АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ВЕЙЛЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМИ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Введение. Рассмотрим функции, представимые в виде свертки

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} D_r^{\alpha}(x-\tau)h(\tau)d\tau,\ \ r>0,\ \ -\infty<\alpha<\infty, \tag{1}$$

функции h с ядром Вейля

$$D_r^{\alpha}(\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-r}\cos\left(k\tau-\frac{\alpha\pi}{2}\right).$$

Если r натуральное и $\alpha=r$, то функция h является r-й производной по отношению к f. При дробных $r=\alpha$ функцию h также принято называть производной порядка r по отношению к f. При различных предположениях относительно h для функций (1) были найдены точные оценки наилучших полиномиальных и рациональных приближений (см., например, [1-5]).

Пусть h – функция ограниченной вариации на отрезке $[0,2\pi]$, $\mathrm{Var}\big(h(\tau),[0,2\pi]\big)\le 1$. Через $W_{2\pi}^{r,\alpha}V$ обозначим класс функций, определенных формулой (1), через $W_{2\pi}^{r,\alpha}V_0$ – класс функций, представимых интегралом Стилтьеса

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} D_{r+1}^{\alpha+1}(x-\tau)dh(\tau),\ \ r>0,\ \ -\infty<\alpha<\infty. \tag{2}$$

В частности, при $\alpha=r$ формулы (1) и (2) определяют свертки ядра Вейля с функциями ограниченной вариации, если $\alpha=r+1$, получаем свертки сопряженных ядер Вейля с функциями ограниченной вариации. Соответствующие классы называем $W_{2\pi}^{r}V$, $W_{2\pi}^{r}V_0$, $\tilde{W}_{2\pi}^{r}V$ и $\tilde{W}_{2\pi}^{r}V_0$. Через K^r в дальнейшем обозначаем один из классов $W_{2\pi}^{r,\alpha}V$, $W_{2\pi}^{r,\alpha}V_0$, $W_{2\pi}^{r}V$, $W_{2\pi}^{r}V_0$, $\tilde{W}_{2\pi}^{r}V$, $\tilde{W}_{2\pi}^{r}V_0$, через $C_j=C_j(r)$ – положительные константы, которые могут зависеть только от r. Константы, скрывающиеся за символом O, также зависят лишь от r. Под записью $\varphi(x)\asymp\psi(x)$ будем понимать, что отношение $\varphi(x)/\psi(x)$ ограничено сверху и снизу некоторыми положительными константами.

Точный порядок наилучших рациональных приближений на классах K^r был найден В. Н. Русаком в работе [4]

$$\sup_{f\in K_p^r} R_n^T(f)\asymp\frac{1}{n^{r+1}}.$$

Как известно из [4], функция $D_r^{\alpha}(\tau)$ аналитически продолжима с отрезка $[0,2\pi]$ во всю полосу $\Omega=\{z\,|\,0\le \operatorname{Re} z\le 2\pi\}$, за исключением, может быть, точек $z=0$ и $z=2\pi$. Поэтому $D_{r,n}^{\alpha}(\tau)$ – остаток ряда Фурье ядра $D_r^{\alpha}(\tau)$,

$$D_{r,n}^{\alpha}(z)=D_{r}^{\alpha}(z)-\sum_{k=1}^{\infty}k^{-r}\cos\left(kz-\frac{\alpha\pi}{2}\right),$$

также является аналитической в полосе Ω функцией, причем при $z\in\Omega,\ t,\tau\in R$ и любом действительном α имеют место доказанные в [4] соотношения

$$\left|D_{r+1,n}^{\alpha}(z)\right|=O\left(\frac{e^{n|\mathrm{Im}\,z|}}{n^{r}}\right),\ r>0,\ \ -\infty<\alpha<\infty \tag{3}$$

$$\left|D_{r+1,n}^{\alpha+1}(t)-D_{r+1,n}^{\alpha+1}(\tau)\right|\le\begin{cases}O\left(\left|\sin\left((t-\tau)/2\right)\right|^{r}\right),0<r<1,\\ O\left(\left|\sin\left((t-\tau)/2\right)\right|\left|\ln\left|\sin\left((t-\tau)/2\right)\right|\right|\right),\ r=1,\\ O\left(\left|\sin\left((t-\tau)/2\right)\right|/n^{r-1}\right),\ r>1.\end{cases} \tag{4}$$

