МАТЭМАТЫКА

УДК 517.9

У.А. Шылінец,
кандыдат фізіка-матэматычных навук,
дэкан матэматычнага факультэта БДПУ;

Ж.С. Топаль,
студэнт V курса матэматычнага факультэта БДПУ

РАШЭННЕ АДНОЙ КАНАНІЧНАЙ СІСТЭМЫ ДЫФЕРЭНЦЫЯЛЬНЫХ РАЎНАННЯЎ ПРЫ ДАПАМОЗЕ F-МАНАГЕННЫХ ФУНКЦЫЙ

Уводзіны. Разгледзім бікамплексныя лікі $a + bj$ ($j^2 = -1$), прычым a і b з'яўляюцца не толькі рэчаіснымі, але і любымі камплекснымі лікамі. Модуль бікамплекснага ліку $a + bj$ вызначым роўнасцю выгляду

$$|a + bj| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2} \geq 0,$$

адкуль $|a| \leq |a + bj$, $|b| \leq |a + bj|$, і для любых двух бікамплексных лікаў α і β маем $|\alpha \cdot \beta| \leq l\,|\alpha| \cdot |\beta|$, дзе $l \geq 1$ [1–2]. У далейшым праз l будзем абазначаць толькі гэту канстанту.

Няхай $C^2(D)\,(C^2(D,B))$ – клас рэчаісных або камплексных (бікамплексных) дважды непарыўна дыферэнцавальных у абсягу D функцый ад x, y. Абазначаем у далейшым праз $A(p,q,D,B)\,(A(p,q,D,K))$ клас усіх бікамплексных (камплексных) функцый ад x, y, аналітычных ад p і q у абсягу D, дзе $p = p(x,y)$, $q = q(x,y)$ – дадзеныя функцыі класа $C^2(D)$, прычым $\delta = p'_x q'_y - p'_y q'_x \neq 0$ у абсягу D.

Абсяг D лічым заўсёды адназвязнай.

Мяркуем $P = p + jq$, $Q = p - jq$.

Маем $P'_x Q'_y - P'_y Q'_x = -2j\delta$.

Увядзём дыферэнцыяльныя аператары:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{1}{\delta}\left(f'_x q'_y - f'_y q'_x\right), \frac{\partial f}{\partial q} = \frac{1}{\delta}\left(f'_y p'_x - f'_x p'_y\right) \\ &\frac{\partial f}{\partial P} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial p} - j\frac{\partial f}{\partial q}\right), \frac{\partial f}{\partial Q} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial p} + j\frac{\partial f}{\partial q}\right) \end{aligned}\right\}, \quad (1)$$

дзе f – любая функцыя класа $C^2(D)$ (хаця б рэчаісная) або класа $C^2(D,B)$, $P = p + jq$, $Q = p - jq$, $j^2 = -1$, $i^2 = -1$, $j \neq i$.

Дыферэнцыяльныя аператары $\frac{\partial}{\partial P}, \frac{\partial}{\partial Q}$ валодаюць наступнымі ўласцівасцямі:

1) $\frac{\partial Q}{\partial P} = 0$, $\frac{\partial P}{\partial Q} = 0$, $\frac{\partial P}{\partial P} = 1$, $\frac{\partial Q}{\partial Q} = 1$;

2) $$\frac{\partial(u \cdot v)}{\partial P} = u\frac{\partial v}{\partial P} + v\frac{\partial u}{\partial P},$$

$$\frac{\partial(u \cdot v)}{\partial Q} = u\frac{\partial v}{\partial Q} + v\frac{\partial u}{\partial Q};$$

3) $$\frac{\partial(f + j\varphi)}{\partial Q} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial q}\right) + j\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q}\right)\right\}.$$

Лема 1. Калі ў абсягу D маем адначасова

$$\frac{\partial f}{\partial P} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial Q} = 0,$$

тады $f \equiv const$ (паколькі з (1) маем: $f'_x = f'_y = 0$ у абсягу D).

Заўважым, што ва ўсім далейшым літарамі p, q, P, Q абазначаем толькі разглядаемыя тут функцыі.

