
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.642

РАЦИОНАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2012 г. В. Н. Русак, Н. В. Гриб

В пространстве непрерывных периодических функций построены интерполяционные рациональные операторы, на их основе получены квадратурные формулы с положительными коэффициентами, точные на рациональных тригонометрических функциях порядка $2n$, и предложен алгоритм приближенного решения интегральных уравнений второго рода. Найдена оценка погрешности приближенного решения в терминах наилучших тригонометрических рациональных приближений ядра и правой части интегрального уравнения.

Интерполяционные квадратурные формулы, предназначенные для интегрирования периодических функций, хорошо приближаемых тригонометрическими полиномами, изучены достаточно полно [1, 2]. На их основе разработаны приближенные методы решения интегральных уравнений, ядра и коэффициенты которых аппроксимируются полиномами (см., например, [3, с. 511]). В настоящей работе рассматриваются интерполяция периодических функций рациональными операторами и ее приложения к построению квадратурных формул типа Гаусса и приближенному решению интегральных уравнений второго рода.

Пусть $|\alpha_k| < 1$, $k = \overline{1, n}$, $\pi_n(z) = \prod_{k=1}^n (z - \alpha_k)/(1 - \overline{\alpha_k}z)$ – произведение Бляшке. Поскольку $|\pi_n(z)| = 1$ на единичной окружности, то выполняется равенство

$$\pi_n(e^{i\varphi}) = e^{i\Phi_n(\varphi)}, \quad (1)$$

где $\Phi_n(\varphi) = \arg \pi_n(e^{i\varphi})$, $0 \leq \Phi_n(0) = \arg \prod_{k=1}^n (1 - \alpha_k)/(1 - \overline{\alpha_k}) < 2\pi$. Используя равенство (1), нетрудно проверить, что

$$\Phi'_n(\varphi) = \sum_{k=1}^n \frac{1 - |\alpha_k|^2}{(e^{i\varphi} - \alpha_k)(e^{-i\varphi} - \overline{\alpha_k})} > 0. \quad (2)$$

Следовательно, при изменении φ от 0 до 2π аргумент $\Phi_n(\varphi) + \varphi/2$ возрастает от $\Phi_n(0)$ до $\Phi_n(0) + (2n + 1)\pi$, соответственно функция $\sin(\Phi_n(\varphi) + \varphi/2)$ имеет нули в точках $\{\varphi_k\}$:

$$0 \leq \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_{2n} < 2\pi.$$

Непосредственно проверяется также с учетом равенства (1) и формул Эйлера, что

$$\sin\left(\Phi_n(\varphi) + \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{e^{i\varphi/2}}{2iq_n(\varphi)} \prod_{k=1}^n (1 - \alpha_k e^{-i\varphi})(e^{i\varphi} - \alpha_k) - e^{-i\varphi/2} \prod_{k=1}^n (1 - \overline{\alpha_k} e^{i\varphi})(e^{-i\varphi} - \overline{\alpha_k}) = \frac{p_{n+1/2}(\varphi)}{q_n(\varphi)}, \quad (3)$$

$$q_n(\varphi) = \prod_{k=1}^n (e^{-i\varphi} - \overline{\alpha_k})(e^{i\varphi} - \alpha_k),$$

где $p_{n+1/2}(\varphi)$ – тригонометрический полином полуцелого порядка $n + 1/2$ с действительными коэффициентами, нулями которого являются точки $\{\varphi_k\}_{k=0}^{2n}$. В таком случае справедливо разложение [4, с. 17]

$$p_{n+1/2}(\varphi) = C \prod_{k=0}^{2n} \sin \frac{\varphi - \varphi_k}{2}. \quad (4)$$

Заметим, что $\cos(\Phi_n(\varphi) + \varphi/2)$ также является функцией вида (3) с некоторым тригонометрическим полиномом полуцелого порядка в числителе и тем же знаменателем, причем выполняются равенства

$$\cos\left(\Phi_n(\varphi_k) + \frac{\varphi_k}{2}\right) = (-1)^k \cos\left(\Phi_n(\varphi_0) + \frac{\varphi_0}{2}\right).$$

Будем обозначать через $Q_{n,1}$ множество $\{p_n(x)/q_n(x)\}$ тригонометрических рациональных функций порядка не выше n с фиксированным знаменателем $q_n(x)$, соответственно через $Q_{n,2}$ множество $\{p_{2n}(x)/q_n^2(x)\}$ тригонометрических рациональных функций порядка не выше $2n$ с фиксированным знаменателем $q_n^2(x)$.

