Preparação das discussões matemáticas no ensino da Álgebra: o caso da professora Ana

Cátia Rodrigues[1], *João Pedro da Ponte*[2], *Luís Menezes*[3]
[1]Agrupamento de Escolas de São João da Pesqueira e UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, *catiamat@gmail.com*
[2]Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, *jpponte@ie.ul.pt*
[3]Escola Superior de Educação de Viseu e CI&DETS, *menezes@esev.ipv.pt*

Resumo. *As discussões matemáticas podem ser uma atividade importante para promover a aprendizagem dos alunos, criando oportunidades para a partilha, justificação e argumentação de ideias matemáticas resultantes do seu trabalho com tarefas. No entanto, a sua realização constitui um desafio exigente para o professor, tanto na sua preparação como na sua condução tendo em vista a aprendizagem dos alunos. Nesta comunicação, procuramos compreender as práticas de discussão de Ana, professora do 3.º ciclo do Ensino Básico (EB), na preparação da discussão coletiva no trabalho com a Álgebra, em articulação com o seu conhecimento didático. Os resultados mostram que a professora, apoiada no seu conhecimento da Matemática, da prática letiva e dos alunos e da aprendizagem, identifica (antes e durante a aula) as ideias matemáticas que pretende que os alunos discutam a partir do seu trabalho com tarefas selecionadas para o efeito. Antecipa, também, possíveis estratégias de resolução e pensa como pode levar os alunos atingir os objetivos definidos. Na aula, e perante o trabalho dos alunos, reconhece as ideias mais importantes para discutir e estabelece uma ordem de apresentação tendo em vista promover a generalização dessas ideias.*

Palavras-chave: *discussões matemáticas; álgebra; práticas e conhecimento didático.*

Abstract. *Mathematical discussions can be an important activity to promote students' learning, creating opportunities for sharing, justifying and arguing mathematical ideas based on their work with tasks. However, leading mathematics discussions poses a high challenge to the teacher's work, including their preparation and conduction with a view to learning. In this communication, we seek to understand the discussion practices of Ana in her grade 7 class, in the preparation of a collective discussion in working with Algebra, based on their didactic knowledge. The results show that the teacher, based on their knowledge of mathematics, teaching practice and students and learning, identifies (before and during the class) the mathematical ideas that she wants students to discuss from their work with selected tasks for this purpose. She also anticipates possible solution strategies and thinks how she can take students to achieve the set objectives. In class, and taking into account the students' work, she recognizes the most important ideas to discuss and she establishes an order of presentation that promotes generalization of these ideas.*

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Vale, I., & Guimarães, H. (Eds.) (2016).
Atas do XXVII Seminário de Investigação em Educação Matemática. Porto: APM, pp. 387–404

Keywords: *mathematical discussions; algebra; teaching practices; didactical knowledge*.

Introdução

O envolvimento dos alunos em discussões matemáticas contribui para a sua aprendizagem, já que ao partilharem e justificarem as suas ideias, ao argumentarem e avaliarem as dos colegas e ao negociarem significados para as ideias expostas, os alunos desenvolvem uma melhor compreensão sobre os assuntos em discussão (Cengiz, Kline, & Grant, 2011). Em particular, a aprendizagem da Álgebra é potencializada se resultar do envolvimento dos alunos em discussões. Contudo, conduzir discussões é uma prática complexa, que coloca dificuldades aos professores, e ainda insuficientemente compreendida. Para responder com sucesso a esse desafio, os professores precisam de apoiar-se no seu conhecimento didático (Ponte, 2011), que engloba o conhecimento da prática letiva em articulação com o conhecimento da Matemática, do currículo e da aprendizagem e dos alunos.

Neste estudo, defendemos que para fomentar uma discussão coletiva produtiva, é importante que o professor prepare a discussão antes e durante a aula. Para tal, antes da aula, o professor começa por selecionar tarefas que favoreçam o envolvimento dos alunos em discussões coletivas; define os objetivos que pretende atingir com essa discussão; antecipa possíveis estratégias de resolução dos alunos e seleciona, de entre as resoluções previstas, as que têm potencial para serem partilhadas em coletivo e que contribuem para atingir os objetivos propostos (Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008). Como nem tudo pode ser antecipado na planificação da aula, a preparação da discussão completa-se já na aula. Ao acompanhar os alunos no desenvolvimento da tarefa, o professor seleciona as resoluções com mais potencial para a discussão e define uma sequência de apresentação de acordo com os seus objetivos (Canavarro, Oliveira & Menezes, 2012; Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008).

Nesta comunicação, o objetivo é compreender as práticas letivas desenvolvidas por uma professora do 3.º ciclo do EB na preparação de discussões matemáticas no ensino da Álgebra, em articulação com o seu conhecimento didático.

Práticas de discussão matemática e conhecimento didático

A aprendizagem dos alunos com compreensão decorre, essencialmente, da sua participação em aulas onde têm oportunidade de trabalhar com tarefas matemáticas significativas, partilhar e justificar ideias resultantes desse trabalho, apreciar as dos colegas, questionar e negociar significados para os raciocínios analisados. A promoção desse tipo de aulas é da responsabilidade do professor. Para o apoiar, Stein, Engle, Smith e Hughes (2008) sugerem o recurso ao modelo das cinco práticas – antecipar, monitorizar, selecionar, sequenciar e estabelecer conexões entre as respostas dos alunos.

