Міністэрства адукацыі Рэспублікі Беларусь

Установа адукацыі
«Беларускі дзяржаўны педагагічны універсітэт імя Максіма Танка»

У. А. Шылінец, С. А Лугоўскі

ВЫЗНАЧАНЫ ІНТЭГРАЛ

Курс лекцый

Мінск 2004

УДК 517.31(075.8)
ББК 22.161.1я73
Ш11

Друкуецца па рашэнні рэдакцыйна-выдавецкага савета БДПУ
Рэкамендавана секцыяй фізіка-матэматычных і тэхнічных навук
(пратакол № 3 ад 10.02.04)

Рэцэнзенты:
А. Л. Яблонскі, кандыдат фізіка-матэматычных навук, старшы выкладчык кафедры функцыянальнага аналізу БДУ;
У. У. Шлыкаў, доктар педагагічных навук, прафесар

Шылінец У. А., Лугоўскі С. А.
Ш11 Вызначаны інтэграл: Курс лекцый.— Мн.: БДПУ, 2004.— 72 с.
ISBN 985-435-779-1

Выданне змяшчае навучальны матэрыял па раздзеле «Інтэгральнае злічэнне функцый адной зменнай» курса «Матэматычны аналіз».

Адрасуецца студэнтам фізіка-матэматычных спецыяльнасцей педагагічных ВНУ. Будзе карысным і студэнтам, якія займаюцца ў вышэйшых тэхнічных установах.

УДК 517.31(075.8)
ББК 22.161.1я73

ISBN 985-435-779-1

ПРАДМОВА

У аснову дадзенага дапаможніка пакладзены лекцыі па матэматычным аналізе, у прыватнасці па раздзеле гэтага курса «Інтэгральнае злічэнне» функцый адной зменнай, якія чыталіся на фізічным факультэце Беларускага дзяржаўнага педагагічнага універсітэта імя Максіма Танка на працягу шэрага гадоў. Змест курса лекцый «Вызначаны інтэграл» цалкам адпавядае вучэбнай праграме па матэматычным аналізе для спецыяльнасцяў 020504-01 — «Фізіка. Матэматыка», 020504-02 — «Фізіка. Інфарматыка».

Дапаможнік разбіты на параграфы. Нумарацыя формул захоўваецца ў межах аднаго параграфа.

Пры выкладанні тэорыі асаблівая ўвага звярталася на пытанні, глыбокае разуменне якіх неабходна для паспяховага выкладання матэматыкі ў школе. Дастаткова строгае і поўнае выкладанне тэарэтычнага матэрыялу суправаджаецца вялікай колькасцю ілюстрацыйных прыкладаў.

Аўтары выдання імкнуліся максімальна ўлічыць дастасоўную накіраванасць курса матэматычнага аналізу, прызначанага для студэнтаў фізічнага профілю, каб матэрыял кнігі садзейнічаў фарміраванню ведаў, уменняў і навыкаў, неабходных для дастасавання ідэй і метадаў матэматычнага аналізу ў спецыяльных дысцыплінах.

Сістэматычная праца з выкарыстаннем дадзенага дапаможніка забяспечыць студэнту неабходны мінімум ведаў па раздзеле «Інтэгральнае злічэнне функцый адной зменнай» курса матэматычнага аналізу, стымулюе яго да далейшай, больш паглыбленай працы над прадметам.

Курс лекцый «Вызначаны інтэграл» будзе карысным і студэнтам, якія займаюцца ў вышэйшых тэхнічных навучальных установах.

§ 1. РАЎНАМЕРНАЯ НЕПАРЫЎНАСЦЬ

Няхай дадзена канечная або бясконцая сістэма інтэрвалаў Σ. Будзем казаць, што сістэма інтэрвалаў Σ пакрывае адрэзак, калі кожны пункт гэтага адрэзка належыць якому-небудзь інтэрвалу з разглядаемай сістэмы Σ.

Лема Барэля. *Калі бясконцая сістэма інтэрвалаў пакрывае адрэзак* $[a,\ b]$*, то з яе можна вылучыць канечную сістэму інтэрвалаў, якая таксама пакрывае дадзены адрэзак.*

Доказ. Мяркуем процілеглае, што з бясконцай сістэмы інтэрвалаў Σ нельга вылучыць такую канечную сістэму інтэрвалаў, якая пакрывае адрэзак $[a,\ b]$. Мяркуем, што адрэзак $[a,\ b]$ не дапускае канечнага пакрыцця.

Падзелім адрэзак $[a,\ b]$ папалам. Тады адна з яго палоў не дапускае канечнага пакрыцця (калі абедзве паловы адрэзка дапускалі б канечнае пакрыццё, то і ўвесь адрэзак дапускаў бы канечнае пакрыццё).

Возьмем тую з палоў адрэзка $[a,\ b]$, якая не дапускае канечнага пакрыцця. Абазначым яе праз $[a_1,\ b_1]$.

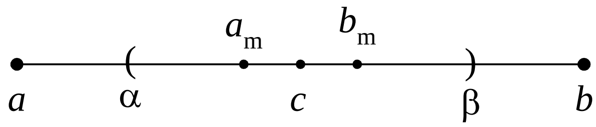
Падзелім адрэзак $[a_1,\ b_1]$ папалам і возьмем тую з палоў, якая не дапускае канечнага пакрыцця. Абазначым яе праз $[a_2,\ b_2]$ і г. д.

Атрымаем сцяжную паслядоўнасць адрэзкаў

$$[a,\ b],\ [a_1,\ b_1],\ [a_2,\ b_2],\ \dots,\ [a_n,\ b_n],\ \dots, \qquad (1)$$

кожны з якіх не дапускае канечнага пакрыцця.

Вядома, што існуе адзіны пункт c, які належыць усім адрэзкам сцяжнай паслядоўнасці (1). Згодна з умовай тэарэмы сістэма інтэрвалаў Σ пакрывае адрэзак, таму ў ёй знойдзецца такі інтэрвал $(\alpha,\ \beta)$, якому належыць пункт c (рыс. 1).



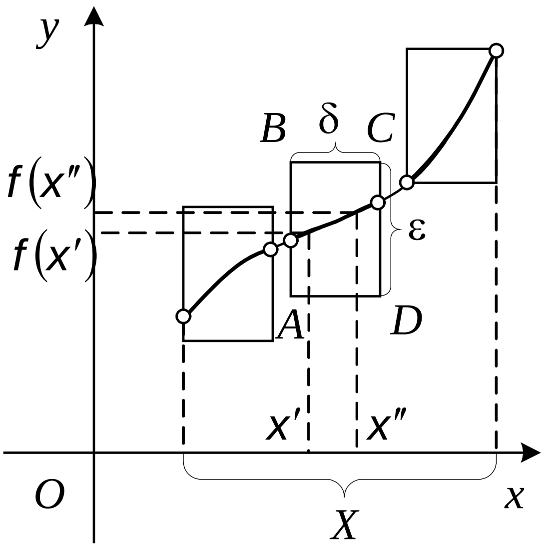
Рыс.1

Паколькі паслядоўнасць (1) — сцяжная паслядоўнасць адрэзкаў, то ў ёй знойдзецца такі адрэзак $[a_m,\ b_m]$, які трапляе ў інтэрвал $(\alpha,\ \beta)$.

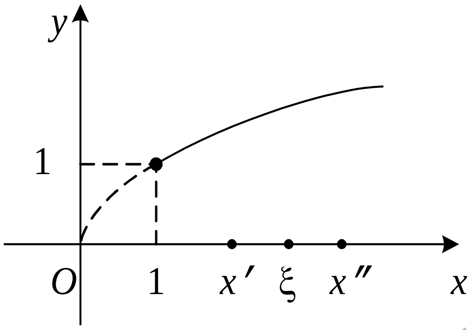
Мы атрымалі, што адрэзак $[a_m,\ b_m]$, які не дапускае канечнага пакрыцця, пакрыўся адным інтэрвалам $(\alpha,\ \beta)$ з дадзенай сістэмы Σ. Атрыманая супярэчнасць і даказвае лему.

Азначэнне 1. *Функцыя* $y = f(x)$ *называецца раўнамерна непарыўнай на прамежку X, калі для любога ліку* $\varepsilon > 0$ *можна знайсці такі лік* $\delta > 0$*, што для любой пары пунктаў* $x',\ x''$ *прамежку X, якія задавальняюць умове* $|x' - x''| < \delta$*, выконваецца няроўнасць* $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$*.*

Растлумачым гэтае паняцце.



Рыс. 2



Рыс. 3

Няхай функцыя $y = f(x)$, графік якой пабудаваны на рыс. 2, будзе раўнамерна непарыўнай на прамежку *X*. Тады па зададзенаму $\varepsilon > 0$ мы можам пабудаваць прамавугольнік *ABCD* ($AB = \varepsilon$, $BC = \delta$, $\delta = \delta(\varepsilon)$) такі, што любы кавалак графіка функцыі $y = f(x)$, даўжыня праекцыі якога на вось *Ox* меншая за δ, цалкам можа быць змешчаны ўнутры такога прамавугольніка пры ўмове, што *AB*||*Oy*.

Прыклад 1. Разгледзім функцыю $f(x) = \sqrt{x}$ на прамежку $[1, +\infty)$ (рыс. 3).

Рашэнне. Дадзеная функцыя на прамежку $[1, +\infty)$ з'яўляецца непарыўнай (як элементарная). Дакажам, што на разглядаемым прамежку дадзеная функцыя будзе і раўнамерна непарыўнай.

На прамежку $[1, +\infty)$ разгледзім два адвольныя пункты x' і x''. Скарыстаўшы тэарэму Лагранжа, атрымаем:

$$f(x') - f(x'') = f'(\xi)(x' - x''),$$

дзе ξ ляжыць паміж x' і x''. Адсюль маем:

$$\left|f(x') - f(x'')\right| = \left|f'(\xi)\right| \left|x' - x''\right| = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}\left|x' - x''\right| < \frac{1}{2}\left|x' - x''\right|.$$

Апошняя няроўнасць вынікае з таго, што ξ ляжыць паміж x' і x'' і таму $\xi > 1$, $\sqrt{\xi} > 1$.

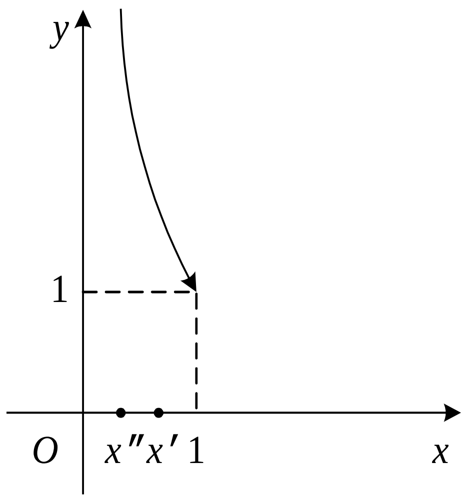
Такім чынам, для кожнай пары пунктаў x' і x'' з прамежку $[1, +\infty)$ выконваецца няроўнасць:

$$\left|f(x') - f(x'')\right| < \frac{1}{2}\left|x' - x''\right|.$$

Цяпер бачым, што калі для любога $\varepsilon > 0$ мы возьмем $\delta = 2\varepsilon$, то для любой пары пунктаў x' і x'' прамежку $[1, +\infty)$, якія задавальняюць умове $\left|x' - x''\right| < \delta$, будзе выконвацца няроўнасць $\left|f(x') - f(x'')\right| < \varepsilon$.

Гэта і сведчыць аб тым, што функцыя $f(x) = \sqrt{x}$ з'яўляецца раўнамерна непарыўнай на прамежку $[1, +\infty)$.

Прыклад 2. Разгледзім функцыю $f(x)=\dfrac{1}{x}$ на прамежку (0;1) (рыс. 4).



Рыс. 4

Рашэнне. Дадзеная функцыя на прамежку (0;1) з’яўляецца непарыўнай. Дакажам, што на разглядаемым прамежку яна не з’яўляецца раўнамерна непарыўнай.

Дастаткова даказаць, што для некаторага $\varepsilon>0$ нельга знайсці адпаведны лік $\delta>0$.