Для любой функции $f(\varphi)$ из пространства $C_{2\pi}$ непрерывных 2π -периодических функций построим интерполяционный рациональный оператор L_n , полагая

$$L_n(\varphi, f) = \sum_{k=0}^{2n} f(\varphi_k) l_{k,n}(\varphi), \quad l_{k,n}(\varphi) = \frac{\sin(\Phi_n(\varphi) + \varphi/2) \cos(\Phi_n(\varphi_k) + \varphi_k/2)}{\sin((\varphi - \varphi_k)/2)(1 + 2\Phi'_n(\varphi_k))}. \quad (5)$$

Лемма 1. Введенный равенством (5) оператор L_n

1) любую функцию $f \in C_{2\pi}$ отображает в тригонометрическую рациональную функцию из $Q_{n,1}$;

2) удовлетворяет условиям $L_n(\varphi_k, f) = f(\varphi_k)$, $k = \overline{0, 2n}$;

3) является точным на множестве $Q_{n,1}$.

Доказательство. В силу представления (4) при делении полуцелого тригонометрического полинома $p_{n+1/2}(\varphi)$ на $\sin((\varphi - \varphi_k)/2)$ получим тригонометрический полином $p_{k,n}(\varphi)$ целого порядка n . Слагаемые $f(\varphi_k)l_{k,n}(\varphi)$ с учетом (3) отличаются лишь на константы от $p_{k,n}(\varphi)/q_n(\varphi)$, т.е. являются рациональными функциями порядка не выше n с одним и тем же знаменателем $q_n(\varphi)$. Следовательно, $\sum_{k=0}^{2n} f(\varphi_k)l_{k,n}(\varphi) \in Q_{n,1}$.

Из равенств (4) и (5) следует, что $l_{k,n}(\varphi_j) = 0$, если $k \neq j$. Если же $k = j$, то по правилу Лопиталья имеем

$$l_{j,n}(\varphi_j) = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_j} l_{j,n}(\varphi) = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_j} \frac{\cos(\Phi_n(\varphi) + \varphi/2)(\Phi'_n(\varphi) + 1/2) \cos(\Phi_n(\varphi_j) + \varphi_j/2)}{\cos((\varphi - \varphi_j)/2)(1 + 2\Phi'_n(\varphi_j))/2} = 1.$$

Тогда

$$L_n(\varphi_k, f) = \sum_{k=0}^{2n} f(\varphi_j) l_{j,n}(\varphi_k) = \sum_{k \neq j} 0 + f(\varphi_k) \cdot 1 = f(\varphi_k).$$

Если тригонометрическая рациональная функция $r_n(\varphi) \in Q_{n,1}$, то разность $r_n(\varphi) - L_n(\varphi, r_n)$ принадлежит $Q_{n,1}$ и обращается в нуль в точках φ_k , $k = \overline{0, 2n}$, т.е. $r_n(\varphi) - L_n(\varphi, r_n)$ имеет $2n + 1$ нуль на $[0, 2\pi)$, поэтому $r_n(\varphi) - L_n(\varphi, r_n) \equiv 0$, так как тригонометрический полином порядка не выше n имеет не более $2n$ нулей в полуполосе $0 \leq \operatorname{Re} z < 2\pi$.

