View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Belarusian State Pedagogical University Repository

О.Н. Пирютко, Р. А.Курилович (Минск, Беларусь)

НЕКОТОРЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ОРГАНИЗАЦИИ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ШКОЛЬНИКОВ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Abstract
One of the aspects of the professional activity of a teacher is related to the organisation of the research activity of pupils, viewed as a base of developments of their intelligence, capacity to solve creative problems or to form their competencies. In this article we describe the organisation of the research, based on the integration of the algebraic and geometric material through stating and solving non standard problems, whose commom feature is finding a minimal or a maximal value from the set of all possible minimal or maximal values.

Одно из направлений профессиональной деятельности учителя связано с организациейисследовательскойдеятельности школьников, как основы развития интеллектуальныхспособностей, выполнения заданий творческого характера, формирования компетенций, необходимыхкак внутри предметной,так и вне предметнойдеятельности.

В [2]были отмеченынекоторые обобщенные приемы развития идеи задачи для организации учебного исследования: прием усиления условия задачи,динамизации ситуации условия задачи, усиления требования задачи, расширения теоретической базы исследования, рационального решения задачи, обобщения и конкретизации, изменения содержательной области исследования.Рассмотрим направление, ориентированное навозможности интеграции различных разделов школьного курса математики для организации исследовательской деятельности.

Традиционно, одним изэффективных методов решения задач является функциональныйподход, основанныйнаприменении свойств элементарных функций: области определения, множества значений, монотонности, ограниченности, четности и нечетности, периодичности и др.

В школьных учебникахи учебных пособиях иллюстрация указанного подхода реализуется на примерах следующего типа:

Пример 1. Решите уравнение $\sqrt{7-x} = x - 1$.

Решение. Очевидно, что x = 3 - корень уравнения. Поскольку левая часть уравнения это –убывающая функция на всейобласти определения, а правая – возрастающая функция, то убеждаемся, что других корней нет.

Пример 2. Решите уравнение $\sqrt{x-1} + \sqrt{1-x} = x^2 - 1$.

Найдем область определения уравнения $\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1$. Таким образом, область определения уравнения состоит из одного числа. Останется проверить, является ли число x = 1корнем исходного уравнения.

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

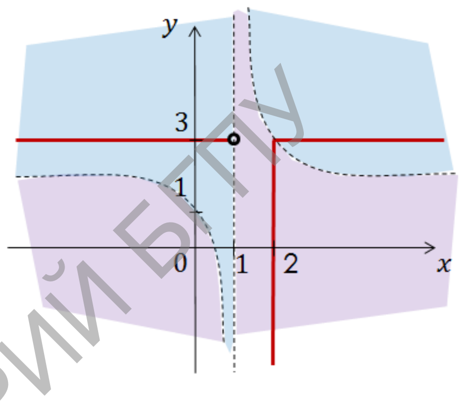
Убеждаемся в этом, подставляя x = 1 в исходное уравнение: $x=1\Rightarrow\sqrt{1-1}+\sqrt{1-1}=1^2-1$. Равенство верное, значит x = 1 - корень исходного уравнения.

Рассмотрение задач следующего содержанияпозволяет расширить возможности функциональнойлинии, оказывает существенное влияние как на содержание линии уравнений и неравенств, так и на стиль познавательнойдеятельности,связанной с привлечениемграфических моделей к решению и исследованию уравнений, неравенств и систем.

Уточнение**:**$\max$ и $\min$ в предложенных заданияхозначает наибольшее и наименьшее значение выражения.

1. Решить уравнения:

а) $\max\left\{y-2;\frac{1}{x-1}\right\}=1$



Решение

① $\begin{cases} y-2\ge\frac{1}{x-1} \\ y-2=1 \end{cases};\ \begin{cases} y\ge\frac{1}{x-1}+2 \\ y=3 \end{cases}.$

② $\begin{cases} y-2\le\frac{1}{x-1} \\ \frac{1}{x-1}=1 \end{cases};\ \begin{cases} y\le\frac{1}{x-1}+2 \\ x=2 \end{cases}.$

Ответ: точки, координаты которых удовлетворяютданному уравнению,лежат напрямых:$y=3$ при$x\in(-\infty;1)\cup[2;+\infty)$ и $x=2$ при $y\in(-\infty;3)$.

б) $\min\left\{\mathrm{y}-2;\frac{1}{\mathrm{x}-1}\right\}=1.$

2. Простроить графики:

а) $y=\max\left\{\frac{|x|}{x^2};|x|\right\}$; б) $f(x)=\min\left\{\frac{|\mathrm{x}|}{\mathrm{x}^2};|\mathrm{x}|\right\}$.

