УДК 512.643

Д.А. Навічкова,
аспірант III года навучання
механіка-матэматычнага факультэта БДУ

РАШЭННЕ МАТРЫЧНЫХ РОЗНАСНЫХ РАЎНАННЯЎ ПЕРШАГА ПАРАДКУ Ў БАНАХАВЫМ МОДУЛІ $l_p^{m\times m}$ І БАНАХАВЫХ АЛГЕБРАХ $l_1^{m\times m}$, $l_{\infty,\lambda}^{m\times m}$ У КАМУТАТЫЎНЫМ ВЫПАДКУ

Уводзіны. Шматлікія даследаванні прысвечаны вывучэнню скалярных розносных раўнанняў са сталымі каэфіцыентамі, пры гэтым звычайна выкарыстоўваецца метад, заснаваны на дыскрэтным пераўтварэнні Лапласа. Больш змястоўныя вынікі могуць быць атрыманы алгебраічным метадам (гл., напрыклад, [1]), які падыходзіць таксама для раўнанняў са зменнымі каэфіцыентамі і заключаецца ў пераўтварэнні зыходнага розноснага раўнання да алгебраічнага раўнання ў некаторай алгебры ці модулі паслядоўнасцей. З дапамогай дадзенага метаду ў [2] рашаецца аднароднае матрычнае розноснае раўнанне першага парадку са зменнымі каэфіцыентамі ў алгебры ўсіх камплексназначных матрычных паслядоўнасцей K_0. Мэтай дадзенага артыкула з'яўляецца знайсці рашэнні разглядаемага ў [2] аднароднага раўнання і адпаведнага яму неаднароднага ў больш вузкіх класах: банахавых алгебрах $l_1^{m\times m}$ і $l_{\infty,\lambda}^{m\times m}$, банахавым модулі $l_p^{m\times m}, 1 < p \le +\infty$.

1. Некаторыя алгебры і модулі паслядоўнасцей. Няхай K_0 – камутатыўнае колца паслядоўнасцей над полем $\mathbb{C}$ выгляду $x = \{x_n\}_{n=0}^{\infty} = \{\underline{x_0}, x_1, \ldots\}$ (падкрэслены элемент стаіць на нулявым месцы). Множанне паслядоўнасцей $x, y \in K_0$ вызначым з дапамогай дыскрэтнай згорткі Лапласа [2]

$$yx = \left\{\sum_{k=0}^{n} y_{n-k} x_k\right\}_{n=0}^{\infty}.$$

Пазначым праз $h = \{\underline{0}, 1, 0, 0, \ldots\} \in K_0$. Тады для кожнага $x \in K_0$ маем

$$hx = xh = \left\{\sum_{k=0}^{n} h_{n-k} x_k\right\}_{n=0}^{\infty} = \{\underline{0}, x_0, x_1, x_2, \ldots\},$$

$$h^n = \underbrace{hh\cdots h}_{n} = \{\underline{0}, \ldots 0, \underset{n}{1}, 0, \ldots\}, n \in \mathbb{N}.$$

Элемент $h^0 = I = \{\underline{1}, 0, 0, \ldots\}$ грае ролю адзінкі колца. Паслядоўнасці з K_0 можна запісаць у выглядзе фармальных ступеневых шэрагаў $x = \{\underline{x_0}, x_1, \ldots, x_n, \ldots\} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n h^n$. Тут маецца на ўвазе толькі зручная форма запісу і пытанне збежнасці не паўстае.

Няхай $\mathbb{C}^{m\times m}$ – мноства сталых $(m\times m)$-матрыц над $\mathbb{C}$. Праз $K_0^{m\times m}$ пазначым мноства матрыц $X = \left[x^{ij}\right]_{i,j=1}^{m}$ з элементамі $X^{ij} \in K_0$. Матрыцы з $K_0^{m\times m}$ уяўляюцца ў выглядзе фармальнага ступеневага шэрагу $X = \sum_{k=0}^{\infty} X_k h^k, X_k \in \mathbb{C}^{m\times m}$. Множанне ў $K_0^{m\times m}$ азначым па правіле $(XY)^{ij} = \sum_{k=1}^{m} x^{ik} y^{kj}$, дзе здабытак $x^{ik} y^{kj} \in K_0$ разумеецца ў сэнсе згорткі.

Побач з K_0 разгледзім алгебру K гіперпаслядоўнасцей – паслядоўнасцей з канечнай колькасцю ненулявых элементаў на месцах з адмоўнымі нумарамі выгляду $x = \{\ldots, 0, \ldots, 0, x_{-r}, x_{-r+1}, \ldots, \underline{x_0}, x_1, \ldots\}$ (падкрэслены элемент стаіць на нулявым месцы) з множаннем у выглядзе дыскрэтнай згорткі Фур'е

$$xy = yx = \left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{n-k} y_k\right\}_{n=-\infty}^{\infty} = \left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} y_{n-k} x_k\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

і адпаведную ёй алгебру $K^{m\times m}$ матрычных гіперпаслядоўнасцей.

