УДК 539.3
О.В. Білаш, канд. екон. наук
Національна академія сухопутних військ імені Петра Сагайдачного, Україна

ЗГИН ПЛАСТИНИ ЗІ ЩІЛИНОЮ ЗА НАЯВНОСТІ ПЛАСТИЧНИХ ЗОН У ЇЇ ВЕРШИНАХ

O.V. Bilash Ph.D.

BEND OF PLATE WITH SLIT IN THE PRESENCE OF PLASTIC ZONES IN ITS TOPS

В роботі досліджена задача про визначення напружено-деформованого стану ізотропної пластини завтовшки $2h$, основи якої вільні від зовнішнього навантаження, з наскрізною прямолінійною щілиною завдовжки $2l$ за двобічного згину її моментами на нескінченності, вектори яких паралельні і перпендикулярні до берегів щілини, а у її вершинах наявні пластичні зони, де виконуються умови пластичності Треска у вигляді умови пластичності поверхневого шару чи умови пластичного шарніру і де діють сталі згинальні моменти M_0 [1]. Береги щілини вільні від зовнішнього навантаження, а її розміри такі, що її береги в процесі згину не контактують (див. рис.1).

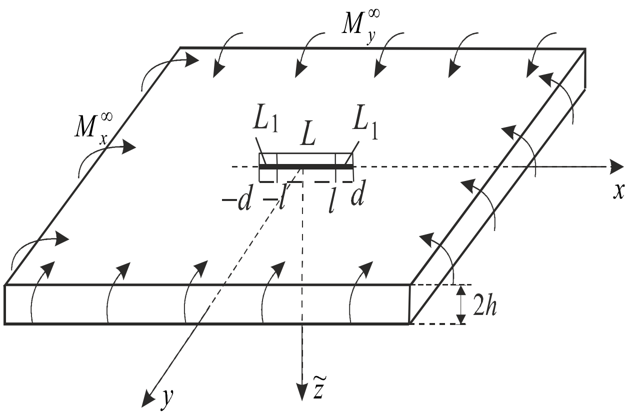

Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення щілини

У серединній площині пластини виберемо декартову систему координат $Oxy\tilde{z}$ з початком у центрі тріщини, направивши вісь Ox по ній, а вісь $O\tilde{z}$ перпендикулярно до площини. Лінію осі Ox, де розміщена щілина, позначимо через L, пластичні зони – через L_1, їх довжину і кінці через Δ, $-d$ та d відповідно.

Згідно формулювання задачі маємо такі крайові умови

$$M_y^{\pm}=0,\ N_y^{\pm}=0,\ H_{xy}^{\pm}=0,\ x\in L;$$

$$M_y^{\pm}=M_0,\ N_y^{\pm}=0,\ H_{xy}^{\pm}=0,\ x\in L_1, \quad (1)$$

де значками "+" і "−" позначено граничне значення відповідної величини при $y\to\pm0$, M_y − згинальний момент, N_y − перерізувальна сила, H_{xy} − крутний момент.

При розв'язуванні задачі скористаємося класичною теорією згину пластин, ввівши при цьому комплексні потенціали $\Phi(z)$ і $\Omega(z)$ та скориставшись залежностями [2]

$$\left(M_y+ic'+i\int_0^z P(\varepsilon)\partial\varepsilon\right)=m\left[\tilde{\kappa}\Phi(z)+\Omega(\bar{z})-(z-\bar{z})\overline{\Phi'(z)}\right], \quad (2)$$

$$\partial_x(u+iv)=-\tilde{z}\left[\Phi(z)-\Omega(\tilde{z})+(z-\tilde{z})\overline{\Phi'(z)}\right],$$

де $P(x)=N_y+\partial H_{xy}$ − узагальнена у сенсі Кірхгофа перерізувальна сила; u і v − компоненти вектора переміщення на осі Ox і Oy; c' − невідома стала; $m=-D(1-\upsilon)$,

$\widetilde{\kappa}=(3+\upsilon)/(1+\upsilon)$, $D=2Eh^3/\left(3\left(1-\upsilon^2\right)\right)$; υ і $E-$ відповідно коефіцієнт Пуассона і модуль Юнга матеріалу пластини; $z=x+iy$, $i^2=-1$, x і $y-$ координати точки; $\partial_x=\partial/\partial x$.