Будзем пісаць, што $f(x,y) = f[p]$ у абсягу D, калі функцыя $f(x,y)$ з'яўляецца манагеннай у сэнсе У.С. Фёдарава па функцыі $p(x,y)$ [1–2] у абсягу D (F-манагеннай), гэта значыць, калі знойдзецца такая функцыя зменных x, y, якую абазначаем $f'[p]$, што ў адзначаным абсягу маем:

$$f'_x = f'[p] \cdot p'_x, \quad f'_y = f'[p] \cdot p'_y$$

(з умовы $\delta \neq 0$ вынікае адзінасць функцыі $f'[p]$ для дадзеных функцый f і p). Напрыклад, але не заўсёды абавязкова, функцыя $f[p]$ ёсць аналітычная функцыя камплекснага зменнага p.

Аналагічна абазначаем праз $F[P]$ для бікамплекснай функцыі $F(x,y)=f(x,y)+j\varphi(x,y)$, дзе $f,\varphi\in C^2(D)$, такую бікамплексную функцыю, якая манагенная па функцыі

$$P(x,y)=p(x,y)+jq(x,y)$$

(у сэнсе У.С. Фёдарава) у абсягу D.

У працы [3] даказана наступная тэарэма.

Тэарэма 1. Неабходная і дастатковая прымета манагеннасці бікамплекснай функцыі

$$F(x,y)=f(x,y)+j\varphi(x,y)$$

па функцыі $P(x,y)=p(x,y)+jq(x,y)$ у абсягу D мае выгляд $\frac{\partial F}{\partial Q}=0,\ (x,y)\in D$.

У працы [3] даказана таксама, што ўсякая бікамплексная функцыя F, F-манагенная па бікамплеснай функцыі P, мае наступны выгляд:

$$F=\frac{u[\bar z]+v[z]}{2}+j\frac{i(u[\bar z]-v[z])}{2},$$

дзе $u[\bar z](v[z])$ – любая камплексная функцыя, манагенная ў сэнсе У.С. Фёдарава па функцыі $\bar z=p-iq$ $(z=p+iq)$.

Прадметам нашага даследавання з'яўляецца наступная сістэма дыферэнцыяльных раўнанняў у фармальных вытворных:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial p}-\dfrac{\partial\varphi}{\partial q}=a_1f+b_1\varphi,\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial q}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial p}=a_2f+b_2\varphi,\end{cases}\qquad(2)$$

дзе шуканыя функцыі f, φ і вядомыя функцыі a_k, b_k $(k=1,\ 2)$ – аналітычныя функцыі ад $p=p(x,y)$ і $q=q(x,y)$ у абсягу D.

Далей заўважым, што даследаванні рашэнняў сістэмы (2) маюць строга лакальны характар, а таму можам, не памяншаючы, па сутнасці, агульнасці даследавання, дапусціць раскладальнасць любой разглядаемай намі функцыі $F(x,\ y)$ класа $A(p,\ q,\ D,\ B)$ ва ўсім абсягу $\bar D$ у шэраг выгляду:

$$F(M)=\sum_{m,n=0}^{\infty}a_{mn}P^m(M)Q^n(M)\qquad(3)$$

(a_{mn} = const; M – пункт аднназвязнага абсягу D плоскасці $x,\ y$), прычым мяркуецца існаванне такіх канстантаў $r_1>0$, $r_2>0$, што

1) $|P|<r_1$, $|Q|<r_2$ у абсягу D;

2) $\sum_{m,n=0}^{\infty}|a_{mn}|r_1^m r_2^n l^{m+n}<+\infty$, а таму ў абсягу D збягаецца абсалютна і раўнамерна шэраг $\sum_{m,n=0}^{\infty}a_{mn}P^m(N)Q^n(M)$ для любых зменных пунктаў $M,N\in D$ (паколькі $|P^m(N)Q^n(M)|<l^{m+n-1}r_1^m r_2^n$).

Асноўная частка. Для даследавання сістэмы (2) пабудуем і вывучым спецыяльныя інтэгральныя аператары. Уводзім усюды ў далейшым абазначэнні:

1) $\tilde F(N,M)=\sum_{m,n=0}^{\infty}a_{mn}P^m(N)Q^n(M)$,

$M,N\in D$, у выпадку раскладу (3);

2) $P(B)\equiv P_1, P(N)\equiv P_0, Q(B)\equiv Q_1,$
$Q(N)\equiv Q_0, P(M)\equiv P, Q(M)\equiv Q$

(захоўваючы, аднак, запіс адзначаных пунктаў там, дзе гэта будзе да месца).

Ступеневыя шэрагі, якія атрымліваюцца з шэрагу (3) заменай P праз $P-a$, Q праз $Q-b$, дзе $a,b=const$, намі асобна не разглядаюцца, бо, калі ўзяць $P-a$ $(Q-b)$ за новыя $P(Q)$, мы атрымаем тыя ж формулы і тэарэмы.

