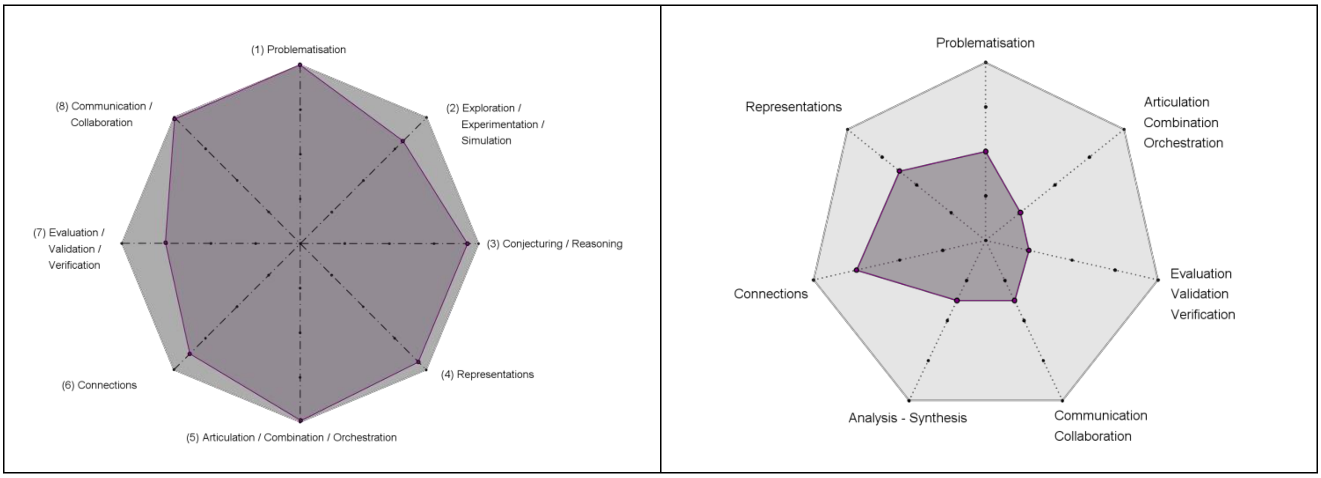


Figura 1. Dimensiones seleccionadas para la evaluación del potencial de CM de dos c-unidades y representación de su resultado gráfico-cuantitativo.

En estrecha relación al nivel anterior, el *segundo nivel de análisis* aparece ante la necesidad de realizar cros-evaluación (o evaluación por pares de CdI) que se proponen rediseñar una misma unidad. Otro de los objetivos del proyecto ha sido que las CdI colaboraran dos a dos en la adopción y el rediseño de c-unidades, junto con su pre-evaluación (cuando se recibe una unidad diseñada por otra CdI) y post-evaluación (una vez se ha terminado con su rediseño) del potencial de PMC. La necesidad aquí emergida de tener que confrontar las herramientas evaluativas, desarrolladas independientemente por cada una de las CdI, puso de manifiesto la conveniencia de converger hacía unos criterios y una herramienta común. Ante esta difícil tarea, surgieron cuestiones muy interesantes sobre cómo se podían coordinar y complementar las herramientas propuestas por cada uno de los equipos de forma coherente. Finalmente, este segundo nivel de análisis llevó a buscar una herramienta común de evaluación del potencial de PMC que tomó forma de cuestionario que combinaba los criterios de evaluación propuestos por los cuatro equipos investigadores.

El diseño de este cuestionario puede considerarse una de las principales contribuciones frente a las cuestiones de investigación planteadas, en particular en relación a la segunda. Este cuestionario quedó compuesto por tres secciones. La *primera sección*, y más extensa, se centra en indagar en qué grado se integran los distintos procesos o dimensiones esenciales para la promoción de la CM y el PMC. Esta primera sección integra un total de cinco procesos o dimensiones (de las anteriormente definidas por la CdI española) pero ahora se seleccionan las que eran comunes a las cuatro CdI y que se podrían etiquetar bajo las siguientes cinco categorías: una más genérica, sobre el grado de (1) *Apertura* (de los problemas propuestos y herramientas previstas), *Versatilidad* (capacidad de adaptación de la c-unidad a diferentes grupos) *y Generalización*; las otras categorías son (2) *Problematización*, (3) *Conexiones*, (4) *Conjeturar y Explorar*, y (5) *Validar y evaluar*. Cabe comentar que esta categorización reduce las dimensiones con las que el equipo español había trabajado anteriormente pero permite quedarse con aquellas comunes a todos los equipos (de acuerdo con las distintas concepciones de PMC que entran ahora a interactuar y coordinarse). En el cuestionario aparecen una serie de afirmaciones que vienen a definir los indicadores que definen y caracterizan cada categoría. Por ejemplo, en relación a las (3) *Conexiones*, dos de los cuatro ítems incluidos, son:

1. The c-book unit provides users with opportunities to establish connections between different knowledge areas and mathematics (interdisciplinary/cross-disciplinary/external connections).
2. The c-book unit provides users with opportunities to establish connections between various representations of the mathematical concepts at stake (e.g. through a combination of widgets offering various representations).

O, en relación a (5) *Validar y Evaluar*, los dos ítems incluidos, son:

3. The c-book unit encourages users to formulate and check their mathematical conjectures.
4. The c-book unit stimulates to think about, reflect, summarize and evaluate the mathematical work already developed.

Además se añaden dos nuevas secciones, para referirse a los *aspectos sociales* (2ª sección) y *aspectos emocionales* (3ª sección) que también impactan en el potencial de promover la CM de las c-unidades, los cuales las otras CdI ya habían estado incluyendo en etapas de evaluación anteriores a la definición del cuestionario común. Cada una de estas secciones incluye tres ítems. Por ejemplo, sobre los *aspectos sociales* encontramos ítems como, por ejemplo: “The c-book unit stimulates user's collaboration / cooperation / interaction with other users.” O, “The c-book unit encourages the students to develop their mathematical communicative skills”. En relación a las *aspectos emocionales* encontramos, por ejemplo: “The c-book unit actively promotes engagement by generating a perception of usefulness of mathematics, either in everyday life, or inside the mathematical context”. La escala utilizada en estos ítems es la misma que anteriormente, y también pueden añadirse aspectos. En esta ocasión también se solicita que los miembros de la CdI que actúen de evaluadores, valoren cada ítem (de todas las secciones) con una escala entre 1 (= integración débil) y 4 (= integración fuerte) dependiendo del grado de acuerdo sobre la integración de esta dimensión en la forma final de la unidad. En las siguientes secciones ejemplificaremos el uso de estas herramientas y metodología de evaluación del potencial de CM y PMC para una c-unidad concreta.

PROCESO DE DISEÑO Y EVALUACIÓN DE UNA C-UNIDAD: ¿QUÉ ESCONDEN ESTAS RUINAS?

La c-unidad en cuestión se propone presentar a los estudiantes (idealmente estudiantes de 2º-3º de la ESO) una investigación basada en una situación problemática donde la modelización geométrica tiene un papel esencial para poder dar respuesta a las cuestiones que se van planteando a los largo de la investigación. El uso de soporte digital es indispensable, por un lado, para buscar información y validar estimaciones e hipótesis y, por otro lado, la aplicación de Geogebra facilita a los estudiantes trabajar con formas y las estructuras de las construcciones, localizándolas en mapas reales. Las actividades de esta c-unidad, inspiradas en una investigación real llevada a cabo por del Museo de Badalona (Barcelona), siguen una narración que trata de mantener la motivación de los estudiantes durante el progreso de su investigación sobre la principal pregunta sugerida: *¿A qué tipo de edificio público romano podría haber pertenecido el muro curvilíneo encontrado en la excavación arqueológica?*

Un total de seis miembros de la CdI española actuaron por unos meses como verdaderos arqueólogos y, a la vez, como diseñadores de la c-unidad. El diseño de la c-unidad fue organizada en las fases (descritas en la primera sección). El grupo diseñador estaba compuesto por miembros con distintos perfiles: investigadores en educación matemática, profesores de educación primaria y secundaria y expertos en diferentes temas de la unidad. En este sub-equipo de diseñadores, había distintos roles asignados, por ejemplo, una persona que actuó de principal diseñadora recogiendo todas las ideas y concretizándolas en el diseño de la c-unidad, o un moderador, que fue un miembros del equipo de investigación que coordinaba todas las etapas de proceso de diseño y también de evaluación.

La versión final de esta c-unidad queda finalmente estructurada en cuatro fases. Una *primera fase*, en la que se presenta la noticia del descubrimiento de unas ruinas romanas y se formulan las primeras cuestiones para que los estudiantes exploren y formulen las primeras conjeturas sobre a qué tipo de edificio se pueden corresponder las ruinas halladas; en una *segunda fase*, se invita a que los estudiantes exploren qué tipo de forma geométrica se ajusta mejor a la configuración real de las ruinas; la *tercera fase* se centra en la evaluación y validación de las primeras hipótesis y en el diseño del modelo de teatro según de canon de *Vitruvius*. Esta fase incorpora un aplicativo de Geogebra como herramienta central para simular en canon que se les da ya preparado y poder comprobar si se ajusta al mapa adaptado de las ruinas; finalmente, en la cuarta fase, se pide a los estudiantes la redacción de un informe final con las conclusiones de la investigación realizada.

Se trata de una unidad innovadora basada en el aprendizaje por indagación a partir de un contexto arqueológico problemático donde las matemáticas juegan un papel muy importante como herramienta clave de modelización de la situación presentada. Los estudiantes pueden aprender matemáticas mientras realizan la investigación que se les propone como si se tratara de una aventura, un viaje a la antigüedad. En el contexto de esta c-unidad —la arquitectura clásica— la creatividad y las matemáticas se convierten en potentes herramientas para ser usadas conjuntamente en el estudio del problema. Los aplicativos (o widgets) que los estudiantes encuentran en cada página de la unidad ofrecen progresivamente información útil que facilitará el aprendizaje y la consolidación de contenidos matemáticos relacionados con las propiedades de las curvas y, específicamente, la circunferencia. La autenticidad de la situación problemática y la necesidad de formular y validar progresivamente las conjeturas, a través del contraste con la realidad, hace posible que se dé una alta motivación entre el alumnado.

Con el objetivo de llevar a cabo esta investigación, la c-unidad ofrece al alumnado muchos enlaces a fuentes primarias (como al libro facsímil escrito por *Vitruvius*, un arquitecto clásico romano) y a fuentes secundarias, así como a videos y otros recursos para obtener información verídica. Para asegurar la comprensión y la reflexión sobre contenidos matemáticos e históricos, la c-unidad propone actividades a lo largo de las cuales los estudiantes pueden formular conjeturas razonables gracias a la «imaginación informada» adquirida. El contexto arqueológico en esta ocasión ofrece un campo de estudio donde las matemáticas —con un papel indispensable para descubrir qué edificio esconde el subsuelo de la ciudad— se erigen como una herramienta muy útil y cercana a todo el alumnado participante que conecta con la realidad de la situación propuesta.

Evaluación del potencial de promoción de la creatividad matemática

Un equipo de tres revisores de la CdI, que no habían formado parte del equipo de diseñadores, se encargó de la evaluación del potencial del PMC de la c-unidad aquí tratada. La evaluación fue organizada en 3 pasos. En primer lugar, se pidió a cada uno de los miembros evaluadores que realizara las tareas propuestas en la c-unidad y se les mandó entonces el cuestionario de evaluación (descrito en la sección anterior). En segundo lugar, cada revisor realizó la evaluación individualmente (de esta manera, sus opiniones no se vieron influenciadas por los otros evaluadores) y, posteriormente, la envió al moderador (que era un miembro del equipo interno de investigación). Finalmente, se pidió a los revisores que se reunieran con el moderador para presentar sus resultados y discutir si creían necesario añadir más ítems o categorías para la evaluación, de esta manera todos los miembros podría calificar también estos nuevos ítems. La comunicación entre los revisores se realizó principalmente por correo electrónico, en una reunión común y a través del espacio de interacción del c-libro. A partir de aquí, el moderador calculó los estadísticos descriptivos obtenidos de las diferentes evaluaciones representadas en la Tabla 1.

Tabla 15. Análisis de la evaluación de las cualidades que potencialmente fomentan el PMC de la c-unidad.

	Media	Mdn	IQR	Min	Max
Categoría 1	3,69	4	1	2	4
Categoría 2	3,54	4	1	3	4
Categoría 3	3,21	3	1	1	4
Categoría 4	3,83	4	0	3	4
Categoría 5	3,83	4	0	2	4

Como resultado de su evaluación se observa, en primer lugar, que los miembros del CdI piensan que *Conjeturar y Explorar* (Categoría 4) y *Validar y Evaluar* (Categoría 5) son las características más potentes de la unidad (Media=3,83, Mdn=4), con opiniones muy homogéneas sobre ello (IQR=0). En sus comentarios los revisores se focalizan en el enfoque de indagación de la c-unidad. Por ejemplo, respecto a la Categoría 4 el revisor 1 comenta: “*Cuando las hipótesis se han validado se añaden nuevas preguntas abiertas y los estudiantes deben sacar conclusiones sobre su trabajo”.* Y el revisor

2: “*Uno de los puntos más fuertes de la unidad es que está basada en la indagación, explorando diferentes posibilidades y comprobando sus conjeturas”*. Respecto a la Categoría 5 los revisores comentan, por ejemplo, el revisor 1: “*El c-libro, además de trabajar con algunos conceptos curriculares, es una herramienta para escribir las diferentes reflexiones que aparecen durante el proceso de indagación”*. O bien, el revisor 2: “*Es muy interesante que puedan investigar con documentos reales del mismo periodo que están investigando. Los estudiantes tienen que comparar edificios actuales con clásicos. Es una buena manera de hacer reflexionar a los alumnos sobre la evolución humana”*.

Sobre las categorías de *Apertura, Versatilidad y Generalización* (Categoría 1) y *Problematización* (Categoría 2) han sido también altamente calificadas (Media= 3,69 and 3,54 respectivamente; Mdn=4), pero un poco más heterogénea (IQR=1). Según sus opiniones, los evaluadores aprecian especialmente que el c-libro empiece con una pregunta genuinamente abierta y que los estudiantes tengan muchas posibilidades a considerar para poder responder. Los revisores, respecto a la Categoría 1, realizan comentarios como los siguientes: “*La c-unidad ofrece diversas posibilidades de resolución (Google maps, Geogebra, ‘Geoportal urbanístic’, etc.). Además, la unidad va desde la construcción geométrica hasta la generalización del modelo de su construcción, basado en las reglas básicas de Vitruvius para la construcción de edificios públicos”*. El revisor 2 especifica: “*Se trata de un problema abierto a diferentes opciones pero el usuario puede investigar en una línea. Además anima a los estudiantes a usar múltiples estrategias para resolver un problema matemático y arqueológico”*. Respecto a la Categoría 2, los revisores exponen, por ejemplo: “*Los estudiantes tienen que formular diferentes hipótesis y después validarlas”*. O bien: *“La unidad incluye problemas no estándares y es original para los estudiantes”*. *Conexiones* (Categoría 3) es la categoría calificada con menos puntuación (Media= 3,21; Mdn= 3) porque los revisores piensan que el c-libro está basado principalmente en geometría y se considera que las conexiones entre diferentes aspectos matemáticos podría mejorarse. No obstante, remarcan el gran potencial de la unidad para conectar diferentes disciplinas. Los comentarios reafirman la puntuación, por ejemplo: “*La unidad promueve conexiones transversales entre matemáticas e historia. Trabajan con diferentes formas geométricas y posiciones relativas entre planos. Además tienen que trabajar con los conceptos de escala, perímetro, área y forma.”* O el revisor 2, comenta: “*La unidad es claramente interdisciplinaria y ofrece diferentes estrategias para resolver el reto. Aunque principalmente está basada en la geometría presenta oportunidades para establecer conexiones”*.

Según el análisis del potencial de PMC realizado por los evaluadores, en general, todas las categorías están integradas de forma homogénea en el diseño definitivo de la c-unidad de forma similar, como se puede apreciar en la representación de la Figura 2. De forma similar a la Figura 1, la proporción rellenada por el pentágono interior del pentágono exterior regular da una idea del potencial del PMC de la c-unidad. Cada vértice, de nuevo, representa la media de cada categoría (en una escala de 0 a 4).

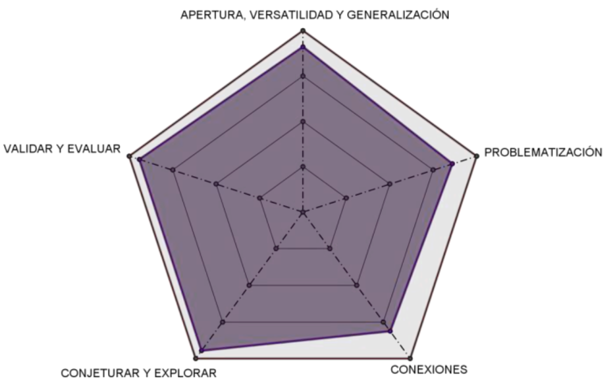


Figura 2. Categorías seleccionadas con las medias correspondientes a la evaluación de PMC.

Los diagramas de caja de la Figura 3 — en los que la barra gruesa representa la mediana— resumen la evaluación de todas las categorías.

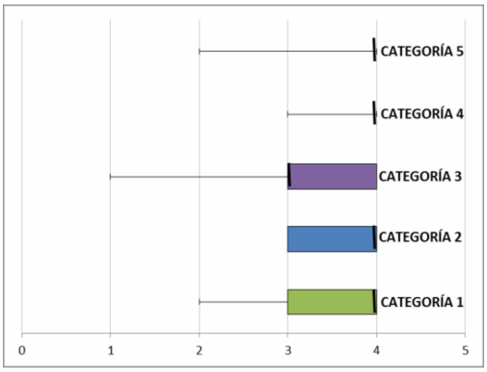


Figura 3. Diagramas de caja del resultado de la evaluación del PMC por categorías.

Respecto a los *Aspectos Sociales* y *Emocionales*, podemos fijarnos en la Tabla 2, donde se resumen las conclusiones a través de los mismos estadísticos calculados para las anteriores categorías.

Tabla 16. Análisis de los Aspectos Sociales y Afectivos que fomentan potencialmente el PMC de la c-unidad.

	Media	Mdn	IQR	Min	Max
Aspectos Sociales	3.75	4	1	3	4
Aspectos Emocionales	3.89	4	0	3	4

Por lo que se refiere a los *Aspectos Sociales*, los evaluadores están ampliamente de acuerdo en su integración en la c-unidad, con una cierta variabilidad de sus valoraciones (Media=3,75, Mdn=4, IQR=1). Aprecian que la c-unidad ofrezca oportunidades para colaborar con otros estudiantes para formular las hipótesis y buscar y contrastar soluciones. Además, subrayan que la c-unidad estimula las habilidades comunicativas, pues en muchas ocasiones tienen que explicar con sus palabras sus ideas y argumentar sus respuestas. No obstante, es importante remarcar que dos de los tres revisores consideran que el ítem sobre «espíritu competitivo» no debería ser evaluado, ya que según su opinión no es una característica importante para promover. El tercer revisor lo califica con la más alta puntuación argumentando que la c-unidad organiza las tareas de indagación de manera que se promueve una competición sana. Por otro lado, los evaluadores están totalmente de acuerdo en la integración de *Aspectos Emocionales* en esta c-unidad (Media=3,89; Mdn=4) con opiniones muy homogéneas (IQR=0). Los revisores comentan que el hecho de incluir una cuidada narrativa que pone en contacto matemáticas con arqueología ofrece un buen ejemplo del interés de usar matemáticas para resolver un problema histórico muy cercano a la cotidianeidad de los estudiantes. Se menciona el diseño atractivo de la c-unidad: "*Contiene una narrativa interesante, una serie de cuestiones muy bien articuladas y detalladas fotos que promueven que los estudiantes se involucren*".. Por otro lado, los revisores afirman que "*los estudiantes podrán darse cuenta que las matemáticas son herramientas necesarias para entender nuestro mundo*". Subrayan además que la narración histórica provoca la curiosidad y interés de los estudiantes para investigar y buscar en noticias y en diferentes documentos, cosa que aumenta su conocimiento en cultura general de manera natural.

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS DE LA INVESTIGACIÓN

En este trabajo nos hemos centrado en presentar la respuesta (en permanente evolución) que, en el marco de proyecto MCSquared y a través del diseño y evaluación de un tipo muy particular de unidades didácticas, hemos construido ante la difícil cuestión de: *¿Qué herramientas de evaluación se pueden considerar para evaluar el potencial de creatividad matemática que presentan distintas propuestas didácticas?* Hemos querido poner especial énfasis en dos aspectos: el primero, ha sido el hecho de mostrar la progresiva construcción de estas herramientas a lo largo de los procesos cíclicos de diseño de las c-unidades y, en segundo lugar, su uso y ejemplificación en la evaluación del potencial de creatividad matemática en el caso de una c-unidad concreta en la cual la indagación, la modelización de sistemas arqueológicos y la interacción y dialéctica de las matemáticas e historia ha jugado un papel esencial en su diseño. Nos queda pendiente en punto esencial que es el de comparar y contrastar la evaluación realizada en el propio proceso de diseño, con la que se podría realizar cuando estas llegan al aula y se pueda evaluar la real promoción de la creatividad matemática en los estudiantes. Dicho paso, nos llevará a tener que considerar nuevas y complejas cuestiones de investigación y a la necesidad de construir nuevas herramientas pero que completará un ciclo de diseño-evaluación-experimentación-evaluación esencial para entender el ámbito de validez de estos diseños y de los resultados de su evaluación.

Referencias

Barquero, B., Richter, A., Barajas, M. & Font, V. (2014). Promoviendo la creatividad matemática a través del diseño colaborativo de c-unidades. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 157-166). Salamanca: SEIEM.

Bolden, D., Harries, T. & Newton, D. (2010). Pre-service primary teachers' conceptions of creativity in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 73, 143–157.

Bosch, M., & Gascón, J. (2014). Introduction to the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). In A. Bikner-Ahsbahs, S. Prediger (Eds.) *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education* (pp. 67-83). Cham: Springer.

Fischer, G. (2001). Communities of Interest: Learning through the Interaction of Multiple Knowledge Systems. En S. Bjornestad, R. Moe, A. Morch, A. Opdahl (Eds.), *Proceedings of the 24th IRIS Conference* (pp. 1-14). Ulvik, Department of Information Science, Bergen, Norway.

Haylock, D. (1997). Recognising mathematical creativity in schoolchildren. *ZDM Mathematics Education*, *29*(3), 68-74.

Kieran, C., Doorman, M., & Ohtani, M. (2016). Frameworks and principles for Task Design. In A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task design in mathematics education: An ICMI Study 22* (pp. 19-81). New York: Springer.

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman, and B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 129-145). Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers.

Leiken, R., Subotnik, R., Pitta-Pantazi, D., Singer, F.M., & Pelczer, I. (2013). Teachers' views on creativity in mathematics education: an international survey. *ZDM Mathematics Education, 45,* 309–324.

Malaspina, U., & Font, V. (2010). The role of intuition in the solving of optimization problems. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(1), 107-130.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM Mathematics Education*, *3*, 75-80.

Sriraman, B. (2009). The characteristics of mathematical creativity. *ZDM, 41*(1-2), 13-27.

Torrance, E. P. (1988). The nature of creativity as manifest in its testing. In R. J. Sternberg (Ed.*), The nature of creativity: Contemporary psychological perspectives*. New York: Cambridge University Press.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: learning, meaning, and identity.* Cambridge University Press.

I 1 Este trabajo se ha realizado en el marco del proyecto MCSquared (http://mc2-project.eu) financiado por la Comisión Europea bajo en programa FP7 (Project no. 610467), Strategic Objective ICT-2013.8.1 "Technologies and scientific foundations in the field of creativity" y, seguido posteriormente, en el proyecto I+D+i: EDU2015-64646-P del Ministerio de Economía y Competitividad del Gobierno de España.

UNA PROPUESTA DE EVALUACIÓN FORMATIVA PARA EL APRENDIZAJE BASADO EN PROYECTOS EN MATEMÁTICAS

A proposal of formative assessment for Project Based Learning in mathematics

Benjumeda, F. J.[a], Romero, I.[b], Zurita, I.[c]

[a]IES El Parador (Almería), [b]Universidad de Almería, [c]Universidad de Almería

Resumen

En la actualidad, los enfoques socio-constructivistas para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas necesitan procedimientos de evaluación coherentes con esta visión. Presentamos una propuesta para articular un sistema de evaluación formativa que pretende adaptarse a los progresos y las necesidades de alumnado de secundaria que sigue una metodología de Aprendizaje basado en proyectos. Mediante un experimento de enseñanza, se pone en práctica un sistema de semáforos que permite al alumnado autoevaluarse en las distintas capacidades de cada tarea y al profesor ofrecer una realimentación continua. Los resultados muestran la utilidad del sistema para el alumnado, al permitirle conocer las metas de aprendizaje y trabajar en sus puntos débiles, lo que redunda en una mejora de sus resultados académicos. Además permite al docente una planificación sistemática de las tareas y de mecanismos apropiados de realimentación y ayuda a los estudiantes.

Palabras clave: *evaluación formativa, aprendizaje basado en proyectos, interpretación de gráficas, investigación de diseño, secundaria*

Abstract

Nowadays, socio-constructivist approaches to mathematics teaching and learning need assessment procedures which are coherent with this vision. A proposal for articulating formative assessment is presented aimed at adapting to the progress and needs of secondary students that use Project Based Learning methodology. By means of a teaching experiment, carried out at a mathematics class of 2nd level of CSE, a procedure for sharing learning goals with students is implemented, together with a "traffic lights" system that allows students´ self-assessment throughout the project and teacher´s provision of continuous feedback. Results show the usefulness of the system for students, by allowing them to know the learning goals and to work on their weak points, which entails a significant improvement in their academic results. It also serves the teacher for a systematic planning of tasks and of appropriate tools for providing feedback and help to the students.

Keywords: *formative assessment, project based learning, graphics interpretation, Design-based research, secondary level*

INTRODUCCIÓN Y MARCO

El término evaluación formativa es introducido en el año 1967 por M. Scriven para referirse a los procedimientos utilizados por los profesores para adaptar su proceso de enseñanza a los progresos y necesidades de aprendizaje observados en su alumnado. De esta noción se desprende la necesidad de coherencia entre los procedimientos evaluativos y los procesos de enseñanza-aprendizaje.

El aprendizaje matemático se considera actualmente como un proceso de construcción de conocimiento dentro de un contexto social y cultural. La comprensión profunda, la resolución de problemas y el desarrollo del razonamiento matemático, entre otras competencias, se han convertido en las metas de aprendizaje. Esta evolución en las metas de la educación matemática, junto con la comprensión de cómo los alumnos aprenden la materia, no ha venido acompañada en

Benjumeda, F.J., Romero, I. y Zurita, I. (2016). Una propuesta de evaluación formativa para el aprendizaje basado en proyectos en matemáticas. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 515-524). Málaga: SEIEM.

las aulas reales de un transformación acorde en la evaluación. Así, en un número sorprendente de casos, profesores que propugnan una visión constructivista del aprendizaje —evidenciada en la estructura de la lección, las tareas seleccionadas, el respeto por el pensamiento del estudiante y el cuidado en propiciar un ambiente de clase favorecedor de la comunicación matemática—no traducen esta visión en cambios en la selección y calificación de las tareas de evaluación, de tal manera que propicien la valoración de la comprensión de los estudiantes (Webb, 2004). En aras de la coherencia epistemológica entre la evaluación y el resto de elementos del currículum, se demandan nuevas aproximaciones a la evaluación que hagan visibles las formas de pensamiento de los escolares y, al mismo tiempo, incrementen las habilidades del profesorado para evaluarlas.

De acuerdo con Goos (2014), una aproximación socio-constructivista a la evaluación impone demandas al profesorado en cuanto a conocimiento y capacidades, entre las que deben incluirse:

- La formulación de criterios y estándares consistentes con metas curriculares que ponen en valor el pensamiento matemático complejo (contextualización, abstracción, conexión entre conceptos y representaciones), y el uso apropiado de herramientas y lenguaje matemático.
- La realimentación a los escolares "en tiempo real", que permita a éstos avanzar en su aprendizaje de forma continuada.
- El estímulo para que asuman un papel protagonista en sus propios procesos de evaluación.
- La realización de juicios válidos sobre la calidad del desempeño de los escolares en distintos tipos de tareas.

De este modo, la evaluación formativa tiende a difuminar los límites entre instrucción y evaluación, para proporcionar acceso a las formas de pensamiento de los escolares. Ello es posible a través de tareas que admitan distintas respuestas, requieran la aplicación de conocimientos en contexto, y propicien múltiples modos de representación y comunicación para mostrar comprensión. Las tareas de modelización matemática y el trabajo por proyectos proporcionan oportunidades ricas para este tipo de evaluación. En este entorno de aprendizaje, Shepard (2000) señala la necesidad de investigaciones sobre una evaluación dinámica, que proporcione un andamiaje adecuado a los escolares para abordar con éxito este tipo de tareas, al tiempo que los implique en su propia evaluación. Ello puede ayudar a los escolares a familiarizarse con los criterios y estándares con los que se juzgará su aprendizaje, al tiempo que favorece la metacognición y la autorregulación.

Basándonos en estas ideas y llevados por la necesidad de articular un sistema de evaluación coherente con la metodología de Aprendizaje Basado en Proyectos (Benjumeda, Romero y López, 2015), presentamos un experimento de enseñanza llevado a cabo en Secundaria. En un primer ciclo, diseñamos una propuesta para compartir las metas de aprendizaje de un proyecto con los escolares. Dichas metas son utilizadas para diseñar las tareas del proyecto y el examen, y para facilitar, mediante un sistema de semáforos, la autoevaluación de los escolares en cada tarea y la realimentación del profesor. En lo que sigue, presentaremos la metodología y los objetivos del trabajo; la planificación, implementación y observación de la propuesta; los resultados obtenidos; y una reflexión que incluye reajustes del sistema de cara al siguiente ciclo del experimento.

METODOLOGÍA Y OBJETIVOS

Este estudio forma parte de una investigación de diseño que se lleva actualmente a cabo en un Instituto de Enseñanza Secundaria para impartir la asignatura de matemáticas de los dos primeros niveles de ESO. En esta comunicación, presentamos el primer ciclo de un experimento de enseñanza (Confrey & Lachance, 2000), que tiene como objetivo articular un sistema de evaluación formativa para la asignatura de matemáticas, y que se ha llevado a cabo en un grupo de 2º de ESO cuyo profesor es miembro del equipo de investigación junto a dos investigadores de la universidad.

Los experimentos de enseñanza incluyen conjeturas que vinculan las preguntas de investigación con las actividades de los estudiantes en el entorno de clase y facilitan la observación de los comportamientos de éstos en torno a las tareas de aprendizaje y de sus interacciones con compañeros y profesor. A diferencia de las hipótesis, no se espera que las conjeturas se rechacen o se confirmen, sino que se examinen, refinen y modifiquen a lo largo de los sucesivos ciclos del experimento (Prediger et al, 2015). Para este primer ciclo, nuestra conjetura de partida es:

"Es posible diseñar un propuesta de evaluación basada en compartir las metas de aprendizaje con el alumnado al principio de los proyectos y a lo largo de las tareas que los componen. Estas metas proporcionarán una guía para que los estudiantes se autoevalúen cognitivamente, a través de un "sistema de semáforos", y para que el profesor pueda realimentarlos en las sucesivas tareas que constituyen el proyecto. Se espera que este sistema de evaluación facilite al profesor la adaptación de su proceso de enseñanza a los progresos y necesidades de sus alumnos y, por ende, redunde en una mejora del aprendizaje de éstos".

Las preguntas que nos planteamos en esta primera fase son:

(a) Operatividad del sistema para el alumnado: ¿Son capaces los escolares de entender el significado de las metas de aprendizaje y de autoevaluar su progreso a través de ellas? ¿Lo valoran positivamente o, por el contrario, les resulta gravoso y no les compensa? ¿Se apropian de él en alguna medida o lo toman como un mero requisito que hay que cumplir? ¿Lo consideran útil? ¿En qué aspectos?

(b) Operatividad del sistema para el profesor: ¿La información obtenida sirve al profesor para proporcionar una realimentación adecuada? ¿En qué medida el sistema es gravoso y en qué medida compensa? ¿Lo considera útil? ¿En qué aspectos?

(c) ¿Redunda la propuesta de evaluación en una mejora del aprendizaje?

PLANIFICACIÓN

El trabajo desarrollado en la asignatura de matemáticas en el IES El Parador (Almería) en los dos primeros cursos de ESO se integra dentro del sistema interdisciplinar de Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP) del centro. Cada proyecto gira en torno a una temática global en la que el alumnado, organizado en equipos colaborativos, elabora, durante varias semanas, un producto final que suele ser expuesto ante una audiencia amplia o ante expertos. En la asignatura de matemáticas este producto suele desarrollarse a través de tareas abiertas complejas que implican la investigación, la indagación, la resolución de problemas reales auténticos, el diseño de estrategias y/o experimentos, la recogida de datos, el debate, la reflexión, la comunicación de ideas y el uso de las TIC. Además, durante el desarrollo de cada proyecto, se realizan otro tipo de tareas procedimentales y rutinarias que pretenden la asimilación de los contenidos programados de manera individualizada.

La metodología expuesta requiere una evaluación integral del alumnado, continua y formativa, que se adapte a las metas de la propuesta. En este sentido, además del sistema de calificación implantado en el centro, donde se tienen en cuenta aspectos esenciales del ABP como el producto final y el trabajo colaborativo, se ha pretendido dar un paso más con la implantación de una herramienta, el sistema de semáforos, que permita la autoevaluación del alumnado respecto a las capacidades que se espera desarrollen para cada proyecto a lo largo de las tareas que lo componen, facilitando así una comunicación constante con el profesor y un intercambio de información respecto a la consecución de las metas de aprendizaje.

La puesta en práctica del sistema de semáforos se ha llevado a cabo en el proyecto denominado "Ciudad Sostenible", en el que se ha profundizado en aspectos relativos al calentamiento global, las energías sostenibles y un sistema urbanístico y de edificaciones respetuoso con el medio ambiente. En el producto final cada equipo ha expuesto, ante un comité de expertos en la materia, propuestas para reformar su barrio y un modelo de edificio eficientemente energético cuyas características y arquitectura eran presentadas mediante un dosier y una maqueta del mismo.

La temática del proyecto ha permitido trabajar los contenidos de las materias de ciencias, matemáticas y tecnología de manera conjunta, de forma que el alumnado ha realizado tareas donde se utilizaba el concepto de energía, calor o temperatura a través del uso de gráficas y diagramas; o ha realizado planos y maquetas a escala aplicando conocimientos sobre medida, cálculo de áreas y proporcionalidad. Desde la asignatura de matemáticas se han trabajado, por tanto, dos grandes bloques de contenidos: el uso (interpretación y construcción) de funciones, gráficas o diagramas, y el cálculo y estimación de medidas. En esta comunicación, nos centramos en el primer bloque.

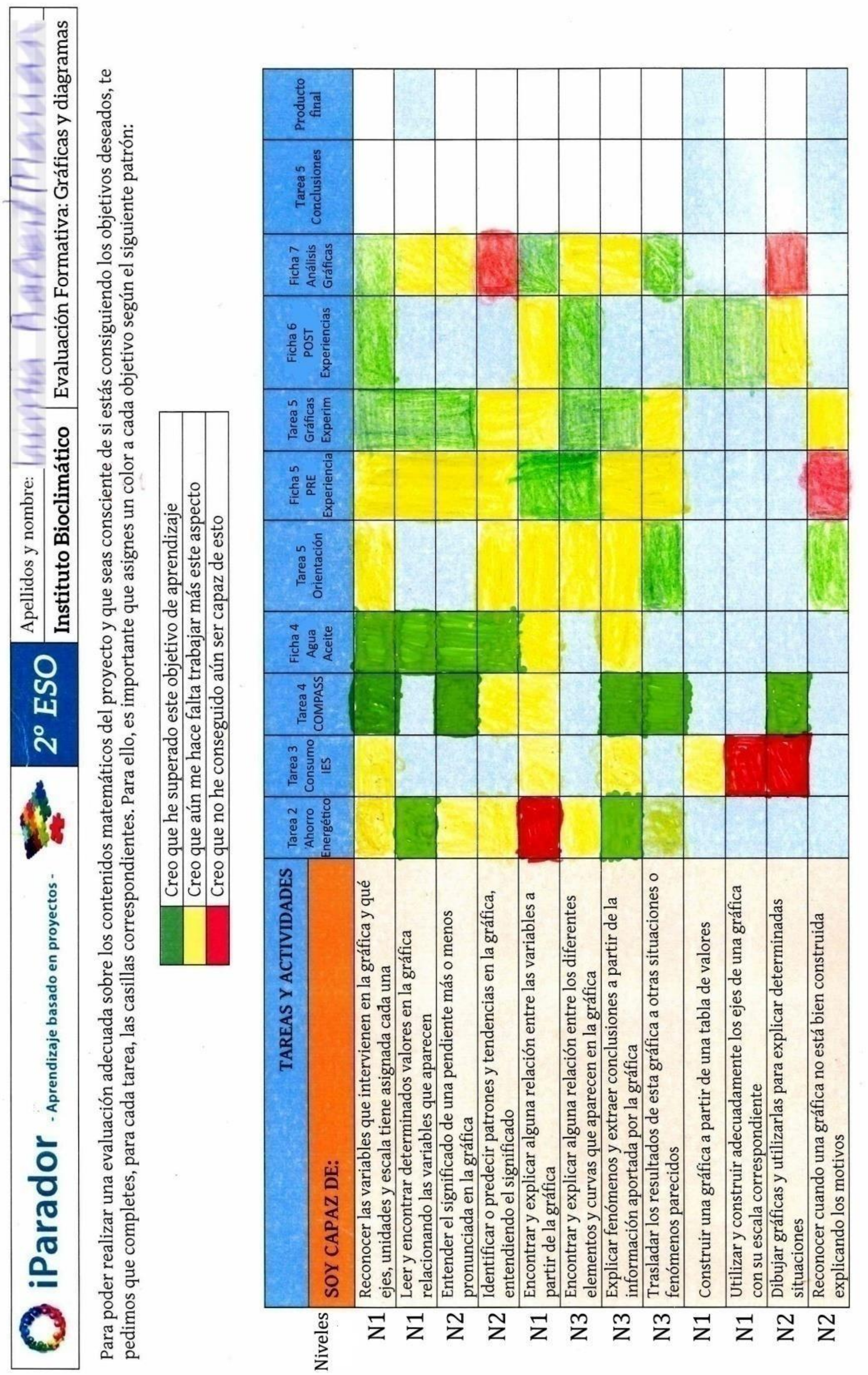


Figura 1. Tabla de evaluación formativa parcialmente completada por un alumno

La Figura 1 presenta la tabla de evaluación formativa rellena por un alumno. Para su elaboración, se parte de los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables establecidos en el currículo de Secundaria para el bloque de Funciones en este nivel (R. D. 1105/2014, de 26 de diciembre). Estos indicadores se completan gracias a una revisión de la literatura (Postigo y Pozo, 2000; Núñez, Banet y Cordón, 2009) que permite, además, clasificar en niveles de complejidad dichas capacidades que, finalmente, son adaptadas a un lenguaje comprensible para los estudiantes.

Para la elaboración de las tareas se tienen en cuenta aquellas capacidades clave del tema, que deben aparecer en la gran mayoría de ellas. A continuación, se completa la tipología de tareas que es necesario desarrollar en esta fase del proyecto atendiendo al resto de capacidades. De esta forma, se construye una secuencia de tareas que busca un equilibrio entre las capacidades que se ponen en juego y las tareas necesarias para desarrollar el producto final de los equipos.

La tabla de evaluación formativa permite al alumnado, no solo conocer el desarrollo de las tareas a lo largo del proyecto, sino también conocer las capacidades a desarrollar en cada una. Para cada tarea, se habilitan únicamente las casillas con las capacidades que se ponen en juego en la misma. De esta forma, y mediante el sistema de semáforos, el alumnado puede colorearlas según su percepción sobre el desarrollo de dicha capacidad. Una casilla verde indica que cree superada esa meta de aprendizaje; amarilla, que considera que debe trabajar más esa capacidad o no está del todo dominada, y roja, que piensa no haberla superado en absoluto. Además, la tabla permite al profesor realizar un análisis en conjunto de las capacidades programadas durante todo el proceso y realizar un seguimiento del progreso en la consecución de éstas por parte del alumnado.

La realimentación de las capacidades no desarrolladas depende de su nivel de complejidad. Para las capacidades de nivel básico, repetidas de forma continuada a lo largo de las tareas, se confía en el avance progresivo durante su desarrollo. No obstante, para el alumnado que no alcance dichas capacidades a mitad del proceso, se prepara un ejercicio tipo que debe ser realizado junto al profesor, permitiendo al docente comprobar su grado de adquisición y las dificultades encontradas. El resto de capacidades son reforzadas mediante las anotaciones realizadas en los ejercicios y tareas, la resolución de las mismas, las explicaciones en clase y la resolución de dudas.

En la figura 2 puede verse un ejemplo de tarea de la secuencia, extraída del proyecto COMPASS (2011). Se trata de una tarea de indagación en la que el alumnado debe predecir, comprobar y explicar lo ocurrido con la temperatura en el interior de una vivienda a través de un applet donde pueden manipularse diferentes variables relacionadas, como la temperatura exterior o el grosor de los muros. En la tabla (Figura 1) pueden verse las capacidades asociadas a dicha tarea.

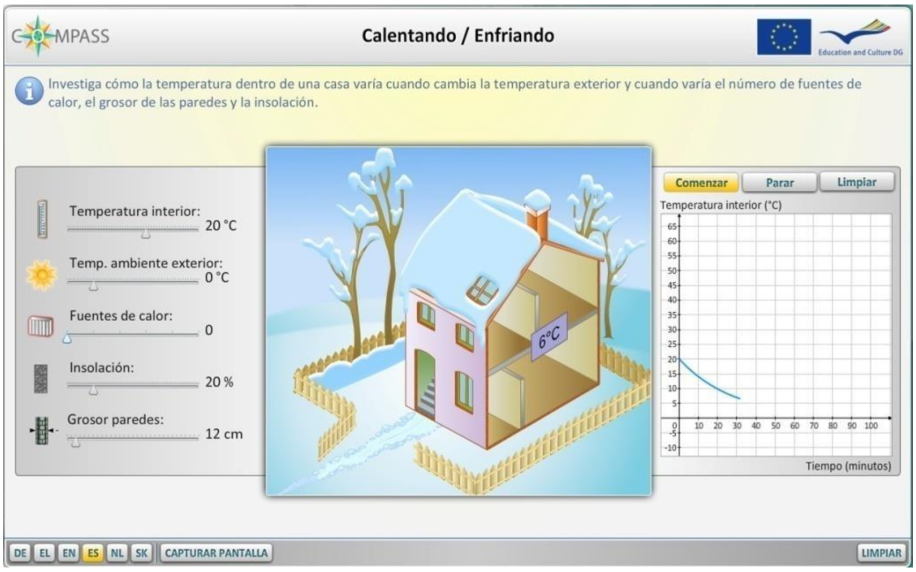


Figura 2. Tarea 4 de la secuencia

Para la elaboración del examen correspondiente a este bloque se parte de las capacidades puestas en juego durante el proyecto. Por un lado, se trata de garantizar que la adquisición de aquellas capacidades consideradas imprescindibles o mínimas sean suficientes para superar la prueba. Por otro lado, se realiza un balance del resto de capacidades y el número de ocasiones en los que se han trabajado a través de las diferentes tareas para confeccionar una prueba acorde a lo exigido durante el proceso. Además, se tienen en cuenta los niveles de complejidad de las distintas capacidades (a la izquierda de la tabla en Figura 1) para adecuar las más complejas al modo en el que han sido trabajadas durante el proyecto, proponiendo problemas semejantes.

IMPLEMENTACIÓN Y OBSERVACIÓN

El sistema se pone en práctica durante el segundo trimestre del curso con una clase de 2º de ESO (12-13 años) formada por 24 alumnos/as. Aunque casi la mitad de su alumnado tiene importantes carencias a nivel cognitivo y de hábitos de estudio, la mayoría están adaptados a esta metodología de trabajo por proyectos y el clima de trabajo en el aula es favorable para el debate y la comunicación. Para el desarrollo del proyecto, la clase se divide en seis equipos heterogéneos de cuatro miembros cada uno, donde se mezcla alumnado de diferente tipología.

Tras exponer el proyecto y el producto final, se dedica una sesión completa a presentar al alumnado la tabla de evaluación formativa y su funcionamiento. En primer lugar, se hace especial hincapié en la importancia de su sinceridad y se les explica que el objetivo de la tabla no es otro que enseñarles qué se pretende que aprendan y poder darles una realimentación frecuente sobre sus necesidades de aprendizaje. El funcionamiento mediante un sistema de semáforos permite al alumnado comprender rápidamente la mecánica para rellenar la tabla respecto a las capacidades incluidas. Por último, se explican cada una de las capacidades utilizando como modelo la primera tarea de la secuencia (ya completada por el alumnado y corregida). De esta forma, para cada ítem se utilizan ejemplos concretos de la tarea que ponen en juego cada capacidad y lo que supondría rellenar con un color rojo, amarillo o verde. Tras explicar cada una de las capacidades se da un poco de tiempo para que el alumnado pregunte sus dudas y rellene la casilla correspondiente.