A primeira prática – *antecipar* – pressupõe a antecipação de possíveis estratégias de resolução a apresentar pelos alunos, de eventuais dificuldades na resolução das tarefas e de formas de os levar a sistematizar aprendizagens (conceitos, representações e procedimentos). Essa prática, que é prévia à aula, é fundamental para a promoção de discussões matemáticas produtivas, porque se o professor não é capaz de antecipar respostas dos alunos e pensar como pode usar essas respostas para promover a sua aprendizagem, compromete a condução da discussão ao revelar falta de familiaridade com as ideias partilhadas e dificuldade em as acompanhar (Wagner, Speer, & Rossa, 2007). Contudo, é importante frisar que embora o professor, na planificação, antecipe formas de levar os alunos a atingir o definido, em sala de aula tem de ser capaz de selecionar as ideias matemáticas mais importantes, de modo a ampliar o pensamento dos alunos (Grant, Kline, Crumbaugh, Kim, & Cengiz, 2009).

A segunda prática – *monitorizar* – diz respeito ao modo como o professor acompanha o trabalho dos alunos, identificando as ideias mais importantes e que têm potencial para serem partilhadas, quer em termos de representações usadas quer em termos de conceitos mobilizados. O professor, ao prestar atenção às resoluções dos alunos e aos conceitos e representações usados nessas estratégias, continua a preparação da discussão, começando a delinear o trabalho a realizar nas práticas seguintes. Na terceira prática, *selecionar*, o professor escolhe as estratégias de resolução que pretende levar à discussão com o objetivo de partilhar e analisar raciocínios importantes e evitar repetições. A escolha dessas estratégias tem em conta os objetivos que definiu para aquela aula. De seguida, na quarta prática, – *sequenciar* – organiza-as de modo a ajudar os alunos a evoluírem nas suas ideias iniciais e a desenvolverem uma compreensão mais aprofundada dos assuntos em estudo. O professor pode organizar as estratégias dos alunos pelas mais frequentes, pelas que apresentam raciocínios errados e que precisam ser clarificados ou pelas que revelam uma evolução em termos de linguagem matemática mobilizada. Esta opção para organização das intervenções dos alunos é também evidente no estudo de caso relatado em Oliveira, Menezes e Canavarro (2013), já que a professora apresenta uma tarefa aos alunos que favorece o trabalho com diferentes tipos de representações e depois organiza-as de forma a privilegiar a progressão no uso da linguagem algébrica. Na última prática, – *estabelecer conexões* – o professor leva os alunos a estabelecerem relações entre as suas ideias e as partilhadas, através do pedido de justificação, da comparação de estratégias e da argumentação sobre as ideias apresentadas.

Na preparação de discussões matemáticas, o professor recorre necessariamente ao seu conhecimento didático (Ponte, 2011), encarado numa perspetiva integradora, muito em especial ao seu conhecimento da prática letiva (que inclui elementos da gestão curricular, como as tarefas, o modo de trabalho dos alunos e a regulação da comunicação), mas relacionado com o conhecimento da Matemática, do currículo e da aprendizagem e dos alunos. O conhecimento da Matemática inclui o conhecimento de representações, conexões, conceitos e procedimentos. O do currículo pressupõe o conhecimento dos documentos e orientações curriculares e o da aprendizagem e dos alunos engloba o conhecimento de formas de pensar dos alunos, que tira partido do conhecimento dos alunos e suas características. É com base nesse conhecimento que o professor seleciona as tarefas a apresentar aos alunos com vista a envolvê-los, posteriormente, em discussão; define os objetivos que pretende atingir com a participação dos alunos na partilha de ideias; pensa em possíveis estratégias de resolução e dificuldades que possam sentir, assim como formas de os ajudar a ultrapassar essas dificuldades. É ainda da articulação entre o seu conhecimento da prática letiva, da Matemática e da aprendizagem e dos alunos que define um possível fio condutor para a apresentação das estratégias dos alunos.

Metodologia

Com vista a compreender as práticas de discussão de uma professora de Matemática do 3.º ciclo do EB, na preparação da discussão no ensino da Álgebra, apoiada no seu conhecimento didático, o estudo segue uma abordagem qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994). A modalidade escolhida é o estudo de caso de uma professora, Ana, sendo os principais instrumentos de recolha de dados a observação participante (de aulas e sessões de trabalho colaborativo no qual a professora se integrou) e as entrevistas no início do estudo (EI) e no final do estudo (EF), apoiados em notas de campo (NC).

A análise de dados é baseada na análise de conteúdo dos dados recolhidos e na definição de categorias de codificação (Bardin, 1994), apoiada nos quadros teóricos de Ponte (2011) e Stein, Engle, Smith e Hughes (2008). Tendo por base esses referenciais teóricos, organizámos o caso do estudo desta comunicação em duas secções – a apresentação da professora Ana e a preparação da discussão coletiva, antes e durante a aula – que correspondem a dimensões de análise, para as quais definimos alguns temas que são concretizados em diversas categorias. As categorias estabelecidas são aplicadas transversalmente às diversas aulas observadas à professora e demais dados recolhidos. Analisamos de forma integrada práticas e conhecimento didático da professora relativos às discussões, por facilitar a compreensão das práticas letivas da professora quanto à preparação da discussão. Para a dimensão *preparação da discussão coletiva*, antes e durante a aula, definimos os seguintes temas de análise: *preparação do objetivo da discussão*; *seleção de tarefas e estratégias de resolução* e *seleção de estratégias* e *trajetórias de sequenciação*. O *objetivo* é concretizado através das categorias ideias matemáticas e generalização; as *tarefas*, nas categorias natureza, desafio, contexto e representações, e *estratégias de resolução* nas categorias tentativa, tabela e algébrica; a *seleção de estratégias* nas categorias ideias matemáticas e representações; e para *trajetórias de sequenciação* nas categorias linguagem matemática informal e formal.