Пяройдзем зараз да вывучэння некаторых крывалінейных інтэгралаў, мяркуючы заўсёды, што падынтэгральныя функцыі належаць класу $A(p,q,D,B)$.

Няхай

$$\varphi\equiv\varphi(B)=\int_{M_0}^{B}Q^n(M)dQ(M),\ n=1,2,\dots,$$

дзе тут і ніжэй $\int_{M_0}^{B}$ абазначае крывалінейны інтэграл, узяты па кускова-гладкай крывой, якая злучае пункты M_0 і $B(x_0,y_0)$ у абсягу D, $dQ(M)\equiv Q'_x\,dx+Q'_y\,dy$.

Пад знакам інтэграла маем:

$$Q^n\cdot dQ(M)=Q^n\cdot Q'_x\cdot dx+Q^n\cdot Q'_y\cdot dy,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}Q^nQ'_y=nQ^{n-1}\cdot Q'_x\cdot Q'_y+Q^n\cdot Q''_{yx},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}Q^nQ'_x=nQ^{n-1}\cdot Q'_y\cdot Q'_x+Q^n\cdot Q''_{xy},$$

адкуль вынікае, што $Q^n\cdot dQ$ ёсць поўны дыферэнцыял па x і y.

Адсюль атрымліваем:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}=Q^n(B)\frac{\partial Q(B)}{\partial x_0},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y_0}=Q^n(B)\frac{\partial Q(B)}{\partial y_0},$$

а таму знойдзем:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial P_1} = \frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\cdot\frac{\partial Q_1}{\partial y_0} - \frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\cdot\frac{\partial Q_1}{\partial x_0}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial Q_1} = \frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial P_1}{\partial x_0}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y_0} - \frac{\partial P_1}{\partial y_0}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\right) = Q^n(B),$$

$$\left(\delta = \delta(B) = \left|\begin{vmatrix} P'_x(B) & P'_y(B) \\ Q'_x(B) & Q'_y(B)\end{vmatrix}\right|\right).$$

Лема 2. Маем:

1) $$\frac{\partial}{\partial P_1}\left(\int_{M_0}^{B} Q^n(M)\,dQ(M)\right) = 0;$$

2) $$\frac{\partial}{\partial Q_1}\left(\int_{M_0}^{B} Q^n(M)\,dQ(M)\right) = Q^n(B).$$

Лема 3. Маем:

$$\int_{M_0}^{B} Q^n(M)\,dQ(M) = \frac{Q^{n+1}(B) - Q^{n+1}(M_0)}{n+1}.$$

Доказ. Згодна з лемай 2 маем:

$$\frac{\partial}{\partial Q_1}\left(\int_{M_0}^{B} Q^n(M)\,dQ(M) - \frac{Q^{n+1}(B)}{n+1}\right) = 0.$$

Адсюль

$$\int_{M_0}^{B} Q^n(M)\,dQ(M) - \frac{Q^{n+1}(B)}{n+1} = F\left[P(B)\right],$$

дзе $F\left[P(B)\right]$ – F-манагенная па P функцыя.

Згодна з лемай 2 і ўлічваючы, што $\frac{\partial Q(B)}{\partial P_1} = 0$, маем $\frac{\partial}{\partial P_1} F\left[P(B)\right] = 0$.

З апошняй роўнасці і з таго, што

$$\frac{\partial}{\partial Q_1} F\left[P(B)\right] = 0,$$

на падставе лемы 1 атрымаем

$$F\left[P(B)\right] = C = const.$$

Такім чынам,

$$\int_{M_0}^{B} Q^n(M)\,dQ(M) = \frac{Q^{n+1}(B)}{n+1} + C,$$

а пры супадзенні пункта B з пунктам M_0 маем:

$$0 = \frac{Q^{n+1}(M_0)}{n+1} + C.$$

Адсюль атрымліваем сцвярджэнне лемы 3.

