УДК 537.622

Е.М. Овсиюк,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики и методики преподавания физики МГПУ им. И.П. Шамякина;
В.В. Кисель,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей и теоретической физики БГПУ;
В.М. Редьков,
кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси

ЧАСТИЦА СО СПИНОМ 1 В МАГНИТНОМ ПОЛЕ НА СФЕРИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ S₂

1. *Постановка задачи.* Задача об определении уровней энергии частицы в однородном магнитном поле относится к числу классических в квантовой механике [1–3]. В работах [4–6] найдены точные решения уравнения Шредингера для скалярной частицы в магнитном поле на фоне пространств постоянной положительной и отрицательной кривизны, сферическом пространстве Римана и гиперболическом пространстве Лобачевского. Анализ соответствующих систем в рамках классической механики выполнен в [7–9]. В работах [10–11] определены решения уравнения Дирака в магнитном поле на фоне пространства Лобачевского и Римана. В [12] построены решения для уравнения Даффина-Кеммера для векторной частицы в плоском пространстве. В настоящей работе будут получены точные решения уравнения Даффина-Кеммера частицы со спином 1 во внешнем магнитном поле на 2-мерной сферической плоскости S_2.

Волновое уравнение Даффина-Кеммера для векторной частицы в римановом пространстве имеет вид [13]

$$\{\beta^c [\, i\hbar\, (e^{\beta}_{(c)}\partial_\beta + \frac{1}{2} J^{ab}\gamma_{abc}) + \frac{e}{c} A_c \,] - mc\}\Psi = 0\,, \quad (1.1)$$

где γ_{abc} – символы вращения Риччи, $A_a = e^{\beta}_{(a)} A_\beta$ – тетрадные компоненты 4-вектора A_β; $J^{ab} = (\beta^a\beta^b - \beta^b\beta^a)$ – генераторы 10-мерного представления группы Лоренца. В дальнейшем будем использовать сокращения $e / c\hbar \Rightarrow e,\ mc / \hbar \Rightarrow M$ и систему обобщенных цилиндрических координат в пространстве S_3:

$$dS^2 = c^2 dt^2 - \rho^2 [\cos^2 z (dr^2 + \sin^2 r\, d\phi^2) + dz^2],$$
$$z \in [-\pi/2, +\pi/2],\ r \in [0, +\pi],\ \phi \in [0, 2\pi]. \quad (1.2)$$

Представление постоянного магнитного поля в плоском пространстве в цилиндрических координатах (1.2) легко можно обобщить и на случай пространства Римана S_3:

$$A_\phi = -2B \sin^2 \frac{r}{2} = B\,(\cos r - 1)\,. \quad (1.3)$$

Этому 4-потенциалу отвечает единственная ненулевая компонента электромагнитного тензора $F_{\phi r} = \partial_\phi A_r - \partial_r A_\phi = B \sin r$. Можно убедиться, что этот тензор удовлетворяет уравнениям Максвелла в сферическом пространстве.

Рассмотрим уравнение Даффина-Кеммера в магнитном поле (1.3) в пространстве Римана S_3. Цилиндрическим координатам отвечает тетрада

$$e^{\beta}_{(a)}(x) = diag\left(1, \cos^{-1} z, \cos^{-1} z \cos^{-1} r, 1\right). \quad (1.4)$$

С учетом (1.3), (1.4) уравнение (1.1) принимает вид

$$\left\{ i\beta^0 \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\cos z}\left(i\beta^1 \frac{\partial}{\partial r} + \beta^2 \frac{i\partial_\phi + eB(\cos r - 1) + iJ^{12}\cos r}{\sin r} \right) + \right.$$
$$\left. + i\beta^3 \frac{\partial}{\partial z} + i\frac{\sin z}{\cos z}(\beta^1 J^{13} + \beta^2 J^{23}) - M \right\}\Psi = 0\,. \quad (1.5)$$

