22098 Programação Matemática

Texto de apoio 1 – solvers de programação linear

Índice

Programação Linear – o solver do Excel 2
Ativação do solver 2
Usando o solver 4
Programação inteira e não-linear com o solver do Excel 8
Programação linear, inteira e mista – o lpSolve 10
lpSolve em ambiente R 10
lpSolve com ficheiro de input 14

Programação Linear – o solver do Excel

Na programação linear, a tabela simplex é uma forma eficaz de organizar os cálculos e resolver problemas. Saber executar o algoritmo por essa tabela permite compreender melhor o método simplex, a sua filosofia e interpretação dos resultados. No entanto, quando o problema passa das 3 ou 4 variáveis não-básicas e outras tantas restrições, o cálculo manual torna-se muito demorado e a probabilidade de errar nas contas é alta. Além disso, quando o problema não tem a origem como vértice inicial (solução básica $\vec{x} = (0,0,\dots)$ não-admissível), há que proceder a uma série de transformações e outros procedimentos preliminares, alguns deles demorados, antes de arrancar com o algoritmo. Juntando isto ao facto de que problemas reais podem ter milhares de variáveis em jogo, rapidamente percebemos que é necessário automatizar cálculos.

Assim, ao longo dos anos foram desenvolvidos diversos métodos de cálculo automático, nos quais se inclui o solver do Excel. A vantagem do solver é que é uma ferramenta de uso intuitivo e direto. Existem solvers mais rápidos e precisos, como o lpSolve, Gurobi ou IBM CPLEX (versão limitada grátis para uso académico), que são desenhados para atacar problemas gigantes, com milhares de variáveis e restrições. A interface destes solvers é mais complicada do que o Excel, mas, se o problema tiver mais de, digamos, 10 variáveis e restrições, acabam por se tornar mais rápidos de programar que o Excel. Comecemos, no entanto, pelo solver do Excel, uma vez que este não requer instalar nenhum novo software.

O solver Excel é um *add-on* do Excel que permite resolver problemas de programação linear, inteira e não-linear. No caso da programação linear, o solver devolve soluções exatas, i.e. ótimos exatos. Para a programação inteira e não-linear, isso já não é garantido.

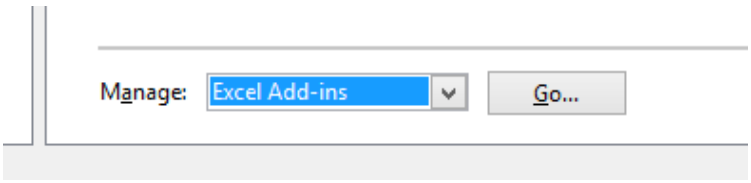
Vejamos então alguns exemplos da utilização deste solver.

Ativação do solver

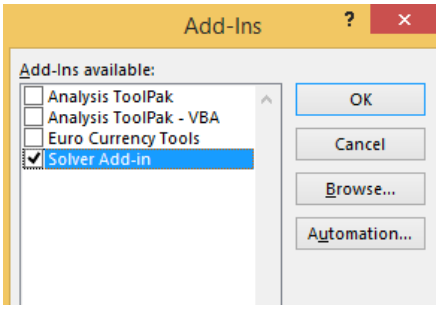
Antes de mais é necessário ativar o solver. Isso faz-se da seguinte forma:

Windows:

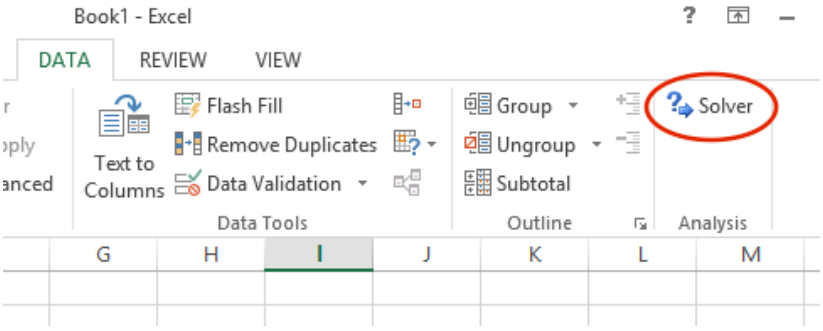
1. Arrancar o Excel (2010+).
2. ***File*** → ***Options*** → ***Add-Ins*** → ***Manage Excel Add-Ins*** → Selecionar na caixa "***Excel Add-Ins***"



→ clicar ***Go*** → Checkar "Solver ***Add-In***" → clicar ***OK.***



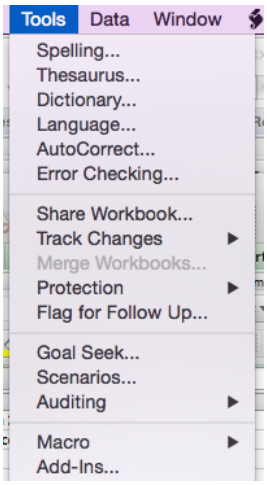
A partir de agora aparecerá um menu novo ***Data*** → ***Analysis*** → Solver:



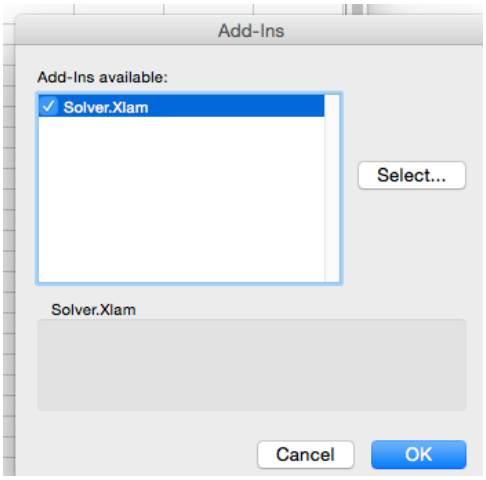
Nota: no Excel 2007 o solver pode ser ativado no botão Microsoft Office:  . Para mais informações podem procurar no Google por "*Activate solver excel 2007*". Serão redirecionados para o help da Microsoft.