Няхай N і B – два любыя пункты абсягу D, прычым N не залежыць ад B, і няхай

$$I(N,B) = \int_{M_0}^{B} \tilde{F}\,dQ(M),$$

дзе M_0 – фіксаваны пункт абсягу D,

$$M = M(x,y),\ \tilde{F} = \tilde{F}(N,M),$$

$$F(x,y) \in A(p,q,D,B),$$

$$F(x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} P^m Q^n,$$

$$P = P(x,y),\ Q = Q(x,y),$$

$$\tilde{F}(N,M) =$$

$$= \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} P^m(N) Q^n(M) = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} P^m(N) Q^n(x,y),$$

$$dQ(M) = Q'_x(x,y)\,dx + Q'_y(x,y)\,dx.$$

Маем

$$\frac{\partial\tilde{F}}{\partial y} = \frac{\partial\tilde{F}}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial\tilde{F}}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\tilde{F}\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{\partial\tilde{F}}{\partial y}\frac{\partial Q}{\partial x} + \tilde{F}\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y}.$$

Аднак $$\frac{\partial\tilde{F}}{\partial P} = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} P^m(N)\frac{\partial Q^n}{\partial P} = 0,$$

адкуль $$\frac{\partial\tilde{F}}{\partial y} = \frac{\partial\tilde{F}}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\tilde{F}\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{\partial\tilde{F}}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial Q}{\partial x} + \tilde{F}\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y}.$$

Аналагічна атрымаем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\tilde{F}\frac{\partial Q}{\partial y}\right) = \frac{\partial\tilde{F}}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial y} + \tilde{F}\frac{\partial^2 Q}{\partial y\partial x}.$$

Такім чынам, атрымаем

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\tilde{F}\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\tilde{F}\frac{\partial Q}{\partial y}\right),$$

а значыць,

$$\tilde{F}(N,M)\,dQ(M) \equiv \tilde{F}(N,M)Q'_x dx + \tilde{F}(N,M)Q'_y dy$$

ёсць поўны дыферэнцыял па x і y.

Такім чынам, для любой функцыі

$$F(x,y) \in A(p,q,D,B)$$

інтэграл $I(N,B)$ не залежыць ад крывой інтэгравання (ёсць функцыя (адназначная) пунктаў N і B).

Адсюль, мяркуючы

$$B \equiv B(x_0, y_0),\ I \equiv I(N,B),$$

маем

$$\frac{\partial I}{\partial Q(B)} = \frac{1}{\delta}\left\{\frac{\partial I}{\partial y_0}P'_x(B) - \frac{\partial I}{\partial x_0}P'_y(B)\right\} =$$

$$= \frac{1}{\delta}\left\{P'_x(B)\tilde{F}(N,B)Q'_y(B) - P'_y(B)\tilde{F}(N,B)Q'_x(B)\right\} =$$

$$= \tilde{F}(N,B).$$

Такім чынам,

$$\frac{\partial}{\partial Q_1}\left(\int\limits_{M_0}^{B}\tilde{F}(N,M)\,dQ(M)\right)=\tilde{F}(N,B).$$

Лічым, што N не залежыць ад B. Адсюль атрымаем тэарэму.

Тэарэма 2. Няхай $\alpha,\beta\in A(p,q,D,B)$, $f,\varphi\in A(p,q,D,K)$, тады:

1) інтэграл

$$I(N,B)\equiv$$

$$\equiv\int\limits_{M_0}^{B}\left(\tilde{\alpha}\cdot\tilde{f}+\tilde{\beta}\cdot\tilde{\varphi}\right)dQ(M)\equiv\int\limits_{M_0}^{B}\tilde{\Phi}(N,M)\,dQ(M),$$

дзе $\tilde{\Phi}(N,M)=\tilde{\alpha}\cdot\tilde{f}+\tilde{\beta}\cdot\tilde{\varphi}$,

$\tilde{\alpha}\equiv\tilde{\alpha}(N,M)$ і г. д., не залежыць ад шляху інтэгравання (ёсць адназначная функцыя пунктаў N і B);

2) $$\frac{\partial I(N,B)}{\partial Q(B)}=\tilde{\alpha}(N,B)\cdot\tilde{f}(N,B)+\tilde{\beta}(N,B)\cdot\tilde{\varphi}(N,B).$$

Лічым, што N не залежыць ад B.

Тэарэма 3. Няхай $\alpha,\beta\in A(p,q,D,B)$, $f,\varphi\in A(p,q,D,K)$.

Тады

1) інтэграл

$$I(B)\equiv$$

$$\equiv\int\limits_{M_0}^{B}\left[\tilde{\alpha}(B,M)\cdot\tilde{f}(B,M)+\tilde{\beta}(B,M)\cdot\tilde{\varphi}(B,M)\right]dQ(M)$$

не залежыць ад шляху інтэгравання (ёсць адназначная функцыя пункта B),

2) $$\frac{\partial I(B)}{\partial Q(B)}=\alpha(B)\cdot f(B)+\beta(B)\cdot\varphi(B)\quad(4)$$

Доказ. Першая частка тэарэмы даказваецца аналагічным чынам, як і ў тэарэме 2. Застаецца даказаць роўнасць (4).