При разделении переменных в волновом уравнении потребуется явный вид основных матриц β^a. При этом наиболее удобно последние задать в циклическом базисе, в котором генератор J^{12} диагонален (укажем явный вид 15-мерных матриц, разбитых в соответствии со структурой волновой функции на блоки размерностей $1-3-3-3$):

$$\beta^0=\begin{vmatrix}0&0&0&0\\0&0&i&0\\0&-i&0&0\\0&0&0&0\end{vmatrix},\quad \beta^i=\begin{vmatrix}0&0&e_i&0\\0&0&0&\tau_i\\-e_i^+&0&0&0\\0&-\tau_i&0&0\end{vmatrix}. \quad (1.6)$$

Здесь

$$e_1=\frac{1}{\sqrt2}(-i,0,i)\,,\; e_2=\frac{1}{\sqrt2}(1,0,1)\,,\; e_3=(0,i,0)\,,$$

$$\tau_1=\frac{1}{\sqrt2}\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{vmatrix},$$

$$\tau_2=\frac{1}{\sqrt2}\begin{vmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{vmatrix}, \quad (1.7)$$

$$\tau_3=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{vmatrix}=s_3\,.$$

Входящая в уравнение (1.5) матрица J^{12} имеет следующий явный вид:

$$J^{12}=\beta^1\beta^2-\beta^2\beta^1=-i\left|0\oplus\tau_3\oplus\tau_3\oplus\tau_3\right|=-iS_3\,. \quad (1.8)$$

2. Ограничение к 2-мерному случаю, разделение переменных. В уравнении (1.5) проведем ограничение к 2-мерному пространству S_2

$$\left[i\beta^0\frac{\partial}{\partial t}+i\beta^1\frac{\partial}{\partial r}+\right.$$
$$\left.+\beta^2\,\frac{i\partial_\phi+eB(\cos r-1)+iJ^{12}\cos r}{\sin r}-M\right]\Psi=0\,. \quad (2.1)$$

С использованием подстановки для волновой функции

$$\Psi=e^{-i\epsilon t}e^{im\phi}\begin{vmatrix}\Phi_0(r)\\ \vec\Phi(r)\\ \vec E(r)\\ \vec H(r)\end{vmatrix} \quad (2.2)$$

уравнение (2.1) принимает вид (введено обозначение $m+B(1-\cos r)=\nu(r)$)

$$\left[\epsilon\,\beta^0+i\beta^1\frac{\partial}{\partial r}-\beta^2\frac{\nu(r)-\cos rS_3}{\sin r}-M\right]\begin{vmatrix}\Phi_0(r)\\ \vec\Phi(r)\\ \vec E(r)\\ \vec H(r)\end{vmatrix}=0\,. \quad (2.3)$$

После разделения переменных с учетом обозначений

$$\frac{1}{\sqrt2}\Big(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\nu-\cos r}{\sin r}\Big)=\hat a_-\,,$$
$$\frac{1}{\sqrt2}\Big(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\nu+\cos r}{\sin r}\Big)=\hat a_+\,,$$
$$\frac{1}{\sqrt2}\Big(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\nu}{\sin r}\Big)=\hat a\,,$$
$$\frac{1}{\sqrt2}\Big(-\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\nu-\cos r}{\sin r}\Big)=\hat b_-\,,$$
$$\frac{1}{\sqrt2}\Big(-\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\nu+\cos r}{\sin r}\Big)=\hat b_+\,,$$
$$\frac{1}{\sqrt2}\Big(-\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\nu}{\sin r}\Big)=\hat b$$

приходим к системе радиальных уравнений

$$\begin{aligned}&-\hat b_-E_1-\hat a_+E_3=M\,\Phi_0\,,\\&-i\hat b_-H_1+i\hat a_+H_3+i\epsilon\,E_2=M\,\Phi_2\,,\\&i\hat aH_2+i\epsilon\,E_1=M\,\Phi_1\,,\\&-i\hat bH_2+i\epsilon\,E_3=M\,\Phi_3\,,\end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned}&\hat a\,\Phi_0-i\epsilon\,\Phi_1=M\,E_1\,,\\&-i\epsilon\Phi_2=M\,E_2\,,\\&\hat b\Phi_0-i\epsilon\,\Phi_3=M\,E_3\,,\\&-i\hat a\Phi_2=MH_1\,,\\&i\hat b_-\Phi_1-i\hat a_+\Phi_3=M\,H_2\,,\\&i\hat b\Phi_2=MH_3\,.\end{aligned} \quad (2.5)$$