Durante las siguientes tareas, siempre tras su finalización y antes de ser corregida y analizada por el profesor, se hace entrega de la tabla al alumnado para que sea rellenada con su percepción del grado en que han desarrollado las capacidades correspondientes, expresado mediante el sistema de semáforos. Durante la corrección de cada tarea, el profesor realiza las anotaciones correspondientes en aquellos apartados en los que se cometen errores, indicando a qué capacidad corresponden y explicando en qué consiste el error. Posteriormente, se realiza un análisis de la tarea más detallado y haciendo una valoración idéntica a la del alumnado (utilizando el sistema de semáforos) sobre el grado de adquisición de las capacidades implicadas ésta. De esta forma, se establece un contraste entre la percepción del alumnado sobre cada capacidad y su consecución real en el desarrollo de cada tarea. Además, esta valoración permite señalar aquellos estudiantes que necesitan algún tipo de realimentación.

La toma de datos a lo largo de la implementación se lleva a cabo mediante los siguientes instrumentos: las tablas de semáforos rellenas por el alumnado a lo largo de esta fase del proyecto (Figura 1) y las rellenadas por el profesor tras la corrección de cada tarea; una entrevista semiestructurada a una muestra de seis alumno/as de diferente perfil en cuanto a rendimiento, implicación y participación en el proyecto o mejora en su actitud respecto a experiencias anteriores; un cuestionario de opinión del alumnado (basado en las respuestas a la entrevista, en el que se tratan diferentes aspectos relacionados con el sistema y su funcionamiento: utilidad, modos de uso, facilidad en la comprensión y manejo, y posibles mejoras); las calificaciones de los exámenes de matemáticas correspondientes a esta sección y al proyecto anterior a la implantación de las novedades en el sistema de evaluación explicitadas; y una sesión de debate con el grupo clase.

RESULTADOS

A continuación, se presentan los resultados obtenidos triangulando los datos recogidos mediante los distintos instrumentos, organizados en torno a las preguntas de investigación.

Operatividad del sistema para el alumnado

De la triangulación de los instrumentos empleados para recabar las opiniones del alumnado sobre el sistema de evaluación, se obtuvieron los siguientes resultados:

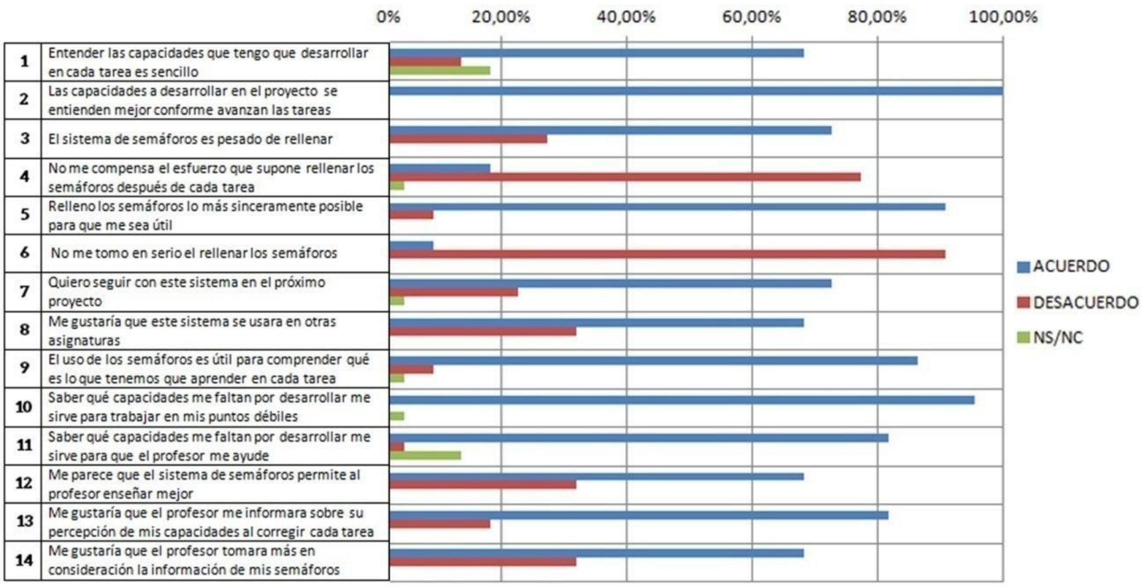


Figura 3. Resultados del cuestionario

Según se desprende del cuestionario (Figura 3, ítems 1 y 2), la comprensión de las capacidades resulta asequible para la mayoría de la clase y la totalidad reconoce que éstas se entienden mejor conforme se avanza en las tareas. Además, del contraste realizado entre la autoevaluación del alumnado y la percepción del profesor a lo largo de todo el proyecto (Figura 4), puede deducirse que la mayoría realiza una autoevaluación bastante acorde con sus resultados en las metas de aprendizaje. Dicho contraste tiene en cuenta si el alumnado se ha valorado por debajo (inferior), por encima (superior), o en consonancia con el profesor (igual) en cada una de las capacidades puestas en juego en esta fase del proyecto. Puede comprobarse que la mayoría de la clase tiene altos niveles de coincidencia en su valoración con respecto a la del profesor.

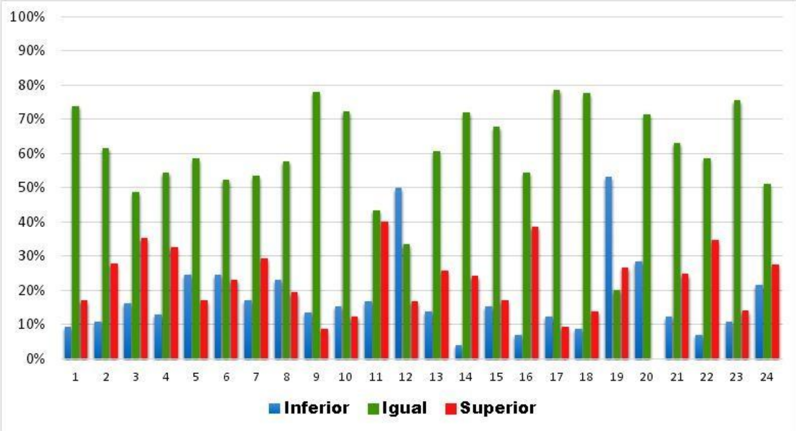
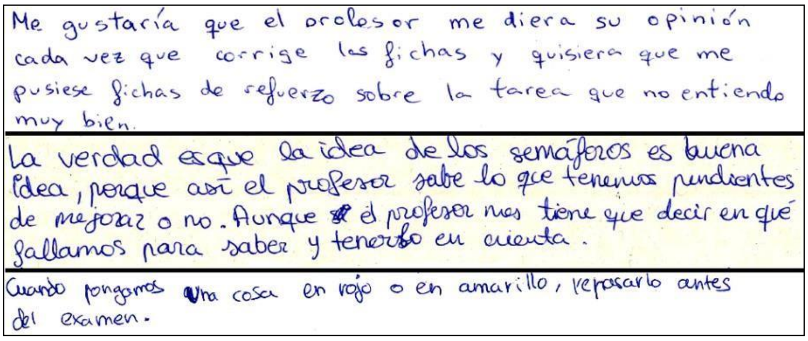


Figura 4. Resultados del contraste entre valoraciones del alumnado y el profesor

Aunque a muchos el sistema les parece pesado de rellenar, un porcentaje aún mayor reconoce que le compensa el esfuerzo que supone (Figura 3, ítems 3 y 4). Más aún, casi el 91% de la clase afirma que se lo toman en serio y que rellenan la tabla de forma sincera para que les sea útil (Figura 3, ítems 5 y 6), lo que indicaría que el alumnado ha hecho suyo el sistema y lo reconoce como una herramienta que favorece su aprendizaje. De hecho (Figura 3, ítems 7 y 8), un alto porcentaje (73%) desea continuar utilizándolo en futuros proyectos y lo aplicaría también en otras asignaturas (68%).

Respecto a la utilidad del sistema, cabe destacar algunos aspectos en los que el alumnado considera relevante su uso. Afirman que les ayuda a comprender qué es lo que se pretende que aprendan en cada tarea (Figura 3, ítem 9) lo cual repercute en que la hagan mejor, como afirma una alumna entrevistada: "si sabemos lo que tenemos que entender, también sabemos un poco mejor cómo hay que hacerlo". En este sentido, en el debate en clase, la mayoría opinaba que les era más útil conocer las capacidades implicadas en cada tarea a priori, por lo que sería más adecuado entregar la tabla de evaluación simultáneamente, y no una vez terminada y corregida por el profesor.

Además, el sistema les permite trabajar en sus puntos débiles conforme avanza el proyecto (Figura 3, ítem 10). Para ello, uno de los aspectos fundamentales es la ayuda del profesor (Figura 3, ítem 11), del que se solicita tome más en consideración la información ofrecida por el alumnado a través de los semáforos (Figura 3, ítems 13 y 14). Se requiere una retroalimentación que permita al alumnado contrastar su percepción con la del profesor al corregir la tarea, además de las correspondientes medidas necesarias como el uso de fichas de refuerzo o repetir las explicaciones de aquellas capacidades que se han coloreado en rojo o amarillo (Figura 5).


Me gustaría que el profesor me diera su opinión cada vez que corrige las fichas y quisiera que me pusiese fichas de refuerzo sobre la tarea que no entiendo muy bien.

La verdad esque la idea de los semáforos es buena idea, porque así el profesor sabe lo que tenemos pendientes de mejorar o no. Aunque el profesor nos tiene que decir en qué fallamos para saber y tenerlo en cuenta.

Cuando pongamos una cosa en rojo o en amarillo, repasarlo antes del examen.

Figura 5. Algunos comentarios del alumnado en el cuestionario

No obstante, el conocimiento de las capacidades a reforzar ha provocado en el alumnado el interés por resolver sus carencias buscando nuevos cauces alternativos al profesor, tal y como afirma uno de ellos: "cuando no entiendo una actividad, le pregunto también por correo a mi primo mayor que va a la Universidad y me ayuda en algunas cosas". O solicitando la ayuda del propio equipo:

E: ¿Y sólo os ayuda el maestro o entre vosotros también usáis esto para ayudaros?

A1: Nos ayudamos también los del grupo.

E: ¿Cómo lo usáis los del grupo?

A1: Pues, no se... Por ejemplo, yo tengo una duda y ellos me lo explican. Y el resto de los compañeros del grupo, igual.

Operatividad del sistema para el profesor

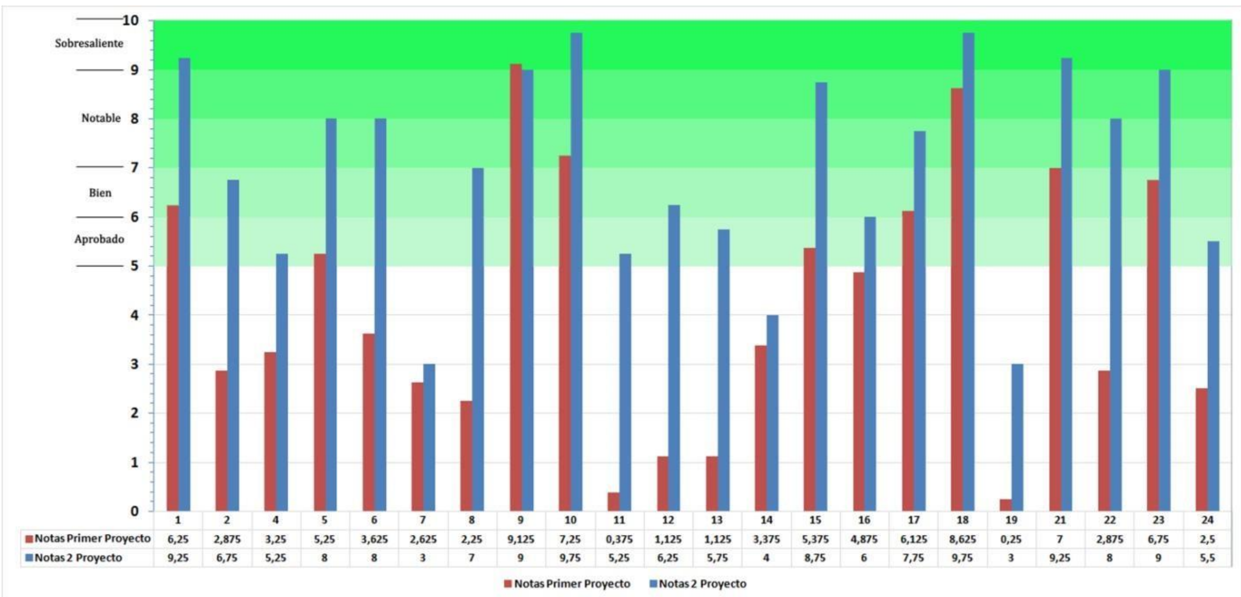
En el cuestionario se refleja también la percepción del alumnado de que este sistema permite al profesor enseñar mejor (Figura 3, ítem 12). Un uso adecuado de la tabla de evaluación formativa permite al profesorado obtener importante información respecto a qué están aprendiendo sus estudiantes y sobre la percepción que ellos tienen de estar haciéndolo. Este intercambio de información es muy útil para articular medidas que permitan intervenir en el proceso de enseñanza para solventar las necesidades y dificultades detectadas.

Aunque el sistema requiere un análisis más exhaustivo de las tareas que la simple corrección de éstas, la exposición de las metas de aprendizaje y una adecuada realimentación parece que consiguen implicar más al alumnado y ayudarle a superar sus dificultades y puntos débiles, haciendo más sencilla la detección de las necesidades de cada uno/a y permitiendo la intervención del profesor de una manera más efectiva, atendiendo así a la diversidad de forma real.

Por otro lado, el reconocimiento de las metas de aprendizaje y conocer con detalle las capacidades que se desea alcancen a lo largo del proyecto, dentro de cada bloque de contenidos, facilita al profesor la planificación sistemática de las tareas y una apropiada secuenciación de éstas.

Mejora en el aprendizaje

Los resultados de la prueba escrita han sido muy satisfactorios, con sólo un 17% del alumnado por debajo del aprobado (5). Además, en contraste con las notas de los exámenes y el proyecto anterior, los resultados son también concluyentes, ya que dichas calificaciones igualan o mejoran, en todos los casos, resultados anteriores, algunos de manera considerable (Figura 6). Puede observarse como nueve de los veinticuatro estudiantes pasan de notas inferiores al 4 a superar el aprobado o incluso alcanzan una calificación de bien o notable (entre 6 y 8).



	1	2	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	21	22	23	24
Notas Primer Proyecto	6,25	2,875	3,25	5,25	3,625	2,625	2,25	9,125	7,25	0,375	1,125	1,125	3,375	5,375	4,875	6,125	8,625	0,25	7	2,875	6,75	2,5
Notas 2 Proyecto	9,25	6,75	5,25	8	8	3	7	9	9,75	5,25	6,25	5,75	4	8,75	6	7,75	9,75	3	9,25	8	9	5,5

Figura 6. Notas del alumnado en la pruebas escritas

En las entrevistas mantenidas, todos atribuyen la mejora de las calificaciones al hecho de "haber trabajado más" o "haberse puesto las pilas" con este proyecto. Aunque no vinculan directamente las mejoras con el sistema de semáforos, sí mencionan que al conocer sus carencias se han esforzado para suplirlas por diversos medios (ayuda del profesor, de los compañeros, de familiares y profesores particulares; búsqueda de información en internet…). Como afirma un alumno:

E: Este sistema de los semáforos, ¿a ti te parece que tiene alguna utilidad?

A2: Si tiene utilidad, porque me doy cuenta de lo que está bien y lo que está mal en lo que hago.

E: Y una vez que te das cuenta, ¿qué haces?

A2: Intento mejorar... Intento practicar más esa cosa si veo que me sale peor, porque si no tuviese esto, yo no me hubiese dado cuenta que esto lo tengo amarillo o esto verde, y así me ayuda.

CONCLUSIONES

En esta comunicación se ha presentado una propuesta de evaluación que permite compartir las metas de aprendizaje con el alumnado a través de un sistema de semáforos. Este mecanismo de intercambio de información posibilita, por una parte, que éste conozca las capacidades que se ponen en juego en cada tarea y proyecto, y por otra, que se autoevalúe con respecto a ellas. Esto ofrece al alumnado la oportunidad de reconocer sus puntos débiles y buscar herramientas para reforzarlos, tanto dentro como fuera del aula. Para ello, es importante que se produzca una adecuada realimentación entre su percepción y la valoración del profesor una vez corregida la tarea y que exista una contrapartida para aquellas capacidades que no se han superado. Tal y como se ha puesto de manifiesto, es necesario articular mecanismos, por parte del profesor, para que el sistema le permita adaptarse de una manera real a los progresos y necesidades de sus alumnos.

Para próximos diseños, se incluirán algunas modificaciones que han aparecido como posibles mejoras del sistema en esta comunicación: (a) dada la importancia que tiene para el alumnado conocer las metas de aprendizaje, la tabla de valoración será entregada junto a la propia tarea, de forma que puedan ir evaluando y resolviendo sus dudas conforme la realizan. (b) Además, se incluirá una casilla contigua a la del alumnado en la que se refleje la valoración del profesor, una vez corregida y analizada la tarea, respecto de aquellas capacidades en las que no existe concordancia entre ambos. (c) Dicha discordancia deberá ir, además, acompañada de los motivos y de las correspondientes medidas para "ajustar" el logro de las mismas. (d) En este sentido, es necesario realizar una secuencia clara de las tareas a desarrollar, así como de las posibles dificultades que aparezcan, para permitir al profesor prever herramientas que posibiliten reforzar dichas necesidades (confección de fichas de refuerzo, nuevas explicaciones, la ayuda de otros compañeros, uso de las TIC, etc.). (e) Esta secuenciación, además, debe clarificar los momentos clave del proyecto para que el uso de la tabla tenga una efectividad real, mejorando así su funcionalidad y señalando los momentos apropiados de intervención.

Referencias

Benjumeda, F. J., Romero, I., y López-Martín, M. M. (2015). Alfabetización matemática a través del aprendizaje basado en proyectos en secundaria. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), Investigaciones en educación matemática XIX (pp. 163-172). Alicante: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Compass project (2011). *Compass project* [Código 503635-LLP-1-2009-1-DE-COMENIUS-CMP]. Unión Europea. En http://www.compass-project.eu/

Confrey, J., & Lachance, A. (2000). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. In A.E. Kelly & R.A. Lesh (Eds.), Handbook of research design in mathematics and science education (pp. 231-307). London: Lawrence Erlbaum Associates.

Goos, M. (2014). Mathematics classroom assessment. En S. Lerman (Ed.), Encyclopedia of Mathematics Education (pp. 413-417). Dordrecht, Holanda: Springer.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria y el Bachillerato. BOE, 3, 169-546.

Núñez, F., Banet Hernández, E., Cordón Aranda, R. (2009). Capacidades del alumnado de educación secundaria obligatoria para la elaboración e interpretación de gráficas. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(3), 447-462.

Postigo, Y., Pozo, J. I. (2000). Cuando una gráfica vale más que 1.000 datos: la interpretación de gráficas por alumnos adolescentes. Infancia y Aprendizaje, 90, 89-110.

Prediger, S., Gravemeijer, K. & Confrey, J. (2015). Design research with a focus on learning processes: an overview on achievements and challenges. *ZDM*, 47(6), 877-891.

Scriven, M. (1967). The methodology of evaluation. En R. Tyler, R. Gagne y M. Scriven (Eds.), Perspectives on curriculum evaluation (pp. 39-83). Chicago: Rand McNally and Co.

Shepard, L. (2000). The role of assessment in a learning culture. *Educational Researcher*, 29(7), 4–14.

Webb, N. M. (2004). *Classroom Assessment as a Research Context: Variations on a Theme of Pedagogical Decision Making*. Trabajo presentado en ICME 10 – TSG 27: Internal Assessment, Copenhagen. Disponible en http://tinyurl.com/ol7bu7c.

APROXIMACIÓN A LA PROBABILIDAD EN EL AULA DE EDUCACIÓN PRIMARIA. UN ESTUDIO DE CASO SOBRE LOS PRIMEROS ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS[xiii]

Approach to the probability in the Primary Education classroom. A case study about first linguistic elements

Vásquez-Ortiz, C.[a] y Alsina, A.[b]

[a]Pontificia Universidad Católica de Chile, [b]Universidad de Girona

Resumen

El lenguaje desempeña un rol fundamental en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, especialmente de la probabilidad, debido a la estrecha relación existente entre las expresiones de uso común y el lenguaje de corte matemático o probabilístico. En este trabajo se presenta un análisis de los primeros elementos lingüísticos vinculados al lenguaje probabilístico presentes en dos sesiones de clase de un segundo curso de Educación Primaria de una escuela chilena. Para ello, nos hemos centrado en cuatro grandes focos que promueven el lenguaje probabilístico y el desarrollo de la alfabetización probabilística: lenguaje verbal, lenguaje numérico, lenguaje tabular y lenguaje gráfico. Los resultados muestran un fuerte predominio de términos y expresiones verbales provenientes del lenguaje común vinculadas principalmente al significado intuitivo de la probabilidad, que transitan hacia conceptos de corte probabilístico.

Palabras clave: *probabilidad, lenguaje tabular, lenguaje numérico, aproximación a la probabilidad.*

Abstract

Language plays a fundamental role in the teaching and learning of mathematics due to the close relationship between expressions of common use and mathematical or probabilistic language style, especially about probability. This work shows an analysis of the first linguistic elements related to probabilistic language present in two second grade classes of a Chilean Primary Education school. To carry out this, we have focused on four major sources that promote probabilistic language and the development of probabilistic literacy: verbal language, numerical language, tabular language and graphic language. Results show a strong predominance of words and verbal expressions from common language, mainly linked to intuitive meaning of probability, and which move towards probabilistic concepts.

Keywords: *probability, tabular language, numerical language, approach to probability..*

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas se observa una fuerte tendencia por incorporar la probabilidad en los currículos de Educación Primaria, con el objeto de promover que los alumnos aprendan conocimientos probabilísticos que les sirvan de base para la recogida, descripción e interpretación de datos. En definitiva, se trata de ofrecerles herramientas que faciliten la toma de decisiones en situaciones en las que la incertidumbre es relevante, para que progresivamente sean ciudadanos bien informados y consumidores inteligentes. Es en este contexto que la probabilidad es considerada como “una excelente oportunidad para mostrar a los alumnos cómo matematizar, cómo aplicar la

Vásquez, C., y Alsina, A. (2016). Aproximación a la probabilidad en el aula de Educación Primaria. Un estudio de caso sobre los primeros elementos lingüísticos. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 525-534). Málaga: SEIEM.

matemática para resolver problemas reales" (Godino, Batanero y Cañizares, 1997, p. 12). Por tanto, surge la necesidad de educar a los alumnos en esta área desde temprana edad, para así, contar con ciudadanos alfabetizados probabilísticamente "capaces de hacer frente a una amplia gama de situaciones del mundo real que implican la interpretación o la generación de mensajes probabilísticos, así como la toma de decisiones" (Gal, 2005, p. 40).

En este sentido, el *National Council of Teachers of Mathematics* incluyó a "Datos y Azar" como área temática en *Curriculum and Evaluation Standard for School Mathematics* (NCTM, 1989), y posteriormente se reforzó esta iniciativa en *Principles and Standard for School Mathematics* (NCTM, 2000), los cuales enfatizan la necesidad de contar con programas de enseñanza orientados a capacitar a los alumnos para aprender conocimientos relacionados con el análisis de datos y probabilidad a partir del nivel Pre-K (tres años). Esta tendencia se ha reflejado en los currículos de matemáticas de muchos países, entre ellos Chile, que ha incorporado la probabilidad en Educación Primaria con el fin de proporcionar a los alumnos una experiencia estocástica desde las primeras edades (Mineduc, 2012). Es así como, producto de esta necesidad científica, profesional y social, Chile ha incluido en las Bases Curriculares (2012) el estudio de la probabilidad a lo largo de todo el currículo escolar, con el propósito de que "todos los alumnos se inicien en temas relacionados con las probabilidades" (Mineduc, 2012, p. 5), y de este modo cumplir con parte de los objetivos generales propuestos en la Ley General de Educación (2009) para la Educación Básica, referidos explícitamente a que

> "los educandos desarrollen los conocimientos, habilidades y actitudes que les permitan: pensar en forma reflexiva, evaluando y utilizando información y conocimientos, de manera sistemática y metódica, para la formulación de proyectos y resolución de problemas; comprender y utilizar conceptos y procedimientos matemáticos básicos en la resolución de problemas cotidianos, y apreciar el aporte de la matemática para entender y actuar en el mundo" (Mineduc, 2009, LGE, artículo 29, p. 10).

Un aspecto clave para asegurar que estas nuevas propuestas curriculares tengan éxito es la formación del profesorado, pues la mayoría de los maestros de Educación Primaria tienen poca o ninguna preparación sobre probabilidad y su didáctica (Vásquez y Alsina, 2015). De acuerdo con Gómez, Batanero, Contreras, J.M. y Fernándes (2012), es primordial que el profesorado cuente con herramientas que les permitan abordar el proceso de enseñanza de la probabilidad. En nuestro caso, consideramos que la formación inicial y permanente del profesorado, sobre todo de las primeras etapas educativas, es de vital importancia, por lo que es necesario que estos dispongan de los conocimientos necesarios para promover el desarrollo de la alfabetización probabilística a partir de nociones básicas, abordadas de manera informal en los primeros niveles. En estas situaciones informales es fundamental el lenguaje probabilístico asociado a situaciones problemáticas centradas en los juicios que emiten los alumnos con base en sus propias experiencias, pues es a partir del lenguaje informal y cotidiano que los alumnos desarrollarán, paulatinamente, un razonamiento más abstracto y cuantitativo que permitirá transitar hacia la construcción de un conocimiento probabilístico de un nivel de abstracción mayor, y de este modo avanzar hacia el desarrollo de la alfabetización probabilística (Gal, 2005).

Este estudio que se enmarca en otro de mayor envergadura, busca dar mayor claridad respecto de cómo alcanzar una comprensión en profundidad de la naturaleza y las características del conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad en el aula de Educación Primaria. Es en este contexto que la investigación que aquí presentamos se centra en describir y analizar cómo emergen los primeros elementos lingüísticos en el desarrollo de dos clases introductorias de probabilidad con alumnos de Educación Primaria que no han recibido instrucción previa sobre este tema.

Para ello, se ha optado por realizar un estudio exploratorio, por medio de la observación no participante, durante un proceso de instrucción con un grupo de alumnos de segundo curso de Educación Primaria (años 7-8 años) que contempla el análisis de un proceso de enseñanza-aprendizaje de la probabilidad. En concreto, se analiza la multiplicidad de términos, expresiones orales y escritas, símbolos y representaciones (tablas y gráficos) que se usan cuando se pretende que los alumnos aprendan gradualmente la noción de probabilidad y adquieran el respectivo lenguaje probabilístico asociado, sin haber recibido instrucción previa sobre el tema.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

El lenguaje probabilístico: un soporte para la alfabetización probabilística

Como parte de la matemática, la probabilidad no ha estado exenta de desafíos que, en su búsqueda por dar respuesta a situaciones problemáticas, han contribuido a su desarrollo, fundamentando lo que hoy conocemos como la *Teoría de la Probabilidad* (Batanero, Henry y Parzyz, 2005). A lo largo de su desarrollo histórico, se observan distintos significados vinculados a su interpretación que en la actualidad coexisten y son estudiados, con mayor o menor énfasis, en el contexto de la matemática escolar: significado intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo y axiomático (Fine, 1971). En lo que respecta al tratamiento de la probabilidad en el currículo chileno se observa un fuerte predominio del significado intuitivo sobre todo en los primeros niveles educativos, que enfatiza el trabajo con situaciones cotidianas en las que emergen o están presentes los conceptos posible, seguro, imposible, etc., para luego continuar con un enfoque frecuentista de la probabilidad el cual permitirá que los alumnos complementen gradualmente estos significados con los demás (Vásquez y Alsina, 2014). De ahí la importancia de centrarse en describir y analizar cómo emergen los primeros elementos lingüísticos, sobre todo si consideramos que en muchas ocasiones “utilizar el lenguaje matemático puede ser una barrera para el aprendizaje de los alumnos debido a los requerimientos y convenciones específicas necesarias para expresar los conceptos matemáticos” (Lee, 2010, p. 19). Por tanto, dado el estrecho vinculo existente entre las expresiones de uso común y el lenguaje probabilístico, es que los primeros elementos lingüísticos que sustentan dicho lenguaje resultan ser un elemento fundamental para el estudio de la probabilidad en los primeros niveles educativos.

En relación con los primeros elementos lingüísticos vinculados a la probabilidad, en este trabajo se asume que se trata de la parte ostensiva de una serie de conceptos, proposiciones y procedimientos que intervienen en la elaboración de argumentos al resolver situaciones-problemas, representar por medio de objetos concretos aquéllos más abstractos, posibilitando una correspondencia semiótica entre objeto representante y representado (Font y Godino, 2006). Para su análisis nos situamos, principalmente, en la perspectiva del significado intuitivo de la probabilidad, dado que de acuerdo con los *Principles and Standard for School Mathematics* (NCTM, 2000) y con las orientaciones curriculares chilenas para la Educación Primaria (Mineduc, 2012), en las primeras edades (5 a 8 años) las ideas probabilísticas deben ser tratadas de manera informal. En estas edades, los alumnos usan lenguaje cotidiano e informal propio que les permita introducir y resaltar nociones de probabilidad necesarias para avanzar progresivamente hacia una comprensión y aplicación de conceptos básicos de la probabilidad. Es por esta razón, que el significado intuitivo de la probabilidad constituye un elemento central y de base en las primeras edades, ya que se refiere a aquellos términos de uso común para referirse a la incertidumbre y expresar por medio de frases coloquiales la cuantificación y el grado de creencia en relación con sucesos inciertos (posible, previsible, presumible, probable, factible, viable, etc.).

De acuerdo con los componentes básicos del modelo de alfabetización probabilística (Tabla 1) propuesto por Gal (2005), consideramos que este lenguaje cotidiano e informal vinculado al significado intuitivo de la probabilidad constituye un elemento de base para construir una conexión con el lenguaje probabilístico, que permitirá que los alumnos comiencen a utilizar un lenguaje preciso y especializado para expresar de forma cualitativa la probabilidad de ocurrencia de un determinado suceso.

Tabla 1. Componentes básicos del modelo de alfabetización probabilística.

Elementos de conocimientos	Elementos disposicionales
Grandes ideas de probabilidad: variabilidad, aleatoriedad, independencia, predicción/incertidumbre.	Postura crítica
	Creencias y actitudes
Asignación de probabilidades: diversas maneras para encontrar o estimar la probabilidad de ocurrencia de un	Sentimientos personales para el

evento. Lenguaje: términos y métodos para comunicar el azar. Contexto: comprensión del rol e impacto de la probabilidad en diversos eventos y procesos. Preguntas críticas: incorporación de temas que permitan reflexionar y evaluar la calidad de la información proveniente de diversos contextos en que la probabilidad se encuentra presente.	desarrollo de un apostura positiva hacia la información probabilística.

Por tanto, a partir de lo propuesto por Gal (2005) y de acuerdo con Gómez, Ortiz, Batanero y Contreras (2013), es posible distinguir cuatro grandes focos en la adquisición del lenguaje probabilístico -entendido este como un lenguaje especializado para comunicar el azar- que los alumnos requieren desarrollar para una comprensión adecuada de la probabilidad como una progresión de sus intuiciones probabilísticas:

- Lenguaje verbal: se refiere a la diversidad de términos y expresiones verbales. Dentro de este tipo de lenguaje es posible distinguir tres categorías (Shuard y Rothery, 1984): a) expresiones verbales específicas que no forman parte del lenguaje común; b) expresiones vinculadas a contextos matemáticos y cotidianos, pero no siempre con el mismo significado; y c) expresiones comunes y con significados muy próximos tanto en el contexto matemático como cotidiano.
- Lenguaje numérico: se asocia a la cuantificación de la posibilidad de ocurrencia de un determinado suceso y a la comparación de probabilidades. Dadas sus características se vincula con el significado clásico de la probabilidad.
- Lenguaje tabular: se refiere a la utilización de tablas para la representación de datos. Se utiliza principalmente para la presentación de frecuencias relativas y en la estimación de probabilidades a partir de ellas. Este tipo de lenguaje se encuentra fuertemente vinculado al significado frecuentista de la probabilidad.
- Lenguaje gráfico: se relaciona con la diversidad de representaciones graficas ligadas a conceptos probabilísticos y que son utilizadas en estimaciones de probabilidades, como por ejemplo: pictogramas, diagramas de barra y diagramas de árbol. Este tipo de lenguaje, al igual que el anterior, está vinculado con el significado frecuentista de la probabilidad.

Estos tipos de lenguaje desempeñan un rol fundamental en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, especialmente de la probabilidad, debido a la estrecha relación existente entre las expresiones de uso común y el lenguaje de corte matemático o probabilístico.

MÉTODO

Se registraron en vídeo dos sesiones de clase de 90 minutos de un segundo curso de primaria de una escuela chilena. En el estudio han participado 20 alumnos cuyas edades fluctúan entre los 7 y 8 años, y que no han recibido instrucción previa sobre el tema. El maestro a cargo de las sesiones de clase es maestro de primaria con especialización en matemática, tiene 5 años de experiencia en aula y es reconocido por sus pares y alumnos por la buena calidad de sus clases y el dominio del contenido que enseña. Cabe señalar que este maestro ha realizado durante los últimos años cursos de formación permanente orientados a la enseñanza de la estadística y probabilidad en la Educación Primaria.

Para describir cómo emergen estos primeros elementos lingüísticos ligados al lenguaje probabilístico, hemos realizado un análisis de corte cualitativo que consideró los siguientes pasos:

- Transcripción de las clases grabadas en vídeo.
- Identificación de episodios de las clases (a partir de la transcripción) en los que se aborden términos, expresiones orales y escritas, símbolos y representaciones (tablas y gráficos) asociados a la probabilidad, que constituyen las unidades de análisis.

- Categorización de los diversos términos, expresiones orales y escritas, símbolos y representaciones (tablas y gráficos) asociados a la probabilidad.
- Descripción de cómo los alumnos de primaria construyen la noción de probabilidad y adquieren un lenguaje probabilístico a partir del uso de diversos términos, expresiones orales y escritas, símbolos y representaciones (tablas y gráficos).

RESULTADOS

A continuación se presenta un resumen de los resultados del análisis para cada uno de los focos considerados en este estudio.

Lenguaje verbal

Al inicio de la case el maestro propone un conjunto de situaciones en las que está presente la incerteza, en el sentido de que, aun existiendo algunos patrones de comportamiento, resulta imposible predecir una situación futura con toda seguridad. Una de las situaciones propuesta es la siguiente: *"Supongamos que nos interesa saber si mañana tendremos un día soleado"* y luego les solicita que expresen qué tan posible es que esto suceda. Algunos alumnos señalan que la respuesta "depende de muchos factores" como por ejemplo el clima del lugar, la estación del año, el tiempo del día de hoy, etc. En este momento el maestro hace hincapié en que estos "factores" pueden llevar a asignar distintos grados de posibilidad de ocurrencia de este suceso, y es aquí donde plantea ciertos posibles escenarios, para situar sus respuestas. Por ejemplo: *"Si estos últimos días han sido lluviosos y nos encontramos en el mes de junio, ¿será posible que mañana sea un día soleado?"*
Luego, el maestro pide a los alumnos que hagan algunas predicciones, con el objeto de que identifiquen diferentes grados de posibilidad de que ocurra un determinado suceso y posteriormente, con base en la diversidad de expresiones dadas por los propios alumnos, llegar a establecer una escala cualitativa que permita valorar las oportunidades de ocurrencia de un conjunto de situaciones dado. De este modo, a partir de diversas suposiciones de contextos diversos comienzan a emergen los primeros elementos lingüísticos por medio de expresiones tales como imposible, más posible, menos posible, etc. Lo que lleva a que los alumnos guiados por el maestro identifiquen diferentes grados de posibilidad de ocurrencia de un suceso que pueden ir desde lo imposible hasta lo seguro (Figura 1).

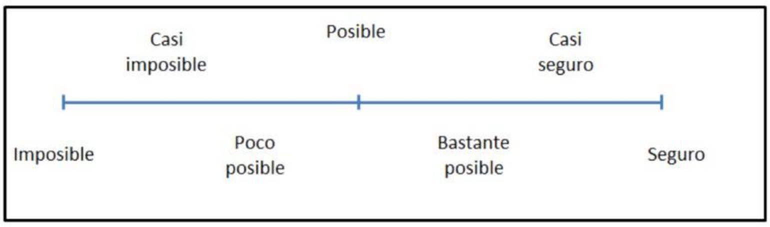


Figura 1. Grados de posibilidad de ocurrencia de un suceso.

Una vez establecida la escala que va desde lo imposible hasta lo seguro, el maestro solicita a los alumnos proponer situaciones que provengan de experiencia de vida cotidiana y clasificarlas y ubicarlas de acuerdo con su grado de posibilidad de ocurrencia en el *"tablero de las posibilidades"*, las cuales posteriormente son compartidas y discutidas con sus compañeros quienes a partir de la discusión grupal consensuan una clasificación de acuerdo con la escala cualitativa de posibilidad de ocurrencia (Figura 2).

Figura 1. Trabajando con el “tablero de posibilidades”

Esta tarea implica que los alumnos usen una diversidad de términos y expresiones verbales vinculadas a nociones y conceptos básicos iniciales de probabilidad, los cuales hemos categorizado (Tabla 2) de acuerdo con Shuard y Rothery (1984) quienes clasifican las expresiones utilizadas en la enseñanza de la matemática en:

- Expresiones verbales específicas de las matemáticas: son aquellas expresiones que no forman parte del lenguaje común y corresponden más bien a un lenguaje técnico de las matemáticas.
- Expresiones verbales vinculadas a las matemáticas: son expresiones que se utilizan tanto en el contexto matemático como en el cotidiano, pero no siempre tienen el mismo significado en ambos contextos.
- Expresiones verbales comunes: expresiones que tienen el mismo significado o significados muy próximos tanto en el contexto matemático como en el cotidiano.

Tabla 2. Términos y expresiones verbales presentes en la primera sesión analizada.

Expresiones verbales específicas	Expresiones verbales vinculadas	Expresiones verbales comunes
Suceso	Seguro	Suerte
Evento	Acertar	Más posible
Aleatorio	Azar	Menos posible
Experimento	Imposible	Adivinar
Probabilidad	Estimar	Sin querer
	Anticipar	Casualidad
	Juegos de azar	Conocer el resultado
		Predecir
		Poco probable
		Más fácil
		Más difícil
		Resultados
		Posibilidad de ocurrir

Los términos y expresiones identificadas se vinculan principalmente a la categoría de expresiones comunes, cuyos significados son muy próximos tanto en el contexto matemático como en el cotidiano, lo que concuerda con las orientaciones curriculares nacionales y la edad de los alumnos. Además se observa que la gran mayoría de las expresiones utilizadas en esta sesión inicial se vinculan al concepto de “aleatorio” y se asocian con el significado intuitivo de la probabilidad.

Durante la clase siguiente (2º sesión) el maestro plantea diversas situaciones en las que los alumnos deben realizar experimentos aleatorios o juegos de azar sencillos, como por ejemplo, el lanzamiento de una moneda (Figura 3) para luego plantear, de acuerdo con los datos observados, preguntas orientadas a la predicción de tendencias. En este contexto surgen los siguientes términos y expresiones verbales (Tabla 3).

Figura 3. Realizando experimentos aleatorios

Tabla 3. Términos y expresiones verbales presentes en la segunda sesión analizada.

Expresiones verbales	Expresiones verbales	Expresiones verbales

específicas	vinculadas	comunes
Suceso	Seguro	Suerte
Evento	Acertar	Casualidad
Aleatorio	Azar	Más posible
Experimento aleatorio	Estimar	Menos posible
Tabla de resultados	Igual probabilidad	Muy posible
Probabilidad	Imprevisible	Adivinar
		Predecir
		Más fácil
		Más difícil
		Resultados posibles
		Posibilidad de ocurrir
		Lanzamiento de una moneda
		Lanzamiento de un dado
		Cara o cruz

En esta segunda sesión ya se evidencia un tránsito hacia un lenguaje de corte probabilístico, puesto que se incluyen términos más específicos a la probabilidad, además de la incorporación de forma indirecta de conceptos como “espacio muestral”, “aleatoriedad” y “experimento aleatorio”. Contribuyendo de esta forma a propiciar y fundamentar el desarrollo de la alfabetización probabilística a partir de la comprensión y utilización de las diversas formas que se utilizan para comunicar el azar y la probabilidad (Gal, 2005).

Lenguaje numérico

En las dos sesiones analizadas se observa una baja utilización de lenguaje numérico asociado a la probabilidad, aun cuando en la segunda sesión uno de los alumnos afirma que *“la posibilidad de obtener cara al lanzar una moneda es la misma que la de obtener cruz, y que por lo tanto es 1 de 2”*. Esta intervención es obviada por el profesor, quizás debido a que el propósito de la clase no era la asignación numérica de probabilidad sino la adquisición del concepto de experimento aleatorio así como una primera aproximación al concepto de espacio muestral.

Lenguaje tabular

Respecto a la representación de datos a través del uso de tablas, se observa un primer acercamiento a la utilización de éstas para el registro de información, en este caso los resultados obtenidos en un número determinado de lanzamientos de una moneda (Figura 4).

Figura 4. Registro de información por medio de tablas

Lenguaje gráfico

En cuanto al lenguaje gráfico, no se observa el uso de ningún tipo de representación grafica pese a que en de acuerdo con lo planteado por las orientaciones curriculares chilenas, en este nivel, los alumnos deben ser capaces de comprender nociones tales como: posible, poco posible, muy posible e imposible, asimismo deben ser capaces de registrar en tablas y gráficos de barra simple, resultados de juegos aleatorios con dados y monedas (Mineduc, 2012). Quizás esto se deba a que nos encontramos en la segunda sesión de un curso que no había recibido instrucción previa sobre el tema.

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos presentado un estudio sobre los primeros elementos lingüísticos que emergen en el contexto de una clase de probabilidad con alumnos de Educación Primaria que no han recibido instrucción previa sobre el tema. A partir del análisis de los distintos tipos de lenguajes que promueven la adquisición del lenguaje probabilístico (verbal, numérico, tabular y gráfico), podemos señalar que se observa un fuerte predominio del lenguaje verbal y cotidiano en la introducción de las primeras nociones y conceptos básicos sobre el azar y la probabilidad. Este dato coincide, a grandes rasgos, tanto con las orientaciones curriculares vigentes (Mineduc, 2012; NCTM, 2003) como con diversos trabajos que han señalado las fases de adquisición de los conocimientos probabilísticos en las primeras etapas educativas (Alsina, 2013; Vásquez y Alsina, 2014; Alsina, 2016; Alsina y Vásquez, 2016; Vásquez, 2016). En estos trabajos se señala que la primera fase de adquisición de conocimientos probabilísticos se caracteriza por la adquisición de lenguaje probabilístico elemental (nociones como "seguro", "probable" o "imposible"), asociado al significado intuitivo de la probabilidad. Lo anterior, propicia el desarrollo progresivo de la alfabetización probabilística al cimentar el camino para la adquisición del pensamiento probabilístico por medio de la construcción de conocimiento matemático en situaciones donde este tenga sentido, así como a través de la experimentación, intuición y capacidad para relacionar y abstraer conceptos (Alsina, 2013).

También fue posible observar, en concordancia con el planteamiento de las orientaciones curriculares nacionales e internacionales, cómo los alumnos van avanzando hacia la adquisición de nuevos conceptos vinculados al azar y a la probabilidad (lenguaje más específico) a partir de sus intuiciones e ideas previas (lenguaje cotidiano común). No obstante, cabe señalar que este lenguaje probabilístico más específico no se desarrolla ni se propicia en toda su magnitud, ya que se observa una baja utilización del lenguaje numérico, tabular y gráfico, pese a que estos dos últimos se explicitan en las orientaciones curriculares de Educación Primaria.

Desde esta perspectiva, nuestro análisis sugiere que en el momento de iniciar el estudio de la probabilidad se considere el desarrollo de las primeras nociones y elementos de aproximación hacia la adquisición y el desarrollo del lenguaje probabilístico. En otras palabras, los conceptos de probabilidad son conceptos complejos con un alto grado de abstracción, por lo que es necesario avanzar de manera gradual hacia la comprensión adecuada del lenguaje específico de la probabilidad para así aproximarse a la cuantificación de la incerteza, y finalmente al cálculo de probabilidades en los últimos cursos de Educación Primaria.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco del proyecto FONDECYT Nº 11150412 financiado por la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica de Chile.