Няхай x_0, y_0 – каардынаты пункта B. Тады

$$\frac{\partial I(B)}{\partial y_0}=\left[\alpha(B)f(B)+\beta(B)\varphi(B)\right]\frac{\partial Q(B)}{\partial y_0}+$$

$$+\int\limits_{M_0}^{B}\frac{\partial}{\partial y_0}\left(\tilde{\alpha}\tilde{f}+\tilde{\beta}\tilde{\varphi}\right)dQ(M),$$

$$\frac{\partial I(B)}{\partial x_0}=\left[\alpha(B)f(B)+\beta(B)\varphi(B)\right]\frac{\partial Q(B)}{\partial x_0}+$$

$$+\int\limits_{M_0}^{B}\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\tilde{\alpha}\tilde{f}+\tilde{\beta}\tilde{\varphi}\right)dQ(M),$$

адкуль

$$\frac{\partial I(B)}{\partial Q_1}=\frac{1}{\delta(B)}\left(I'_y\cdot P'_x-I'_xP'_y\right)_B=$$

$$=\left(\alpha\cdot f+\beta\cdot\varphi\right)_B+\int\limits_{M_0}^{B}\frac{\partial}{\partial Q_1}\left(\tilde{\alpha}\tilde{f}+\tilde{\beta}\tilde{\varphi}\right)dQ(M).\qquad(5)$$

Аднак

$$\tilde{\alpha}\tilde{f}+\tilde{\beta}\tilde{\varphi}=\sum_{m,\,n=0}^{\infty}a_{mn}P^m(B)Q^n(M)\text{ і }\frac{\partial P(B)}{\partial Q(B)}=0,$$

$$\frac{\partial Q(M)}{\partial Q(B)}=0,\text{ бо }\frac{\partial Q(M)}{\partial x_0}=0,\ \frac{\partial Q(M)}{\partial y_0}=0.$$

Адсюль і з роўнасці (5) і атрымаем роўнасць (4).

З тэарэмы 3 і ўласцівасцей манагенных функцый вынікае наступная тэарэма.

Тэарэма 4. Калі маем роўнасць

$$f(B)+\varphi(B)=$$

$$=\int\limits_{M_0}^{B}\left(\tilde{\alpha}(B,M)\tilde{f}(B,M)+\tilde{\beta}(B,M)\tilde{\varphi}(B,M)\right)dQ(M)+$$

$$+F\left[P(B)\right],$$

дзе $F[P(B)]$ – манагенная па P функцыя, тады

$$\frac{\partial}{\partial Q_1}\left(f(B)+j\varphi(B)\right)=\alpha(B)f(B)+\beta(B)\varphi(B)$$

і наадварот.

Тэарэма 5. Няхай у абсягу D

$$\varphi(B)=\int\limits_{M_0}^{B}\tilde{F}(B,M)\,dQ(M),$$

тады для ўсіх пар пунктаў $N,\ B\in D$

$$\tilde{\varphi}(N,B)=\int\limits_{M_0}^{B}\tilde{F}(N,M)\,dQ(M).\qquad(6)$$

Доказ. Маем $\tilde{F}(B,M)=\sum\limits_{m,\,n=0}^{\infty}a_{mn}P^m(B)Q^n(M)$.

Тады згодна з лемай 3

$$\varphi(B)=\sum_{m,n=0}^{\infty}a_{mn}P^m(B)\frac{1}{n+1}[Q^{n+1}(B)-Q^{n+1}(M_0)].$$

З другога боку,

$$\int\limits_{M_0}^{B}\tilde{F}(N,M)dQ(M)=$$

$$=\sum_{m,\,n=0}^{\infty}a_{mn}P^m(N)\frac{1}{n+1}[Q^{n+1}(B)-Q^{n+1}(M_0)],$$

а таксама

$$\tilde{\varphi}(N,B)=\sum_{m,n=0}^{\infty}a_{mn}P^m(N)\frac{1}{n+1}[Q^{n+1}(B)-Q^{n+1}(M_0)],$$

адкуль і вынікае (6). Тэарэма доказана.