Возьмем які-небудзь лік $0<\varepsilon<1$. Тады, які б малы лік $\delta>0$ мы ні бралі, пункты $x'=\delta$, $x''=\dfrac{1}{2}\delta$ задавальняюць умове

$$\left|x'-x''\right|=\frac{1}{2}\delta<\delta.$$

Але для іх выконваецца наступная няроўнасць:

$$\left|f(x')-f(x'')\right|=\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right|=\frac{1}{x'}>1>\varepsilon.$$

Гэтым самым даказана, што дадзеная функцыя не з’яўляецца раўнамерна непарыўнай на прамежку (0,1).

Высветлім наступнае пытанне: у якой узаемасувязі знаходзяцца паняцці непарыўнасці і раўнамернай непарыўнасці функцыі на прамежку.

Тэарэма 1. *Калі функцыя $f(x)$ раўнамерна непарыўная на прамежку X, то яна і непарыўная на гэтым прамежку.*

Доказ. На прамежку *X* зафіксуем які-небудзь пункт α. Паколькі функцыя $f(x)$ раўнамерна непарыўная на прамежку *X*, то для любога ліку $\varepsilon>0$ можна знайсці такі лік $\delta>0$, што для любой пары пунктаў α, *x* (α — фіксаваны пункт), якія задавальняюць умове $|x-\alpha|<\delta$, выконваецца няроўнасць $\left|f(x)-f(\alpha)\right|<\varepsilon$. Гэта сведчыць аб тым, што функцыя $f(x)$ будзе непарыўнай у пункце α.

Даказаўшы непарыўнасць функцыі $f(x)$ у кожным пункце α прамежку *X*, мы тым самым даказалі непарыўнасць дадзенай функцыі на прамежку *X*.

Узнікае пытанне: ці будзе функцыя, непарыўная на прамежку *X*, таксама і раўнамерна непарыўнай на гэтым прамежку.

У выпадку адвольнага прамежку *X* на сфармуляванае пытанне трэба даць адмоўны адказ (гл. прыклад 2). Аднак, калі прамежак *X* з’яўляецца адрэзкам, то пастаўленае пытанне будзе мець дадатны адказ.

Тэарэма 2 (тэарэма Кантара). *Калі функцыя $f(x)$ непарыўная на адрэзку $[a,\ b]$, то яна будзе і раўнамерна непарыўнай на гэтым адрэзку.*

Доказ. Згодна з умовай тэарэмы функцыя $f(x)$ з'яўляецца непарыўнай у кожным пункце α адрэзка $[a,\ b]$. Таму для любога $\varepsilon > 0$ можна знайсці такі лік $\delta_\alpha > 0$, што для любога пункта x, які задавальняе ўмове $|x-\alpha| < \delta_\alpha$, выконваецца няроўнасць

$$|f(x) - f(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

Для кожнага пункта α пабудуем інтэрвал $\left(\alpha - \frac{\delta_\alpha}{2}, \alpha + \frac{\delta_\alpha}{2}\right)$. Атрымаем бясконцую сістэму інтэрвалаў Σ, якая пакрывае адрэзак $[a,\ b]$. Згодна з лемай Барэля з бясконцай сістэмы інтэрвалаў Σ можна вылучыць канечную сістэму інтэрвалаў $\overline{\Sigma}$, якая таксама пакрывае адрэзак $[a,\ b]$.

У канечнай сістэме інтэрвалаў знойдзецца найменшы інтэрвал. Палову яго даўжыні абазначым праз δ. Дакажам, што знойдзены лік $\delta > 0$ і з'яўляецца тым лікам δ, які патрэбны для доказу раўнамернай непарыўнасці функцыі $f(x)$ на прамежку X.

На адрэзку $[a,\ b]$ разгледзім любую пару пунктаў x', x'', якія задавальняюць умове $|x' - x''| < \delta$.

Пункт x' пакрываецца некаторым інтэрвалам з канечнай сістэмы інтэрвалаў $\overline{\Sigma}$. Сярэдзіну гэтага інтэрвала абазначым праз α. Зразумела, што пункт x' задавальняе наступнай умове: $|x' - \alpha| < \frac{1}{2}\delta_\alpha < \delta_\alpha$.

Таму на падставе (1) для пункта x' будзе выконвацца наступная няроўнасць:

$$|f(x') - f(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2}$$

Пункт x'' задавальняе ўмове:

$$|x'' - \alpha| \le |x'' - x'| + |x' - \alpha| < \delta + \frac{1}{2}\delta_\alpha \le \frac{1}{2}\delta_\alpha + \frac{1}{2}\delta_\alpha = \delta_\alpha,$$

г. зн. $|x'' - \alpha| < \delta_\alpha$.

Таму згодна з (1) для пункта x'' выконваецца наступная няроўнасць:

$$|f(x'') - f(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

З няроўнасцяў (2) і (3) вынікае няроўнасць

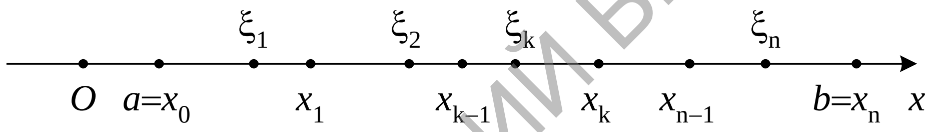
$$\left|f\left(x'\right)-f\left(x''\right)\ \right|\le\left|f\left(x'\right)-f\left(\alpha\right)\right|+\left|f\left(\alpha\right)-f\left(x''\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Такім чынам, мы даказалі, што для любога ліку $\varepsilon>0$ можна знайсці такі лік $\delta>0$, што для любой пары пунктаў x' і x'' адрэзка $[a,\ b]$, якія задавальняюць умове $\left|x'-x''\right|<\delta$, выконваецца няроўнасць $\left|f\left(x'\right)-f\left(x''\right)\right|<\varepsilon$. Гэта і сведчыць, што функцыя $f\left(x\right)$ з’яўляецца раўнамерна непарыўнай на адрэзку $[a,\ b]$.

§ 2. ПАНЯЦЦЕ ВЫЗНАЧАНАГА ІНТЭГРАЛА

Задача аб рабоце сілы

Няхай матэрыяльны пункт пад дзеяннем некаторай сілы перамяшчаецца па восі *Ox* ад пункта *a* да пункта *b* (рыс. 5).



Рыс. 5

Сілу, якая дзейнічае на матэрыяльны пункт у становішчы *x*, абазначым праз *F*(*x*). Лічым, што функцыя $F\left(x\right)$ з’яўляецца непарыўнай на адрэзку $[a,\ b]$. Мяркуем, што кірунак сілы супадае з кірункам перамяшчэння матэрыяльнага пункта, г. зн. сіла паралельная восі *Ox*. Вылічым работу сілы *F*(*x*) на адрэзку $[a,\ b]$.

Вядома, што, калі сіла з’яўляецца сталай, то работа такой сілы роўная здабытку сілы на шлях. Разгледзім выпадак, калі сіла не з’яўляеца сталай на адрэзку $[a,\ b]$. У гэтым выпадку з паняццем работы такой сілы мы не знаёмыя. Таму мы павінны спачатку вызначыць паняцце работы такой сілы, пераканацца ў існаванні гэтага паняцця, а затым ужо выпрацоўваць апарат для вылічэння работы.

Падзелім адрэзак $[a,\ b]$ на *n* частак (не абавязкова роўных) пунктамі

$$a=x_0<x_1<\ \ldots<x_{k-1}<x_k<\ldots<x_n=b.$$

Гэтыя пункты падзеляць адрэзак $[a,\ b]$ на частковыя адрэзкі $[x_{k-1},\ x_k]$ (*k* = 1, 2, ..., *n*). Даўжыні частковых адрэзкаў абазначым наступным чынам:

$$\Delta x_k=x_k-x_{k-1}\ (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Даўжыню найбольшага частковага адрэзка абазначым праз λ.

На кожным частковым адрэзку $[x_{k-1},\ x_k]$ возьмем адвольны пункт ξ_k.

Сіла, якая дзейнічае на матэрыяльны пункт у становішчы ξ_k, роўная $F(\xi_k)$.

Будзем абстрагавацца ад рэчаіснасці і лічыць сілу сталай на адрэзку $[x_{k-1},\ x_k]$ і роўнай $F(\xi_k)$. Работу такой сілы мы вылічваць умеем. Яна роўная $F(\xi_k)\Delta x_k$.

Калі здзейсніць аналагічнае на кожным частковым адрэзку, атрымаем суму элементарных работ:

$$F(\xi_1)\Delta\, x_1 + F(\xi_2)\Delta\, x_2 + \ldots + F(\xi_n)\Delta\, x_n = \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\Delta\, x_k\,. \qquad (1)$$

Работу A сілы $F(x)$ на адрэзку $[a,\ b]$ натуральна вызначыць як ліміт, да якога імкнецца сума (1) пры $\lambda \to 0$:

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\Delta\, x_k\,. \qquad (2)$$

Адзначым, што ліміт (2) мы разумеем інтуітыўна, бо з паняццем такога ліміту мы сустракаемся ўпершыню.

Некалькі ніжэй мы сфармулюем строгае азначэнне ліміту (2) і дакажам, што ў разглядаемым выпадку (калі сіла $F(x)$ з'яўляецца непарыўнай на адрэзку $[a,\ b]$) гэты ліміт існуе.

Такім чынам, мы вызначылі паняцце работы сілы $F(x)$ на адрэзку $[a,\ b]$ і адзначылі існаванне работы.

Што тычыцца апарата для вылічэння работы, то такім апаратам можна лічыць ліміт (2). У далейшым мы навучымся вылічваць такія ліміты.

Азначэнне вызначанага інтэграла

Задача аб рабоце сілы і іншыя задачы прыводзяць да неабходнасці вывучэння ліміту выгляду (2).

Разгледзім гэтае пытанне.

Няхай на адрэзку $[a,\ b]$ зададзена функцыя $f(x)$ (неабавязкова непарыўная).

Адрэзак $[a,\ b]$ падзелім на n частак (не абавязкова роўных) пунктамі

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b\,.$$

Сукупнасць гэтых пунктаў назавём разбіўкай T адрэзка $[a,\ b]$.

Гэтыя пункты падзеляць дадзены адрэзак на частковыя адрэзкі $[x_{k-1}, x_k]$ (k = 1, 2, ... , n). Даўжыні частковых адрэзкаў абазначым наступным чынам:

$$\Delta\, x_k = x_k - x_{k-1},\ (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)\,.$$

Даўжыню найбольшага частковага адрэзка абазначым праз λ.

На кожным частковым адрэзку $\left[x_{k-1}, x_k\right]$ возьмем адвольны пункт ξ_k і разгледзім значэнне $f\left(\xi_k\right)$ дадзенай функцыі ў гэтым пункце.

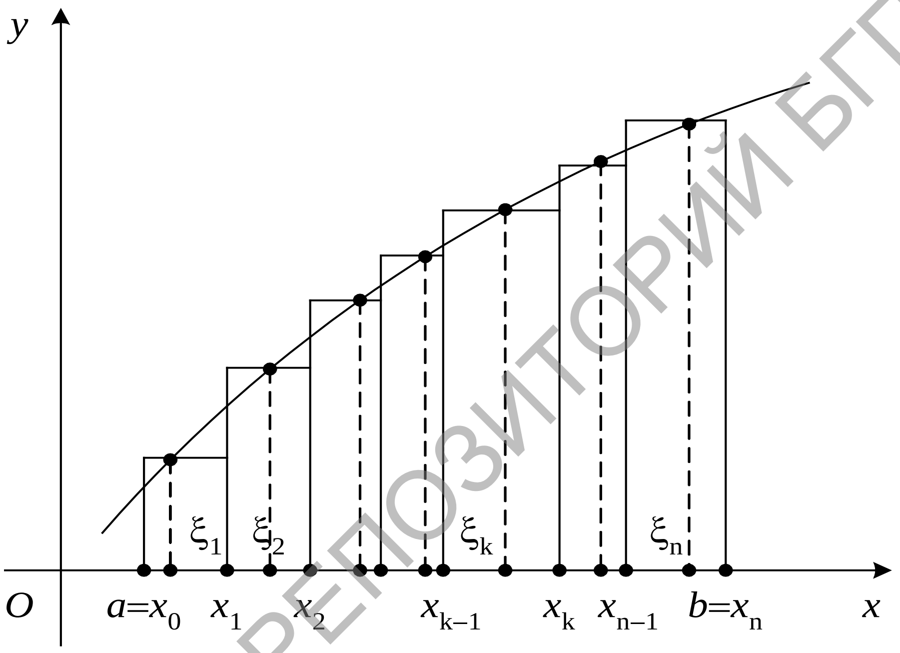
Пабудуем наступную суму:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_k\right) \Delta\, x_k\ .$$

Дадзеная сума называецца інтэгральнай сумай (Рымана) для функцыі $f(x)$ на адрэзку $[a,\ b]$.