Mac OS:

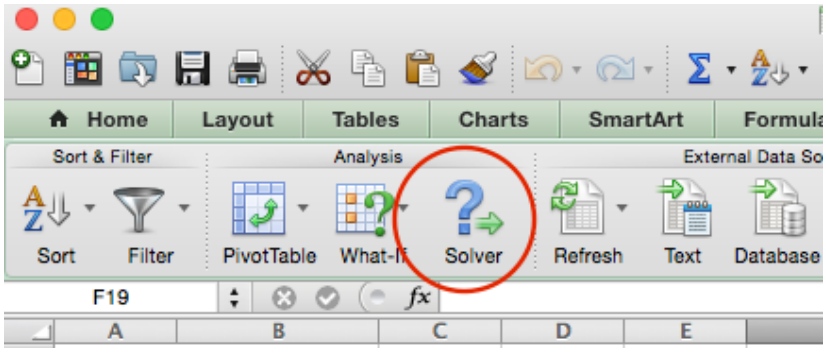
1. Arrancar o Excel.
2. ***Tools*** → ***Add-Ins***



→ Checkar "solver***.xmls***" → ***OK***



3. Aparecerá agora no menu ***Data*** o grupo ***Solver***:



Usando o solver

Para usar o solver basta inserir informação em algumas células da folha de cálculo e clicar no menu *solver*. Há várias maneiras de fazer isso. Aqui fica uma delas.

Suponhamos que deseja resolver o seguinte problema linear:

$$\text{Max } Z = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4$$

$$\begin{aligned} \text{s. a.} \quad & x_1 - 4x_2 \leq 10 \\ & x_2 + 7x_3 \leq 11 \\ & x_3 + 5x_4 \geq 12 \end{aligned}$$

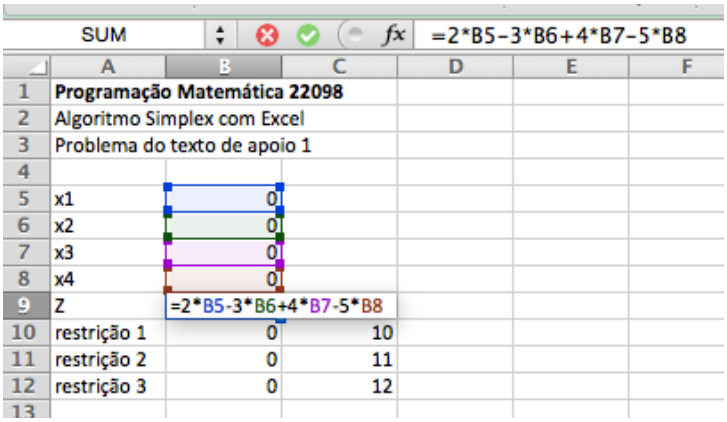
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

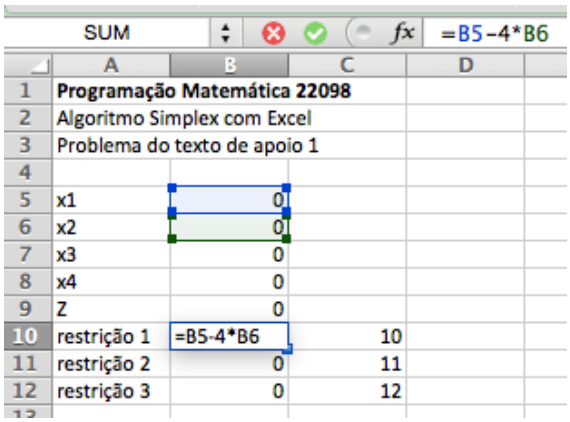
1. Em primeiro lugar, quando se recorre ao solver do Excel, é boa prática escrever numa célula aquilo a que se refere a coluna adjacente. Assim, uma possível estrutura para a entrada de dados seria p.ex.

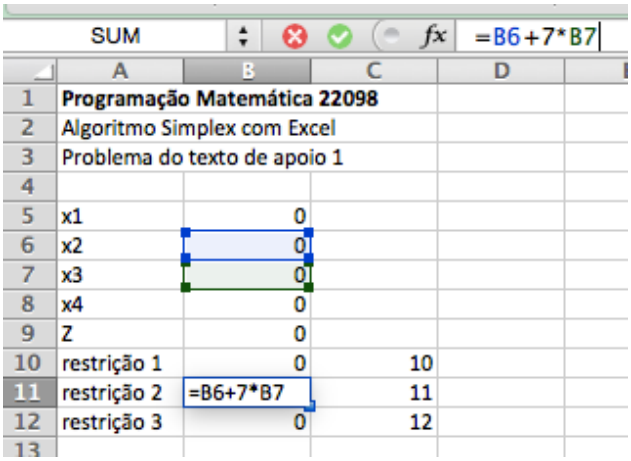
	A	B	C
	Programação Matemática 22098		
	Algoritmo Simplex com Excel		
	Problema do texto de apoio 1		
	x1	0	
	x2	0	
	x3	0	
	x4	0	
	Z	0	
	restrição 1	0	10
	restrição 2	0	11
	restrição 3	0	12