Норма в пространстве $C_{2\pi}$ определена равенством $\|f\|_{C_{2\pi}} = \max\{|f(\varphi)|, \varphi \in [0, 2\pi]\}$. Отметим также, что интерполяционный оператор (5) рассматривается как оператор из $C_{2\pi}$ в $C_{2\pi}$, так что (см., например, [5, с. 201])

$$\|L_n(\varphi, f)\|_{C_{2\pi}} \leq \|L_n\| \|f\|_{C_{2\pi}}, \quad \|L_n\| = \max\left\{\sum_{k=0}^{2n} |l_{k,n}(\varphi)|, \varphi \in [0, 2\pi]\right\}. \quad (6)$$

На основании интерполяционного оператора (5) рассмотрим квадратурную формулу для функции $f \in C_{2\pi}$

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi \approx \sum_{k=0}^{2n} A_k f(\varphi_k), \quad A_k = \int_0^{2\pi} l_{k,n}(\varphi) d\varphi. \quad (7)$$

Лемма 2. Квадратурная формула (7) обладает следующими свойствами:

- 1) она является точной для всякой тригонометрической рациональной функции $r_n \in Q_{n,1}$;
- 2) ее коэффициенты A_k , $k = \overline{0, 2n}$, положительны, причем

$$A_k = \frac{2\pi}{2\Phi'_n(\varphi_k) + 1}, \quad k = \overline{0, 2n};$$

- 3) выполняется равенство $\sum_{k=0}^{2n} A_k = 2\pi$.

Доказательство. Если $r_n \in Q_{n,1}$, то, согласно лемме 1, $r_n(\varphi) = L_n(\varphi, r_n)$, интегрируя это равенство, найдем

$$\int_0^{2\pi} r_n(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} L_n(\varphi, r_n) d\varphi = \sum_{k=0}^{2n} r_n(\varphi_k) \int_0^{2\pi} l_{k,n}(\varphi) d\varphi = \sum_{k=0}^{2n} A_k r_n(\varphi_k),$$

и, таким образом, первое свойство установлено.

Нам необходимо вычислить интеграл

$$I_k(e^{i\varphi_k}) = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\Phi_n(\varphi) + \varphi/2)}{\sin((\varphi - \varphi_k)/2)} d\varphi = e^{i\varphi_k/2} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(\Phi_n(\varphi) + \varphi)} - e^{-i\Phi_n(\varphi)}}{e^{i\varphi} - e^{i\varphi_k}} d\varphi.$$

С учетом равенства (1) при $|z| < 1$ рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} \tilde{I}_k(z) &= e^{i\varphi_k/2} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(\Phi_n(\varphi) + \varphi)} - e^{-i\Phi_n(\varphi)}}{e^{i\varphi} - z} d\varphi = e^{i\varphi_k/2} \int_0^{2\pi} \frac{\pi_n(e^{i\varphi})e^{i\varphi} - \pi_n(e^{i\varphi})^{-1}}{e^{i\varphi} - z} \frac{de^{i\varphi}}{ie^{i\varphi}} = \\ &= \frac{e^{i\varphi_k/2}}{i} \int_{|z|=1} \frac{\xi\pi_n(\xi) - \pi_n(\xi)^{-1}}{(\xi - z)\xi} d\xi. \end{aligned} \quad (8)$$

Принимая во внимание, что по интегральной формуле Коши $\int_{|z|=1} (\xi - z)^{-1} \pi_n(\xi) d\xi = 2\pi i \pi_n(z)$, а функция $((\xi - z)\xi\pi_n(\xi))^{-1}$ не имеет особых точек в области $|\xi| > 1$ и имеет на бесконечности нуль второго порядка, из (8) найдем $\tilde{I}_k(z) = 2\pi e^{i\varphi_k/2} \pi_n(z)$. Очевидно, что

$$I_k(e^{i\varphi_k}) = \lim_{z \rightarrow e^{i\varphi_k}} \tilde{I}_k(z) = 2\pi e^{i\varphi_k/2} \pi_n(e^{i\varphi_k}) = 2\pi e^{i(\Phi_n(\varphi_k) + \varphi_k/2)} = 2\pi \cos(\Phi_n(\varphi_k) + \varphi_k/2).$$

С учетом этого равенства и соотношений (5) и (7) будем иметь

$$A_k = \frac{\cos(\Phi_n(\varphi_k) + \varphi_k/2)}{2\Phi'_n(\varphi_k) + 1} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\Phi_n(\varphi) + \varphi_k/2)}{\sin((\varphi - \varphi_k)/2)} d\varphi = \frac{2\pi}{2\Phi'_n(\varphi_k) + 1}, \quad k = \overline{0, 2n},$$

коэффициенты A_k положительны в силу неравенства (2).