3.Найти$\max(\min\left\{\frac{|\mathrm{x}|}{\mathrm{x}^2};|\mathrm{x}|\right\})$.

4.Найдите все значения x>1при каждом из которыхнаибольшее их двух чисел $a=log_2x+2log_x32-2$ и $b=41-(log_2x^2)^2$больше , чем 5.

Задачи такого вида можно предложить учащимся на уроке по обобщению, повторению и систематизации изученного. Они носят исследовательский характер и ориентированы на формирование соответствующих познавательных операций.

Следующийблок задач позволит внестиуже знакомую идею на вычисление $\max$ и $\min$ от $\max$ или$\min$ в геометрический материал. С другой стороны, формируется способность в знакомых, традиционных и часто используемых понятиях находить новое, не исследованное. Таким понятием, которое используется в большинстве задач «на треугольник», являетсяпонятие произвольного треугольника.Как правило,результатом

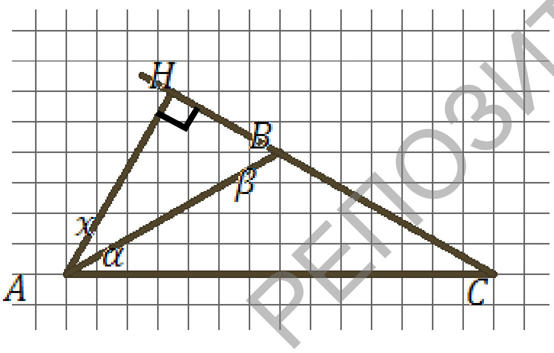
РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

требования «построить произвольный треугольник», у учащихся в тетрадяхпоявляется изображение почти правильного треугольника. Вопрос отыскания наиболее произвольного из всех произвольныхтреугольниковявляется исследовательским и обсуждается в [1]. Его развитие может быть предложено для организации исследовательской деятельности, как на уроке, так и на факультативных занятиях.

Основой исследования является определение наибольшего значения из минимальных разностей углов треугольника.Например, для прямоугольного треугольника, это будут разности$\beta-\alpha$ и $90-\beta$, $90-\alpha$,где величины острых углов прямоугольного треугольника α и β. Тогда,поскольку $90-\beta=\alpha$, а$90-\alpha=\beta$ и $\alpha\le\beta$, то наименьшими разностями будут$\beta-\alpha$ и $90-\beta$.Значит, следует искатьнаибольшее значение из наименьших из этих разностей, т.е.max (min $(\beta-\alpha, 90-\beta)$) или определять$\max\min(\alpha, 90-2\alpha)$.А это задача уже знакома в рамках рассмотренных алгебраических задач.

Нами рассматривается развитие этой идеи через систему упражнений вида:

1.Из всех тупоугольных равнобедренных треугольников ABCс вершиной Bвысотой AH найдите тот, в котором наименьший из углов BAC и BAH будет наибольшим.



Решение:

Пусть α – угол при основании, $\beta=180-2\alpha$ — угол при вершине, причем $\beta>90$, $0<\alpha<45$. Нужно найти$\max(\min(\alpha,x))$.

Сумма углов ΔABC:

$2\alpha+\beta=180°\Rightarrow\alpha=90°-\frac{\beta}{2}$.

Сумма углов ΔAHB:

$x+(180°-\beta)+90°=180°\Rightarrow x=\beta-90°$.

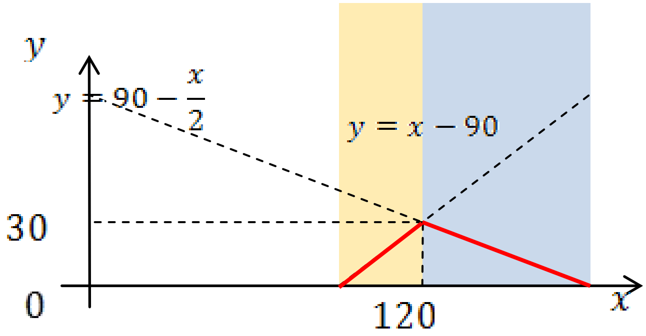
Таким образом, нужно найти такое $\beta\in(90;180)$, чтобы наименьшая из величин $\alpha=90°-\frac{\beta}{2}$ и $x=\beta-90°$ была как можно больше. Формулой это записывается так: $\max_{90<\beta<180}\min(90°-\frac{\beta}{2},\beta-90°)$.