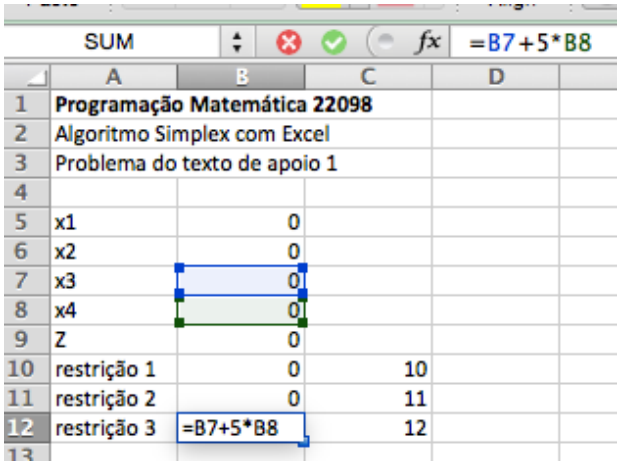
2. Nas colunas das variáveis não-básicas damos um ponto inicial ao algoritmo. Quando usamos a tabela simplex, este é sempre (0,0,...), mas no solver se quisermos podemos escolher outro ponto. A escolha do ponto inicial é mais relevante para problemas não-lineares ou inteiros. Para problemas lineares só faz diferença se o problema for muito grande.

3. Nas colunas de *Z* e restrições vamos inserir *fórmulas*. Em *Z* colocamos a função objetivo e nas restrições as expressões destas:





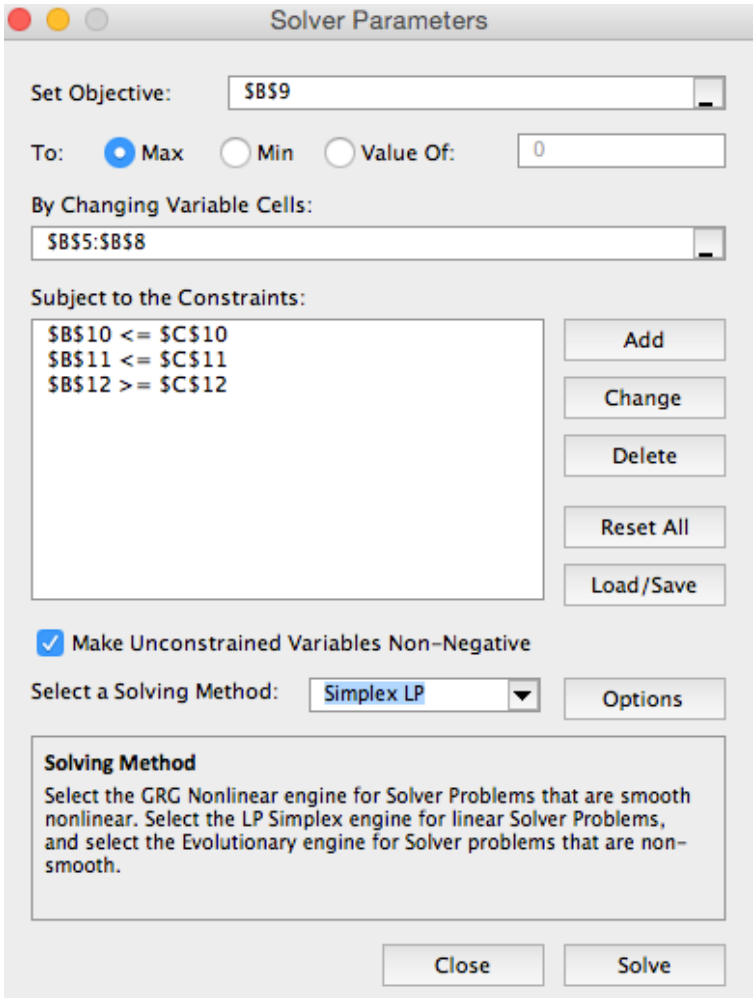




É necessário estarem fórmulas tanto na função objetivo como nas restrições, dado que é dessas fórmulas que o solver deduz que problema se quer resolver.

Nas colunas ao lado das restrições pode-se colocar os valores extremos que estas podem tomar. Como veremos, não é obrigatório fazer isto, mas é recomendável porque ajuda a organizar a folha de cálculo.

4. Agora chama-se o solver. Abre-se uma janela e tem-se:



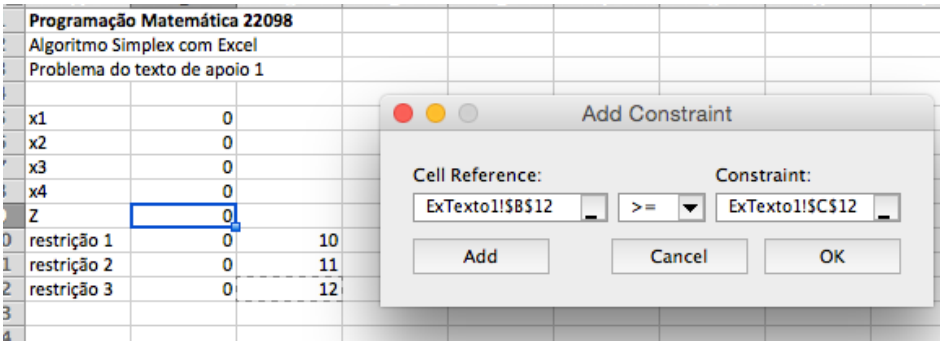
Os parâmetros preenchem-se da seguinte forma: (o quadro poderá variar conforme a língua e versão do Excel)

Em ***"Set objective:"*** colocamos a célula onde programamos a função objetivo. Não é preciso escrever essa célula por extenso; basta clicar no botão à direita do campo ( ) e depois clicar na célula correspondente.

