УДК 378.016:517.983

В.І. Мататаў,
кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры дыферэнцыяльных раўнанняў і сістэмнага аналізу БДУ;
Н.А. Гурыновіч,
выкладчык кафедры матэматычных і прыродазнаўчых дысцыплін Мінскага дзяржаўнага вышэйшага радыётэхнічнага каледжа;
В.А. Марчанка,
магістрант ММФ БДУ

ДА ПЫТАННЯ АБ ВЫКЛАДАННІ ТЭМЫ: «ФАЗАВЫЯ КРЫВЫЯ ЛІНЕЙНАЙ АДНАРОДНАЙ СІСТЭМЫ ДЫФЕРЭНЦЫЯЛЬНЫХ РАЎНАННЯЎ ДРУГОГА ПАРАДКУ»

Уводзіны. Ва ўніверсітэцкім курсе «Дыферэнцыяльныя раўнанні» разглядаюцца аднародныя дыферэнцыяльныя раўнанні першага парадку (ІІІ семестр). А пазней (у IV семестры) вывучаецца тэма «Фазавыя крывыя лінейнай аднароднай сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў другога парадку». На наш погляд, гэтыя дзве тэмы можна разглядаць адначасова.

Асноўная частка. Разгледзім лінейную сістэму дыферэнцыяльных раўнанняў выгляду

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x + by \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + \partial y, \end{cases} \tag{1}$$

дзе a, b, c, ∂ – сапраўдныя лікі, $a\partial - bc \neq 0$. Сістэму (1) можна запісаць інакш:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

дзе матрыца $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & \partial \end{pmatrix}$. Разам з сістэмай (1) будзем разглядаць і дыферэнцыяльнае раўнанне (ДР)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + \partial y}{ax + by} = \frac{c + \partial \frac{y}{x}}{a + b\frac{y}{x}} = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{2}$$

Будзем даследаваць і будаваць фазавыя крывыя (інакш фазавыя траекторыі) сістэмы (1) [1–3] у наваколлі становішча раўнавагі O(0, 0). Пасля лінейнага пераўтварэння

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} (\det S \neq 0)$$

сістэма (1.1) прымае від

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = S^{-1}AS\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Матрыцу S выбіраем так, каб $S^{-1}AS = J$, дзе J – жарданава нармальная форма матрыцы A. Матрыцу S можна знайсці з матрычнага раўнання $AS = SJ$.

Від фазавых крывых для сістэмы (1) залежыць ад каранёў характарыстычнага раўнання

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & \partial - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Магчымы наступныя выпадкі.

1. Карані λ_1, λ_2 – сапраўдныя, розныя, прычым $\lambda_1\lambda_2 < 0$. Тады становішча раўнавагі O(0, 0) – сядло.
2. Карані λ_1, λ_2 – сапраўдныя, розныя, прычым $\lambda_1\lambda_2 > 0$. Становішча раўнавагі O(0, 0) – вузел, прычым у гэтым выпадку ДР (2) мае дзве інтэгральныя «прамыя».
3. Корань λ_1 мае кратнасць 2. Тады становішча раўнавагі O(0, 0) можа быць альбо вузлом (з адной інтэгральнай «прамой»), альбо дыкрытычным вузлом. У апошнім выпадку праз п. O(0, 0) праходзіць бясконцае мноства інтэгральных «прамых».
4. Карані λ_1, λ_2 – чыста ўяўныя. Становішча раўнавагі O(0, 0) – цэнтр.
5. Карані λ_1, λ_2 – камплексныя ($\lambda_1 = p + qi$, $\lambda_2 = p - qi$, $p \neq 0$). Тады становішча раўнавагі O(0, 0) – фокус.

Заўвага 1. Дыкрытычны вузел будзе тады і толькі тады, калі сістэма мае від

$$\dot{x} = ax, \dot{y} = ay, a \neq 0.$$

Заўвага 2. Выпадкі, калі карані λ_1, λ_2 – сапраўдныя, ахопліваюцца прыкладамі.

Разгледзім больш падрабязна выпадак, калі λ_1, λ_2 – камплексныя лікі.

