МАТЭМАТЫКА

УДК 517.5

В.М. Русак,
доктар фізіка-матэматычных навук,
прафесар кафедры вышэйшай матэматыкі і матэматычнай фізікі БДУ;
І.В. Рыбачэнка,
кандыдат фізіка-матэматычных навук,
дацэнт кафедры вышэйшай матэматыкі і матэматычнай фізікі БДУ

РАЎНАМЕРНАЯ РАЦЫЯНАЛЬНАЯ АПРАКСІМАЦЫЯ СПАЛУЧАНЫХ ФУНКЦЫЙ

Будзем разглядаць сінгулярныя інтэгралы з ядром Гільберта

$$F(\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)ctg\frac{\theta-\varphi}{2}d\theta, \qquad (1)$$

якія разумеюцца ў сэнсе галоўнага значэння па Кашы, дзе $f(\theta)\in C_{2\pi}\bigcap Lip_M\alpha$, $0<\alpha\le 1$, і даследаваць раўнамерную апраксімацыю гэтых інтэгралаў трыганаметрычнымі рацыянальнымі функцыямі. Будзем меркаваць, што $f(\theta)$ апраксімуецца рацыянальнымі функцыямі $r_n(\theta)=t_n(\theta)/h_n(\theta)$, дзе $t_n(\theta)$ і $h_n(\theta)$ – трыганаметрычныя паліномы парадку не вышэйшага за n, прычым

$$h_n(\theta)=\prod_{k=1}^{n}\left(1+|w_k|^2-2|w_k|\cos(\theta-\theta_k)\right), \qquad (2)$$

$$|w_k|<1, \theta_k=\arg w_k.$$

Непасрэдна правяраецца, што

$$R_n(\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r_n(\theta)ctg\frac{\theta-\varphi}{2}d\theta \qquad (3)$$

ёсць таксама рацыянальная трыганаметрычная функцыя з назоўнікам $h_n(\varphi)$ і парадку не вышэйшага за n. Мэта дадзенага артыкула заключаецца ў тым, каб у раўнамернай норме атрымаць няроўнасць для адхілення $\|F(\varphi)-R_n(\varphi)\|$.

Тэарэма 1. Няхай $f(\theta)\in C_{2\pi}\bigcap Lip_M\alpha$, $0<\alpha\le 1$, і існуе трыганаметрычная рацыянальная функцыя $r_n(\theta)$ з назоўнікам (2) такая, што

$$\|f(\theta)-r_n(\theta)\|\le\frac{C_1}{n^\beta}, \alpha\le\beta, |r_n'(\theta)|\le C_2 n^\gamma, \gamma\ge 0. \qquad (4)$$

Тады праўдзіцца няроўнасць

$$\|F(\varphi)-R_n(\varphi)\|\le\frac{C_3}{n^\beta}\ln n. \qquad (5)$$

Доказ. Выкарыстоўваючы (1), (3) і той факт, што пераўтварэнне Гільберта ад адзінкі ёсць нуль [1], гэта значыць $\int_{-\pi}^{\pi} ctg\frac{\theta-\varphi}{2}d\theta=0$, знойдзем для любога φ

$$|F(\varphi)-R_n(\varphi)|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-\varphi|\le\pi}(f(\theta)-r_n(\theta))ctg\frac{\theta-\varphi}{2}d\theta\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-\varphi|\le\pi}(f(\theta)-r_n(\theta)-f(\varphi)+r_n(\varphi))ctg\frac{\theta-\varphi}{2}d\theta\right|=$$

$$=\left|\int_{|\theta-\varphi|\le\delta_n}+\int_{\delta_n<|\theta-\varphi|\le\pi}\right|=|I_1+I_2|.$$

Улічваючы першую з умоў (4), будзем мець

$$|I_2|\le$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\int_{\delta_n<|\theta-\varphi|\le\pi}\left(|f(\theta)-r_n(\theta)|+|f(\varphi)-r_n(\varphi)|\right)\left|ctg\frac{\theta-\varphi}{2}\right|d\theta\le$$

$$\le\frac{C_1}{\pi n^\beta}\int_{\delta<|\theta-\varphi|\le\pi}\left|ctg\frac{\theta-\varphi}{2}\right|d\theta\le\frac{2C_1}{\pi n^\beta}\int_{\delta_n}^{\pi}\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}d\theta\le$$

$$\le\frac{2C_1}{n^\beta}\int_{\delta_n}^{\pi}\frac{d\theta}{\theta}=\frac{2C_1}{n^\beta}\ln\frac{\pi}{\delta_n}.$$