Em ***"To:"*** indicamos o teor da otimização: maximizar ou minimizar.

Em ***"By Changing Variable cells:"*** coloca-se as células onde colocámos o ponto inicial de procura.

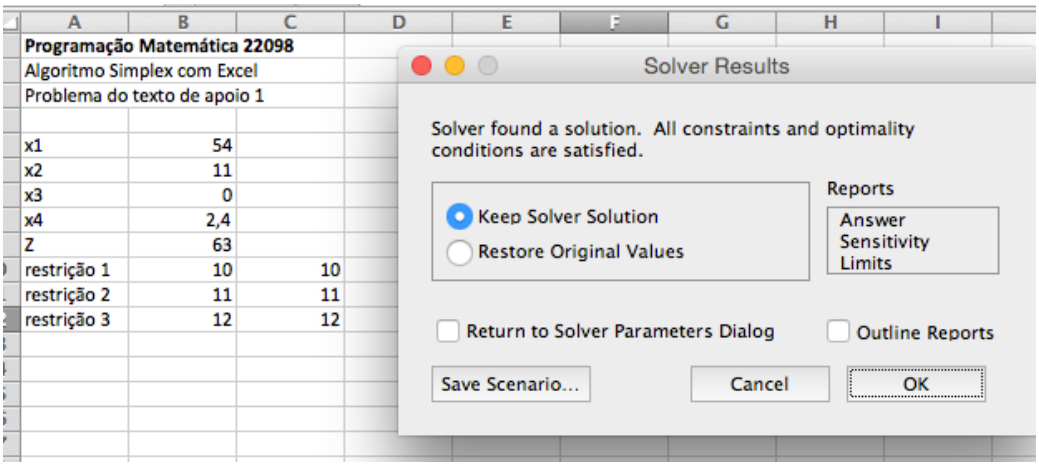
Em ***"Subject to the Constraints:"***, que da primeira vez aparece em branco, clicamos em ***"Add"*** e aparece-nos uma janela para indicar as restrições:



Nesta janela, em ***"Cell Reference:"*** indicamos a célula onde programamos a primeira restrição, escolhemos o tipo (maior, menor, igual) e em ***"Constraint:"*** ou colocamos ou o valor à mão ou a célula onde esse valor está. Com isto feito clicamos em ***"Add"*** e passamos para a próxima. Inseridas as três restrições, clicamos em ***"OK"***.

5. Estamos por fim em condições de mandar resolver. Se o problema exigir solução positiva, é clicar na checkbox de ***"Make Unconstrained Variables Non-negative"*** na janela *Solver Parameters*. Por último, em ***"Select a Solving Method"*** escolhe-se *simplex LP* e clica-se ***"Solve"***.

6. Após alguns segundos o Excel vai devolver a mensagem seguinte:



A mensagem *"Solver found a solution (...)"* significa que a resolução foi bem-sucedida. Outra mensagem no mesmo local normalmente quererá dizer que o algoritmo encontrou uma situação particular, como as descritas no capítulo 2.7 do livro de texto de JCR.

Clica-se no ***"Keep Solver Solution"*** e onde estava o ponto inicial temos agora a solução ótima procurada.

Analisando a solução encontrada, vemos que as restrições saturaram todas, pelo que não há folgas nenhumas nas variáveis de desvio. Todos os recursos estão a ser utilizados de forma ótima, sem desperdício. C.f. livro de texto de JCR, p.83.

Programação inteira e não-linear com o solver do Excel

O solver do Excel também permite resolver problemas de otimização para além dos lineares. No entanto, para outros tipos de problema, o solver **não garante** que o ótimo obtido seja global. Além disso, este ótimo vai depender, por vezes fortemente, do ponto de partida que se der ao iniciar o algoritmo (i.e. valores iniciais das variáveis de decisão).

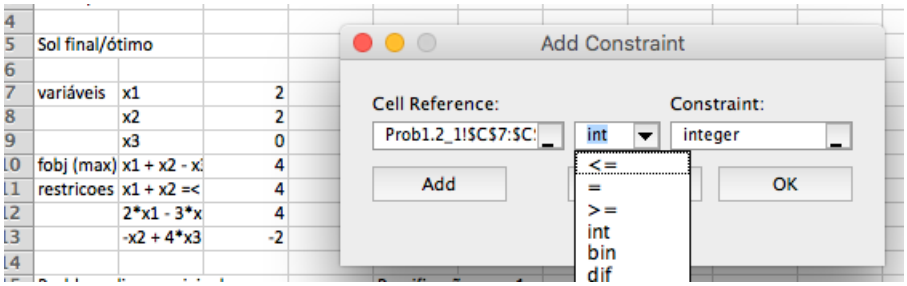
Programação inteira

Aqui o termo "programação inteira" refere-se ao caso em que o problema é linear na função objetivo e restrições, mas as variáveis de decisão são todas restringidas a valores inteiros. Na verdade, o termo correto é "programação linear inteira" (nem todos os problemas inteiros são lineares). Problemas lineares com variáveis reais e inteiras à mistura dizem-se de "programação linear mista", e o solver também pode ser usado para resolver este caso.