Сумматорные рациональные операторы типа Лагранжа и их свойства. Пусть $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n},\ 0\le|\alpha_k|<1$ – заданная последовательность комплексных чисел, кроме того, еще n чисел взяты равными нулю. Через

$$\pi_n(z)=\prod_{k=1}^{2n}\frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}z}=z^{n}\prod_{k=1}^{n}\frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}z} \tag{5}$$

обозначим произведение Бляшке по этой системе параметров. Поскольку $|\pi_n(z)|=1$ на единичной окружности, то выполняется равенство

$$\pi_n(e^{iu})=e^{i\Phi_n(u)},$$

где $\Phi_n(u)=\arg\pi_n(e^{iu}),\ 0\le\Phi_n(0)=\arg\prod_{k=1}^{n}\frac{1-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}}<2\pi$.

Пользуясь равенством (5), нетрудно проверить, что

$$\Phi_n'(u)=n+\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|\alpha_k|^{2}}{\left(e^{iu}-\alpha_k\right)\left(e^{-iu}-\overline{\alpha_k}\right)}=n+\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|\alpha_k|^{2}}{\left(1-|\alpha_k|\right)^{2}+4|\alpha_k|\sin^{2}\frac{u-\arg\alpha_k}{2}}. \tag{6}$$

Следовательно, при изменении u от 0 до 2π аргумент $\Phi_n(u)+u/2$ возрастает от $\Phi_n(0)$ до $\Phi_n(0)+(4n+1)\pi$, соответственно $\sin\left(\Phi_n(u)+u/2\right)$ имеет нули в точках $\{u_j\}$,

$$0\le u_0<u_1<\ldots<u_{4n}<2\pi,$$

при этом имеют место равенства

$$\Phi_n(u_{j+1})+u_{j+1}/2-\Phi_n(u_j)-u_j/2=\pi,\ j=\overline{0,4n-1}. \tag{7}$$

Будем обозначать через Q_n множество $\{p_{2n}(x)/q_n(x)\}$ тригонометрических рациональных функций порядка не выше $2n$ с фиксированным знаменателем $q_n(x)=\prod_{k=1}^{n}\left(e^{ix}-\alpha_k\right)\left(e^{-ix}-\overline{\alpha_k}\right)$. Для любой функции $f(u)$ из пространства $C_{2\pi}$ непрерывных 2π-периодических функций построим интерполяционный рациональный оператор L_{2n} (впервые он был введен в работе [6], но имел несколько иную конструкцию), полагая

$$L_{2n}(u,f)=\sum_{j=0}^{4n} f(u_j)l_{j,n}(u),\ \ l_{j,n}(u)=\frac{\sin\left(\Phi_n(u)+\dfrac{u}{2}\right)\cos\left(\Phi_n(u_j)+\dfrac{u_j}{2}\right)}{\left(1+2\Phi'_n(u_j)\right)\sin\dfrac{u-u_j}{2}}. \quad (8)$$

Лемма 1. *Введенный равенством* (8) *оператор* L_{2n}

1) *любую функцию* $f\in C_{2\pi}$ *отображает в тригонометрическую рациональную функцию из* Q_n*;*
2) *удовлетворяет условиям* $L_{2n}(u_j,f)=f(u_j),\ j=\overline{0,4n}$*;*
3) *является точным на множестве* Q_n.

Утверждения леммы верны в силу справедливости аналогичной леммы из работы [6].

Следствие 1. О*ператор* L_{2n} *точен на тригонометрических многочленах степени не выше n.*

Действительно, любой тригонометрический многочлен степени не выше n входит в Q_n.

Леммы о расположении полюсов. Через ρ обозначаем число, равное $\rho=\rho(N)=\exp(-1/\sqrt{N})$. Число N будет определено далее.

Лемма 2. *Если на каждом из m лучей* $\arg z=\tau_j,\ j=\overline{1,m}$ *расположено* N *параметров* $\{\alpha_k\}_{k=1}^N$ *по правилу* $\alpha_k=(1-\rho^k)e^{i\tau_j}$, *то при* $|u-v|\le\pi/\Phi'_n(u)$ *ограничено отношение*

$$\frac{1}{3}\le\frac{\Phi'_n(u)}{\Phi'_n(v)}\le 3.$$

Доказательство леммы 2 можно найти в **[**7**]**.