Referencias

Alsina, Á (2013). La estadística y la probabilidad en Educación Infantil: conocimientos disciplinares, didácticos y experienciales. *Didácticas Específicas*, *7*, 4-22.

Alsina, Á. (2016). La estadística y la probabilidad en Educación Primaria. ¿Dónde estamos y hacia dónde debemos ir? *Aula de Innovación Educativa, 251*, 12-17.

Alsina, Á. y Vásquez, C. (2016). La probabilidad en Educación Primaria. De lo que debería enseñarse a lo que se enseña. *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 71*, 46-52

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). Nueva York: Springer.

Lee, C. (2010). *El lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata.

Fine, T. L. (1971). *Theories of probability. An examination of foundations*. Londres: Academic Press.

Font, V. y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaçao Matemática Pesquisa*, *8*(1), 67-98.

Gal, I. (2005). Towards 'probability literacy' for all citizens. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 43-71). Kluwer Academic Publishers.

Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1997). *Azar y Probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares.* Madrid: Síntesis.

Gómez, E.; Batanero, C.; Contreras, J.M.; Fernándes, J.A. (2012). Formación de profesores para enseñar probabilidad: un estudio comparativo entre Colombia y España. En M. Marín-Rodríguez; N. Climent-Rodríguez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 119-132). Ciudad Real: SEIEM.

Gómez, E., Ortiz, J. J., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2013). El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria. *Unión*, *35*, 75-91

Mineduc (2009). *Ley General de Educación*. Santiago: MINEDUC. Recuperado de: http://www.mineduc.cl

Mineduc (2012). *Bases Curriculares 2012: Educación Básica Matemática.* Santiago de Chile: Unidad de Curriculum y Evaluación.

NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, Va.: The National Council of Teachers of Mathematics.

Shuard, H. y Rothery, A. (Eds.) (1984). *Children reading mathematics*. Londres: Murray.

Vásquez, C. (2016). Bolas, fichas, monedas … ¿Cómo podemos ir introduciendo la probabilidad en primaria? *Aula de Innovación Educativa*, *251*, 23-27.

Vásquez, C. y Alsina, A. (2014). Enseñanza de la Probabilidad en Educación Primaria. Un Desafío para la Formación Inicial y Continua del Profesorado. *Números*, *85*, 5-23.

Vásquez, C. y Alsina, A. (2015). *Evaluación del conocimiento común del contenido para enseñar probabilidad en profesores de Educación Primaria*. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 511-520). Alicante: SEIEM.

DESCRIPTORES DEL DESARROLLO DE UNA MIRADA PROFESIONAL SOBRE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN ESTUDIANTES PARA MAESTRO

Benchmarks of pre-service primary teachers' development of professional noticing about mathematics teaching and learning

Ivars, P., Fernández, C. y Llinares, S.

Universidad de Alicante

Resumen

Este estudio tiene como objetivo generar descriptores del desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Analizamos las narrativas escritas por 39 estudiantes para maestro de educación primaria durante su periodo de prácticas en las que se les solicitaba identificar una situación en la que los estudiantes estuvieran desarrollando algún aspecto de la competencia matemática, la interpretaran desde la perspectiva del aprendizaje pretendido y propusieran una actividad para apoyar la progresión del aprendizaje. Los resultados han permitido generar tres descriptores del desarrollo de la competencia docente: identificar los elementos matemáticos relevantes en la situación, usarlos para interpretar niveles de progresión en el aprendizaje, y apoyar las decisiones de enseñanza en las características de la progresión del aprendizaje pretendido.

Palabras clave: *mirada profesional, narrativas, estudiantes para maestro de primaria.*

Abstract

The goal of this study is to generate benchmarks of the development of the skill of noticing mathematics teaching and learning situations. We analyze the narratives written by 39 pre-service primary school teachers during their period of practices at schools in which they were asked to identify a situation where students were developing some aspects of the mathematics competence, interpret it from the perspective of the intended learning and propose a teaching decision to support the students' learning progression. Our results allow us to generate three benchmarks of the development of the noticing skill: identifying relevant mathematical elements in the situation, using them to interpret levels of progression in students' learning and supporting the teaching decisions on the characteristics of the intended learning progression.

Keywords: *professional noticing, narratives, pre-service primary teachers.*

INTRODUCCIÓN Y MARCO TEÓRICO

Las situaciones e interacciones que surgen en un aula se superponen y suceden simultáneamente generando en los maestros dificultades para atenderlas con la misma intensidad. Sin embargo, un maestro debería ser capaz de identificar y focalizar su atención sobre aquellas situaciones de aula que sean más provechosas y potencialmente ricas para promover el aprendizaje de los estudiantes (Mason, 2002; Sherin y van Es, 2005; van Es y Sherin, 2002). En este sentido, para un maestro mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes es una competencia crucial. Jacobs, Lamb y Philipp (2010) conceptualizan esta competencia como tres destrezas interrelacionadas: (i) describir las estrategias usadas por los estudiantes identificando los elementos

Ivars, P., Fernández, C. y Llinares, S. (2016). Descriptores en el desarrollo de una mirada profesional sobre la enseñanza de las matemáticas en estudiantes para maestro. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 535-544). Málaga: SEIEM.

matemáticos importantes, (ii) interpretar la comprensión puesta de manifiesto por los estudiantes en función de los elementos matemáticos usados en las estrategias y (iii) decidir cómo responder teniendo en cuenta la comprensión de los estudiantes.

En las últimas décadas se ha desarrollado una línea de investigación que ha identificado diferentes contextos en los que esta competencia docente puede desarrollarse (Callejo y Zapatera, 2016; Coles, 2013; Fernández, Llinares y Valls, 2012; Fernández, Valls y Llinares, 2011; Fortuny y Rodriguez, 2012; Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares, 2015; Zapatera y Callejo, 2013). Por ejemplo, van Es y Sherin (2002) mostraron que el análisis de situaciones de aula recogidas en video clips propició cambios en los aspectos de la situación de enseñanza que los maestros eran capaces de identificar y en cómo discutían sobre dichos aspectos cambiando el foco de la discusión desde la evaluación a la interpretación basada en evidencias. En esta misma línea, Coles (2013) mostró que el uso de videoclips permitía a los maestros reconstruir las interacciones del aula de manera cronológica para realizar interpretaciones aportando evidencias. Fernández et al., (2012) mostraron que los debates virtuales permitieron a los estudiantes para maestro trasladarse desde la descripción de aspectos generales de las estrategias usadas por los estudiantes en la resolución de problemas a detallar evidencias relevantes de la manera en la que los alumnos desarrollaban el razonamiento proporcional. Schack y sus colegas (2013) mostraron que el visionado de video-clips recogiendo interacciones entre docentes y sus alumnos ayudó a los estudiantes para maestro a atender, interpretar y tomar decisiones de acción en el dominio de la numeración temprana. Coles, Fernández y Brown (2013) mostraron que las reuniones entre maestros de primaria en servicio donde se compartía el trabajo que realizaban en las escuelas en relación a cómo los estudiantes resolvían determinadas tareas también propiciaba el desarrollo de esta competencia.

Estos estudios indican que mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza aprendizaje de las matemáticas implica trasladarse desde la descripción de acciones del profesor a las conceptualizaciones de los estudiantes y desde comentarios evaluativos a comentarios interpretativos basados en evidencias (Bartell, Webel, Bowen y Dyson, 2013; van Es, 2011) pero tenemos menos información sobre descriptores del desarrollo de esta competencia. Siguiendo esta línea de investigación, el objetivo de nuestra investigación es generar descriptores del desarrollo de la competencia “mirar profesionalmente” cuando los estudiantes para maestro escriben narrativas durante los periodos de prácticas de enseñanza.

Escribir narrativas en formación inicial de maestros

Las narrativas son historias en las que el autor relata, de manera secuencial, una serie de acontecimientos que cobran sentido para él a través de una lógica interna (Chapman, 2008; Ponte, Segurado y Oliveira, 2003). Escribir narrativas ha sido identificada como un mediador de aprendizaje, capaz de “desarrollar funciones cognitivas superiores, como el análisis y la síntesis” (Emig, 1977, p. 122). En este contexto, escribir es vista como una poderosa herramienta para la construcción del conocimiento cuya función principal es mediar entre el recuerdo y la reflexión ya que, por su abstracción, y en comparación con el habla, obliga al escritor a actuar más intelectualmente (Wells, 1999). Para Wells la escritura desarrolla “el modo abstracto y racional de pensar considerado como el punto final del desarrollo mental” (p.278). Las narrativas pueden ser consideradas como “la forma primaria que da sentido a la experiencia humana” (Polkinghorne, 1988, p. 1) permitiendo comprender cómo los docentes organizan su trabajo y actúan en contextos profesionales.

Desde estas referencias, podemos considerar que durante la formación inicial de maestros, escribir narrativas durante las prácticas de enseñanza para describir sucesos relevantes sobre la enseñanza de las matemáticas puede ser una buena herramienta que potencie el aprendizaje de los estudiantes para maestro. Chapman (2008) indica que los estudiantes para maestro pueden ser considerados narradores de sus propias historias y de las de otros en el contexto de los programas de formación de maestros, siendo las narrativas herramientas que les ayuden a dar sentido a su experiencia durante su periodo de prácticas.

En este estudio analizamos la relación entre la tarea de escribir narrativas durante las prácticas y el desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes con el objetivo de generar descriptores del desarrollo de esta competencia. Las preguntas de investigación que nos planteamos son:

- ¿En qué aspectos de la enseñanza de las matemáticas centran la atención los estudiantes para maestro y cómo son interpretados?
- ¿De qué manera los estudiantes para maestro apoyan sus propuestas de acción en su interpretación previa del pensamiento matemático de los niños?

MÉTODO

Participantes y contexto

En este estudio participaron 39 estudiantes para maestro en su último año de formación en el Grado en Maestro en Educación Primaria durante su periodo de prácticas en los centros (practicum de 8 semanas). Las dos primeras semanas consistían en un periodo de observación del proceso de enseñanza-aprendizaje, y en la segunda parte (6 últimas semanas) debían diseñar e implementar una unidad didáctica. Durante el periodo de observación se pidió a los estudiantes para maestro que escribieran una narrativa en la que identificaran y describieran sucesos del aula que podían ser considerados potencialmente relevantes para explicar el aprendizaje matemático de los estudiantes que se estaba generando en las aulas.

Instrumento: Narrativas

Con la intención de facilitar la estructuración de la información y la generación de las narrativas se facilitó a los estudiantes para maestro unas preguntas guía (Figura 1). Estas preguntas se fundamentaban en las tres destrezas de la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes (Jacobs et al., 2010): describir, interpretar y decidir.

La narrativa debía consistir en una descripción e interpretación de una situación de enseñanza-aprendizaje considerada por el estudiante para maestro con potencial para explicar lo que estaba sucediendo en el aula desde la perspectiva del aprendizaje de las matemáticas. La interpretación debía estar fundamentada en los conocimientos sobre didáctica de la matemática que los estudiantes para maestro podían conocer desde las asignaturas del Grado en Maestro en Educación Primaria. El uso de estos conocimientos les podría ayudar a identificar e interpretar las situaciones de aula relevantes, así como destacar evidencias sobre la comprensión matemática de los estudiantes. La narrativa debía terminar con una propuesta de tareas que permitiera seguir la lección observada y que apoyara la progresión en el aprendizaje de los estudiantes (Battista, 2011; Clements y Sarama 2010).

Análisis

Para el análisis de las narrativas escritas por los estudiantes para maestro consideramos como unidad de análisis frases y párrafos que expresaran una idea. Inicialmente, tres investigadores de manera individual identificaron y categorizaron las unidades de análisis desde una muestra de narrativas en tres dominios: cómo describían, cómo interpretaban y qué decisiones de acción tomaban. Las categorías inicialmente generadas para cada uno de estos dominios fueron discutidas y consensuadas para generar criterios de categorización para el resto de las narrativas. En este proceso de análisis inductivo consideramos:

- Si en sus descripciones de las respuestas de los alumnos los estudiantes para maestro incluían elementos matemáticos que ayudaban a explicar lo que estaban observando.
- Si los estudiantes para maestro interpretaban la comprensión del estudiante relacionando su comprensión con los elementos matemáticos específicos de la situación previamente descrita.
- Si los estudiantes para maestro tomaban decisiones basadas en la comprensión del estudiante proporcionando tareas específicas para la situación.

a. Describe la situación

la tarea/actividad. *Por ejemplo, puedes indicar los contenidos específicos, materiales, uso de las TIC,…*
qué hacen los alumnos. *Por ejemplo, puedes indicar respuestas de los alumnos a la tarea propuesta, dificultades,…*
qué hace el maestro. *Por ejemplo, puedes indicar como trabaja la actividad en el aula (agrupación de los alumnos, interacciones…) o si ante las respuestas de los alumnos (o dificultades), propone otras tareas, insiste en algún aspecto de la actividad,...*

b. Interpreta la situación

Indica ***qué objetivos*** *del área de matemáticas se trabajan explicitando qué aspectos de la situación te hacen pensar que se están desarrollando los objetivos identificados.*
Indica, a través de las respuestas de los estudiantes, ***evidencias que muestren la manera en que se están consiguiendo los objetivos propuestos****, es decir, evidencias que muestren como los estudiantes están logrando la comprensión de los conceptos matemáticos.*
Indica si se ***desarrollan otras competencias básicas****. Muestra evidencias del desarrollo de otras competencias trabajadas en la situación.*

c. Completa la situación

Intenta ***complementar de alguna manera la situación descrita para potenciar el desarrollo de la competencia matemática*** *identificada o algún otro aspecto de la competencia que no se haya contemplado inicialmente.*

Figura 1. Guía para la elaboración de narrativas

RESULTADOS

El análisis realizado nos permitió identificar tres grupos de estudiantes para maestro en función de las evidencias mostradas en las narrativas escritas:

- cuando solo describían los sucesos de aula de manera general sin interpretar la comprensión de los estudiantes.
- cuando identificaban los elementos matemáticos de la tarea en la situación de enseñanza-aprendizaje interpretando la comprensión de los estudiantes, pero proponían y justificaban decisiones relativas a la enseñanza de manera general que no estaban basadas en la comprensión de los estudiantes.
- cuando identificaban los elementos matemáticos importantes, interpretaban la comprensión de los estudiantes y proponían tareas específicas en relación a la interpretación de la comprensión inferida previamente y las justificaban para apoyar la progresión del aprendizaje de los estudiantes.

A continuación, ejemplificamos cada grupo de estudiantes para maestro considerando la manera en la que miraban profesionalmente la situación de enseñanza-aprendizaje.

Estudiantes para maestro que solo describían los sucesos de aula de manera general

De los 39 estudiantes para maestro que participaron en el estudio, 18 escribieron una narrativa en la que se describía una interacción de aula que incluía descripciones de dificultades presentadas por los estudiantes. Sin embargo, estos estudiantes para maestro no identificaron elementos matemáticos en la tarea que pudiera ayudarles a generar una explicación de lo que estaba sucediendo. Estos estudiantes para maestro no fueron capaces de interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes ni generaron explicaciones sobre lo que estaba pasando más allá de generar expresiones generales. Tampoco fundamentaron sus decisiones de acción desde el punto de vista de la progresión en el aprendizaje de los estudiantes. Estas narrativas mostraban comentarios descriptivos y evaluativos.

Así, por ejemplo, en la siguiente narrativa el estudiante para maestro comienza describiendo el contexto de aula y el contenido curricular: *"La siguiente actividad se realizó en 2º curso de Educación Primaria en una clase de 21 alumnos. La tarea que he observado trata sobre la resta llevando."* Seguidamente continúa con la descripción de una interacción de aula,

> *En primer lugar, la maestra pone un ejemplo en la pizarra de una resta llevando para ayudar a los alumnos a entenderla mejor. Después, reparte la ficha y hacen las dos primeras restas todos juntos. Para hacer esto, la maestra elige una alumna para salir a hacer la resta en la pizarra. La resta es 23-14:*

Maestra: "Yo a 3 melones puedo quitarle 4?"

Alumna: "No."

Maestra: "Entonces..."

Alumna: "Le pido una decena al 2."

Maestra: "Como por ejemplo ya puedo..."

(Cuentan todos juntos: 5, 6, 8...hasta llegar al 13)

Alumna: "De 4 a 13, 9".

Maestra: "Ahora ya estamos en las decenas, pero tienes que devolverme la decena que te he dado".

Alumna: "Ahora de 2 a 2, 0"

El estudiante para maestro no menciona el algoritmo que está introduciendo la maestra ni los elementos matemáticos que lo definen, y simplemente describe lo que observa. En este caso el discurso de la maestra y la interacción verbal entre la maestra y la alumna parece mezclar dos algoritmos. Por una parte, al considerar el 23 como 10+13 ("*le pido una decena al 2*", …, y contar desde 4 hasta 13). Posteriormente, cuando la alumna dice *"ahora de 2 a 2, 0"* que se apoya en la propiedad (a-b) = (a+k) – (b+k) en el caso particular de sumar 10 unidades al minuendo y una decena al sustraendo. El estudiante para maestro no menciona esta discrepancia ni ninguno de los elementos matemáticos que caracterizan los dos algoritmos. A continuación, identifica algunas dificultades generando comentarios descriptivos, pero sin relacionarlos con los elementos matemáticos de ninguno de los dos algoritmos:

> *"La mayoría de los alumnos cuando están haciendo las restas en la pizarra lo comprenden, pero a la hora de hacer la actividad solos, les cuesta algo más. Algunos de ellos suman, tienen dificultades con el nuevo modo de realizar las restas o no recuerdan cuánto vale el puntito que le ponen a la decena del número de abajo. Para resolver estas dificultades la maestra los ayuda con preguntas y volviendo a explicarles cómo se hacen…".* [énfasis añadido]

Para finalizar, este estudiante para maestro indica una propuesta genérica centrada en el uso de los bloques multibase para explicar el algoritmo de la resta llevando, pero sin justificar cómo lo haría: "*No completaría la sesión con otras actividades, sino que daría la explicación de las restas llevando de otra manera: utilizando los bloques multibase…"*

La propuesta realizada busca introducir una alternativa en la situación de aula apoyada por el uso de los bloques multibase, pero sin clarificar la discrepancia en la interacción entre la maestra y los alumnos descrita que muestra la convivencia errónea de los dos algoritmos. El estudiante para maestro no justifica su decisión y busca crear una situación diferente. Las narrativas de este grupo de estudiantes para maestro parecen indicar que la identificación de los elementos matemáticos en una situación de aprendizaje es necesaria para generar información sobre el aprendizaje matemático de manera relevante. La falta de estos puntos de apoyo (en estos casos, la no identificación de la diferencia entre los dos algoritmos de la resta llevando) parece impedir la generación de una mirada estructurada que favorece la propuesta de comentarios generales y poco relevantes para apoyar la progresión del aprendizaje conceptual de los estudiantes.

Estudiantes para maestro que identificaban los elementos matemáticos de la situación de enseñanza-aprendizaje e interpretaban la comprensión de los estudiantes, pero no usan dicha información para proponer tareas que apoyen la progresión en el aprendizaje

Diez estudiantes para maestro, después de describir una situación de enseñanza-aprendizaje, identificaron elementos matemáticos relevantes en la situación e interpretaron la comprensión matemática de los estudiantes. Sin embargo, estos estudiantes para maestro no justificaron sus decisiones teniendo en cuenta las inferencias realizadas previamente sobre la comprensión de los estudiantes. En este sentido, este grupo de estudiantes para maestro ejemplifica una desconexión entre lo que podían estar interpretando en relación al aprendizaje y las decisiones instruccionales que podían tomar. Por ejemplo, la siguiente estudiante para maestro escribió una narrativa en la que describe una situación en una clase de 2º curso en la que se estaban realizando restas llevando. Esta estudiante para maestro describe la respuesta de un alumno a la tarea 45-9:

> "*Como en la primera columna tenemos cinco y abajo nueve, tenemos que pedirle ayuda a la otra columna, la de las decenas. Porque si yo tengo 5 lápices no puedo dar 9. Entonces, tacho el 4 y se me queda 3. Y la decena que he cogido como son 10 unidades, pues en la primera columna ahora tengo 15. Ahora ya puedo restar 15 menos 9 que son 6. Y luego como al 3 no hay que quitarle nada se queda el 3. En total son 36*"

La estudiante para maestro indica:

> *En esta actividad se trabaja el valor de posición y la transformación de una decena a diez unidades.*
>
> *El alumno, como bien se puede observar a través de sus respuestas, logró justificar correctamente todo el proceso que empleó para resolver el algoritmo de la resta. Concretó que al no poder restar las unidades debía trasformar una decena; una decena que reconoce que equivalía a 10 unidades y ve el 45 como 3 decenas y 15 unidades. Además, mediante sus explicaciones demuestra que identifica el valor de posición tanto de las decenas como de las unidades.*

La estudiante para maestro identificó elementos matemáticos que intervenían, la idea de valor de posición, las transformaciones de decenas en unidades (o idea de agrupamiento) y la necesidad de realizar una descomposición no canónica para poder resolver la resta (45 = 40 + 5 = 30 + 15). Sin embargo, esta estudiante para maestro no fue capaz de proponer una decisión concreta que ayudara a este alumno a seguir progresando. En su narrativa, esta estudiante para maestro propone:

> *Para complementar esta tarea se podrían plantear diferentes situaciones problematizadas para trabajar los números en diferentes contextos. Además, en cualquiera de los casos se podría emplear los bloques multibase o los ábacos. De ese modo, los alumnos podrían manipular las cantidades que se están trabajando y, por tanto, se contribuiría a un aprendizaje más empírico y vivencial. Dado que les permitiría asentar y afianzar los conceptos que subyacen a esta tarea.*

Esta propuesta de acción es genérica sin considerar los elementos matemáticos que deben ser tenidos en cuenta en la progresión de los aprendizajes de los estudiantes. Por ejemplo, proponiendo ejercicios en los que hubiera un cero en el minuendo, 704 -36 = □, que exigiera un uso más sofisticado de la idea de desagrupar centenas y decenas y del reconocimiento de la descomposición y representación no canónica de los números, 704 = 7C + 4 U = 6 C + 10 D + 4 U = 6 C + 9 D + 14 U).

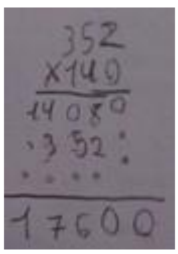
La categorización de este grupo de estudiantes para maestro pone de manifiesto que la conexión entre la información generada sobre la comprensión de los estudiantes en una situación de enseñanza no siempre es fácilmente usada para fundamentar las decisiones de enseñanza que deben apoyar la progresión en el aprendizaje.

Estudiantes para maestro que identificaban los elementos matemáticos, interpretaban la comprensión de los estudiantes y proponen tareas justificadas desde la progresión en el aprendizaje

Once estudiantes para maestro describieron situaciones de aula, identificaron los elementos matemáticos de la situación interpretando la comprensión puesta de manifiesto por los estudiantes y propusieron decisiones de acción específicas para apoyar el progreso en el aprendizaje de los estudiantes. Por ejemplo, una estudiante para maestro describe un suceso en una clase de 4º curso en la que los niños están realizando multiplicaciones de números de dos o tres cifras e identifica algunas dificultades. En su narrativa esta estudiante para maestro identifica elementos matemáticos relevantes en la resolución de este tipo de tareas (el valor de posición y la descomposición canónica del número):

> *Las dificultades que presentan la mayoría de los alumnos/as son la mala colocación de las cifras por no entender el valor posicional de estas, lo que provoca que la suma esté mal.*

```
  1 3 1 4
  ×   2 9
  11 8 2 6
2 6 2 8
2 8 1 0 6
```



> *Además, cuando el segundo factor acaba en cero no entienden por qué se debe poner fuera de la multiplicación. A la mayoría de ellos, se les olvida ese detalle y lo colocan en la columna de las unidades, lo que provoca que al llegar a la multiplicación de las centenas del segundo factor coloquen el resultado en la columna de las decenas.*

En la descripción de la situación este estudiante para maestro identifica lo que parece provocar las dificultades en los niños y lo relaciona con la no comprensión de la manera en la que se representan los números. La identificación de la idea del valor de posición de las cifras en los números y el papel que desempeñan en la realización del algoritmo le permite generar una explicación sobre la comprensión de los niños vinculada a los elementos matemáticos relevantes en la situación de aprendizaje:

> *Las dificultades de estos estudiantes suceden porque el algoritmo no se ha explicado utilizando la descomposición canónica del número y por tanto, no saben cómo colocar los números (no conocen el valor de posición de cada cifra). Cuando el segundo factor acaba en cero no lo ponen en la columna de las unidades.*

Además, propone una decisión de acción que tiene en cuenta su interpretación de la comprensión de los estudiantes. La descripción de cómo podría continuar la lección con estos estudiantes se apoya en su interpretación de lo que puede ser la falta de comprensión del elemento matemático que provoca la dificultad en los niños. De esta manera propone presentar el algoritmo de la multiplicación a partir del significado de las operaciones utilizando las descomposiciones canónicas y utilizando estrategias que permitan utilizar el pensamiento relacional:

> *Resolver el algoritmo a partir de la descomposición canónica del número para trabajar el valor de posición de cada número*

$$
\begin{array}{rl}
3.652 & \longrightarrow 3.000+600+50+2 \\
\underline{\times \quad 8} & \\
24.000 & \longrightarrow 8\times 3.000 = 24.000 \\
4.800 & \longrightarrow 8\times 600 = 4.800 \\
400 & \longrightarrow 8\times 50 = 400 \\
\underline{+ \quad 16} & \longrightarrow 8\times 2 = 16 \\
29.216 &
\end{array}
$$

> *Potenciar el pensamiento relacional proponiendo maneras alternativas de resolver el algoritmo 181×357 por ejemplo, multiplicando 60×357 sumando el resultado tres veces, porque 180 es 3×60, y sumando a continuación 357.*

Los estudiantes para maestro de este grupo empiezan a generar una mirada estructurada de las situaciones de enseñanza en la que hacen uso del conocimiento de didáctica de las matemáticas no solo para interpretar la comprensión de las matemáticas de los estudiantes puesta de manifiesto por la manera en la que resuelven las actividades, sino también apoyando sus propuestas de enseñanza en estas interpretaciones para apoyar la progresión en el aprendizaje conceptual de los estudiantes.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo de este estudio es generar descriptores del desarrollo de la competencia “mirar profesionalmente” cuando los estudiantes para maestro escriben narrativas durante los periodos de prácticas de enseñanza.

Desde el análisis de las narrativas hemos podido generar tres descriptores del desarrollo de una mirada profesional. En primer lugar, el ser capaz de reconocer e identificar los elementos matemáticos característicos de la situación de aprendizaje. Es decir, los elementos matemáticos que deben ser considerados en la progresión del aprendizaje conceptual en los estudiantes. En los casos que hemos descrito se refiere a las descomposiciones no canónicas de los números y su papel en la articulación de los algoritmos de las operaciones de los números naturales. En segundo lugar, la manera en la que se deben usar los elementos matemáticos característicos de la situación para determinar los niveles de progresión en el aprendizaje conceptual. Es decir, en la manera en la que se puede interpretar el nivel de comprensión de los estudiantes al considerar cómo los elementos matemáticos son usados por los estudiantes para resolver las actividades propuestas por el maestro. En los casos descritos se refiere a la manera en la que las dificultades evidenciadas por los estudiantes se relacionaban a la falta de compresión de los elementos matemáticos que caracterizaban la actividad propuesta en la lección. Finalmente, el que las decisiones de enseñanza dirigidas a apoyar la progresión en el aprendizaje se apoyen en la interpretación de la comprensión de los elementos matemáticos generada previamente.

De los 39 participantes 21 aportaron evidencias de la identificación de elementos matemáticos relevantes en la situación lo que les permitió interpretar la comprensión (o dificultades) que tenían los estudiantes sobre un determinado contenido matemático. Este resultado pone de manifiesto que la utilización de las narrativas en los periodos de prácticas de los estudiantes para maestro, pueden ayudarles a estructurar su mirada sobre los sucesos específicos de aula y por tanto desarrollar la competencia mirar profesionalmente. Únicamente 11 de estos estudiantes para maestro que consiguieron interpretar el pensamiento matemático de los alumnos fueron capaces, además, de proponer una decisión de acción fundamentada en la comprensión del estudiante y que propiciara el desarrollo conceptual de éstos. Estos datos subrayan la dificultad que entraña la tarea de proponer decisiones de acción, una de las destrezas para el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes (Jacobs et al., 2010).

A pesar de considerar que la instrucción recibida por los estudiantes para maestro puede incidir en la creación y estructura de sus narrativas (Chapman, 2008), las descripciones aportadas y las interpretaciones realizadas por los participantes en esta investigación, ponen de relieve la dificultad que tienen los estudiantes para maestro en utilizar los conocimientos teóricos para interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes y para justificar sus decisiones de acción. Aun así, consideramos que las narrativas escritas durante su periodo de prácticas en los centros les puede ayudar a teorizar la práctica en contextos prácticos (Smith, 2003) evidenciando la función mediadora del acto de escribir en su proceso de aprendizaje (Wells, 1999).

En relación a futuras investigaciones, consideramos que los resultados obtenidos por el grupo de estudiantes que solo aportaron en sus narrativas descripciones de lo observado denota cómo, en ocasiones, los estudiantes para maestro ignoran los aspectos particulares de una situación de enseñanza-aprendizaje que pueden ser relevantes (Mason, 1988). Es posible que este grupo de estudiantes pudiera focalizar su atención y estructurar su mirada en relación a las situaciones de enseñanza-aprendizaje reflejadas en sus narrativas con la ayuda de comentarios del tutor o de los compañeros. Por ello sería interesante analizar si el hecho de compartir sus narrativas en reuniones presenciales o debates virtuales con sus compañeros (o tutor), en las que se propiciara la discusión de las mismas (Coles et al., 2013) apoyaría el desarrollo de esta competencia docente.

Reconocimientos

Esta investigación ha recibido el apoyo del Proyecto EDU2014-54526-R del Ministerio de Economía y Competitividad, España; y del proyecto para grupos de investigación emergentes GV/2014/075 de la Conselleria de Educación, Cultura y Deporte de la Generalitat Valenciana.

Referencias

Bartell, T.G., Webel, C., Bowen, B. y Dyson, N. (2013). Prospective teacher learning: recognizing evidence of conceptual understanding. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*, 57-79.

Battista, M. (2011). Conceptualizations and issues related to Learning Progressions, Learning Trajectories, and Levels of Sophistication. *The Mathematics Enthusiast*, *8*(3), 507-570.

Callejo, M.L. y Zapatera, A. (2016). Prospective primary teachers' noticing of students' understanding of pattern generalization. *Journal of Mathematics Teacher Education,* DOI 10.1007/s10857-016-9343-1

Chapman, O. (2008). Narratives in mathematics teacher education. En D. Tirosh y T. Wood (Eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education. Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (Vol. 2, pp. 15-38). Taiwan/Rotterdam: Sense Publishers.

Clements, D. H. y Sarama J. (2010). Learning Trajectories in early mathematics – sequences of acquisition and teaching. En *Encyclopedia on Early Childhood Development*.

Coles, A. (2013). Using video for professional development: the role of the discussion facilitator. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(3), 165-184.

Coles, A., Fernández, C. y Brown, L. (2013). Teacher noticing and growth indicators for mathematics teachers development. En A. M. Lindmeier, y A. Heinze, (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of mathematics Education*, (Vol. 2, pp. 209-216). Kiel, Germany: PME.

Emig, J. (1977). Writing as a Mode of Learning. *College Composition and Communication*, *28*(2), 122–128

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through on-line discussions. ZDM. *Mathematics Education*, *44*, 747-759.

Fernández, C., Valls, J. y Llinares, S. (2011). El desarrollo de un esquema para caracterizar la competencia docente "mirar con sentido" el pensamiento matemático de los estudiantes. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M. Palarea (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 351-360). Ciudad Real: SEIEM.

Fortuny, J. M., y Rodríguez, R. (2012). Aprender a mirar con sentido: facilitar la interpretación de las interacciones en el aula. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 1*, 23-37.

Jacobs, V.R., Lamb, L.C. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(2), 169-202.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. London: Routledge-Falmer.

Polkinghorne, D. E. (1988). *Narrative Knowing and the Human Sciences*. Suny Press.

Ponte, J.P., Segurado, I. y Oliveira, H. (2003). A collaborative project using narratives: What happens when pupils work of mathematical investigations? En A. Peter-Koop, V. Santos-Wagner, C. Breen y A. Begg (Eds.), *Collaboration in Teacher Education: Examples from the Context of Mathematics Education* (pp. 85-97). Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. y Llinares, S. (2015). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivative concept. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *13*(6), 1305-1329.

Schack, E. O., Fisher, M. H., Thomas, J. N., Eisenhardt, S., Tassell, J., y Yoder, M. (2013). Prospective elementary school teachers' professional noticing of children's early numeracy. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(5), 379-397.

Sherin, M. y van Es, E. (2005). Using video to support teachers' ability to notice classroom interactions. *Journal of technology and teacher education*, *13*(3), 475-491

Smith, T. (2003). Connecting theory and reflective practice through the use of personal theories. En N. Pateman, B. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 215-222). CRDG, College of Education, University of Hawai: PME.

van Es, E. A. y Sherin, M. G. (2002). Learning to notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education*, *10*(4), 571-596.

van Es, E. (2011). A framework for learning to notice student thinking. En M. G. Sherin, V.R. Jacobs, y R. Philipp, (Eds.), *Mathematics Teacher Noticing: Seeing through Teachers' eyes* (pp. 134-151). New York: Routledge.

Wells, G. (1999). *Dialogic Inquiry: Towards a Socio-cultural Practice and Theory of Education*. Cambridge University Press.

Zapatera, A., y Callejo, M. L. (2013). Cómo interpretan los estudiantes para maestro el pensamiento matemático de los alumnos sobre el proceso de generalización. En A. Berciano, G. Gutiérrez, N. Climent y A. Estepa (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 535-544) Bilbao: SEIEM.

INTERTEXTOS CREADOS POR NIÑOS DE PRIMARIA EN EL ÁMBITO DE LOS ENTEROS: UN ANÁLISIS HISTÓRICO

INTERTEXS CREATED BY PRIMARY CHILDREN IN THE FIELD OF THE INTEGERS: A HISTORICAL ANALYSIS

Gallardo, A., Mejía J., Saavedra, G.

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

Resumen

Se analizan las producciones de alumnos de cuarto grado de Primaria al resolver problemas elementales con números enteros, sin previa instrucción, utilizando la noción semiótica de intertexto. El estudio considera las lecciones histórico-epistemológicas en la construcción de los números negativos, para comprender las dificultades de los estudiantes al enfrentar este campo numérico.

Palabras clave: *análisis histórico-epistemológico, números enteros, educación Primaria, análisis semiótico.*

Abstract

Productions of fourth grade students to solve basic problems with integer numbers, without prior instruction, using semiotic notion of intertext are analyzed. The study considers the historical and epistemological lessons in the construction of negative numbers, to understand the difficulties of the students to face this numeric field.

Keywords: *historical-epistemological analysis, integer numbers, elementary school, semiotic analysis.*

ANTECEDENTES

A continuación describimos las principales investigaciones que sirven de antecedentes a la presente.

Una de las principales, es la realizada por Bishop et al (2014) desde una perspectiva histórica. Estos autores analizan el pensamiento de niños de 6-8 años de edad, a través de una serie de entrevistas no estandarizadas, antes de recibir alguna instrucción, porque desean conocer sus concepciones intuitivas acerca del campo numérico de los enteros. A través del análisis de textos producidos por matemáticos de la antigüedad y de las producciones de los estudiantes, documentan tres obstáculos persistentes en la aceptación de los números negativos por parte de los matemáticos, mismos que enfrentaron los niños en la resolución de problemas: magnitud, operaciones sin sentido e ideas contra-intuitivas acerca de la adición y la sustracción.

El primer obstáculo se refiere a la idea de que los números sirven para contar objetos y ya que no puede existir un número de cosas menor que la nada, los negativos no pueden considerarse legítimamente números. El segundo, operaciones sin sentido, indica que el uso de los números negativos son el resultado de expresiones que no encajan con su realidad: no se puede quitar algo de la nada o no se puede quitar más de lo que se tiene, este obstáculo se refiere principalmente a la sustracción. Por su parte, el tercer obstáculo se establece mediante las ideas de que la adición no puede disminuir la cantidad y la sustracción no puede aumentarla. Con los números negativos estos hechos son posibles, pero vuelve problemática su aceptación

Gallardo, A., Mejía J., Saavedra, G. (2016). Intertextos creados por niños de primaria en el ámbito de los Enteros: un análisis histórico. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 545-554). Málaga: SEIEM..

Bishop et al (2014) no encuentran solamente obstáculos semejantes entre los matemáticos de la historia y los niños actuales de Primaria, también hayan vías de superación de dichas dificultades, igualmente similares. Estas formas de pensamiento creativo también son tres: necesidad lógica y formalismos, ideas basadas en el orden y, sorprendentemente, magnitud. Según estos autores, la idea de magnitud fue para algunos alumnos del grupo un obstáculo, pero para otros esta forma de razonar les permitió resolver problemas numéricos con enteros. Por ejemplo, ver -8 como ocho veces -1, es decir verlos como objetos, le sirvió para resolver correctamente operaciones del tipo -8 – -1. Con respecto a la necesidad lógica y formalismos, la superación del obstáculo se establece mediante observar un problema resuelto anteriormente y trasladar el método a otros casos, siempre que se mantenga intacta la lógica subyacente. Así, un alumno dice que si -8 + -1 resulta -9, -8 – -1 debe ser -7 porque sumándolos se alejan más hacia los negativos, entonces restando se deben alejar menos. Por último, problemas como 3 – 5= son resueltos correctamente usando la recta numérica o la idea de contar hacia atrás: dos, uno, cero, menos uno, menos dos; entonces el resultado es -2.

Por otra parte, Bofferding (2014) se basa en la teoría del cambio conceptual para analizar modelos mentales de niños de 6-8 años de edad con respecto a la comprensión de los números. Usa tres categorías útiles en el estudio del cambio conceptual: modelo inicial, modelo sintético y modelo formal. Estas categorías analizan el cambio producido en los modelos mentales de los niños en relación al ámbito de los números enteros por medio de un periodo de instrucción respecto a la naturaleza unaria y/o binaria del “signo menos”. Con esta finalidad, la autora trabaja con tres grupos a los que llama unario, binario y combinado, dependiendo de que la enseñanza se centre en uno u otro significado del signo menos o de que abarque ambos significados.

Un modelo mental inicial de los niños con respecto a cualquier concepto matemático implica la formación de un marco de referencia basado únicamente en el mundo real, en su contexto cercano y concreto. El modelo mental sintético se forma mediante la pugna entre las ideas anteriores de los alumnos respecto al concepto en cuestión y la restructuración del esquema conceptual resultado de las nuevas ideas. Es este modelo una síntesis de ideas de donde surge su nombre. El modelo formal corresponde a las concepciones socialmente aceptadas en un momento histórico determinado, es decir, la meta de la instrucción. En este sentido, un modelo mental inicial acerca de los números enteros corresponde a resolver problemas de este campo basándose en los principios y propiedades de los números naturales. Por ejemplo, los alumnos ordenaron números enteros negativos como si fueran naturales, ignorando el “signo menos”. Algunos niños que presentaron un modelo sintético pudieron ordenar los números enteros correctamente, sin embargo en los problemas de comparación de números, indicaron erróneamente que el mayor es el de mayor valor absoluto.

En su investigación, Bofferding (2014) muestra el cambio de los modelos mentales de los niños después de la instrucción con independencia del grupo, siendo el que manifestó mayores cambios, el grupo de instrucción unaria. Los resultados de este trabajo nos indican que la edad cronológica de los alumnos poco tiene que ver con en el aprendizaje de temas tales como orden y valor, y magnitudes dirigidas en los números negativos, así como el gran peso que tuvo la instrucción en el cambio de sus modelos mentales. También nos informa sobre la relevancia de una instrucción basada en el significado unario del signo menos que contrarreste el tiempo dedicado a la enseñanza de su sentido binario.

Una investigación importante acerca de los números negativos realizada con alumnos de Secundaria es la de Bruno (2000). Algunos resultados interesantes hallados en ese trabajo se refieren a la resolución de problemas aditivos con dichos números. La resolución de esos problemas genera dificultades por parte de los alumnos, aun cuando ellos habían recibido un periodo de instrucción en las tres dimensiones, y sus interrelaciones, del conocimiento numérico: grafico, contextual y abstracto. Al no darles sentido a dichos problemas, los estudiantes utilizan números positivos o siguen el orden de los datos como aparecen en el texto del problema, para su resolución.

PERSPECTIVA TEORICA

Filloy, Puig y Rojano (2008) señalan la necesidad de analizar los fenómenos de la matemática educativa desde la Semiótica, la ciencia general de los signos, y no desde la lingüística, porque los textos producidos por los alumnos no son sólo de naturaleza lingüística. En este trabajo, utilizamos la noción teórica de intertextualidad, la cual se relacionan con otras, tales como Sistema Matemático de Signos (SMS), texto, espacio textual, significado y sentido. La noción de SMS para el estudio de los textos producidos por los alumnos comprende tanto signos estrictamente matemáticos y también del lenguaje vernáculo. Lo crucial para los procesos de significación es considerar el sistema de signos tomado como un todo, lo que es de naturaleza matemática es el sistema y no los signos individualmente, porque es el sistema el responsable del significado de los textos. (Filloy et al, 2008). Los textos no deben identificarse con los textos escritos, "sino como el resultado de la lectura/transformación de un espacio textual cuya finalidad no es extraer un significado inherente al texto, sino producir sentido. El espacio textual, por su parte, puede considerarse como un sistema que impone una restricción semántica sobre la persona que lo lee" (Talens y Company, 1984).

Como los trabajos literarios se construyen basándose en sistemas, códigos y tradiciones establecidas mediante escritos literarios previos, los textos, literarios o no, deben verse como intertextuales, carentes de un significado independiente, de tal manera que leerlo implica sumergirse en una red de relaciones textuales. Por lo tanto, un texto no posee un significado independiente a ser descubierto por un lector, vía su interpretación, más bien, la interpretación de un texto requiere enfrentarse a dichas relaciones con la finalidad de darle sentido, de producir sentido. (Allen, 2000).

El significado, desde esta perspectiva, es algo que se encuentra entre un texto y todos los textos a los que se refiere y con los que se relaciona. El texto no tiene sentido independiente, es parte de una red de relaciones textuales, existe como inmerso en un intertexto (Allen, 2000).

El intertexto (Rojano et al, 2014) tiene un carácter dual: no sólo es la posibilidad de leer un texto debido a todos los textos con los cuales éste se relaciona en una cultura o comunidad (su carácter social), sino también es una posibilidad personal de leer un texto, que nos permite considerar los textos que un individuo, en particular, liga al texto cuya lectura enfrenta con la finalidad de producir sentido, es decir, el intertexto personal es lo que abre la posibilidad a un estudiante específico de leer/transformar los textos que forman el modelo de enseñanza. Entendiendo así el intertexo, no se puede menos que reconocer su importancia en la comprensión de lo que sucede en los procesos de enseñanza/aprendizaje de los estudiantes de la matemática escolar.

Por otra parte, una herramienta teórica es la que se refiere a los "sentidos de uso del negativo" (Gallardo, 2002). Esta autora, utilizando el método histórico-crítico, el cual se caracteriza por movimientos de ida y vuelta entre el análisis de los textos históricos y la puesta en marcha de secuencias didácticas diseñadas en los sistemas matemáticos escolares, realiza un estudio histórico-epistemológico de los números negativos, poniendo de manifiesto las dificultades históricas de los matemáticos en la aceptación de estos números. Este estudio pone al descubierto niveles de aceptación de los números negativos, desde su surgimiento hasta su aceptación como números legítimos, estos niveles son:

Número sustractivo: donde la noción de número se subordina a la de magnitud (por ejemplo, en a-b, a es siempre mayor que b, donde a y b son números naturales).

Numero relativo: donde la idea de cantidades opuestas en relación a una cualidad, surge en el dominio discreto y la idea de simetría aparece en el dominio continuo.

Número aislado: como el resultado de una operación o como la solución de un problema o ecuación.

Número formal: una noción matemática del número negativo, dentro de un concepto más amplio de número que abarca tanto números positivos como negativos, los enteros de hoy.

Gallardo (2002) pone de manifiesto en su estudio empírico que los tres primeros niveles son alcanzados por alumnos de Secundaria (12-13 años).

La importancia que para este trabajo tienen las "lecciones históricas" nos llevan a considerar estos niveles de aceptación en nuestro análisis de las producciones de los niños de cuarto grado de Primaria.

EL METODO

Esta investigación es de tipo cualitativo, descriptivo y explicativo. Los estudios cualitativos se refieren a aquellos cuya finalidad no es obtener datos susceptibles de análisis estadístico, sino que se basan en el uso de métodos cualitativos tales como la entrevista y la observación participante, y producen datos descriptivos. Esto no significa que se trate de una mirada superficial al fenómeno estudiado, por el contrario, los investigadores se preocupan por la precisión de sus datos y la validez del estudio (Cohen y Manion & Morrison, 2007).