3. Переход к нерелятивистскому пределу. Нединамическими переменными являются функции Φ_0, H_1, H_2, H_3:

$$\begin{aligned}&-\hat b_-E_1-\hat a_+E_3=M\,\Phi_0\,,-i\,\hat a\Phi_2=M\,H_1\,,\\&i\hat b_-\Phi_1-i\hat a_+\Phi_3=M\,H_2\,,\; i\,\hat b\Phi_2=M\,H_3\,.\end{aligned} \quad (3.1)$$

Исключая их, получаем шесть уравнений (группируем их в пары)

$$\begin{aligned}&i\hat a\,(i\hat b_-\Phi_1-i\hat a_+\Phi_3)+i\epsilon\,ME_1=M^2\Phi_1\,,\\&\hat a\,\,(-\hat b_-E_1-\hat a_+E_3)-i\epsilon\,M\Phi_1=M^2E_1\,,\end{aligned} \quad (3.2a)$$

$$\begin{aligned}&-i\hat b_-(-i\,\hat a\,\Phi_2)+i\hat a_+(i\,\hat b\,\Phi_2)+i\,\epsilon\,ME_2=M^2\Phi_2\,,\\&-i\epsilon\,M\Phi_2=M^2E_2\,,\end{aligned} \quad (3.2b)$$

$$\begin{aligned}&-i\,\hat b\,(i\hat b_-\Phi_1-i\hat a_+\Phi_3)+i\epsilon\,ME_3=M^2\Phi_3\,,\\&\hat b\,(-\hat b_-E_1-\hat a_+E_3)-i\epsilon\,M\Phi_3=M^2E_3\,,\end{aligned} \quad (3.2c)$$

Введем разбиение на большие и малые компоненты согласно

$$\Phi_1=B_1+M_1\,,\;\Phi_2=B_2+M_2\,,\;\Phi_3=B_3+M_3\,,$$
$$iE_1=B_1-M_1\,,\; iE_2=B_2-M_2\,,\; iE_3=B_3-M_3\,.$$

Одновременно выделим энергию покоя формальной заменой $\epsilon\Rightarrow\epsilon+M$. Складывая уравнения для каждой из трех пар и пренебрегая малыми компонентами M_k на фоне больших B_k, получаем

$$\begin{aligned}&\left(-2\,\hat{a}\,\hat{b}_- + 2\varepsilon M\right)B_1 = 0,\\ &\left(-\hat{b}_-\hat{a} - \hat{a}_+\hat{b} + 2\varepsilon M\right)B_2 = 0,\\ &\left(-2\hat{b}\,\hat{a}_+ + 2\varepsilon M\right)B_3 = 0.\end{aligned} \quad (3.3)$$

Это искомая система уравнений в приближении Паули. Учитывая явный вид операторов и выражение для $\nu(r) = m + B(1-\cos r)$, приводим уравнения (3.3) к виду

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\cos r}{\sin r}\frac{d}{dr} - B - \frac{1-2[m+B(1-\cos r)]\cos r}{\sin^2 r} - \frac{[m+B(1-\cos r)]^2}{\sin^2 r} + 2\varepsilon M\right]B_1 = 0, \quad (3.4a)$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\cos r}{\sin r}\frac{d}{dr} - \frac{[m+B(1-\cos r)]^2}{\sin^2 r} + 2\varepsilon M\right]B_2 = 0, \quad (3.4b)$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\cos r}{\sin r}\frac{d}{dr} + B - \frac{1+2[m+B(1-\cos r)]\cos r}{\sin^2 r} - \frac{[m+B(1-\cos r)]^2}{\sin^2 r} + 2\varepsilon M\right]B_3 = 0. \quad (3.4c)$$