Лемма 3. *Пусть из n параметров* $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ Nm *расположены так, как в лемме 2 при условии* $N\ge C_1\ln^2 n,\ m\le n/N$, *а остальные* $n-Nm$ *равны нулю. Тогда для нормы оператора* L_{2n} *верно неравенство*

$$\|L_{2n}\|=\max\left\{\sum_{j=0}^{4n}\left|l_{j,n}(u)\right|\,|\,u\in[0,2\pi]\right\}=O(\ln n).$$

Доказательство. Так как лучи, на которых находятся параметры $\{\alpha_k\}_{k=1}^{mN}$, могут располагаться произвольным образом, то без ограничения общности будем считать, что $u=\pi$. Пусть s – такой номер, что $u\in[u_s,u_{s+1}]$. Оцениваемую сумму представим в виде

$$\sum_{j=0}^{4n}\left|l_{j,n}(u)\right| = \sum_{j=0}^{s-2}\left|l_{j,n}(u)\right| + \sum_{j=s-1}^{s+2}\left|l_{j,n}(u)\right| + \sum_{j=s+3}^{4n}\left|l_{j,n}(u)\right| = S_1 + S_2 + S_3.$$

Начнем с суммы S_2. С учетом теоремы Лагранжа и леммы 2 будем иметь

$$\left|l_{s,n}(u)\right| \le \frac{\left|\sin\left(\Phi_n(u)+\frac{u}{2}\right)-\sin\left(\Phi_n(u_j)+\frac{u_j}{2}\right)\right|}{\left(1+2\Phi_n'(u_j)\right)\left|\sin\frac{u-u_j}{2}\right|} = \frac{\left|\left(\sin\left(\Phi_n(\xi)+\frac{\xi}{2}\right)\right)'\right|\left|u-u_j\right|}{\left(1+2\Phi_n'(u_j)\right)\left|\sin\frac{u-u_j}{2}\right|} \le$$

$$\le \frac{\left(1+2\Phi_n'(\xi)\right)\left|\frac{u-u_j}{2}\right|}{\left(1+2\Phi_n'(u_j)\right)\left|\sin\frac{u-u_j}{2}\right|} \le 3\frac{\left|\frac{u-u_j}{2}\right|}{\left|\sin\frac{u-u_j}{2}\right|} < 4,$$

$$\left|l_{s-1,n}(u)\right| \le \frac{\left(1+2\Phi_n'(\zeta)\right)\left|\frac{u-u_j}{2}\right|}{\left(1+2\Phi_n'(u_j)\right)\left|\sin\frac{u-u_j}{2}\right|} \le 9\frac{\left|\frac{u-u_j}{2}\right|}{\left|\sin\frac{u-u_j}{2}\right|} < 10,$$

где $\xi \in [u_s, u]$, $\zeta \in [u_{s-1}, u]$. Для слагаемых $\left|l_{s,n}(u)\right|$ и $\left|l_{s+1,n}(u)\right|$ будут верны такие же оценки, поэтому заключаем

$$S_2 < 28. \qquad (9)$$

Из (6) при любом x получаем

$$\Phi_n'(x) \le 2n - mN + \sum_{k=1}^{n}\frac{1-\left|\alpha_k\right|^2}{\left(1-\left|\alpha_k\right|\right)^2} = 2n - mN + m\sum_{k=1}^{N}\frac{1+\left|\alpha_k\right|}{1-\left|\alpha_k\right|} \le 2n - mN + 2m\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\rho^k} =$$

$$= 2n - mN + 2m\frac{\rho^{-N}-1}{1-\rho} \le n + 3m\frac{\sqrt{N}}{\rho^N} \le 2n - mN + \frac{3n}{\sqrt{N}e^{-\sqrt{N}}} \le ne^{\sqrt{N}} = n^{\sqrt{C_1}+1} =: \frac{1}{d_n}.$$

Покажем теперь, что $u - u_{s-1} > d_n$, $u_{s+2} - u > d_n$. Действительно, из (7) следует соотношение

$$\int_{u_j}^{u_{j+1}} \Phi_n'(t)dt = \Phi_n(u_{j+1}) - \Phi_n(u_j) = \pi - (u_{j+1}-u_j)/2 > 3,$$

но

$$\int_{u-d_n}^{u+d_n} \Phi_n'(t)dt \le \frac{2d_n}{d_n} = 2,$$

поэтому на отрезке $[u-d_n, u+d_n]$ не может находиться более одной точки u_j.