EL ESTUDIO EMPIRICO

Los resultados que se reportan en este artículo pertenecen a la primera fase de una investigación cuyo objetivo es indagar la comprensión de los números enteros por parte de niños de cuarto grado de Primaria (8-9 años de edad) vía la puesta en marcha de una fase de instrucción basada en una ruta didáctica (Gallardo y Basurto, 2009). El trabajo completo se compone de tres fases: la obtención de las producciones de los estudiantes antes de una instrucción, la fase de instrucción, y la tercera, el análisis de los obstáculos que aún enfrentan los alumnos post-instrucción, así como las vías que los conducen a la compresión de este campo numérico.

Trabajamos con un grupo de cuarto grado de una escuela Primaria pública en la Ciudad de México, compuesta por 16 alumnos de ambos sexos. Se diseñó y aplicó un cuestionario de 30 preguntas con los siguientes temas de números enteros: valor, orden, operatividad en el ámbito aditivo, recta numérica y problemas de enunciado verbal. Los temas surgieron de la revisión de la literatura de investigación (Bishop, et al, 2014; Bofferding, 2014). En la primera fase del estudio nos centramos en descubrir las ideas intuitivas de los niños acerca de los temas mencionados.

El análisis de los cuestionarios nos permitió elegir a los estudiantes para entrevistas videograbadas en sesiones de 50-60 minutos. Para validar el estudio, realizamos un contraste cuestionario-entrevista. La confrontación muestra que los diálogos de la entrevista confirman los hallazgos del cuestionario.

Este trabajo contiene el análisis de los diálogos de la entrevista de alumnos de los diferentes niveles, utilizando la noción semiótica de intertexto (Rojano et al, 2014) y los "sentidos de uso" del numero negativo (Gallardo, 2002). Mostramos episodios de la lectura/transformación del problema, por parte de los niños, cuando resuelven problemas con números enteros.

Con la finalidad de mostrar los textos a los cuales posiblemente recurren los estudiantes para hacer sentido de los problemas, realizamos un análisis a priori (Van Dormolen, 1986, y Bruno y Cabrera, 2006) de los libros de texto de primero, segundo y tercer grado de Primaria, en el eje "pensamiento numérico y algebraico", los cuales ya han sido utilizados por los niños del estudio. En México la Educación Básica se considera obligatoria, por lo que los libros de texto son proporcionados por la Secretaría de Educación Pública (S. E. P.) de manera gratuita, esto significa que cualquier estudiante de un mismo grado en cualquier región del país, utiliza el mismo libro de texto.

Un resultado sorprendente del análisis referido, es la ausencia del uso de la recta numérica como medio didáctico para la enseñanza de los números naturales y su posible extensión a los enteros.

LOS RESULTADOS

Los resultados se presentan a través del análisis de los diálogos de las entrevistas de los tres niveles de desempeño y de los diferentes temas considerados en el protocolo de entrevista: valor, orden, operatividad y problemas de enunciado verbal. Designamos con la letra E al entrevistador y con A al alumno.

Episodio 1. El límite del dominio numérico.

Tarea 1**.** Se requiere conocer si el alumno es capaz de contar más allá, hacia los negativos, a través de una secuencia de conteo verbal. Se pide contar hacia atrás a partir del cinco.

E: Empieza en cinco y cuenta hacia atrás en voz alta.

A: Cuatro, tres, dos uno, cero.

E: Cuenta más atrás aún.

A: No puedo.

E: ¿Por qué?

A: Porque…porque es el menor número de todos.

EL INTERTEXTO

Del diálogo anterior puede notarse que el límite del dominio numérico del alumno es el cero, por lo cual no llega a los negativos. Este comportamiento puede explicarse por los contenidos de los libros de texto de Primaria, en los que se presentan múltiples problemas de enunciado verbal, donde se manejan los números naturales y se considera al cero como ausencia de magnitud o como la nada. También en esos materiales, frecuentemente se llega al cero a través de operaciones con números naturales.
Otros textos con los que se relaciona son los de la vida cotidiana, cuando se indica que no existe alguna cosa, se dice que existen cero cosas, es en este contexto donde se compara frecuentemente el cero con la nada.

Tarea 2. El objetivo es observar si una serie numérica escrita conduce al estudiante a ir más allá del cero y también corroborar el límite del dominio numérico del mismo estudiante.

1. Escribe en los espacios los números que siguen en la siguiente secuencia numérica:

12, 9, 6, 3,_______,_______.

A: Es que es de tres en tres, pongo el cero (en el primer espacio), pero ¿Aquí (en el segundo espacio) que pondría?

E: Pues… pon el cero y luego pon lo que tú creas que es correcto.

A: La verdad no sé qué poner.

E: ¿Se te ocurre algo?

A: Yo creo que irían cincuenta.

E: ¿Por qué cincuenta?

A: Porque van de tres números y después del cero siguen cincuenta ¿no? Cincuenta centavos.

EL INTERTEXTO

El alumno da una respuesta incorrecta para el segundo espacio de la serie numérica, lo cual se debe al desconocimiento de los números negativos y también a la presión que ejerce el entrevistador. Sin embargo, esta respuesta muestra cómo el alumno se siente comprometido a dar una respuesta, intentando dar sentido al texto en cuestión y recurriendo a otro texto que puede aparecer también en los libros de texto, como problema de enunciado verbal, pero que sin duda se encuentra en la vida comercial cuando para pagar un bien se recurre a la moneda de menor valor: cincuenta centavos. En su afán de hacer sentido, el alumno no se percata que dicha moneda es menor que un peso (el número 1 según la lectura del texto, por parte del estudiante), pero mayor que cero.

Episodio 2. Orden en los enteros

Tarea 1. Se le dan tarjetas numéricas al estudiante, las cuales tienen escritos números enteros. Se le pide que ordene las tarjetas de menor a mayor.

2	-3	0	-9	3	8	-5

E: Ahora aquí tienes unas tarjetas numéricas, se trata de que las ordenes del número menor al mayor, o sea, del más chico al más grande.

A: (Ordena las tarjetas: 0, 2, 3, al llegar a este número, pregunta: ¿Éste (-3) podría estar

aquí (0, 2, 3,)?

E: De hecho, las puedes ordenar como creas que está bien.

A: (Coloca las tarjetas con naturales en una línea: 0, 2, 3, 8; arriba, en otra línea, abajo, coloca

-3, -5, -9, alineando el 3 con el -3).

E: ¿Por qué las ordenaste en dos filas?

A: Porque aquí (señala la fila de abajo) es como si fueras en más y aquí como si fueras en menos (señala la fila de arriba).

EL INTERTEXTO

Al principio se observa que la tarea no tiene sentido para el estudiante, por ello él pregunta al entrevistador si lo que piensa hacer es adecuado. Después, recurre al texto que podríamos llamar clasificación. La tarea no es común para él ni en la escuela ni en la vida cotidiana. De ahí que lo que el alumno lee es que existen dos clases de números: unos "que no llevan signo", bien conocidos, y otros que se refieren a una sustracción o a un número signado. La sustracción de naturales es, también, sumamente trabajada en los libros de texto de Primaria. Sin embargo, nótese que el estudiante usa la frase en "más" (aunque, en realidad son sin signo) y "en menos". El texto, al cual lo relaciona, puede venir de la televisión o de los videojuegos, donde se analiza el registro de puntos, de los partidos de futbol, por ejemplo. Vemos pues surgir el número sustractivo y el número signado.

Episodio 3. Valor numérico

Tarea 1. Se pide al alumno comparar una serie de parejas de números enteros e indicar cuál de cada par es mayor que el otro.

Se analizan las respuestas de las parejas: (0, -7) y (-5, -100).

E: Por qué cero y éste (señala -7) son iguales.

A: Porque el menos siete es como si lo restaras y se vuelve cero.

E: ¿Cómo si lo restaras de qué?

A: Como si restaras siete menos siete.

E: Por qué dices que éste (señala -5) es más grande que éste (señala -100).

A: Porque éste es cien y es como si restaras por cien, se convierte en cero y éste (-5) es como si lo restaras por… menos cero, se vuelve cinco otra vez.

E: ¿Qué significa que restas por menos cero?

A: (Escribe verticalmente la resta 5 – 0)

EL INTERTEXTO

En esta tarea el sentido otorgado al texto proviene del "número sustractivo". El "signo menos" que el alumno ha visto, repetidamente, en los problemas del libro de texto, significa sustracción. En la primera pareja (0. -7) el alumno decide que -7 significa 7 – 7, por lo que ambos números son ceros y por lo tanto son iguales. En el segundo par (-5, -100) al segundo número, aplica el criterio anterior, pero el -5 lo entiende como una sustracción con minuendo cero, es decir aplica la lectura de derecha a izquierda de 0 – 5. Puede observarse que ambas maneras de entender los enteros negativos, proviene del texto sustracción, pero el alumno entiende de dos formas la resta: puede llenar el espacio antes del "signo menos" con el mismo número o bien, con el cero.

Episodio 4. Operatividad con número enteros

Tarea 1. Resuelve las siguientes operaciones:

a) 3 – 4 =
b) 0 – 2 =

E: Por qué la primera resultó cero.

A: Porque no se puede restar tres menos cuatro.

E: Luego aquí (señala la siguiente operación) el resultado es cero. ¿Por qué?

A: Porque cero menos dos es cero.

E: Entonces ¿Cuánto es dos menos cero?

A: (silencio).

E: Si te pongo ésta (escribe 2 – 0 =) ¿Cuánto daría?

A: (Silencio prolongado). Lo mismo.

EL INTERTEXTO

Además del *número sustractivo*, el estudiante recurre a la acepción "quitar" del "signo menos". La sustracción del inciso a) resulta cero porque todo lo que se le puede quitar a tres, es tres. De la misma manera, en el inciso b) a cero ya no se le puede quitar, por lo tanto se queda como cero. Los textos *número sustractivo* y *quitar*, los cuales el alumno relaciona con la sustracción de números enteros, corresponden a un texto en particular al cual, históricamente también recurrió Blaise Pascal (1819) y que dice: "Conozco gente que no puede entender que cuando restas cuatro de cero lo que resulta es cero" (Hefendel-Hebeker, 1991).

Tarea 2. Escribe el número que falta en el espacio para que la operación sea correcta.
a) 6 + -3 = _____

A: [Escribe 6 como resultado].

E: Explícame como llegaste a ese resultado.

A: Porque seis más tres son nueve menos tres dan seis.

b)_____+ -4 = -9

E: Completaste el espacio con 13 ¿Por qué?

A: nueve más cuatro: nueve, diez, once, doce, trece (cuenta con los dedos); menos cuatro: trece, doce, once, diez, nueve (nuevamente cuenta con los dedos).

EL INTERTEXTO

En ambas operaciones el alumno recurre a los textos que ha "leído" en la Primaria, asignándole al signo "más" el significado de suma y al signo "menos", el de resta. Al resolver esta tarea, nueva para él, da sentido a los signos leyéndolos en el orden en que aparecen en el texto, sumando primero y después restando, sin importarle que entre esos signos no haya número. Sin embargo, al no poder hacer lo mismo con el signo "menos" del resultado del inciso b), debido a que se encuentra con un signo igual de por medio, decide ignorar dicho signo. En ambas operaciones el estudiante llega a la solución mentalmente, pero en el inciso b) se asegura que el entrevistador se percate de lo correcto de su procedimiento. Del análisis del intertexto se puede desprender el hecho de que el alumno conceptualiza el negativo como número sustractivo.

Tarea 3. Escribe el número que falta en el espacio para que la operación sea correcta.
a) 6 +_____= 2

E: ¿Por qué escribiste seis en el espacio?

A: Porque seis más seis son doce

E: Pero el resultado no es doce, es dos.

A: El uno no se ve, pero ahí está.

E: ¿Cómo es que no se ve?

A: Porque sólo así puede encontrarse el resultado.

EL INTERTEXTO

El intertexto al que probablemente recurre el estudiante para dar esta respuesta incorrecta, está conformado por aquel texto que se maneja de manera favorable en la escuela Primaria:

a) En una adición como 1456 + 3618, se suma 6 + 8 = 14, donde se escribe el 4 y se "lleva uno". De ahí que el 14 y el 4 sean iguales. Al no conocer los números negativos, el alumno otorga sentido a esta operación recurriendo al texto mencionado.

Episodio 5. Operatividad con número enteros

Tarea 1.
a) Lee la siguiente situación.
Ayer tú le prestaste $8.00 a tu amigo para comprar estampas. Hoy le prestaste nuevamente $5.00 para completar para su almuerzo. ¿Cuál es la situación actual?

b) Algunas operaciones que otros estudiantes escribieron para describir esa situación son las siguientes. Escribe SÍ frente a la operación si crees que describe la situación y NO si crees que no la describe.

-8 + -5 = -13	
8 + 5 = 13	
-8 – 5 = -13	

E: Te pide que pongas Sí o No, frente a cada operación. Sí, si tú crees que esa operación describe la situación y No, si crees que no la describe.

A: Escribo los resultados.

E: No, ya están las operaciones con sus resultados, sólo tienes que poner Sí o No frente a ellas.

A: (Resuelve).

E: ¿Por qué la primera y la última dicen NO?

A: Porque los números están en menos, como si se restaras y no puede salir 13.

E: ¿Por qué la de en medio dice Sí?

A: Porque sumas y ahí no tienen resta, sumas ocho más cinco, igual a trece, es lo que me deben.

EL INTERTEXTO

Aquí el intertexto no sólo aparece en la solución del problema, sino desde antes cuando el alumno pregunta si escribe los resultados, a pesar de que los resultados ya existen. Esta situación viene guiada por la idea de que las operaciones son para encontrar el resultado, por lo cual la tarea le parece extraña. Se observa, además, que la palabra “prestar” o el contexto deber-tener no conduce al alumno a los números negativos, debido a que no encontró una relación textual con la escuela ni con su entorno, que asocie a dichos números con las deudas. La solución del problema es posible (y natural) encontrarla en el ámbito de los positivos.

COMENTARIOS FINALES

En el presente trabajo hemos intentado mostrar como la noción teórica de “intertexto” puede ser utilizada en el análisis de las producciones de los estudiantes al resolver problemas de un campo numérico del cual no han recibido instrucción formal: los números enteros. Consideramos al intertexto (Rojano et al, 2014), como los otros textos con los cuales se relaciona aquel que está siendo leído por los estudiantes. El nuevo texto viene permeado del sentido conferido por los alumnos al texto original gracias a esas relaciones. Este escrito también presenta la oportunidad de comprender mejor esta noción semiótica.

El análisis de los intertextos nos permitió determinar las ideas intuitivas de los niños de cuarto grado de Primaria quienes no han recibido instrucción acerca de los enteros. En este estudio, los alumnos presentaron uno de los “sentidos de uso” que Gallardo (2002) desprendió del análisis histórico-epistemológico, en relación a la aceptación de los números negativos, por parte de los matemáticos del pasado. En todas las tareas y en los diferentes niveles de desempeño, los alumnos mostraron el número negativo como *sustractivo*. La explicación se encuentra en el hecho que reveló el análisis de los libros de texto de Primaria: demasiadas tareas en el campo de los números naturales, pueden volverse un obstáculo didáctico y epistemológico en el aprendizaje de los enteros; los niños no tienen oportunidad de tratar con los significados unario y binario del “signo menos”. En su lugar, se apegan a las ideas que históricamente retardaron la aceptación de los números negativos tales como “la adición no puede disminuir la cantidad y la sustracción no puede aumentarla”, “no se puede quitar más de lo que se tiene o no se puede quitar algo de la nada” (Bishop et al, 2014).

Creemos que las dificultades que experimentan los alumnos de Secundaria, según la literatura de investigación, se deben a la exposición frecuente de ellos a las propiedades de los números naturales, cuando cursan la Primaria. Por ello, es necesario que al terminar el primer ciclo de educación Primaria y el inicio del segundo ciclo (cuarto grado), los alumnos se pongan en contacto con algunos temas de los números enteros, basándose en la idea de magnitudes opuestas, la cual históricamente, permitió la eventual aceptación de los números negativos (Bishop et al, 2014).

Siguiendo la idea de Bofferding (2014), pensamos que pesan más las experiencias didácticas en el aprendizaje de los números enteros que la edad cronológica de los alumnos de Primaria. Además, creemos que la historia de las ideas matemáticas aporta valiosas lecciones para comprender las dificultades que enfrentan los alumnos en el proceso de enseñanza/aprendizaje de tales contenidos matemáticos, así como también el estudio de las posibles formas de superar esos obstáculos. En el presente escrito nos basamos en el estudio histórico-epistemológico de Gallardo (2002).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Allen, G. (2000). *Intertextuality*. New York: Routledge.

Bishop, J.P. et al (2014). Obstacles and Affordances for Integer Reasoning: An Analysis of Children´s Thinking and the History of Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*. 43(1), 19-62.

Bofferding, L. (2014). Negative integer understanding: characterizing first graders' mental models. *Journal for Research in Mathematics Education. 45(2)*, 194-245.

Bruno, A. (2000). Algunas investigaciones sobre la enseñanza de los números negativos. *IV Simposio SEIEM*, Huelva, España.

Bruno, A, y Cabrera, N. (2006). Types of representation of the number line in texbooks. In: I. Novotná, H. Moraová, M. Kratká & N. Stehliková, (Eds.). *Proceeding of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.2, pp.249-256). Prague, Czech Republic.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education*. Routledge. London and New York: Routledge.

Filloy, E., Puig, L. & Rojano, T. (2008). *Educational Algebra. A Theorical and Empirical Approach*. New York: Springer.

Gallardo, A. (2002). The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics. 49*, 171-192.

Gallardo, A. y Basurto, E. (2009). Formas Semánticas equivalentes en problemas del pasado y del presente. *Educación Matemática*. 21(3), 67-94.

Hefendel-Hebeker, L. (1991). Negative Numbers: Obstacles in their Evolution from Intuitive to Intelectual Constructs. *For the Learning of Mathematics.* II (1) ,26-32.

Rojano, T., Filloy, E. & Puig, L. (2014). Intertextuality and sense production in the learning of algebraic methods, *Educational Studies in Mathematics*. 87, 389-407.

Talens, J. & Company, J. M. (1984). The textual space. On the notion of text. *The Journal of the Midwest Modern Language Association.* 17(2), 24-36.

Van Dormolen, J. (1986). Textual análisis. In Christiansen, B.; Howson, A. G., Otte, M. (eds.), *Perspectives on mathematics education: Papers submitted by members of the BACOMENT group*, Dodrecht, The Netherlands: D. Reidel, pp. 141-171. ico, L. (2012).

APROXIMACIÓN ONTOSEMIÓTICA DE PRÁCTICAS DE AULA SOBRE LA MEDIDA EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Onto-semiotic Approach of Classroom Pratices on Measurement in Primary Education

Nogueira, I. C.[a], Blanco, T. F.[b], Rodríguez Vivero, D.[b], Diego-Mantecón, J. M.[c]

[a]Escola Superior de Educação de Paula Frassinetti / CIPAF, [b]Universidad de Santiago de Compostela, [c]Universidad de Cantabria

Resumen

En este trabajo se presenta un estudio exploratorio sobre prácticas de aula, relacionadas con las magnitudes longitud, tiempo y masa, llevadas a cabo en Educación Primaria en Portugal.
El estudio fijó como objetivos determinar qué objetos y procesos matemáticos están implicados en esas prácticas y qué funciones ejecutan profesor y alumnos durante la realización de las mismas.
Los resultados han evidenciado el predominio del conocimiento procedimental y algorítmico y el uso de situaciones extramatemáticas o de la vida cotidiana. El profesor es el gestor sistemático del trabajo de los alumnos así como de los tiempos, espacios y materiales disponibles en el aula.

Palabras clave*: análisis didáctico, enfoque ontosemiótico, medida, educación primaria*

Abstract

The comprehension of classroom practices about Measurement in Primary Education was established as the main purpose for this exploratory research.
The study fixed as objectives to determine which mathematical objects and processes are involved in these practices and what functions teacher and students carry out while performing those classroom practices.
The results showed the prevalence of procedural and algorithmic knowledge and the use of extra mathematical situations and from daily life. The teacher is the systematic manager of students´ work and of time, space and resources available in classes.

Keywords: *didactical analysis, onto-semiotic approach, measurement, primary education*

INTRODUCCIÓN

La descripción de las prácticas impartidas en las aulas y la ulterior reflexión sobre las mismas nos parecen fundamentales para la comprensión de las situaciones de aprendizaje/enseñanza de las matemáticas. Sin descuidar la importancia de las actividades situadas antes de ese momento – por ejemplo, aquellas que definen objetivos para esta área disciplinaria, guiando su desarrollo curricular, o las prácticas de evaluación del aprendizaje de los alumnos –, la comprensión y la reflexión sobre las prácticas parecen ser, en este sentido, de importancia sin precedentes en la construcción de un escenario ilustrativo del desarrollo curricular de esta disciplina, contribuyendo así a una ampliación del corpus de conocimientos en el marco de la Educación Matemática.

El creciente desarrollo y despliegue de las perspectivas de la naturaleza sociocultural y de la cognición situada, relacionadas con el aprendizaje y la enseñanza, han venido a despertar interés en los estudios acerca de las prácticas educativas. Estas perspectivas conciben la práctica educativa como una fuente indiscutible de conocimiento y la entienden como un contexto de enseñanza y aprendizaje, construido por alumnos y profesores a través de la realización de las actividades

Nogueira, I.C., Blanco, T.F., Rodríguez-Vivero, D., Diego-Mantécon, J.M. (2016). Aproximación ontosemiótica de prácticas de aula sobre la medida en educación primaria. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 555-564). Málaga: SEIEM..

desarrolladas en dichas prácticas. Por lo tanto, cuando tratamos de comprender las interacciones entre los diversos actores que intervienen en las situaciones de enseñanza y aprendizaje y cuando deseamos contribuir con conocimientos teóricos sobre estas dichas prácticas, el estudio de la configuración de las prácticas de aula, mediante su descripción y análisis, se presenta como un procedimiento apropiado.

Describir y analizar en detalle las prácticas específicas de matemáticas puede permitir detectar las dificultades encontradas en su aprendizaje, así como los aspectos que influyen en las mismas, contribuyendo a una mejor comprensión de estas situaciones de enseñanza y a la aclaración de desarrollo curricular en esta área, en particular en lo que respeta a la exploración de la Medida.

CONTEXTUALIZACIÓN TEMÁTICA

En el panorama internacional de la investigación en Didáctica de la Matemática, la producción reciente relacionada con las prácticas sobre magnitudes y medida en contextos de educación primaria ha sido muy reducida. En el contexto portugués, y a pesar de los esfuerzos que hemos presenciado en los últimos años, todavía existe la necesidad de realizar estudios sobre los procedimientos desarrollados en las prácticas educativas de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas, la escasez de estudios específicos sobre la enseñanza de las magnitudes y su medida en contexto de aula para la Educación Primaria es una realidad (Gomes, Ralha y Hirst, 2001).

La percepción, como formadores de profesores de Educación Primaria, así como las reflexiones frecuentes con otros profesores e investigadores de esta área, de que las tareas de naturaleza rutinaria – como la aplicación de fórmulas o la conversión de unidades de medida – constituían las actividades de aula más frecuentes en la enseñanza de la medida, están plasmados en la literatura existente. Junto con el uso poco significativo de los instrumentos de medición, la insistencia y la prevalencia de este tipo de tareas en los diferentes temas de la Medida se señala como origen de su aprendizaje conceptualmente deficitaria y basada en aplicación de fórmulas y de la repetición de los procedimientos (Battista y Clements, 1996; Kamii y Clark, 1997; Outhred y Mitchelmore, 2000; Chamorro, 2001; Clements y Bright, 2003; Kamii, 2006; Liñán García y Contreras González, 2013).

En esta investigación nos centramos en la ejecución de los planteamientos curriculares definidos para la Medida en Educación Primaria. La complejidad inherente a la formalización de los conceptos integrados en la Medida hace su aprendizaje y su enseñanza tradicionalmente difíciles: para los alumnos, que no llegan a entenderlos y los reducen solo a la manipulación y a la memorización de reglas aritméticas del sistema métrico decimal; para los profesores, en la tarea de presentar dichos conceptos a sus alumnos de forma comprensible. Además, el uso frecuente de los instrumentos de medición tecnológicamente sofisticados que sustituyen medidas por números y no dan muestra de los procesos de medición – balanzas digitales, por ejemplo – permiten hablar de una creciente "*aritmetización de la medida*" (Chamorro, 1995, p. 36), excluyendo la distinción entre espacio topológico y métrico, haciendo mitigar los entornos inherentes a la conservación de la cantidad de magnitud y haciendo la transposición de la ordenación de los objetos en función de una determinada cantidad de magnitud por una ordenación numérica, entre otras reducciones.

La comprensión de las relaciones que se establecen entre los conceptos, tanto por parte del profesor como por parte de los alumnos, en el aula, se revela, por lo tanto, esencial para el tratamiento didáctico de estos temas. Sobre el aprendizaje de los conceptos de magnitud y su medida, Aires y Campos (2011) señalan no solo las dificultades más frecuentes involucradas en las prácticas sobre este tema sino también los errores más comunes realizados por los alumnos en las actividades que llevan a cabo. El no reconocimiento de una relación de proporcionalidad inversa entre la unidad de medida y el valor de la medida ocurre muy a menudo y es también muy común la confusión entre los conceptos de perímetro y área; el uso excesivo de valores enteros en las situaciones exploradas es destacado como uno de los motivos que lleva a los alumnos a tomar solo los números enteros como mediciones precisas. Un inadecuado análisis sensorial puede, algunas veces, justificar la selección incorrecta del instrumento de medición que se va a utilizar en cada situación, que también indican la baja utilización de los instrumentos de medición en diversas situaciones como la causa de la manipulación incorrecta de los mismos y, consecuentemente, para obtener valores erróneos en las mediciones.

PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Para concretizar el objetivo general de esta investigación, análisis de las prácticas de aula sobre las magnitudes longitud, masa y tiempo y su medida en la Educación Primaria, se formularon las siguientes preguntas de investigación:

P1 ¿Qué objetos y procesos matemáticos intervienen en las situaciones de enseñanza destinadas a la exploración de las magnitudes y su medida en Educación Primaria?

P2 ¿Cuáles son las funciones desempeñadas por el profesor en las aulas planificadas para la exploración de las magnitudes y su medida en Educación Primaria?

P3 ¿Cómo responden los alumnos de Educación Primaria a las solicitudes que se hacen en el aula vinculadas a la exploración de las magnitudes y sus técnicas de medida?

MARCO TEÓRICO DE REFERENCIA

La amplitud y complejidad que caracteriza el estudio de las prácticas impartidas en aulas han guiado la búsqueda de un marco teórico que, en la Educación Matemática, fuera capaz de proporcionar herramientas adecuadas para describir, analizar e interpretar dichas prácticas. El Enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS), descrito por ejemplo en Godino, Contreras y Font (2006) y en Godino (2012, 2014) parece adecuado a estas demandas.

El EOS considera los objetos matemáticos como entidades emergentes de "sistemas de prácticas manifestados por un sujeto (o en el seno de una institución) ante una clase de situaciones-problemas" (Godino, 2002, p. 242). Centrándose en las matemáticas y en sus prácticas de enseñanza y de aprendizaje, para el EOS la realización de cualquier práctica matemática implica la movilización de un conjunto de objetos y de los procesos involucrados o emergentes de tales prácticas, con normas y metanormas que sustentan y regulan dichas prácticas instruccionales. Conceptualizando nociones y ofreciendo técnicas e instrumentos para la descripción y el análisis de la actividad matemática, el EOS posibilita la comprensión de situaciones instruccionales en su complejidad y por ello fue asumido como marco teórico de referencia de esta investigación.

Este enfoque propone diferentes niveles de análisis didáctico para situaciones de enseñanza y aprendizaje: (i) identificación de las prácticas de naturaleza operativa o discursiva realizadas en la resolución de las situaciones problemáticas planteadas a los alumnos; (ii) identificación de objetos (lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) y procesos matemáticos primarios (comunicación, definición, enunciación, algoritmización, argumentación) o secundarios (con respecto las dualidades representación/significación, personalización/institucionalización, materialización/idealización, descomposición/reificación) presentes en las prácticas; (iii) descripción de las interacciones didácticas que incorporan patrones de interacción de los actores en las prácticas producidas; (iv) identificación de las normas que regulan las prácticas y las interacciones en las situaciones de enseñanza, visibles en las relaciones profesor/alumno y entre los propios alumnos; (v) valoración de la idoneidad didáctica de esas situaciones instruccionales, dirigida a la identificación de buenas prácticas y de circunstancias que pueden/deben ser objeto de ajustes en posteriores implementaciones de actividades de enseñanza similares.

En este texto presentaremos resultados parciales de la aplicación de los niveles (ii), (iii) y (iv) al análisis de prácticas impartidas en diferentes aulas de Educación Primaria acerca de las magnitudes longitud, masa y tiempo y su medida, respecto a los objetos y procesos matemáticos presentes en las prácticas y a las funciones desempeñadas por alumnos y profesor en dichas prácticas.

OPCIONES METODOLÓGICAS

Entendiendo la investigación sobre la práctica como medio de acceso a los conocimientos acerca de las prácticas y como forma de contribuir a la resolución de problemas profesionales (Ponte, 2002), se estableció como eje de guía para esta investigación la comprensión de las prácticas de clases sobre la exploración de magnitudes y de la medida en la enseñanza primaria.

Se desarrolló un estudio de casos, desde un marco interpretativo-descriptivo. Ponte (2002) considera las tres características siguientes como fundamentales para el estudio de casos: (i) deben presentar una fuerte índole descriptiva; (ii) el investigador no pretende cambiar la situación, sino entender como es y

(iii) es una investigación empírica esencialmente basada en el trabajo de campo o el análisis de documentos. Clasificamos esta investigación como un estudio de casos agregado (Stake, 1994), dado que las actividades analizadas son provenientes de varios y distintos contextos.

Técnicas y procedimientos para la recogida de datos

Optamos por la observación de los fenómenos en la acción que nos ha conducido a la "observação directa e a coligir dados em ambientes naturais" (Yin, 2005, p. 381). La confrontación de la información de distintas fuentes es un tipo de triangulación propuesta para estudios cualitativos (Ludke y André, 1986; Erickson, 1989), de ahí que se procediese a una triangulación de los datos recogiendo información en diferentes aulas, de distintos años de enseñanza y cubriendo prácticas centradas en la exploración de diversas magnitudes.

Este estudio se limita a la descripción y el análisis de prácticas específicas sobre las magnitudes fundamentales longitud, masa y tiempo, selecionadas por criterios curriculares o didácticos:

- La longitud, la masa y el tiempo son las magnitudes básicas o fundamentales que son exploradas en el nivel de escolaridad en que se centra el presente estudio.
- La magnitud longitud se puede decir que es la más próxima a los niños desde edades tempranas, debido a que su percepción y su reconocimiento no requieren de procesos de abstracción complejos, al contrario, surgen de manera natural debido a la constante presencia de esta magnitud en la vida cotidiana. Además, ya en la etapa de educación infantil, los estudiantes aprenden y practican estrategias muy variadas para su medida de un modo informal utilizando unidades de medida antropométricas. Ejemplos de aplicación en toda la etapa de Educación Primaria los podemos encontrar en la medida directa e indirecta de longitud de objetos, en cálculos matemáticos como la determinación del perímetro de figuras planas o en la definición de magnitudes derivadas de ésta como la superficie, el volumen, la velocidad y la densidad, entre otras.
- Los fenómenos de adaptación didáctica que conducen repetidamente las prácticas escolares de la magnitud escalar masa para las exploraciones de magnitud vectorial peso puede impedir la construcción adecuada de conocimientos acerca de estas magnitudes.
- El enfoque matemático de la magnitud tiempo solamente se lleva a cabo en los primeros cursos de Educación Primaria y posteriormente sus usos y aplicaciones escolares suceden en otras disciplinas. Además, el hecho de que las operaciones con esta magnitud estén asociadas con habilidades de naturaleza muy distintas (como la ordenación de una sucesión de eventos), a menudo resultan en meros aprendizajes operativos sobre bases de numeración no decimales.

Se utilizó una muestra intencional (Ghiglione y Matalon, 1989) y las observaciones fueron desarrolladas en tres centros escolares, dos públicos y uno privado. A pesar de ser llevadas a cabo en diferentes momentos cronológicos, todos los grupos seleccionados son del mismo año escolar. El estudio se lleva a cabo en el primer ciclo de la Educación Primaria en Portugal (que equivalen a los cursos de primero a cuarto de la Educación Primaria en España) y fueron dirigidas por profesores que accedieron a cooperar en esta investigación.

PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

En este apartado serán presentados los resultados del análisis efectuado, respondiendo a las preguntas de investigación previamente presentadas.

P1 ¿Qué objetos y procesos matemáticos intervienen en las situaciones de enseñanza destinadas a la exploración de las magnitudes y su medida en educación primaria?

Las actividades se apoyan en procesos de comunicación y representación de conceptos, procedimientos y propiedades matemáticas (objetos matemáticos), visibles a través de procesos de materialización: los conceptos y las proposiciones enunciadas, esencialmente de carácter no ostensivo, son realizados verbalmente (ya sea en el registro oral o escrito) y a veces en un lenguaje simbólico, como se puede observar en la Tabla 1.

Tabla 1. Objetos matemáticos y su materialización

Extracto de la transcripción de una clase de 2º curso de primaria
P: Hace mucho tiempo utilizamos nuestro cuerpo para medir longitudes.

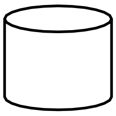
E1: Las manos: los palmos.
La profesora ejemplifica en la pizarra cómo se efectúa la medición en palmos.
P: La longitud es la distancia entre dos puntos. Imagínense que queríamos medir la distancia entre estos dos puntos.

Extracto de la transcripción de una clase de 3º curso de primaria

P: Entonces, M,¿cuántas horas tiene un día?
E1: Veinticuatro.
Una alumna completa en la pizarra: *Un día tiene 24 horas*
E2: Un día tiene veinticuatro horas, pero en vez de hacer la suma de veinticuatro horas siete veces ¡multiplicamos veinticuatro por siete!
E3: Sabemos que una semana tiene siete días y un día veinticuatro horas, entonces hacemos directamente siete veces veinticuatro.
(…)
En la pizarra, el alumno resuelve la multiplicación y escribe *24 x 7 = 168*, *concluyendo:*
Una semana tiene 168 horas

Extracto de la transcripción de una clase de 4º curso de primaria

El profesor se dirige a la pizarra donde representa:


Medición de perímetros de bases circulares
ft =____m

En el caso particular de procedimientos matemáticos de naturaleza algorítmica – comparación de cantidades de magnitud, determinación de cantidades de magnitud mediante su medida; y resolución de operaciones de cálculo – estos se apoyan en registros materializados en lenguaje simbólico y gráfico como se puede ver en la Tabla 2:

Tabla 2. Materialización de procedimientos de naturaleza algorítmica

Registro de los valores de medición de longitud (2º curso de primaria)	Cálculo de valores horarios (4º curso de primaria)
(see nested table below)	*4 h 55 min* *– 1 h 20 min* *3 h 35 min*

	Clips	*Hilos*
Grupo 1	*8 y medio*	*3 y medio*
Grupo 2	*9 y medio*	*2 y un tercio*
Grupo 3	*12*	*3 y medio*
Grupo 4	*11 y medio*	*3 y medio*
Grupo 5	*6 y medio*	*5 y medio*

Se observan procesos de generalización y particularización, tanto con respecto a las situaciones-problemas planteadas, como con respecto a los mecanismos algorítmicos experimentados en situaciones específicas, y además han de elucidar/aplicarse a otras situaciones similares, por ejemplo, véase la Tabla 3:

Tabla 3. Procesos matemáticos de generalización

Extracto de la transcripción de una clase de 1º curso de primaria

P: Ahora ya saben que podemos usar los palmos y los pies para medir. ¡Hasta las usamos para algunos juegos!
Los alumnos hacen referencia a algunos juegos tradicionales donde se usan esas unidades de medida.
E1: Mi padre también mide cosas con los pies.
E2: Mi padre cuando quiere vender las casas.

Los procesos de argumentación son provocados sobre todo por el profesor, pero las trayectorias argumentativas – en que profesor y alumnos alternan las funciones de proponente/oponente – parecen ser medios dirigidos a la institucionalización del conocimiento y están relacionados con el establecimiento de relaciones entre unidades de medida y técnicas de aplicación de procedimientos para determinar cantidades de magnitud, como se pone de manifiesto en la Tabla 4:

Tabla 4. Procesos matemáticos de argumentación e institucionalización

Extracto de la transcripción de una clase de 3º curso de primaria

P: Un centímetro sólo es un trocito pequeñito de los que tiene el metro articulado. ¿Cuántos centímetros tiene vuestro metro articulado?
E1: Cien.
P: ¿Cómo se llama este trocito (refiriéndose a un decímetro)?

Ests: Decímetro. P: Entonces, ¿un decímetro en cuántos centímetros está dividido? Ests: Diez. P: Entonces el decímetro está dividido en diez partes iguales. (…) P: ¿Un centímetro es la décima parte del metro? Un metro tiene cien centímetros; ¿cuántas veces es más pequeño el centímetro que el metro? Ests: Cien. P: Entonces, un centímetro es una ... del metro. *Los alumnos no responden y van "saltando" con el metro articulado, doblándolo y alargándolo.* P: ¡Un centímetro es la centésima parte del metro!

P2 ¿Cuáles son las funciones desempeñadas por el profesor en las aulas planificadas para la exploración de las magnitudes y su medida en Educación Primaria?

El recurrir a contextos extramatemáticos y situaciones cotidianas puede ser entendido como un medio para la construcción de una visión utilitaria y pragmática de las actividades matemáticas escolares. Sobre esta base, la motivación de los alumnos para las tareas de clase parece ser una de las principales funciones del profesor; véanse ejemplos en la Tabla 5.

Tabla 5. Función de motivación

Extracto de la transcripción de una clase de 1º curso de primaria
Ests: Mira, ¡balanzas! P: Ustedes están en lo cierto, son balanzas. ¿Para qué sirven? Ests: ¡Para pesar! P: ¡Muy bien! Entonces, ¿para qué sirven? E1: ¡Para pesar personas! E2: ¡Para pesar la fruta! E3: Para pesar, cuando queremos hacer una tarta… ¡el azúcar!
Extracto de la transcripción de una clase de 2º curso de primaria
P: Entonces, ¿van todos a la Primera Comunión? Ests: ¡Sí! P: Entonces, ahora imagínense que soy su madre y estoy organizando su fiesta. (…) P: Para ir de compras, tengo que saber las cantidades que necesito: cuánto hilo, la cantidad de naranjas,…
Extracto de la transcripción de una clase de 4º curso de primaria
P: Denme ejemplos de bases circulares, Ests: Latas, tazas, tapas de botellas,… P: Imagínense que llegamos a un pinar, estamos allí y les piden medir el diámetro de un pino.

Es el profesor quien realiza la orientación de prácticamente todos los aspectos del proceso de estudio, encargándose de decidir y definir qué se va a hacer y cómo de asignar tiempos y espacios, autorizar el uso de los recursos materiales y gestionar la realización de las tareas, como se pone de manifiesto en la Tabla 6.

Tabla 6. Función de gestión de la clase

Extracto de la transcripción de una clase de 2º curso de primaria
P: Hoy vamos a hacer un trabajo en grupo. Vamos a medir longitudes en palmos, con las manos y con los pies. (…) P: Como ya dije, hoy vamos a trabajar en grupo. Cada grupo va a tener que medir con palmos dos objetos a elegir entre los siguientes: las dimensiones de la pizarra, las dimensiones del marco de la pizarra, las dimensiones del tablero de la mesa de la profesora, las dimensiones de la clase,… (…) P: Una vez hecho esto, vamos a medir algunos objetos a mayores. Cada grupo va a buscar una tapa de una libreta de color amarillo. Voy a pedir también que cada grupo que coloque el cuaderno de matemáticas sobre la mesa. *Mientras los alumnos van a buscar los materiales solicitados, la profesora distribuye una pajita por cada grupo.*
Extracto de la transcripción de una clase de 3º curso de primaria
P: Pongan nombre y la fecha a bolígrafo y tomen nota de los resultados a lápiz en su cuaderno. Después observaremos quién y qué dificultades aparecen.
Extracto de la transcripción de una clase de 4º curso de primaria
P: Vamos a recordar la circunferencia. Recordaremos los conceptos de diámetro y radio y, posteriormente, procederemos a medir el perímetro de unos objetos circulares que les voy a dar.

(…)
P: Recordemos: Colocamos el hilo en la base circular, unimos ambos extremos, cortamos el hilo y con la regla medimos la longitud del hilo. ¿Lo entienden? Ahora, ¡vamos a hacerlo!

Las normas que regulan las relaciones establecidas por los intervinientes y la utilización de materiales son establecidas por el profesor; esta dimensión normativa también pone de relieve normas de naturaleza meta-epistémica, que de alguna manera componen los significados pretendidos para las prácticas institucionales, con implicaciones para la relación de los alumnos con el conocimiento matemático.

En la Tabla 7 se presentan algunos ejemplos de normas y metanormas identificadas en estas aulas.

Tabla 7. Normas y metanormas

Extracto de la transcripción de una clase de 3º curso de primaria
La profesora se dirige a la pizarra para escribir: $mm < cm < dm < m < dam < hm < km$ P: Vamos a escribir esta escala siempre de esta forma pues éstos son los nombres de las unidades y el orden que guardan.
Extracto de la transcripción de una clase de 4º curso de primaria
Un alumno va a la pizarra y completa la igualdad: $ft=6+6+4+4=20cm$. *El profesor se dirige a la pizarra y añade* $ft=6+6+4+4=12+8=20\ cm$. P: No pretendo complicarles, pero prefiero que lo escriban como hice yo. Es necesario aclarar que esta forma es correcta [*señalando la igualdad escrita por el alumno*] pero es mejor que se acostumbren a hacerlo de esta forma [*señalando para lo que él escribiera en la pizarra*] porque con valores más altos es más fácil hacerlo de esta forma.

Los procesos de evaluación llevados a cabo son de responsabilidad del profesor al supervisar la aplicación de técnicas y validando los resultados de los alumnos; se registran puntualmente evaluación de procedimientos y de las soluciones encontradas de la responsabilidad de los alumnos.

P3 ¿Cómo responden los alumnos de Educación Primaria a las solicitudes que se hacen en el aula vinculadas a la exploración de las magnitudes y sus técnicas de medida?

En las actividades desarrolladas dominan las acciones de recepción de información y de procedimientos de algoritmización, acompañados a veces por la formulación de propuestas de resolución y presentación de resultados. En los dos primeros cursos los alumnos toman las funciones de recepción de información de las estructuras conceptuales y procedimentales; en los últimos dos cursos la información que se recibe, tanto de forma oral como por escrito, incluye además proposiciones asociadas con las magnitudes en estudio y con técnicas de ejercitación, como se ve en la Tabla 8.

Tabla 8. Funciones desempeñadas por los alumnos

Extractos de transcripciones de clases de 1º curso de primaria
P: Vamos a pesar el estuche de J.M. *La profesora coloca el estuche en uno de los platos de la balanza y en el otro, un cono de revolución de madera.*
P: ¿Aún recuerdan cuántos palmos mide el largo de sus mesas? Ests: Sí. P: Ahora quiero que midan la mesa con los pies. *La profesora se coloca al lado de la mesa de un alumno y le explica cómo se debe desplazar a lo largo de la mesa para conseguir medirla.*
Extractos de la transcripción de una clase de 2º curso de primaria
Se forman cinco grupos de trabajo. La profesora distribuye una hoja detallando las tareas a realizar por cada grupo. Los grupos comienzan a trabajar; uno mide las dimensiones de la pizarra y del tablero de la mesa de la profesora, otro mide las dimensiones de la clase y del marco de la ventana. Todos los miembros de cada grupo realizan las tareas propuestas, comparando los resultados obtenidos con los de los compañeros de grupo. Registran en los cuadernos los resultados obtenidos.
Extracto de la transcripción de una clase de 3º curso de primaria
La profesora se coloca al lado de la pizarra. P: Es medianoche (representando esa hora con las agujas de un reloj de papel que está pegado a la pizarra) y estoy durmiendo. Duermo una hora, dos horas (va girando las agujas del reloj a medida que va hablando)… y me despierto a las… Ests: ¡Ocho horas! P: Voy para la escuela, hago las tareas y llega el…

E1: Mediodía.
P: Como dice E1, ya pasó la mitad del día.
La profesora va representando el tempo en el reloj en papel pegado a la pizarra.