Полученные уравнения решаются по одной и той же схеме. Остановимся подробно на решении уравнения (3.4a). Перейдем к новой переменной $1-\cos r = 2y$. С использованием подстановки $B_1 = y^{C_1}(1-y)^{A_1} f_1$ получим

$$y(1-y)\frac{d^2B_1}{dy^2} + [2C_1 + 1 - (2A_1 + 2C_1 + 2)y]\frac{dB_1}{dy} + \Big[B^2 + B + 2\varepsilon M - (A_1+C_1)(A_1+C_1+1) + \frac{1}{4}\frac{4A_1^2 - (2B+m+1)^2}{1-y} + \frac{1}{4}\frac{4C_1^2 - (m-1)^2}{y}\Big]B_1 = 0. \quad (3.5)$$

При A_1, C_1, выбранных согласно

$$A_1 = \frac{1}{2}|2B+m+1|, \quad C_1 = \frac{1}{2}|m-1|,$$

уравнение (3.5) является уравнением гипергеометрического типа с параметрами

$$\begin{aligned}&\alpha_1 = A_1 + C_1 + \frac{1}{2} - \sqrt{B^2 + B + 2\varepsilon M + \frac{1}{4}},\\ &\beta_1 = A_1 + C_1 + \frac{1}{2} + \sqrt{B^2 + B + 2\varepsilon M + \frac{1}{4}},\\ &\gamma_1 = 2C_1 + 1,\ B_1 = y^{C_1}(1-y)^{A_1}\\ &F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; y).\end{aligned} \quad (3.6)$$

Гипергеометрический ряд сводится к полиному, если $\alpha_1 = -n$ (n – натуральное число), откуда следует, что

$$\sqrt{B^2 + B + 2\varepsilon M + \frac{1}{4}} = n + \frac{1}{2} + \frac{|2B+m+1| + |m-1|}{2}. \quad (3.7)$$

Приведем решение уравнения (3.4b):

$$B_2 = y^{C_2}(1-y)^{A_2} F(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2; y),$$

$$\begin{aligned}&A_2 = \frac{1}{2}|2B+m|,\ C_2 = \frac{|m|}{2},\ \gamma_2 = 2C_2 + 1,\\ &\alpha_2 = A_2 + C_2 + \frac{1}{2} - \sqrt{B^2 + 2\varepsilon M + \frac{1}{4}},\\ &\beta_2 = A_2 + C_2 + \frac{1}{2} + \sqrt{B^2 + 2\varepsilon M + \frac{1}{4}}.\end{aligned} \quad (3.8)$$

Правило квантования имеет вид $\alpha_2 = -n$, откуда следует

$$\sqrt{B^2 + 2\varepsilon M + \frac{1}{4}} = n + \frac{1}{2} + \frac{|2B+m| + |m|}{2}. \quad (3.9)$$

Решение уравнения (3.4c) и соответствующее правило квантования имеют вид

$$B_3 = y^{C_3}(1-y)^{A_3} F(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3; y),$$

$$\begin{aligned}&A_3 = \frac{1}{2}|2B+m-1|,\ C_3 = \frac{1}{2}|m+1|,\ \gamma_3 = 2C_3 + 1,\\ &\alpha_3 = A_3 + C_3 + \frac{1}{2} - \sqrt{B^2 - B + 2\varepsilon M + \frac{1}{4}},\\ &\beta_3 = A_3 + C_3 + \frac{1}{2} + \sqrt{B^2 - B + 2\varepsilon M + \frac{1}{4}}.\end{aligned} \quad (3.10)$$

4. Решение радиальных уравнений в релятивистском случае. *Исходим из системы 10 уравнений (2.3), (2.5). Исключив 6 компонент E_i, H_i с помощью (2.5), приходим к 4-м уравнениям второго порядка относительно Φ_a:*

$$\begin{aligned}&(-\hat{b}_-\hat{a} - \hat{a}_+\hat{b} + \varepsilon^2 - M^2)\Phi_2 = 0,\\ &(-\hat{b}_-\hat{a} - \hat{a}_+\hat{b} - M^2)\Phi_0 + i\varepsilon(\hat{b}_-\Phi_1 + \hat{a}_+\Phi_3) = 0,\\ &(-\hat{a}\,\hat{b}_- + \varepsilon^2 - M^2)\Phi_1 + \hat{a}\,\hat{a}_+\Phi_3 + i\varepsilon\hat{a}\Phi_0 = 0,\\ &(-\hat{b}\,\hat{a}_+ + \varepsilon^2 - M^2)\Phi_3 + \hat{b}\,\hat{b}_-\Phi_1 + i\varepsilon\hat{b}\Phi_0 = 0.\end{aligned} \quad (4.1)$$