O caso que apresentamos nesta comunicação faz parte de um trabalho de investigação mais amplo que ocorreu em contexto de um trabalho com características colaborativas que envolveu a primeira autora e o grupo de professores de Matemática de uma escola do EB do centro de Portugal, que integrava Ana. O trabalho colaborativo desenvolveu-se ao longo de dez sessões de trabalho (que decorreram durante nove meses, com uma duração aproximada de três horas cada uma), onde refletimos sobre textos e episódios de sala de aula relacionados com as discussões matemáticas e com o tema da Álgebra (a partir das próprias experiências dos professores) e preparáramos, em pequenos grupos, tarefas para exploração em sala de aula, tendo em conta o modelo de Stein, Engle, Smith e Hughes (2008). Essas tarefas foram selecionadas a partir de um conjunto de propostas introduzidas pela investigadora, e adaptadas tendo em conta as características das turmas e os conteúdos que estavam a ser abordados em sala de aula. A análise da preparação das discussões coletivas de Ana incide em quatro tarefas: *Palitos, Cubos com autocolantes, Inscrição no ginásio e A cantina da escola* (em anexo), por serem representativas do conjunto de dados relativos à preparação da discussão. As tarefas foram exploradas por Ana nas suas aulas do 7.º ano, que decorreram em paralelo com o desenvolvimento das sessões do grupo colaborativo, tendo aí sido refletidas.

A preparação das discussões matemáticas

Nesta secção começamos por apresentar, de forma breve, a professora Ana. De seguida, analisamos as suas práticas de preparação da discussão coletiva, antes e durante a aula.

Apresentação da professora Ana

É uma professora com uma vasta experiência de ensino, mais de vinte anos de serviço. Encontra na participação em projetos a oportunidade de enfrentar novos desafios e realizar aprendizagens que a levam a desenvolver um novo olhar sobre as coisas ou a refletir sobre as suas práticas. Em particular, neste projeto das "Discussões", sublinha a sua preocupação com o formalismo da linguagem que pode estar, nas suas práticas, associado ao trabalho com ideias algébricas:

> Eu acho que é outra vez para ver se, até que ponto aquilo que eu tenho feito nessa área é, pronto, o que se pretende, ou está correto, ou será que se pode ensinar isto de outra maneira, pronto, ou até o que me está a preocupar é um bocado o formalismo. (EI set 2013).

Reconhece que as aprendizagens que realiza têm repercussões na aprendizagem dos seus alunos, já que as procura introduzir na sua prática letiva:

> Eu não fazia de forma tão cuidada a preparação das aulas no sentido de antecipar as resoluções. (...) O facto de se insistir um bocado na organização dos dados, de haver umas tabelas (...) aquilo foi claro para eles, organizar o texto, organizar o que lhes é dado no texto numa tabela, isso trouxe-lhes alguma segurança e vi que pode haver coisas que vamos continuar a dar porque funcionaram e vale a pena insistir, acho que é um bocado isso que vai acontecer. (EF jun 2014)

Apesar de ser uma professora experiente, Ana procura evoluir profissionalmente e de enfrentar novos desafios. Por isso, procura nos projetos em que participa oportunidades para se desenvolver e de o repercutir nas aprendizagens praticadas pelos seus alunos.

Preparação do objetivo da discussão

Ao planificar, quando prepara o momento de discussão coletiva, identifica as *ideias matemáticas* que pretende discutir em coletivo – escrita do termo geral de uma sequência e da expressão da função afim e da função linear e de equações, a partir da apresentação de informação em linguagem natural:

> Com estas tarefas [*Palitos* e *Cubos com autocolantes*] pretendo trabalhar a escrita de termos gerais. Os alunos também determinam o número de palitos de algumas figuras e analisam uma regra que é dada. (NC_19/11/2013)

> O objetivo [para a tarefa *Inscrição no ginásio*] é eles chegarem à escrita de uma expressão para a função afim e para a função linear. Como eles também representam graficamente as funções veem algumas caraterísticas dessas funções. (NC_27/3/2014)

> O objetivo para esta aula é resolverem problemas com equações. Eles podem fazer tentativas mas pretendo que eles consigam traduzir o problema [*A cantina da escola*] por uma equação. (NC_27/3/2014)

Em sala de aula, ao preparar a discussão da tarefa *Palitos* (anexo 1), verifica que os alunos determinam termos de uma dada sequência e confirmam se um dado termo pertence à sequência: "Eles não têm dificuldade nenhuma em dizer quantos é que estão na 5.ª nem na 15.ª. Depois, eles vêm treinados do 6.º ano fazer o termo geral e eles sabem fazer a operação inversa, tirar, dividir (...)" (3.ª sessão_2/12/2013).