Extracto de la transcripción de una clase de 4º curso de primaria

El profesor se dirige a la pizarra donde representa simbólicamente esta nueva situación:

$$\begin{array}{r} 11\ h\ 120\ m \\ -\ \underline{0\ h\ \ 60\ m} \end{array}$$

A continuación transforma el minuendo, efectuando la sustitución:

$$\begin{array}{r} 12\ h\ 60\ m \\ -\ \underline{0\ h\ 60\ m} \end{array}$$

P: Si volvemos a sustituir, queda…
E: Trece.
El profesor se dirige a la pizarra donde escribe:

$$\begin{array}{r} 13\ h\ 00\ m \\ -\ \underline{0\ h\ 00\ m} \\ 13\ h\ 00\ m \end{array}$$

P: Cuando sobrepasa sesenta, vamos restando sesenta repetidamente hasta tener valores adecuados.

En ocasiones, las soluciones formuladas por los alumnos emergen de las actividades que ellos mismos ejecutan y son también consecuencia de las interpelaciones que parecen ser provocadas intencionadamente por el profesor para este fin.

CONCLUSIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

El análisis detallado de las actividades desarrolladas en las situaciones de enseñanza y aprendizaje sobre la Medida en Educación Primaria mostraron algunas características destacables que se presentan a continuación.

La prevalencia de prácticas algorítmicas, ya sea de naturaleza manipulativa, asociada al manejo de los instrumentos de medición, o de naturaleza operativa, relacionada con la determinación de valores de cantidades de medida, en lugar de exploración conceptual, no menos importante en la construcción global de significados.

Existe un claro predominio de objetos y procesos matemáticos apoyados en elementos lingüísticos verbales en los primeros cursos de escolaridad y el lenguaje simbólico y gráfico en los cursos tercero y cuarto. Se observa también la presencia residual de actividades promotoras del razonamiento lógico-matemático apoyadas en definiciones y propiedades formales a través de trayectorias argumentativas.

Se concede una baja autonomía a los alumnos en la gestión y ejecución de las actividades de aula, con el tiempo, espacio y recursos didácticos definidos casi exclusivamente por el profesor. Las normas que regulan la participación y las intervenciones de los alumnos no difieren sustancialmente de año en año y se relacionan con el tipo de organización de los alumnos (trabajo individual o en grupo), los tiempos fijados para su ejecución (dónde y cuándo las tareas deben a ser realizadas) y las responsabilidades asignadas a cada estudiante (de presentación de soluciones a los procedimientos de demostración y justificación de resultados).

La aplicación de herramientas facilitadas por el Enfoque Ontosemiotico de la cognición e instrucción matemática (EOS), presentada, en este texto permite dar una mayor visibilidad al aula, visto como un contexto para la enseñanza y el aprendizaje construido por las actividades compartidas por el profesor y los alumnos. Esto hace posible tornar más explícito *qué* y *cómo* aprenden los alumnos y *qué* y *cómo* enseñan los profesores matemáticas en la Educación Primaria.

El análisis y comprensión de prácticas centradas en una magnitud específica transversal a los cuatro primeros cursos de la Educación Primaria (equivalentes en edad en España y Portugal), implementadas en aulas de diversos centros educativos del mismo curso de escolaridad o realizadas bajo la orientación de un único profesor con todo su alumnado, se presentan como posibilidades de futuras investigaciones. Un estudio centrado en la integración de recursos didácticos en las prácticas escolares sobre la Medida, expresamente sobre las potencialidades y los posibles obstáculos asociados a su utilización, constituirían también otra interesante posibilidad.

Referencias

Aires, A.P., Campos, H. (2011). Construção intuitiva do conceito de medida. En P. Palhares, A. Gomes, E. Amaral (Coords.), *Complementos de Matemática para Professores do Ensino Básico* (pp. 47-62). Lisboa: Lidel-Edições Técnicas, Lda.

Battista, M. T., Clements, D. H. (1998). Students' understanding of three-dimensional cube arrays: Findings from a research and curriculum development project. En R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 227-248). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Chamorro, M.C. (1995). Aproximación a la medida de magnitudes en la Enseñanza Primaria. *Uno*, 3, 31-53.

Chamorro, M.C. (2001). Las dificultades en la enseñanza aprendizaje de las magnitudes en educación primaria y E.S.O. En E. Fernández González (Coord.), *Dificultades del Aprendizaje de las Matemáticas* (pp. 79-122). Madrid: Ministério de Educación, Cultura e Deporte-Instituto Superior de Formación del Profesorado.

Clements, D. H., Bright, G. (Eds.). (2003). *Learning and teaching measurement, 2003 yearbook*. Reston, VA: NCTM.

Erickson, F. (1989). Métodos Cualitativos de Investigación sobre la Ensenanza. En M. Wittrock (Ed.), *La Investigación de la Ensenanza, II. Métodos Cualitativos y de Observación.* Barcelona: Paidos.

Ghiglione, R., Matalon, B. (1989). *Las encuestas sociológicas*. México: Trillas.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 22, (2/3), 237-284.

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49-68). Jaén: SEIEM.

Godino, J. D. (2014). *Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas*. Granada: Universidad de Granada.

Godino, J. D., Contreras, A., Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 26 (1), 39-88.

Gomes, A., Ralha, E., Hirst, K. (2001). Sobre a formação matemática dos professores do 1º Ciclo: Conhecer e compreender as possíveis dificuldades. En I. Lopes, M. C. Costa (Orgs.), *Actas do XII Seminário de Investigação em Educação Matemática*. (pp. 175-196). Lisboa: APM.

Kamii, C. (2006). Measurement of length: How can we teach it better? *Teaching Children Mathematics*, 154-158.

Kamii, C., Clark, F. B. (1997). Measurement of length: The need for a better approach to teaching. *School Science and Mathematics,* 97 (3), 116-121.

Liñán García, M. M., Contreras González, L. C. (2013). Debilidades y Fortalezas en el Conocimiento de los Temas Matemáticos en Geometría de los Estudiantes para Maestro. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.*), Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 337-344). Bilbao: SEIEM.

Lüdke, M., André, M. (1986). *Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas*. S. Paulo: Editora Pedagógica Universitária.

Outhred, L. N., Mitchelmore, M. C. (2000). Young children's intuitive understanding of rectangular area measurement. *Journal for Research in Mathematics Education,* 31 (2),144-167.

Ponte, J.P. (2002). Investigar a nossa prática. En GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Stake, R. (1994). Case studies. In Norman Denzin e Yvonna Lincoln (Eds.) *Handbook of qualitative research.* London: Sage Publications.

Yin, R. (2005) (Editor). *Introducing the world of education. A case study reader*. Thousand Oaks: Sage Publications..

Pósteres

DIALÉCTICA ENTRE LAS FACETAS OSTENSIVA Y NO OSTENSIVA DE LAS PRÁCTICAS MATEMÁTICAS. IMPLICACIONES PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORES[xiv]

Dialectic between the ostensive and non-ostensive facets of mathematical practices. Implications for teacher education

Giacomone, B. y Godino, J. D.

Universidad de Granada

El uso de visualizaciones, diagramas y materiales manipulativos (objetos ostensivos), desempeñan un papel importante en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Aunque diversos autores advierten que los objetos matemáticos (entidades abstractas, no ostensivas) deben ser distinguidos de sus posibles representaciones materiales (Duval, 2002), las relaciones entre ambos siguen siendo conflictivas, tanto desde el punto de vista epistemológico como educativo. En este trabajo se reflexiona sobre el papel clave que tiene las facetas ostensiva y no ostensiva en las prácticas matemáticas, ya que la actividad de producción y comunicación matemática no se puede realizar sin el concurso sinérgico entre ambos tipos de prácticas y los objetos implicados en las mismas (Font, Godino y Contreras, 2008). Para afrontar este problema, se utiliza una tarea que involucra visualizaciones y diagramas, la cual es analizada con el apoyo de la noción de configuración de prácticas objetos y procesos, introducida en el enfoque ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Font et al., 2008). Esta herramienta teórica permite analizar el conglomerado de objetos que intervienen en el enunciado y resolución de la tarea. Con dicho análisis se intenta mostrar que, junto con el uso del lenguaje visual – diagramático es necesario el concurso del lenguaje secuencial – analítico, y que junto a los objetos ostensivos, consustanciales con ambos tipos de lenguajes, está siempre presente una configuración de objetos que participan de la práctica matemática. Esta reflexión es necesaria porque permite a los futuros profesores tomar conciencia de que tales objetos son entendidos como las reglas de uso de los lenguajes visuales o analíticos que los representan. En consecuencia, esta visión ontosemiótica del conocimiento matemático sugiere que, el reconocimiento explícito de los objetos y significados implicados en las prácticas matemáticas es una competencia que el profesor debe desarrollar (Godino, Giacomone, Wilhelmi, Contreras y Blanco, 2015).

Referencias

Duval, R. (2002). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En F. Hitt (Ed.), *Representations and Mathematics Visualization* (pp. 311-335). North American Chapter of PME: Cinvestav-IPN.

Font, V., Godino, J. D. y Contreras, A. (2008). From representation to onto-semiotic configurations in analysing mathematics teaching and learning processes. En L. Radford, G. Schubring y F. Seeger (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture* (pp. 157-173). Rotterdam: Sense Publishers.

Godino, J. D., Giacomone, B., Wilhelmi, M. R., Blanco, T. F. y Contreras, A. (2015). Diseño formativo para desarrollar la competencia de análisis epistémico y cognitivo de profesores de matemáticas. En C. Vásquez, H. Rivas, N. Pincheira, F. Rojas, H. Solar, E. Chandía y M. Parraguez (Eds.), *XIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 138-145). Villarrica: SOCHIEM.

I Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación EDU2012-31869 y EDU2013-41141-P Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO, España).

Giacomone, B. y Godino, J. D. (2016). Dialéctica entre las facetas ostensiva y no ostensiva de las prácticas matemáticas. Implicaciones para la formación de profesores. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 567). Málaga: SEIEM

TRABAJANDO LA DEMOSTRACIÓN CON PROFESORADO DE SECUNDARIA EN FORMACIÓN

Working on proof with Secondary Education Prospective Teachers

Arnal-Bailera, A.[a], Oller-Marcén, A.M.[b]

[a]Universidad de Zaragoza, [b]Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza.

Trabajar la demostración en el aula es interesante no sólo por su importancia desde el punto de vista del quehacer matemático, sino por su contribución a la comprensión de los conceptos matemáticos involucrados(Hanna, 1995). Esta necesidad ha sido recogida de forma desigual en los distintos planes de estudios españoles desde 1934 (Ibañes & Ortega, 2002).La LOMCE establece el aprendizaje de la demostración como obligatorio y transversal a todos los contenidos. Sin embargo, los contenidos relativos a la demostración se presentan en forma de lista sin un orden lógico que ayude al profesor a planificar su enseñanza. Así, surge el interés de llevar a cabo actividades de formación de profesorado de secundaria relacionadas con la demostración, que involucren tanto aspectos relativos a la práctica de la demostración, como a su enseñanza y aprendizaje. Así pues, abordamos el diseño de una actividad de formación de profesorado de secundaria dentro del marco TPACK (Koehler y Mishra, 2009) cuyos objetivos son:

- Analizar el conocimiento de los estudiantes del Máster de profesorado de Secundaria acerca de la práctica de la demostración en Matemáticas.
- Obtener implicaciones para la mejora de la docencia del propio Máster.

La experimentación se llevó a cabo con 11 estudiantes (7 graduados en Matemáticas, 1 en Física y 3 en Ingeniería) del Máster en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria en un contexto de Geometría plana elemental. En particular, las tareas propuestas están relacionadas con las Proposiciones 18, 19 y 20 del Libro I de los Elementos y se presentaban, a modo de información, la definición de triángulo isósceles y las Proposiciones 5 y 16 de ese mismo Libro I. Además, optamos por la edición de los Elementos de Oliver Byrne (1847) por el particular sistema de representación utilizado. El estudio es exploratorio con una finalidad esencialmente descriptiva.

En cuanto al primer objetivo, observamos que los futuros docentes tienen un buen conocimiento del contenido (CK), así como un buen conocimiento tecnológico (TK). Sin embargo, aparecen más problemas cuando entra en juego la componente pedagógica y, en particular, las interrelaciones entre ellas. Respecto al segundo, destacamos el hecho de que los futuros docentes han de ser conscientes de que trabajar la demostración con alumnos de secundaria o bachillerato no debe limitarse a la mera demostración de resultados concretos, pudiéndose incluir un trabajo de adaptación o reescritura de las demostraciones con distintos métodos de demostración y diferentes sistemas de representación, incluyendo el apoyo de GeoGebra.

Referencias

Byrne, O. (1847). *The first six books of the elements of Euclid in which coloured diagrams and symbols are used instead of letters for the greater ease of learners*. London: William Pickering.

Hanna, G. (1995). Challenges to the Importance of Proof. *For the Learning of Mathematics*, 15(3), 42-49.

Ibañes, M. & Ortega, T. (2002). La demostración en el currículo; una perspectiva histórica. *SUMA*, 39, 53-61

Koehler, M. J., & Mishra, P. (2009). What is technological pedagogical content knowledge? *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 9(1), 60-70.

Arnal-Bailera, A., y Oller-Marcén, A.M. (2016). Trabajando la Demostración con Profesorado de Secundaria en Formación. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 569).Málaga: SEIEM.

HOMOLOGANDO DADOS VIRTUALES: UNA APROXIMACIÓN A LA PROBABILIDAD FRECUENCIAL

Standardizing virtual dice: an approach to the probability frequency

Boigues, F., Estruch, V., y Vidal, A.

[a]Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València

La probabilidad es una noción básica en matemáticas por ser fundamento de muchas otras. Un esquema rico en significados ayudará al aprendizaje de la estadística inferencial (Batanero, 2011), que es importante en muchos campos de las ciencias y las ingenierías. En la mayoría de los currículos universitarios, se define la probabilidad de un suceso mediante la regla de Laplace: casos favorables/casos totales, si los casos posibles son equiprobables. En cambio en las ingenierías, cobra cada vez más peso la perspectiva frecuencialista de la probabilidad, que tiene en cuenta la tendencia asintótica de la frecuencia relativa de un suceso cuando se repite muchas veces la experiencia aleatoria. En este trabajo mostramos una trayectoria de aprendizaje (Simon, 2014) dirigida a estudiantes del Grado en Ciencias Ambientales, basada en un esquema sencillo de probabilidad desde la perspectiva APOS (Badillo, Trigueros y Font, 2015). Se han diseñado tres sesiones de dos horas en la que los estudiantes trabajan en pequeños grupos. En la primera sesión, los estudiantes de cada grupo lanzan un dado real 120 veces, completan una tabla de frecuencias y deben analizar la cercanía de las frecuencias relativas de cada resultado con la probabilidad que proporciona la regla de Laplace. Este análisis, se hace a partir del valor del estadístico Chi cuadrado $U = \sum_i \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$ donde *Oi* es la frecuencia observada e *Ei* la frecuencia esperada y se decide que los resultados serían los esperados para un dado (homologable) si U<11. A continuación, en otra sesión, deberán repetir la experiencia pero esta vez utilizarán como aproximación al dado la función de EXCEL **=ALEATORIO.ENTRE(1;6)**. Por último, los alumnos deben buscar dados virtuales en la web (Key, 2006) y comprobarán si los resultados proporcionados se asemejan a los esperados para un dado perfecto. Los resultados de aprendizaje para el cálculo de probabilidades han sido interesantes utilizando la perspectiva frecuencialista. En las conclusiones, resaltamos las dificultades observadas en el manejo de Excel, concretamente en la construcción de tablas de frecuencias, que significa un obstáculo instrumental a la hora de completar correctamente el aprendizaje previsto. Por otra parte, pensamos que añadir una tarea del tipo *hallar la probabilidad de obtener una cara en el lanzamiento de dos monedas*, que contextualice la probabilidad en otro entorno distinto al trabajado a partir del dado, ayudaría a verificar si los estudiantes realmente han tematizado un esquema más acorde con la noción de probabilidad pretendida.

Referencias

Badillo, E., Trigueros, M. y Font, V. (2015). Dos aproximaciones teóricas en Didáctica del Análisis Matemático: APOE y EOS, en C. Azcárate, M. Camacho-machín, Mª T. González y M. Moreno (Coords.) *Didáctica del Análisis Matemático: una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM* (31-51). Universidad de la Laguna.

Batanero, C. (2011). Del análisis de datos a la inferencia: Reflexiones sobre la formación del razonamiento estadístico. CIEAEM XIII. Recife.

Kay, S.M. (2006). *Intuitive Probability and Random Processes using MATLAB*. New York; Springer.

Simon, M. (2014). Hypothetical Learning trajectories in Mathematics Education. En S. Lerman (ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education* (272-275). Dordrecht Springer.

Boigues, F., Estruch, V., y Vidal, A.(2016). Homologando dados virtuales: Una aproximación a la probabilidad frecuencial. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 571). Málaga: SEIEM

ANÁLISIS COMPARATIVO DE LAS PRIMERAS EDICIONES DEL TRATADO DE ÁLGEBRA SUPERIOR DE JUAN CORTÁZAR

Comparative analysis of the first editions of the *Superior Treaty of Algebra* written by Juan Cortázar

León-Mantero, C., **Maz-Machado, A**

Universidad de Córdoba

Las investigaciones en el campo de la Historia de la Educación Matemáticabuscan en los manuales de texto escolares evidencias de interés didáctico que nos permitan entender los avances matemáticos incorporados en cada época así como su evolución a lo largo de la historia. Además, nos dan acceso a situaciones, instituciones o personajes que han sido claves para la Educación Matemática. En este sentido, los libros de texto se convierten en una herramienta fundamental, pues su análisis manifiesta qué se enseñaba, cómo se enseñaba y cómo se divulgaban los conocimientos matemáticos de la época, además de describirnos el contexto social, cultural y educativo (Maz-Machado y Rico, 2015).

Schubring (1987) señaló algunos aspectos metodológicos para el análisis histórico de libros de texto focalizado tres dimensiones. Las dos primeras dimensiones consisten a analizar los cambios entre las distintas ediciones de un libro de texto tomando un manual elemental como punto de partida y estudiando después otro texto que se ocupe de un campo conceptualmente relacionado con el primero. Por último, en la tercera dimensión, se analizan los cambios dados en los libros de texto marcados por el contexto histórico en el que se desarrollan.

Presentamos el análisis realizado al *Tratado de Álgebra Superior*, del autor bilbaíno del siglo XIX, Juan Cortázar, uno de los dos primeros Catedráticos de matemáticas españoles de la Universidad Central de Madrid, cuyos libros de texto tuvieron gran influencia en la segunda mitad del siglo XIX y el primer cuarto del siglo XX. Éstos fueron publicados y reeditados en numerosas ocasiones, muestra del notable éxito de su obra (Peset, Garma y Pérez-Garzón, 1978).

El objetivo de nuestro estudio consiste en analizar las dos primeras ediciones de la obra, caracterizadas por haber sido publicadas con nueve años de diferencia y en el contexto de dos planes de estudio diferentes. Para ello realizaremos un análisis basado en un análisis de contenido que nos muestre los aspectos más destacados de ambas así como la influencia del contexto histórico en la que se desarrollan. Atenderemos a los contenidos que incluyen y los ejemplos, ejercicios y problemas que proponen.

Referencias

Maz-Machado, A., y Rico, L. (2015). Principios didácticos en textos españoles de matemáticas en los siglos XVIII y XIX. *RELIME, Revista latinoamericana de Investigación Educativa 18* (1), 49-76.

Peset, J. L., Garma, S., y Pérez-Garzón, J. S. (1978). *Ciencias y enseñanza en la revolución burguesa*. Madrid: Siglo veintiuno.

Schubring, G, (1987). On the methodolgy of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook authors. *For the learning of mathematics, 7*(3), 41-51.

León-Mantero, C. y Maz-Machado, A. (2016). Análisis comparativo de las primeras ediciones del *Tratado de Álgebra Elemental*. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 573). Málaga: SEIEM.

EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA EN EDUCACIÓN INFANTIL: "REDESCUBRIENDO EL TEATRO CALDERÓN DE VALLADOLID"

Realistic learning in Early Childhood Education: "Rediscovering Calderón Theater in Valladolid"

Novo, MªL.[a], Serrano, A.[a] y Alsina, Á.[b]

[a]Universidad de Valladolid, [b]Universidad de Girona

A partir de la pregunta de investigación ¿cómo contribuyen los contextos realistas en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil?, se presenta un estudio cuyos objetivos han sido: a) diseñar una práctica docente para niños de 5 años desde la perspectiva de la Educación Matemática Realista (EMR); b) analizar los aprendizajes matemáticos que realizan los alumnos en el contexto de dicha práctica.

Para la realización de dicha práctica se han considerado los seis principios de la EMR (Freudenthal, 1991), interpretados y sintetizados por Alsina (2011): 1) Principio de **actividad**: las matemáticas se consideran una actividad humana accesible a todas las personas; 2) Principio de **realidad**: las matemáticas se aprenden partiendo de contextos reales; 3) Principio de **niveles**: los niños pasan por distintos niveles de comprensión de las matemáticas, desde la matematización de las situaciones cotidianas hasta el establecimiento de relaciones más formales y abstractas; 4) Principio de **reinvención guiada**: los alumnos tienen un papel protagonista durante el proceso de aprendizaje y coconstruyen y reconstruyen sus conocimientos matemáticos a través de la guía del profesor; 5) Principio de **interacción**: el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas es una actividad social basada en la interacción "alumno-alumno" o "alumno-profesor". Para ello, resulta imprescindible el empleo de diferentes estrategias como la negociación y el diálogo; y 6) Principio de **interconexión**: los bloques de contenido matemático se presentan al alumnado como entidades conectadas entre ellas. Con base a estos principios, para el diseño de la práctica docente "Redescubriendo el Teatro Calderón de Valladolid" se han considerado las fases recomendadas por Alsina (2011): matematización del contexto, trabajo previo con los niños, trabajo en contexto y trabajo posterior en el aula. De forma más concreta, se han considerado los siguientes aspectos: la selección de un contexto de la vida cotidiana como punto de partida para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, la interacción como medio de aprendizaje y la coconstrucción y reconstrucción de los conocimientos matemáticos por parte de los alumnos, frente a la transmisión de una matemática pre-construida.

Los datos obtenidos señalan que dicha práctica ha permitido educar la mirada matemática de los niños para que puedan ser competentes en la interpretación de su realidad. Una vez realizada la actividad, además de ver un teatro, son capaces de fijarse en los números de sus butacas, en los cilindros de los focos, en los semicírculos de la fachada, etc. En síntesis, con este tipo de propuestas educativas los alumnos de las primeras edades van adquiriendo progresivamente las habilidades necesarias para descubrir e interpretar las matemáticas presentes en muchas circunstancias de su vida cotidiana.

Referencias

Alsina, Á. (2011). *Educación matemática en contexto de 3 a 6 años.* Barcelona: ICE-Horsori.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education.* Dordrectht: Kluwer Academic Publishers.

Novo, Mª.L., Serrano, A., y Alsina, Á. (2016). Educación Matemática Realista en Educación Infantil: "Redescubriendo el Teatro Calderón de Valladolid". En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 575). Málaga: SEIEM.

APRENDER A OBSERVAR EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO DE LOS ESTUDIANTES DE INFANTIL EN RELACIÓN A LA MAGNITUD LONGITUD

Learning to notice childhood students' mathematical thinking in relation to the length magnitude le in English

Sánchez-Matamoros, G.[a]; Valls, J.[b]; Moreno, M.[b]

[a]Universidad de Sevilla, [b]Universidad de Alicante

En los últimos años las investigaciones sobre el desarrollo profesional del profesor de matemáticas han subrayado la importancia de la competencia docente mirar profesionalmente la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Esta competencia docente implica la interrelación de diferentes destrezas (Mason, 2002; Sherin, Jacobs, & Philipp, 2010) *identificar* (las estrategias usadas por los estudiantes), *interpretar* (la comprensión puesta de manifiesto por los estudiantes), y *decidir* (cómo responder teniendo en cuenta la comprensión puesta de manifiesto por los estudiantes).

Nuestra investigación se centra en cómo los futuros maestros de educación infantil interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes en relación a la magnitud longitud y su medida y toman decisiones de acción. Los participantes fueron 40 estudiantes para maestro de educación infantil de la Universidad de Alicante. Diseñamos un experimento de enseñanza con 5 sesiones de 100 minutos cada una. En estas sesiones se proporcionó a los futuros maestros información teórico-práctica relativa a la progresión en el aprendizaje de la noción de la magnitud longitud y su medida (Sarama y Clements, 2009). Además, se proporcionaron registros de la práctica (viñetas, video-clips de situaciones de enseñanza-aprendizaje) que los estudiantes para maestro tuvieron que analizar considerando las siguientes instrucciones: **1**.- Indica qué *elementos matemáticos* están implícitos. **2**.- Justifica las *características de la comprensión* puestas de manifiesto.**3**.- Según las características de la comprensión identificadas en la cuestión 2, ¿en qué *nivel de comprensión* situarías a los niños? Justifica tu respuesta.**4**.- Suponiendo que eres el/ la maestro/a de estos niños, define *un objetivo de aprendizaje* **y** propón *una tarea* para seguir profundizando en la comprensión de la magnitud longitud y su medida.

Los resultados muestran formas diferentes en las que los estudiantes para maestro reconocer la progresión en el aprendizaje de los niños/as de infantil relativa a magnitud longitud y su medida. La manera en la se reconocían los elementos matemáticos clave en la situación, parece influir en el tipo de propuestas de acción que proponen para apoyar la progresión en el aprendizaje de los niños/as de educación infantil.

Reconocimientos. Esta investigación ha recibido el apoyo del Proyecto I+D+i EDU2014-54526-R del Ministerio de Ciencia e Innovación, España y de grupos de investigación emergentes GV/2014/075 de la Conselleria de Educación, Cultura y Deporte de la Generalitat Valenciana.

Referencias

Mason, J. (2002). Researching your own practice. The discipline of noticing. London: Routledge Falmer.

Sherin, M. G., Jacobs, V. R. y Philipp, R. A. (eds) (2010), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes.* New York: Routledge.

Sarama J. y Clements D.H. (2009). Early Childhood Mathematics Education Research. Learning Trajectories for Young Children. London and New York: Routledge (Geometric Measurement, Part 1: Length, pp. 273-292).

Sánchez-Matamoros, G.; Valls, J. y Moreno, M. (2016). Aprender a observar el pensamiento matemático de los estudiantes de infantil en relación a la magnitud longitud. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 577). Málaga: SEIEM.

INNOVACIÓN DIGITAL EN EL AULA DE MATEMÁTICAS: DESARROLLO DE MATERIALES DOCENTES COMO APOYO EN LA ENSEÑANZA

Digital Innovation in the mathematics classroom: development of educational materials to support education

Delgado-Martín, L., Ruiz-Méndez, C.

Universidad de Salamanca

La propuesta que se presenta forma parte de un proyecto de innovación docente, vinculado al Servicio de Producción e Innovación Digital de la Universidad de Salamanca, desarrollado en el curso 2015-16.En la asignatura de Matemáticas, cuyos contenidos tratan sobre Geometría y su didáctica, se generaron vídeos teórico prácticos, centrados en el recurso didáctico de la papiroflexia. Las experiencias habían sido realizadas en el aula habitual y además el Servicio de Innovación y Producción Digital nos proporcionó asesoramiento técnico y metodológico, realizando grabaciones en un plató de televisión que posteriormente se colgaron a disposición de los alumnos en el Campus Virtual Studium de la Universidad.La papiroflexia es un recurso didáctico fundamental que llevar a las aulas de primaria, para que en las clases de matemáticas se trabaje y aprenda,aunque no lo parezca (Caboblanco, 2010). Es fundamental hacerreflexionar a los futuros docentes, sobreprácticas educativas, porque si no consiguen despertar interés, si no hay cambios en la dinámica de una clase, el proceso de aprendizaje nunca podrá mejorar (Delgado, 2016). Trabajando en el aula doblando papel, el aprendizaje colaborativo es real y los alumnos y los profesores colaboran en la resolución de problemas (Delgado, Zapatero &Fiöl, 2004). La visualización espacial comienza a trabajarse en los primeros años escolares, pero luego se va perdiendo (Muñoz, 2010), así el paso de 2D a 3D resultacomplicado. Con la papiroflexia se favorece la visualización mediante la conexión entre el cerebro y las habilidades motoras (Fiol, Dasquens& Prat, 2011).

Referencias

Caboblanco J. (2010). Papiroflexia y matemáticas en educación primaria. UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas, 53, pp. 38-44.

Delgado, L. (2016).Innovation in mathematics classrooms: not only contents, not only results. A forethought/reflection on the training of future teachers. 10th International Technology, Education and Development Conference, INTED2016 Proceedings, 3736-3745. doi: 10.21125/inted.2016.1898

Delgado M. L., Zapatero M. S., Fiol, M. Ll. (2004). 2D vs 3D. La papiroflèxia, un recursdidàctic. Perspectiva escolar Monográfic: Etnomatemátiquesmatemàtiques per a la diversitat, Publicació de Rosa Sensat, 284, 59-65.

Fiol, M.LL., Dasquens, N., Prat M. (2011). Student Teachers introduce origami in kindergarten and primary schools: Froebel revisited. Origami 5. Fitfth International Meeting of Origami Science, Mathematics and Education, Singapore 2010, 151-164.CRC Press: Boca Raton, Florida, USA

Muñoz Santonja J. (2010). Matemáticas doblando papel. UNO Revista de didáctica de las Matemáticas, 53, 5-10

Delgado-Martín, L. Y Ruiz-Méndez, C. (2016). Innovación digital en el aula de matemáticas: desarrollo de materiales docentes como apoyo en la enseñanza. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 579). Málaga: SEIEM.

IDENTIFICANDO LAS RELACIONES DIMENSIONALES DE LA ESCALA DE ACTITUDES HACIA LAS MATEMÁTICAS PROPUESTA POR AUZMENDI EN MAESTROS EN FORMACIÓN

Identifying the dimensional relations about the attitudes scale toward Mathematics proposed by Auzmendi in teacher training

Casas, J.C.[a], León-Mantero, C.[a], Maz-Machado, A.[a], Jiménez-Fanjul, N.[a], Madrid, M.J.[a]

[a]Universidad de Córdoba

Diversas investigaciones señalan que las actitudes hacia contenidos o asignaturas de Matemáticas atienden a uno de los factores más influyentes en la futura labor docente de los maestros en formación.Por ello, consideramos que es necesario y de interés comparar las diferentes dimensiones que posee la actitud hacia las matemáticas entre los alumnos de Educación Primaria, debido a que en el grado que están estudiando deben adquirir tanto conocimientos de Matemáticas como la capacidad para impartirlos en su futuro empeño laboral.

La finalidad de este estudio es la construcción de un modelo de ecuaciones estructurales que nos permita analizar la influencia que existe entre los cinco factores dimensionales estudiados en la escala de actitudes hacia las matemáticas, diseñada y validada por Auzmendi (1992), a partir de las respuestas dadas a los ítems.

La muestra de nuestro estudio está formada por un grupo de 277 estudiantes de primer curso del grado de Educación Primaria de la Universidad de Córdoba, 112 hombres y 165 mujeres, con edades comprendidas desde los 18 hasta los 48 años. La escala de actitudes aplicada, tipo Likert, ha sido aplicada en diversas investigaciones sobre actitudes matemáticas en diferentes niveles y titulaciones (Maz-Machado, León-Mantero, Casas y Renuado, 2015). Esta escala consta de 25 preguntas con las opciones de puntuación siguiente: Totalmente en desacuerdo= 1, Desacuerdo= 2, Neutral=3, De acuerdo= 4 y Muy de acuerdo= 5. Las preguntas se agrupan en cinco factores dimensionales: Ansiedad, Valor o utilidad, Agrado, Motivación y Seguridad-confianza. Para la fiabilidad de la prueba aplicada se obtuvo el Alfa de Cronbach ($\alpha = 0{,}887$), poniéndose de manifiesto que en su conjunto la escala posee una buena consistencia.Para la estimación de los coeficientes, usamos el método de mínimos cuadrados no ponderado.

Aunque todos los factores dimensionales están relacionados entre sí de forma significativa, podemos observar relaciones más fuertes entre la utilidad y la confianza, la utilidad y el agrado o el agrado y la confianza hacia las matemáticas. Las relaciones más débiles se encuentran entre el agrado y la motivación y entre la motivación y la confianza.

Referencias

Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática/estadística en las enseñanzas Medias y universitarias. Características y medición*. Bilbao: Mensajero.

Maz-Machado, A., León-Mantero, C. M., Casas, J. C. and Renaudo, J. (2015). Attitude towards mathematics of computer engineering students. *British Journal of Education, Society &Behavioural Science, 8*(2), 127-133

Casas, J.C., León-Mantero, C., Maz-Machado, A., Jiménez-Fanjul, N., Madrid, M.J.. (2016). Identificando las relaciones dimensionales de la escala de actitudes hacia las matemáticas propuesta por Auzmendi en maestros en formación. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 581). Málaga: SEIEM.

CONOCIMIENTO DE UN PROFESOR UNIVERSITARIO EN LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE SUCESIÓN NUMÉRICA

Knowledge of a university teacher in the teaching of numerical succession

Codes, M., González, M. T.

Universidad de Salamanca

El cuarteto del conocimiento (knowledge quartet) es un modelo teórico que ahonda en la práctica docente a través de la observación de las aulas y cuyo foco está centrado en el conocimiento del profesor. Para analizar este conocimiento, Rowland, Huckstep y Thwaties (2011) generaron un conjunto de 20 códigos organizados en cuatro dimensiones por ser de naturaleza similar: fundamentación, transformación, conexión y contingencia. En este póster se analiza el conocimiento de un profesor universitario cuando introduce el concepto de sucesión numérica con una lluvia de ideas a través de esas cuatro dimensiones. Este conocimiento es imprescindible para la formación de los futuros profesores.

La primera dimensión, *fundamentación*, se refiere al conocimiento que el profesor posee por su formación, tanto matemática como relativo a su enseñanza. La elección del profesor de comenzar la clase introductoria tratando de establecer un diálogo con los alumnos para partir de sus conocimientos previos, muestra el conocimiento relacionado con la didáctica de la Matemática, en concreto con cómo cree que se enseña y aprende esta materia.

La dimensión *transformación* hace referencia a las competencias que se ponen en juego cuando se transforma el conocimiento base en conocimiento para ser aprendido, por ejemplo cuando el profesor selecciona un tipo u otro de ejemplo o se decide qué tarea proponer para comprender alguna noción. Así, este profesor eligió un enunciado sencillo para que sus alumnos obtuvieran el término general de una sucesión numérica a partir de los primeros términos de la sucesión, porque se trataba de una clase introductoria.

La dimensión *conexión* apunta al conocimiento empleado al dar una estructura coherente al discurso en el aula, en la que se incluye las relaciones con distintas partes del currículo y otras nociones matemáticas. Incluye también el conocimiento sobre la demanda cognitiva de cada concepto matemático o tarea que se plantea al alumno. Este conocimiento se aprecia en la alusión a las nociones de función, cota, monotonía, que están íntimamente relacionadas con la de sucesión.

La última dimensión, la *contingencia*, está asociada con la habilidad para responder ante situaciones imprevistas que no forman parte de la planificación de la enseñanza. Este profesor define una sucesión numérica relacionando todos los términos que le proponen los alumnos. En este sentido, solo un conocimiento base profundo de la materia no es suficiente para enlazar todos los términos que, expuestos con sentido, expresan los alumnos. La experiencia del profesor es clave para esta categoría.

Referencias

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2011). Secondary mathematics teachers' content knowledge: the case of Heidi. In M. Pytlak, & T. R. Swoboda (Ed.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2827-2837). Rzeszow, Poland: University of Rzeszow. Disponible en http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/17a/CERME7_WG17A_Rowland_et_al.pdf

Codes, M., González, M. T. (2016). Conocimiento de un profesor universitario en la enseñanza del concepto de sucesión numérica. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p583). Málaga: SEIEM..

ACTIVIDAD COMUNICATIVA Y MATEMÁTICA EN UN AULA CON ESTUDIANTES SORDOS[xv]

Communicative and mathematical activity in a classroom with deaf students

Nairouz, Y. y Planas. N.

Universitat Autònoma de Barcelona

Se presenta un trabajo en un aula de matemáticas de una escuela para estudiantes sordos de Bogotá, Colombia. Se adopta una perspectiva capacitadora del estudiante sordo, el cual elabora y potencia su actividad matemática en direcciones particulares según los recursos comunicativos (sociales, culturales y lingüísticos) con los que cuenta (Healy, Becerra, Fernandes y Botelho, 2016; Hyde, Zevenbergen y Power, 2003). La pregunta de investigación es: ¿Cómo se produce la actividad matemática y su comunicación en entornos de aula con estudiantes sordos? Enlazando con la pregunta, se plantean tres objetivos de consecución sucesiva: 1) Examinar rasgos del escenario comunicativo del aula; 2) Examinar rasgos de la actividad matemática en dicho escenario; 3) Relacionar el desarrollo de la actividad matemática con rasgos del escenario comunicativo.

El análisis se enfoca en aspectos de la comunicación matemática en un grupo de cuatro estudiantes durante la resolución de una tarea aritmética verbal con contexto cotidiano. Los datos se obtienen mediante grabaciones de clase con audio y video junto con transcripciones de momentos de la actividad matemática. La aplicación de métodos de comparación y contraste lleva a la identificación de singularidades que, a su vez, permiten la generación de temas emergentes sobre la actividad en el aula con participantes sordos y oyentes. Entre otros resultados destacamos: 1) la influencia de los rasgos del escenario comunicativo que facilitan la participación de quienes se expresan mediante la lengua oral; 2) la relevancia del uso de artefactos como la ficha del problema que promueven la comunicación de ideas a través de canales visuales; y 3) la dificultad del estudiante sordo profundo para explorar oportunidades de participación matemática en la discusión con sus compañeros en el grupo. El detalle empírico de estos temas ilustra varias particularidades a lo largo de la resolución de la tarea tales como la alternancia de razonamientos inductivos y deductivos; muchos de estos razonamientos no se completan como consecuencia de la insistencia de algunos estudiantes por operar con números del enunciado. Por otra parte, de manera transversal a los distintos temas construidos, se observa la experiencia de ambigüedades conceptuales y léxicas con determinados términos matemáticos del enunciado de la tarea tales como "la mitad". En general, la persistencia de varios de los hechos transversales identificados deberá confirmarse con el análisis de datos adicionales del aula del estudio y, eventualmente, de otras aulas con estudiantes sordos.

Referencias

Healy, L., Becerra, E., Fernandes, S. H. A. y Botelho, J. L. (2016). Mathematics in the hands of deaf learners and blind learners: Visual-gestural-somatic means of doing and expressing mathematics. En Barwell, R. et al. (eds.) *Mathematics Education and Language Diversity. The 21st ICMI Study* (pp. 141-162). Nueva York: Springer.

Hyde, M., Zevenbergen, R. y Power, D. J. (2003). Deaf and hard of hearing students' performance on arithmetic word problems. *American Annals of the Deaf, 148*(1), 56-64.

I [1] El estudio se realiza/ en el marco del Programa de Doctorado en Educación de la Universidad Autónoma de Barcelona. La primera autora es estudiante de este Doctorado. Se cuenta con el apoyo del Proyecto EDU2015-65378-P, MINECO

Nairouz, Y. y Planas, N. (2016). Análisis de la actividad comunicativa y matemática en un aula con estudiantes sordos. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 585). Málaga: SEIEM.

COMPETENCIAS Y CONOCIMIENTOS DIDÁCTICOS DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS SEGÚN EL EOS

Mathematics teacher’s didactical competences and knowledge in the OSA framework

Godino, J. D. y Giacomone, B.

Universidad de Granada

En este póster se realiza una representación diagramática del modelo de “Competencias y Conocimientos Didácticos del profesor de Matemáticas” (CCDM), desarrollado en el marco del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007). Se mostrarán las cinco sub-competencias que componen la competencia específica de “análisis e intervención didáctica”, asociadas al dominio de las herramientas teóricas: significado global, configuración ontosemiótica, configuración didáctica, dimensión normativa e idoneidad didáctica. La aplicación de las mencionadas herramientas a la solución de los problemas didácticos implica la puesta en juego de conocimientos específicos ligados a cada una de las facetas implicadas en los procesos de estudio matemáticos: epistémica (significados institucionales), ecológica (currículo y conexiones interdisciplinares), cognitiva (significados personales), afectiva (actitudes, afectos, emociones), interaccional (negociación de significados) y mediacional (recursos). Estas facetas proporcionan criterios para categorizar los conocimientos didácticos - matemáticos del profesor de matemáticas (Godino, 2009), los cuales están necesariamente imbricados en la realización competente de las prácticas matemáticas y didácticas.

La articulación de las competencias y conocimientos didácticos se puede hacer de manera natural en el marco del EOS. En efecto, las prácticas matemáticas y didácticas son entendidas como acciones del sujeto orientadas hacia el fin de resolver un problema o realizar una tarea (no son meras conductas o comportamientos). Estas prácticas pueden ser de tipo discursivo - declarativo, indicando la posesión de conocimientos, o de tipo operatorio - procedimental, indicando la posesión de una capacidad o competencia. Ambos tipos de prácticas están imbricados, de manera que la realización eficiente de prácticas operatorias conlleva la puesta en acción de conocimientos declarativos, los cuales se pueden referir a la descripción de los instrumentos usados o a resultados previamente obtenidos que deben ser activados. A su vez, la comprensión de los conocimientos declarativos requiere que el sujeto esté enfrentado a las situaciones que proporcionan la razón de ser de tales conocimientos e implicado (disposición para la acción) en su resolución eficiente.

La representación diagramática de este póster, así como una explicación audiovisual, está disponible en http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/pages/videoconferencias.html

Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación EDU2012-31869, EDU2013- 41141-P y EDU2015-64646-P, Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO).

Referencias

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D. y Giacomone, B. (2016). Competencias y conocimientos didácticos del profesor de matemáticas según el EOS. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 587). Málaga: SEIEM.

MATEMÁTICAS PARA LA SOCIEDAD: UNA VISIÓN DESDE LOS LIBROS DE ARITMÉTICA DEL SIGLO XVI

Mathematics for the society: a view from arithmetic books written during the sixteenth century

Madrid, M. J. [a], Maz-Machado, A.[a], López, C. [b] y León-Mantero, C.

[a]Universidad de Córdoba, [b]Universidad de Salamanca

Dentro de las investigaciones en Historia de la Educación Matemática el análisis de libros antiguos utilizados para la enseñanza de las matemáticas supone una importante fuente de información. Esto se debe a que los textos antiguos ayudan a reconstruir los conceptos, a contextualizarlos y a conocer sus diversos acercamientos, a interrogarse sobre la validez de las formas de argumentar vigentes en otras épocas, y a buscar los fundamentos de las formas actuales. De la misma forma, aportan información sobre lo pedagógico: las formas de organizar y presentar el contenido, sus representaciones, las situaciones, problemas y ejercicios utilizados para explicar mejor los conceptos y métodos matemáticos (Gómez, 2001). En este sentido, el objetivo de este estudio es identificar el interés social que otorgan los autores de libros de aritmética del siglo XVI a las matemáticas, es decir, si los contenidos matemáticos presentes en las obras se pueden encontrar dentro de algún contexto cotidiano, científico, económico, militar, etc.

La investigación que se ha realizado es exploratoria, descriptiva y ex post facto. Se encuadra dentro de la investigación histórica y se basa en el análisis de libros de texto antiguos de matemáticas. Para realizarla, se seleccionaron nueve obras con contenidos aritméticos escritas en castellano y cuya primera edición se publicó a lo largo del siglo XVI. Se utilizó como técnica de análisis el análisis de contenido.

Los resultados muestran que todas las obras destacan por su marcado interés social. Fueron escritas con una fuerte intencionalidad práctica relacionada fundamentalmente con el comercio, por ello incorporaban un gran número de problemas directamente relacionados con las necesidades de los mercaderes del siglo XVI: compra y venta de mercancías, ganancias y pérdidas económicas, intereses, descuentos, equivalencias entre monedas, medidas, etc. Las obras no buscaban únicamente ayudar a los comerciantes a aprender las distintas reglas básicas de la aritmética sino que los problemas que incluían les sirvieran como modelo en situaciones semejantes de su vida laboral. Por eso incluso aquellos autores que incluyen contenidos algebraicos orientan sus ejemplos al comercio.

Además de para el comercio, muchos autores consideran que sus contenidos serán útiles también para otras profesiones. Ejemplo de ello es el autor Antich Rocha que considera que su obra será útil para cualquier profesional que la necesitara: filósofos, geómetras, músicos, astrólogos, cosmógrafos, arquitectos, etc. Algunos incluyen también contenidos dentro de un contexto cotidiano, por ejemplo Juan Pérez de Moya incluye explicaciones sobre las fechas de las llamadas fiestas "movibles", es decir sobre los días festivos que cambian su fecha anualmente.

Palabras clave: *historia de la educación matemática, aritmética, siglo XVI, interés social.*

Referencias

Gómez, B. (2001). La justificación de la regla de los signos en los libros de texto: ¿Por qué menos por menos es más? En P. Gómez y L. Rico (Eds.) *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*. (pp. 257-275). Granada: Universidad de Granada.