Увядзём абазначэнні $\tilde{m}_n(X) = \max_{1\le i,j\le m} \left|x_n^{ij}\right|$, m_α – колькасць розных уласных значэнняў матрыцы α, для

$$|\gamma| < 1 \quad \rho(\gamma,\lambda) = \max\left\{|\gamma|^{\left[\frac{-1-\lambda}{\ln|\gamma|}\right]}\left[\frac{-1-\lambda}{\ln|\gamma|}\right]^{1+\lambda},\right.$$

$$\left.|\gamma|^{\left[\frac{-1-\lambda}{\ln|\gamma|}\right]+1}\left(\left[\frac{-1-\lambda}{\ln|\gamma|}\right]+1\right)^{1+\lambda}\right\}.$$

Азначэнне 1. $X \in l_p^{m\times m}$, калі $\forall i, j = \overline{1,m}$ $x^{ij} \in l_p$.

Азначэнне 2. Паслядоўнасць

$$\tilde{m}(X)=\{\tilde{m}_0(X),\tilde{m}_1(X),\ldots\}$$

назавём мажарантнай паслядоўнасцю для матрыцы $X\in K_0^{m\times m}$.

Норму ў $l_p^{m\times m}$ азначым наступным чынам: $\|X\|_{l_p^{m\times m}}=\|\tilde{m}(X)\|_{l_p}$. Для сталых матрыц $T=\left[t^{ij}\right]_{i,j=1}^{m}\in\mathbb{C}^{m\times m}$ прымем $\|T\|=\max\limits_{1\le i,j\le m}|t^{ij}|$.

Няхай $X\in l_p^{m\times m}, Y\in l_1^{m\times m}, T\in\mathbb{C}^{m\times m}$. Тады $TX,XT,XY,YX\in l_p^{m\times m}$ і

$$\|XT\|_{l_p^{m\times m}}=\|TX\|_{l_p^{m\times m}}\le m\|T\|\|X\|_{l_p^{m\times m}},$$

$$\|XY\|_{l_p^{m\times m}}=\|YX\|_{l_p^{m\times m}}\le m\|Y\|_{l_1^{m\times m}}\|X\|_{l_p^{m\times m}}.$$

Мноства $l_1^{m\times m}$ – банахава алгебра, $l_p^{m\times m}$ – левы (і правы) банахаў модуль над алгебрай $l_1^{m\times m}$.

У [3] азначана банахава адносна згорткі (1) алгебра $l_{\infty,\lambda}$, $\lambda\in(0;1]$, – падмноства K_0 такое, што $\forall x\in l_{\infty,\lambda}\ \exists A>0:|x_k|k^{1+\lambda}\le A$. Норма ў $l_{\infty,\lambda}$ задаецца наступным чынам:

$$\|x\|_{l_{\infty,\lambda}}=\sum_{k=0}^{\infty}|x_k|+\sup_k|x_k|k^{1+\lambda}.$$

Азначэнне 3. $X\in l_{\infty,\lambda}^{m\times m}$, калі $\forall i,j=\overline{1,m}\ x^{ij}\in l_{\infty,\lambda}$. Нормай матрыцы X у гэтым выпадку будзем называць лік $\|X\|_{l_{\infty,\lambda}^{m\times m}}=\|\tilde{m}(X)\|_{l_{\infty,\lambda}}$.

Тэарэма 2. Няхай $X,Y\in l_{\infty,\lambda}^{m\times m}, T\in\mathbb{C}^{m\times m}$. Тады $XY,YX,TX,XT\in l_{\infty,\lambda}^{m\times m}$ і

$$\|XT\|_{l_{\infty,\lambda}^{m\times m}}=\|TX\|_{l_{\infty,\lambda}^{m\times m}}\le m\|T\|\|X\|_{l_{\infty,\lambda}^{m\times m}},$$

$$\|XY\|_{l_{\infty,\lambda}^{m\times m}}=\|YX\|_{l_{\infty,\lambda}^{m\times m}}\le mC(\lambda)\|X\|_{l_{\infty,\lambda}^{m\times m}}\|Y\|_{l_{\infty,\lambda}^{m\times m}},$$

дзе $C(\lambda)=3+2^{2+\lambda}\zeta(1+\lambda)$, $\zeta(\lambda)$ – дзэта-функцыя Рымана [3].

Сцверджанне 1. Калі $X\in\mathbb{C}^{m\times m}$ мае простую структуру і $TXT^{-1}=\mathrm{diag}[\alpha_1,\ldots,\alpha_m]$, дзе

$$T\in\mathbb{C}^{m\times m},\alpha_1,\ldots,\alpha_m\ge 0$$

цэлыя, не абавязкова розныя, тады

$$h^X=T^{-1}\mathrm{diag}\left[h^{\alpha_1},\ldots,h^{\alpha_m}\right]T\in l_{\infty,\lambda}^{m\times m} \text{ і}$$

$$\|h^X\|_{l_{\infty,\lambda}^{m\times m}}\le m^2\left(m_\alpha+\left(\max_{k=\overline{1,m}}\alpha_k\right)^{1+\lambda}\right)\|T^{-1}\|\|T\|.$$