Для доказательства свойства 3) достаточно заметить, что $r_n(x) \equiv 1 \in Q_{n,1}$, и в силу точности квадратурной формулы на $Q_{n,1}$ найдем

$$\sum_{k=0}^{2n} A_k = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$$

Лемма 2 доказана.

Для функции $f \in C_{2\pi}$ определим наилучшее равномерное приближение тригонометрическими рациональными функциями из $Q_{n,1}$ и $Q_{n,2}$, полагая

$$R_n^T(f) = \inf(\|f - r_n\|, r_n \in Q_{n,1}), \quad R_{2n}^T(f) = \inf(\|f - r_{2n}\|, r_{2n} \in Q_{n,2}).$$

Теорема 1. Квадратурная формула (7) точна для рациональных функций из множества $Q_{n,2}$ и для ее погрешности справедлива оценка

$$\left| \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi - \sum_{k=0}^{2n} A_k f(\varphi_k) \right| \leq 4\pi R_{2n}^T(f). \quad (9)$$

Доказательство. Покажем, что любую тригонометрическую рациональную функцию $r_{2n} \in Q_{n,2}$ можно представить в виде

$$r_{2n}(\varphi) = \sin\left(\Phi_n(\varphi) + \frac{\varphi}{2}\right) \frac{p_{n-1/2}(\varphi)}{q_n(\varphi)} + \frac{p_n(\varphi)}{q_n(\varphi)}, \quad (10)$$

где $p_{n-1/2}(\varphi)$ – тригонометрический полином полуцелого порядка и рациональная функция $p_n(\varphi)/q_n(\varphi)$ принадлежит $Q_{n,1}$.

Действительно, пусть $L_n(\varphi, r_{2n})$ – значение интерполяционного оператора для функции r_{2n} , тогда $L_n(\varphi, r_{2n}) = r_n(\varphi) = p_n(\varphi)/q_n(\varphi)$ и разность $r_{2n}(\varphi) - p_n(\varphi)/q_n(\varphi)$ обращается в нуль в точках $\{\varphi_k\}_{k=0}^{2n}$, поэтому

$$r_{2n}(\varphi) - \frac{p_n(\varphi)}{q_n(\varphi)} = \sin\left(\Phi_n(\varphi) + \frac{\varphi}{2}\right) \frac{p_{n-1/2}(\varphi)}{q_n(\varphi)},$$

что равносильно равенству (10).

Покажем теперь, что

$$\int_0^{2\pi} \sin\left(\Phi_n(\varphi) + \frac{\varphi}{2}\right) \frac{p_{n-1/2}(\varphi)}{q_n(\varphi)} d\varphi = 0. \quad (11)$$

Поскольку тригонометрический полином полуцелого порядка можно записать в виде

$$t_{n-1/2}(\varphi) = \sum_{j=1}^n (a_j e^{i(j-1/2)\varphi} + b_j e^{-i(j-1/2)\varphi}),$$

то равенство (11) будет следовать из соотношений

$$I_j = \int_0^{2\pi} \sin\left(\Phi_n(\varphi) + \frac{\varphi}{2}\right) \frac{e^{i(j-1/2)\varphi}}{q_n(\varphi)} d\varphi = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (12)$$