Заўвага 3. Паколькі $a\partial - bc \neq 0$,то раўнанне (4) не мае нулявых каранёў.

Выпадак 4. Карані раўнання (4) – чыста ўяўныя, гэта значыць, што $\lambda_{1,2} = \pm qi$, $q \in \mathbf{R}$, $q \neq 0$, $i = \sqrt{-1}$. Ад сістэмы (1) пераходзім да лінейнага ДР другога парадку

$$\ddot{x}-(a-\partial)\dot{x}+(a\partial-bc)x=0. \quad (5)$$

Усе яго рашэнні ахопліваюцца формулай

$$x(t)=C_1\cos qt+C_2\sin qt, \quad (6)$$

дзе C_1, C_2 – адвольныя пастаянныя. Паколькі $y=\frac{1}{b}(\dot{x}-ax)$ (гл. сістэму (1)), то для другой кампаненты будзем мець формулу

$$y(t)=\tilde{C}_1\cos qt+\tilde{C}_2\sin qt, \quad (7)$$

дзе $\tilde{C}_1,\tilde{C}_2$ – лінейныя камбінацыі адвольных пастаянных C_1, C_2. З формул (6) і (7) бачым, што $x(t)$ і $y(t)$ – перыядычныя функцыі з адным і тым жа перыядам $T=\frac{2\pi}{q}$.

Дыферынцыяльнае раўнанне (2) – аднароднае. Яно пераходзіць само ў сябе пасля пераўтварэння $x = kX$, $y = kY$, $k \neq 0$. З гэтага выцякае наступнае: інтэгральная крывая аднароднага ДУ (2) пад дзеяннем пераўтварэння $x = kX$, $y = kY$ ($k \neq 0$) пераходзіць у інтэгральную крывую гэтага ж раўнання. Калі адна з інтэгральных крывых ДУ (2) замкнутая, то і ўсе астатнія інтэгральныя крывыя таксама замкнутыя. Няхай для сістэмы (1) пастаўлены ўмовы $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, дзе $|x_0| + |y_0| \neq 0$. З перыядычнасці функцый $x(t)$ і $y(t)$ выцякае, што $x\left(\frac{2\pi}{q}\right)=x_0, y\left(\frac{2\pi}{q}\right)=y_0$. Гэта значыць, што фазавая крывая, якая праходзіць праз п. $M_0(x_0, y_0)$, замкнутая. У гэтым выпадку становішча раўнавагі O(0, 0) – цэнтр. Пакажам, што ўсе фазавыя крывыя ў гэтым выпадку – эліпсы (з агульным цэнтрам у п. O(0, 0)). Выключаючы з раўнанняў (6) і (7) зменную t, атрымаем роўнасць:

$$\frac{(B_0x-A_0y)^2}{(B_0x_0-A_0y_0)^2}+\frac{(y_0x-x_0y)^2}{(A_0y_0-B_0x_0)^2}=1, \quad (8)$$

дзе $A_0=\frac{ax_0+by_0}{q}, B_0=-\frac{q^2x_0+a^2x_0+aby_0}{bq}$.

Відавочна, што раўнанню (8) у плоскасці Oxy адпавядае крывая другога парадку. Раней мы паказалі, што фазавая крывая, якая праходзіць праз п. $M_0(x_0, y_0)$, замкнутая. Вядома, што замкнутая крывая другога парадку – эліпс (у прыватнасці, акружнасць). Такім чынам, усе фазавыя крывыя ў гэтым выпадку – эліпсы з агульным цэнтрам у п. O(0, 0). Напрамак руху пункта па фазавай крывой (пры $t \to +\infty$) вызначаецца з дапамогай вектара хуткасці

$$\bar{v}=(\dot{x},\dot{y})\big|_{(1;0)}=(a;c).$$

Выпадак 5. Карані раўнання (4) – камплексныя ($\lambda_{1,2}=\pm qi, q\in R, q\neq 0, i^2=-1$). У гэтым выпадку ўсе рашэнні сістэмы (1) даюцца формуламі