Сцверджанне 2. Калі $X\in\mathbb{C}^{m\times m}$, то $e^{Xh}\in l_{\infty,\lambda}^{m\times m}$ і мае месца ацэнка

$$\|e^{Xh}\|_{l_{\infty,\lambda}^{m\times m}}\le\left(1-\frac{1}{m}\right)+\frac{1}{m}\exp(m\|X\|).$$

Тэарэма 3. Аператар алгебраічнага інтэгравання непарыўны ў банахавай алгебры $l_{\infty,\lambda}^{m\times m}$ і банахавым модулі $l_p^{m\times m}$, і маюць месца ацэнкі

$$\left\|\int X\right\|_{l_p^{m\times m}}\le\|X\|_{l_p^{m\times m}},\ \left\|\int X\right\|_{l_{\infty,\lambda}^{m\times m}}\le\left(1+2^{\lambda}\right)\|X\|_{l_{\infty,\lambda}^{m\times m}}.$$

Побач з алгебрамі $l_{\infty,\lambda}^{m\times m}, l_1^{m\times m}$ і модулем $l_p^{m\times m}$ разгледзім іх пашырэнні: алгебры $\tilde{l}_{\infty,\lambda}^{m\times m},\tilde{l}_1^{m\times m}$ і модуль $\tilde{l}_p^{m\times m}$ матрычных гіперпаслядоўнасцей – элементаў з $K^{m\times m}$. Дадзеныя алгебры і модуль з'яўляюцца дапаможнымі для знаходжання рашэнняў матрычных рознасных раўнанняў і некаторых ацэнак норм рашэнняў. Сутнасць алгебраічнага метаду рашэння заключаецца ў тым, што рознасныя раўнанні зводзяцца да алгебраічных дыферэнцыяльных раўнанняў у дадзеных пашыраных алгебрах і модулі, а атрыманыя там рашэнні будуць належаць насамрэч зыходным прасторам $l_{\infty,\lambda}^{m\times m}, l_1^{m\times m}$ і $l_p^{m\times m}$ пры накладанні некаторых умоў на каэфіцыенты раўнанняў.

Тэарэма 4. Няхай

$$X\in\tilde{l}_p^{m\times m},Y\in\tilde{l}_1^{m\times m},T\in\mathbb{C}^{m\times m}.$$

Тады

$$TX,XT,XY,YX\in\tilde{l}_p^{m\times m},$$

$$\|XY\|_{\tilde{l}_p^{m\times m}}=\|YX\|_{\tilde{l}_p^{m\times m}}\le m\|Y\|_{\tilde{l}_1^{m\times m}}\|X\|_{\tilde{l}_p^{m\times m}}.$$

$$\|XT\|_{\tilde{l}_p^{m\times m}}=\|TX\|_{\tilde{l}_p^{m\times m}}\le m\|T\|\|X\|_{\tilde{l}_p^{m\times m}}.$$

Сцверджанне 3. Калі

$$X\in\mathbb{C}^{m\times m},TXT^{-1}=\mathrm{diag}[\alpha_1,\ldots,\alpha_m]=\alpha,$$

дзе $T\in\mathbb{C}^{m\times m},\alpha_1,\ldots,\alpha_m\in\mathbb{Z}$ не абавязкова розныя, тады

$$h^X=T^{-1}\mathrm{diag}\left[h^{\alpha_1},\ldots,h^{\alpha_m}\right]T\in\tilde{l}_1^{m\times m},\in\tilde{l}_{\infty,\lambda}^{m\times m},$$

$$\|h^X\|_{\tilde{l}_{\infty,\lambda}^{m\times m}}\le m^2\left(m_\alpha+\left(\max_{k=\overline{1,m}}|\alpha_k|\right)^{1+\lambda}\right)\|T^{-1}\|\|T\|,$$

$$\|h^X\|_{\tilde{l}_1^{m\times m}}\le m^2m_\alpha\|T^{-1}\|\|T\|.$$

Тэарэма 5. Няхай

$$X\in\tilde{l}_{\infty,\lambda}^{m\times m},Y\in\tilde{l}_{\infty,\lambda}^{m\times m},T\in\mathbb{C}^{m\times m}.$$

Тады

$$TX,XT,XY,YX\in\tilde{l}_{\infty,\lambda}^{m\times m},$$

$$\|XY\|_{\tilde{l}_{\infty,\lambda}^{m\times m}}=\|YX\|_{\tilde{l}_{\infty,\lambda}^{m\times m}}\le m\tilde{C}(\lambda)\|Y\|_{\tilde{l}_{\infty,\lambda}^{m\times m}}\|X\|_{\tilde{l}_{\infty,\lambda}^{m\times m}},$$

$$\|XT\|_{\tilde{l}_{\infty,\lambda}^{m\times m}}=\|TX\|_{\tilde{l}_{\infty,\lambda}^{m\times m}}\le m\|T\|\|X\|_{\tilde{l}_{\infty,\lambda}^{m\times m}},$$

дзе $\tilde{C}(\lambda)=3+\left(2^{2+\lambda}+2\right)\zeta(1+\lambda)$, $\zeta(\lambda)$ – дзэта-функцыя Рымана.