Снова используя теорему Лагранжа и лемму 2, для сумм S_1 и S_3 будем иметь

$$S_1+S_3\le\frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{s-2}\frac{\Phi_n'(\xi_j)(u_{j+1}-u_j)}{\left(1+2\Phi_n'(u_j)\right)\left|\sin\frac{u-u_j}{2}\right|}+\frac{1}{\pi}\sum_{j=s+2}^{4n}\frac{\Phi_n'(\xi_j)(u_j-u_{j-1})}{\left(1+2\Phi_n'(u_j)\right)\left|\sin\frac{u-u_j}{2}\right|}\le$$

$$\le 6\int_{d_n}^{\pi}\frac{dx}{x}=6\ln\frac{\pi}{d_n}=O\left(\ln n\right),$$

откуда с учетом (9) следует утверждение леммы.

Лемма 4. *Пусть параметры* $\{\alpha_k\}_{k=1}^{mN}$ *расположены так, как в лемме 2,* τ_k *и* τ_{k+1} *– аргументы соседних лучей,* $\tau_{k+1}-\tau_k\le\frac{2\pi}{3}$, $\tau\notin\left[\tau_k,\tau_{k+1}\right]$, $N\ge\left(3\frac{2r+1}{r}\ln n\right)^2$, $\left|\sin\frac{u-\tau_{k+1}}{2}\right|>n^{-\frac{r+1}{r}}$, *тогда справедливы соотношения*

$$\left|\sum_{\tau_k\le u_j<\tau_{k+1}}\left(D_{r+1,n}^{\alpha}(u-\tau)-D_{r+1,n}^{\alpha}(u_j-\tau)\right)l_{j,n}(u)\right|=\begin{cases}O\left(\frac{\ln n}{n^{r+1}}\right), & \left|\sin\frac{u-\tau_k}{2}\right|\le n^{-\frac{r+1}{r}},\\ O\left(\frac{1}{n^{r+2}}\right), & \left|\sin\frac{u-\tau_k}{2}\right|\ge n^{-\frac{r+1}{r}}.\end{cases}$$

Лемма доказывается по схеме, используемой в [8] при доказательстве подобной леммы.

Оценки уклонений рациональных операторов в равномерной метрике.

Теорема. *Если функция* $f(u)\in K^r$, *то при подходящем выборе параметров* $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n}$ *справедлива оценка*

$$\left\|L_{2n}(u,f)-f(u)\right\|=O\left(\frac{\ln^3 n}{n^{r+1}}\right).$$

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать теорему для функций классов $W_{2\pi}^{r,\alpha}V$ и $W_{2\pi}^{r,\alpha}V_0$. Начнем со случая $f(u)\in W_{2\pi}^{r,\alpha}V_0$, $0<r<1$. Не ограничивая общность, в дальнейшем будем считать, что $h(\tau)$ – непрерывная слева функция ограниченной вариации.

Определим число b равенством $b=2\left(3\frac{2r+1}{r}\right)^2$ и будем полагать, что $n\ge 3b\ln^2 n$. Сделаем разбиение отрезка $\left[0,2\pi\right]$ точками τ_k, $k=\overline{1,m+1}$, по правилу

$$0=\tau_1<\tau_2<\ldots<\tau_{m+1}=2\pi,$$

$$\tau_{k+1}=\max\left\{\tau:\tau_k<\tau\le 2\pi,\ \tau-\tau_k\le 2\pi/3,\ \mathrm{Var}\left(h,\left(\tau_k,\tau\right)\right)\le\frac{b\ln^2 n}{n}\right\}. \qquad (10)$$

Понятно, что число точек разбиения не превосходит

$$\left[\frac{n}{b\ln^2 n}\right]+4.$$

Разместим по $N=\left[1/2b\ln^2 n+1\right]$ параметров α_k на каждом радиальном луче $\arg\theta=\tau_l$, $l=\overline{1,m}$ в точках

$$\left(1-\rho^k\right)e^{i\tau_l}, k=\overline{1,N}.$$

Общее количество задействованных параметров (без учета тех n параметров, которые равны нулю), не превосходит n. Действительно,

$$mN=\left[\frac{n}{b\ln^2 n}+4\right]\left[1/2b\ln^2 n+1\right]\le n.$$

Остальные $n-mN$ параметров можно взять равными нулю.