Ao refletir sobre a preparação da discussão da tarefa *Inscrição no ginásio* (anexo 3), destaca o trabalho profícuo dos alunos no preenchimento de uma tabela, que mobiliza ideias resultantes da interpretação de informação dada em linguagem natural, e na elaboração de um gráfico com os dados dessa tabela, apesar das dificuldades sentidas na definição de uma possível escala para a construção da representação gráfica:

> Esta, contrariamente, ao que se estava a pensar a grande tragédia das crianças, a primeira pergunta preencheram mais ou menos a tabela e depois o problema foi na segunda que era… Que era fazer o gráfico por causa da escala. (8.ª sessão_8/5/2014)

Na tarefa *A cantina da escola* (anexo 4), tendo em vista preparar a discussão, verifica na aula que os alunos conseguem traduzir o problema por uma equação, surpreendendo-a com a escrita de equações com denominadores e parêntesis: "Eu nesse dia estava muito orgulhosa dos meus meninos (...) esta equação aparece com parêntesis (...) com denominadores" (8.ª sessão_8/5/2014). Justifica a ocorrência dessa situação pela atribuição de diferentes designações à incógnita: "A turma estava dividida em três grupos [tipos de resoluções distintos] (...) há um grupo que faz a outra, há três grupos que faz esta, que é atribuir o x à segunda-feira" (8.ª sessão_8/5/2014).

Durante a preparação da discussão coletiva, preocupa-se também com a *generalização* das ideias algébricas. As tarefas envolvendo sequências favorecem a escrita da expressão para o termo geral de uma sequência, a partir da sua relação com a ordem das figuras e a explicação do raciocínio desenvolvido: "Ver qual era a relação entre a ordem e a figura. (...) Mas não é o termo geral. É como chegas lá. Se calhar até é mais difícil chegar a esta." (2.ª sessão_24/10/2013). Em sala de aula, verifica que os alunos são capazes de escrever várias expressões para o termo geral de uma dada sequência, resultantes da forma como interpretam a construção subjacente à sequência apresentada, na tarefa *Cubos com autocolantes* (anexo 2):

> Há o pessoal que acha que vai, são 4, 4 porque são estas voltas e 2 tampas, não é? Que é o 4n+2. Depois, há pessoal que assume que os dois cubos dos extremos têm sempre 5 autocolantes e por isso vão só fazer os do meio e quem pensa assim acaba por depois chegar a uma fórmula parecida com esta aqui, é muito giro. (...) (3.ª sessão_2/12/2013).

A resolução da tarefa *A cantina da escola* (anexo 4) permite concretizar o objetivo de generalizar as relações apresentadas na informação dada em linguagem natural e consequente sistematização dessas ideias através de uma equação: "esta equação aparece com parêntesis" (8.ª sessão_8/5/2014).

Seleção de tarefas e estratégias de resolução

A preparação da discussão coletiva contempla, também, a seleção das tarefas a apresentar aos alunos. Opta por tarefas de *natureza* diversificada, apesar de referir que não podem ser demasiado abertas para não comprometer o trabalho dos alunos: "Se for uma coisa muito aberta há alguma tendência deles se perderem e nós também (...) O objetivo depois não é alcançado com a facilidade que devia, sei lá, perde-se muito mais tempo" (EI set 2013). Considera, ainda, que não se devem afastar muito do tipo de trabalho habitual dos alunos: "Os meninos não estão habituados a este tipo de resoluções. (3.ª sessão_2/12/2013). É pelas razões apontadas que adapta a tarefa *Inscrição no ginásio* (anexo 3), a partir do conjunto de propostas apresentadas pela investigadora, já que a tarefa surge com um pedido aberto (Explica que ginásio deve escolher o Santiago):

> Na primeira questão apresenta-se uma tabela aos alunos para preencherem, que relacione o tempo de permanência com o total gasto em cada um dos ginásios, de modo a que os alunos se familiarizem com a situação descrita e comecem a ter uma noção do comportamento dos dois ginásios. A segunda questão mantém-se, acrescentando a indicação que a representação da evolução do preço a pagar é apenas nos primeiros seis meses de permanência. No terceiro pedido convidam-se os alunos a analisar durante quanto tempo é mais vantajosa a inscrição num determinado ginásio, justificando a sua resposta. A última questão também se mantém mas

> exclui-se a representação gráfica, uma vez que já foi solicitada aos alunos na segunda questão. (NC_27/3/14)

As tarefas que propõe são, também, diversificadas quanto ao grau de *desafio*. Escolhe um problema (tarefa fechada de desafio elevado) para abordar o domínio das equações e uma exploração (tarefa aberta de desafio reduzido) para trabalhar a função afim e linear. A escrita e explicação do termo geral para uma sequência é desencadeada a partir do trabalho dos alunos em torno de investigações (tarefa aberta de desafio elevado). Essas tarefas surgem em *contextos* não puramente matemáticos e com oportunidades de aprendizagem distintas para os alunos. A atividade dos alunos no trabalho com sequências é desencadeada a partir de imagens que sugerem a análise de sequências baseadas em construções com palitos (construção no plano) e cubos (construção no espaço). A opção por essas tarefas está relacionada com o facto de considerar que essa é a abordagem indicada para o trabalho dos alunos nesse conteúdo: "É sempre deste género, que eles consigam associar o número da figura à figura que está em cima, porque se não, eu acho que aqui eles têm muita dificuldade em perceber a ordem, o que é a ordem, o que é o termo" (2.ª sessão_24/10/2013). As tarefas propostas para o domínio das equações, embora surgindo em contexto não puramente matemático, permitem que os alunos trabalhem com informação apresentada em linguagem natural e que de seguida a traduzam para linguagem matemática: "Eu achei que realmente a equação seria mais complicada, mas a leitura do texto, a da cantina estava tudo mais direitinho. (...) Naturalmente escreve-se essa equação" (8.ª sessão_8/5/2014).