Тэарэма 6. Няхай $\alpha, \beta \in A(p, q, D, B)$, $f, \varphi \in A(p, q, D, K)$. Калі для ўсіх пар $N, B \in D$

$$\tilde{f}(N,B) + j\tilde{\varphi}(N,B) = \int_{M_0}^{B} \tilde{\Phi}(N,M)\,dQ(M), \qquad (7)$$

дзе $\Phi(x,y) \equiv f(x,y)\alpha(x,y) + \tilde{\varphi}(x,y)\beta(x,y)$,

тады $f(x, y) \equiv 0$, $\varphi(x, y) \equiv 0$.

Доказ. У якім-небудзь замкнутым крузе $\bar{K} \subset D$ для ўсіх пунктаў $M, N, B \in \bar{K}$ маем

$$|\tilde{f}(N,M)| < c, |\tilde{\varphi}(N,M)| < c, |\tilde{\alpha}| < a, |\tilde{\beta}| < a,$$

$$|Q'_x| < b, |Q'_y| < b, (a,b,c \ - \text{const}).$$

Тады ў крузе $\bar{K}$ (лічым M_0 цэнтрам гэтага круга) з (7) атрымаем

$$|\tilde{f}(N,B) + j\tilde{\varphi}(N,B)| < 4\ell abcr, r = |\overline{M_0B}| \qquad (8)$$

(паколькі $|\tilde{\Phi}dQ(M)| \le l|\tilde{f}\tilde{\alpha} + \tilde{\varphi}\tilde{\beta}| \cdot |dQ(M)| \le$

$$\le l\left(|\tilde{f}||\tilde{\alpha}| + |\tilde{\varphi}||\tilde{\beta}|\right)\left|Q'_x\frac{dx}{ds} + Q'_y\frac{dy}{ds}\right|ds <$$

$$< 2labc\left(\left|\frac{dx}{ds}\right| + \left|\frac{dy}{ds}\right|\right)ds,$$

і праінтэграваўшы апошні выраз па прамалінейнаму адрэзку ад M_0 да B і ўлічваючы, што $\left|\frac{dx}{ds}\right| + \left|\frac{dy}{ds}\right| < 2$, атрымаем няроўнасць (8)).

З няроўнасці (8) вынікае

$$|\tilde{f}(N,B)| < 4labcr, |\tilde{\varphi}(N,B)| < 4labcr,$$

$$|\tilde{f}(N,M)| < 4labcs, |\tilde{\varphi}(N,M)| < 4labcs \left(s = |\overline{M_0M}|\right).$$

Калі падставіць атрыманыя ацэнкі ў (7), будзем мець

$$\left.\begin{aligned} &|\tilde{f}(N,B) + j\tilde{\varphi}(N,B)| < 4^2\ell^2a^2b^2c\frac{r^2}{2!},\\ &|\tilde{f}(N,B)| < 4^2\ell^2a^2b^2c\frac{r^2}{2!},\\ &|\tilde{f}(N,M)| < 4^2\ell^2a^2b^2c\frac{s^2}{2!}\\ &\left(s = |\overline{M_0M}|\right)\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

(аналагічныя ацэнкі маюць месца для $\tilde{\varphi}(N, B)$, $\tilde{\varphi}(N, M)$) і, наогул, працягваючы працэс падстаноўкі няроўнасцей тыпу (9) у (7), атрымаем

$$\begin{aligned} &|\tilde{f}(N,B)| < 4^n l^n a^n b^n c\frac{r^n}{n!},\\ &|\tilde{\varphi}(N,B)| < 4^n l^n a^n b^n c\frac{r^n}{n!}.\end{aligned} \qquad (10)$$

Няхай выконваюцца няроўнасці (10), тады з (7) маем:

$$|\tilde{f}(N,B) + j\tilde{\varphi}(N,B)| < l\int_{M_0}^{B}\left(|\tilde{f}| + |\tilde{\varphi}|\right)2abds,$$

гэта значыць,

$$|\tilde{f}(N,B) + j\tilde{\varphi}(N,B)| < l^{n+1}\cdot 4^{n+1}a^{n+1}b^{n+1}c\frac{r^{n+1}}{(n+1)!},$$

а гэта значыць,

$$|\tilde{f}| < l^{n+1}\cdot 4^{n+1}a^{n+1}b^{n+1}c\frac{r^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$|\tilde{\varphi}| < l^{n+1}\cdot 4^{n+1}a^{n+1}b^{n+1}c\frac{r^{n+1}}{(n+1)!},$$

адкуль, відавочна, $f(x,y) \equiv 0, \tilde{\varphi}(x,y) \equiv 0$.

Тэарэма даказана.

З тэарэм 5 і 6 вынікае наступная тэарэма.