Отмечаем существование простого решения этой системы

$$\Phi_0=0\,,\qquad \Phi_1=0\,,\qquad \Phi_3=0\,,$$
$$(-\hat b_-\hat a-\hat a_+\hat b+\varepsilon^2-M^2)\Phi_2=0\,. \qquad (4.2a)$$

При этом из (2.5) следует, что

$$E_1=0\,,\ E_2=-i\varepsilon M^{-1}\Phi_2\,,\ E_3=0\,,$$
$$H_1=-iM^{-1}\hat a\ \Phi_2\,,\ H_2=0\,,\ H_3=iM^{-1}\hat b\ \Phi_2\,. \qquad (4.2b)$$

Подействуем на третье уравнение в (4.1) слева оператором $\hat b_-$ и на четвертое уравнение слева оператором $\hat a_+$. Вводя обозначения $\hat b_-\Phi_1=Z_1$, $\hat a_+\Phi_3=Z_3$, получающуюся из (4.1) систему уравнений представим в виде

$$\begin{aligned}
&(-\hat b_-\hat a-\hat a_+\hat b+\varepsilon^2-M^2)\Phi_2=0\,,\\
&(-\hat b_-\hat a-\hat a_+\hat b-M^2)\Phi_0+i\varepsilon(Z_1+Z_3)=0\,,\\
&(-\hat b_-\hat a+\varepsilon^2-M^2)Z_1+\hat b_-\hat a Z_3+i\varepsilon\hat b_-\hat a\Phi_0=0\,,\\
&(-\hat a_+\hat b+\varepsilon^2-M^2)Z_3+\hat a_+\hat b Z_1+i\varepsilon\hat a_+\hat b\Phi_0=0\,.
\end{aligned} \qquad (4.3)$$

Определяя функции Z_1, Z_3 как $Z_1=\dfrac{f+g}{2}$, $Z_3=\dfrac{f-g}{2}$, $Z_1+Z_3=f$, $Z_1-Z_3=g$, приходим к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned}
&(-\hat b_-\hat a-\hat a_+\hat b+\varepsilon^2-M^2)\Phi_2=0\,,\\
&(-\hat b_-\hat a-\hat a_+\hat b-M^2)\Phi_0+i\varepsilon f=0\,,\\
&-\hat b_-\hat a\frac{f+g}{2}+(\varepsilon^2-M^2)\frac{f+g}{2}+\\
&+\hat b_-\hat a\frac{f-g}{2}+i\varepsilon\hat b_-\hat a\Phi_0=0\,,\\
&-\hat a_+\hat b\frac{f-g}{2}+(\varepsilon^2-M^2)\frac{f-g}{2}+\\
&+\hat a_+\hat b\frac{f+g}{2}+i\varepsilon\hat a_+\hat b\Phi_0=0
\end{aligned} \qquad (4.4)$$

или (складываем и вычитаем третье и четвертое уравнения)

$$\begin{aligned}
&(-\hat b_-\hat a-\hat a_+\hat b+\varepsilon^2-M^2)\Phi_2=0\,,\\
&(-\hat b_-\hat a-\hat a_+\hat b-M^2)\Phi_0+i\varepsilon f=0\,,\\
&(-\hat b_-\hat a+\hat a_+\hat b)g+(\varepsilon^2-M^2)f+\\
&+i\varepsilon(\hat b_-\hat a+\hat a_+\hat b)\,\Phi_0=0\,,\\
&(-\hat b_-\hat a-\hat a_+\hat b)g+(\varepsilon^2-M^2)g+\\
&+i\varepsilon(\hat b_-\hat a-\hat a_+\hat b)\Phi_0=0\,.
\end{aligned} \qquad (4.5)$$