которые нужно доказать. Снова используя формулы Эйлера и переходя к комплексным переменным, будем иметь

$$\begin{aligned} I_j &= \frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} (e^{i(\Phi_n(\varphi) + \varphi/2)} - e^{-i(\Phi_n(\varphi) + \varphi/2)}) \frac{e^{i(j-1/2)\varphi}}{q_n(\varphi)} d\varphi = \\ &= \frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} \frac{\pi_n(e^{i\varphi}) e^{i\varphi/2} - \pi_n(e^{i\varphi})^{-1} e^{-i\varphi/2}}{\prod_{k=1}^n (e^{i\varphi} - \alpha_k)(e^{-i\varphi} - \overline{\alpha_k})} e^{i(j-1/2)\varphi} d\varphi = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{|\xi|=1} \frac{\xi^{n+j-1}}{\prod_{k=1}^n (1 - \overline{\alpha_k} \xi)^2} d\xi + \frac{1}{2} \int_{|\xi|=1} \frac{\xi^{n+j-2}}{\prod_{k=1}^n (\xi - \alpha_k)^2} d\xi = 0,$$

поскольку в первом интеграле правой части подынтегральная функция аналитична в $|z| \leq 1$, а во втором – аналитична в $|\xi| \geq 1$ и в бесконечно удаленной точке имеет нуль второго порядка.

Из равенств (10), (11) и леммы 2 следует, что

$$\int_0^{2\pi} r_{2n}(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{p_n(\varphi)}{q_n(\varphi)} d\varphi = \int_0^{2\pi} r_n(\varphi) d\varphi = \sum_{k=0}^{2n} A_k r_n(\varphi_k) = \sum_{k=0}^{2n} A_k r_{2n}(\varphi_k),$$

т.е. квадратурная формула (7) точна на множестве $Q_{n,2}$, иными словами, формула (7) является квадратурной формулой типа Гаусса.

Пусть $r_{2n}^*(\varphi)$ – тригонометрическая рациональная функция наилучшего приближения для функции $f \in C_{2\pi}$, $r_{2n}^*(\varphi) \in Q_{n,2}$, т.е. выполняется равенство

$$\|f - r_{2n}^*\|_{C_{2\pi}} = R_{2n}^T(f).$$

Для погрешности квадратурной формулы имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi - \sum_{k=0}^{2n} A_k f(\varphi_k) \right| &= \left| \int_0^{2\pi} (f(\varphi) - r_{2n}^*(\varphi)) d\varphi + \sum_{k=0}^{2n} A_k (r_{2n}^*(\varphi_k) - f(\varphi_k)) \right| \leq \\ &\leq \int_0^{2\pi} |f(\varphi) - r_{2n}^*(\varphi)| d\varphi + \sum_{k=0}^{2n} A_k |r_{2n}^*(\varphi_k) - f(\varphi_k)| \leq 4\pi R_{2n}^T(f). \end{aligned}$$

Теорема 1 полностью доказана.

Заметим, что $R_n^T(f) \geq R_{2n}^T(f)$ и неравенство (9) остается справедливым, если в нем заменить $R_{2n}^T(f)$ на $R_n^T(f)$.

Рассмотрим теперь интегральное уравнение

$$x(s) - \lambda \int_0^{2\pi} h(s, t) x(t) dt = y(s), \quad (13)$$

где $y(s) \in C_{2\pi}$ – известная функция, ядро $h(s, t)$ имеет период 2π по каждой переменной и непрерывно по совокупности переменных. Как известно, при малых $|\lambda|$ решение уравнения (13) существует, единственно и является непрерывной периодической функцией (см., например, [6, с. 109]). Заменяя интеграл в левой части равенства (13) по квадратурной формуле (7) и требуя выполнения этого равенства только в узловых точках $\{\varphi_j\}_{j=0}^{2n}$, приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$z_j - \lambda \sum_{k=0}^{2n} A_k h(\varphi_j, \varphi_k) z_k = y(\varphi_j), \quad j = \overline{0, 2n}, \quad (14)$$