No caso da programação inteira (e mista) é extremamente fácil parametrizar o solver para resolver o problema. Basta formular o problema como um problema linear normal e adicionar restrições de integralidade para as variáveis em questão.

Para tal basta, no menu **Add Constraint**, adicionar uma nova restrição, selecionar as variáveis a restringir a inteiros e escolher na coluna do meio ***"int"*** ou ***"bin"***, conforme se queira que a variável tome valores inteiros ou binários (valor 0 ou 1, adequado para casos do tipo sim/não).

Exemplo:



Aqui coloca-se a restrição de que as variáveis nos campos x1 a x3 são inteiras.

Depois basta correr o solver como usualmente. Este resolve o problema inteiro usando o algoritmo *branch and bound*, que basicamente vai dividindo o espaço de soluções em pedaços sucessivos até encontrar as soluções ótimas inteiras (c.f. livro de texto JCR, cap.6). Dado que processo recorre ao simplex para cada ramo, todo o processo é bem mais lento do que o problema linear, podendo chegar a minutos, ou mesmo horas, de espera para problemas de dimensão média/grande. Para problemas pequenos é relativamente rápido.

Em todo caso convém não esquecer a ressalva de que nem sempre o ótimo encontrado é global...

Caso o problema esteja a demorar muito tempo a resolver, o Solver tem a opção de tentar encontrar mais rapidamente um ótimo, mas este será apenas um ótimo aproximado. Para tal basta escolher em ***"Select a Solving Method"*** a opção *Evolutionary* (em vez de *simplex LP*). Esta opção recorre a algoritmos especiais, ditos *genéticos*, que trocam a exatidão da solução pela rapidez de procura. Estes algoritmos usam de aleatoriedade na procura, pelo que nem sempre darão o mesmo resultado. Nas opções de *Evolutionary* pode-se impor um tempo máximo para a corrida.

Programação não-linear

O solver também resolve problemas não-lineares. Trata-se de problemas em que há pelo menos uma função objetivo ou restrição não-linear nas variáveis de decisão. P.ex.

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= x_1^2 + 4x_2 \\ \text{s. a.} \quad 2x_1 - x_2 &\leq 5 \\ x_1 + x_2^3 &\leq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

é não-linear na função objetivo e na 2ª restrição.

Problemas não-lineares podem ser resolvidos pelo solver, bastando para isso usar em ***"Select a Solving Method"*** a opção *GRGNonLinear*.

Tal como no caso inteiro e misto, o ótimo não-linear depende do ponto inicial de procura e pode não ser global.

Programação linear, inteira e mista – o lpSolve

O lpSolve é um programa feito em linguagem C para resolver problemas de programação linear, inteira e mista, de uso gratuito. É pois, tal como o Excel, um solver. O lpSolve é no entanto apenas um pedaço de código e não tem nenhum interface gráfico como o Excel (GUI – *graphical user interface*). Para usar o lpSolve há duas formas: ou se prepara um ficheiro de input e se manda correr ou se dá os comandos que definem o modelo um-a-um via um programa que interaja com o lpSolve. Um tal programa é o software estatístico "R" (entre dezenas de outros!), que além de correr o lpSolve é uma poderosa ferramenta *open source* e grátis de cálculo estatístico.

O interface R é mais interativo do que correr o lpSolve sobre ficheiros de input. Requer, no entanto, instalar-se dois programas (embora se possa instalar o lpSolve a partir do R).

Abaixo vamos explorar as duas formas de usar o lpSolve. O leitor depois escolherá a que preferir. Para quem não usa o R, é talvez preferível usar o lpSolve diretamente. Para quem está habituado ao R, pode ser mais fácil puxar a package lpSolve e trabalhar no ambiente que já conhece.

Uma limitação do lpSolve é que não usa múltiplos processadores. Solvers comerciais, como p.ex. o CPLEX, fazem uso de todo o poder de processamento da máquina em que correm.

lpSolve em ambiente R

Instalando o R

O R pode ser puxado em https://www.r-project.org/ a instalação, seja em Windows, MacOS ou Linux, é relativamente simples, bastando escolher a versão e seguir as instruções no ecrã. Se porventura tiver dificuldades, contacte o professor.

Instalando o lpSolve no R

Como é normal em projetos *open source* em que qualquer utilizador pode adicionar código, o R vem apenas com o código base e funciona por módulos suplementares. Há milhares destes módulos para o R, um deles sendo o lpSolve. Para instalar o lpSolve basta ir aos menus *package installer* do R e procurar por "lpSolve". Também aqui a adição do módulo lpSolve é relativamente simples.

Ah... depois de instalar o módulo lpSolve é ainda preciso ativá-lo. Para isso é ir aos menus do R e procurar *load package* e escolher lpSolve.