Учитывая тождества

$$-\hat b_-\hat a-\hat a_+\hat b=\Delta_2,\ \ -\hat b_-\hat a+\hat a_+\hat b=2B\,,$$

уравнения (4.5) приводим к виду

$$(\Delta_2+\varepsilon^2-M^2)\,\Phi_2=0\,, \qquad (4.6)$$
$$(\Delta_2-M^2)\,\Phi_0+i\varepsilon f=0\,, \qquad (4.7)$$
$$2B\,g+(\varepsilon^2-M^2)f-i\varepsilon\Delta_2\,\Phi_0=0\,,$$
$$\Delta_2 g+(\varepsilon^2-M^2)g-2i\varepsilon B\,\Phi_0=0\,.$$

Определим решения системы (4.7). Из второго уравнения (4.7), используя выражение для $\Delta_2\Phi_0$ из первого уравнения этой же системы, находим линейное соотношение между тремя функциями g, f, Φ_0: $2B\,g-M^2 f-i\varepsilon M^2\Phi_0=0$. С помощью этого условия исключим функцию f $\left(f=\dfrac{2B}{M^2}g-i\varepsilon\Phi_0\right)$ из второго и третьего уравнений системы (4.7):

$$\begin{aligned}
&(\Delta_2+\varepsilon^2-M^2)\,g=2i\varepsilon B\,\Phi_0\,,\\
&(\Delta_2+\varepsilon^2-M^2)\,\Phi_0=-\frac{2i\varepsilon B}{M^2}g.
\end{aligned} \qquad (4.8)$$

Введем обозначение $\gamma=\varepsilon^2/M^2$. Систему (4.8) представим в матричной форме

$$(\Delta_2+\varepsilon^2-M^2)\begin{vmatrix} g\\ \varepsilon\,\Phi_0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 2iB\\ -2iB\gamma & 0\end{vmatrix}\begin{vmatrix} g\\ \varepsilon\,\Phi_0\end{vmatrix} \qquad (4.9)$$

или в символическом виде: $\Delta f=Af$, $\Delta f'=SAS^{-1}f'$, $f'=Sf$. Найдем преобразование, приводящее матрицу A к диагональному виду:

$$f'=Sf\,,\ \Delta f'=SAS^{-1}f'\,,$$
$$SAS^{-1}=\begin{vmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{vmatrix},\ S=\begin{vmatrix}a & d\\ c & b\end{vmatrix}.$$

Задача сводится к решению двух систем уравнений:

$$-\lambda_1\,a-2i\gamma B\,d=0\,,\qquad 2iB\,a-\lambda_1\,d=0\,;$$
$$-\lambda_2\,c-2i\gamma B\,b=0\,,\qquad 2iB\,c-\lambda_2\,b=0\,.$$

Выберем следующее решение:

$$\lambda_1=+\frac{2\varepsilon B}{M}\,,\ \lambda_2=-\frac{2\varepsilon B}{M}\,,$$
$$S=\begin{vmatrix}\varepsilon & +iM\\ \varepsilon & -iM\end{vmatrix},\ S^{-1}=\frac{1}{-2i\varepsilon M}\begin{vmatrix}-iM & -iM\\ -\varepsilon & \varepsilon\end{vmatrix}. \qquad (4.10)$$

Новые функции удовлетворяют уравнениям:

$$1)\left(\Delta_2+\varepsilon^2-M^2-\frac{2\varepsilon B}{M}\right)g'=0\,; \qquad (4.11a)$$
$$2)\left(\Delta_2+\varepsilon^2-M^2+\frac{2\varepsilon B}{M}\right)\Phi_0'=0\,. \qquad (4.11b)$$

Они независимы друг от друга, поэтому существует два решения:

$$\begin{aligned}
&1)\ g'\neq 0,\ \Phi'_0=0\,,\\
&2)\ g'=0,\ \Phi'_0\neq 0\,.
\end{aligned} \qquad (4.12)$$

Исходные функции в случаях 1) и 2) принимают соответственно вид

1) $g = \frac{1}{2\varepsilon} g'$, $\varepsilon\Phi_0 = \frac{1}{2iM} g'$;

2) $g = \frac{1}{2i\varepsilon} \varepsilon\Phi'_0$, $\varepsilon\Phi_0 = -\frac{1}{2iM} \varepsilon\Phi'_0$.