A tarefa *Inscrição no ginásio* (anexo 3) para além de surgir em contexto não puramente matemático tem, ainda, a particularidade de apresentar uma situação próxima do interesse dos alunos e envolve a tomada de decisões acerca da escolha do melhor ginásio. Para tal, os alunos analisam um conjunto de informação apresentada em linguagem natural e recorrem a diferentes tipos de *representações*: preenchem uma tabela, elaboram uma representação gráfica e escrevem expressões analíticas representativas da função linear e afim:

> Ana: Preencheram mais ou menos a tabela e depois o problema foi na segunda que era, que era fazer o gráfico por causa da escala. (...)
> José: E tiveram dificuldade a escrever as expressões?
> Ana: Não, nada, não. (8.ª sessão_8/5/2014)

Em sala de aula, tendo em vista preparar a discussão, identifica diversas estratégias de resolução que os alunos usam no trabalho com as diversas tarefas. A estratégia que recorre ao processo de *tentativa* é usado pelos alunos na tarefa *A cantina da escola* (anexo 4), embora mobilizando raciocínios distintos: numa, os alunos experimentam valores arbitrários iniciando por números redondos; na outra, analisam as condições dadas no enunciado da tarefa e começam por testar um número que esteja de acordo com os dados: "Em todas elas há um grupo que faz mais por tentativas, mas o engraçado nos outros é começar por um número redondo. Portanto, começam por 100 e depois vão subindo ou descendo. Não tem nada a ver com esta que dividem logo" (8.ª sessão_8/5/2014).

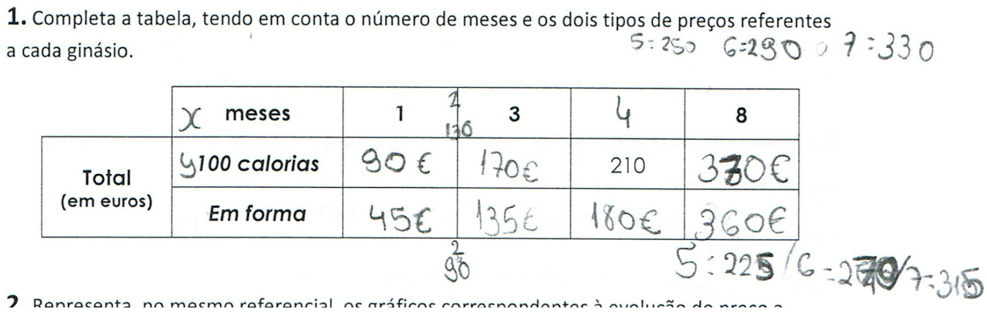
Com vista a contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, valoriza bastante a estratégia que recorre a procedimentos *algébricos*. Antes da aula, contempla a identificação e justificação do raciocínio desenvolvido para a escrita de diferentes expressões para o termo geral de uma sequência:

> Nós pensámos que temos sempre duas filinhas de fósforos. E as duas linhas horizontais têm sempre tantos fósforos como o número da figura, portanto duas vezes n, 2n. Depois temos sempre 3 pauzinhos ao alto. Temos sempre mais 1 que o número da figura, mais n+1. (...) A 3n+1. Tínhamos as duas bases outra vez e ainda temos mais 2 verticais. Será múltiplo de 3. Já sei que é 3n e agora vou ali à procura. (2.ª sessão_24/10/2013).

Na escolha das propostas a apresentar aos alunos, mobiliza o seu conhecimento dos alunos e da aprendizagem, ao procurar que as tarefas não sejam demasiado abertas, estejam de acordo com o seu trabalho habitual e promovam o desenvolvimento da sua atividade matemática. Usa o seu conhecimento da Matemática para a antecipação das estratégias que os alunos podem desenvolver na realização das tarefas propostas, assim como na identificação dessas estratégias em sala de aula, contemplando também as representações que podem usar (algébrica, gráfica e tabelar).

Seleção de estratégias e trajetórias de sequenciação

No acompanhamento que faz nas aulas ao trabalho dos alunos, identifica as *ideias matemáticas* importantes e as *representações* usadas e que têm potencial para serem discutidas na turma. Na tarefa *Inscrição no ginásio* (anexo 3), seleciona resoluções que evidenciam de forma clara o processo seguido para o preenchimento da tabela e que se baseia na adição sucessiva da mensalidade de cada um dos ginásios (figura 1).



1. Completa a tabela, tendo em conta o número de meses e os dois tipos de preços referentes a cada ginásio.

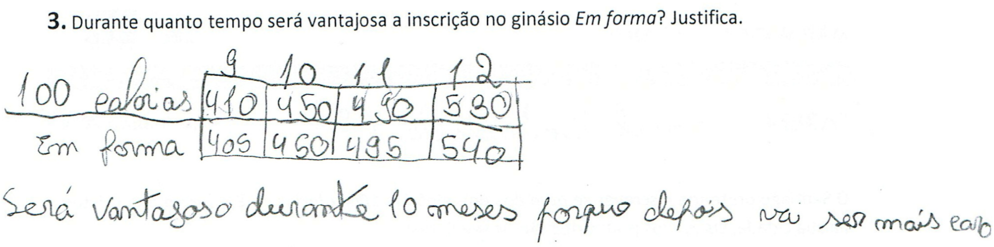
5:250 6:290 7:330

	x meses	1	3	4	8
Total (em euros)	100 calorias	90 €	170€	210	330€
	Em forma	45€	135€	180€	360€

5:225 / 6:270 / 7:315

Figura 1. Resposta à questão 1.