Через Δ_k будем обозначать отрезок $\left[\tau_k,\tau_{k+1}\right]$. На основании леммы 1, следствия 1 и представления (2) запишем уклонение значения оператора V_{4n-1} от функции $f(u)$ в форме

$$f(u)-L_{2n}(u,f)=\sum_{j=0}^{4n}\left(f(u)-f(u_j)\right)l_{j,n}(u)=$$

$$=\sum_{j=0}^{4n}\int_0^{2\pi}\left(D_{r+1,n}^{\alpha+1}\left(u-\tau\right)-D_{r+1,n}^{\alpha+1}\left(u_j-\tau\right)\right)dh\left(\tau\right)l_{j,n}(u)= \qquad (11)$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\sum_{\tau_k\le u_j<\tau_{k+1}}\left(\int_{\Delta_k}+\int_{[0,2\pi]\setminus\Delta_k}\right)\left(D_{r+1,n}^{\alpha+1}\left(u-\tau\right)-D_{r+1,n}^{\alpha+1}\left(u_j-\tau\right)\right)dh\left(\tau\right)l_{j,n}(u)=S_1+S_2.$$

С учетом (3), (10) и леммы 3 для суммы S_1 будем иметь

$$\left|S_1\right|\le\frac{C_{11}}{n^r}\sum_{k=1}^{m}\sum_{\tau_k\le u_j<\tau_{k+1}}\int_{\Delta_k}\left|dh\left(\tau\right)\right|\left|l_{j,n}(u)\right|\le\frac{C_{11}}{n^r}\frac{b\ln^2 n}{n}\sum_{j=0}^{4n}\left|l_{j,n}(u)\right|=O\left(\frac{\ln^3 n}{n^{r+1}}\right). \qquad (12)$$

Для точки u, в которой производится оценка уклонения, определим окрестность

$$\delta_n\left(u\right)=\left\{x\,|\,0\le x\le 2\pi,\left|\sin\frac{u-x}{2}\right|\le n^{-\frac{r+1}{r}}\right\},$$

состоящую из одного или двух отрезков. Пусть $S_2=S_{21}+S_{22}+S_{23}$, где S_{21} берется по отрезкам Δ_k, полностью принадлежащим $\delta_n\left(u\right)$, S_{23} – по отрезкам, не имеющим общих внутренних точек с $\delta_n\left(u\right)$. Принимая во внимание лемму 3 и соотношения (3) и (10), для S_{21} находим

$$\left|S_{21}\right|\le\sum_k\sum_{\tau_k\le u_j<\tau_{k+1}}\int_{[0,2\pi]\setminus\Delta_k}\left|D_{r+1,n}^{\alpha+1}\left(u-\tau\right)-D_{r+1,n}^{\alpha+1}\left(u_j-\tau\right)\right|\left|dh\left(\tau\right)\right|\left|l_{j,n}(u)\right|\le$$

$$\le\frac{C_{12}}{n^{r+1}}\sum_k\sum_{\tau_k\le u_j<\tau_{k+1}}\left|l_{j,n}(u)\right|=O\left(\frac{\ln n}{n^{r+1}}\right). \qquad (13)$$

Для оценки S_3^{μ} будем использовать лемму 4

$$\left|S_{23}\right| \le \sum_{k} \int\limits_{[0,2\pi]\setminus\Delta_k} \left| \sum_{\tau_k \le u_j < \tau_{k+1}} \left(\left(D_{r+1,n}^{\alpha+1}\left(u-\tau\right) - D_{r+1,n}^{\alpha+1}\left(u_j-\tau\right) \right) l_{j,n}(u) \right) \right| \left|dh\left(\tau\right)\right| \le$$
$$\le \frac{C_{13}m}{n^{r+2}} = O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right). \qquad (14)$$

Ясно, что в сумму S_{22} входит не более двух слагаемых, поэтому при ее оценке с учетом леммы 4 будем иметь

$$\left|S_{22}\right| \le \sum_{k} \int\limits_{[0,2\pi]\setminus\Delta_k} \left| \sum_{\tau_k \le u_j < \tau_{k+1}} \left(\left(D_{r+1,n}^{\alpha+1}\left(u-\tau\right) - D_{r+1,n}^{\alpha+1}\left(u_j-\tau\right) \right) l_{j,n}(u) \right) \right| \left|dh\left(\tau\right)\right| = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+1}}\right). \qquad (15)$$

Собирая соотношения (11)–(15), окончательно получим

$$\left| f(u) - L_{2n}(u, f) \right| = O\left(\frac{\ln^3 n}{n^{r+1}}\right).$$

Таким образом, для случая $f(u) \in W_{2\pi}^{r,\alpha}V_0$, $0 < r < 1$ теорема доказана.