2. Прыналежнасць да $l_1^{m\times m}$ і $l_{\infty,\lambda}^{m\times m}$ матрычнай паслядоўнасці $(E+\gamma h)^\beta$, ацэнкі норм.

Разгледзім спачатку паслядоўнасці

$$\ln(I+\gamma h)=\gamma h-\frac{\gamma^2}{2}h^2+\frac{\gamma^3}{3}h^3-\cdots,$$

$$(I+\gamma h)^\beta=I+\beta\gamma h+\frac{\beta(\beta-1)}{2!}\gamma^2h^2+\cdots+$$
$$+\frac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-n+1)}{n!}\gamma^n h^n+\cdots,\text{ дзе } \beta\in\mathbb{R}.$$

Сцверджанне 4.

1. Калі $|\gamma|<1$, тады $\ln(I+\gamma h)\in l_{\infty,\lambda}, l_1$ і спраўджваюцца ацэнкі

$$\|\ln(I+\gamma h)\|_{l_1}\le\ln\frac{1}{1-|\gamma|},$$

$$\|\ln(I+\gamma h)\|_{l_{\infty,\lambda}}\le\ln\frac{1}{1-|\gamma|}+\rho(\gamma,\lambda-1).$$

Да таго ж $\forall\beta$ $(I+\gamma h)^\beta\in l_{\infty,\lambda}, l_1$ і ў залежнасці ад значэнняў β спраўджваюцца формулы:

1.1. Калі $\beta\in\mathbb{N}_0$, то

$$(I+\gamma h)^\beta=\sum_{k=0}^{\beta}C_\beta^k\gamma^k h^k, \tag{2}$$

$$\|(I+\gamma h)^\beta\|_{l_1}\le(1+|\gamma|)^\beta,$$
$$\|(I+\gamma h)^\beta\|_{l_{\infty,\lambda}}\le(1+|\gamma|)^\beta+\max_{k=\overline{1,\beta}}|C_\beta^k\gamma^k|k^{1+\lambda}. \tag{3}$$

1.2. Калі $\beta\in\mathbb{N}^-$, то

$$(I+\gamma h)^\beta=\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\gamma^k h^k\right)^{-\beta},$$

$$\|(I+\gamma h)^\beta\|_{l_1}\le(1-|\gamma|)^\beta, \tag{4}$$

$$\|(I+\gamma h)^\beta\|_{l_{\infty,\lambda}}\le C^{-\beta-1}(\lambda)\left(\frac{1}{1-|\gamma|}+\rho(\gamma,\lambda)\right)^{-\beta}.$$

1.3. Калі $0<|\beta|<1$, то

$$(I+\gamma h)^\beta=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-k+1)}{k!}\gamma^k h^k, \tag{5}$$

$$\|(I+\gamma h)^\beta\|_{l_1}\le\frac{1}{1-|\gamma|},$$
$$\|(I+\gamma h)^\beta\|_{l_{\infty,\lambda}}\le\frac{1}{1-|\gamma|}+\rho(\gamma,\lambda). \tag{6}$$

1.4. Калі $\beta<-1, \beta\notin\mathbb{N}^-$, то $(I+\gamma h)^\beta$ вызначаецца па формуле (5) і

$$\|(I+\gamma h)^\beta\|_{l_1}\le(1+|\gamma|)^{[\beta]}(1-|\gamma|)^{-1},$$
$$\|(I+\gamma h)^\beta\|_{l_{\infty,\lambda}}\le C(\lambda)\Big((1+|\gamma|)^{[\beta]}+ \tag{7}$$
$$+\max_{k=\overline{1,[\beta]}}|C_{[\beta]}^k\gamma^k|k^{1+\lambda}\Big)\left(\frac{1}{1-|\gamma|}+\rho(\gamma,\lambda)\right).$$

1.5. Калі $\beta<-1, \beta\notin\mathbb{N}^-$, то $(I+\gamma h)^\beta$ вызначаецца па формуле (5) і

$$\|(I+\gamma h)^\beta\|_{l_1}\le(1-|\gamma|)^{[\beta]-1},$$
$$\|(I+\gamma h)^\beta\|_{l_{\infty,\lambda}}\le C^{-[\beta]}(\lambda)\left(\frac{1}{1-|\gamma|}+\rho(\gamma,\lambda)\right)^{1-[\beta]}. \tag{8}$$

2. Калі $|\gamma|>1, \beta\in\mathbb{N}_0$, то $(I+\gamma h)^\beta\in l_{\infty,\lambda}, l_1$ і спраўджваюцца формулы (2), (3).
Для $\forall\beta\notin\mathbb{N}_0$ $(I+\gamma h)^\beta\notin l_{\infty,\lambda}, l_1$.

3. Няхай $|\gamma|=1$. Пры $\beta<0$ $(I+\gamma h)^\beta\notin l_{\infty,\lambda}, l_1$.

3.1. Калі $\beta\in\mathbb{N}_0$, то $(I+\gamma h)^\beta\in l_{\infty,\lambda}, l_1$ і спраўджваюцца формулы (2), (3).