$$x(t)=e^{pt}(C_1\cos qt+C_2\sin qt); \quad (9)$$

$$y(t)=e^{pt}(\tilde{C}_1\cos qt+\tilde{C}_2\sin qt), \quad (10)$$

дзе $\tilde{C}_1,\tilde{C}_2$ – лінейныя камбінацыі адвольных пастаянных C_1, C_2. Няхай $p < 0$, тады $x \to 0$ і $y \to 0$ пры $t \to +\infty$ (для любых C_1, C_2). У гэтым выпадку O(0, 0) – фокус. Фазавыя крывыя – лагарыфмічныя спіралі. Калі $p < 0$, то спіралі закручваюцца. А калі $p > 0$, то спіралі раскручваюцца.

Прыклад 1. Вызначыць тып становішча раўнавагі сістэмы раўнанняў $\dot{x}=y, \dot{y}=2x+y$ і даследаваць паводзіны фазавых крывых.

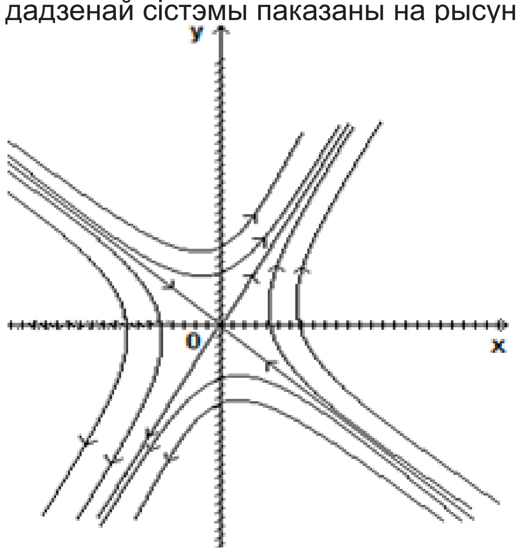
Характарыстычнае раўнанне мае выгляд:

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0\left(\lambda^2-\lambda-2=0\right).$$

Паколькі яго карані $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ – сапраўдныя і маюць розныя знакі, то будзем мець, што O(0, 0) – сядло. Сепаратрысы сядла шукаем у выглядзе $y = kx$. Падставіўшы $y = kx$ у дыферэнцыяльнае раўнанне $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{y}$, атрымаем роўнасць $k=\frac{2+k}{k}$.

Адсюль $k_1 = 2$, $k_2 = -1$. Гэта значыць, $y = 2x$, $y = -x$ – фазавыя «прамыя».

Напрамкі руху пунктаў па фазавым траекторыям вызначаем з дапамогай вектара хуткасці $\bar{v}=(\dot{x},\dot{y})\big|_{(1;0)}=(0;2)$. Фазавыя крывыя для дадзенай сістэмы паказаны на рысунку 1.



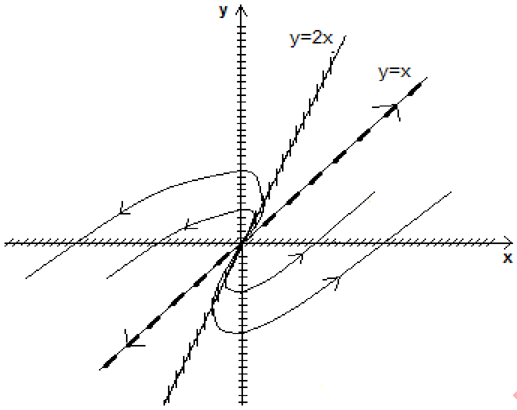
Рысунак 1

Прыклад 2. Вызначыць тып становішча раўнавагі і даследаваць паводзіны фазавых крывых сістэмы раўнанняў $\dot{x}=2x-y, \dot{y}=x$.