Адзначым, што інтэгральная сума σ залежыць ад разбіўкі T і ад выбару пунктаў ξ_k.

У выпадку, калі $f(x) \geq 0$ на адрэзку $[a,\ b]$, інтэгральная сума σ мае наступны геаметрычны сэнс: гэта ёсць сума плошчаў прамавугольнікаў, адзначаных на рысунку 6.



Рыс. 6

Увядзём паняцце ліміту інтэгральнай сумы σ пры $\lambda\ \to 0$.

Разбіваем адрэзак $[a,\ b]$ паслядоўна на часткі спачатку адным спосабам, потым другім, трэцім і г. д. Атрымаем некаторую паслядоўнасць разбівак адрэзка $[a,\ b]$.

Паслядоўнасць разбівак адрэзка $[a,\ b]$ дамовімся называць асноўнай, калі адпаведная паслядоўнасць значэнняў λ $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$, ... імкнецца да нуля.

Азначэнне 1. *Калі для любой асноўнай паслядоўнасці разбівак адрэзка $[a,\ b]$ адпаведная паслядоўнасць значэнняў інтэгральнай сумы σ заўсёды імкнецца да аднаго і таго ж ліміту I, незалежна ад выбару пунктаў ξ_k, то гэты лік I называецца лімітам інтэгральнай сумы σ пры $\lambda\ \to 0$.*

Пры гэтым запісваюць: $I = \lim\limits_{\lambda\ \to 0} \sigma = \lim\limits_{\lambda\ \to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_k\right) \Delta\, x_k$.

Азначэнне 2. *Лік I называецца лімітам інтэгральнай сумы σ пры $\lambda\ \to 0$, калі для любога ліку $\varepsilon > 0$ можна знайсці такі лік $\delta > 0$, што пры* *любой разбіўцы T адрэзка $[a,\ b]$, якая падпарадкоўваецца толькі адзінай умове $\lambda < \delta$, і пры любым выбары пунктаў ξ_k выконваецца няроўнасць*

$$|\sigma - I| < \varepsilon.$$

Можна даказаць, што азначэнні (1) і (2) з'яўляюцца раўназначнымі.

Адзначым, што паняцце ліміту інтэгральнай сумы з'яўляецца паняццем новым, якое не ўкладваецца ні ў паняцце ліміту паслядоўнасці, ні ў паняцце ліміту функцыі.

Азначэнне 3. *Калі існуе ліміт I інтэгральнай сумы σ пры $\lambda \to 0$, то функцыя $f(x)$ называецца інтэгравальнай (па Рыману) на адрэзку $[a,\ b]$, а адзначаны ліміт I называецца вызначаным інтэгралам функцыі $f(x)$ ад a да b (ці на адрэзку $[a,\ b]$) і абазначаецца наступным чынам:*

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Такое абазначэнне ўведзена французскім матэматыкам Фур’е. Лікі a і b называюцца адпаведна ніжнім і верхнім лімітамі інтэгравання; $f(x)$ называецца падынтэгральнай функцыяй; x — зменная интэгравання.

Такім чынам, па азначэнні

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Прыклад 1. Разгледзім на адрэзку $[a,\ b]$ функцыю $f(x) = c$, дзе c — які-небудзь рэчаісны лік.

Рашэнне. Разгледзім адвольную разбіўку T адрэзка $[a,\ b]$. Пабудуем інтэгральную суму σ, якая адпавядае гэтай разбіўцы:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} c\Delta x_k = c\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = c(b-a)$$

пры любым выбары пунктаў ξ_k. Адсюль вынікае, што

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = c(b-a),$$

г. зн.

$$\int_a^b c\ dx = c(b-a).$$

Заўвага 1. Вызначаны інтэграл ёсць лік, які не залежыць ад таго, якой літарай абазначана зменная інтэгравання.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(z)\,dz = \int_a^b f(u)\,du.$$

Заўвага 2. Інтэгравальнымі на адрэзку $[a,\ b]$ могуць быць толькі функцыі, якія абмежаваныя на гэтым адрэзку.

Калі на адрэзку $[a,\ b]$ функцыя не з'яўляецца абмежаванай, то яна не будзе інтэгравальнай на гэтым адрэзку.

Доказ. Няхай функцыя $f(x)$ не з'яўляецца абмежаванай на адрэзку $[a,\ b]$. Тады пры любой разбіўцы T яна будзе неабмежаванай і на якім-небудзь частковым адрэзку $[x_{k-1},\ x_k]$. Тады за кошт выбару пунктаў ξ_k можна $f(\xi_k)$, а значыць і суму σ, зрабіць колькі пажадана вялікай па абсалютнай велічыні.

Адсюль вынікае, што не існуе ліміту інтэгральнай сумы σ пры $\lambda \to 0$. Гэта сведчыць аб тым, што функцыя $f(x)$ не з'яўляецца інтэгравальнай на адрэзку $[a,\ b]$, што і трэба было даказаць.

Улічваючы заўвагу 2, далей пры вывучэнні пытання аб інтэгравальнасці функцыі $f(x)$ на адрэзку $[a,\ b]$ мы заўсёды будзем меркаваць, што функцыя $f(x)$ абмежаваная на дадзеным адрэзку.

Узнікае пытанне: ці любая функцыя, абмежаваная на адрэзку $[a,\ b]$, будзе інтэгравальнай на гэтым адрэзку?

Прыклад 2. На адрэзку $[a,\ b]$ разгледзім функцыю Дырыхле

$$f(x) = \begin{cases} 1, \ \textit{калі } x \text{ — } \textit{рацыянальны лік}, \\ 0, \ \textit{калі } x \text{ — } \textit{ірацыянальны лік}. \end{cases}$$

Рашэнне. Разгледзім якую-небудзь разбіўку T адрэзка $[a,\ b]$ і пабудуем інтэгральную суму σ.

Калі ξ_k — рацыянальны лік, то $\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\ \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_k = b - a$.

Калі ξ_k — ірацыянальны лік, то $\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\ \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_k = 0$.

Адсюль вынікае, што не існуе ліміту інтэгральнай сумы σ пры $\lambda \to 0$. Гэта і сведчыць аб тым, што функцыя Дырыхле не з'яўляецца інтэгравальнай на адрэзку $[a,\ b]$.

З прыведзенага прыкладу вынікае, што не кожная абмежаваная на адрэзку $[a,\ b]$ функцыя будзе інтэгравальнай на гэтым адрэзку. Узнікае пытанне: якія абмежаваныя функцыі з'яўляюцца інтэгравальнымі?

Гэтае пытанне будзе даследавацца ў § 4.

Тэарэма. *Калі функцыя $f(x)$ непарыўная на адрэзку $[a, b]$, то яна будзе інтэгравальнай на гэтым адрэзку.*

Заўвага 3. У пачатку параграфа работу A сілы $F(x)$ на адрэзку $[a, b]$ мы вызначылі наступным чынам:

$$A = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\ \Delta x_k . \qquad (2)$$

Паколькі $F(x)$ мяркуецца непарыўнай на адрэзку $[a, b]$, то гэты ліміт існуе. Калі скарыстаць азначэнне вызначанага інтэграла, то формулу (2) можна запісаць так: $A = \int_a^b F(x)\ dx$.

Заўвага 4. Некалькі вышэй мы высветлілі геаметрычны сэнс інтэгральнай сумы $\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\ \Delta x_k$.

Зразумела, што, калі $f(x) \geq 0$ і непарыўная на адрэзку $[a, b]$, то вызначаны інтэграл $\int_a^b f(x)\ dx$ роўны плошчы P фігуры, якая абмежаваная графікам дадзенай функцыі і прамымі $x = a$, $x = b$, $y = 0$.

$$P = \int_a^b f(x)\ dx .$$

Крыху далей мы дакажам гэтае сцвярджэнне, папярэдне вызначыўшы паняцце плошчы плоскай фігуры (з гэтым паняццем мы пакуль не знаёмы).

§ 3. СУМЫ ДАРБУ

Няхай функцыя $f(x)$ абмежаваная на адрэзку $[a, b]$. Разбіваем адрэзак $[a, b]$ на *n* частак (не абавязкова роўных) пунктамі

$$a = x_0 < x_1 < \ \dots\ < x_{k-1} < x_k < \ \dots\ < x_n = b .$$

Сукупнасць усіх гэтых пунктаў называецца разбіўкай *T* адрэзка $[a, b]$. Абазначым

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \ (k = 1, 2, \dots , n).$$

Паколькі функцыя $f(x)$ з'яўляецца абмежаванай на адрэзку $[a, b]$, то яна будзе абмежаванай на кожным частковым адрэзку $[x_{k-1}, x_k]$. Верхнюю мяжу мноства значэнняў функцыі на адрэзку $[x_{k-1}, x_k]$ абазначым праз M_k, а ніжнюю — m_k.

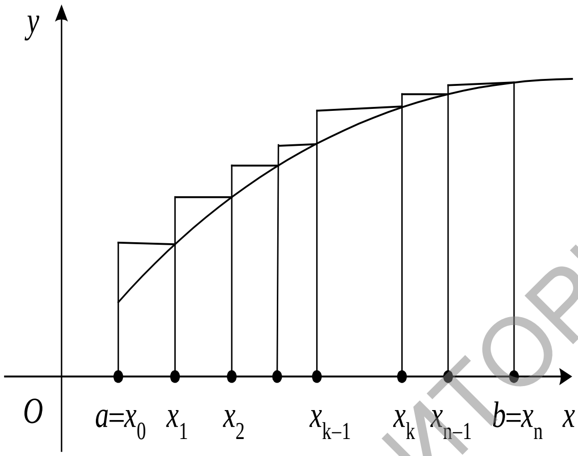
Разгледзім наступныя сумы: $S = \sum_{k=1}^{n} M_k \ \Delta x_k$, $s = \sum_{k=1}^{n} m_k \ \Delta x_k$.

Сума S называецца верхняй інтэгральнай сумай або верхняй сумай Дарбу, s — ніжняй інтэгральнай сумай або ніжняй сумай Дарбу.

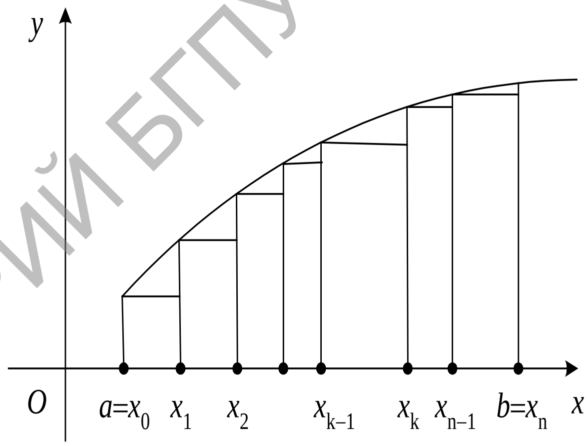
Калі функцыя $f\left(x\right)$ з'яўляецца непарыўнай на адрэзку $\left[a,\ b\right]$, то M_k і m_k з'яўляюцца адпаведна найбольшым і найменшым значэннямі дадзенай функцыі на адрэзку $\left[a,\ b\right]$. Калі $f\left(x\right) \geq 0$ на $\left[a,\ b\right]$,то верхняя і ніжняя сумы Дарбу маюць наступны геаметрычны сэнс:

S — плошча ступенчатай фігуры, якая змяшчае фігуру, абмежаваную графікам дадзенай функцыі і прамымі $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (рыс. 7).

s — плошча ступенчатай фігуры, якая змяшчаецца ў фігуры, абмежаванай графікам дадзенай функцыі і прамымі $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (рыс. 8).