3.2. Калі $0<\beta<\gamma$, $\beta\ne0$, то $(I+\gamma h)^\beta\in l_1$, маюць месца (5), (6), $(I+\gamma h)^\beta\notin l_{\infty,\lambda}$.

3.3. Для $\beta\ge\gamma$, $\beta\notin\mathbb{N}_0$, $(I+\gamma h)^\beta\in l_{\infty,\lambda}, l_1$ і вызначаецца па формуле .

Няхай матрыцы $\gamma,\beta\in\mathbb{C}^{m\times m}$ перастаўляльныя, β_1, ... $\beta_q\in\mathbb{R}$ – уласныя значэнні матрыцы β кратнасцей m_1, ... m_q адпаведна, γ_1, ... γ_ν – уласныя значэнні матрыцы γ кратнасцей l_1, ... l_ν адпаведна. Карыстаючыся асноўнай формулай, прыведзенай для азначэння функцый ад матрыц ([4, с. 90]), і сцверджаннем 4, атрымаем неабходныя і дастатковыя ўмовы на ўласныя значэнні матрыц γ, β, пры якіх $(E+\gamma h)^\beta\in l_1^{m\times m}, l_{\infty,\lambda}^{m\times m}$, і знойдзем адпаведныя ацэнкі норм.

Тэарэма 6. Матрычная паслядоўнасць $(E+\gamma h)^\beta\in l_1^{m\times m}$ ці $l_{\infty,\lambda}^{m\times m}$ $\forall\beta$: $\beta_1,\ldots,\beta_q\in\mathbb{R}$ тады і толькі тады, калі $\forall j=\overline{1,\nu}$ $|\gamma_j|<1$, пры гэтым спраўджваецца формула

$$(E+\gamma h)^\beta=\sum_{k=1}^{q}(E+\gamma h)^{\beta_k}\big(Z_{k1}+\ln(E+\gamma h)Z_{k2}+\cdots+$$
$$+\ln^{m_k-1}(E+\gamma h)Z_{km_k}\big),$$

дзе

$$\ln(E+\gamma h)=\sum_{j=1}^{\nu}\Bigg(\ln(I+\gamma_j h)U_{j1}+\frac{h}{I+\gamma_j h}U_{j2}+\cdots+$$

$$+\frac{(-1)^{l_j}h^{l_j-1}}{(I+\gamma_j h)^{l_j-1}}U_{jl_j}\Bigg),$$

$$(E+\gamma h)^{\beta_k}=\sum_{j=1}^{v}\Bigg((I+\gamma_j h)^{\beta_k}U_{j1}+$$

$$+\sum_{\omega=2}^{l_j}\prod_{t=0}^{\omega-2}(\beta_k-t)h^{\omega-1}(I+\gamma_j h)^{\beta_k-\omega+1}U_{j\omega}\Bigg),$$

$\forall j=\overline{1,v},\ i=\overline{1,l_j},\ \xi=\overline{1,m_k},\ k=\overline{1,q},\ U_{ji},\ Z_{k\xi}$ – далучаныя лікавыя матрыцы ([4, с. 90]). Маюць месца ацэнкі норм:

$$\left\|(E+\gamma h)^{\beta}\right\|_{l_1^{m\times m}}\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{q}m\left\|(E+\gamma h)^{\beta_k}\right\|_{l_1^{m\times m}}\sum_{\sigma=1}^{m_k}m^{\sigma-1}\left\|\ln(E+\gamma h)\right\|_{l_1^{m\times m}}^{\sigma-1}\left\|Z_{k\sigma}\right\|, \quad (9)$$

дзе

$$\left\|\ln(E+\gamma h)\right\|_{l_1^{m\times m}}\le\sum_{j=1}^{v}\Bigg(\ln\frac{1}{1-|\gamma_j|}\left\|U_{j1}\right\|+$$

$$+\frac{1}{1-|\gamma_j|}\left\|U_{j2}\right\|+\dots+\frac{1}{(1-|\gamma_j|)^{l_j-1}}\left\|U_{jl_j}\right\|\Bigg),$$

$$\left\|(E+\gamma h)^{\beta_k}\right\|_{l_1^{m\times m}}\le\sum_{j=1}^{v}\Bigg(\left\|(I+\gamma_j h)^{\beta_k}\right\|_{l_1}\left\|U_{j1}\right\|+$$

$$+\sum_{\omega=2}^{l_j}\prod_{t=0}^{\omega-2}|\beta_k-t|\left\|(I+\gamma_j h)^{\beta_k-\omega+1}\right\|_{l_1}\left\|U_{j\omega}\right\|\Bigg),$$