Посторoим $y=\min(90-\frac{x}{2},x-90)$.

$$\text{①}\begin{cases}90-\frac{x}{2}\le x-90\\ y=90-\frac{x}{2}\end{cases};\begin{cases}x\ge 120\\ y=90-\frac{x}{2}\end{cases}.$$

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

$$②\begin{cases} 90-\frac{x}{2} \geq x-90 \\ y = x-90 \end{cases}; \begin{cases} x \leq 120 \\ y = x-90 \end{cases}.$$



Максимум достигается при $x = 120$.

2. Из всех остроугольных равнобедренных треугольников с углом $\gamma \in [90°; 180°)$образованным между прямой, выходящей из угла при основании, и боковой стороной треугольника найти тот, у которого наименьший из углов $\gamma - \alpha$ и $\gamma - \beta$будет наибольшим, где α - величина угла при вершине треугольника, β – величина угла при основании треугольника.

Дальнейшее исследованиесвязано с поиском способов построения выявленных видов треугольников без транспортира. Один из подходов, который также выводит на интеграцию различных разделов математики, связан с изучение цепных дробей:например,произвольный прямоугольный треугольник $(30°; 60°; 90°)$. Отношение его катетов равно

$$tg60° = \sqrt{3} = 1 + \sqrt{3} - 1 = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{3-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} = 1 + \frac{1}{\frac{2+\sqrt{3}-1}{2}}$$

$$= 1 + \frac{1}{1+\frac{\sqrt{3}-1}{2}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}-1}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{3}+1}}$$

$$= \cdots$$

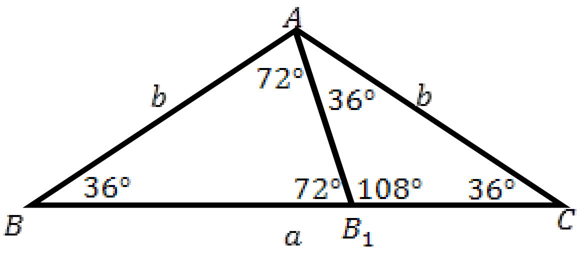
«Обрывая» эту дробь в разных местах, получаем все более точные приближения числа $\sqrt{3}$ обыкновенными дробями:

$1 + \frac{1}{1} = 2$; $1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{5}{3}$. Таким образом, построение указанного треугольника по его катетам (5 и 3) будет достаточным приближением к произвольному.

Мы рассматриваем возможность применения цепных дробей к построению равнобедренных треугольников с углами при вершине $108°$ и $36°$ с достаточной степенью точности.

1. В равнобедренном треугольнике с углом при вершине $108°$найти отношение основания к боковой стороне.

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ



В треугольнике ABC углы $108°, 36°, 36°$. Откладываем $BB_1 = b$ на стороне $BC = a$ (b уложится в a один раз, потому что $a < 2b$).

Имеем: $\frac{a}{b} = \frac{BC}{BB_1} = \frac{BB_1 + B_1C}{BB_1} = 1 + \frac{B_1C}{BB_1} = 1 + \frac{B_1C}{AC} = 1 + \frac{1}{t}$, $t = \frac{AC}{B_1C}$.

Треугольник B_1AC подобен данному треугольнику ABC. t есть отношение основания к боковой стороне в треугольнике теми же углами. Продолжая аналогичные действия, получим $\frac{a}{b} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ldots}}}}$. «Обрывая» эту дробь, найдем отношение основания к боковой стороне: $1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+1}}} = \frac{8}{5}$.

Откуда отношение высоты к половине основания равно 3:4.Таким образом, можно построить указанные треугольник, используя отношения высоты, проведенной к основанию, к половине основания.

Аналогичным образом решается задача:в равнобедренном треугольнике с углом при вершине $36°$ найти отношение основания к боковой стороне.

Практическая сторона полученных результатов:
как правило,построение правильных многоугольников – пятиугольников, десятиугольников для решения задач требует применения транспортира или циркуля. Построение же с помощью отношения сторон прямоугольного треугольника делает построение достаточно точным и целесообразным.

Таким образом, в предложенном учебном исследовании реализуются эффективные направления познавательной деятельности: применение интеграции различных разделов школьного курса математики, развитие основной идеи исследования через содержательные задачи не стандартного характера, практическое применение полученных результатов.

Список литературы

1. Акулич. И. Самый произвольный треугольник / И. Акулич // Квант. – 2001. – № 3. – С. 47–53.

2. Пирютко. О. От учебной задачи – к учебному исследованию / О. Пирютко // Народная Асвета. – 2009. – 11 ліст. – С. 27.

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