Рыс. 7



Рыс. 8

Уласцівасці сум Дарбу

1°. *Любая інтэгральная сума разбіўкі T заключана паміж ніжняй і верхняй сумамі Дарбу гэтай жа разбіўкі.*

$$s \leq \sigma \leq S .$$

Доказ. Разгледзім адвольную разбіўку T адрэзка $\left[a,\ b\right]$. На кожным частковым адрэзку $\left[x_{k-1},\ x_k\right]$ возьмем адвольны пункт ξ_k . Зразумела, што

$$m_k \leq f\left(\xi_k\right) \leq M_k \ (k = 1, 2, \ldots ,n).$$

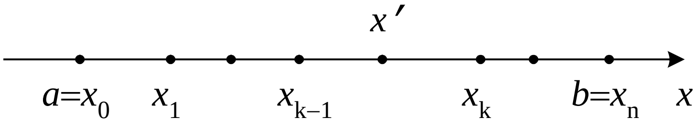
Адсюль атрымліваем: $m_k \Delta x_k \leq f\left(\xi_k\right) \Delta x_k \leq M_k \Delta x_k$,

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_k\right) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k \text{,}$$

$$s \leq \sigma \leq S .$$

2°. *Калі да разбіўкі T дадаць новыя пункты, то ніжняя сума Дарбу можа толькі павялічыцца, а верхняя — паменшыцца.*

Доказ. Доказ зводзіцца да разгляду выпадку, калі да разбіўкі T дадаць толькі адзін пункт. Няхай пункт x' таксама належыць частковаму адрэзку $[x_{k-1}, x_k]$ (рыс. 9).


Рыс. 9

Калі да разбіўкі T дададзім пункт x', то атрымаем некаторую новую разбіўку T'. Абазначым праз S верхнюю суму Дарбу, якая адпавядае разбіўцы T, а праз S' абазначым верхнюю суму Дарбу, якая адпавядае разбіўцы T'.

Сумы S і S' адрозніваюцца толькі тым, што ў суме S адрэзку $[x_{k-1}, x_k]$ адпавядае складнік $M_k(x_k - x_{k-1})$, а ў суме S' гэтаму ж адрэзку адпавядае сума двух складнікаў $\overline{M_k}(x' - x_{k-1}) + \overline{\overline{M_k}}(x_k - x')$, дзе $\overline{M_k}$ — верхняя мяжа мноства значэнняў функцыі $f(x)$ на адрэзку $[x_{k-1}, x']$, $\overline{\overline{M_k}}$ – верхняя мяжа мноства значэнняў функцыі $f(x)$ на адрэзку $[x', x_k]$.

Зразумела, што $\overline{M_k} \le M_k$, $\overline{\overline{M_k}} \le M_k$.

Адсюль атрымліваем: $\overline{M_k}(x' - x_{k-1}) \le M_k(x' - x_{k-1})$,

$$\overline{\overline{M_k}}(x_k - x') \le M_k(x_k - x').$$

Калі скласці гэтыя няроўнасці, то будзем мець:

$$\overline{M_k}(x' - x_{k-1}) + \overline{\overline{M_k}}(x_k - x') \le M_k(x_k - x_{k-1}).$$

Адсюль вынікае, што $S' \le S$.

Аналагічным чынам даказваецца ўласцівасць і для ніжняй сумы Дарбу.

3° *Кожная ніжняя сума Дарбу не перавышае кожную верхнюю суму Дарбу, якая нават адпавядае іншай разбіўцы.*

Доказ. Няхай s_1 і S_1 — ніжняя и верхняя сумы Дарбу якой-небудзь адной разбіўкі адрэзка $[a, b]$, s_2 и S_2 — ніжняя і верхняя сумы Дарбу якой-небудзь другой разбіўкі. Патрабуецца даказаць, што $s_1 \le S_2$.

Аб'яднаем пункты першай і другой разбівак. Атрымаем трэцюю разбіўку адрэзка $[a, b]$. Ніжнюю і верхнюю сумы Дарбу, якія адпавядаюць гэтай разбіўцы абазначым праз s_3 і S_3 адпаведна.

Паколькі трэцюю разбіўку можна атрымаць з першай, калі да яе дадаць новыя пункты, то на падставе ўласцівасці 2° маем: $s_1 \le s_3$.

Трэцюю разбіўку можна атрымаць і з другой разбіўкі, калі да яе дадаць новыя пункты. Таму згодна з уласцівасцю 2° маем: $S_3 \le S_2$.

Згодна з уласцівасцю 1° можам сцвярджаць, што $s_3 \le S_3$.

З атрыманых трох няроўнасцяў вынікае, што $s_1 \le S_2$.

4°. З уласцівасці 3° вынікае, што мноства $\{s\}$ разнастайных ніжніх сум Дарбу абмежаванае зверху любой верхняй сумай Дарбу S. Таму гэта мноства мае верхнюю мяжу, якую абазначым праз $I = \sup\{s\}$.

Згодна з азначэннем верхняй мяжы будзем мець: $s \le I \le S$ для любых s і S. Адсюль атрымліваем:

$$-S \le -I \le -s. \tag{1}$$

Як вядома, любая інтэгральная сума σ разбіўкі T заключана паміж ніжняй і верхняй сумамі Дарбу гэтай жа разбіўкі:

$$s \le \sigma \le S. \tag{2}$$

Склаўшы няроўнасці (1) і (2), атрымаем:

$$-(S-s) \le \sigma - I \le S - s,$$

г. зн. $|\sigma - I| \le S - s$.

Такім чынам, мы даказалі, што любая інтэгральная сума σ разбіўкі T, а таксама ніжняя і верхняя сумы Дарбу гэтай жа разбіўкі задавальняюць наступнай няроўнасці:

$$|\sigma - I| \le S - s,$$

дзе $I = \sup\{s\}$.

§ 4. НЕКАТОРЫЯ КЛАСЫ ІНТЭГРАВАЛЬНЫХ ФУНКЦЫЙ

У дадзеным параграфе мы дакажам тэарэму, сфармуляваную ў § 2.

Тэарэма 1. *Калі функцыя $f(x)$ непарыўная на адрэзку $[a, b]$, то яна інтэгравальная на гэтым адрэзку.*

Доказ. Разгледзім лік $I = \sup\{s\}$, дзе $\{s\}$ — мноства разнастайных ніжніх сум Дарбу для функцыі $f(x)$ на адрэзку $[a, b]$. Дакажам, што лік I з'яўляецца лімітам інтэгральнай сумы σ пры $\lambda \to 0$. Гэтым будзе даказана, што функцыя $f(x)$ інтэгравальная на адрэзку $[a, b]$.

Возьмем адвольны лік $\varepsilon > 0$. Паколькі функцыя $f(x)$ непарыўная на адрэзку $[a, b]$, то паводле тэарэмы Кантара яна будзе і раўнамерна непарыўнай на гэтым адрэзку. Таму для ліку $\frac{\varepsilon}{b-a} > 0$ можна знайсці такі лік $\delta > 0$, што для любой пары пунктаў x', x'' адрэзка $[a, b]$, якія задавальняюць умове $|x' - x''| < \delta$, выконваецца няроўнасць

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \tag{1}$$

Возьмем знойдзены лік $\delta > 0$ і разгледзім адвольную разбіўку T адрэзка $[a,\ b]$, якая падпарадкоўваецца толькі адзінай умове $\lambda < \delta$. Для гэтай разбіўкі T разгледзім адвольную інтэгральную суму σ, а таксама верхнюю і ніжнюю сумы Дарбу $s = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$, $S = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$.

Паводле ўласцівасці 4° з папярэдняга параграфа будзем мець:

$$|\sigma - I| < S - s. \tag{2}$$

Калі мы дакажам, што $S - s < \varepsilon$, то на падставе няроўнасці (2) будзем мець:

$$|\sigma - I| < \varepsilon.$$

Гэтым і будзе даказана, што для любога ліку $\varepsilon > 0$ можна знайсці такі лік $\delta > 0$, што для любой разбіўкі T адрэзка $[a,\ b]$, якая падпарадкоўваецца толькі адзінай умове $\lambda < \delta$, і пры любым выбары пунктаў ξ_k выконваецца няроўнасць $|\sigma - I| < \varepsilon$, г. зн. будзе даказана, што лік I з'яўляецца лімітам інтэгральнай сумы σ пры $\lambda \to 0$.

Такім чынам, доказ тэарэмы зводзіцца да доказу няроўнасці

$$S - s < \varepsilon.$$

Паколькі функцыя $f(x)$ з'яўляецца непарыўнай на адрэзку $[x_{k-1},\ x_k]$, то па другой тэарэме Вейерштраса яна дасягае на адрэзку свайго найбольшага значэння M_k у некаторым пункце ξ_k' і свайго найменшага значэння m_k у некаторым пункце ξ_k''. Зразумела, што $M_k = f(\xi_k')$, $m_k = f(\xi_k'')$. Таму маем:

$$S - s = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k - \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \left[f(\xi_k') - f(\xi_k'') \right] \Delta x_k .$$

Адсюль, скарыстаўшы ўласцівасці абсалютнай велічыні, будзем мець:

$$S - s \le \sum_{k=1}^{n} \left| f(\xi_k') - f(\xi_k'') \right| \Delta x_k . \tag{3}$$

Паколькі пункты ξ_k' і ξ_k'' задавальняюць умове $\left|\xi_k' - \xi_k''\right| < \delta$ (бо ξ_k' і ξ_k'' належаць адрэзку $[x_{k-1},\ x_k]$ і $\lambda < \delta$), то на падставе (1) атрымаем:

$$\left| f(\xi_k') - f(\xi_k'') \right| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Адсюль і з няроўнасці (3) будзем мець:

$$f(x)\, S - s < \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b - a} \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b - a}(b - a) = \varepsilon ,$$

г. зн. $S - s < \varepsilon$, што і трэба было даказаць.

Тэарэма 2. *Калі функцыя $f(x)$ абмежаваная на адрэзку $[a,\ b]$ і мае на гэтым адрэзку толькі канечную колькасць пунктаў разрыву, то яна інтэгравальная на гэтым адрэзку.*

Адзначым, што тэарэмы 1 і 2 з'яўляюцца дастатковымі прыметамі інтэгравальнасці.

§ 5. УЛАСЦІВАСЦІ ВЫЗНАЧАНАГА ІНТЭГРАЛА

У § 2 было ўведзена паняцце вызначанага інтэграла для выпадку, калі ніжні ліміт інтэгравання меншы верхняга ліміту. Вызначым паняцце вызначанага інтэграла для выпадку, калі ніжні ліміт інтэгравання большы або роўны верхняму ліміту.

Няхай функцыя з'яўляецца інтэгравальнай на адрэзку $[a,\ b]$ ($a<b$),, г. зн. існуе вызначаны інтэграл $\int\limits_a^b f(x)\ dx$.

Па азначэнні мяркуем:

$$\int\limits_b^a f(x)\ dx = -\int\limits_a^b f(x)\ dx\,; \tag{1}$$

$$\int\limits_a^a f(x)\ dx = 0\,. \tag{2}$$

Уласцівасць 1. *Калі функцыі $f(x)$ і $\varphi(x)$ інтэгравальныя на адрэзку $[a,\ b]$, то функцыі $f(x)\pm\varphi(x)$ таксама інтэгравальныя на гэтым адрэзку, прычым*

$$\int\limits_a^b \big(f(x)\pm\varphi(x)\big)\ dx = \int\limits_a^b f(x)\ dx \pm \int\limits_a^b \varphi(x)\ dx\,. \tag{3}$$

Доказ. Пры любой разбіўцы T адрэзка $[a,\ b]$ і пры любым выбары пунктаў ξ_k мае месца наступная роўнасць:

$$\sum_{k=1}^{n}\big(f(\xi_k)\pm\varphi(\xi_k)\big)\ \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \pm \sum_{k=1}^{n}\varphi(\xi_k)\Delta x_k\,. \tag{4}$$

Паколькі функцыі $f(x)$ і $\varphi(x)$ інтэгравальныя на адрэзку $[a,\ b]$, то пры $\lambda\to 0$ існуюць ліміты кожнай з сум, якія стаяць у правай частцы роўнасці (4). Адсюль і з роўнасці (4) вынікае, што пры $\lambda\to 0$ існуе ліміт сумы, якая стаіць у левай частцы роўнасці (4). Гэта сведчыць, што функцыі $f(x)\pm\varphi(x)$ інтэгравальныя на адрэзку $[a,\ b]$.