а $\left\|(I+\gamma_j h)^{\beta_k+t}\right\|_{l_1}$, $t=\overline{0,1-l_j}$, вылічваюцца па формулах (3)–(4), (6)–(8) у залежнасці ад канкрэтных значэнняў β_k:

$$\left\|(E+\gamma h)^{\beta}\right\|_{l_{\infty,\lambda}^{m\times m}}\le\sum_{k=1}^{q}m\left\|(E+\gamma h)^{\beta_k}\right\|_{l_{\infty,\lambda}^{m\times m}}\times$$

$$\times\sum_{\sigma=1}^{m_k}(mC(\lambda))^{\sigma-1}\left\|\ln(E+\gamma h)\right\|_{l_1^{m\times m}}^{\sigma-1}\left\|Z_{k\sigma}\right\|, \quad (10)$$

$$\left\|\ln(E+\gamma h)\right\|_{l_{\infty,\lambda}^{m\times m}}\le$$

$$\le\sum_{j=1}^{v}\Bigg(\Big(\ln\frac{1}{1-|\gamma_j|}+\rho(\gamma_j,\lambda-1)\Big)\left\|U_{j1}\right\|+$$

$$+\sum_{t=2}^{l_j}\Big(\frac{1}{1-|\gamma_j|}+\rho(\gamma_j,\lambda)\Big)^{t-1}\left\|U_{jt}\right\|\Bigg),$$

$$\left\|(E+\gamma h)^{\beta_k}\right\|_{l_{\infty,\lambda}^{m\times m}}\le\sum_{j=1}^{v}\Bigg(\left\|(I+\gamma_j h)^{\beta_k}\right\|_{l_{\infty,\lambda}}\left\|U_{j1}\right\|+$$

$$+\sum_{\omega=2}^{l_j}\prod_{t=0}^{\omega-2}|\beta_k-t|\left\|(I+\gamma_j h)^{\beta_k-\omega+1}\right\|_{l_{\infty,\lambda}}\left\|U_{j\omega}\right\|\Bigg),$$

дзе $\left\|(I+\gamma_j h)^{\beta_k+t}\right\|_{l_{\infty,\lambda}}$, $t=\overline{0,1-l_j}$ вылічваюцца па формулах (3)–(4), (6)–(8) – у залежнасці ад канкрэтных значэнняў β_k.

3. Аднароднае раўнанне. Разгледзім матрычнае рознаснае раўнанне першага парадку

$$(An+B)X_{n+1}+(Mn+L)X_n=0,\ n=0,1,\dots, \quad (11)$$

дзе A, B, M, L – папарна камутуючыя матрыцы з $\mathbb{C}^{m\times m}$, $\exists A^{-1}$, $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ – невядомая матрыца-паслядоўнасць. Зададзім пачатковую ўмову X_0 = 0. Рашэнне будзем шукаць у алгебрах $l_1^{m\times m}$ і $l_{\infty,\lambda}^{m\times m}$. Няхай $\exists T\in\mathbb{C}^{m\times m}$: $\alpha=E-A^{-1}B=T^{-1}\mathrm{diag}\left[h^{\alpha_1},\dots,h^{\alpha_m}\right]T$, усе $\alpha_k\ge1$ цэлыя (не абавязкова розныя).

Тэарэма 7. Няхай уласныя значэнні матрыцы $\beta=A^{-1}B-M^{-1}L-E$ $\beta_1,\dots,\beta_q\in\mathbb{R}$, $\gamma_1,\dots,\gamma_v$ – уласныя значэнні матрыцы $\gamma=A^{-1}M$.

1. Калі M = 0, то формула

$$X=h^{E-A^{-1}B}\left(\exp\left(-A^{-1}Lh\right)\right)C,$$

дзе $C\in\mathbb{C}^{m\times m}$ тут і надалей адвольная, дае рашэнне раўнання ў $l_1^{m\times m}$ і $l_{\infty,\lambda}^{m\times m}$,

$$\left\|X\right\|_{l_1^{m\times m}}\le m^3m_\alpha\left\|T^{-1}\right\|\left\|T\right\|\left\|C\right\|\left(m-1+\exp\left(m\left\|A^{-1}L\right\|\right)\right),$$

$$\left\|X\right\|_{l_{\infty,\lambda}^{m\times m}}\le m^4C(\lambda)\left\|C\right\|\Big(m_\alpha+\big(\max_{k=\overline{1,m}}\alpha_k\big)^{1+\lambda}\Big)\left\|T^{-1}\right\|\left\|T\right\|\times$$

$$\times\left(\left(1-\frac{1}{m}\right)+\frac{1}{m}\exp\left(m\left\|A^{-1}L\right\|\right)\right).$$

2. Калі $M\neq0$, калі $\forall j=\overline{1,v}$ $|\gamma_j|<1$, то рашэнне раўнання (11) у $l_1^{m\times m}$ і $l_{\infty,\lambda}^{m\times m}$ існуе і мае выгляд

$$X=h^{\alpha}(E+\gamma h)^{\beta}C.$$

$$\left\|X\right\|_{l_1^{m\times m}}\le m^4m_\alpha\left\|C\right\|\left\|T^{-1}\right\|\left\|T\right\|\left\|(E+\gamma h)^{\beta}\right\|_{l_1^{m\times m}},$$

$$\left\|X\right\|_{l_{\infty,\lambda}^{m\times m}}\le m^4C(\lambda)\Big(m_\alpha+\big(\max_{k=\overline{1,m}}\alpha_k\big)^{1+\lambda}\Big)\times$$

$$\times\left\|C\right\|\left\|T^{-1}\right\|\left\|T\right\|\left\|(E+\gamma h)^{\beta}\right\|_{l_{\infty,\lambda}^{m\times m}},$$

ацэнкі $\left\|(E+\gamma h)^{\beta}\right\|_{l_1^{m\times m}}$ і $\left\|(E+\gamma h)^{\beta}\right\|_{l_{\infty,\lambda}^{m\times m}}$ удакладняюцца формуламі (9)–(10), у залежнасці ад канкрэтных значэнняў β_k.