На основі першої залежності (2) і крайніх умов (1) отримано задачі лінійного спряження для визначення комплексних потенціалів $\Phi(z)$ і $\Omega(z)$,

$$\left[\widetilde{\kappa}\Phi(x)-\Omega(x)\right]^{+}-\left[\widetilde{\kappa}\Phi(x)-\Omega(x)\right]^{-}=0,\ x\in L+L_1;$$

$$\left(\widetilde{\kappa}\Phi(x)+\Omega(x)-\frac{ic'}{m}\right)^{+}+\left(\widetilde{\kappa}\Phi(x)+\Omega(x)-\frac{ic'}{m}\right)^{-}=\begin{cases}0, x\in L,\\ \dfrac{2M_0}{m}, x\in L.\end{cases}$$

розв’язавши які в класі функцій, обмежених у вершинах пластичних зон, та врахувавши поведінку функцій $\Phi(z)$ і $\Omega(z)$ на нескінченності [2], одержимо

$$\Omega(z)=\widetilde{\kappa}\Phi(z)+(\widetilde{\kappa}+1)(M_y^\infty-M_x^\infty)/\left(4D(1+\upsilon)\right)+\left(M_y^\infty-M_x^\infty\right)/2m, \qquad (3)$$

$$\widetilde{\kappa}\Phi(z)+\Omega(z)-\frac{ic'}{m}=-\frac{M_0\sqrt{z^2-d^2}}{m\pi}\int_{L_1}\frac{dx}{\sqrt{d^2-x^2}(x-z)} \qquad (4)$$

Врахувавши поведінку потенціалів $\Phi(z)$ і $\Omega(z)$ на нескінченності [2], з (4) отримаємо

$$-(\widetilde{\kappa}-1)(M_y^\infty+M_x^\infty)/\left(4D(1+\upsilon)\right)+\left(M_y^\infty-M_x^\infty\right)/2m-{ic'}/{m}=\frac{M_0}{\pi m}\int_{L_1}\frac{dx}{\sqrt{d^2-x^2}}. \qquad (5)$$

Прирівнявши в (5) дійсну і уявні частини, одержимо

$$c'=0,\ b=l\sec(\pi M_y^\infty/(2M_0)).$$

Для числового аналізу задачі подамо зведену довжину пластичної зони $\varepsilon=\Delta/l$ та зведене розходження берегів щілини на нижній основі у вершині щілини $\widetilde{\delta}=(\delta_\kappa E)/(l\sigma_y)$, використавши умову пластичності Треска у вигляді умови пластичності поверхневого шару [1]

$$\varepsilon=\sec(\pi\widetilde{\sigma})/2)-1,\ \widetilde{\delta}=8(1+\upsilon)\ln(1+\varepsilon)/(\pi(3+\upsilon));$$

або умови пластичного шарніру [1]

$$\varepsilon=\sec(\pi\widetilde{\sigma})/3)-1,\ \widetilde{\delta}=12(1+\upsilon)\ln(1+\varepsilon)/(\pi(3+\upsilon)),$$

де $\widetilde{\sigma}=3M_y^\infty/(2h^2\sigma_Y)$, $\delta_\kappa=\int_d^l\partial_x(v^+-v^-)dx-$ розходження берегів щілини у її вершині l; σ_Y- межа текучості матеріалу пластини.

Зауважимо, що згинальний момент на нескінченності M_x^∞ не впливає ні на довжину пластичної зони, ні на розкриття у вершині щілини при використанні таких умов пластичності.

Проведено числовий аналіз ε і $\widetilde{\delta}$ від значення зведеного максимального згинального напруження по безмежності $\widetilde{\sigma}$, який показав, що довжина пластичної зони та розходження берегів щілини у її вершині є більші з використанням умови пластичності Треска, ніж умови пластичного шарніру.

Література

1.Кушнір Р.М. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами [текст] / Р.М. Кушнір, М.М. Николишин, В.А. Осадчук. – Львів: Вид-во “Спалом”, 2003. – 319 с.

2. Пругов И.А. Метод сопряжения в теории плит [текст] / И.А. Пругов. – Минськ: Изд-во Белорус. ун-та, 1975. – 256 с.