Засталося даказаць роўнасць (3). Роўнасць (3) мы атрымаем, калі ў роўнасці (4) пяройдзем да ліміту пры $\lambda \to 0$. Уласцівасць 1 цалкам даказалі.

Уласцівасць 2. *Калі функцыя $f(x)$ інтэгравальная на адрэзку $[a, b]$, C — канстанта, то функцыя $Cf(x)$ таксама інтэгравальная на гэтым адрэзку, прычым*

$$\int_a^b Cf(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx. \tag{5}$$

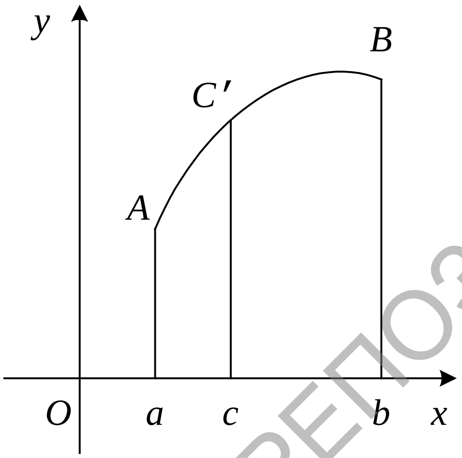
Доказ уласцівасці 2 прапануем здзейсніць самастойна.

Уласцівасць 3. *Пры любым размяшчэнні пунктаў a, b, c мае месца наступная роўнасць:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{6}$$

пры ўмове, што ўсе разглядаемыя тут інтэгралы існуюць.

Геаметрычны сэнс уласцівасці 3



Рыс. 10

Плошча крывалінейнай трапецыі *aABb* роўная суме плошчаў крывалінейных трапецый *aACc* і *cCBb*.

Доказ. 1°. Разгледзім выпадак, калі пункт c ляжыць паміж пунктамі a і b $(a < c < b)$. Адрэзак $[a, b]$ разбіваем на часткі такім чынам, каб пункт c супадаў з канцом аднаго з частковых адрэзкаў. Тады пры любым выбары пунктаў ξ_k будзем мець:

$$\sum_a^b f(\xi_k)\,\Delta x_k = \sum_a^c f(\xi_k)\,\Delta x_k + \sum_c^b f(\xi_k)\,\Delta x_k, \tag{7}$$

г. зн. інтэгральную суму, якая адпавядае адрэзку $[a, b]$, можна раскласці на дзве інтэгральныя сумы, якія адпавядаюць адрэзкам $[a, c]$ і $[c, b]$. Калі перайсці ў роўнасці (7) да ліміту пры $\lambda \to 0$, атрымаем роўнасць (6).

2°. Разгледзім выпадак, калі пункт c не ляжыць паміж пунктамі a і b. Няхай, напрыклад, $a < b < c$. Тады пункт b ляжыць паміж пунктамі a і c, і таму, калі скарыстаць даказанае вышэй, атрымаем:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Адсюль вынікае:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx,$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Роўнасць (6) даказалі.

Уласцівасць 4. *Калі функцыя $f(x)$ інтэгравальная на адрэзку $[a,\ b]$ і на гэтым адрэзку $f(x) \ge 0$ $\left(f(x) \le 0\right)$, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge 0 \quad \left(\int_a^b f(x)\,dx \le 0\right).$$

Доказ. Няхай $f(x) \ge 0$ на адрэзку $[a,\ b]$. Тады пры любой разбіўцы T адрэзка $[a,\ b]$ і любым выбары пунктаў ξ_k мае месца няроўнасць

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k \ge 0.$$

Калі перайсці ў дадзенай няроўнасці да ліміту пры $\lambda \to 0$, атрымаем:

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge 0.$$

Уласцівасць 5. *Калі функцыі $f(x)$ і $\varphi(x)$ інтэгравальныя на адрэзку $[a,\ b]$, дзе $f(x) \le \varphi(x)$, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Доказ. Паколькі па ўмове $f(x) \le \varphi(x)$ на адрэзку $[a,\ b]$, то на дадзеным адрэзку $f(x) - \varphi(x) \le 0$. Функцыі $f(x)$ і $\varphi(x)$ інтэгравальныя на адрэзку $[a,\ b]$, таму згодна з уласцівасцю 1 функцыя $f(x) - \varphi(x)$ таксама інтэгравальная на гэтым адрэзку. Калі скарыстаць уласцівасць 4, то атрымаем:

$$\int_a^b \left(f(x) - \varphi(x)\right) \le 0.$$

Адсюль на падставе роўнасці (3) вынікае:

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Уласцівасць 6. *Калі функцыя $f(x)$ інтэгравальная на адрэзку $[a,\ b]$ і на гэтым адрэзку $m \le f(x) \le M$, то*

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\ dx \le M(b-a). \qquad (8)$$

Доказ. Скарыстаем уласцівасць 5 і атрымаем:

$$\int_a^b m\ dx \le \int_a^b f(x)\ dx \le \int_a^b M\ dx,$$

адкуль (гл. § 2 прыкл. 1) вынікае няроўнасць (8).

Уласцівасць 7. *Калі функцыя $f(x)$ непарыўная на адрэзку $[a,\ b]$ ($a < b$), то мае месца няроўнасць*

$$\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\ dx. \qquad (9)$$

Доказ. Спачатку адзначым, што інтэгралы ў няроўнасці (9) існуюць, бо функцыя $f(x)$, а разам з ёй і $|f(x)|$, непарыўная на адрэзку $[a,\ b]$.

Дакажам няроўнасць (9). Скарыстаем відавочную няроўнасць

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|, \qquad (10)$$

для ўсіх $x \in [a,\ b]$. У праўдзівасці няроўнасці (10) лёгка пераканацца, калі разгледзіць асобна выпадкі $f(x) \ge 0$, $f(x) < 0$.

З няроўнасці (10) паводле ўласцівасці 5 атрымаем:

$$-\int_a^b |f(x)|\ dx \le \int_a^b f(x)\ dx \le \int_a^b |f(x)|\ dx,$$

што раўназначна няроўнасці (9).

Заўвага 1. Адзначым без доказу, што ўласцівасць (7) мае месца для любой функцыі, інтэгравальнай на адрэзку $[a,\ b]$.

Заўвага 2. Мы даказалі няроўнасць (9) у выпадку, калі $a < b$. Калі адмовіцца ад гэтага абмежавання (г. зн. дапусціць выпадкі $a = b$, $a > b$), то будзе мець месца наступная няроўнасць:

$$\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \le \left|\int_a^b |f(x)|\ dx\right|. \qquad (11)$$

Доказ 1 . Няхай $a < b$. Тады згодна з уласцівасцю 4 маем:

$$\int_a^b |f(x)|\ dx \ge 0.$$

Таму няроўнасць (9) у разглядаемым выпадку запісваецца ў выглядзе (11).

2 . Няхай $a = b$. Тады праўдзівасць формулы відавочная: 0=0.

3 . Няхай $a > b$. Тады $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_b^a f(x)\,dx\right| \le \int_b^a |f(x)|\,dx = \left|\int_a^b |f(x)|\,dx\right|$.

Праўдзівасць формулы (11) мы даказалі для любых *a* і *b*.

Уласцівасць 8 *(абагульненая тэарэма аб сярэднім значэнні). Калі функцыі $f(x)$ і $\varphi(x)$ непарыўныя на адрэзку $[a,\ b]$, і функцыя $\varphi(x)$ не мяняе знак на гэтым адрэзку, то на дадзеным адрэзку існуе такі пункт ξ, што*

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{12}$$

Доказ. Паколькі функцыя $f(x)$ непарыўная на адрэзку $[a,\ b]$, то паводле другой тэарэмы Вейерштраса яна мае на гэтым адрэзку найменшае і найбольшае значэнні *m* і *M*. Зразумела, што

$$m \le f(x) \le M,\ \forall x \in [a,\ b]. \tag{13}$$

Па ўмове тэарэмы функцыя $\varphi(x)$ не мяняе знак на адрэзку $[a,\ b]$. Няхай для пэўнасці $\varphi(x) \ge 0$ для ўсіх $x \in [a,\ b]$. Памножым няроўнасць (13) на $\varphi(x) \ge 0$. Атрымаем наступную няроўнасць:

$$m\varphi(x) \le f(x)\,\varphi(x) \le M\varphi(x),\ \forall x \in [a,\ b].$$

Адзначым, што паколькі функцыі $f(x)$ і $\varphi(x)$ непарыўныя на адрэзку $[a,\ b]$, то функцыі $m\varphi(x)$, $f(x)\,\varphi(x)$, $M\varphi(x)$ інтэгравальныя на адрэзку $[a,\ b]$. Таму, скарыстаўшы ўласцівасць 5, атрымаем:

$$\int_a^b m\varphi(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx \le \int_a^b M\varphi(x)\,dx.$$

Адсюль (уласцівасць 2) вынікае:

$$m\int_a^b \varphi(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx \le M\int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{14}$$

Згодна з меркаваннем $\varphi(x) \ge 0\ \ \forall x \in [a,\ b]$, таму паводле ўласцівасці (4) $\int_a^b \varphi(x)\,dx \ge 0$.

1 . Няхай $\int_a^b \varphi(x)\,dx = 0$. Тады з няроўнасці (14) маем:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = 0.$$

У гэтым выпадку формула

$$0 = f(\xi) \cdot 0 \tag{12}$$

мае месца для любога пункта ξ адрэзка $[a,\ b]$.

2 . Няхай $\int_a^b \varphi(x)\,dx > 0$. Падзелім роўнасць (14) на $\int_a^b \varphi(x)\,dx > 0$, атрымаем, што

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)\,dx} \le M.$$

Дадзеная няроўнасць сведчыць аб тым, што лік $\dfrac{\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)\,dx}$ заключаны паміж найменшым і найбольшым значэннямі функцыі $f(x)$, непарыўнай на адрэзку $[a,\ b]$.

Як вядома, калі функцыя $f(x)$ непарыўная на адрэзку $[a,\ b]$, то на гэтым адрэзку яна прымае ўсе значэнні, заключаныя паміж яе найменшым і найбольшым значэннямі. Таму на адрэзку $[a,\ b]$ існуе такі пункт ξ, што

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)\,dx},$$ адкуль і вынікае (12).

Тэарэму даказалі цалкам.

Вынік (тэарэма аб сярэднім значэнні). *Калі функцыя $f(x)$ непарыўная на адрэзку $[a,\ b]$, то на дадзеным адрэзку існуе такі пункт ξ, што*

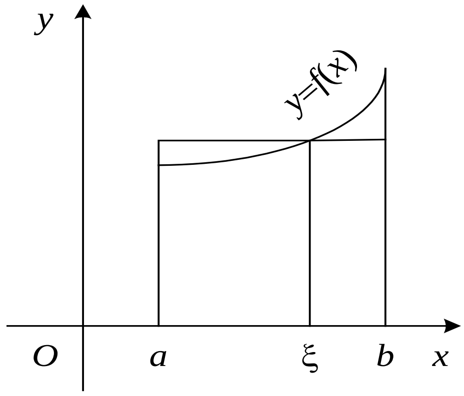
$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a). \tag{15}$$

Гэта тэарэма непасрэдна вынікае з даказанай, калі лічыць, што $\varphi(x) = 1$.

Геаметрычны сэнс тэарэмы аб сярэднім значэнні

Калі функцыя непарыўная і неадмоўная на адрэзку $[a,\ b]$, то на гэтым адрэзку існуе такі пункт ξ, што плошча фігуры, абмежаванай графікам дадзенай функцыі і прамымі $x = a$, $x = b$, $y = 0$, роўная плошчы прамавугольніка з вышынёй $f(\xi)$ і асновай $b - a$.

Заўвага 3. Формулы (12) і (15) мы даказалі ў выпадку, калі $a < b$. Адзначым, што яны праўдзівыя і ў выпадку $a \geq b$.