решение которой определяет приближенные значения для решения уравнения (13) в узловых точках. Под приближенным решением для всех значений s будем понимать рациональную функцию, определенную через $\{z_k\}_{k=0}^{2n}$ посредством интерполяционного оператора (5):

$$z(s) = \sum_{k=0}^{2n} z_k l_{k,n}(s). \quad (15)$$

Нам удобно также записывать систему (14) в операторной форме

$$\tilde{K} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \dots \\ z_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(\varphi_0) \\ y(\varphi_1) \\ \dots \\ y(\varphi_{2n}) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \dots \\ z_{2n} \end{bmatrix} = \tilde{K}^{-1} \begin{bmatrix} y(\varphi_0) \\ y(\varphi_1) \\ \dots \\ y(\varphi_{2n}) \end{bmatrix}, \quad (16)$$

где \tilde{K} – линейный оператор в пространстве R^{2n+1} и \tilde{K}^{-1} – соответствующий обратный оператор в том же пространстве.

Интегральное уравнение (13) будем также записывать в операторном виде $Kx = y$, где K – линейный оператор в пространстве $C_{2\pi}$ и $\|K\|$ – его норма как оператора из $C_{2\pi}$ в $C_{2\pi}$.

Будем предполагать, что ядро $h(s, t)$ можно аппроксимировать рациональными функциями из множества $Q_{n,1}$ по каждой переменной, т.е. существуют функции

$$h_1(s, t) = \frac{1}{q_n(t)} \left(\frac{a'_0(s)}{2} + \sum_{k=1}^n a'_k(s) \cos kt + b'_k(s) \sin kt \right),$$

$$h_2(s, t) = \frac{1}{q_n(s)} \left(\frac{a''_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^n a''_k(t) \cos ks + b''_k(t) \sin ks \right), \quad (17)$$

с непрерывными 2π -периодическими коэффициентами, и для этих функций выполнены неравенства

$$|h(s, t) - h_1(s, t)| \leq R_{\infty, n}^T(h), \quad |h(s, t) - h_2(s, t)| \leq R_{n, \infty}^T(h), \quad 0 \leq s, t \leq 2\pi. \quad (18)$$

Теорема 2. Если $x(s)$ – точное решение уравнения (13), для ядра которого выполнены условия (18), и $z(s) \in Q_{n,1}$ – приближенное решение, найденное из уравнений (14), (15), то справедлива оценка

$$\|x(s) - z(s)\|_{C_{2\pi}} \leq (\|L_n\| \|\tilde{K}^{-1}\| \|K\| + 1) (2\pi |\lambda| R_{n, \infty}^T(h) \|x\| + R_n^T(y)) + 4\pi \|L_n\| |\lambda| \|\tilde{K}^{-1}\| R_{\infty, n}^T(h) (R_n^T(y) + \|x\| (1 + 2\pi |\lambda| R_{n, \infty}^T(h))). \quad (19)$$

Доказательство. Сначала будем аппроксимировать точное решение рациональной функцией

$$\bar{x}(s) = \lambda \int_0^{2\pi} h_2(s, t) x(t) dt + \bar{y}(s), \quad (20)$$

где $\bar{y}(s) \in Q_{n,1}$ – рациональная функция наилучшего приближения для $y(s)$, поэтому $\|y(s) - \bar{y}(s)\| = R_n^T(y)$. Вычитая равенство (20) из (13), с учетом условий (18) будем иметь

$$\|x(s) - \bar{x}(s)\|_{C_{2\pi}} = \left\| \lambda \int_0^{2\pi} (h(s, t) - h_2(s, t)) x(t) dt + y(s) - \bar{y}(s) \right\| \leq 2\pi |\lambda| R_{n, \infty}^T(h) \|x\| + R_n^T(y). \quad (21)$$

Определим теперь рациональную функцию $\tilde{x}(s)$ своими значениями в узлах $\{\varphi_j\}_{j=0}^{2n}$, полагая с учетом (16), что

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}(\varphi_0) \\ \tilde{x}(\varphi_1) \\ \dots \\ \tilde{x}(\varphi_{2n}) \end{bmatrix} = \tilde{K}^{-1} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \dots \\ u_{2n} \end{bmatrix}, \quad u_j = \bar{x}(\varphi_j) - \lambda \int_0^{2\pi} h(\varphi_j, t) \bar{x}(t) dt, \quad j = \overline{0, 2n}. \quad (22)$$