Если $f(u) \in W_{2\pi}^{r,\alpha}V$, то после интегрирования по частям будем иметь

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} D_r^{\alpha}(x-\tau)h(\tau)d\tau = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} D_{r+1}^{\alpha+1}(x)\left(h(0) - h(2\pi)\right) +$$
$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} D_{r+1}^{\alpha+1}(x-\tau)h(\tau)d\tau = f_1(x) + f_2(x),$$

где $f_1(x)$ состоит из первых двух слагаемых, а $f_2(x)$ образована третьим слагаемым и, очевидно, принадлежит классу $W_{2\pi}^{r,\alpha}V_0$. Для данной функции $h(\tau)$ и $0 < r < 1$ расположим параметры $\left\{\alpha_k\right\}_{k=1}^{n}$ так же, как и раньше. В силу доказанного имеет место соотношение

$$\left\| L_{2n} - f_2(u) \right\| = O\left(\frac{\ln^3 n}{n^{r+1}}\right).$$

Уклонение $\left| L_{2n} - f_1(u) \right|$ оценивается точно так же, как сумма S_2, отсюда получаем

$$\left\| L_{2n} - f_1(u) \right\| = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+1}}\right),$$

и, следовательно,

$$\left\| L_{2n} - f(u) \right\| = O\left(\frac{\ln^3 n}{n^{r+1}}\right).$$

При $r \ge 1$ общая схема оценки уклонения остается такой же, но в деталях доказательство несколько упрощается благодаря большей гладкости функции $f(u)$.

Теорема доказана.

Из теоремы следует, что при указанном расположении параметров $\left\{\alpha_k\right\}_{k=1}^{2n}$ уклонение операторов L_{2n} на рассмотренном функциональном классе существенно меньше, чем наилучшие полиномиальные приближения, имеющие порядок $1/n^r$, и лишь логарифмическим множителем по порядку отличается от наилучших рациональных приближений.

Отметим в заключение, что в работе [8] Е.А. Ровбой использовались схожие по конструкции операторы для приближения непериодических функций с дробной производной в смысле Римана–Лиувилля ограниченной вариации. Полученное уклонение имело такой же порядок, что и в настоящей работе.

Литература

1. *Дзядык, В. К.* К вопросу о наилучшем тригонометрическом приближении кратно монотонных функций в метрике / В. К. Дзядык // Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. – М., 1961. – С. 72–82.
2. *Стечкин, С. Б.* О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций тригонометрическими полиномами / С. Б. Стечкин // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1965. – № 20. – С. 643–648.
3. *Теляковский, С. А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними из рядов Фурье / С. А. Теляковский // Тр. ММО. – 1961. – Т.52. – С. 61–97.
4. *Русак, В. Н.* Точные порядковые оценки для наилучших рациональных приближений на классах функций, представимых в виде свертки / В. Н. Русак // Матем. сб. – 1985. –Т. 128. – №4. – С. 492-515.
5. *Старовойтов, А. П.* Рациональные приближения интегралов Римана–Лиувилля и Вейля / А. П. Старовойтов // Матем. заметки. – 2005.– Т. 87. – №3. – С. 428–441.
6. *Русак, В. Н.* Рациональная интерполяция и квадратурные формулы для периодических функций / В. Н. Русак, Н. В. Гриб // Вестник БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. – 2011. – №2.– С. 102–106.
7. *Русак, В. М.* Аб адным спосабе інтэрпаляцыі рацыянальнымі функцыямі / В.М. Русак, Т.С. Мардвілка // Весці БДПУ. Сер. 3, Фізіка. Матэматыка. Інфарматыка. Біялогія. Геаграфія. – 2006. – №2. – С. 13-15.
8. *Ровба, Е. А.* Рациональная интерполяция дифференцируемых функций с *r*-й производной ограниченной вариации / Е. А. Ровба // Матем. заметки. – 1993. – Т. 53. – №2. – С. 114–121.