Usando o lpSolve no R

Por esta altura o leitor já se terá apercebido que o R funciona por linha de comandos. Ou seja, todos os comandos são dados diretamente por escrita e não com cliques de rato. A forma mais simples de explicar quais são os comandos do lpSolve é com um exemplo. Consideremos p.ex. o problema linear genérico que resolvemos no solver do Excel:

$$\text{Max } Z = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4$$
$$\text{s.a.} \quad x_1 - 4x_2 \leq 10$$
$$x_2 + 7x_3 \leq 11$$
$$x_3 + 5x_4 \geq 12$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

A sequência de comandos R para definir e resolver este problema são, juntamente com a respetiva explicação,

```
> prob1<-make.lp(0,4)
```

Cria um problema linear, de nome "prob1", com 0 restrições e 4 variáveis de decisão. Não se preocupe com o "0" no n.º de restrições porque elas serão adicionadas uma-a-uma.

```
> set.objfn(prob1,c(2,-3,4,-5))
```

Define a função objetivo do problema de nome "prob1", cujos coeficientes nas variáveis de decisão são a lista (o "c" significa lista) 2, -3, 4, -5. Isto reproduz em linguagem lpSolve a definição $Z = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4$.

```
> add.constraint(prob1,c(1,-4,0,0),"<=",10)
> add.constraint(prob1,c(0,1,7,0),"<=",11)
> add.constraint(prob1,c(0,0,1,5),">=",12)
```

Define as três restrições, indicando: o nome do problema; a lista de coeficientes de cada variável de decisão; a indicação do sentido da restrição; e o valor limite. As restrições $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ estão assumidas por omissão (*default*) e não é preciso indicá-las.

```
> lp.control(prob1,sense="max")
```

Indica que o sentido da otimização do problema "prob1" é maximizar. Se não dissermos nada, ele vai minimizar por omissão. Correr este comando vai fazer imprimir no ecrã uma série de coisas, mas isso agora não interessa.

```
> prob1
Model name:
            C1    C2    C3    C4
Maximize     2    -3     4    -5
R1           1    -4     0     0    <=  10
R2           0     1     7     0    <=  11
R3           0     0     1     5    >=  12
Kind       Std   Std   Std   Std
Type      Real  Real  Real  Real
Upper      Inf   Inf   Inf   Inf
Lower        0     0     0     0
```

Este comando não é estritamente necessário. Serve apenas para visualizar/verificar qual é a definição do problema. Assim podemos ver se nos enganámos algures na entrada de dados.

Nota 1: se nos enganarmos numa restrição, ver qual é a linha (digamos que é a R3) e correr

```
> delete.constraint(prob1,3)
```

e em seguida voltar a introduzir a linha corrigida com `add.constraint()`.

Nota 2: por vezes pode ser preciso alterar $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$. Se quisermos p.ex. dizer que $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq (-1, -2, -3, -4)$ há que correr o comando

```
> set.bounds(prob1, lower = c(-1,-2,-3,-4))
```

```
> solve(prob1)
[1] 0
```

Manda resolver o problema linear "prob1". O resultado "0" significa que foi encontrada uma solução ótima. Para saber qual foi essa solução, temos os comandos

```
> get.objective(prob1)
[1] 63
> get.variables(prob1)
[1] 54.0 11.0  0.0  2.4
> get.constraints(prob1)
[1] 10 11 12
```

que imprimem no ecrã os valores da função objetivo, das variáveis de decisão e o status das restrições para a solução ótima de "prob1" encontrada.

A solução é a mesma do solver Excel, como esperado.

Programação inteira e mista com lpSolve em ambiente R

Podemos alterar o caráter das variáveis dos problemas lpSolve muito simplesmente. P.ex. se quisermos passar a variável 4 de "prob1" de real a inteira basta correr

```
> set.type(prob1,4,type="integer")
```

Isto indica que o tipo da variável n.º 4 de "prob1" deve ser inteira. As outras permanecem reais, configurando-se assim um problema de programação linear mista:

```
> prob1
Model name:
            C1    C2    C3    C4
Maximize     2    -3     4    -5
R1           1    -4     0     0  <=  10
R2           0     1     7     0  <=  11
R3           0     0     1     5  >=  12
Kind       Std   Std   Std   Std
Type      Real  Real  Real   Int
Upper      Inf   Inf   Inf   Inf
Lower        0     0     0     0
```

Resolvendo este modelo obtemos

```
> solve(prob1)
[1] 0
> get.objective(prob1)
[1] 60
> get.variables(prob1)
[1] 54 11  0  3
```

O comando `set.type()` permite também definir uma variável como binária, i.e. a variável só pode ter valores 0 ou 1. Exemplo: (passar x_2 a binária)

```
> set.type(prob1,2,type="binary")
> prob1
Model name:
            C1    C2    C3    C4
Maximize     2    -3     4    -5
R1           1    -4     0     0  <=  10
R2           0     1     7     0  <=  11
R3           0     0     1     5  >=  12
Kind       Std   Std   Std   Std
Type      Real   Int  Real   Int
Upper      Inf     1   Inf   Inf
Lower        0     0     0     0
```

Note-se que "binary" é implementado passando a inteiro x_2 entre 0 e 1 (lower e upper bounds).

Por curiosidade aqui fica o resultado ótimo:

```
> solve(prob1)
[1] 0
> get.objective(prob1)
[1] 15.71429
> get.variables(prob1)
[1] 14.000000  1.000000  1.428571  3.000000
```

lpSolve com ficheiro de input

Para correr o lpSolve diretamente com um ficheiro de input é preciso, em primeiro lugar, instalar o software. Este pode ser obtido gratuitamente de

http://lpsolve.sourceforge.net/5.5/

O link "download" na barra esquerda leva-nos ao servidor de descarga do Sourceforge. Clicar no link See All Activities no fundo página de descarga e puxar: (use "find" na página)

Windows:	/lpsolve/5.5.2.3/lp_solve_5.5.2.3_exe_win32.zip	(computadores 32-bit)
	/lpsolve/5.5.2.3/lp_solve_5.5.2.3_exe_win64.zip	(computadores 64-bit)
Linux :	/lpsolve/5.5.2.3/lp_solve_5.5.2.3_exe_ux32.tar.gz	(computadores 32-bit)
	/lpsolve/5.5.2.3/lp_solve_5.5.2.3_exe_ux64.tar.gz	(computadores 64-bit)
MacOS:	/lpsolve/5.5.2.3/lp_solve_5.5.2.3_exe_osx32.tar.gz	(só disponível 32-bit)

Notas:

Os números de versão "5.5.2.3" poderão ter mudado à altura da consulta da página...