Абапіраючыся на ўмову Ліпшыца, тэарэму аб сярэднім і няроўнасць (4) для вытворнай рацыянальнай функцыі і выконваючы неабходныя пераўтварэнні, атрымаем

$$|I_1|\le\frac{1}{2\pi}\int_{\varphi-\delta_n}^{\varphi+\delta_n}|f(\theta)-f(\varphi)|\cdot\left|ctg\frac{\theta-\varphi}{2}\right|d\theta+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\varphi-\delta_n}^{\varphi+\delta_n}|r_n(\theta)-r_n(\varphi)|\cdot\left|ctg\frac{\theta-\varphi}{2}\right|d\theta\le$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\int_{\varphi-\delta_n}^{\varphi+\delta_n}\frac{M|\theta-\varphi|^\alpha}{\left|\sin\frac{\varphi-\theta}{2}\right|}d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_{\varphi-\delta_n}^{\varphi+\delta_n}\left|\frac{r_n'(\xi)(\theta-\varphi)}{\sin\frac{\varphi-\theta}{2}}\right|d\theta\le$$

$$\le\frac{M}{2}\int_{\varphi-\delta_n}^{\varphi+\delta_n}|\theta-\varphi|^{\alpha-1}d\theta+\frac{1}{2}\int_{\varphi-\delta_n}^{\varphi+\delta_n}|r_n'(\xi)|d\theta\le M\int_0^{\delta_n}t^{\alpha-1}dt+$$

$$+C_2 n^\gamma\delta_n=\frac{M}{\alpha}\delta_n^\alpha+C_2 n^\gamma\delta_n. \qquad (8)$$

З суадносін (6–8) вынікае, што

$$|F(\varphi)-R_n(\varphi)|\le \frac{2C_1}{n^{\beta}}\ln\frac{\pi}{\delta_n}+\frac{M}{\alpha}\delta_n^{\alpha}+C_2 n^{\gamma}\delta_n .$$

Лічачы $\delta_n=\min\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}},\left(\frac{1}{n}\right)^{\gamma+\beta}\right\}$, знойдзем для любога φ

$$|F(\varphi)-R_n(\varphi)|\le \frac{2C_1}{n^{\beta}}\ln\frac{\pi}{\delta_n}+\frac{M}{\alpha}\left(\frac{1}{n}\right)^{\beta}+C_2\left(\frac{1}{n}\right)^{\beta}<$$

$$<\frac{C_3}{n^{\beta}}\ln n,$$

і доказ тэарэмы 1 скончаны.

Без якіх-небудзь дадатковых абмежаванняў на ўзаемна спалучаныя функцыі $f(\theta)$ і $F(\varphi)$ лагарыфмічны множнік у ацэнцы (5) не можа быць апушчаны. Праўдзіцца ў прыватнасці наступная тэарэма.

Тэарэма 2. Існуе функцыя $f(\theta)\in C_{2\pi}\bigcap Lip_1 1$ і рацыянальная функцыя $r_n(\theta)$, якія задавальняюць умовы тэарэмы 1 для $\beta=1$, і праўдзіцца няроўнасць

$$\| F(\varphi-R_n(\varphi))\|\ge \frac{C_0}{n}\ln n.$$

Доказ. Няхай $\delta=\frac{\pi}{4n}$ і функцыя $f(\theta)$ вызначаецца на $[-\pi,\pi]$ роўнасцямі

$$f(\theta)=\begin{cases}|\theta|-\frac{\delta}{2}, |\theta|\le\delta,\\ f(\theta-2\delta), \delta\le\theta\le(\pi+\delta)/2,\\ \frac{\delta}{2}, -\frac{\pi}{2}\le\theta\le-\delta,\\ -f(-\theta), -(\pi+\delta)/2\le\theta\le-\frac{\pi}{2},\\ 0, (\pi+\delta)/2\le|\theta|\le\pi.\end{cases} \qquad (9)$$