Для рациональной функции $\bar{x}(s)$ ее значения в узлах с учетом соотношений (14) и (16) можно задать в виде

$$\begin{bmatrix} \bar{x}(\varphi_0) \\ \bar{x}(\varphi_1) \\ \dots \\ \bar{x}(\varphi_{2n}) \end{bmatrix} = \tilde{K}^{-1} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \dots \\ v_{2n} \end{bmatrix}, \quad v_j = \bar{x}(\varphi_j) - \lambda \sum_{k=0}^{2n} A_k h(\varphi_j, \varphi_k) \bar{x}(\varphi_k), \quad j = \overline{0, 2n}. \quad (23)$$

Вычитая соотношения (23) из (22) и оценивая значения оператора через его норму в R^{2n+1} , приходим к неравенству

$$\max_{0 \leq j \leq 2n} |\bar{x}(\varphi_j) - \tilde{x}(\varphi_j)| \leq \|\tilde{K}^{-1}\| \max_{0 \leq j \leq 2n} \left| \lambda \int_0^{2\pi} h(\varphi_j, t) \bar{x}(t) dt - \lambda \sum_{k=0}^{2n} A_k h(\varphi_j, \varphi_k) \bar{x}(\varphi_k) \right|. \quad (24)$$

Используя ядро $h_1(s, t)$, которое с учетом представления (17) является рациональной функцией по t из множества $Q_{n,1}$, и учитывая, что при всяком s произведение $h_1(s, t)\bar{x}(t)$ есть рациональная функция из $Q_{n,2}$, согласно теореме 1, получаем равенство

$$\int_0^{2\pi} h_1(\varphi_j, t) \bar{x}(t) dt = \sum_{k=0}^{2n} A_k h_1(\varphi_j, \varphi_k) \bar{x}(\varphi_k). \quad (25)$$

Из соотношений (24), (25), (18), леммы 2 и неравенства (21) следует, что

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq j \leq 2n} |\bar{x}(\varphi_j) - \tilde{x}(\varphi_j)| \leq \\ & \leq \|\tilde{K}^{-1}\| \max_{0 \leq j \leq 2n} \left| \lambda \int_0^{2\pi} (h(\varphi_j, t) - h_1(\varphi_j, t)) \bar{x}(t) dt + \lambda \sum_{k=0}^{2n} A_k (h_1(\varphi_j, \varphi_k) - h(\varphi_j, \varphi_k)) \bar{x}(\varphi_k) \right| \leq \\ & \leq 4\pi \|\tilde{K}^{-1}\| \|\lambda\| \|\bar{x}\| R_{\infty, n}^T(h) \leq 4\pi \|\tilde{K}^{-1}\| \|\lambda\| R_{\infty, n}^T(h) (\|x\| (1 + 2\pi|\lambda| R_{n, \infty}^T(h)) + R_n^T(y)). \end{aligned} \quad (26)$$

Тогда, учитывая (6), для равномерной нормы получаем

$$\|\bar{x}(\varphi) - \tilde{x}(\varphi)\|_{C_{2\pi}} \leq 4\pi \|\tilde{K}^{-1}\| \|\lambda\| R_{\infty, n}^T(h) (\|x\| (1 + 2\pi|\lambda| R_{n, \infty}^T(h)) + R_n^T(y)). \quad (27)$$

Если $\{z_j\}_{j=0}^{2n}$ – решение системы (14), то в силу уравнений (13) и (16) будем иметь

$$\begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \dots \\ z_{2n} \end{bmatrix} = \tilde{K}^{-1} \begin{bmatrix} y(\varphi_0) \\ y(\varphi_1) \\ \dots \\ y(\varphi_{2n}) \end{bmatrix}, \quad y(\varphi_j) = x(\varphi_j) - \lambda \int_0^{2\pi} h(\varphi_j, t) x(t) dt, \quad j = \overline{0, 2n}, \quad (28)$$

где $x(t)$ – точное решение интегрального уравнения.