As versões 32-bit funcionam em computadores 64-bit. O contrário não. As versões 64-bit são mais rápidas, mas para problemas pequenos a diferença é impercetível.

As versões com "/working" no path são versões para testes e podem ter bugs. Não se recomenda puxar essas.

Depois de puxar, descompactar (unzip, gzip) e instalar num diretório. Basta ter os ficheiros nesse diretório para poder correr o lpSolve. À partida as instruções de instalação no ecrã chegarão... Se não chegarem, contactar o professor.

Correndo o lpSolve

Para correr o lpSolve há preparar o ficheiro de input, que pode ser um mero ficheiro de texto feito num editor de texto, p.ex. Notepad do Windows, TextEdit do Mac, etc. Normalmente este ficheiro é guardado com extensão .LP, para se identificar facilmente o que é, mas pode também ser gravado com .TXT.

Vejamos um exemplo do aspeto de um ficheiro .LP:

```
/* model.lp */

max: 143 x + 60 y;

120 x + 210 y <= 15000;
110 x + 30 y <= 4000;
x + y <= 65;
```

A sintaxe é autoexplicativa, bem como o problema que define. A 1ª linha é simplesmente de comentários e note-se o ponto-e-vírgula, que age como separador de expressões e que é fulcral na sintaxe.

Para resolver basta colocar o ficheiro .LP no mesmo diretório onde estão instalados os ficheiros do lpSolve, abrir uma janela de DOS (Windows) ou shell Unix (Linux/Mac), ir ao diretório e escrever:

```
> lp_solve.exe teste1.lp       (Windows)
> ./lp_solve teste1.lp         (Linux/Mac)
```

o que devolverá o output:

```
Value of objective function: 6026.87500000

Actual values of the variables:
x                            25.625
y                            39.375
```

Se quisermos evitar proliferação de ficheiros no diretório principal do lpSolve podemos criar um subdiretório, p.ex. `testes`, gravar lá os ficheiros e correr, a partir do diretório do lpSolve,

```
> lp_solve.exe testes\teste1.lp     (Windows)
> ./lp_solve testes/teste1.lp       (Linux/Mac)
```

para resolver problemas de programação inteira ou mista, basta adicionar no final do ficheiro a natureza das variáveis, *as follows*:

```
/* model.lp */

max: 143 x + 60 y;

120 x + 210 y <= 15000;
110 x + 30 y <= 4000;
x + y <= 65;

int x;
bin y;
```

Esta alteração faz o lpSolve mudar as rotinas de cálculo para programação inteira *branch-and-bound* e devolverá

```
Value of objective function: 5208.00000000

Actual values of the variables:
x                              36
y                               1
```

Modo verboso

Para problemas que levem algum tempo a resolver, o lpSolve tem um modo que permite imprimir informação no ecrã (*verbose mode*). Assim, o utilizador pode ir seguindo a evolução da resolução do problema e avaliar quanto tempo restará até ao final dos cálculos.

Para ativar o modo verboso, basta incluir na linha-de-comandos a flag `-vX`, em que `X` é um valor entre 0 e 6, dependendo da quantidade de informação que se quer. Usualmente `-v4` é bom compromisso entre visibilidade e informação.

Vejamos o exemplo acima em modo verboso:

```
> lp_solve teste1.lp -v4

Model name:  '' - run #1
Objective:   Maximize(R0)

SUBMITTED
Model size:        3 constraints,       2 variables,            6 non-zeros.
Sets:                                   0 GUB,                  0 SOS.

Using DUAL simplex for phase 1 and PRIMAL simplex for phase 2.
The primal and dual simplex pricing strategy set to 'Devex'.


Relaxed solution               5221 after          1 iter is B&B base.

Feasible solution              5208 after          3 iter,         2 nodes (gap 0.2%)

Optimal solution               5208 after          3 iter,         2 nodes (gap 0.2%).

Relative numeric accuracy ||*|| = 0

 MEMO: lp_solve version 5.5.2.5 for 32 bit OS, with 64 bit REAL variables.
       In the total iteration count 3, 1 (33.3%) were bound flips.
       There were 1 refactorizations, 0 triggered by time and 0 by density.
        ... on average 2.0 major pivots per refactorization.
       The largest [LUSOL v2.2.1.0] fact(B) had 7 NZ entries, 1.0x largest basis.
       The maximum B&B level was 2, 0.5x MIP order, 2 at the optimal solution.
       The constraint matrix inf-norm is 210, with a dynamic range of 210.
       Time to load data was 0.000 seconds, presolve used 0.000 seconds,
        ... 0.000 seconds in simplex solver, in total 0.000 seconds.

Value of objective function: 5208.00000000

Actual values of the variables:
x                             36
y                              1
```