Relativamente à elaboração da representação gráfica dos valores pagos nos primeiros seis meses do ano nos dois ginásios, opta por resoluções que recorrem ao uso de diferentes escalas. Seleciona a estratégia que recorre à elaboração de uma tabela, como forma de apoiar os alunos na tomada de decisões acerca do ginásio mais vantajoso (figura 2).



3. Durante quanto tempo será vantajosa a inscrição no ginásio *Em forma*? Justifica.

	9	10	11	12
100 calorias	410	450	490	530
Em forma	405	450	495	540

Será vantagoso durante 10 meses porque depois vai ser mais caro

Figura 2. Resposta à questão 3.

Na questão que convida os alunos à generalização da relação entre duas variáveis, privilegia os grupos que apresentam diversas formas de representar essa generalização e que evidenciam uma progressão relativamente ao uso da linguagem matemática, desde a *linguagem matemática informal* – lei de formação – até à *linguagem matemática formal* – expressão algébrica (figura 3):

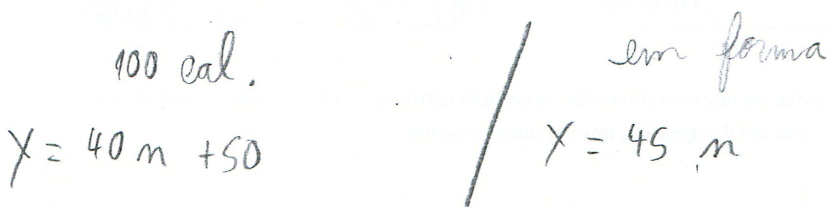


Figura 3. Resposta à questão 4.

Quando questionada sobre a escolha das resoluções que preparou para discutir na turma, focou aspetos como a diversidade e a apresentação de raciocínios que contemplassem todos os passos de resolução. Refere, ainda, a importância de discutir diferentes expressões que traduzem uma mesma relação entre variáveis:

> Optei por aquela, porque como apresentava todos os meses, os alunos percebiam melhor de onde vinham os valores. Na do gráfico achei importante alertar para as diferentes escalas que podiam usar e na terceira não houve muita variedade. Na última como tinham aparecido na turma três resoluções diferentes achei que era importante eles apresentarem as três e verem as diferenças. (NC_ março 2014)

As suas escolhas evidenciam a sua preocupação na partilha de ideias distintas e sua comparação, assim como a exposição e justificação de raciocínios que apresentam um processo detalhado de resolução, de forma a ficar compreensível para todos os alunos. Na tarefa *A cantina da escola* (anexo 4), Ana, antes da aula, antecipa dois tipos principais de estratégias a utilizar pelos alunos: tentativa e algébrica. Para essas possibilidades, estabelece que a ordem de apresentação das resoluções deve privilegiar a evolução da linguagem matemática usada:

> Os alunos podem resolver este problema por tentativa, (...) podem também traduzir este problema por uma equação. (...)
> O grupo considerou que perante estas possíveis estratégias, o processo com recurso à tabela seria partilhado em primeiro lugar seguido da estratégia que usa uma equação. (NC_27/3/14)

Em sala de aula, na preparação da discussão desta tarefa, identifica na turma duas resoluções distintas que recorrem a *representações* diferentes, com graus de linguagem matemática também distintos: o processo por tentativa, apela ao uso de uma linguagem matemática informal enquanto a equação se baseia numa *linguagem matemática formal*. Na primeira, os alunos fazem um tratamento da informação dada no enunciado, de modo a organizarem as suas tentativas e encontrarem de forma mais eficaz a resposta ao problema (figura 4).

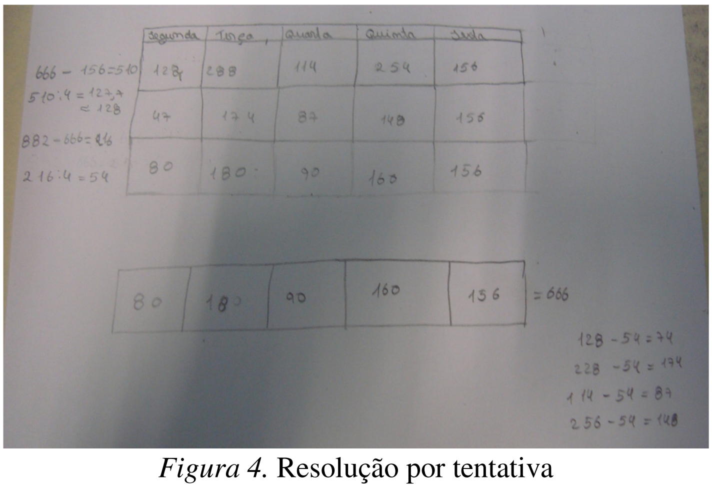


Figura 4. Resolução por tentativa

O outro processo resume-se à definição da variável e tradução das condições do problema em função dessa variável. Nessa estratégia, surgem na turma duas designações distintas para a variável que implicam a escrita de duas equações também diferentes e que envolvem ideias matemáticas variadas, como a necessidade do uso de parêntesis e denominadores, para além do uso das diversas operações matemáticas (figuras 5 e 6):