Из соотношений (22), (28), (13) и (21) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq j \leq 2n} |\tilde{x}(\varphi_j) - z_j| \leq \|\tilde{K}^{-1}\| \max_{0 \leq j \leq 2n} \left| \bar{x}(\varphi_j) - x(\varphi_j) + \lambda \int_0^{2\pi} h(\varphi_j, t) (x(t) - \bar{x}(t)) dt \right| \leq \\ & \leq \|\tilde{K}^{-1}\| \|K\| \|x(s) - \bar{x}(s)\| \leq \|\tilde{K}^{-1}\| \|K\| (2\pi|\lambda| R_{n, \infty}^T(h) \|x\| + R_n^T(y)), \end{aligned}$$

поэтому для равномерной нормы (см. (15)) $\|\tilde{x}(s) - z(s)\|$ с учетом (6) получим оценку

$$\|\tilde{x}(s) - z(s)\| \leq \|L_n\| \|\tilde{K}^{-1}\| \|K\| (2\pi |\lambda| R_{n,\infty}^T(h) \|x\| + R_n^T(y)). \quad (29)$$

Собирая оценки (21), (27) и (29), в итоге будем иметь

$$\begin{aligned} \|x(s) - z(s)\| &\leq \|x(s) - \bar{x}(s)\| + \|\bar{x}(s) - \tilde{x}(s)\| + \|\tilde{x}(s) - z(s)\| \leq \\ &\leq (2\pi |\lambda| R_{n,\infty}^T(h) \|x\| + R_n^T(y)) (1 + \|L_n\| \|\tilde{K}^{-1}\| \|K\|) + \\ &+ 4\pi \|L_n\| \|\tilde{K}^{-1}\| |\lambda| R_{\infty,n}^T(h) (\|x\| (1 + 2\pi |\lambda| R_{n,\infty}^T(h)) + R_n^T(y)), \end{aligned}$$

что совпадает с оценкой (19).

Замечание. Все величины, входящие в правую часть оценки (19), ограничены, кроме нормы $\|L_n\|$ интерполяционного оператора, которая в ряде важных случаев имеет логарифмический рост по отношению к n . Эта правая часть существенно зависит от параметров $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$, которые выбираются в зависимости от свойств ядра $h(s, t)$ и правой части $y(s)$ интегрального уравнения. Если при целых n и положительном α существуют такие наборы $\{\alpha_k\}_{k=0}^n$, что выполнены соотношения

$$R_{\infty,n}^T(h) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad R_{n,\infty}^T(h) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad R_n^T(y) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

то из теоремы 2 немедленно следует, что для погрешности $\|x(s) - z(s)\|_{C_{2\pi}}$ справедлива порядковая оценка

$$\|x(s) - z(s)\|_{C_{2\pi}} = O\left(\frac{\|L_n\|}{n^\alpha}\right).$$

В заключение отметим, что рациональная аппроксимация применялась в работе [7] при оценке погрешности приближенного решения характеристического сингулярного интегрального уравнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Никольский С.М.* Квадратурные формулы. М., 1974.
2. *Турецкий А.Х.* О квадратурных формулах с четным числом узлов, точных для тригонометрических полиномов // Докл. АН БССР. 1960. Т. 4. № 9. С. 365.
3. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., 1959.
4. *Турецкий А.Х.* Теория интерполирования в задачах. Минск, 1968.
5. *Коровкин П.П.* Линейные операторы и теория приближений. М., 1959.
6. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. Л.; М., 1941.
7. *Митенков В.И., Русак В.Н.* Оценка погрешности одной аппроксимации характеристического сингулярного интегрального уравнения // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 3. С. 410–414.

Белорусский государственный университет,
г. Минск,
Белорусский государственный педагогический
университет им. М. Танка, г. Минск

Поступила в редакцию
16.03.2011 г.