Madrid, M. J., Maz-Machado, A., López, C. y León-Mantero, C. (2016). Matemáticas para la sociedad: una visión desde los libros de aritmética del siglo XVI. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 589). Málaga: SEIEM

BIBLIOGRAFÍA USADA EN LA FORMACIÓN MATEMÁTICA DEL PROFESORADO DE INFANTIL

Mathematics education bibliography used for early childhood teachers in training

Madrid, M. J.[a], Jiménez-Fanjul, N.[a] y Maz-Machado, A.[a]

[a]Universidad de Córdoba

Con la implantación del Espacio Europeo de Educación Superior en España, las universidades tuvieron la potestad para diseñar sus planes curriculares en todas las titulaciones de forma autónoma. Esto hace que lo que se enseña en una universidad para una titulación pueda no tener nada que ver con lo que se enseña en otra universidad incluso de la misma ciudad, aunque ambas indiquen que desarrollan las mismas competencias (Jiménez, Ramos y Ávila, 2011). Esta cuestión afecta a la formación matemática de los futuros profesores de educación infantil y dado que serán los encargados de iniciar a los niños en las matemáticas es importante conocer qué o cómo se hace esto. Para ello, se podrían analizar los contenidos que se imparten pero es muy complicado porque en ocasiones las guías docentes de las titulaciones solamente indican un tema genérico y el título del mismo no da cuenta del contenido. Otra opción es conocer cuáles son los referentes bibliográficos que se utilizan y se indican a los propios alumnos. Esta información es pública y permite conocer cuáles son las tendencias y los marcos teóricos que se enseñan en el grado de educación infantil. Por tanto, nuestro objetivo es identificar cuál es la bibliografía que se utiliza en la enseñanza matemática para el profesorado en formación de educación infantil y conocer su actualidad.

Para realizar el estudio se escogió una muestra de 13 universidades españolas en las que se imparte la titulación y cuyas guías docentes son accesibles desde sus páginas webs. Se descargaron todas las guías docentes y se pasó la información a una base de datos *ad hoc*. Se realizó un proceso de estandarización de los nombres y de las referencias porque para cada asignatura utilizan formatos distintos incluso en la misma universidad. Se obtuvieron 493 referencias, que se presentan como bibliografía básica, específica, recomendada o complementaria. Posteriormente se hicieron conteos de frecuencias de cada autor, referencia y año para determinar la antigüedad de las mismas.

Se halló que los autores con el mayor número de presencia en la bibliografía sugerida por el profesorado son en su orden: Carmen Chamorro (24), Ángel Alsina (17), Constance Kamii (15), Carlos Maza (15) y Mª Antonia Canals (12). A su vez, los documentos más recomendados son: *Didáctica de las Matemáticas. Colección Didáctica Infantil* (2005) de Carmen Chamorro e *Iniciación a La Matemática. Materiales y Recursos Didácticos* (1988) de Mª Teresa Cascallana.

Por otra parte, se evidenció que la bibliografía usada y recomendada es bastante antigua, el 65% es anterior al año 2000 y el 43% anterior a 1990. La media de antigüedad es de 25 años. Sorprende hallar que en esta titulación se sigan recomendando libros como: *Iniciación a la matemática moderna* (1973) de Burgos o *Conceptos y métodos de la matemática moderna* (1972) de Etayo.

Palabras clave: *Formación del profesorado de infantil; Educación matemática; Bibliografía.*

Referencias

Jiménez, L, Ramos, F. J, y Ávila, M. (2012). Las Universidades Españolas y EEES: Un Estudio Sobre los Títulos de Grado de Maestro en Educación Primaria. *Formación universitaria*, *5*(1), 33-44.

Madrid, M. J., Fanjul-Jiménez, N. y Maz-Machado, A. (2016). Bibliografía usada en la formación matemática del profesorado de infantil. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 591). Málaga: SEIEM.

CONCEPCIONES DE PROFESORES EN FORMACIÓN RESPECTO A LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA LINEAL

Concepts of teachers in training related to teaching linear algebra

Serrano, I.[a], Maz-Machado, A.[a] y Madrid, M.J.[a]

[a]Universidad de Córdoba

En los últimos años ha cobrado interés investigar diversos aspectos relacionados con la enseñanza del álgebra lineal en diferentes niveles educativos. Se han analizado desde la incorporación de nuevas tecnologías hasta el tipo de estrategias para una buena enseñanza de estos contenidos. Esta última línea ha llevado a Harel (2000) a enunciar tres principios fundamentales para su enseñanza: el de concreción, el de necesidad y el de generalidad.

En España para ejercer la enseñanza de las matemáticas en la ESO y en Bachillerato se exige una formación obligatoria en un programa de máster de Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato en la especialidad de Matemáticas. La experiencia de los últimos años indica que la mayor parte de quienes cursan este máster no provienen de la titulación de matemáticas. Por tal razón, el propósito de ese estudio es conocer cuáles son algunas de las ideas o concepciones que estos estudiantes tienen sobre la utilidad del álgebra lineal y su docencia.

Para realizar un estudio piloto se tomó una muestra no aleatoria de 16 sujetos que cursaban el máster para profesor de matemáticas en tres universidades españolas. Se aplicó un cuestionario *ad hoc* de respuestas abiertas el cual se validó mediante triangulación con profesores expertos de didáctica de la matemática de las universidades donde se tomó la muestra. La participación fue anónima y voluntaria. La información se procesó y analizó mediante el software ATLAS.TI. El estudio es cualitativo y aquí se presentan algunos de los resultados de este.

Se halló que los profesores en formación consideran útil al álgebra lineal por cuatro aspectos: a) Por sus aplicaciones en distintas ramas de la ciencia; b) Por facilitar el paso del lenguaje cotidiano al lenguaje formal propio de las matemáticas; c) Por ser una herramienta matemática que sirve de apoyo instrumental a la manipulación de datos; d) Por su aplicación a la vida diaria al facilitar la comprensión del entorno mediante la modelización de situaciones o fenómenos.

Por otra parte, sobre lo que consideran necesario para ser un buen profesor de esta asignatura en la educación secundaria, los titulados en matemáticas consideran importante tanto un conocimiento matemático y como didáctico. Otros también señala la necesidad que el profesor tenga empatía hacia la asignatura. Otro grupo señala que basta con tener una formación universitaria no necesariamente matemática. La experiencia docente previa aparece de manera aislada y de forma escasa, mientras que la actitud del profesor aparece relacionada con sus aptitudes.

Palabras clave: *Profesores de secundaria en formación; Álgebra lineal, Educación matemática; Concepciones docentes.*

Referencias

Harel, G. (2000). Principles of learning and teaching mathematics with particular reference to the learning and teaching of linear algebra: old and new observations. En J. L. Dorier (ed.): *On the teaching of linear algebra* (pp. 177-189). Dordrchet: Kluwert

Serrano, I., Maz-Machado, A. y Madrid, M.J. (2016). Concepciones de profesores en formación respecto a la enseñanza del álgebra lineal. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 593). Málaga: SEIEM.

CÁLCULO MENTAL DE PRIMITIVAS E INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Mental calculation of primitives and numerical integration

Arce, M., Conejo, L., Ortega, T., Pecharromán, C. y Porres, M.

Universidad de Valladolid

Los orígenes del Cálculo Integral se remontan a Eudoxo de Cnido (390-337) y Arquímedes (287-212), pero el primero que definió el concepto de integral definida como el límite de sumas integrales y, por tanto, podían ser integrables funciones discontinuas fue Cauchy (1814). Con ello se disipó la creencia que consideraba que la integración era la operación inversa de la diferenciación. Desde entonces, una de las preocupaciones de los matemáticos ha sido la conceptualización para hacer más comprensible el concepto, por una parte, y la ampliación del conjunto de las funciones integrables, por otra. (Riemann, 1854, Darboux, 1875, Stieljes, 1894; Lebesgue, 1904,…).

La investigación que presentamos se desarrolla con alumnos de 2º de Bachillerato y en ella se analizan tanto la integración del programa de cálculo simbólico DERIVE en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la integral definida, como los logros y dificultades de estos estudiantes al calcular mentalmente integrales indefinidas sencillas. Se han realizado seis ciclos de investigación-acción, reformulando en años sucesivos las implementaciones de docencia puestas en práctica, tanto aplicando DERIVE como en cálculo mental. Se han recabado datos mediante un diario del profesor, un cuadernillo de trabajo, grabaciones en audio, el informe de un observador externo, un test de valoración y la corrección de pruebas escritas. Se ha utilizado el marco de Sierpinska (1990) para analizar los datos. Considerando la descomposición genética de la integral definida de Asiala et al. (1996), hemos construido sendas tablas de actos de comprensión, obstáculos y dificultades, asociadas tanto al uso del programa informático DERIVE como al cálculo mental de primitivas. El desconocimiento de este programa por los alumnos pone de manifiesto el obstáculo relativo al manejo de sus comandos, pero terminan sintetizando las instrucciones y las subrutinas del programa de utilidades, y las relacionan con las respectivas denominaciones (sumas superiores e inferiores) asociadas al proceso de conceptualización de la integral definida. Por el contrario, también consideran que el ordenador aporta información incuestionable y que las representaciones informáticas son independientes de las representaciones matemáticas. Hemos llegado a la conclusión de que el mejor método para que los estudiantes identifiquen y discriminen los conceptos asociados a la integral definida es que ellos mismos programen las respectivas instrucciones, pero es muy difícil llevarlo a la práctica con alumnos que desconocen las técnicas más elementales de programación. Finalmente, los alumnos se sienten aliviados por el cálculo de primitivas con DERIVE y esto les permite calcular mentalmente primitivas elementales. Los resultados obtenidos en Cálculo Mental no son buenos, ya que cometen muchos errores en cálculos inmediatos, aunque hay que reconocer que no están habituados ni siquiera al "Cálculo Mental Aritmético". Pese a ello, los alumnos aceptan la metodología de Cálculo Mental por ser formativa de sus capacidades y competencias, y porque contribuye a afianzar el aprendizaje del concepto.

Referencias

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education, 2,* 1-32.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics, 10*(3), 24-41.

Arce, M., Conejo, L., Ortega, T., Pecharromán, C. y Porres, M. (2016). Cálculo mental de primitivas e integración numérica. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 595). Málaga: SEIEM.

PATRONES GEOMÉTRICOS PARA INICIAR EN EL ÁLGEBRA A ESTUDIANTES DE PRIMARIA CON TALENTO MATEMÁTICO[xvi]

Geometric patterns to introduce algebra to primary school gifted students

Arbona, E., Jaime, A., Gutiérrez, A., Beltrán-Meneu, M.J.

Departamento de Didáctica de la Matemática. Universitat de València

Entre las formas de iniciar la enseñanza del álgebra básica, la resolución de problemas de patrones geométricos (ppg) ha mostrado ser muy productiva, incluso en Primaria (Cai, Knuth, 2011). En Benedicto, Jaime, Gutiérrez (2015) hemos realizado otro análisis de la resolución de este tipo de problemas. Diversos autores han descrito estilos de razonamiento y de resolución de problemas característicos de los estudiantes con talento matemático (Freiman, 2006), algunos de los cuales son propios del contexto de pre-álgebra y resolución de ppg (Amit, Neira, 2008).

El objetivo de investigación es analizar la variación en las estrategias de resolución de ppg por estudiantes de Primaria con talento matemático durante su transición de pre-álgebra a álgebra y la resolución de ecuaciones. El marco teórico está formado por estudios sobre resolución de ppg y transición en la resolución de problemas de los métodos aritméticos a los algebraicos (Cai, Knuth, 2011, Rivera, 2013). Aquí presentamos el análisis, basado en la metodología de estudio de casos, de la actividad de un estudiante superdotado de 4º de Primaria (9 años).

Los ppg planteados al estudiante incluían una cuestión de relación inversa (dado el valor de un elemento de la serie, calcular su posición). Frente a esta cuestión, el estudiante mostró tres estrategias de resolución: i) En tareas de inversión del tipo $y= ax$ o $y= x \pm a$, realizaba correctamente la inversión de las operaciones aritméticas. ii) En tareas del tipo $y=ax\pm b$, no disponía de una estrategia correcta de realización de las operaciones, debido a que desconocía la jerarquía en su orden de inversión. iii) En tareas del tipo $y = ax + b(x\pm c)\pm d$ o cuadráticas, $y=x^2$ o $y=(x\pm a)(x\pm b)$, era incapaz de plantear una operación de inversión y las resolvía por ensayo y error.

Tras analizar las estrategias empleadas por el estudiante, se le inició en el álgebra a través del uso y comprensión de los símbolos algebraicos y su significado y la resolución de operaciones básicas algebraicas con ayuda de ppg y de software de balanzas. Una vez el estudiante hubo comprendido los conceptos básicos de álgebra, le volvimos a plantear las mismas actividades que, en un inicio, había resuelto incorrectamente y, en esta ocasión, empleó como estrategia de resolución el planteamiento de una ecuación.

Referencias

Amit, M., y Neria, D. (2008). “Rising to the challenge”: Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM, 40*, 111–129.

Benedicto, C., Jaime, A., y Gutiérrez, A. (2015). Análisis de la demanda cognitiva de problemas de patrones geométricos. En C. Fernández, M. Molina, y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 153-162). Alicante: SEIEM.

Cai, J., y Knuth, E. J. (Eds.) (2011). *Early algebraization*. Heidelberg, Alemania: Springer.

Freiman, V. (2006). Problems to discover and to boost mathematical talent in early grades: A challenging situations approach. *The Montana Mathematics Enthusiast*, *3*(1), 51-75.

Rivera, F. D. (2013). *Teaching and learning patterns in school mathematics*. N. York, EE.UU.: Springer.

I Esta investigación es parte de los proyectos EDU2012-37259 (MINECO) y EDU2015-69731-R (MINECO/FEDER).

Arbona, E., Jaime, A., Gutiérrez, Á. y Beltrán-Meneu, M.J. (2016). Patrones geométricos para iniciar en el álgebra a estudiantes de primaria con talento matemático. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 597). Málaga: SEIEM.

DEMANDA COGNITIVA EN ESTÁNDARES EDUCATIVOS Y EVALUACIÓN EN ÁLGEBRA

Cognitive demand in educational standards and assessment in algebra

Ramos, L., Casas, L.

Universidad de Extremadura

El presente trabajo plantea el interés por analizar la concordancia o alineamiento que existe, a nivel de demanda cognitiva, entre los estándares curriculares en Matemáticas y los ítems empleados en las pruebas finales de evaluación del tercer ciclo (7mo, 8vo y 9no grado) de la educación básica de Honduras. El estudio se hizo usando el criterio de alineamiento de demanda cognitiva, o Depth-Of-Knowledge (DOK), propuesto por Norman Webb.

Para que una evaluación sea válida, como mínimo, tiene que existir concordancia entre lo que está descrito en el currículo, lo que se espera que se enseñe y lo que se evalúa. Según el modelo de Webb (1997), el análisis de esta concordancia o alineamiento implica la aplicación de cuatro criterios. Entre ellos, el criterio de demanda cognitiva considerado en el presente estudio, supone la clasificación de estándares educativos e ítems de evaluación en cuatro niveles: pensamiento memorístico; pensamiento de procesamiento, pensamiento estratégico y pensamiento extendido.

El objetivo de la investigación fue conocer el nivel de alineamiento entre la demanda cognitiva manifestada en los estándares curriculares en los distintos apartados del bloque de Álgebra y la de los ítems correspondientes de las pruebas de evaluación de los grados 7º, 8º y 9º de Honduras. La principal pregunta de investigación fue: ¿La demanda cognitiva de los estándares de evaluación se corresponde con la de los ítems empleados en las pruebas de evaluación?

El estudio fue realizado con una muestra de 22 profesores de matemáticas expertos, a los que se solicitó que evaluasen el nivel de demanda cognitiva de los estándares de contenido y las pruebas fin de grado. De acuerdo al modelo usado, existe un alineamiento “fuerte” si el 50% de los ítems tenían el mismo nivel de demanda cognitiva que los estándares. Si el porcentaje estaba entre el 40% y el 50% se consideraba “débil”, y si era menor del 40%, el alineamiento fue considerado “inadecuado”.

Los resultados encontrados revelan que en hay un alineamiento Inadecuado en estándares del componente Razones y Proporciones de los tres grados del tercer ciclo, así mismo en los componentes de Comparación y Orden y Posición de séptimo grado. Mientras que hay un alineamiento fuerte en los componentes Ecuaciones y Desigualdades y Expresiones Algebraicas de los tres grados así como en Funciones de noveno grado.

Los resultados sugieren que el alineamiento, a nivel de demanda cognitiva, entre estándares y evaluación no es el más adecuado.

Trabajos similares se han realizado en Colombia López (2013) y Estados Unidos (Webb, 1997) y los resultados han servido para mejorar los sistemas de evaluación educativa.

Con el presente estudio iniciamos una investigación más amplia para analizar el alineamiento no sólo entre estándares y evaluación, sino también entre dichos aspectos y otros como las prácticas en el aula o los materiales curriculares empleados por los profesores.

Referencias

Webb, N. (1997). *Criteria for alignment of expectations and assessments in mathematics and science education. Council of Chief State School Officers and National Institute for Science Education.* Madisson, WI: Wisconsin Center for Education Research, University of Wisconsin

López, A. (2013). Alineación entre las evaluaciones externas y los estándares académicos: El Caso de la Prueba Saber de Matemáticas en Colombia. *Revista Electrónica de Investigación y Evaluación Educativa, RELIEVE, 19* ..

Ramos, L., y Casas, L. (2016). Demanda cognitiva en estándares educativos y evaluación en álgebra. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 599). Málaga: SEIEM.

IDENTIFICANDO ACTIVIDADES DE MATEMATIZACIÓN HORIZONTAL Y VERTICAL EN UN PROCESO DE CLASIFICACIÓN

Identifying horizontal and vertical mathematizing activities involved in a process of classification

González-Regaña, A.J., Martín-Molina, V. y Gavilán-Izquierdo, J.M.

Universidad de Sevilla

La noción de matematización progresiva se expresa través de una secuencia generada por dos tipos de actividad matemática relacionadas reflexivamente: la matematización horizontal y la vertical (Treffers, 1987). Aunque, frecuentemente, la matematización horizontal se describe a través de la transformación de una situación problemática en un problema matemático propiamente dicho, en nuestro trabajo utilizaremos este concepto en un sentido más amplio que nos permitirá incluir situaciones de partida que sean de naturaleza ya matemática (Rasmussen, Zandieh, King & Teppo, 2005). Las actividades que pueden ser identificadas cuando se produce la matematización horizontal y la matematización vertical han sido descritas por Üzel y Mert Uyangör (2006). En este trabajo, con el objetivo de proponer un modelo de la práctica matemática relativo al proceso de clasificación con fines pedagógicos, tratamos de identificar y describir algunas de estas actividades a partir del análisis de una tesis doctoral centrada en el proceso de clasificación de familias de álgebras no asociativas. En particular, este trabajo se centra en la noción de álgebra de Leibniz que fue introducida por Loday (1993) y que supone una generalización de las álgebras de Lie.

Concretamente, con respecto a las actividades de matematización horizontal, en este trabajo se utiliza primero el descubrimiento de relaciones y regularidades entre las álgebras de Lie y las de Leibniz. Por ejemplo, se aprecia que en estas álgebras aparecen dificultades no presentes en las de Lie.

Por otra parte, en lo que respecta a la matematización vertical, hemos detectado que se conectan tres tipos de actividades diferentes. La primera, representar relaciones mediante fórmulas, se materializa cuando el autor divide la familia de álgebras de Leibniz 2-filiformes en dos familias no isomorfas entre sí a través de la utilización de ciertos cambios de base. La segunda, que supone la formulación de un concepto matemático nuevo, arranca de la partición a la que hemos hecho referencia antes y permite al autor definir nuevos objetos matemáticos que se denominarán álgebras de Leibniz 2-filiformes graduadas naturalmente de tipo I y tipo II. En tercer y último lugar, el estudio se centra en la primera clase de los objetos recién definidos pasando a fijar la atención ahora en la prueba de determinadas regularidades.

Referencias

Loday, J.L. (1993). Une version non commutative des algèbres de Lie : les algèbres de Leibniz. *L'Enseignement Mathématique*, Band 39, pp. 269-293.

Rasmussen C., Zandieh M., King K. y Teppo A. (2005). Advancing Mathematical Activity: A Practice-Oriented View of Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 7 (1), pp. 51-73.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics education: The Wiskobas project.* Dordrecht. The Netherlands: Kluwer Academic.

Üzel, D. y Mert Uyangör S. (2006). Attitudes of 7th class students towards mathematics in realistic mathematics education. *International Mathematics Forum*, 1 (39), pp. 1951-1959

González-Regaña, A.J., Martín-Molina, V. y Gavilán-Izquierdo, J.M. (2016). Identificando actividades de matematización horizontal y vertical en un proceso de clasificación. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 601). Málaga: SEIEM..

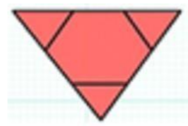
ANÁLISIS DE LA DEMANDA COGNITIVA DE RESOLUCIONES DE PROBLEMAS. UN EJEMPLO: CORTANDO POLÍGONOS [xvii]

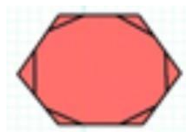
Analysis of cognitive demand of problem solutions. An example: cutting polygons

Benedicto, C.[a], Hoyos, E.A.[b], Aristizábal, J.H.[b], Gutiérrez, A.[a], Jaime, A.[a]

[a] Dpto. de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia (España)
[b] Grupo GEDES. Universidad del Quindío (Armenia, Colombia)

El profesorado con alumnos de altas capacidades matemáticas (aaccmm) debe plantear en sus clases problemas adecuados a diferentes tipos de estudiantes, que se puedan resolver con distintos niveles de complejidad de razonamiento (Boston, Smith, 2009). Para preparar ese tipo de problemas, conviene evaluar la complejidad de las posibles resoluciones. El modelo teórico de los *niveles de demanda cognitiva* (Smith, Stein, 1998) fue creado para valorar la complejidad del razonamiento requerido para resolver problemas correctamente, y caracteriza 4 niveles de demanda cognitiva: Bajo (B), Bajo-Medio (BM), Medio-Alto (MA) y Alto (A). Nosotros utilizamos también este modelo como marco para valorar las respuestas de estudiantes (Benedicto, Jaime, Gutiérrez, 2015), con el objetivo de investigar la variación de los niveles de demanda cognitiva de las resoluciones de un problema según las capacidades matemáticas de sus resolutores.





En este póster analizamos la demanda cognitiva de las resoluciones por 6 pares de estudiantes de aaccmm de 1º a 3º de ESO de un problema que pide cortar los vértices de un polígono inicial, calcular el número de lados del polígono resultante y, reiteradamente, repetir la acción de corte con cada nuevo polígono. El problema termina pidiendo calcular el número de lados al generalizar el proceso de 1, 2, 4, 6, 8, *m* acciones de corte para polígonos iniciales de 3, 4, 5 y *n* lados.

Hemos caracterizado cuatro trayectorias de demanda cognitiva durante la resolución del problema: **1.** Cortan el triángulo una única vez y cuentan (BM), deducen la expresión correcta para *m* cortes (A) y obtienen el resto de casos aplicando la fórmula (BM). Generalizan a *m* cortes en un *n*-gono (A). **2** Cortan el triángulo dos veces y cuentan (BM), observan que cada corte duplica los lados del anterior y calculan el resto de casos (MA). Obtienen la expresión para *m* cortes (A) y generalizan a *m* cortes en un *n*-gono (A). **3.** Cortan el triángulo dos veces, cuentan (BM) e identifican que cada corte duplica los lados del polígono anterior (MA). Tantean diferentes fórmulas para *m* cortes, pero no la logran sin ayuda (MA). Generalizan a *m* cortes en un *n*-gono (A). **4.** Cortan el triángulo dos veces, cuentan (BM), e identifican que cada corte duplica los lados (MA). Para 6 y 8 cortes, dicen que hay que multiplicar por 3. No son capaces de resolver las preguntas de generalización.

Referencias

Benedicto, C., Jaime, A., y Gutiérrez, A. (2015). Análisis de la demanda cognitiva de problemas de patrones geométricos. En C. Fernández, M. Molina, y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 153-162). Alicante: SEIEM.

Boston, M. D., y Smith, M. S. (2009). Transforming secondary mathematics teaching: increasing the cognitive demands of instructional tasks used in teachers' classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education*, *40*(2), 119-156.

Smith, M. S., y Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*(5), 344-350.

[1] Esta investigación es parte de los proyectos EDU2012-37259 (MINECO) y EDU2015-69731-R (MINECO/FEDER) y del Proyecto de Cooperación al Desarrollo 2014/09 (Universitat de València).

Benedicto, C., Hoyos, E.A., Aristizábal, J.H., Gutiérrez, A., Jaime, A.. (2016). Análisis de la demanda cognitiva de resoluciones de problemas. Un ejemplo: Cortando polígonos. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 603). Málaga: SEIEM.

CARACTERIZACIÓN DE TAREAS MATEMÁTICAS CREADAS POR ESTUDIANTES PARA MAESTRO A PARTIR DE CONTEXTOS COTIDIANOS

Characterization of mathematics tasks created by prospective primary teachers from everyday contexts

Cáceres, M. J.[a], Chamoso, J. M.[b]

[a]Universidad de Extremadura,[b]Universidad de Salamanca

Los maestros deben ser capaces de crear tareas matemáticas en diversos sentidospara promover un pensamiento diverso y flexible en los alumnos, y esa capacidad se debería desarrollar en su formación inicial.

Algunas tareas matemáticas interesantes son las abiertas y realistas, ya que desarrollan capacidades matemáticas aplicables a situaciones propias de la vida cotidiana, algo fundamental para dar sentido a las matemáticas de Primaria (Yeo, 2015). Tener en cuenta el tipo de procesos cognitivos que se activan en su resolución también es importante para los estudiantes de Primaria (OCDE, 2012).

Apenas se han encontrado estudios que analicen tareas matemáticas para Primaria propuestas por estudiantes para maestro atendiendo a si son abiertas o realistas y a los dominios cognitivos que demandan. En las tareas creadas por estudiantes para maestro en un proyecto en que debían organizar un contenido matemático para el aula de Primara hubo una escasa propuesta de tareas abiertas (Cáceres y Chamoso, 2010). En este trabajo se analizan las tareas propuestas por futuros maestros en el marco de un proyecto cercano a la vida cotidiana.

Los resultados mostraron un alto porcentaje de tareas abiertas y realistas, y porcentaje similar de tareas en función de los dominios cognitivos, en ambos casos comparado con otros estudios. Además la mayor parte de las tareas Abiertas propuestas fueron de Conexión y Reflexión, mientras que la mayor parte de las tareas Realistas fueron de Reproducción y Conexión. Por otro lado, casi todas las tareas propuestas de Reflexión fueron Abiertas. Estos aspectos pueden abrir futuras vías de investigación.

Parece que la forma de plantear la tarea por el docente tuvo influencia en los resultados donde pudo tener importancia que el proyecto estuviera relación con contextos reales, aunque sería necesaria más investigación.

Referencias

Cáceres, M.J., Chamoso, J.M. y Azcárate, P. (2010). Analysis of the revisions that pre-service teachers of Mathematics make of their own project included in their learning portfolio. *Teaching and Teacher Education 26*, 5, 1186-1195.

OCDE (2012). *PISA 2012. Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos. Informe español.* MECD. INEE.

Yeo, J.B.W. (2015). Development of a Framework to Characterise the Openness of Mathematical Tasks.*International Journal of Science and Mathematics Education*, 1-17.

Cáceres, M. J. y Chamoso, J. M. (2016). Caracterización de tareas matemáticas creadas por estudiantes para maestro a partir de contextos cotidianos. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 605). Málaga: SEIEM.

ARTICULANDO LAS ACTIVIDADES DE CONJETURAR Y PROBAR DE LOS MATEMÁTICOS PROFESIONALES DESDE LA TEORÍA DE PEIRCE

Drawing together the activities of conjecturing and proving of professional mathematicians from Peirce's theory

Toscano-Barragán, R., Fernández-León, A. y Gavilán Izquierdo, J. M.

Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Sevilla

"La formulación de conjeturas y el desarrollo de pruebas son dos aspectos fundamentales del trabajo de un matemático profesional" (Alibert y Thomas, 1991, p. 215). La investigación que estamos llevando a cabo pretende proponer un modelo, desde la educación matemática, que describa y explique cómo los matemáticos profesionales desarrollan las actividades de conjeturar y probar. Concretamente, y debido al carácter sociocultural de la investigación en matemáticas, los participantes considerados en este trabajo son investigadores en matemáticas que tienen al menos una publicación en "JCR science edition".

En los últimos años, el estudio de las actividades matemáticas "avanzadas" se ha convertido en un problema de investigación relevante. En esta línea, Rasmussen, Zandieh, King y Teppo (2005) proponen un marco teórico para el estudio de las actividades de simbolizar, algoritmizar y definir. Este marco describe cada una de las citadas actividades utilizando dos dimensiones: matematización horizontal y matematización vertical. Mientras que la matematización horizontal está fundamentalmente relacionada con actividades preliminares o de tipo informal, la matematización vertical se refiere a actividades desarrolladas sobre actividades horizontales con el objetivo de crear nuevas ideas o realidades matemáticas.

Las actividades de conjeturar y probar son consideradas conjuntamente en este trabajo al estar directamente relacionadas con los tres tipos de razonamiento que Charles S. Peirce utiliza para describir el desarrollo de una investigación científica: abducción, deducción e inducción. En el periodo posterior a 1900, la abducción hace referencia a la adopción provisional de una hipótesis, la deducción pretende delinear las consecuencias probables y necesarias de una hipótesis, y la inducción es la verificación de la hipótesis a través de experimentos (Peirce, 1997).

Un análisis preliminar de esta investigación pone de manifiesto que mientras la deducción es el tipo de razonamiento que predomina en el desarrollo de pruebas matemáticas, la abducción y la inducción son en los que se basa la formulación de conjeturas.

Referencias

Alibert, D. y Thomas, M. (1991). Research on mathematical proof. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 215-230). Dordrecht: Kluwer.

Peirce, C. S. (1997). *Pragmatism as a Principle and Method of Right Thinking: The 1903 Harvard Lectures on Pragmatism*. Albany: State University of New York Press.

Rasmussen, C., Zandieh, M., King, K. y Teppo, A. (2005). Advancing Mathematical Activity: A Practice-Oriented View of Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(1), 51-73.

Toscano-Barragán, R., Fernández-León, A. y Gavilán Izquierdo, J. M. (2016). Articulando las actividades de conjeturar y probar de los matemáticos profesionales desde la teoría de peirce. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 607). Málaga: SEIEM.

EVOLUCIÓN DE LA ANSIEDAD MATEMÁTICA EN LOS MAESTROS DE PRIMARIA EN FORMACIÓN

Evolution of mathematics anxiety in primary pre-service teachers

Marbán, J.M., Maroto, A. yPalacios, A.

Facultad de Educación de Segovia. Universidad de Valladolid

Entendemos ansiedad matemática como un sentimiento de tensión, miedo o aprehensión que conlleva conductas de evitación y que interfiere cuando se trabaja con operaciones matemáticas o resolución de problemasen una amplia variedad de situaciones tanto académicas como cotidianas (Richardson y Suinn, 1972).Estudios al respecto han constatado que la ansiedad matemática es un fenómeno muy común en estudiantes universitarios y en particular en futuros docentes (Boyd, Foster, Smith y Boyd, 2014). Este dato resulta preocupante si además tenemos en cuenta que los futuros maestros con altos niveles de ansiedad tenderían a confiar menos en sus capacidades para la docencia de las matemáticas siendo estos bajos niveles de competencia percibida los que determinarían actitudes negativas hacia su docencia (Çatlıoğlu, Gürbüz y Birgin, 2014). Por tanto, tiene sentido preguntarse si la formación didáctico-matemáticaque reciben los estudiantes del grado de educación Primaria modifica en algún sentido positivo esa ansiedad matemática que poseen los estudiantes.

En este trabajo, nos planteamos como objetivo averiguar si la presencia de asignaturas relacionadas con la Didáctica de la Matemáticaen losgrados de formación de maestras y maestros de Primariareduce el sentimiento de tensión y miedo hacia las matemáticas con el que inician los maestros en formación.

El estudio se llevó a cabo a través de un diseño transversal sobre una muestra incidental compuesta por 627 estudiantes pertenecientes a cinco universidades públicas españolas. Para la toma de datos se utilizó una escalapropia con fiabilidad y validez contrastada.Los resultados obtenidos indican que la formación recibida no ha reducidolos niveles de ansiedad matemáticaque los estudiantes presentaban al inicio de sus estudios en relación con las matemáticas.El análisis de los resultados abre muchos interrogantes que apuntan a que más allá de cuestiones vinculadas con métodos docentes o variables de motivación, entre otras cuestiones, se tornan necesarias intervenciones específicas y en cierto modo individualizadas para abordar esta problemática.

Referencias

Baloglu, M. y Zelhart, P.F. (2003). Statistical Anxiety: a Detailed Review .*Psychology and Education*, 40, 27-37.

Boyd, W., Foster, A., Smith, J., y Boyd, W. E. (2014). Feeling Good about Teaching Mathematics: Addressing Anxiety amongst Pre-Service Teachers. *Creative Education*. 5, 207-217. http://dx.doi.org/10.4236/ce.2014.54030

Çatlıoğlu, H., Gürbüz, R. y Birgin, O. (2014). Do pre-service elementary school teachers still have mathematics anxiety? Somefactors and correlates. Bolema: Boletim de Educação Matemática. 28(48), 110-127. DOI: 10.1590/1980-4415v28n48a06.

Richardson, F.C. y Suinn, R.M. (1972).The Mathematics Anxiety Rating Scale.*Journal of CounselingPsychology*, 19, 551-554.

Marbán, J.M., Maroto, A. y Palacios, A.. (2016). Evolución de la ansiedad matemática en los maestros de Primaria en formación. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 609). Málaga: SEIEM.

INVESTIGACIÓN SOBRE EL CONCEPTO DE GRAFO A TRAVÉS DEL MODELO DE VAN HIELE

Research about the concept of graph through the van Hiele model

Gavilán-Izquierdo, J. M. y González, A.

Universidad de Sevilla

La educación matemática considera relevante la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje que desarrollan los estudiantes universitarios, y más aún, en ámbitos que están recibiendo especial atención en los últimos años como es la Matemática discreta (Ouvrier-Buffet, 2011). Esta área de la Matemática permite resolver muchos problemas en diferentes ámbitos de la ciencia y la tecnología.

El presente trabajo tiene como objetivo indagar en la comprensión de los estudiantes universitarios sobre problemas de la Matemática discreta, en particular sobre la Teoría de Grafos (Biggs, 1994). Debido a las similitudes con la geometría por la fuerte componente visual de la teoría de grafos (más topológica que métrica), al menos en los primeros acercamientos a ella, hemos considerado como marco teórico para abordar esta investigación el modelo de Van Hiele adaptado a esta área de la Matemática.

Para el desarrollo de la investigación, el primer paso ha sido la descripción de los procesos de razonamiento y su relación con los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele (Gutiérrez y Jaime, 1998) para el concepto de grafo. De acuerdo con Gutiérrez y Jaime (1998) la propuesta que realizamos caracteriza cada nivel de razonamiento teniendo en cuenta "cómo un estudiante considera y usa los procesos" (p. 29).

Hemos elaborado una caracterización de los niveles de razonamiento a través de los procesos de razonamiento. El proceso de razonamiento de reconocimiento, debido a la complejidad del concepto de grafo (entre otras, posibilidad de ser representado de diferentes formas: representación pictórica clásica, matriz de adyacencia, matriz de incidencia…), nos permite discriminar entre los niveles de razonamiento 1 (de reconocimiento), 2 (de análisis) y 3 (de clasificación). En efecto, los estudiantes en el nivel 1 de reconocimiento podrán distinguir grafos en función de la representación pictórica, pudiendo solo reconocer vértices y aristas como componentes de los mismos. En el nivel 2 (de análisis) los estudiantes, conscientes ya de componentes más complejas como son los subgrafos, podrán reconocer grafos con independencia de su representación pictórica. En el nivel 3 (de clasificación) los estudiantes reconocerán los grafos independientemente de su representación (pictórica o no), es decir, percibirán los grafos como estructuras abstractas (dadas por un conjunto de elementos entre los que hay una serie de relaciones). Además, en este nivel 3 los estudiantes reconocerán relaciones entre las propiedades de los grafos, entre ellas que los subgrafos "heredan" algunas propiedades o relaciones de los grafos de los que provienen. Para los otros procesos de razonamiento considerados hemos realizado similares caracterizaciones.

Referencias

Biggs, N. L. (1994). *Matemática discreta*. Barcelona: Vicens-Vives.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 20 (2/3), 27-46.

Ouvrier-Buffet, C. (2011). A mathematical experience involving defining processes: in-action definitions and zero-definitions. *Educational Studies in Mathematics*, 76 (2), 165-182. doi: 10.1007/s10649-010-9272-3.

Gavilán-Izquierdo, J.M. y González, A. (2016). Investigación sobre el concepto de grafo a través del modelo de Van Hiele. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 611). Málaga: SEIEM

UNA PROPUESTA QUE FACILITA EL USO EFICAZ DE LOS LIBROS DE TEXTO A LOS FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS

A proposal to facilitate the effective use of textbooks to future mathematics teachers

Arnal, M.[a], Arteaga, B.[b], Baeza, M.A.[a], Cid, A.I.[c], Claros, J.[a], Joglar, N[c], Macías, J.[b], Sánchez, T. [d], Tolmos, P.[c]

[a]Universidad Complutense de Madrid, [b]Universidad Internacional de La Rioja, [c]Universidad Rey Juan Carlos, [d]Universidad de Málaga

En este trabajo se presentan los primeros resultados de una experiencia piloto desarrollada en el marco del Máster de Formación de Profesores de Matemáticas de Secundaria, Bachillerato e Idiomas (MFP) de la Universidad Rey Juan Carlos de Madrid (URJC), en la que se trata de obtener información, a través de cuestionarios diseñados a tal efecto por el equipo de investigadores que presenta esta propuesta, sobre qué conocimientos matemáticos específicos necesita un profesor de matemáticas para usar de manera eficaz en el aula el libro de texto. Como punto de partida, y a través del trabajo colaborativo de los autores de la propuesta aquí presentada, se ha diseñado un conjunto de ítems para analizar minuciosamente los contenidos de una Unidad Didáctica de un libro de texto. Los ítems están organizados según tres dimensiones (ilustraciones, lenguaje y actividades), que a su vez se han desglosado en subdimensiones articuladas en indicadores y descriptores. En la actividad piloto nos hemos centrado en concreto en la unidad didáctica *Tablas y gráficas*, del libro de Matemáticas de 1º de ESO del Proyecto Editorial Somoslink de Edelvives (edición 2015).

Todos los ítems diseñados en esta primera fase fueron revisados y validados por un grupo de expertos en educación matemática (entre los que se encuentran jueces con perfil de investigación y jueces con perfil docente en el área), antes de ser pasados a un grupo de 36 alumnos del MFP de la URJC de la especialidad de Matemáticas en el mes de mayo 2016.

En este póster resumirán los detalles de la organización del trabajo del grupo de cara a la elaboración de los cuestionarios, y se ofrecerán unos primeros análisis de la experiencia piloto llevada a cabo en el contexto de formación inicial para tratar de responder la cuestión de investigación planteada en el primer párrafo de este resumen. Con nuestro trabajo se pretende además consolidar un grupo de trabajo de investigadores y profesores de matemáticas en activo en la Comunidad de Madrid.

Referencias

Cramer, K. and Karnowski, L. The importance of informal language in representing mathematical ideas. (1995). *Teaching children mathematics 1*, 332-335.

Monterrubio, M. C. y Ortega, T. Diseño y aplicación de instrumentos de análisis y valoración de textos escolares de matemáticas. (2011). *PNA, 5*(3), 105-127.

Smith, M. S. and Stein, M. K. Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. (1998). *Mathematics teaching in the middle school 3*(5), 344-350.

Arnal, M., Arteaga, B., Baeza, M.A., Cid, A.I., Claros, J., Joglar, N, Macías, J., Sánchez, T., Tolmos, P. (2016). Una propuesta que facilita el uso eficaz de los libros de texto a los futuros profesores de matemáticas. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 613). Málaga: SEIEM.

MODELADO DE ESTUDIANTE EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS A TRAVÉS DE LA DINÁMICA DE SISTEMAS[xviii]

Student Modelling in solving problems through System Dynamics

Sanz, M. T.[a], Arnau, D.[a], González-Calero, J. A.[b], Arevalillo-Herraéz, M.[a]

Universitat de València, [b]Universidad de Castilla-La Mancha

En las aulas, los docentes de educación primaria, han de afrontar la necesidad de atender a alumnos con dificultades en la resolución de problemas aritméticos. Sin embargo, no poseen herramientas eficaces que les permitan identificar cuáles son las carencias del alumnado. La capacidad de los sistemas informáticos para realizar una recogida masiva de datos en tiempo real abre la posibilidad a poder diseñar estos diagnósticos de manera automatizada. En este contexto adquieren particular importancia la creación de un modelo matemático-educativo que permita predecir cuál será la evolución de los estudiantes cuando resuelven problemas aritméticos partiendo de variables del sujeto como el coeficiente intelectual, el nivel de comprensión lectora o su destreza matemática previa como resolutor y de variables de la tarea propias de la sintaxis (posición de la pregunta, longitud y número de frases, número de palabras, tiempos verbales, etc.) y semántica (semántica global, inclusión de información superflua y distractores, etc.) del enunciado como de la complejidad de la estructura matemática del problema (Cerdán, 2008). Nuestra intención es utilizar un sistema tutorial inteligente (Arnau, Arevalillo-Herráez, González-Calero, 2014) para realizar la recogida de datos ligados a la destreza inicial del estudiante como resolutor de problemas aritméticos y poder construir un modelo de estudiante siguiendo la Teoría General de Sistemas. Esta teoría propone el uso de metodologías de carácter transdisciplinar que permitan construir modelos matemáticos con los que resolver problemas en el ámbito de los sistemas dinámicos complejos. Siguiendo esta vía, Jay W. Forrester (1961) desarrolló en los años 50 del siglo pasado la Dinámica de Sistemas en el Massachussets Institute of Technology (MIT) como metodología transdisciplinar con la que construir modelos dinámicos de sistemas complejos y usarlos como herramienta de intervención en los mismos. Uno de los objetivos de este marco metodológico es proporcionar a las ciencias sociales y humanísticas un estatus epistemológico similar al de las ciencias positivas (física, química, biología, economía,...). El punto de partida es el uso del diagrama hidrodinámico, también llamado diagrama de Forrester, como puente entre la información cualitativa y su concreción cuantitativa en ecuaciones, del que haremos uso en este trabajo. Este diagrama es una traducción del diagrama causal a una terminología en la que se contemplan, de forma gráfica y estandarizada, las variables que puedan intervenir en el sistema.

Referencias

Arnau., Arevalillo-Herraez, M., y Gonzalez-Calero, J. A. (2014). Emulating Human Supervision in an Intelligent Tutoring System for Arithmetical Problem Solving. *Learning Technologies, IEEE Transactions on*, *7*(2), 155-164.

Cerdán, F. (2008). *Estudios sobre la Familia de Problemas Aritmético-Algebraicos*. València: Servei de Publicacions de la Universitat de València .

Forrester, J.W. (1961). *Industrial Dynamics*. Cambridge, MA: MIT Press.

I Este trabajo se ha realizado en el marco de los proyectos de investigación del Ministerio de Ciencia e Innovación: EDU2012-35638, EDU2015-69731-R (MINECO/FEDER) y EDU2012-35638 del Ministerio de Economía y Competitividad del Gobierno de España

Sanz, M. T., Arnau, D., González-Calero, J.A. y Arevalillo, M.. (2016). Modelado de Estudiantes en resolución de problemas a través de la Dinámica de Sistemas. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 615). Málaga: SEIEM.

CONSTRUCCIÓN DE UN INSTRUMENTO PARA CARACTERIZAR EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE INFANTIL

Construction of an instrument for the characterization of knowledge teacher child

Guerrero, A.A., Azcárate, P. y Cardeñoso, J. M.

Universidad de Cádiz

Los formadores de profesores, debemos facilitar la elaboración de nuevas conceptualizaciones e instrumentos más sensibles, que permitan captar las claves de las características del problema del conocimiento matemático para enseñar (Hill, Ball y Schilling, 2008). Por tanto, se hace necesario y se requiere elaborar un instrumento adecuado para realizar las mediciones correspondientes, es por ello, que en primer lugar planteamos el siguiente objetivo: Construir un instrumento para evaluar aspectos relevantes del conocimiento sobre el conocimiento lógico-matemático que muestran los futuros profesores de Educación Infantil de la Universidad de Cádiz.