E agora um exemplo mais complicado, só com binárias. O ficheiro de input está abaixo. Experimente fazer copy-paste deste para um ficheiro e corra o problema no seu terminal.

```
/* model.lp */

min: 2.55 - 1.275 x11 - 0.6375 B1 + 2.43 - 1.215 x12 - 0.6075 B1 + 1.45 - 0.725 x13 - 0.3625 B1 +
2.83 - 1.415 x21 - 0.7075 B2 + 2.71 - 1.355 x22 - 0.6775 B2 + 1.5 - 0.75 x23 - 0.375 B2 + 1.78 - 0.89
x31 - 0.445 B3 + 2.07 - 1.035 x32 - 0.5175 B3 + 2.02 - 1.01 x33 - 0.505 B3 + 2.12 - 1.06 x41 - 0.53
```

```
B4 + 2.48 - 1.24 x42 - 0.62 B4 + 1.3 - 0.65 x43 - 0.325 B4 + 2.52 - 1.26 x51 - 0.63 B5 + 1.8 - 0.9
x52 - 0.45 B5 + 1.46 - 0.73 x53 - 0.365 B5 ;

B1 >= x11 + x12 + x13 - 2 ;
B2 >= x21 + x22 + x23 - 2 ;
B3 >= x31 + x32 + x33 - 2 ;
B4 >= x41 + x42 + x43 - 2 ;
B5 >= x51 + x52 + x53 - 2 ;
3 B1 <= x11 + x12 + x13 ;
3 B2 <= x21 + x22 + x23 ;
3 B3 <= x31 + x32 + x33 ;
3 B4 <= x41 + x42 + x43 ;
3 B5 <= x51 + x52 + x53 ;
2979.4 x11 + 2277.8 x12 + 1822.0 x13 + 2019.5 x21 + 1940.1 x22 + 1248.5 x23 + 1306.4 x31 + 2174.5 x32
+ 1779.7 x33 + 2576.8 x41 + 2138.5 x42 + 1034.2 x43 + 3237.4 x51 + 1766.6 x52 + 1461.1 x53  <= 15000
;
bin x11 ;
bin x12 ;
bin x13 ;
bin x21 ;
bin x22 ;
bin x23 ;
bin x31 ;
bin x32 ;
bin x33 ;
bin x41 ;
bin x42 ;
bin x43 ;
bin x51 ;
bin x52 ;
bin x53 ;
bin B1 ;
bin B2 ;
bin B3 ;
bin B4 ;
bin B5 ;
```

Correndo o problema, temos...

```
> lp_solve testeXPTO.lp -v4
```

```
Model name:  '' - run #1
Objective:   Minimize(R0)

SUBMITTED
Model size:       11 constraints,      20 variables,           55 non-zeros.
Sets:                                   0 GUB,                  0 SOS.

Using DUAL simplex for phase 1 and PRIMAL simplex for phase 2.
The primal and dual simplex pricing strategy set to 'Devex'.


Relaxed solution       17.1602539731 after         28 iter is B&B base.

Feasible solution             20.44 after         76 iter,        25 nodes (gap 18.1%)
Improved solution             20.415 after        91 iter,        36 nodes (gap 17.9%)
Improved solution             20.395 after        95 iter,        37 nodes (gap 17.8%)
Improved solution              20.38 after       128 iter,        64 nodes (gap 17.7%)
Improved solution            20.3575 after       169 iter,        92 nodes (gap 17.6%)
Improved solution            19.6775 after       267 iter,       144 nodes (gap 13.9%)
Improved solution            19.5375 after       340 iter,       186 nodes (gap 13.1%)
Improved solution            19.3775 after       358 iter,       195 nodes (gap 12.2%)
Improved solution              19.27 after       392 iter,       215 nodes (gap 11.6%)
Improved solution            18.8825 after       592 iter,       333 nodes (gap 9.5%)

Optimal solution             18.8825 after      1019 iter,       598 nodes (gap 9.5%).

Relative numeric accuracy ||*|| = 0

 MEMO: lp_solve version 5.5.2.5 for 32 bit OS, with 64 bit REAL variables.
       In the total iteration count 1019, 250 (24.5%) were bound flips.
       There were 299 refactorizations, 0 triggered by time and 0 by density.
        ... on average 2.6 major pivots per refactorization.
```

```
      The largest [LUSOL v2.2.1.0] fact(B) had 29 NZ entries, 1.0x largest basis.
      The maximum B&B level was 15, 0.4x MIP order, 11 at the optimal solution.
      The constraint matrix inf-norm is 3237.4, with a dynamic range of 3237.4.
      Time to load data was 0.000 seconds, presolve used 0.000 seconds,
       ... 0.000 seconds in simplex solver, in total 0.000 seconds.

Value of objective function: 18.88250000

Actual values of the variables:
x11                           0
B1                            0
x12                           1
x13                           0
x21                           1
B2                            1
x22                           1
x23                           1
x31                           1
B3                            1
x32                           1
x33                           1
x41                           0
B4                            0
x42                           1
x43                           0
x51                           0
B5                            0
x52                           0
x53                           0
```

Como se pode ver do indicado a vermelho, o lpSolve executou 1019 iterações de branch-and-bound neste problema de 20 binárias e 10 restrições, sendo que o ótimo com variáveis binárias tem uma diferença (*gap*) de 9,5% para com o ótimo real.

Em http://lpsolve.sourceforge.net/5.5/ encontarão mais detalhes sobre coisas que se podem fazer com o lpSolve, inclusive como o correr diretamente a partir do sistema operativo, etc.

E pronto era isto. Happy solving! ☺