4. Неаднароднае раўнанне. Разгледзім неаднароднае матрычнае рознаснае раўнанне першага парадку

$$(An+B)X_{n+1}+(Mn+L)X_n=Y_n,\ n=0,1,\dots, \quad (12)$$

дзе A, B, M, L – папарна камутуючыя матрыцы з $\mathbb{C}^{m\times m}$, $\exists A^{-1}$, $X=\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ – невядомая матрыца-паслядоўнасць з пачатковай умовай X_0. Рашэнне будзем шукаць у алгебры $l_{\infty,\lambda}^{m\times m}$ і модулі $l_p^{m\times m}$. $Y=\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ – зададзеная матрыца-паслядоўнасць з адпаведных прастор.

Тэарэма 8. Няхай матрыца

$$\alpha = E - A^{-1}B = T^{-1}\mathrm{diag}\left[h^{\alpha_1},\ldots,h^{\alpha_m}\right]T,$$

дзе $T\in\mathbb{C}^{m\times m}$, і яе ўласныя значэнні $ak\le -1$, уласныя значэнні матрыцы $\beta = A^{-1}B - M^{-1}L - E$ $\beta_1,\ldots,\beta_q\in\mathbb{R}$. Вылучаюцца наступныя выпадкі:

1.1. $M = 0$, $A = B$. Рашэнне раўнання з пачатковай умовай X_0 у банахавым модулі $l_p^{m\times m}$ і банахавай алгебры $l_{\infty,\lambda}^{m\times m}$ мае выгляд

$$X = e^{-A^{-1}Lh}\left(X_0 + A^{-1}\int\left(Ye^{A^{-1}Lh}\right)\right).$$

$$\|X\|_{l_p^{m\times m}} \le \left(m-1+\exp\left(m\|A^{-1}L\|\right)\right)\left(\|X_0\|+\right.$$

$$\left.+m\|A^{-1}\|\|Y\|_{l_p^{m\times m}}\left(m-1+\exp\left(m\|A^{-1}L\|\right)\right)\right),$$

$$\|X\|_{l_{\infty,\lambda}} \le C(\lambda)\left(m-1+e^{m\|A^{-1}L\|}\right)\left(\|X_0\|+\right.$$

$$\left.+m\|A^{-1}\|\left(1+2^{\lambda}\right)C(\lambda)\left(m-1+e^{m\|A^{-1}L\|}\right)\|Y\|_{l_{\infty,\lambda}}\right).$$

1.2. $M = 0$, $A \ne B$. Рашэнне раўнання з пачатковай умовай X_0 у банахавым модулі $l_p^{m\times m}$ і банахавай алгебры $l_{\infty,\lambda}^{m\times m}$ мае выгляд

$$X=h^{E-A^{-1}B}e^{-A^{-1}Lh}\int\left(A^{-1}Y-s\left(E-A^{-1}B\right)X_0\right)h^{A^{-1}B-E}e^{A^{-1}Lh},$$

$$\|X\|_{l_p^{m\times m}} \le m^6 m_\alpha^2\|T^{-1}\|^2\|T\|^2\left(m-1+e^{m\|A^{-1}L\|}\right)^2\times$$

$$\times\left(m\|A^{-1}\|\|Y\|_{l_p^{m\times m}}+\|\left(E-A^{-1}B\right)X_0\|\right),$$

$$\|X\|_{l_{\infty,\lambda}^{m\times m}} \le C^2(\lambda)\widetilde{C}(\lambda)\left(1+2^{\lambda}\right)m^6\|T^{-1}\|^2\|T\|^2\times$$

$$\times\left(m-1+e^{m\|A^{-1}L\|}\right)^2\left(m_\alpha+\left(\max_{k=1,m}|\alpha_k|\right)^{1+\lambda}\right)^2\times$$

$$\times\left(mC(\lambda)\|A^{-1}\|\|Y\|_{l_{\infty,\lambda}^{m\times m}}+\|\left(E-A^{-1}B\right)X_0\|\right).$$