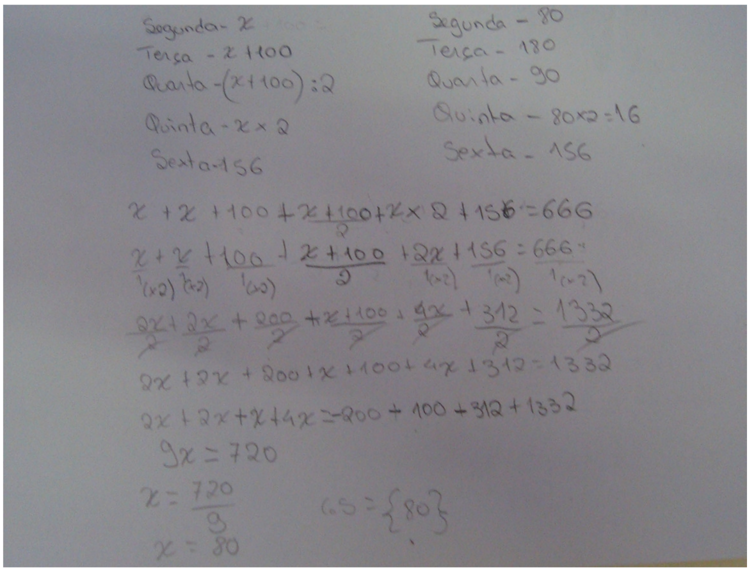


Figura 5. Resolução algébrica (*x* designa a segunda-feira).

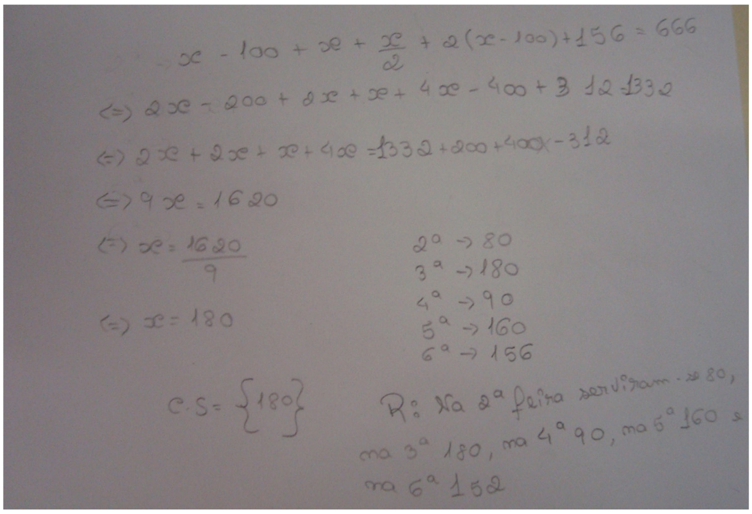


Figura 6. Resolução algébrica (*x* designa a terça-feira).

Na preparação da seleção de estratégias e trajetórias de sequenciação, a professora apoia-se no seu conhecimento da Matemática, na identificação das ideias matemáticas envolvidas nas resoluções dos alunos e nas representações usadas. Recorre também a conhecimento da aprendizagem e dos alunos na sequenciação que estabelece para os convidar a partilhar as suas ideias e levá-los a discutir coletivamente para atingir o objetivo da aula.

Considerações finais

Quando prepara a discussão coletiva, na planificação e durante a aula, a professora é levada a realizar diversas ações instrucionais. Seleciona tarefas que proporcionem experiências de aprendizagem diversificadas aos seus alunos, mas que estejam de acordo com as suas características e capacidades. Os alunos trabalham com investigações, problemas e explorações. Para essas tarefas define claramente o objetivo que pretende atingir no momento da discussão, identificando os conceitos e procedimentos algébricos que quer que discutam e generalizem. Em sala de aula, ao fazer esse levantamento, consegue, ainda, reconhecer dificuldades que os alunos sentem no desenvolvimento do seu trabalho. As tarefas que propõe surgem em contextos diversos e sugerem o uso de diferentes tipos de representações matemáticas. Na preparação da discussão, a professora pensa, ainda, em possíveis estratégias que os alunos podem usar no trabalho com as diversas tarefas (como também é destacado em Stein, Engle, Smith e Hughes, 2008), privilegiando as que permitem recorrer a processos de resolução por tentativa, tabela e algébrica. Essas estratégias são reconhecidas, em sala de aula, no acompanhamento que faz ao trabalho dos alunos. Para essas estratégias, identifica os conceitos matemáticas envolvidos e as representações usadas e é com base nesses critérios que na preparação da discussão, na aula, seleciona as resoluções que pretende que os alunos partilhem na discussão coletiva, como também acontece no estudo de Oliveira, Menezes e Canavarro (2013). No caso de Ana, essa seleção evidencia a transição da linguagem matemática informal para a formal, com vista a envolver os alunos no processo de generalização das ideias algébricas.