Тэарэма 7. Калі маем

$$f(B) + j\varphi(B) = \int_{M_0}^{B} \tilde{\Phi}(B, M)\,dQ(M)$$

для ўсіх $B \in D$, дзе $\Phi \equiv \alpha\beta + \beta\varphi$; $\alpha,\beta \in A(p,q,D,B)$, $f,\varphi \in A(p,q,D,K)$, тады $f(x,y) \equiv 0, \varphi(x,y) \equiv 0$.

Пабудуем агульнае рашэнне сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial q} &= a_1 f + b_1\varphi,\\ \frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} &= a_2 f + b_2\varphi\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

у тым выпадку, калі ў ёй шуканыя функцыі f і φ і вядомыя функцыі a_k, b_k $(k = 1, 2)$ – аналітычныя функцыі ад $p = p(x, y)$, $q = q(x, y)$, што, безумоўна, не патрабуе абавязковай аналітычнасці ўсіх адзначаных функцый ад зменных x і y.

З азначэння дыферэнцыяльнага апература

$$\frac{\partial}{\partial Q} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial q}\right) + j\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q}\right)\right\}$$

непасрэдна вынікае наступная тэарэма.

Тэарэма 8. Сістэма (2), дзе $a_k, b_k \in A(p,q,D,K)(k = 1,2)$ – вядомыя функцыі, $f,\varphi \in A(p,q,D,K)$ – шуканыя функцыі, раўназначная раўнанню выгляду

$$\frac{\partial w}{\partial Q} = \alpha f + \beta\varphi, \qquad (11)$$

дзе $w = f + j\varphi, \alpha \equiv \frac{1}{2}(a_1 + ja_2), \beta \equiv \frac{1}{2}(b_1 + jb_2)$.

Шукаем рашэнне раўнання (11) у наваколлі некаторага пункта $M_0 \in D$.

На падставе тэарэм 1, 3 рашэнне раўнання (11) зводзіцца да рашэння наступнага інтэгральнага раўнання

$$f(B)+j\varphi(B)=\int_{M_0}^{B}\tilde{\Phi}(B,M)dQ(M)+F\left[P(B)\right], \quad (12)$$

дзе $F[P(B)]$ – адвольная манагенная па P функцыя, $\Phi=\alpha f+\beta\varphi$, інтэграл бярэцца па прамалінейнаму адрэзку M_0B даўжыні r, які размешчаны ў некаторым замкнутым крузе $\bar{K}\subset D$ з цэнтрам M_0.

Разгледзім папярэдне наступнае інтэгральнае раўнанне:

$$\tilde{f}(N,B)+j\tilde{\varphi}(N,B)=\int_{M_0}^{B}\tilde{\Phi}(N,M)dQ(M)+F\left[P(B)\right], \quad (13)$$

дзе $\Phi=\alpha f+\beta\varphi$. Раўнанне (13) рэшым метадам паслядоўных набліжэнняў. Мяркуем

$$\tilde{w}_n(N,B)=\int_{M_0}^{B}\tilde{\Phi}_{n-1}(N,M)dQ(M)+F[P(B)], \quad (14)$$

дзе $w_n=f_n+j\varphi_n$; $\Phi_{n-1}=\alpha f_{n-1}+\beta\varphi_{n-1}$; $n=1, 2, 3, \ldots$; $f_0+j\varphi_0=F\left[P(B)\right]$ – манагенная па P функцыя; f_n, φ_n $(n=0, 1, \ldots)$ – камплексныя функцыі ад x, y.

Калі ўвесці абазначэнні $\Delta w_n=w_n-w_{n-1}$,

$$\Delta\Phi_{n-1}=\Phi_{n-1}-\Phi_{n-2}=\alpha\Delta f_{n-1}+\beta\Delta\varphi_{n-1},$$

$$\Delta f_n=f_n-f_{n-1},\quad \Delta\varphi_n=\varphi_n-\varphi_{n-1},$$

то з раўнання (14) будзем мець

$$\Delta\tilde{w}_n(N,B)=\int_{M_0}^{B}\Delta\tilde{\Phi}_{n-1}(N,M)dQ(M),$$

адкуль знаходзім, што

$$\left|\Delta\tilde{f}_n(N,B)\right|\le l\int_0^r\left|\Delta\tilde{\Phi}_{n-1}(N,M)\right|\left|dQ(M)\right|= \\ =l\int_0^r\left|\Delta\tilde{\Phi}_{n-1}(N,M)\right|\left|\frac{dQ}{ds}\right|ds, \quad (15)$$

$$\left|\Delta\tilde{\varphi}(N,B)\right|\le l\int_0^r\left|\Delta\tilde{\Phi}_{n-1}(N,M)\right|\left|\frac{dQ}{ds}\right|ds,\left(s=\left|\overline{M_0M}\right|\right),$$

дзе інтэграл бярэцца па прамалінейнаму адрэзку $\overline{M_0B}$ даўжыні r, які належыць некатораму замкнутаму кругу $\bar{K}\subset D$ з цэнтрам у пункце M_0.