З адрэзку $[-\pi,\pi]$ працягнем функцыю перыядычна з перыядам 2π і атрымаем працягнутую функцыю, захоўваючы за ёй ранейшае абазначэнне $f(\theta)\in C_{2\pi}$. Няцяжка праверыць, што для гэтай функцыі існуе сістэма лікаў $\{\theta_j\}$ такіх, што $f(\theta_j)=(-1)^j\| f(\theta)\|, j=\overline{0,2n+1}$. Такім чынам, $r_n(\theta)\equiv 0$ з'яўляецца рацыянальнай трыганаметрычнай функцыяй найлепшага набліжэння ў раўнамернай метрыцы для функцыі $f(\theta)$. Відавочна, што $f(\theta)\in Lip_1 1$ і $\| f(\theta)-r_n(\theta)\|=\| f(\theta)\|=\frac{\pi}{8n}$. Нарэшце, выконваючы неабходныя вылічэнні, з улікам (9) атрымаем

$$\| F(\varphi)-R_n(\varphi)\|=\| F(\varphi)\|\ge F(0)=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)ctg\frac{\theta}{2}d\theta\right|\ge$$

$$\ge\frac{1}{2\pi}\left|\int_{-(\pi+\delta)/2}^{-\delta} f(\theta)ctg\frac{\theta}{2}d\theta\right|-\int_{\delta}^{\frac{3}{2}\delta} f(\theta)ctg\frac{\theta}{2}d\theta>$$

$$>\frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\delta}\frac{\pi}{8n}ctg\frac{\theta}{2}d\theta\right|-\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\frac{3}{2}\delta}\frac{\pi}{8n}ctg\frac{\theta}{2}d\theta=$$

$$=\frac{1}{16n}\int_{\frac{3}{2}\delta}^{\frac{\pi}{2}} ctg\frac{\theta}{2}d\theta>\frac{1}{8n}\left(\frac{3}{2}\ln 2-\ln\frac{3\pi}{4n}\right)>\frac{C_0}{n}\ln n,$$

што і трэба было даказаць.

Заўвага 1. Няроўнасці для вытворных рацыянальных функцый вывучаліся ў [2]. У прыватнасці для рацыянальных функцый $r_n(\theta)=t_n(\theta)/h_n(\theta)$ з назоўнікамі ў форме (2) даказана, што з умовы $\| r_n(\theta)\|\le 1$ выцякае мажарантная няроўнасць для вытворнай

$$|r_n'(\theta)|\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|w_k|^2}{1+|w_k|^2-2|w_k|\cos(\theta-\theta_k)}. \qquad (10)$$

З (10) вынікае, што няроўнасць (4) для вытворнай апраксімавальнай рацыянальнай функцыі будзе выконвацца, калі для ўсіх $k=\overline{1,n}$

$$1-|w_k|\ge\frac{C_4}{n^{\gamma-1}}, \gamma\ge 1.$$

Зразумела, тэарэма 1 змястоўная і ў паліномным выпадку, калі $w_k=0, k=\overline{1,n}$, адпаведна няроўнасць (10) пераходзіць у няроўнасць З.Н. Бернштайна $|r_n'(\theta)|\le n$.

Заўвага 2. Тэарэма 1 утрымоўвае параўнальныя ацэнкі рацыянальных набліжэнняў узаемна спалучаных 2π-перыядычных дыферэнцавальных функцый у выпадку сталай хуткасці іх змяншэння. Аналагічныя суадносіны выконваюцца і для рацыянальных набліжэнняў узаемна спалучаных 2π-перыядычных аналітычных функцый у выпадку геаметрычнай хуткасці іх змяншэння.

Заўвага 3. Хуткасць змяншэння найлепшых рацыянальных трыганаметрычных набліжэнняў $E_n^T(f)$ і $E_n^T(F)$ узаемна спалучаных функцый $f(\theta)$ і $F(\varphi)$ у раўнамернай метрыцы можа мець аднолькавы парадак пры дадатковых абмежаваннях на $f(\theta)$. Так адбываецца ў прыватнасці для функцый $f(\theta)$, якія маюць r-ю вытворную ў сэнсе Вейля абмежаванай варыяцыі, $r>0$. Такія функцыі, як усталявана ў [3], апраксімуюцца рацыянальнымі функцыямі істотна лепш, чым паліномамі, прычым $E_n^T(f)=O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right)$ і для спалучанай функцыі таксама выканана парадкавая роўнасць $E_n^T(F)=O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right)$.

Літаратура

1. *Гахов, Ф.Д.* Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. – Минск, 1963. – С. 99.
2. *Русак, В.Н.* Рациональные функции как аппарат приближения / В.Н. Русак. – Минск, 1979. – С. 87.
3. *Русак, В.Н.* Точные порядковые оценки для наилучших рациональных приближений на классах функций, представимых в виде свертки / В.Н. Русак // Математический сборник. – 1985. – Т.128 (170). – № 4. – С. 492–515.

Summary

The article proves that with certain limitations of density the rational approximation of Gilbert's transformation differs from the rational approximation of its density by logarithm multiplier $\ln n$.

Паступіў у рэдакцыю 12.06.2013 г.