Рыс.11

§ 6. ВЫЗНАЧАНЫ ІНТЭГРАЛ СА ЗМЕННЫМ ВЕРХНІМ ЛІМІТАМ. ІСНАВАННЕ ПЕРШАІСНАЙ ДЛЯ НЕПАРЫЎНАЙ ФУНКЦЫІ

Няхай функцыя $f(x)$ непарыўная на адрэзку $[a,\ b]$. Тады яна інтэгравальная на любым адрэзку $[a,\ x]$, дзе $a \leq x \leq b$, г. зн. для любога пункта $x \in [a,\ b]$ існуе інтэграл $\int_a^x f(x)\ dx$.

Паколькі зменную інтэгравання можна абазначыць любой літарай, то, абазначыўшы яе праз *t*, атрымаем $\int_a^x f(t)\ dt$.

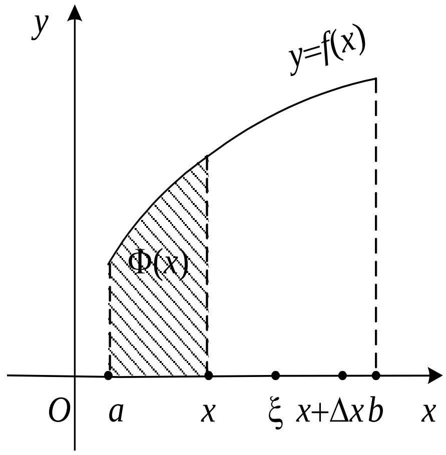
Мяркуем: $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\ dt$.

Адзначым, што функцыя $\Phi(x)$ вызначана на адрэзку $[a,\ b]$. Яна называецца вызначаным інтэгралам са зменным верхнім лімітам. Разгледзім важную ўласцівасць гэтай функцыі.

Тэарэма 1. *Калі функцыя $f(x)$ непарыўная на адрэзку $[a,\ b]$, то функцыя $\Phi(x)$ у кожным пункце x адрэзка $[a,\ b]$ мае вытворную, прычым*

$$\Phi'(x) = f(x),$$

г. зн. $\left(\int_a^x f(t)\ dt\right)' = f(x)$.



Рыс. 12

Доказ. Зафіксуем на адрэзку $[a,\ b]$ які-небудзь пункт x. Тэарэма будзе даказанай, калі мы дакажам, што

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=f(x).$$

Разгледзім рознасць

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\ dt-\int_a^x f(t)\ dt=$$

$$=\int_a^x f(t)\ dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)\ dt-\int_a^x f(t)\ dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\ dt.$$

Адсюль, скарыстаўшы тэарэму аб сярэднім значэнні, атрымаем, што

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)\ dt=f(\xi)\Delta x,$$

дзе пункт ξ ляжыць паміж x і $x+\Delta x$. Заўважым, што, калі $\Delta x\to 0$, то $\xi\to x$.

Улічваючы ўсё адзначанае вышэй, будзем мець:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(\xi)=\lim_{\xi\to x} f(\xi)=f(x),$$

бо дадзеная функцыя непарыўная ў кожным пункце *x* адрэзка $[a,\ b]$. Тэарэму даказалі.

Заўвага. З даказанай тэарэмы вынікае, што, калі функцыя $f(x)$ непарыўная на адрэзку $[a,\ b]$, то $\Phi(x)$ таксама непарыўная на дадзеным $[a,\ b]$ адрэзку.

Адзначым, што непарыўнасць $\Phi(x)$ можа быць даказанай пры больш слабых меркаваннях, менавіта, пры меркаванні інтэгравальнасці $f(x)$ на $f(x)$ адрэзку $[a,\ b]$.

Тэарэма 2. *Калі функцыя $f(x)$ непарыўная на адрэзку , то на гэтым адрэзку для яе існуе першаісная.*

Доказ. Сапраўды, згодна з тэарэмай 1 такой першаіснай будзе функцыя

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\ dt.$$

Прыклад. $\left(\int_1^x e^{-t^2}dt\right)'=e^{-x^2}$.

§ 7. ФОРМУЛА НЬЮТАНА-ЛЕЙБНІЦА

Няхай функцыя $f(x)$ непарыўная на адрэзку $[a,\ b]$; $F(x)$ — якая-небудзь яе першаісная на гэтым адрэзку. Тады мае месца наступная формула: $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$, якая называецца формулай Ньютана-Лейбніца.

Прыклад. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\ dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\dfrac{\pi}{2} = -\cos\dfrac{\pi}{2} + \cos 0 = 1.$

Дакажам формулу Ньютана-Лейбніца.

Няхай функцыя $f(x)$ непарыўная на адрэзку $[a,\ b]$ і — якая-небудзь першаісная функцыі $f(x)$. Функцыя $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\ dt$ таксама з'яўляецца першаіснай для функцыі . Паколькі дзве першаісныя для функцыі адрозніваюцца на канстанту, то

$$\Phi(x) = F(x) + C, \tag{1}$$

дзе С — канстанта.

Калі ў роўнасць (1) падставіць $x = a$, то будзем мець:

$$\Phi(a) = F(a) + C.$$

Паколькі $\Phi(a) = \int\limits_a^a f(t)\ dt = 0$, вынікае, што $C = -F(a)$. Таму роўнасць (1) можна запісаць у выглядзе: $\Phi(x) = F(x) - F(a)$.

Калі ў апошнюю роўнасць падставіць $x = b$, то атрымаем:

$$\Phi(b) = F(b) - F(a),$$

г. зн. $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

§ 8. ІНТЭГРАВАННЕ ПА ЧАСТКАХ

Няхай функцыі $u(x)$, $v(x)$ непарыўныя на адрэзку $[a,\ b]$ і маюць на гэтым адрэзку непарыўныя вытворныя $u'(x)$, $v'(x)$. Тады мае месца наступная формула:

$$\int\limits_a^b u\ dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\ du, \tag{1}$$

якая называецца формулай інтэгравання часткамі.

Прыклад.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\ dx = \left|\begin{array}{c} u = x \\ \cos x = dv \\ du = dx \\ v = \sin x \end{array}\right| = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\ x\ dx = = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Дакажам формулу (1). Як вядома, $(uv)\ ' = u'v + uv'$, г. зн. функцыя uv з’яўляецца першаіснай функцыі $u'v + uv'$. Скарыстаўшы формулу Ньютана-Лейбніца, будзем мець:

$$\int_a^b (u'v + uv')\ dx = uv\ \Big|_a^b,$$

$$\int_a^b vu'dx + \int_a^b uv'dx = uv\ \Big|_a^b,$$

$$\int_a^b v\ du + \int_a^b u\ dv = uv\ \Big|_a^b,$$

$$\int_a^b u\ dv = uv\ \Big|_a^b - \int_a^b v\ du.$$

§ 9. ЗАМЕНА ЗМЕННАЙ (ПАДСТАНОЎКА) У ВЫЗНАЧАНЫМ ІНТЭГРАЛЕ

Тэарэма. *Няхай функцыя $f(x)$ непарыўная на адрэзку $[a,\ b]$, а функцыя $\varphi(t)$ вызначаная і непарыўная разам са сваёй вытворнай $\varphi'(t)$ на адрэзку $[\alpha,\ \beta]$, прычым*

$$a = \varphi(\alpha) \le \varphi(t) \le \varphi(\beta) = b$$
$$(\alpha \le t \le \beta).$$

Тады мае месца наступная роўнасць:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt. \qquad (1)$$

Формула (1) называецца формулай замены зменнай (падстаноўкі) у вызначаным інтэграле.

Доказ. Адзначым, што непарыўнасць функцый $f(x)$, $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ забяспечвае існаванне інтэгралаў у формуле (1). Дакажам роўнасць гэтых інтэгралаў.

Паколькі функцыя $f(x)$ з'яўляецца непарыўнай на адрэзку $[a,\ b]$, то на гэтым адрэзку яна мае першаісную. Абазначым яе праз $F(x)$. Мяркуем $x=\varphi(t)$. Тады функцыя $F(\varphi(t))$ будзе першаіснай для функцыі $f(\varphi(t))\ \varphi'(t)$.

Функцыя $F(x)$ з'яўляецца першаіснай для непарыўнай на адрэзку $[a,\ b]$ функцыі $f(x)$, таму па формуле Ньютана-Лейбніца маем:

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b)-F(a). \tag{2}$$

Функцыя $F(\varphi(t))$ з'яўляецца першаіснай для непарыўнай на адрэзку $[\alpha,\ \beta]$ функцыі $f(\varphi(t))\ \varphi'(t)$, таму па формуле Ньютана-Лейбніца маем:

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\ \varphi'(t)\ dt = F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha)) = F(b)-F(a). \tag{3}$$

З роўнасцяў (2) і (3) вынікае роўнасць (1).

Прыклад.

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx = \left| \begin{array}{c} x=a\ \sin t \\ dx = a\ \cos t\ dt \\ x=0 \text{ пры } t=0 \\ x=a \text{ пры } t=\dfrac{\pi}{2} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\ a\ \cos\ t\ dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

§ 10. КВАДРАВАЛЬНЫЯ ФІГУРЫ

Дапаможныя паняцці

Няхай a — некаторы пункт плоскасці; ε — дадатны лік.

Сукупнасць усіх пунктаў плоскасці, адлегласць ад якіх да пункта a меншая (меншая або роўная) ε, называецца адкрытым (замкнутым) кругам радыуса ε з цэнтрам у пункце a.

Адкрыты круг радыуса ε з цэнтрам у пункце a называецца таксама ε-наваколлем пункта a.

Няхай (*P*) — некаторае мноства пунктаў плоскасці. Пункт *a* называецца ўнутраным пунктам мноства (*P*), калі ў гэтага пункта існуе такое ε-наваколле, якое змяшчаецца ў мностве (*P*).

Адзначым, што сам унутраны пункт мноства (*P*) належыць гэтаму мноству.

Пункт *a* называецца гранічным пунктам мноства (*P*), калі любое ε-наваколле гэтага пункта змяшчае як пункты, якія належаць мноству (*P*), так і пункты, якія не належаць гэтаму мноству.

Адзначым, што сам гранічны пункт мноства (*P*) можа як належаць мноству (*P*), так і не належаць.

Сукупнасць усіх гранічных пунктаў мноства (*P*) называецца граніцай мноства (*P*).

Прыклад 1. Разгледзім мноства пунктаў плоскасці, прамавугольныя дэкартавыя каардынаты якіх задавальняюць няроўнасці $x^2 + y^2 < 1$.

Гэтае мноства з'яўляецца адкрытым кругам радыуса 1 з цэнтрам у пункце $O(0;\ 0)$. Любы пункт гэтага мноства з'яўляецца ўнутраным пунктам гэтага мноства. Граніцай дадзенага мноства з'яўляецца акружнасць $x^2 + y^2 = 1$.

Мноства (*P*) называецца абмежаваным, калі яно змяшчаецца ў некаторым крузе.

Абмежаванае мноства пунктаў плоскасці называецца плоскай фігурай.

Многавугольнай фігурай (карацей многавугольнікам) называецца такое мноства пунктаў плоскасці, якое можа быць складзена з канечнага ліку трохвугольнікаў, якія не маюць агульных унутраных пунктаў.

Азначэнне квадравальнасці і плошчы квадравальнай фігуры

З курса геаметрыі вядома паняцце плошчы многавугольніка.

Плошча многавугольніка — гэта лік, які валодае ўласцівасцямі:

1 уласцівасць (дадатнасць). *Плошча многавугольніка ёсць неадмоўны лік.*

2 уласцівасць (інварыянтнасць). *Роўныя многавугольнікі маюць роўныя плошчы.*

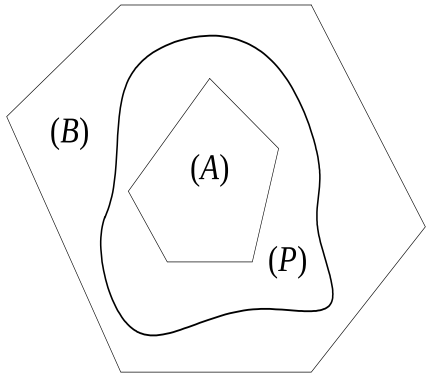
3 уласцівасць (адытыўнасць). *Няхай (A_1), (A_2) — два многавугольнікі, якія не маюць агульных унутраных пунктаў, а (A) — іх аб'яднанне. Тады плошча многавугольніка (A) будзе роўная суме плошчаў многавугольнікаў (A_1) і (A_2).*

4 уласцівасць (нармаванасць). *Плошча адзінкавага квадрата роўная адзінцы.*

Распаўсюдзім паняцце плошчы, захоўваючы ўсе чатыры ўласцівасці, з многавугольнікаў на некаторы больш шырокі клас плоскіх фігур.