En este póster pretendemos reflejar el proceso de diseño, construcción y validación de un cuestionario que permita caracterizar aspectos del conocimiento práctico profesional deseable (Rivero, Azcárate, Porlán, Martín del Pozo y Harres, 2011) que poseen los estudiantes-profesores del Grado de Maestros en Educación Infantil de la Universidad de Cádiz en relación al conocimiento lógico-matemático que consideramos adecuado y necesario para su futura labor profesional, es decir, que han de enseñar en Educación Infantil. En particular los referidos a las siguientes dimensiones: ámbito del conocimiento lógico (Dimensión 1) y ámbito del conocimiento espacial y geométrico (Dimensión 2).

La elaboración del cuestionario comprendió varias fases: 1. Diseño del cuestionario desde referentes teóricos. Construcción de la versión piloto. 2. Análisis de la claridad, validez e importancia del contenido de la versión piloto del cuestionario mediante el juicio de expertos. 3. Aplicación de la versión piloto del cuestionario y recolección inicial de la información. 4. Determinación de la fiabilidad de la versión piloto del cuestionario. 5. Construcción de la versión final del cuestionario.

El proceso desarrollado nos ha permitido reconsiderar las propuestas iniciales, y el cuestionario final que ha dado como resultado, actualmente, lo hemos usado para recopilar datos que nos permitan obtener información sobre el estado actual del conocimiento lógico-matemático que tienen los estudiantes para profesor de Educación Infantil.

Referencias

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S.vG. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics* Education, 39(4), 372-400.

Rivero, A., Azcárate, P., Porlán, R., Martín del Pozo, R. y Harres, J. (2011). The progression of prospective primary teachers´conceptions of the methodology of teaching. *Research is Science Education*, 41(5), 739-769.

Guerrero, A.A., Azcárate, P. y Cardeñoso, J.M.. (2016). Construcción de un instrumento para caracterizar el conocimiento del profesor de infantil. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 617). Málaga: SEIEM

LAS CREENCIAS DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS Y SU INFLUENCIA EN LA PRÁCTICA DOCENTE

Mathematics Teachers’ Beliefs and Their Influence on their Practice

Diego-Mantecón[a], J.M.; Graña[a], C.; Blanco[b], T.F.; Vallines[c], R y Diego, M.A[a]

[1]Univerdad de Cantabria, [b]Universidad de Santiago de Compostela y [c]Universidad San Antonio

Este estudio se centra en las creencias del profesor sobre las matemáticas y su relación con la práctica en el aula. Las creencias son la percepción subjetiva del individuo sobre la materia, su enseñanza y su aprendizaje, y sobre uno mismo como docente o estudiante (Diego-Mantecón, 2012). Las creencias del profesor determinan su práctica y ésta a su vez conforma su sistema de creencias que de nuevo determina su práctica formando un bloque (Da Ponte, 1994). Aunque algunos estudios han demostrado relación entre las creencias y la práctica (ej. Thompson, 1985), estas relaciones no están todavía bien entendidas. El objetivo de este estudio es por lo tanto indagar en esta relación.

Para llevar a cabo este estudio nos apoyamos en el marco teórico de Op’t Eynde y De Corte (2003) que distingue tres dimensiones principales de creencias: (1) las matemáticas como asignatura (2) su enseñanza y aprendizaje, (3) y uno mismo como profesor de matemáticas. La muestra incluyó dos profesores de secundaria Españoles con experiencia docente, que fueron entrevistados mediante entrevistas semi-estructuradas y observados en su práctica docente con estudiantes de 14/15 años durante dos meses, de acuerdo con las tres dimensiones.

Los resultados mostraron que no existe siempre concordancia entre las creencias y la práctica docente. Creencias relacionadas con demandas cognitivas bajas (ej.. *intento que mis estudiantes memoricen, la mejor manera de aprender es por repetición’*) se hicieron patentes en la práctica en el aula. Por el contrario, creencias relacionadas con demandas cognitivas altas (ej. *la mejor manera de aprender es razonando, intento que mis estudiantes elaboren estrategias de resolución en problemas en contexto)* no se reflejaron en el aula de la forma señalada por el profesor. Por ejemplo, los dos profesores indicaron que enseñan matemáticas en contexto, proporcionando problemas de la vida real. Sin embargo, los análisis mostraron que estos problemas era puramente procedimentales y no desarrollan las competencias pretendidas.

Los resultados sugieren que la ausencia de concordancia entre las estrategias de enseñanza relacionadas con ‘demandas cognitivas altas’ y la práctica docente se debe a un vago conocimiento didáctico de la implementación de estas estrategias. Investigaciones posteriores son necesarias, sin embargo, para corroborar estos resultados preliminares.

Referencias

Diego-Mantecón, J. M. (2012). Clarifying the field of student mathematics-related beliefs: developing measurement scales for 14/15-year-old. *Manuscrit. University of Cambridge*.

Op’t Eynde, P., De Corte, E., & Verschaffel, L. (2002). Framing students’ mathematics-related beliefs. In *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 13-37). Springer Netherlands.

Thompson, A. G. (1984). The relationship of teachers' conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. *Educational studies in mathematics*, 15(2), 105-127.

Diego-Mantecón, J.M.; Graña, C.; Blanco, T.F.; Vallines, R y Diego, M.A (2016). Las creencias del profesor de matemáticas y su influencia en la práctica docente. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 619). Málaga: SEIEM.

FRACCIONES EN LA RECTA NUMÉRICA: UN ACERCAMIENTO DIDÁCTICO USANDO APPLETS

Fractions on the number line: a didactical approach using applets

Valenzuela, C.[a,b], Arnau, D.[a], Figueras, O.[b], Gutiérrez-Soto. J.[a]

[a]Universitat de València, [b]Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN

En este trabajo se exponen resultados de las actuaciones de alumnos de educación secundaria que participaron en un estudio cuyo propósito es coadyuvar en la construcción de mejores objetos mentales sobre las fracciones, en el sentido de Freudenthal (1983). Para la indagación se diseñó una secuencia de enseñanza dirigida a estudiantes de 10 a 14 años de edad, apoyada fundamentalmente en el uso de applets construidos con Geogebra. Dos elementos se distinguen en el diseño de los applets: (a) la interfaz gráfica, diseñada con una intención didáctica, con la que interactúa el estudiante, y (b) una colección de rutinas programadas en JavaScript que permiten recoger de una manera no invasiva las acciones de los alumnos en tiempo real. Dicho registro posibilita analizar las respuestas y los procesos usados durante la interacción estudiante/applet.

La estructura del applet que constituye la segunda etapa de la secuencia de enseñanza es el tema de este documento. Asimismo se incluyen resultados obtenidos en la aplicación de ese entorno virtual. Específicamente se hace: (1) una caracterización del tipo de fracciones que escriben los alumnos para representarlas en el segmento de recta numérica que aparece en el applet; (2) una clasificación de las respuestas al pedirles determinar el orden de las fracciones que eligieron para representarlas en la recta numérica, y (3) una exploración acerca de la idea que tienen los alumnos sobre la propiedad de densidad de las fracciones.

En 4 grupos de los primeros cursos de educación secundaria de una escuela pública se llevó a cabo la experimentación. Se tomaron en cuenta las respuestas de 29 estudiantes que completaron esta etapa. Entre los resultados relevantes se pueden mencionar: (1) los alumnos representaron en proporción similar fracciones propias e impropias y no solo fracciones propias como se suponía, esto puede estar influenciado por las características de exploración de la etapa uno, (2) como criterios de orden seis alumnos usaron las longitudes que representan a las fracciones o la posición del punto correspondiente en la recta numérica; y (3) la idea de densidad que puso de manifiesto la mayoría de los estudiantes estuvo influenciada por el número de fracciones que representaron o visualizaron en el modelo gráfico del applet. Aunque también, para referirse a la cantidad de fracciones que hay entre dos números enteros, ya sea consecutivos o no cuatro alumnos dieron respuestas como: “Muchas fracciones”, “infinitas”, “bastantes” o “tantas como se quiera”.

Referencias

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrech: D. Reidel.

Valenzuela, C., Arnau, D.[a], Figueras, O.y Gutiérrez-Soto. J.(2016). Fracciones en la recta numérica: Un acercamiento didáctico usando applets. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 621). Málaga: SEIEM.

HABILIDADES DE VISUALIZACIÓN DE ESTUDIANTES DE PRIMARIA EN ACTIVIDADES DE GEOMETRÍA ESPACIAL[xix]

Visualization abilities of Primary school students in spatial geometry activities

Escrivá, M.T., Beltrán-Meneu, M.J., Gutiérrez, A., Jaime, A.

Departamento de Didáctica de la Matemática. Universitat de València

La forma de usar la visualización ayuda a caracterizar a los estudiantes con talento matemático (Ramírez, 2012). Los investigadores adoptan varios puntos de vista para analizar esta relación (Riu y otros, 2007). Entendiendo la visualización como "el tipo de razonamiento basado en el uso de elementos visuales o espaciales, tanto mentales como físicos" (Gutiérrez, 1996, p. 9), planteamos dos objetivos de investigación: i) analizar las habilidades de visualización (Del Grande, 1990) puestas en juego por un grupo natural de 21 estudiantes de 6º de Primaria, con diferentes grados de talento matemático, al resolver un bloque de actividades de manipulación de cubos y ii) relacionar el uso de esas habilidades con el talento matemático de los alumnos, evaluado mediante los tests PMA (Thurstone, 2005) y PEM (Benavides, 2008). Los alumnos trabajaron en grupos de 3 niños. Los datos proceden de grabación de vídeo y entrevistas de algunos alumnos, de audios y respuestas escritas de todos los grupos y de notas de campo.

En este póster analizamos las respuestas de 4 actividades centradas en rotaciones de cubos. Los cu-bos tenían dibujos en sus caras y se presentaban a los estudiantes impresos en papel. Antes de plantear las actividades, se introdujo a los alumnos la idea de rotación de un cubo alrededor de los ejes que pasan por las caras. Las actividades pedían identificar varias imágenes de un mismo cubo o dibujar las figuras de caras en blanco de un cubo a partir de imágenes del mismo cubo girado. Del análisis de los datos destaca que, durante la realización de las actividades, los alumnos han mostra-do el uso de tres habilidades de visualización: i) *conservación de la percepción*, necesaria para rea-lizar correctamente las actividades propuestas, ii) *reconocimiento de posiciones en el espacio* y/o iii) *reconocimiento de relaciones espaciales*, necesarias ambas en actividades en las que hay que te-ner en cuenta la posición relativa entre las caras de un cubo y la orientación de varias posiciones del cubo. Algunos estudiantes con buenos resultados en las clases ordinarias, centradas en rutinas arit-méticas, han tenido poco éxito en estas actividades y otros, que en las clases ordinarias pasaban de-sapercibidos, las han resuelto muy bien y han mostrado habilidades de visualización. Además, todos los estudiantes que han mostrado buena visualización tienen buenos resultados en matemáticas.

Referencias

Benavides, M. (2008). *Caracterización de sujetos con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa* (tesis doctoral), Granada: Universidad de Granada.

Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher, 37*(6), 14-20.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: in search of a framework. *Proceedings of the 20th International Conference of the P.M.E., 1*, 3-19.

Ramírez, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático* (tesis doctoral). Granada: U. de Granada. Disponible en <fqm193.ugr.es/produccion-cientifica/tesis/ver_detalles/ 7461>.

Ryu, H., Chong, Y. y Song, S. (2007). Mathematically gifted students' spatial visualization ability of solid figures. En *Proceedings of the 31st PME Conference, 4*, 137-144.

Thurstone, L. L. (2005). *PMA. Aptitudes mentales primarias*. Madrid: TEA

I Esta investigación es parte de los proyectos EDU2012-37259 (MINECO) y EDU2015-69731-R (MINECO/FEDER

Escrivá, M.T., Beltrán-Meneu, M.J., Gutiérrez, A. y Jaime, J. (2016). Habilidades de visualización de estudiantes de primaria en actividades de geometría espacial. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 623). Málaga: SEIEM.

RETOS Y OPORTUNIDADES DE LOS AMBIENTES DE GEOMETRÍA DINÁMICOS

Challenges and Opportunities of Dynamic Geometry Environments

Uribe-Kaffure, L., Castro-Gordillo, W., Villa-Ochoa, J.

Universidad de Antioquia, Medellín - Colombia

A raíz de una experiencia didáctica de cuatro profesores en un curso acerca del uso de tecnologías digitales en la clase de matemáticas, se produjo una reflexión de los retos y oportunidades que ofrecen los ambientes de geometría dinámicos (AGD) para la enseñanza de la geometría. El problema central de la discusión fue determinar la magnitud del 'radio' r de una elipse con ecuación $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ en función del ángulo θ que forma con el eje horizontal (Villa-Ochoa & Ruiz, 2010). Por analogía con la expresión del radio de una circunferencia se podría pensar que la expresión $|r(\theta)| = \sqrt{(a^2\cos^2(\theta)+b^2\text{sen}^2(\theta))}$ es adecuada. Sin embargo, a través del uso del software Geogebra se logró determinar que la expresión correcta es $|r(\theta)| = ab / \sqrt{(a^2\cos^2(\theta)+b^2\text{sen}^2(\theta))}$

La interacción con Geogebra durante el proceso de reflexión, la construcción de la expresión matemática y la lectura posterior de artículos científicos relacionados permitieron generar la reflexión que se presenta a continuación:

- **Aspecto**: Conocimiento conceptual y procedimental.
  Reto: Los estudiantes que usan AGDs se suelen centrar en lo procedimental a expensas de lo conceptual (Jones, 1998).
  Oportunidad: Los AGDs potencian lo conceptual al apoyar los cálculos procedimentales y así privilegiar el razonamiento.

- **Aspecto**: Conciencia del proceso cognitivo.
  Reto: Los estudiantes no son conscientes de la forma en que los AGDs pueden limitar sus razonamientos (Jones, 1998).
  Oportunidad: Los AGDs pueden expandir la capacidad de razonamiento al automatizar procedimientos complejos.

- **Aspecto**: Residuo cognitivo.
  Reto: Los estudiantes fallan al aplicar lo aprendido en AGDs a nuevas situaciones.
  Oportunidad: Los AGDs pueden producir un impacto cognitivo persistente en los estudiantes (Salomon, Perkins & Globerson, 1992).

Concluimos que un uso educativo adecuado de los AGD debe considerar el conocimiento conceptual previo de los estudiantes y una actitud crítica frente a las herramientas de apoyo.

Referencias

Jones, K. (1998). The mediation of learning within a dynamic geometry environment. In A. Oliver & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (pp. 96–103). Stellenbosch - Sudafrica.

Salomon, G., Perkins, D., & Globerson, T. (1992). Coparticipando en el conocimiento: la ampliación de la inteligencia humana con las tecnologías inteligentes. *Comunicación, Lenguaje Y …*, *4*(13), 6–22.

Villa-Ochoa, J. A. & Ruiz, M. (2010). Pensamiento variacional. Seres-humanos-con-Geogebra en la visualización de nociones variacionales. *Educação Matemática Pesquisa*, 12 (3), 514-528.

Uribe-Kaffure, L., Castro-Gordillo, W., y Villa-Ochoa, J. (2016). Retos y oportunidades de los ambientes de geometría dinámicos. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 625). Málaga: SEIEM.

COMPETENCIA FINANCIERA Y MODELACIÓN MATEMÁTICA EN BACHILLERATO: UN ACERCAMIENTO CUALITATIVO DESDE LA INVESTIGACIÓN BASADA EN DISEÑO (DBR)

Financial competence and mathematical modelling in Secondary Education: a qualitative approach from Design-Based Research (DBR)

Marbán Prieto, J. M., Sánchez Antolín, F. J.

Universidad de Valladolid, Colegio N. S. de Lourdes

Existe un amplio consenso internacional a la hora de reconocer la educación financiera como un elemento fundamental de la estabilidad y el desarrollo económico y financiero (OCDE, 2013); partiendo de esta premisa, la competencia financiera se ha convertido en un objetivo a alcanzar en el sistema educativo.

La competencia matemática se articula como un conjunto de habilidades y capacidades que van permitir a los individuos analizar, resolver e interpretar problemas matemáticos en diferentes situaciones, y su importancia para mejorar el bienestar de los ciudadanos se recoge en informes como PISA o leyes como la LOMCE. El estudio del proceso de adquisición de la competencia financiera al trabajar dicha competencia con las competencias matemática y de modelación, es uno de los objetivos centrales de nuestra investigación, que se desarrolla en un contexto de enseñanza de Economía en Bachillerato.

La naturaleza abierta e intervencionista de las Investigaciones Basadas en el Diseño (DBR), así como su carácter integrador entre diseño e investigación o el carácter iterativo de su aplicación experimental (Bakker & van Eerde, 2015), han sido los factores determinantes para elegir la DBR como metodología de desarrollo de la investigación.

La investigación se está realizando en dos grupos de alumnos de Economía de 1º de Bachillerato. Se han planificado varias tareas con metodología PBL dirigidas a estudiar cómo se produce la adquisición de la competencia de modelación matemática y cómo ésta incide en la adquisición de la competencia financiera.

La investigación se articula alrededor de Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (HLT) en procesos cíclicos de diseño, implementación y análisis retrospectivo (Simon & Tzur, 2004). Siguiendo con la metodología DBR, al final de cada iteración se produce una reflexión sobre los errores esperados, dificultades previstas y resultados obtenidos, que servirán de base para la programación de las siguientes iteraciones.

Referencias

Bakker, A., & van Eerde, D. (2015). An introduction to Design-Based Research with an example Form Statistics Education. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, & N. Presmeg, *Approaches to qualitative Research in Mathematics Education* (págs. 429-466). Utrech: Springer Netherlands.

Blomhøj, M. (2004). ModelizaciónMatemática - Una Teoría para la Práctica. En N. C. Education, B. Clarke, D. Clarke, G. Emanuelsson, & B. Johnansson (Edits.), *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics.* (M. Mina, Trad., págs. 145-159). Suecia.

OCDE. (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy.* OECD Publishing.

Simon, M., & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*, 91-104.

Marbán Prieto, J. M. y Sánchez Antolín, F. J. (2016). Competencia financiera y modelación matemática en bachillerato: un acercamiento cualitativo desde la investigación basada en diseño (DBR). En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 627). Málaga: SEIEM.

ALGORITMOS ABN: CREENCIAS DE MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN FORMACIÓN

ABN algorithms: Beliefs of primary school teachers in training

Adamuz-Povedano, N.[a], Bracho-López, R.[a] y Albanese, V.[b]

[a]Universidad de Córdoba, [b]Universidad de Granada

Desde hace más de 40 años se viene hablando de la necesidad de un cambio metodológico en el tratamiento de los algoritmos de cálculo en la escuela(Maier, 1987; Plunkett, 1979). De forma resumida, podemos decir que los algoritmos de cálculo tradicionales se introdujeron en la escuela por necesidades de la sociedad; sin embargo, hoy día, esas necesidades son muy diferentes, pero la realidad es que en la escuela se siguen enseñando "las cuatro reglas" de la misma forma que en tiempos pasados (Gil, 2008). Desde ese momento hasta ahora, son numerosos los autores que han abordado el poco sentido pedagógico que los algoritmos tradicionales tienen en la actualidad.

Actualmente se están llevando a cabo algunas iniciativas que tratan de incidir en el tratamiento de la aritmética escolar, con el objetivo de fomentar el desarrollo del sentido numérico. Creemos que es fundamental que el alumnado del grado de Educación Primaria conozca estas iniciativas. Una de las que se está difundiendo más es el caso de los algoritmos ABN (Martínez, 2008).

El objetivo de esta investigación es recoger las impresiones del alumnado de segundo curso del Grado de Educación Primaria sobre el uso de una metodología de cálculo basada en los algoritmos ABN por las siglas de Abiertos Basados en Números.

En la asignatura Didáctica de las Operaciones Numéricas y la Medida, del Grado de Educación Primaria, de la Universidad de Córdoba se ha trabajado con los futuros maestros y maestras con el algoritmo de cálculo ABN. Al finalizar la asignatura se les suministró un cuestionario y se organizaron grupos de discusión, con los que se pretendía detectar sus impresiones sobre esta nueva forma de hacer los cálculos básicos. Se transcribieron las grabaciones y se analizaron las respuestas de los estudiantes a las diferentes cuestiones que se fueron planteando por parte de los investigadores.

En general, las impresiones del alumnado fueron muy positivas sobre el nuevo método, piensan que se logra más entendimiento, aunque por otro lado, creen que hay mucha resistencia al cambio, y sobre todo les preocupa la continuidad del método.

Referencias

Gil, J. (2008). Respuestas a los problemas de bajo rendimiento desde la perspectiva de diferentes actores educativos. *Bordón, 60*(2), 77-90.

Maier, E. A. (1987). Basic Mathematical Skills or School Survival Skill? *Teaching Children Mathematics*, 2.

Martínez, J. (2008). *Competencias básicas en matematicas: una nueva práctica*. Madrid: Wolters Kluwer.

Plunkett, S. (1979). Decomposition and all that rot. *Mathematicas in school*, *8*(3), 2-5.

Adamuz-Povedano, N., Bracho-López, R., y Albanese, V. (2016). Algoritmos ABN: creencias de maestros de Educación Primaria en formación. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 629). Málaga: SEIEM.

EFECTOS DEL USO DEL DRAGONBOX ALGEBRA12+ EN LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

Dragonbox Algebra12+ Effects on Solving Equations

Molina Ribera, L., Arnau, D., Gutiérrez-Soto, J.

Departament de Didàctica de la Matemàtica, Universitat de València

Resumen

En Gutiérrez-Soto, Arnau y González-Calero (2015) se concluyó que tras el uso del juego DragonBoxAlgebra12+ hubo un aumento significativo en la competencia de los estudiantes en la resolución de ecuaciones en lápiz y papel. Una de las líneas futuras que se planteaban en este estudio era analizar de qué manera influía el uso del DragonBox en las formas de resolver cuando volvían al lápiz y papel. En este trabajo nos planteamos, entre otros, el objetivo de determinar si los estudiantes son capaces de dotar de significado a las reglas algebraicas a partir de las acciones procedentes del juego.

Para dar respuesta a este objetivo, hemos llevado a cabo un estudio con un grupo natural de 19 alumnos de tercero de la ESO de enseñanzas académicas. En él, primero se dedicaron unas sesiones a repasar brevemente los procedimientos básicos del álgebra, como son la manipulación de expresiones algebraicas y la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita. Seguidamente, se les administró un cuestionario donde debían resolver 15 ecuaciones. A continuación, durante cuatro sesiones se les permitió jugar con DragonBox, haciéndoles preguntas a medida que aprendían nuevas acciones. En estas intervenciones se les pidió que establecieran una relación entre las nuevas acciones (lo que en el juego se llaman poderes) que iban apareciendo y las reglas de resolución de ecuaciones. Por último, se les pasó un cuestionario con 15 ecuaciones isomorfas a las del cuestionario inicial.

El análisis de las discusiones de los alumnos cuando se introducían nuevas acciones permitió hacer un catálogo de actuaciones relacionado con sus respuestas en el cuestionario posterior al juego. Entre otras, destacamos un cambio en la estrategia de resolución de ecuaciones con denominadores y una mejora en la comprensión del signo igual.

Agradecimientos.

Este trabajo se ha realizado al amparo de los proyectos EDU2012-35638 y EDU2015-69731-R (MINECO/FEDER).

Referencias

Gutiérrez-Soto, J., Arnau, D., y González-Calero, J. A. (2015). Un estudio exploratorio sobre el uso de DragonBox Algebra12+ como una herramienta para la enseñanza de la resolución de ecuaciones. *Ensayos, Revista de la Facultad de Educación de Albacete, 30* (1), 33-44.

Molina Ribera, L., Arnau, D. y Gutiérrez-Soto, J. (2016). Efectos del uso del dragonbox algebra12+ en la resolución de ecuaciones. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 631). Málaga: SEIEM.

ESQUEMAS DE PRUEBA EN TORNO AL CONCEPTO DE PROPORCIONALIDAD EN LOS LIBROS DE TEXTO

Proof schemes related to proportionality in textbooks

Conejo, L.[a], Muñoz-Escolano, J. M.[b], Oller-Marcén, A. M.[c]

[a]Universidad de Valladolid, [b]Universidad de Zaragoza, [c]CUD de Zaragoza

Además de su valor matemático, la importancia de la demostración desde el punto de vista de la Educación Matemática está ampliamente aceptada. La actividad demostrativa suele reservarse para los cursos superiores (Bachillerato o Universidad) por ser un proceso complejo. Sin embargo, existen numerosos autores que abogan por la introducción de este proceso en etapas previas. Así, Vallejo y Ordóñez (2015) realizan una experiencia con alumnos de 7-8 años que argumentan para justificar una afirmación relacionada con la división de números naturales. Stylianides y Stylianides (2009) consideran, en base a criterios educativos y psicológicos, que es apropiado y razonable introducir la demostración y el razonamiento deductivo en niveles inferiores al instituto.

La proporcionalidad aritmética se introduce inicialmente en 6º de Educación Primaria y su tratamiento se revisa y amplía sucesivamente a lo largo de la Secundaria. Su tratamiento en el aula debería abordarse de forma que fuera posible para los alumnos construir significativamente los conceptos correspondientes a lo largo de la etapa. Los libros de texto juegan un papel fundamental, aunque a menudo no se justifican los métodos de resolución presentados para ciertos tipos de problemas de proporcionalidad (Martínez, Muñoz y Oller, 2015). Así, el objetivo principal de este trabajo consiste en analizar cómo se justifican los enunciados matemáticos en torno al concepto de proporcionalidad en los libros de texto y en las guías del profesor que los acompañan de 6º de EP a 4º de la ESO en una editorial (Anaya) correspondiente al periodo LOE. En particular, se clasifican los tipos de justificación que se utilizan atendiendo a las categorías de esquemas de prueba de libros de texto (Conejo, Arce y Ortega, 2015) y se detectan posibles inconsistencias en su presentación.

Tras un análisis de contenido de tipo exploratorio y descriptivo, observamos que apenas aparecen justificaciones en 6º de Ed. Primaria (sólo una y de tipo inductivo) pero que en los distintos cursos de Educación Secundaria se encuentran tanto EP inductivos como pruebas preformales y EP transformacionales y axiomáticos. Además, se ha encontrado que un mismo resultado puede ser enunciado, dependiendo del curso, como un procedimiento o como una proposición, lo que puede obstaculizar la adecuada comprensión del concepto de proporcionalidad.

Referencias

Conejo, L., Arce, M., & Ortega, T. (2015). Análisis de las justificaciones de los teoremas de derivabilidad en los libros de texto desde la Ley General de Educación. *AIEM*, 8, 51-71.

Martínez, S., Muñoz, J.M., & Oller, A.M. (2015). Un estudio comparativo sobre la proporcionalidad compuesta en los libros de texto españoles de Educación Secundaria Obligatoria durante la LOGSE-LOE-LOMCE. *AIEM*, 8, 95-115.

Stylianides, G.J. & Stylianides, A.J. (2006). "Making proof central to pre-high school mathematics is an appropriate instruccional goal": provable, refutable, or undecidable proposition? En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíkova (Eds.) *Proceedings 30th Conference of the international Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 5, pp. 209-216. Praga: PME.

Vallejo, E. & Ordóñez, C.C. (2015). An example of Proof-Based Teaching: 3rd graders constructing knowledge by proving. En K. Krainer & N. Vondrová (Eds.) *CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 230-231). Praga: ERME..

Conejo, L., Muñoz-Escolano, J. M., y Oller-Marcén, A. M. (2016). Esquemas de prueba en torno al concepto de proporcionalidad en los libros de texto. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. inicial-final). Málaga: SEIEM.

COMPETENCIA ESTADISTICA DEL FUTURO PROFESORADO DE EDUCACION PRIMARIA: ANALISIS DE LA REPERCUSION DEL ABP EN SU ADQUISICION

A field study measuring the effect of project based learning methodology on the learning process of statistics of prospective teachers of primary education

Anasagasti, J.y Berciano, A.

EuskalHerrikoUnibertsitatea/Universidad del País Vasco

En este póster se presenta parte del trabajo de investigación que analiza cómo el futuro profesorado de Educación Primaria adquiere las competencias profesionales en cuanto al bloque curricular de Tratamiento de la información, azar y probabilidad (National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Concretamente, se pretende medir la repercusión de la metodología docente basada en Aprendizaje Basado en Proyectos en la adquisición de las competencias relativas al conocimiento del contenido de Estadística, al conocimiento del currículo de Estadística de Educación Primaria, a su utilidad en la vida cotidiana y al uso de las nuevas tecnologías para el aprendizaje de la Estadística.

Para valorar dicha influencia, se ha diseñado específicamente un módulo para la investigación y se ha implementado en un grupo de 70 futuros maestros (estudiantes de tercer curso del Grado de Educación Primaria). Dicho módulo,basado en el aprendizaje basado en proyectos,desarrollalas distintas fases del PPDAC: problema, plan, datos, análisis y conclusiones (Wild yPfannkuch, 1999).

Para evaluar las competencias de los futuros maestros, se ha diseñado un test a partir del propuesto por Anasagasti y Berciano (2012) que tiene en cuenta y mide las aptitudes imprescindibles que debe dominar un maestro de Educación Primaria en cuanto a Estadística (conocimiento matemático y conocimiento didáctico).

Tras la implementación del módulo y análisis del test - usado como pretest y postest - los resultados indican que las competencias relativas al conocimiento del currículo de Estadística de Educación Primaria, a la utilidad de la Estadística en la vida cotidiana y al uso de de las nuevas tecnologías para el aprendizaje de la Estadística incrementan de manera significativa; sin embargo, la variación de la competencia relativa al conocimiento del contenido de Estadística obtiene un crecimiento mínimo.

Referencias

Anasagasti, J. y Berciano, A. (2012). Pruebaexploratoriasobrecompetencias de futuros maestros de primaria: conocimiento de conceptosbásicos de estadística. En A. Estepa, Á. Contreras, J.Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 113-122). Jaén: SEIEM.

National Council of Teachers of Mathematics (2000).*Principles and standards for school mathematics*. Reston: The National Council of Teachers of Mathematics.

Wild, C. J., yPfannkuch, M. (1999).Statistical thinking in empirical enquiry (with discussion).*International Statistical Review*, 67(3), 223-265**.**

Anasagasti, J. y Berciano, A. (2016). Competencia estadística del futuro profesorado de Educación Primaria: análisis de la repercusión del ABP en su adquisición. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 635). Málaga: SEIEM.

LOS CATÁLOGOS DE MATERIAL Y LA HISTORIA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

School supplies catalogues and History of Mathematical Education

Carrillo Gallego, D.[a], Dólera Almaida, J.[b]

[a]Facultad de Educación. Universidad de Murcia, [b]Centro Asociado ISEN. Universidad de Murcia

El trabajo que se presenta se enmarca en una línea de investigación en auge desde finales del siglo XX: el estudio del patrimonio material e inmaterial de las instituciones educativas y, dentro de ella, la cultura material de la escuela, y, en particular, los materiales escolares (Viñao, 2002; Del Pozo, 2006). Esos materiales eran construidos y comercializados por diversas casas comerciales que los publicitaron mediante la edición de catálogos dedicados total o parcialmente al material escolar (Martínez, Moreno y Sebastián, 2013). Por tanto, los catálogos de material escolar son una fuente importante para conocer qué materiales había en las aulas en un determinado periodo y la función que tenían dichos materiales en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

No hay demasiados trabajos dedicados al estudio de los catálogos en España y, desde luego, no se ha realizado un estudio específico de los materiales para el estudio de las matemáticas.

La cuestión que nos planteamos en este trabajo es «¿Pueden utilizarse los catálogos de material escolar como fuente en el estudio de la Historia de la Educación Matemática?». Para avanzar una respuesta a esta cuestión nos hemos propuesto los siguientes objetivos:

- Estudiar las posibilidades y límites de los catálogos de material escolar como fuente en el estudio de la historia de la cultura material de la escuela.
- Explorar dichas posibilidades y límites en el caso de la Historia de la Educación Matemática a través de un material típico de la enseñanza de la aritmética: los ábacos.
- Categorizar los catálogos utilizados en el estudio.

Se han utilizado los ábacos en este trabajo porque son un material que suele aparecer en los catálogos, cuyo uso experimentó una evolución a lo largo del periodo que puede o no ser recogida en dichos documentos.

Las fuentes primarias utilizadas en este estudio son un conjunto de quince catálogos de material escolar, publicados entre los años 1881 y 1936. Los datos de los catálogos tienen que ser contrastados con fuentes de otro tipo como los documentos legales, índices de adquisición efectiva y la descripción de su uso contenida en obras de diverso tipo. Se han usado catálogos de material de enseñanza de las casas Bastinos, Cultura, Dalmau Carles Pla, Espasa Calpe, Hernando y Koehler Volckmar, datados entre los años 1881 y 1936

Referencias

Del Pozo Andrés, M.M. (2006): Imágenes e historia de la educación: construcción, reconstrucción y representación de las prácticas escolares en el aula. *Historia de la Educación*, 25, pp. 291-315.

Martínez Ruiz-Funes, M.J., Moreno Martínez, P.L., Sebastián Vicente, A. (2013): Los catálogos de material de enseñanza como recurso didáctico. En Espigado Tocino, G. et alii: *La Constitución de Cádiz. Genealogía y desarrollo del sistema educativo liberal*(pp. 867-877). Cádiz: Universidad de Cádiz.

Viñao Frago, A. (2002): *Sistemas educativos, culturas escolares y reformas*. Madrid: Morata

Carrillo Callejo, D. y Dólera Almaida, J. (2016). Los catálogos de material y la historia de la educación matemática. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 637). Málaga: SEIEM.

LA SUBITIZACIÓN EN TAREAS NUMÉRICAS EN NIÑOS CON SÍNDROME DE DOWN

Subitizing in numerical tasks with down syndrome children

Tuset, I.[a] . Bruno, A.[b] Noda, A.[b] y Ramírez, M.[a]

[a]Universidad Complutense de Madrid, [b]Universidad de La Laguna

Establecer el cardinal de una colección forma parte del aprendizaje numérico en Educación Infantil. Para ello, los niños utilizan estrategias de conteo y de subitización, las cuales se complementan (Clements y Sarama, 2009). Estos autores distinguen entre la subitización perceptiva (innata) y la conceptual (basada en configuraciones). Proponen trabajarlas en el aula con el uso de diferentes materiales.

Los niños con síndrome de Down manifiestan dificultades para realizar tareas de conteo (Abdelhameed y Porter, 2006) que les condiciona la adquisición de otras habilidades numéricas como la cardinalidad, la composición y la descomposición. En la investigación que realizamos con esta población se analiza una propuesta de enseñanza que fomenta la capacidad de subitizar con el fin de compensar sus dificultades en el conteo.

Durante dos años se han realizado talleres mensuales con niños con síndrome de Down sobre tareas específicas para desarrollar la capacidad de subitizar conceptualmente cantidades hasta la decena, en las disposiciones de los puntos del dado y en la disposición binaria del material numérico conocido como Herbinière Lebert.

Se presentan resultados de entrevistas video grabadas realizadas a seis niños con síndrome de Down de edades comprendidas entre los 5 y los 7 años, los cuales están matriculados en colegios de integración en la etapa de Educación Infantil. Tres de ellos han asistido regularmente a los talleres (por lo que han recibido un aprendizaje numérico que fomenta la subitización) y los otros tres no. El objetivo del trabajo que se presenta es comparar las respuestas de estos dos grupos de niños en tres tareas numéricas diferentes.

Los resultados indican que los niños que tienen la capacidad de subitizar cantidades hasta seis en la disposición de los puntos del dado tienen más éxito en algunas tareas numéricas que los niños que no tienen adquirida dicha capacidad. En concreto se manifiestan diferencias significativas en tareas de producir gráficamente un conjunto de cardinal dado, en tareas relativas a la conservación de la cantidad y en tareas de descomposición.

Agradecimiento: EDU2015-65270-R. Una perspectiva competencial para la formación matemática y didáctica de profesores de educación primaria y secundaria: implicaciones para la enseñanza y el aprendizaje.

Referencias

Abdelhameed, H.; Porter, J. (2006). Counting in Egyptian children with Down Síndrome. *International Journal of Special Education* (2006), 21(3), 176-187.

Clements, D.H. y Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. Nueva York: Routledge

Tuset, I.[a] . Bruno, A.[b] Noda, A.[b] y Ramírez, M. (2016). La subitización en tareas numéricas en niños con síndrome de down. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 639). Málaga: SEIEM.

ESTUDIO EMPÍRICO SOBRE LA INFLUENCIA DE RECURSOS HEURÍSTICOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROBABILIDAD CONDICIONADA L_0 Y L_2[xx]

Empirical study on the influence of heuristics in solving L_0 and L_2 conditional probability problems

Diago, P. D.[a], Gutiérrez-Soto, J.[a], Arnau, D.[a] , Arevalillo-Herráez, M.[b]

[a]Departament de Didàctica de la Matemàtica, Universitat de València, [b]Departament d'Informática, Universitat de València

Se ha constatado la dificultad de los estudiantes a la hora de resolver problemas de probabilidad condicionada (Cañadas et al., 2011). En general, la complejidad de estos problemas es debida a varios factores: el formato y el orden en el que se presentan los datos, el contexto en el que se plantea el problema, el lenguaje utilizado para expresar los datos condicionales o las herramientas utilizadas en el proceso de resolución. En nuestro estudio nos centraremos en el uso y la influencia de recursos heurísticos, como tablas de contingencia o diagramas de árbol, durante la resolución de un problema de probabilidad condicionada.

La intención de este estudio es observar cómo resuelven problemas de probabilidad condicionada los estudiantes de los grados de maestro cuando se les impide usar diagramas de árbol y las tablas de contingencia. Para este propósito se han seleccionado los problemas de probabilidad condicionada que Huerta (2009) identifica como pertenecientes a las familias L_0 y L_2 (contienen cero ó dos datos condicionales en el enunciado) y que pueden resolverse de manera aritmética. El diseño de la fase empírica podemos dividirlo en dos partes. En primer lugar se ha administrado un test formado por cuatro problemas de probabilidad condicionada (dos L_0 y dos L_2) a 47 estudiantes de grado de maestro. Los estudiantes debían resolver los problemas con lápiz y papel y se les permitió usar calculadora. Estos estudiantes habían sido previamente instruidos en la resolución de problemas de probabilidad condicional. Durante la enseñanza se ofrecieron dos alternativas de resolución: una basada en el uso de tablas de contingencia y diagramas de árbol, y otra en la que se utilizaban exclusivamente fórmulas. En una segunda fase, se han seleccionado varias parejas de alumnos que tenían la característica de haber resuelto incorrectamente los mismos problemas en el cuestionario con lápiz y papel. A estas parejas se les hizo resolver los problemas que había resuelto incorrectamente exigiendo que los resolvieran usando un sistema tutorial (Arevalillo-Herráez, Arnau y Marco-Giménez, 2013), que era capaz de validar las operaciones que realizaban, pero que no ofrecía la posibilidad de usar papel y lápiz.

Actualmente el estudio está en fase de pilotaje y nos limitamos a presentar algunos resultados preliminares del efecto de eliminar estos recursos heurísticos (y las reglas de cálculo internas asociadas) en el proceso de resolución del problema.

Referencias

Arevalillo-Herráez, M., Arnau, D., y Marco-Giménez, L. (2013). Domain-specific knowledge representation and inference engine for an intelligent tutoring system. *Knowledge-Based Systems*, 49, 97 – 105

Cañadas, G., Batanero, C., Contreras, J. M., y Arteaga, P. (2011). Estrategias en el estudio de la asociación en tablas de contingencia por estudiantes de psicología. Educación Matemática, 23, 5 – 32

Huerta, M. P. (2009). On Conditional Probability Problem Solving Research – Structures and Contexts. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 4(3), 163 – 194

Diago, P. D., Gutiérrez-Soto, J., Arnau, D., Arevalillo-Herráez, M. (2016). Estudio empírico sobre la influencia de recursos heurísticos en la resolución de problemas de probabilidad condicionada L_0 y L_2. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 641).. Málaga: SEIEM.

I Los autores agradecen la ayuda de los proyectos AYA2013-48623-C2-2-P, TIN2014-59641-C2-1-P, EDU2012-35638 y EDU2015-69731-R (MINECO/FEDER) otorgados por el Ministerio de Economía y Competitividad

DISEÑO DE UNA INVESTIGACIÓN SOBRE EL ERROR DE INVERSIÓN Y LAS BASES NEURONALES SUBYACENTES[xxi]

Design of a research into the reversal error and its underlying neural basis

Ventura-Campos, N.[a], Arnau, D.[a], Gutiérrez-Soto, J.[a], González-Calero, J.A.[b] y Ávila, C.[c]

[a]Universitat de València, Estudi General (UVEG), [b]Universidad de Castilla - La Mancha. [c]Universitat Jaume I

Los resultados de los informes PISA muestran que los estudiantes españoles tienen un bajo rendimiento en resolución de problemas. Estos resultados se pueden asociar a la escasa repercusión en la práctica docente de los resultados de la investigación sobre resolución de problemas.

La investigación sobre la enseñanza-aprendizaje de resolución de problemas verbales (RPV) se ha abordado desde perspectivas cognitivas o afectivas. Sin embargo, no es habitual tener en cuenta la importancia que tiene el desarrollo cerebral del alumnado en el aprendizaje. Varios estudios de neurociencia han examinado los procesos usados durante la RPV y cómo son adquiridos. Lee et al. (2007) en un estudio con adultos sobre la traducción de enunciados a ecuación, encontró activación en áreas cerebrales del córtex prefrontal y parietal asociadas con la memoria de trabajo y procesos atencionales. Curiosamente, un estudio con adolescentes y adultos durante la práctica de RPV (Qin et al. 2004), muestra que después de la práctica tanto los adultos como los adolescentes tienen una reducción de activación en áreas prefrontales. Sin embargo, solo en adolescentes se produce una reducción de activación en áreas parietales y un incremento en el putamen, asociado este último con la planificación de respuesta. El aumento de activación en el putamen respaldaría la idea de que los adolescentes necesitan un mayor esfuerzo para realizar cálculos complejos, apoyándose en las regiones del cerebro que no son necesarias en el desempeño de adultos. Esto sugiere que su respuesta cerebral es más plástica y se produce un mayor cambio con la práctica.

El objetivo de nuestra investigación es determinar las bases neuronales subyacentes ligadas al error de inversión (Clement, 1982). Este poster presenta el diseño de la fase empírica de un estudio de neuroimagen con resonancia magnética en el que han participado un grupo de estudiantes universitarios. A estos estudiantes se les administró un cuestionario formado por 16 ítems con enunciados similares a “Hay seis veces tantos estudiantes como profesores en esta universidad” (Clement, 1982, p. 17). Actualmente estamos realizando el análisis de los resultados para establecer si es posible identificar relaciones entre la incidencia del error del inversión y las características cerebrales de los participantes.

Referencias

Clement, J. J. (1982). Algebra word problem solutions: Thought processes underlying a common misconception. *Journal for Research in Mathematics Education*, *13*(1), 16–30.

Qin, Y.L. Carter, C.S., Silk, E.M., Stenger, V.A., Fissell, K., Goode, A. y Anderson, J.R. (2004) The change of the brain activation patterns as children learn algebra equation solving. Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A. 101, 5686–5691

Lee, K., Lim, Z. Y., Yeong, S. H., Ng, S. F., Venkatraman, V., y Chee, M. W. (2007). Strategic differences in algebraic problem solving: neuroanatomical correlates. *Brain Res., 1155*, 163–171.

I Este trabajo se ha realizado al amparo del proyecto PSI2013-47504-R otorgado por el Ministerio de Economía y Competitividad

Ventura-Campos, N. Arnau, D., Gutiérrez-Soto, J., González-Calero, J.A. y Ávila C. (2016). Diseño de una investigación sobre el error de inversión y las bases neuronales subyacentes. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 643). Málaga: SEIEM.

DIFERENCIAS EN ACTITUDES HACIA LAS MATEMÁTICASYACTITUDES MATEMÁTICAS EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS DE MATEMÁTICAS E INGENIERÍA

Differences in Attitudes toward Mathematics and Mathematics Attitudes in University Students of Mathematics and Engineering

Mejía, A. [a] **y Sánchez, J. G.** [a, b]

[a] FCFM- Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México, [b] FES Zaragoza-Universidad Nacional Autónoma de México, México

En educación matemática la preocupación y el interés por conocer los factores que obstaculizan o favorecen los procesos de aprendizaje de las matemáticas ha dado lugar a varios estudios.

Aunque se reconoce que son muchas las variables que intervienen en el aprendizaje de las matemáticas, para Sánchez y Ursini (2010) ‘‘*las actitudes han sido consideradas para estudiar este proceso porque… condicionan diversos procesos psicológicos, constituyen parte del sistema de valores del individuo y parecen estar relacionadas con el rendimiento escolar’’* (p.305). Precisamente en ello radica el interés e importancia de las actitudes. Las actitudes hacia un determinado tema suelen ser estables, ser positivas o negativas,se pueden graduar según su intensidad y expresan sentimientos vinculados a elementos que no son estrictamente parte de una asignatura sino al profesor o tipo de actividad (Estrada, Bazán & Aparicio, 2013).