O trabalho desenvolvido pela professora na preparação da discussão, antes e durante a aula, é apoiado no seu conhecimento didático, em particular, da prática letiva, na escolha das tarefas e na forma como seleciona e estabelece uma ordem para a apresentação dos processos de resolução usados pelos alunos, visando fomentar a discussão. Naturalmente, o conhecimento da Matemática está presente principalmente na definição do objetivo de discussão e na identificação das estratégias de resolução. Já o conhecimento da aprendizagem dos alunos emerge na identificação das dificuldades na resolução e também na escolha criteriosa das tarefas.

Os resultados deste estudo de caso mostram-nos quão importante é continuar a estudar as práticas dos professores na preparação da discussão coletiva, de modo a compreendê-las em profundidade, sinalizando os seus elementos-chave e as relações entre eles.

Referências

Bardin, L. (1994). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Um introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Canavarro, P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da matemática: o caso de Célia. In P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Eds), *Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de ensino da Matemática* (pp. 255-266). Portalegre: SPIEM.

Cengiz, N., Kline, K., & Grant, T. J. (2011). Extending students' mathematical thinking during whole-group discussions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*, 355-374.

Grant, T. J., Kline, K., Crumbaugh, C., Kim, O.-K., & Cengiz, N. (2009). How can curriculum materials support teachers in pursuing student thinking during whole-group discussions? In J. T. Remillard, B. A. Herbel-Eisenmann & G. M. Lloyd (Eds.), *Mathematics teachers at work: Connecting curriculum materials and classroom instruction* (pp. 103-117). New York, NY: Routledge.

Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a construção de um quadro de referência. *Quadrante*, *2*, 29-54.

Ponte, J. P. (2011). Estudando o conhecimento e o desenvolvimento profissional do professor de matemática. In N. Planas (Ed.), *Educación matematics: Teoría, critica y prática.* (pp. 83-98) Barcelona: Graó.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*, 313-340.

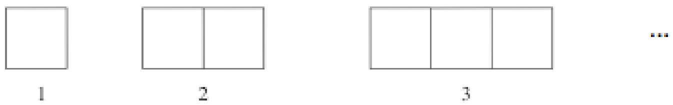
Wagner, J. F., Speer, N. M., & Rossa, B. (2007). Beyond mathematical content knowledge: A mathematician's knowledge needed for teaching an inquiry-oriented differential equations course. *Journal of Mathematical Behavior*, *26*, 247-266.

ANEXOS

Anexo 1: Tarefa *Palitos*

Tarefa: Palitos

Considera a seguinte sequência de figuras construídas com palitos que continua da forma que a imagem sugere:



1. Quantos palitos terá a 5.ª figura? E a 15.ª?

2. Será possível construir uma figura desta sequência com 76 palitos? Explica como pensaste.

3. Escreve uma regra que te permita determinar o número de palitos de qualquer figura desta sequência. Explica como a obtiveste.

4. A Aurora, que também resolveu esta tarefa, diz que o número de palitos de qualquer figura, T, desta sequência pode ser obtido a partir da seguinte regra:

$$\boldsymbol{T = 4 \times n - (n - 1)}$$

Explica como poderá ter pensado.

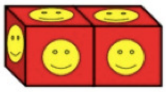
Como se relaciona esta regra com a que escreveste na questão número 3?

Anexo 2: Tarefa *Cubos com autocolantes* (retirado de Canavarro, Oliveira, & Menezes, 2012)

Tarefa: Cubos com autocolantes

A Joana está a construir um jogo com cubos e autocolantes. Ela une os cubos por uma das faces e forma filas de cubos. Depois cola um autocolante em cada uma das faces.

A imagem mostra a construção que a Joana fez com 2 cubos. Nessa construção ela usou 10 autocolantes.



1. Descobre quantos autocolantes a Joana usa numa construção com: três cubos; quatro cubos; dez cubos; cinquenta e dois cubos.

2. Consegues descobrir qual é a regra que permite saber quantos autocolantes a Joana usa numa construção com um qualquer número de cubos? Explica como pensaste.

Anexo 3: Tarefa *Inscrição no ginásio*

O Santiago pretende inscrever-se num dos dois ginásios ***100 calorias*** ou ***Em forma*** que existem na sua cidade. Os preços praticados são os seguintes:

100 Calorias — Inscrição: 50 € — Mensalidade: 40 €

Em Forma — Inscrição: Gratuita — Mensalidade: 45 €

1. Completa a tabela, tendo em conta o número de meses e os dois tipos de preços referentes a cada ginásio.

	meses	1	3		8		11	12
Total (em euros)	***100 calorias***			210				
	Em forma					450		

2. Representa, no mesmo referencial, os gráficos correspondentes à evolução do preço a pagar em cada um dos ginásios, nos primeiros 6 meses.

3. Durante quanto tempo será vantajosa a inscrição no ginásio *Em forma*? Justifica.

4. Escreve uma expressão analítica que te dê o preço a pagar em cada um dos ginásios, de acordo com o tempo de frequência.

Anexo 4: Tarefa *A cantina da escola*

No final de cada semana, e de forma a preparar a próxima, a responsável pela cantina dá indicação aos serviços da *Escola Azul* do número de alunos que almoçaram na cantina, durante essa semana. Na informação enviada aos serviços pode ler-se:

Na terça-feira a cantina serviu mais 100 almoços do que na segunda, na quarta-feira metade dos almoços servidos na terça, na quinta-feira o dobro dos almoços servidos na segunda e na sexta serviu 156 almoços.

Quantos almoços serviu a cantina da escola em cada um dos dias, durante essa semana? Explica como pensaste.