Няхай (P) — некаторая плоская фігура (рыс. 13).

Разгледзім адвольны многавугольнік (A), які змяшчаецца ў фігуры (P). Плошчу яго абазначым праз A. Разгледзім таксама адвольны многавугольнік (B), які змяшчае фігуру (P). Плошчу яго абазначым праз B.



Рыс. 13

Зразумела, што для двух любых многавугольнікаў (A) і (B) мае месца няроўнасць: $A \le B$. Гэта няроўнасць сведчыць аб тым, што мноства $\{A\}$ плошчаў разнастайных многавугольнікаў (A), якія змяшчаюцца ў фігуры (P), абмежавана зверху плошчай B любога многавугольніка (B), які змяшчае фігуру (P). Таму мноства $\{A\}$ мае верхнюю мяжу. Абазначым яе праз P_*:

$$P_* = \sup\{A\}.$$

Калі ў фігуру (P) нельга ўпісаць ніводнага многавугольніка (A), то па азначэнні мяркуем, што $P_* = 0$.

Па азначэнні верхняй мяжы лікавага мноства маем для любога многавугольніка (B):

$$P_* \le B.$$

Гэта няроўнасць сведчыць аб тым, што мноства $\{B\}$ плошчаў разнастайных многавугольнікаў (B), якія змяшчаюць фігуру (P), абмежавана знізу лікам P_*. Таму мноства $\{B\}$ мае ніжнюю мяжу. Абазначым яе праз P^*:

$$P^* = \inf\{B\}.$$

Па азначэнні ніжняй мяжы лікавага мноства маем:

$$P_* \le P^*. \quad (1)$$

Такім чынам, для любой плоскай фігуры (P) мы ўстанавілі праўдзівасць няроўнасці (1).

Лік P_* называецца ўнутранай плошчай фігуры (P), лік P^* — вонкавай плошчай фігуры (P).

Азначэнне. *Калі $P_* = P^*$, то фігура (P) называецца квадравальнай, а лік*

$$P = P_* = P^* \text{ —}$$

плошчай такой фігуры.

Такім чынам, мы распаўсюдзілі паняцце плошчы на некаторы, больш шырокі клас фігур (на квадравальныя фігуры). Адзначым, што многавугольнік з'яўляецца квадравальнай фігурай. Яго плошча, у сэнсе сфармуляванага вышэй азначэння, роўная зыходнай плошчы.

Узнікае пытанне: ці існуюць неквадравальныя фігуры? Ніжэй мы разгледзім прыклад неквадравальнай фігуры.

Заўвага. Уведзенае вышэй паняцце плошчы называецца плошчай па Жардану або мерай Жардана.

Прыметы квадравальнасці

Тэарэма 1. *Для таго, каб фігура (P) была квадравальнай, неабходна і дастаткова, каб для любога ліку* $\varepsilon > 0$ *можна было б знайсці два такія многавугольнікі (A) і (B), што*

$$B - A < \varepsilon .$$

Доказ. Неабходнасць. Па ўмове фігура (P) з’яўляецца квадравальнай, г. зн. $P_* = P^* = P$. Возьмем адвольны лік $\varepsilon > 0$. Лік $P_* = P$ з’яўляецца верхняй мяжой мноства $\{A\}$, г. зн. найменшым з лікаў, якія абмяжоўваюць мноства $\{A\}$ зверху. Таму лік $P - \frac{\varepsilon}{2}$ ужо не будзе абмяжоўваць мноства $\{A\}$ зверху. Таму знойдзецца такі многавугольнік (A), што

$$A > P - \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (2)$$

Аналагічна, знойдзецца такі многавугольнік (B), што

$$B < P + \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (3)$$

Калі з няроўнасці (3) адняць няроўнасць (2), то атрымаем:

$$B - A < \varepsilon .$$

Дастатковасць. Згодна з умовай для любога ліку $\varepsilon > 0$ знойдуцца два такія многавугольнікі (A) і (B), што

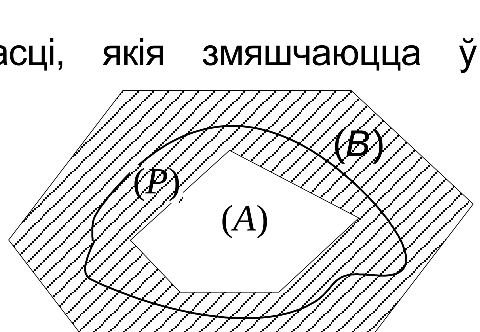
$$B - A < \varepsilon . \qquad (4)$$

Скарыстаўшы няроўнасць (1), будзем мець: $A \le P_* \le P^* \le B$.

Адсюль і з няроўнасці (4) атрымаем, што $P^* - P_* < \varepsilon$ для любога ліку $\varepsilon > 0$. Адсюль вынікае, што $P_* = P^*$.

Тэарэму 1 даказалі цалкам.

Разгледзім мноства ўсіх пунктаў плоскасці, якія змяшчаюцца ў многавугольніку (B), але не змяшчаюцца ўнутры многавугольніка (A) (рыс.14).

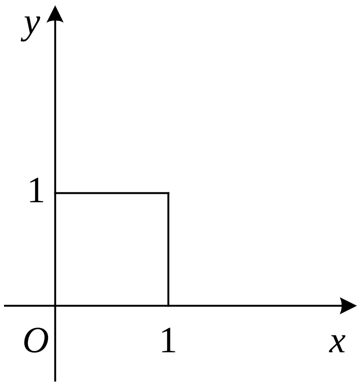


Рыс.14

Гэта мноства пунктаў з’яўляецца, відавочна, многавугольнікам, які пакрывае, г. зн. змяшчае граніцу фігуры (P). Сфармулюем даказаную вышэй тэарэму 1.

Тэарэма 1'***.*** *Для таго, каб фігура (P) была квадравальнай, неабходна і дастаткова, каб яе* *граніцу можна было б пакрыць многавугольнікам колькі пажадана малой плошчы.*

Дамовімся, што мноства пунктаў плоскасці (у прыватнасці крывая) мае плошчу, роўную нулю, калі яго можна пакрыць многавугольнікам колькі пажадана малой плошчы. Улічваючы гэта, можна сфармуляваць даказаную вышэй тэарэму.



Рыс.15

Тэарэма 1''. *Для таго, каб фігура (P) была квадравальнай, неабходна і дастаткова, каб яе граніца мела плошчу, роўную нулю.*

Прыклад 2. Разгледзім адзінкавы квадрат (рыс.15).

Мноства усіх пунктаў гэтага квадрата, якія маюць рацыянальныя абсцысы, абазначым праз (Q). Дакажам, што фігура (Q) з'яўляецца неквадравальнай.

Кожны пункт разглядаемага квадрата з'яўляецца гранічным пунктам фігуры (Q). Таму граніцай фігуры (Q) — разглядаемы квадрат. Калі скарыстаць тэарэму 1», то атрымаем, што фігура (Q) з'яўляецца неквадравальнай.

Дакажам важную дастатковую прымету квадравальнасці. Папярэдне дакажам наступную лему.

Лема. *Любая крывая, раўнанне якой можна запісаць у выглядзе $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ або $x = g(y)$ $(c \le y \le d)$, дзе $f(x)$, $g(y)$ — непарыўныя на адпаведных адрэзках функцыі, мае роўную нулю плошчу.*

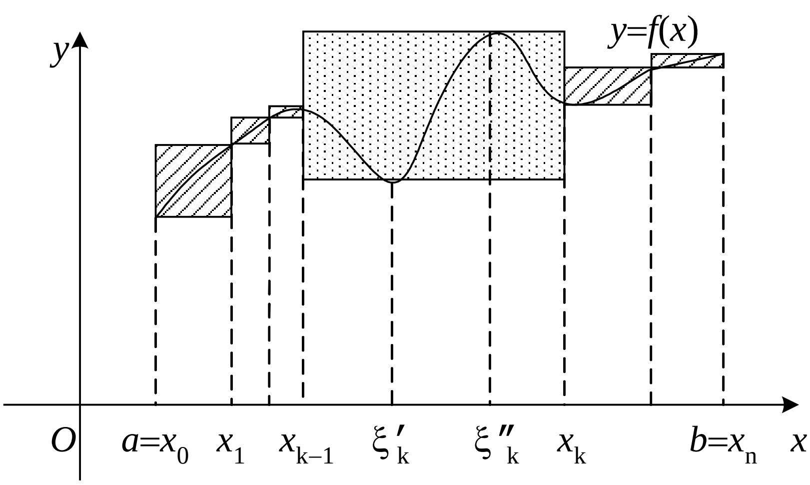
Доказ. Дакажам першую частку лемы. Возьмем адвольны лік $\varepsilon > 0$. Паколькі па ўмове тэарэмы функцыя $f(x)$ непарыўная на адрэзку $[a, b]$, то згодна з тэарэмай Кантара яна будзе раўнамерна непарыўнай на гэтым адрэзку. Таму для ліку $\frac{\varepsilon}{b-a} > 0$ знойдзецца такі лік $\delta > 0$, што для любой пары пунктаў x', $x'' \in [a, b]$, якія задавальняюць умове $|x' - x''| < \delta$, выконваецца няроўнасць

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \qquad (5)$$

Разгледзім адвольную разбіўку T адрэзка $[a, b]$, які задавальняе толькі адзінай умове, што $\lambda < \delta$ (рыс. 16).

Функцыя $f(x)$ з'яўляецца непарыўнай на частковым адрэзку $[x_{k-1}, x_k]$, таму паводле другой тэарэмы Вейерштраса яна дасягае на гэтым адрэзку свайго найменшага значэння m_k у пункце ξ_k', а таксама свайго найбольшага значэння M_k у пункце ξ_k'':

$$m_k = f(\xi_k'),$$
$$M_k = f(\xi_k'').$$



Рыс. 16

Пункты ξ_k' і ξ_k'' задавальняюць умове

$$\left|\xi_k' - \xi_k''\right| < \delta,$$

бо яны ляжаць на адрэзку $\left[x_{k-1}, x_k\right]$, даўжыня якога меншая δ. Таму на падставе (5) для пунктаў ξ_k' і ξ_k'' будзе выконвацца наступная няроўнасць:

$$\left|f\left(\xi_k'\right) - f\left(\xi_k''\right)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

г. зн.

$$M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}. \qquad (6)$$

Разгледзім фігуру, якая складзена з прамавугольнікаў, вяршыні якіх маюць наступныя каардынаты: $\left(x_{k-1}, m_k\right)$, $\left(x_{k-1}, M_k\right)$, $\left(x_k, \mathrm{M}_k\right)$, $\left(x_k, m_k\right)$ (k = 1, 2, … , n). Гэта фігура з'яўляецца многавугольнікам, які пакрывае дадзеную крывую. Вылічым плошчу S гэтага многавугольніка. Маем:

$$S = \sum_{k=1}^{n}\left(M_k - m_k\right)\cdot\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a}\left(b-a\right) = \varepsilon.$$

Такім чынам, мы даказалі, што для любога ліку $\varepsilon > 0$ знойдзецца такі многавугольнік, які пакрывае дадзеную крывую, плошча якога $S < \varepsilon$. Гэта і сведчыць, што дадзеная крывая мае роўную нулю плошчу. Лема даказана цалкам.