Este estudio tiene el propósito de describir y diferenciar las actitudes hacia las matemáticas y las actitudes matemáticas en dos grupos de estudiantes universitarios mexicanos (N=393), uno de matemáticas y otro de ingenierías. Se escogieron estas carreras universitarias ya que representan dos contactos opuestos en su quehacer con las matemáticas: uno puro y el otro aplicado. Se usó el *Inventario de Actitudes hacia las Matemáticas* (ATMI) que mide cuatro dimensiones actitudinales (confianza en sí mismo, valor de la matemática, gusto y motivación por las matemáticas) y la *Escala de Actitudes Matemáticas* (EAM) que evalúa cuatro dimensiones de actitudes matemáticas (percepción de incompetencia matemática, gusto, percepción de utilidad y autoconcepto matemático). Se encontró que en gusto por las matemáticas delATMI se presentan las actitudes más positivas, en los dos grupos de estudiantes; sin embargo, un análisis de varianza evidenció que solamente en gusto y motivación por las matemáticas existen diferencias estadísticamente significativas entre los dos grupos, en ambas dimensiones con p =.00. En actitudes matemáticas, de la EAM, se hallaron las actitudes más positivas en gusto por las matemáticas. Aunque solamente se encontraron diferencias significativas, entre los dos grupos de estudiantes, en gusto por las matemáticas (p = .00) y autoconcepto matemático (p = .02).

Referencias

Estrada, A., Bazán, E., & Aparicio, A. (2013). Evaluación de las propiedades psicométricas de una escala de actitudes hacia la estadística en profesores. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 3*, 5 – 23

Sánchez, R. J. G. y Ursini, S. (2010). Actitudes hacia las matemáticas y matemáticas con tecnología: Estudios de género con estudiantes de secundaria. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 13*(4), 313-318.

Mejía, A. y Sánchez, J. G. (2016).Diferencias en actitudes hacia las matemáticas y actitudes matemáticas en estudiantes universitarios de matemáticas e ingeniería. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 645). Málaga: SEIEM.

FACTORES QUE FAVORECEN EL APRENDIZAJE DE LA ESTADÍSTICA CON PROYECTOS

Factors that Enhance Learning of Statistics with Projects

Islas-López, A., Pinto-Sosa, J.
Universidad Autónoma de Yucatán

Según los planes de estudio de bachillerato estatal en México, la asignatura de Matemáticas V, en el primer bimestre se desarrolla con la estrategia didáctica "estadística con proyectos". La estrategia contempla cuatro fases para realizar una investigación estadística a) planteamiento del problema, b) decisión sobre los datos a recoger, c) recogida y análisis de los datos y d) obtención de conclusiones sobre el problema planteado (Batanero 2005).

El presente estudio tiene como objetivo describir la percepción que tienen los alumnos sobre el aprendizaje de la estadística con proyectos e identificar los factores que favorecen su aprendizaje. La investigación se fundamenta en la Reforma Integral de Educación Media Superior (RIEMS en México), la cual se implementó desde 2011 a través de un enfoque por competencias.

Investigaciones como las de Cornejo y Redondo (2007) dan cuenta que para hacer la elección de los factores a estudiar, debe considerarse el conocimiento real de los contextos escolares y la evidencia de estudios sobre teoría de aprendizaje por reestructuración de significados. La literatura sugiere la necesidad de darle un peso a cada uno de los factores asociados al aprendizaje, relacionarlos entre sí y revisar la causalidad lineal entre ellos, con el fin de mejorar la calidad y pertinencia del proceso instruccional a estudiar.

Con base en la literatura, el factor central de análisis se encuentra en el uso de la estrategia estadística con proyectos, y como factores a relacionar el desempeño docente, las actitudes del estudiante en estadística, los conocimientos previos y el uso práctico de la estadística.

Se trata de una investigación desde el paradigma positivista de corte cuantitativo correlacional. La población de estudio son 1450 alumnos matriculados en el quinto semestre de los bachilleratos pertenecientes al subsistema de las Preparatorias Estatales en Mérida Yucatán México. Se seleccionará una muestra estratificada proporcional de 640 alumnos, quienes habrán tomado el curso de introducción a la estadística usando la estrategia didáctica con proyectos.

El proyecto está en su fase de desarrollo y actualmente la batería de instrumentos del trabajo de campo se sometió al juicio de expertos y prueba piloto con los estudiantes.

Referencias

Batanero, C., y Díaz, C. (2005). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. Presentado en el VII Congreso Galego de Estadística e Investigación de Operaciones, Portugal.

Cornejo, R.y Redondo, J. (2007). Variables y factores asociados al aprendizaje escolar. Una discusión desde la investigación actual. *Estudios pedagógicos*, 33(2), 155-175

Islas-López, A., Pinto-Sosa, J. (2016). Factores que favorecen el aprendizaje de la estadística con proyectos. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 647). Málaga: SEIEM.

LA INCLUSIÓN DE LA SOSTENIBILIDAD EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

The inclusion of sustainability in mathematics education

Moreno-Pino, F., Azcárate, P. y Cardeñoso, J. M.

Universidad de Cádiz

El póster que presentamos es un resumen de una investigación que se está desarrollando, cuyo objetivo es determinar cuál es el estado actual de la Educación Matemática en relación a la inclusión de competencias profesionales coherentes con una Educación para la Sostenibilidad en tres contextos diferentes: los estudios de Grado para Maestro de Educación Infantil, los estudios de Grado para Maestro de Educación Primaria y los estudios de Postgrado en el Máster de Formación del Profesorado de Secundaria de la Universidad de Cádiz.

La base para el buen desarrollo de las sociedades reside en su cultura y la omnipresencia de las matemáticas en la escuela, el carácter holístico de efecto sistémico-complejo de las problemáticas globales que hoy nos acechan, unida a nuestra posición de formadores de futuros docentes, nos lleva a cuestionarnos sobre qué formación en Educación Matemática favorecerá la buena marcha de estas sociedades.

En las aulas, muy frecuentemente, se llevan a cabo procesos de aprendizaje que se caracterizan por su extremo reduccionismo, muy alejado de lo que sucede en la vida real (Murga-Menoyo, 2013). Capacitar a las personas para entender el mundo en términos de relaciones y para intervenir adecuadamente en él es el gran reto del sistema educativo. Por ello, establecemos como marco de referencia para nuestra investigación el paradigma de la complejidad que, basado en los principios sistémico, dialógico y hologramático, aboga por una visión compleja del mundo (Morin, Ciurana y Motta, 2003) percibiendo los procesos de enseñanza-aprendizaje como espacios de diálogo entre una forma de pensar, un marco de valores y un mundo de acción (Bonil, Junyent y Pujol, 2010).

Los estudiantes tienen que adquirir no sólo un conocimiento pragmático sobre cómo usar la matemática o cómo construir modelos matemáticos, sino que también han de elaborar un conocimiento sobre las condiciones de su construcción y aplicación, así como una comprensión de las funciones sociales de la aplicación de dichos modelos (Azcárate, 2005). Es en este contexto donde un estudiante se entenderá matemáticamente alfabetizado y para ello la sostenibilización curricular de la Educación Matemática se hace irremplazable.

Referencias

Azcárate, P. (2005). El profesor de matemáticas ante el cambio educativo: una visión desde la complejidad. *En Actas del V CIBEM*. Oporto: Universidad de Oporto.

Bonil, J., Junyent, M., y Pujol, R. M. (2010). Educación para la sostenibilidad desde la perspectiva de la complejidad. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias, 7*(Nº Extraordinario), 198-215.

Morin, E., Ciurana, E., y Motta, R. (2003). *Educar en la era planetaria*. Barcelona, España: Gedisa.

Murga-Menoyo, M. Á. (2013). *Desarrollo sostenible: problemáticas, agentes y estrategias*. Madrid, España: McGraw-Hill.

Moreno-Pino, F., Azcárate, P. y Cardeñoso, J. M. (2016). La inclusión de la sostenibilidad en la educación matemática. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 649). Málaga: SEIEM.

INTERACCIÓN PROFESOR-ALUMNOS CUANDO RESUELVEN CONJUNTAMENTE UN PROBLEMA DE DIFERENTES DOMINIOS COGNITIVOS EN AULAS DE PRIMARIA: PROCESOS QUE SE PROMUEVEN

Teacher-students interaction in joint word problem solving with different cognitive domains in primary classrooms: process promoted

Sánchez, B.[a], Ramos, M.[b], Chamoso, J. M.[a], Vicente, S.[b] y Rosales, J.[b]

[a]Dpto. Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales, Universidad de Salamanca
[b]Dpto. Psicología Evolutiva y de la Educación, Universidad de Salamanca

La investigación sobre la interacción de un maestro cuando resuelve conjuntamente problemas con sus alumnos en el aula de Primaria ha mostrado que se promueve escasamente el razonamiento (por ejemplo: Sánchez et al., 2014). Pero, en lo que se sabe, no se ha estudiado si el tipo de problema utilizado influye en esos resultados. En este trabajo se pretende analizar los procesos que se promueven en la interacción profesor-alumnos al resolver de forma conjunta un problema con tres apartados de dominios cognitivos diferentes –conocimiento, aplicación y razonamiento- (adaptado de TIMSS 2007, IEA, 2011).

Para ello se seleccionaron, por disponibilidad, diez maestros del tercer ciclo de Primaria que ejercían la docencia en centros españoles, que aceptaron ser grabados en audio mientras resolvían el problema conjuntamente con sus alumnos. Transcritas las interacciones, se organizaron en ciclos (Wells, 1999) y se categorizaron según los procesos que surgían en la interacción (más detalle, Rosales et al., 2012; considerando únicamente: selección (S) (alude a información explícita del enunciado del problema o que surge en el proceso de resolución, sin justificación) e integración (I) (alude a aspectos que relacionan o comparan información que aparece explícitamente en el problema o surge en el proceso de resolución, de forma justificada).

Los resultados obtenidos fueron: Conocimiento (S: 65.91%, I: 34.09%), Aplicación (S: 71.14%, I: 28.86%), Razonamiento (S: 62.12%, I: 37.88%). Estos mostraron que el número de ciclos de los procesos dirigidos a selección e integración eran similares, sin que hubiera diferencias significativas entre ellos. Sin embargo, si se comparan los procesos de selección e integración que surgieron en cada uno de los tres apartados del problema, existieron diferencias significativas ($p<.05$) en todos los casos primando la selección de datos (similar a Rosales et al., 2012). Esto puede significar que el dominio cognitivo que requiere el problema no influye en el nivel de interacción aunque sería aconsejable más investigación sobre ello.

IEA (2011). *TIMSS 2007. Guía del usuario para la base de datos internacional.* Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Rosales, J., Vicente, S., Chamoso, J.M., Muñez, D. y Orrantia, J. (2012). Teacher-student interaction in joint word problem solving. The role of situational and mathematical knowledge in mainstream classrooms. *Teaching and teacher education, 28* (8), 1185-1195.

Sánchez, B., Ramos, M., Chamoso, J. M., Rosales, J. y Vicente, S. (2014). Autonomía en la interacción en resolución de problemas no rutinarios en aulas de primaria. En M.T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (p.603). Salamanca: SEIEM.

Wells, G. (1999) *Dialogic inquiry: Toward a sociocultural practice and theory of education.* Cambridge: CUP

Sánchez, B., Ramos, M., Chamoso, J. M., Vicente, S. y Rosales, J. (2016). Interacción profesor-alumnos cuando resuelven conjuntamente un problema de diferentes dominios cognitivos en aulas de Primaria: procesos que se promueven. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 651) Málaga: SEIEM.

¿PROPONEN LOS LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICAS DE EDUCACIÓN PRIMARIA DEMASIADAS ACTIVIDADES?

Do Mathematics Primary Education Textbooks propose too many activities?

Santaolalla, E.

Universidad Pontificia Comillas

Los libros de texto de matemáticas influyen sobre los métodos de enseñanza utilizados en la Educación Primaria en tanto que si proponen muchas actividades mecánicas, los métodos didácticos empleados por los profesores llevan a una enseñanza superficial basada en una práctica intensiva que minimiza el aprendizaje a largo plazo (Ewing, 2006; Shield y Dole, 2013). Además, diversos estudios constatan que la mayoría de los profesores siguen los libros de texto de matemáticas *al pie de la letra* (Christiansen y Walter, 1986; Vincent y Stacey, 2008), proponiendo a los alumnos todas las actividades que estos incluyen en sus unidades didácticas.

Este trabajo muestra los resultados de un análisis exploratorio y descriptivo de la cantidad y la variedad de las actividades propuestas en 9 libros de texto de matemáticas de Educación Primaria, pertenecientes a tres de las editoriales con mayor difusión en los centros educativos del territorio español, utilizados durante el curso escolar 2011 – 2012.

Se observa que en general se proponen muchas actividades para ser realizadas en un plazo de tiempo relativamente corto y, en algunos casos, con sumo detalle. Se aprecia que la variedad no va acompañada de una distribución equitativa de la cantidad de cada uno de los tipos: las actividades repetitivas, para practicar e imitar los ejemplos resueltos son las más abundantes y superan en todos los casos, el 70% del total de actividades propuestas. También se evidencia que el tipo de maqueta utilizada condiciona la organización, la cantidad y la variedad de actividades.

Se observa la necesidad de reducir el número total de actividades, a la vez que se debe encontrar un equilibrio entre los ejercicios repetitivos cuya finalidad es afianzar las destrezas adquiridas, y las actividades que fomenten el pensamiento crítico.

Las conclusiones obtenidas coinciden con las alcanzadas por autores como Salgado y Salinas (2009) o Serradó y Azcárate (2003), entre otros.

Referencias

Christiansen, B., y Walter, G. (1986). Task and activity. En B. Chistiansen, A. G. Howson y M. Otte (Eds.), *Perspectives on Mathematics Education* (pp. 243-308). Dordrecht: Reidel.

Ewing, B. (2006). Go to the page and work it from there: Young people´s experiences of learning mathematics from a text. *Australian Senior Mathematics Journal, 20*(1), 9-14.

Salgado, M., y Salinas, M.J. (2009). El número en los libros de texto de Educación Infantil. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 487-497). Santander: SEIEM.

Serradó, A., y Azcárate, P. (2003). Estudio de la estructura de las unidades didácticas en los libros de texto de matemáticas para la educación secundaria obligatoria. *Educación Matemática*, *15*(1), 67-98.

Shield, M.J., y Dole, S. (2013). Assessing the potential of mathematics textbooks to promote deep learning. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(2), 183-199.

Vincent, J., y Stacey, K. (2008). Do Mathematics Textbooks Cultivate Shallow Teaching? Applying the TIMSS Video Study Criteria to Australian Eighth–grade Mathematics Textbooks. *Mathematics Education Research Journal, 20*(1), 82-107.

Santaolalla Pascual, E. (2016). ¿Proponen los libros de texto de matemáticas de Educación Primaria demasiadas actividades?. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 653). Málaga: SEIEM.

EVALUACIÓN DE ALFABETIZACIÓN ESTADÍSTICA EN UNA UNIVERSIDAD PÚBLICA

Assessing statistical literacy in a public university

Marín-Che, A., Pinto-Sosa, J.

Universidad Autónoma de Yucatán

Desde los años noventa, la estadística ha ido cobrando un mayor interés como parte importante del currículo académico. Gal (2002) define la alfabetización estadística como una habilidad prioritaria para los ciudadanos, señalándola como la capacidad para leer, interpretar y comunicar información estadística que puedan encontrarse en diversos medios. En los últimos años, este concepto se ha convertido en un tema central de diferentes proyectos en todo el mundo como el ICOTS cada cuatro años y del Proyecto Internacional de Alfabetización Estadística que se encargan de difundir y promover este tópico en los currículos escolares y en los ciudadanos. Países como Nueva Zelanda, España y Estados Unidos han empezado a incluir la estadística como parte de su formación académica en estudios universitarios sin importar el campo de formación (Mofokozi, 2011; Ziegler, 2014).

En México los avances de investigación son incipientes y poco documentados en cuanto al desarrollo de la alfabetización estadística en las universidades. No existe un currículo que desarrolle una formación básica en nivel superior y al parecer existe la creencia de que determinadas carreras no necesitan de estadística. Esta investigación pretende analizar este constructo, así como realizar un diagnóstico de estudiantes en diversos campos profesionales de una universidad pública en Mérida, México, que permita caracterizar e identificar los elementos estadísticos que requieren de la carrera que estudian. Se explorará las diferencias entre alumnos que cursan estadística en licenciatura y los que no, así como las diferencias existentes por campo profesional.

El estudio será bajo el enfoque cuantitativo, de tipo descriptivo, no experimental y transversal. La población serán los estudiantes de quinto semestre de las diferentes licenciaturas ofrecidas por la universidad. Se seleccionará el 25% de los alumnos en cada área de estudio por un muestreo por conglomerados para tener una muestra representativa de la población de estudio. Dos son los instrumentos para la recolección de los datos: a) una prueba desempeño sobre alfabetización estadística diseñada con base en los avances de investigación en educación estadística, y b) un cuestionario sobre necesidades de formación básica para la profesión.

Referencias

Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, *70*(1), 1-25

Mafokozi, J. (2011). Nivel de alfabetización estadística del alumnado universitario de letras: El caso de la Facultad de Educación de la Universidad Complutense de Madrid. *Revista Complutense de Educación, 22*(1), 95-125.

Ziegler, L. A. (2014). *Reconceptualizing statistical literacy: Developing an assessment for the modern introductory statistics course.* (3630287 Ph.D.), University of Minnesota, Ann Arbor. Recuperado de http://search.proquest.com/docview/1562784265?accountid=30047 ProQuest Dissertations & Theses Global database.

Marín-Che, A. y Pinto-Sosa, J. (2016). Evaluación de alfabetización estadística en una universidad pública. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 655). Málaga: SEIEM.

REPERCUSIÓN DEL USO DE PUNTOS DE REFERENCIA EN LA ADQUISICIÓN DE HABILIDADES DE ORIENTACIÓN ESPACIAL POR ESCOLARES DE 5 AÑOS: ESTUDIO DE CASOS

Impact of the use of benchmarks in acquiring skills of spatial orientation on 5 year-old children: a case study

Zabala, L., Jiménez-Gestal, C.[a] y Berciano, A.[b]

[a]Universidad de La Rioja, [b]Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea

En este poster presentamos un estudio de casos de la posible repercusión del uso de puntos de referencia (Clements, 1998) en la adquisición de habilidades relativas a la orientación espacial con escolares de 5 años del aula de Educación Infantil. En particular, basándonos en un enfoque contextualizado y globalizado de la enseñanza matemática (Alsina, 2012; Berdonneau, 2008) se han diseñado dos experiencias de aula con las que pretendemos que las y los infantes trabajen la orientación espacial.

El punto de partida de estos diseños lo tenemos en (Berciano, Jiménez-Gestal y Salgado, 2015, 2016), en donde se describen las características que tiene que satisfacer una actividad de orientación espacial desde el punto de vista de la Enseñanza Matemática Realista y la posible relación existente entre los tipos de representaciones que pueden darse a la hora de representar itinerarios y la capacidad espacial de cada infante.

Partiendo de una situación contextualizada en las que los y las infantes tienen que localizar un tesoro escondido en el centro escolar, estos deben representar individualmente en un plano el itinerario seguido para hallar el tesoro. Para poder analizar las representaciones usadas y la posible influencia del uso de puntos de referencia, se ha considerado como diferencia principal entre ambas actividades el modo de descripción del recorrido, que, en un caso, se ha hecho por medio del uso de puntos de referencia y, en el otro, huellas marcadas en el suelo, dando lugar al mismo itinerario.

Un análisis pormenorizado de las representaciones planas del recorrido nos revela que en el primer caso (uso de puntos de referencia) las y los infantes tienden a dejar constancia de los cambios de dirección realizados a lo largo del camino, mientras que en el segundo (huellas), hacen un mayor hincapié en la noción de continuidad del recorrido.

Referencias

Alsina, A. (2012). Hacia un enfoque globalizado de la educación matemática en las primeras edades, *Números*, *80*, 7-24.

Berciano, A., Jiménez-Gestal, C. y Salgado, M. (2015). Representaciones en el plano de cambios de nivel en el espacio por escolares de 5 años: Estudio de casos. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), Investigación en Educación Matemática XIX (p. 539). Alicante: SEIEM.

Berciano, A., Jiménez-Gestal, C. y Salgado, M. (2016). Tratamiento de la Orientación en el Aula de Educación Infantil desde la perspectiva de la Educación Matemática Realista, *Números*, (en prensa).

Berdonneau, C. (2008). *Matemáticas Activas*. Barcelona: Graó.

Clements, D. H. (1998). *Geometric and spatial thinking in young children*. Recuperado el 24 de mayo de 2016 de la base de datos ERIC (ED436232).

Zabala, L., Jiménez-Gestal, C. y Berciano, A. (2016). Repercusión del uso de puntos de referencia en la adquisición de habilidades de orientación espacial por escolares de 5 años: estudio de casos. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 657). Málaga: SEIEM.

ANÁLISIS DE EVIDENCIAS DE PENSAMIENTO FUNCIONAL EN ESTUDIANTES DE 5º CURSO PRIMARIA

Analysis of evidencesaboutfunctionalthinking in 5th level of primaryeducation

Bastías Sepúlveda, K., Moreno Verdejo, A.

Universidad de Granada

Esta investigación tiene como objetivo identificar evidencias de pensamiento funcional en estudiantes de quinto curso de educación primaria, en el marco de la propuesta de innovación curricular y línea de investigación conocida como Early-Algebra (Molina, 2009).

El pensamiento funcional incluye la relación entre cantidades que pueden expresar su relación en palabras, símbolos, tablas o gráficos, y el razonamiento con estas diversas representaciones para analizar el comportamiento de la función. Los antecedentes de investigación han sido utilizados para analizar la interpretación y construcción de relaciones funcionales empleadas por los estudiantes.Algunas de estas investigaciones establecieron la presencia de relaciones de covariación, correspondencia y el uso de patrones recurrentes para establecer las relaciones entre las variables(Blanton y Kaput (2011), Cañadas, Brizuela y Blanton (2016), Smith (2008)).

La investigación se ha realizado con una muestra intencional de estudiantes de 5º curso de primaria. El instrumento que hemos utilizado para la recogida de información es una tarea escrita compuesta por ocho cuestiones relacionadas con una situación modelizable por una relación funcional (función afín). La metodología de la investigación de este estudio es de tipo cualitativa, en el cual se ha elaborado un experimento de enseñanza sobre el que hemos realizado un estudio de naturaleza exploratoria y descriptiva.Los resultados ponen de manifiesto la presencia de diversas vinculaciones entre las variables de la relación funcional planteada en la tarea así como distintas representaciones para explicarlas.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencia EDU2013-41632-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

Bibliografía

Blanton, M. L., yKaput, J. J. (2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. In J. Cai y E. Knuth (Eds.), Early Algebraization (pp. 5–23). Berlin, Heidelberg: Springer.

Cañadas, M. C., Brizuela, B. M., yBlanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *TheJournal of MathematicalBehavior*, 41, 87-103

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, 3(3), 135-156.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In Kaput, J. J., Carraher, D. W., y Blanton, M. L. (Eds.), Algebra in the early grades (pp.133-160) New York, NY: LEA.

Bastías Sepúlveda, K., y Moreno Verdejo, A. (2016). Análisis de evidencias de pensamiento funcional en estudiantes de 5º curso primaria. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 659).. Málaga: SEIEM.

LAS MATEMÁTICAS EN EL BACHILLERATOA DISTANCIA: RESTRICCIONES EPISTEMOLÓGICAS Y PEDAGÓGICAS

Mathematics in Distance Teaching Secondary School: Epistemological and Pedagogical restrictions

Olivares-Carrillo, P., Sánchez-Jiménez, E.

Universidad de Murcia

Resumen

El mundo está experimentando una verdadera revolución en la difusión del conocimiento y en la mejora de la instrucción a través del avance de las tecnologías de la comunicación y la información. Esta es la tercera revolución en el aprendizaje, siendo la primera la invención del lenguaje escrito y la segunda el desarrollo de la imprenta y los libros. En la actualidad podemos encontrar enseñanza virtual en todos los niveles de enseñanza, es por ello que los sistemas educativos se enfrentan a grandes desafíos en la cada vez más demanda educación a distancia, con el propósito de proporcionar todo el espectro de servicios de educación para todos, en cualquier lugar y en cualquier momento con un enfoque centrado en un aprendizaje efectivo. A pesar de este gran desarrollo de la educación a distancia, no existen muchos estudios al respecto. La finalidad de este trabajo es estudiar las restricciones de orden epistemológico y pedagógico que puede presentar la enseñanza de las matemáticas en el bachillerato a distancia. Para ello nos centraremos en los siguientes objetivos principales:

- Analizar las condiciones institucionales en las que se lleva a cabo la enseñanza
- Estudiar los dispositivos de formación de las asignaturas de matemáticas impartidas.
- Considerar el papel de las TIC’s, en comparación con la modalidad presencial.

Así pues, basándonos en los datos obtenidos (tasas de éxito y de rendimiento, tasas de abandono, percepción de los alumnos…) en un centro que imparte esta modalidad de formación a más de 1200 alumnos cada año, recabados a partir de la aplicación de una encuesta dirigida a todo el alumnado de bachillerato a distancia así como diferentes datos estadísticos sobre los estudiantes, haremos una comparativa con otras asignaturas de esta misma modalidad y con la misma enseñanza pero en modalidad presencial.

Referencias

Gueudet, G., Trouche, L. (2010). Des ressources aux documents, travail du professeur et genèses documentaires. *Ressourcesvives*, 57-74.Presses universitaires de Rennes.

Haddad, W.D. (2003). The Virtual High School: Potential, Experience, and Prospects. *Workshop onInformation and Communication Technology in School Education*, 1-8.State of Kuwait: Knowledge Enterprise, Inc.

Ligozat, F. (2010). Les textes de l’activité mathématique scolaire. Préconstruits et ressources dans la genèse des formes de l’action didactique. *Ressourcesvives*, 303-320.Presses universitaires de Rennes

Olivares-Carrillo, P., Sánchez-Jiménez, E. (2016). Las matemáticas en el bachillerato a distancia: restricciones epistemológicas y pedagógicas. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 663). Málaga: SEIEM.

PROPUESTAS DE LOS PROFESORES NORMALISTAS SOBRE LA DEMOSTRACIÓN (1922-1936)

TeacherTrainersProposalsforDemonstrations (1922-1936)

Carrillo Gallego, D.[a], Sánchez Jiménez, E.[b]

[a]Facultad de Educación. Universidad de Murcia, [b] Facultad de Educación. Universidad de Murcia

Este trabajo de Historia de la Educación Matemática se enmarca en el contexto de las reformas educativas que tuvieron lugar en España durante la II República y los años previos, inspiradas en parte por el movimiento educativo internacional de la *escuela nueva*, y trata sobre la innovación en los procesos de estudio de las matemáticas en la formación de maestros (Sánchez Jiménez, 2015).

El problema de investigación planteado es: «¿Qué aportaciones realizaron los profesores de Escuelas Normales al proceso de innovación educativa, en lo que se refiere al tratamiento de la demostración?». Los objetivos de la investigación pretenden aportar respuesta a dicha cuestión:

- Analizar el tratamiento que se hace de la demostración en los libros escritos para la asignatura Metodología de la Matemática, escritos durante el periodo republicano.
- Comparar el análisis anterior con las propuestas de los formadores de maestros sobre la demostración en la enseñanza primaria.
- Determinar qué funciones de la demostración se privilegian, comparando a la vez las propuestas de unos y otros autores y situándolas en el contexto pedagógico e institucional en el que tuvieron lugar (Ibañes y Ortega, 2002; Martínez Recio, 2002).

Se utilizan las herramientas teóricas que proporciona la investigación en Didáctica de las Matemáticas, en particular, las vinculadas al *Programa Epistemológico* de investigación en Didáctica de la Matemática, que considera la propia actividad matemática como objeto primario de estudio. Se consideran las dimensiones *praxeológica* y e*cológica* (Cabassut, 2005), en el sentido de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD), y se analizan prácticas institucionales, atendiendo a las condiciones y restricciones mutuas entre las organizaciones matemáticas que se estudian en las institución Escuela Normal, también en la escuela primaria, y las organizaciones didácticas correspondientes.

Usamos como fuentes primarias los textos de Eyaralar, Sáiz Salvat, Comas o Xiberta, entre otros.

Referencias

Cabassut, R. (2005): *Démonstrations, raisonnement et validationdansl'enseignementsecondaire des mathématiques en France et anAllemagne*. Tesis doctoral, París: Université Paris 7.

Ibañes, M. J. y Ortega,T. (2002). Analizadores específicos para la demostración matemática. Aplicación a los textos en el tema de Trigonometría en Bachillerato. Trabajo presentado al VI Simposio de la SEIEM, Logroño. Trabajo completo recuperado de *http://www.uv.es/aprengeom/archivos2/Ibanes02.pdf*

Martínez Recio, Á (2002). La demostración en matemática. Una aproximación epistemológica y didáctica. En M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas y J. D. Godino (Eds.), *Investigación en educación matemática: Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, (pp. 27–44). Almería: Universidad de Almería.

Sánchez Jiménez, E. (2015). Las Escuelas Normales y la renovación de la enseñanza de las matemáticas (1909-1936). Tesis Doctoral, Universidad de Murcia. En: http://hdl.handle.net/10201/47449

Carrillo Gallego, D., y Sánchez Jiménez, E. (2016). Propuestas de los profesores normalistas sobre la demostración (1922-1936). En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 665). Málaga: SEIEM.

ANÁLISIS DE LA FORMACIÓN MATEMÁTICA EN LOS ACTUALES GRADOS EN ADMINISTRACIÓN Y DIRECCIÓN DE EMPRESAS

Analysis of themathematical training in thecurrentSpanishDegrees in Business Administration and Management

Díaz, F.J., Marbán, J. M.

Universidad de Valladolid

La *matematización* de la economía y de la empresa –entendiendo por tal, tanto el uso de las matemáticas como herramienta auxiliar en los razonamientos deductivos que aparecen en los modelos teóricos económicos y de gestión empresarial, como el contraste empírico, por medio de la estadística, de las diversas modelizaciones económico-empresariales− ha sido el centrodel eterno debate entre los que están a favor y en contra del uso de las matemáticas en esta ciencia social.En la actualidad, se entiende generalizadamente que las matemáticas, dentro del ámbito de la economía y de la gestión de empresas, deben dar soporte a la *modelización económica*, entendida como modelización cuantitativa de la realidad económica y empresarial, aprovechando las ventajas del enfoque matemático a la hora de la búsqueda del conocimiento económico. En el trasfondo de esta concepción, se conforma el principiodel *carácter instrumental o de servicio*(Thompson, 1985) de la matemática en el campo de la economía y de la gestión de empresas. Surgen, entonces,dos interrogantes: ¿ha seguido siendo el criterio de eficiencia, -impregnado del convencimiento del carácter instrumental o de servicio- el preponderante a la hora de diseñar la formación matemática en los actualesgrados en Administración y Dirección de Empresas? Si así fuese, ¿no supondría una pérdida casi definitiva del potente enfoque formativo que las matemáticas pueden aportar en este ámbito, ligado a la conexión con otras competencias profesionales esenciales del perfil formativo?

La caracterización de competencias y perfiles profesionales constituye una línea de trabajo e investigación consolidada desde hace tiempo en otros ámbitos profesionales y académicos (Manso, 2000). Sin embargo, y aunque cada vez es mayor la sensibilización por esta cuestión en el mundo académico y profesional relacionado con laAdministración y Dirección de Empresas, la caracterización de la competencia matemática y su relación con las competencias específicas y transversales del correspondiente perfil profesional es un campo de trabajo escasamente explorado.El objetivo del presente trabajo consiste en realizar, desde la perspectiva de la *investigación curricular* (Clements, 2007), un análisis de la formación matemática en los actuales grados en Administración y Dirección de Empresasen las universidades españolas, centrándose en las denominaciones, estructura crediticia, distribución temporal de las asignaturas, definición de objetivos y resultados de aprendizaje esperados, por un lado, y en el enfoque endógeno competencial y conexión con competencias profesionales del título, por otro, con el fin de extraer las principales conexiones curricularmente explicitadas entre la formación matemática ofertada y las necesidades formativas profesionales reflejadas en dichos títulos.

Referencias.

Clements, D. H. (2007). Curriculum Research: toward a framework for “Research-based Curricula”. *Journal for Research in Mathematics Education.*Vol. 38, 1, 35-70.

Manso Martínez, J. M. (2000). ¿ Qué enseñar en ciencias de la salud?. Técnicas para definir competencias y perfiles profesionales (1a. parte). *Educación médica*, *3*(2), 61-68.

Thompson, P. W. (1985). Experience, problemsolving, and learningmathematics: Considerations in developingmathematicscurricula. *Teaching and learningmathematicalproblemsolving: Multipleresearchperspectives*, 189–243.

Díaz, F. J. y Marbán, J. M. (2016). Análisis de la formación matemática en los actuales grados en Administración y Dirección de Empresas. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 667). Málaga: SEIEM.

ANÁLISIS BIBLIOMÉTRICO DE LA REVISTA AIEM-AVANCES EN INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA (2012-2016)

A bibliometric analysis of the journal AIEM (2012-2016)

Cárdenas, J. A.[1] **y Jiménez-Gestal, C.**[2]

[1]Universidad de Zaragoza y [2]Universidad de la Rioja

La Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) en el 2011 puso en marcha el proyecto de la edición de una revista, de corte científico y de interés internacional, en la que se difundan los resultados de las diferentes investigaciones que se llevan a cabo en el ámbito de la Educación Matemática, cumpliendo una doble finalidad, la de dar a conocer los diferentes avances y dificultades que afronta la educación matemática, y que esta sirva como herramienta de los investigadores para proponer y consolidar propuestas de mejora en la Educación Matemática. Así es como se concibe la revista Avances en Investigación en Educación Matemática (AIEM).

Se realiza un análisis bibliométrico de la Revista Avances en Investigación en Educación Matemática (AIEM) para determinar la evolución y características de su producción científica y la visibilidad que tiene actualmente la revista. Para ello se analizan los documentos publicados desde su primer número Mayo del 2012 a la fecha Mayo del 2016, a partir de indicadores como Tópico de investigación, metodología utilizada, población de estudio, filiación institucional y país. Además, se obtienen y se comparan los datos que hay registrados en la actualidad con los Blanco y Cárdenas (2013) correspondientes al número de usuarios que acceden a la web, los países a los que pertenecen estos usuarios, el número de visitas, el tiempo de acceso o de visita a la revista en promedio. Esta información se obtuvo de la versión electrónica de la revista con ayuda del Editor. Así mismo, se da cuenta de la visibilidad de la revista en las bases de datos y repositorios.

Entre los resultados destacamos que las temáticas de investigación versan en diferentes ámbitos de la Educación Matemática, así como la diversidad de filiación de los autores y las nacionalidades de las Universidades a los que estos pertenecen.

Blanco y Cárdenas (2013) presentaron un análisis de tipo descriptivo en el que se daba cuenta de los indicadores de acceso y consulta a la revista y su visibilidad en las diferentes bases de datos. Al comparar los datos presentados en el 2013 con los datos actuales se verifica que el número de usuarios se ha triplicado, así como el número de visitas; mientras que la cantidad de países a los que pertenecen los usuarios se ha duplicado. También se observa que el ranking de los 10 primeros países que consultan AIEM se mantiene, aunque entre ellos cambia su porcentaje y su puesto. Se ve claramente el aumento de nuevos usuarios por cada país.

Estos datos, nos permiten afirmar que a medida que van pasando los años AIEM se va consolidando como una revista científica, sobre Investigación en Educación Matemática, de referencia a nivel mundial. A su vez se identifican tópicos y metodologías de investigación en las que versan los diferentes artículos publicados a la fecha.

Referencias

Ariza, T. y Quevedo-Blasco, R. (2013). Análisis bibliométrico de la Revista de Investigación Educativa (2000-2012). Revista de Investigación Educativa, 31 (1), 31-52.

Blanco, L. J. y Cárdenas, J.A. (2013). Avances en Investigación en Educación Matemática. Poster presentado en la XVII Simposio de la Sociedad de Investigación en Educación Matemática, Bilbao, España..

Cárdenas, J. A., y Jiménez-Gestal, C. (2016). Análisis bibliométrico de la revista AIEM-Avances en Investigación en Educación Matemática (2012-2016). En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 669). Málaga: SEIEM.

RELACIONES ENTRE CONCEPCIONES Y CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO (MTSK) ACERCA DE CLASIFICACIÓN DE FIGURAS PLANAS

Relationships between beliefs and Specialised knowledge (MTSK) about classification of plane figures

Aguilar, A.[a], Carrillo, J.[a] y Muñoz-Catalán, M.C.[b]

[a]Universidad de Huelva, [b]Universidad de Sevilla

Este póster muestra algunos resultados de un trabajo doctoral que aborda cómo el conocimiento especializado de una maestra de Educación Primaria sobre la clasificación de las figuras planas se relaciona con las concepciones de ésta sobre la Enseñanza y Aprendizaje de la matemática (Aguilar, 2016).

Para ello, nos basamos en el modelo de "Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas" -MTSK- (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013). La metodología es de corte cualitativo, encuadrada en un paradigma interpretativo, con un diseño de estudio de caso. Las observaciones de aula han sido el instrumento de recogida de información. Se analizaron los datos con dos instrumentos: el primer instrumento es el de las categorías de los subdominios de conocimiento de MTSK, y el segundo es el instrumento de análisis de las manifestaciones de las Concepciones del maestro de Primaria respecto de la Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática -CEAM- (Climent, 2005). El objetivo es identificar y comprender elementos de los distintos subdominios del MTSK de la maestra en relación con la enseñanza de polígonos, así como detectar las concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y su relación con los subdominios mencionados. Este análisis conjunto permite obtener una visión integrada del MTSK de la maestra.

Para este trabajo, se muestra cómo la concepción de la Matemática Escolar permea las diferentes categorías de MTSK, así, por ejemplo, el indicador de *Orientación* sobre la Matemática Escolar nos permite comprender el interés de la maestra por buscar una armonía entre conceptos, procedimientos y actitudes. Esta visión de la Matemática Escolar, se pone de relieve en el uso del conocimiento que muestra cuando pide a los alumnos que analicen las figuras, comparen, establezcan criterios, e identifiquen qué propiedad tienen, interesándole también, el concepto desde un punto de vista comprensivo por parte del alumnado.

Desde este enfoque se pone de relieve la naturaleza compleja del conocimiento del profesor, así como el modo en que las concepciones potencian la comprensión de dicho conocimiento, todo ello, particularizado en la clasificación de figuras planas.

Referencias

Aguilar, A. (2016). *El conocimiento especializado de una maestra sobre la clasificación de las figuras planas. Un estudio de caso.* Tesis doctoral publicada en https://goo.gl/3w1LZ6. Huelva, España: Universidad de Huelva.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti (Eds.). *Actas del CERME 8* (pp. 2985-2994). Middle East Technical University, Ankara, Turquía: ERME.

Climent, N. (2005). *El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso*, Tesis Doctoral. Michigan: Proquest Michigan University. www.proquest.co.uk..

Aguilar, A., Carrillo, J., y Muñoz-Catalán, M.C. (2016). Relaciones entre concepciones y conocimiento especializado (mtsk) acerca de clasificación de figuras planas. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 671). Málaga: SEIEM.

CONEXIONES ENTRE LA MATEMÁTICA Y OTRAS DISCIPLINAS EN LA FORMACIÓN DE MAESTROS DE EDUCACIÓN INFANTIL

Connections between mathematics and other disciplines in trainees specialised on the Early Years

Codes, M.[a], Marcet, V. J.[a], González, C. [a]

[a]Universidad de Salamanca

RESUMEN

Para impulsar en los futuros maestros la elaboración de materiales multidisciplinares que puedan llevar a sus prácticas de aula, un grupo de profesores del Grado de Maestro en Educación Infantil colaboran en un proyecto en el que la Matemática, la Plástica, la Música, la Lengua, las Ciencias Sociales y la Tecnología se vinculan a partir de obras de arte. El objetivo es fomentar en los estudiantes para maestro el desarrollo de una de las dimensiones del conocimiento del contenido que el maestro pone en juego cuando trabaja en el aula: la **conexión** entre distintas disciplinas y entre diferentes áreas de la misma disciplina (Rowland, 2013). Para ello proponemos que esa conexión surja desde un elemento ajeno a la disciplina, en este caso una obra de arte.

En este póster presentamos un avance de las conexiones que emergen cuando un grupo de estudiantes para maestro visualiza una selección de cuadros de la exposición permanente del museo Thyssen-Bornemisza de Madrid. Se muestran las relaciones con las asignaturas de Matemática, Lengua y Plástica.

Los estudiantes, en las distintas asignaturas y trabajando en pequeños grupos, han descrito qué elementos matemáticos se pueden trabajar en un aula de Educación Infantil a partir de alguno de los cuadros, han creado signos como parte de su aprendizaje de la semiótica y su relación con la comunicación humana y han elaborado material didáctico de forma plástica para acercar la obra de arte al niño a partir del juego.

Los elementos matemáticos que reconocen los estudiantes con más facilidad están relacionados con el bloque de Geometría, más concretamente con las figuras planas, seguidos de los relacionados con el conteo y la medida.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por la Fundación Samuel Solórzano Barruso de la Universidad de Salamanca a través del proyecto FS/11-2015.

Referencias

Rowland, T. (2013). The Knowledge Quartet: The Genesis and Application of a Framework for Analysing Mathematics Teaching and Deepening Teachers' Mathematics Knowledge. *SISYPHUS Journal of Education, 1*(3), 15-43. Disponible en http://revistas.rcaap.pt/sisyphus/article/view/3705.

Codes, M., Marcet, V. J., y González, C. (2016). Conexiones entre la Matemática y otras disciplinas en la formación de maestros de Educación Infantil. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 673). Málaga: SEIEM.

CARACTERIZACIÓN DE LA ESTRUCTURA DE LAS SUSTRACCIONES EN LAS QUE ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS COMETEN ERRORES

Characterization of the structure of subtractions in which university students commit mistakes

Rodríguez, M.M.[a], Sánchez, A. B.[b] y López, R.[a]

[a]Dpto. Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales. Universidad de Salamanca.
[b]INICO (Instituto Universitario de Integración en la Comunidad). Universidad de Salamanca.

La resolución correcta de las operaciones elementales es uno de los objetivos de la educación obligatoria entodo el mundo aunque no siempre se consigue (López y Sánchez, 2009).En concreto, referido a la sustracción, de los 535 estudiantes universitarios de la Universidad de Salamanca que completaron el cuestionario validado de 20 sustracciones de VanLehn (1990), sólo el 24’1% realizó correctamente todas las sustracciones (Rodríguez y Sánchez, 2015). En este trabajo se pretende analizar las características de las sustracciones en cuya resoluciónlosestudiantes universitarios cometieron algún tipo de error.

Los estudiantes universitarios cometieron errores en 1258 sustracciones (11,76% de las 10700 sustracciones completadas). Analizando la estructura de las 10 sustracciones en las que cometieron más errores, que esencialmente coinciden con las que estudiantes de Primaria cometieron más errores con el mismo cuestionario (López y Sánchez,2009),en todas ellas había que realizar llevadas y, más concretamente,había que pedir prestado a una columna donde minuendo y sustraendo eran iguales (en unos casos el 1 y en otros el 9), había varios ceros seguidos en el minuendo o un 1 en el minuendo al que había que pedir prestado, el sustraendo tenía menos dígitos que el minuendoen particular habíaun 1 en el minuendo sobre un espacio en blanco del sustraendo incluso aunque no requiriese llevadas. Por ejemplo en la sustracción donde se cometieron más errores, 1813-215, realizada erróneamente por casi una cuarta parte de los estudiantes universitarios (23,9%), concurrieron la mayor parte de esos aspectos.

Esto se corrobora considerando los tipos de errores, según las categorías de VanLehn (1990), que se produjeron en cada una de esas 10 sustracciones en que se cometieron más errores. Por ejemplo, en la sustracción1813-215, los tipos de errores más frecuentes estaban relacionados conignorar la columna de la izquierda cuando se trata de un 1 sobre espacio en blanco, pedir prestado siempre, columnas de la forma 1-1 a las que se pide prestado, pedir prestado a un 1 y de cálculo.

La categorización rigurosa de las estructuras de la sustracción que pueden causar más dificultades de aprendizajepuede tener implicaciones educativas pues permite desarrollar pautas de actuación para favorecerel proceso de la enseñanza y aprendizaje de la sustracción en esos aspectos.

Referencias

López, R. y Sánchez, A. B. (2009). Análisis del error sistemático en la sustracción. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 27 (1),* 49-58

Rodríguez, M. y Sánchez, A. B. (2015). Errores en la sustracción cometidos por estudiantes universitarios. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (p. 585). Alicante: SEIEM.

VanLehn (1990).*Mindbugs:originsofproceduralmisconceptions*.Cambridge,Mass:MITPress.

Rodríguez, M. M., Sánchez, A. B. y López, R. (2016). Caracterización de la estructura de las sustracciones en las que estudiantes universitarios cometen errores. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 675). Málaga: SEIEM.