2.1. $M\ne 0$, $A = B$, усе уласныя значэнні матрыцы $\gamma = A^{-1}M$ $|\gamma_k|<1$. Рашэнне раўнання з пачатковай умовай X_0 у банахавым модулі $l_p^{m\times m}$ і банахавай алгебры $l_{\infty,\lambda}^{m\times m}$ мае выгляд

$$X = \left(I + A^{-1}Mh\right)^{\beta}\left(X_0 + A^{-1}\int Y\left(I + A^{-1}Mh\right)^{-\beta-E}\right),$$

$$\|X\|_{l_p^{m\times m}} \le m\left\|\left(I+A^{-1}Mh\right)^{\beta}\right\|_{l_1^{m\times m}}\left(\|X_0\|+\right.$$

$$\left.+m^2\|A^{-1}\|\left\|\left(I+A^{-1}Mh\right)^{-\beta-E}\right\|_{l_1^{m\times m}}\|Y\|_{l_p^{m\times m}}\right),$$

$$\|X\|_{l_{\infty,\lambda}^{m\times m}} \le mC(\lambda)\left\|\left(I+A^{-1}Mh\right)^{\beta}\right\|_{l_{\infty,\lambda}^{m\times m}}\left(\|X_0\|+\right.$$

$$\left.+m^2C(\lambda)\left(1+2^{\lambda}\right)\|A^{-1}\|\left\|\left(I+A^{-1}Mh\right)^{-\beta-E}\right\|_{l_{\infty,\lambda}^{m\times m}}\|Y\|_{l_{\infty,\lambda}^{m\times m}}\right).$$

Ацэнкі ўдакладняюцца формуламі (9)–(10).

2.2. $M\ne 0$, $A\ne B$, усе уласныя значэнні матрыцы $\gamma = A^{-1}M$ $|\gamma_k|<1$. Рашэнне раўнання з пачатковай умовай X_0 у банахавым модулі $l_p^{m\times m}$ і банахавай алгебры $l_{\infty,\lambda}^{m\times m}$ мае выгляд

$$X = h^{E-A^{-1}B}\left(I + A^{-1}Mh\right)^{\beta}A^{-1}\times$$

$$\times\int\left(\left(B-A\right)X_0h^{A^{-1}B-2E}+Yh^{A^{-1}B-E}\right)\left(I+A^{-1}Mh\right)^{-\beta-E},$$

$$\|X\|_{l_p^{m\times m}} \le m^9m_\alpha^2\|T^{-1}\|^2\|T\|^2\|A^{-1}\|\left\|\left(I+A^{-1}Mh\right)^{\beta}\right\|_{l_1^{m\times m}}\times$$

$$\times\left\|\left(I+A^{-1}Mh\right)^{-\beta-E}\right\|_{l_1^{m\times m}}\left(\|\left(B-A\right)X_0\|+\|Y\|_{l_p^{m\times m}}\right),$$

$$\|X\|_{l_{\infty,\lambda}^{m\times m}} \le m^9C^2(\lambda)\widetilde{C}(\lambda)\left(1+2^{\lambda}\right)\|T^{-1}\|^2\|T\|^2\|A^{-1}\|\times$$

$$\times\left(m_\alpha+\left(\max_{k=1,m}|\alpha_k|\right)^{1+\lambda}\right)\left\|\left(I+A^{-1}Mh\right)^{\beta}\right\|_{l_{\infty,\lambda}^{m\times m}}\times$$

$$\times\left(\|\left(B-A\right)X_0\|\left(m_\alpha+\left(\max_{k=1,m}|\alpha_k+1|\right)^{1+\lambda}\right)+\right.$$

$$\left.+C(\lambda)\|Y\|_{l_{\infty,\lambda}^{m\times m}}\left(m_\alpha+\left(\max_{k=1,m}|\alpha_k|\right)^{1+\lambda}\right)\right)\left\|\left(I+A^{-1}Mh\right)^{-\beta-E}\right\|_{l_{\infty,\lambda}^{m\times m}}.$$

Вынікі. У артыкуле дадзены агульныя рашэнні аднароднага і неаднароднага рознасных матрычных раўнанняў першага парадку са зменнымі каэфіцыентамі ў алгебрах $l_1^{m\times m}$, $l_{\infty,\lambda}^{m\times m}$ і модулі $l_p^{m\times m}$. Прыведзены ацэнкі норм рашэнняў.

Літаратура

1. *Васильев, И.Л.* Разностные уравнения первого порядка с переменными коэффициентами в банаховых модулях последовательностей / И.Л. Васильев, Д.А. Новичкова // Докл. НАН Беларуси. – 2012. – № 2. – Т. 56. – С. 5–9.
2. *Васільеў, І.Л.* Матрычнае аднароднае рознаснае раўнанне першага парадку са зменнымі каэфіцыентамі ў камутатыўным выпадку / І.Л. Васільеў, Д.А. Навічкова // Вестн. БГУ. Серыя 1. – 2014. – № 1. – С. 83–87.
3. *Васільеў, І.Л.* Рознасныя раўнанні першага парадку ў банахавай алгебры / І.Л. Васільеў, Д.А. Навічкова // Докл. НАН Беларуси. – 2013. – № 3. – Т. 57. – С. 22–26.
4. *Гантмахер, Ф.Р.* Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: ГИТТЛ, 1954. – С. 492.

Summary

The solutions of homogeneous and heteroogeneous difference matrix first order equations with variable coefficients in commutative case in Banach algebras $l_1^{m\times m}$ and $l_{\infty,\lambda}^{m\times m}$, Banach module $l_p^{m\times m}$ are given in the article. The solutions norms evaluations are given.

Поступила в редакцию 11.04.2014 г.