Састаўляем і рашаем характарыстычнае раўнанне:

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}=0, \lambda^2-2\lambda+1=0, \lambda_{1,2}=1.$$

Паколькі яго корань мае кратнасць два, то становішча раўнавагі O(0, 0) – выраджаны вузел. Інтэгральныя «прамыя» шукаем у выглядзе $y = kx$ $(x \neq 0)$. Падстаўляючы $y = kx$ у дыферэнцыяльнае раўнанне $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2x-y}$, атрымаем роўнасць $k = \frac{1}{2-k}$. Адсюль $k = 1$. Значыць, $y = x$ $(x > 0)$; $y = x$ $(x < 0)$ – праменевыя траекторыі сістэмы. Напрамкі руху пунктаў па фазавым траекторыям можна вызначыць так: з другога раўнання сістэмы $\dot{y} = x$ вынікае, што ў фазавай паўплоскасці $x > 0$ ардыната фазавага пункта ўзрастае, паколькі $\dot{y}(t) > 0$. Такім чынам, рух пунктаў па фазавым траекторыям адбываецца (пры ўзрастанні часу) ад пункта O(0, 0) (гл. рысунак 2).



Рысунак 2

Прыклад 3. Даследаванне паводзін фазавых крывых сістэмы раўнанняў $\dot{x} = x - y, \dot{y} = 2x - y$.

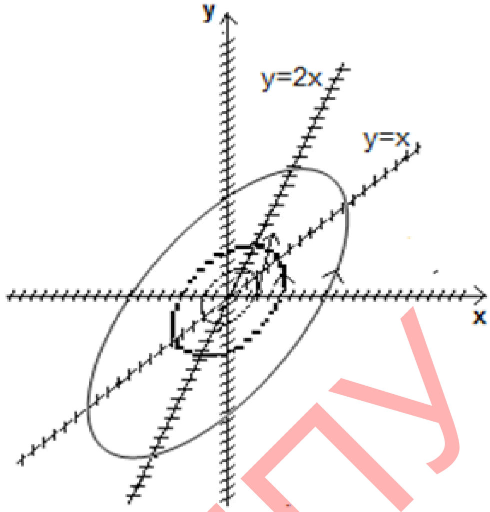
Характарыстычнае раўнанне

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

мае камплексныя карані $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, прычым чыста ўяўныя. Значыць, становішча раўнавагі O(0, 0) – цэнтр. З дыферэнцыяльнага раўнання

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x-y}$$

атрымаем, што $y = 2x$ – 0-ізакліна, а $y = 2x$ – ∞-ізакліна. Напрамкі руху пунктаў па фазавым траекторыям вызначаем з дапамогай вектара хуткасці $\overline{v} = (\dot{x}, \dot{y})\Big|_{(1,0)} = (1,2)$. Фазавыя крывыя для дадзенай сістэмы паказаны на рысунку 3.



Рысунак 3

Прыклад 4. Даследаваць паводзіны фазавых крывых сістэмы раўнанняў

$$\dot{x} = x - y, \dot{y} = x + y.$$

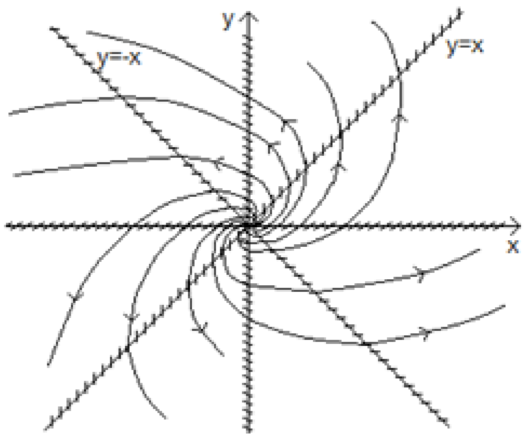
Характарыстычнае раўнанне мае выгляд:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \ \left(\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0\right).$$

Паколькі яго карані $\lambda_1 = 1 + i$, $\lambda_2 = 1 - i$ – камплексныя, то атрымаем, што O(0, 0) – фокус. З дыферэнцыяльнага раўнання $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$ маем: $y = -x$ – 0-ізакліна, а $y = x$ – ∞-ізакліна. Напрамкі руху пунктаў па фазавых крывых вызначаны з дапамогай вектара хуткасці

$$\overline{v} = (\dot{x}, \dot{y})\Big|_{(1,0)} = (1,1).$$

Паколькі $Re\lambda_{1,2} = 1 > 0$, то спіралі раскручваюцца пры $t \to +\infty$ (гл. рысунак 4).