Відавочна, што маюцца такія канстанты $a>0$, $b>0$, што для ўсіх пар пунктаў N, B гэтага круга $\left|\Delta\tilde{\Phi}_1(N,B)\right|<a, \left|\tilde{\alpha}(N,B)\right|<a, \left|\tilde{\beta}(N,B)\right|<a,$ і для ўсіх пунктаў M адрэзка $\overline{M_0B}$ $\left|\frac{dQ}{ds}\right|<b$.

Тады з (15), відавочна, маем

$$\left|\Delta\tilde{f}_n(N,B)\right|<2^{n-2}\left(lab\right)^{n-1}\frac{r^{n-1}}{(n-1)!},\ n=2, 3, \ldots .$$

Аналагічна для $\left|\Delta\tilde{\varphi}(N,B)\right|$.

Такім чынам, у крузе $\bar{K}$ абсалютна і раўнамерна збягаецца шэраг $\sum_{n=2}^{\infty}\Delta\tilde{f}_n(N,B)$ для ўсіх пар пунктаў N і B гэтага круга (аналагічна пры замене f_n праз φ_n), а таму паслядоўнасці $\{\tilde{f}_n(N,B)\}$ і $\{\tilde{\varphi}_n(N,B)\}$ збягаюцца раўнамерна для ўсіх пар пунктаў N, $B\in\bar{\ }$. Калі абазначыць ліміты гэтых паслядоўнасцей праз $\tilde{f}(N,B)$ і $\tilde{\varphi}(N,B)$ адпаведна, то будзем мець з (14)

$$\tilde{f}(N,B)+j\tilde{\varphi}(N,B)= \\ =\int_{M_0}^{B}\left[\tilde{\alpha}\cdot\tilde{f}+\tilde{\beta}\cdot\tilde{\varphi}\right]dQ(M)+F\left[P(B)\right], \quad (16)$$

дзе пад інтэгралам $\tilde{\alpha}=\tilde{\alpha}(N,M)$, $\tilde{f}=\tilde{f}(N,M)$ і г. д.

Такім чынам, мы знайшлі рашэнне інтэгральнага раўнання (16):

$$\tilde{f}(N,B)=\lim_{n\to\infty}\tilde{f}_n(N,B),\ \tilde{\varphi}(N,B)=\lim_{n\to\infty}\tilde{\varphi}_n(N,B).$$

Гэтае рашэнне для дадзенай функцыі $F[P(B)]$ згодна з тэарэмай 7 будзе адзіным.

Адсюль вынікае, што і інтэгральнае раўнанне

$$f(B)+j\tilde{\varphi}(B)=\int_{M_0}^{B}\left[\tilde{\alpha}\cdot\tilde{f}+\tilde{\beta}\cdot\tilde{\varphi}\right]dQ(M)+F\left[P(B)\right]$$

мае рашэнне ў абсягу D, і яно адзінае для дадзенай функцыі $F[P(B)]$.

Заключэнне. Такім чынам, задача інтэгравання раўнання (11) цалкам рэшана. Аналагічна рашаюцца неаднародныя дыферэнцыяльныя раўнанні выгляду (11).

Літаратура

1. *Фёдоров, В.С.* Основные свойства обобщенных моногенных функций / В.С. Фёдоров // Известия вузов. Математика. – 1958. – № 6. – С. 257–265.
2. *Фёдоров, В.С.* Об одном виде моногенных гиперкомплесных функций / В.С. Фёдоров // Математический сборник. – 1960. – Т. 50.– № 1.– С. 101–105.
3. *Стельмашук, Н.Т.* О некоторых линейных дифференциальных уравнениях в частных производных в дуальной и бикомплексной алгебрах / Н.Т. Стельмашук // Известия вузов. Математика. – 1964. – № 3. – С. 136–142.

Summary

The solution of one canonical system of differential equations has been obtained wifh the help of F-monogenic functions.

Паступіў у рэдакцыю 24.01.2014 г.