В каждом случае при этом два уравнения из (4.9) принимают вид, совпадающий соответственно с (4.11a) и (4.11b). Чтобы получить решения этих уравнений и уравнения (4.6), никаких дополнительных вычислений проводить не нужно. Достаточно в формуле (3.9) провести следующие замены:

$$2\varepsilon M \Rightarrow \left(\varepsilon^2 - M^2 - \frac{2\varepsilon B}{M}\right); \quad \left(\varepsilon^2 - M^2\right); \quad \left(\varepsilon^2 - M^2 + \frac{2\varepsilon B}{M}\right). \qquad (4.13)$$

Таким образом, построены точные решения квантовомеханического уравнения для частицы со спином 1 при ограничении ее движения по поверхности 3-мерной сферы, последнюю можно рассматривать как 2-мерное пространство постоянной положительной кривизны. Решения построены в нерелятивистском приближении и также в релятивистском случае. Найдены соответствующие спектры энергии.

Литература

1. *Rabi, I.I.* Ztshr. Phys. / I.I. Rabi. – 1928. Bd. 49. – P. 507–511.
2. *Landau, L.* Ztshr. Phys. / L. Landau. – 1930. Bd. 64. – P. 629–637.
3. *Plesset, M.S.* Phys. Rev. / M.S. Plesset. – 1931. – № 12. – P. 1728–1731.
4. *Bogush,* A.A. Nonlinear Phenomena in Complex Systems / A.A. Bogush, V.M. Red'kov, G.G. Krylov. – 2008. – Vol. 11, № 4. – P. 403–416.
5. *Богуш, А.А.* Доклады НАН Беларуси / А.А Богуш, В.М. Редьков, Г.Г. Крылов. – 2009. – Т. 53. – № 2. – С. 45–51.
6. *Богуш, А.А.* Весці НАН Беларуси. Серыя фіз.-мат. навук / А.А. Богуш, В.М. Редьков, Г.Г. Крылов. – 2009. – № 2. – С. 57–63.
7. *Kudryashov, V.V.* AP Conference Proceedings / V.V. Kudryashov, Yu.A. Kurochkin, E.M. Ovsiyuk, V.M. Red'kov. – Vol. 1205. – P. 120–126 (2010); Eds. Remo Ruffini and Gregory Vereshchagin.
8. *Кудряшов, В.В.* Доклады НАН Беларуси / В.В. Кудряшов, Ю.А. Курочкин, Е.М. Овсиюк [и др.]. – 2009. – Т. 53. – № 6. – С. 50–53.
9. *Kudryashov, V.V.* SIGMA / V.V. Kudryashov, Yu. A. Kurochkin, E.M. Ovsiyuk, V.M. Red'kov. – 004, 34 p. (2010).
10. *Овсиюк, Е.М.* Доклады НАН Беларуси / Е.М. Овсиюк, В.В. Кисель, В.М. Редьков. – 2010. – Т. 54. – № 3. – С. 47–54.
11. *Овсиюк, Е.М.* Весці НАН Беларуси. Серыя фіз.-мат. навук / Е.М. Овсиюк, В.В. Кисель, В.М. Редьков. – 2010. – № 4. – С. 95–101.
12. *Кисель, В.В.* Весці НАН Беларуси / В.В. Кисель, Е.М. Овсиюк, В.М. Редьков. – 2010. – Т. 54. – № 4. – С. 64–71.
13. *Редьков, В.М.* Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В.М. Редьков. – Минск: Белорус. наука, 2009. – 495 с.

SUMMARY

There are constructed exact solutions of the quantum-mechanical equation for a spin $S = 1$ particle in 2-dimensional Riemannian space of constant positive curvature, spherical plane, against a background of an external magnetic field which is the analogue of the homogeneous magnetic field in the Minkowski space. A generalized formula for energy levels describing quantization of the motion of the vector particle in magnetic field on the 2-dimensional space S_2 has been found, nonrelativistic and relativistic equations have been solved.

Поступила в редакцию 27.01.2012 г.