Рысунак 4

Прыклад 5. Рашыць сістэму

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{\cdot} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

і вызначыць тып становішча раўнавагі.

Характарыстычнае раўнанне

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ 1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

мае карані $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -5$. Значыць, становішча раўнавагі O(0, 0) – вузел.

Пасля лінейнага пераўтварэння

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

атрымаем сістэму $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^{\cdot} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

Адсюль $u = C_1e^{-2t}, v = C_2e^{-5t}$, дзе C_1, C_2 – адвольныя пастаянныя. Матрыца S задавальняе матрычнаму раўнанню

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

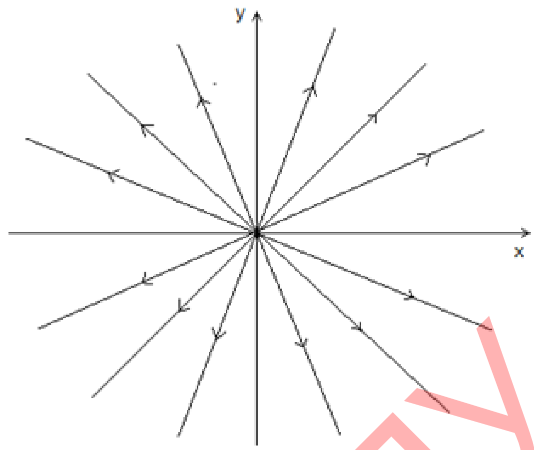
Пасля пэўных падлікаў шукаемая матрыца

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Відавочна, што det$S$ = –3 ≠ 0. Такім чынам, агульнае рашэнне зыходнай сістэмы будзе мець від

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1e^{-2t} \\ C_2e^{-5t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2C_1e^{-2t} + C_2e^{-5t} \\ C_1e^{-2t} - C_2e^{-5t} \end{pmatrix}.$$

Заўвага 4. Для сістэмы $\dot{x} = 2x, \dot{y} = 2y$ пункт O(0, 0) – дыкрытычны вузел. Фазавыя «прамыя» паказаны на рысунку 5.



Рысунак 5

Заключэнне. У артыкуле разгледжаны сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў выгляду $\dot{x} = ax + by, \dot{y} = cx + \partial y$, дзе a, b, c, ∂ – сапраўдныя лікі, прычым $a\partial - bc \neq 0$. Выкарыстоўваючы метад ізаклін, пабудаваны фазавыя крывыя зыходнай сістэмы ў наваколлі становішча раўнавагі O(0, 0). У выпадку камплексных каранёў характарыстычнага раўнання робіцца пераход ад разглядаемай сістэмы да лінейнага дыферэнцыяльнага раўнання другога парадку. Падрабязна паказана, што ў выпадку чыста ўяўных каранёў характарыстычнага раўнання фазавыя крывыя зыходнай сістэмы ўяўляюць сабой эліпсы з агульным цэнтрам у п. O(0, 0).

Літаратура

1. *Степанов, В.В.* Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. – М.: ГИФМЛ. 1958. – С. 468.
2. *Эльсгольц, Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. – М.: Наука, 1969. – С. 424.
3. *Мышкис, А.Д.* Математика для ВТУЗов. Специальные курсы / А.Д. Мышкис. – Наука, 1971. – С. 632.

Summary

The article describes systems of differential equations of the form $\dot{x} = ax + by, \dot{y} = cx + \partial y$, where a, b, c, ∂ are real numbers, with a∂ – bc ≠ 0. Using the method of isoclines, phase curves of the original system near the position of equilibrium O(0, 0) are built. In the case of complex roots of the characteristic equation, transition is made from the considered system to a second-order linear differential equation. It is shown in detail that in the case of purely imaginary roots of the characteristic equation, phase curves of the original system are ellipses with a common centre in O(0, 0).

Паступіў у рэдакцыю 24.11.2013 г.