Тэарэма 2. *Калі граніца фігуры (P) складаецца з канечнага ліку частак, кожная з якіх можа быць зададзена адным з раўнанняў выгляду $y = f\left(x\right)$ або $x = g\left(y\right)$, дзе $f\left(x\right)$, $g\left(y\right)$ — функцыі, непарыўныя на адпаведных адрэзках, то фігура (P) з'яўляецца квадравальнай.*

Доказ. Згодна з даказанай лемай, кожная з разглядаемых частак граніцы фігуры (P) мае роўную нулю плошчу. Паколькі гэтых частак мы маем канечны лік, то граніца фігуры (P) мае роўную нулю плошчу.

Тэарэма 3. *Для таго, каб фігура (P) была квадравальнай, неабходна і дастаткова, каб існавалі дзве паслядоўнасці многавугольнікаў $\left\{\left(A_n\right)\right\}$ і $\left\{\left(B_n\right)\right\}$, якія адпаведна змяшчаюцца ў фігуры (P) і змяшчаюць фігуру (P), і плошчы якіх мелі б агульны ліміт:*

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} B_n = P. \qquad (7)$$

Тады гэты ліміт P будзе плошчай фігуры (P).

Доказ. Дастатковасць. Згодна з умовай існуюць дзве паслядоўнасці многавугольнікаў $\{(A_n)\}$ і $\{(B_n)\}$, якія адпаведна змяшчаюцца ў фігуры (*P*) і змяшчаюць у сабе (*P*), для якіх мае месца роўнасць (7). Плошчы разглядаемых многавугольнікаў задавальняюць наступнай няроўнасці:

$$A_n \le P_* \le P^* \le B_n .$$

Калі зараз у гэтай няроўнасці перайсці да ліміту пры $n \to \infty$ і скарыстаць роўнасць (7), то атрымаем, што $P \le P_* \le P^* \le P$.

Адсюль і вынікае, што $P_* = P^*$.

Гэта сведчыць аб тым, што фігура (*P*) з'яўляецца квадравальнай. Дастатковасць даказалі.

Неабходнасць тэарэмы прымем без доказу.

Тэарэма 4. *Калі для фігуры (P) існуюць дзве такія паслядоўнасці квадравальных фігур* $\{(Q_n)\}$ *і* $\{(R_n)\}$*, якія адпаведна змяшчаюцца ў фігуры (P) і змяшчаюць фігуру (P), плошчы якіх маюць агульны ліміт:*

$$\lim_{n\to\infty} Q_n = \lim_{n\to\infty} R_n = P, \qquad (8)$$

то фігура (P) з'яўляецца квадравальнай, а гэты агульны ліміт P будзе плошчай фігуры (P).

Доказ. Згодна з умовай тэарэмы фігура (Q_n) з'яўляецца квадравальнай, г. зн. яе плошча Q_n з'яўляецца верхняй мяжой мноства плошчаў разнастайных многавугольнікаў, якія змяшчаюцца ў дадзенай фігуры. На падставе азначэння верхняй мяжы лікавага мноства знойдзецца такі многавугольнік (A_n), які змяшчаецца ў фігуры (Q_n), для якога мае месца наступная няроўнасць:

$$Q_n - \frac{1}{n} < A_n < Q_n .$$

Калі ў гэтай няроўнасці перайсці да ліміту пры $n \to \infty$ і скарыстаць роўнасць (8), то атрымаем, што

$$P \le \lim_{n\to\infty} A_n \le P ,$$

г. зн. $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = P$.

Такім чынам, мы пабудавалі паслядоўнасць многавугольнікаў $\{(A_n)\}$, што змяшчаюцца ў фігуры (*P*) ($(A_n) \subset (Q_n) \subset (P)$), плошчы якіх маюць ліміт *P*.

Аналагічным чынам можна пабудаваць паслядоўнасць многавугольнікаў $\{(B_n)\}$, што змяшчаюць фігуру (*P*), плошчы якіх таксама маюць ліміт *P*.

Скарыстаўшы тэарэму 3, атрымліваем, што фігура (*P*) з'яўляецца квадравальнай, а ліміт *P* будзе плошчай гэтай фігуры.

Асноўныя ўласцівасці плошчы квадравальнай фігуры

Можна даказаць, што плошча квадравальнай фігуры валодае наступнымі ўласцівасцямі:

1) дадатнасць;

2) інварыянтнасць;

3) адытыўнасць;

4) нармаванасць.

У праўдзівасці уласцівасцяў 1, 2, 4 лёгка пераканацца пры дапамозе адпаведных уласцівасцяў плошчы многавугольнікаў. Дакажам праўдзівасць уласцівасці 3.

Уласцівасць 3 (адытыўнасць). *Няхай (P_1), (P_2) — дзве плоскія фігуры, якія не маюць агульных унутраных пунктаў, (P) — іх аб'яднанне. Тады квадравальнасць дзвюх з разглядаемых фігур заўсёды цягне квадравальнасць трэцяй фігуры. Прычым заўсёды маем, што*

$$P = P_1 + P_2. \quad (9)$$

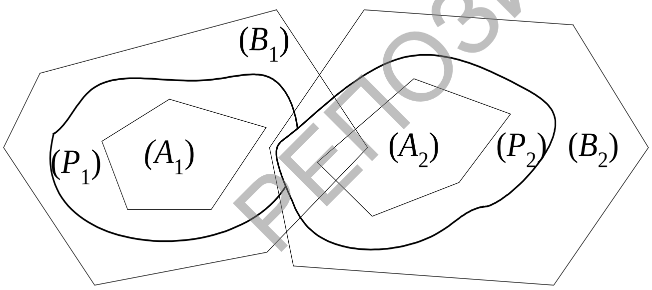
Доказ. Сцвярджэнне пра квадравальнасць лёгка даказваецца пры дапамозе тэарэмы 1». Дакажам роўнасць (9).

Возьмем адвольны лік $\varepsilon > 0$. Паколькі фігура (P_1) з'яўляецца квадравальнай, то, згодна з тэарэмай 1, знойдуцца два такія многавугольнікі (A_1), (B_1) ((A_1) змяшчаецца ў фігуры (P_1), (B_1) змяшчае фігуру (P_1)), для якіх маем, што

$$B_1 - A_1 < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (10)$$

Аналагічна, знойдуцца такія два многавугольнікі (A_2) і (B_2) ((A_2) змяшчаецца ў фігуры (P_2), (B_2) змяшчае фігуру (P_2)), для якіх

$$B_2 - A_2 < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (11)$$



Рыс. 17

Аб'яднаем многавугольнікі (A_1) і (A_2). Атрымаем некаторы многавугольнік (*A*), які змяшчаецца ў фігуры (*P*) (рыс. 17).

Аб'яднаем многавугольнікі (B_1) і (B_2). Атрымаем некаторы многавугольнік (*B*), які змяшчае фігуру (*P*).

Відавочнымі з'яўляюцца наступныя няроўнасці:

$$A \le P \le B, \quad (12)$$

$$A_1 \le P_1 \le B_1,$$

$$A_2 \le P_2 \le B_2.$$

Калі скласці апошнія дзве няроўнасці, то атрымаем наступную няроўнасць: $A_1 + A_2 \le P_1 + P_2 \le B_1 + B_2$.

Памножым гэту няроўнасць на –1 і будзем мець:

$$-(B_1 + B_2) \le -(P_1 + P_2) \le -(A_1 + A_2). \quad (13)$$

Паколькі многавугольнікі (A_1) і (A_2) не маюць агульных унутраных пунктаў, то, плошча многавугольніка (A) будзе роўная суме плошчаў многавугольнікаў (A_1) і (A_2):

$$A = A_1 + A_2. \tag{14}$$

Многавугольнікі (B_1) і (B_2), магчыма, маюць агульныя ўнутраныя пункты, таму плошча многавугольніка (B) меншая або роўная суме плошчаў многавугольнікаў (B_1) і (B_2):

$$B \le B_1 + B_2. \tag{15}$$

Калі ўлічыць няроўнасці (14) і (15), то з няроўнасці (12) будзе вынікаць наступная няроўнасць:

$$A_1 + A_2 \le P \le B_1 + B_2.$$

Склаўшы гэту няроўнасць з няроўнасцю (13), атрымаем:

$$-\left(\left(B_1 - A_1\right) + \left(B_2 - A_2\right)\right) \le P - \left(P_1 + P_2\right) \le \left(B_1 - A_1\right) + \left(B_2 - A_2\right).$$

Дадзеная няроўнасць раўназначная няроўнасці:

$$\left|P - \left(P_1 + P_2\right)\right| \le \left(B_1 - A_1\right) + \left(B_2 - A_2\right).$$

Адсюль, улічваючы няроўнасці (10) і (11), атрымаем:

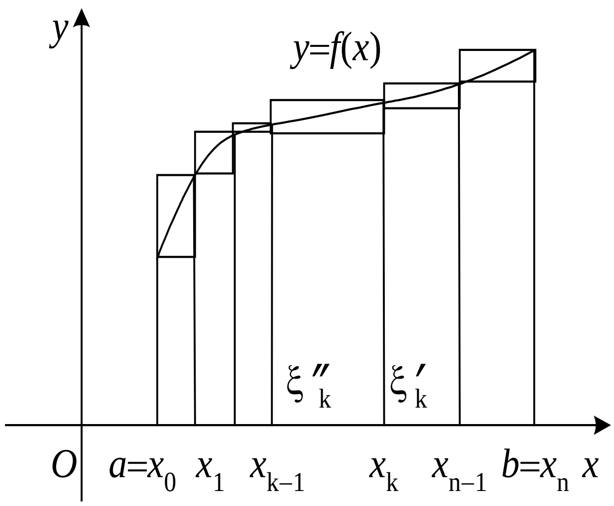
$$\left|P - \left(P_1 + P_2\right)\right| < \varepsilon, \ \forall \varepsilon > 0, \text{ г. зн. } P = P_1 + P_2.$$

Роўнасць (9) даказалі.

Вылічэнне плошчы крывалінейнай трапецыі

Няхай функцыя $y = f(x)$, вызначаная на адрэзку $[a, b]$, з'яўляецца непарыўнай і неадмоўнай на гэтым адрэзку.

Разгледзім плоскую фігуру, абмежаваную графікам дадзенай функцыі і прамымі $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (рыс.18). Гэта фігура называецца крывалінейнай трапецыяй.



Рыс.18

Тэарэма 5. *Крывалінейная трапецыя з'яўляецца квадравальнай фігурай. Яе плошчу P можна вылічыць пры дапамозе формулы*

$$P = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{16}$$

Доказ. Сцвярджэнне аб квадравальнасці крывалінейнай трапецыі лёгка даказаць пры дапамозе тэарэмы 2. Застаецца даказаць формулу (16).

Падзелім адрэзак $\left[a,\ b\right]$ пунктамі

$$a = x_0 < x_1 < \ \ldots \ < x_{k-1} < x_k < \ \ldots \ < x_n = b$$

на *n* частковых адрэзкаў. Няхай

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1},\ (k = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n).$$

Абазначым праз λ даўжыню найбольшага частковага адрэзка.

Паколькі функцыя $f\left(x\right)$ непарыўная на частковым адрэзку $\left[x_{k-1},\ x_k\right]$, то згодна з другой тэарэмай Вейерштраса яна дасягае на гэтым адрэзку свайго найбольшага значэння M_k у некаторым пункце $\xi_k{}'$, а таксама свайго найменшага значэння m_k у некаторым пункце $\xi_k{}''$:

$$f\left(\xi_k{}'\right) = M_k,$$

$$f\left(\xi_k{}''\right) = m_k.$$

Разгледзім наступныя сумы:

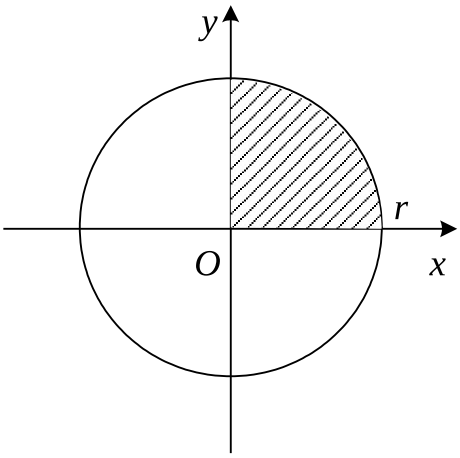
$$s = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_k{}''\right)\ \Delta x_k,$$

$$S = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_k{}'\right)\ \Delta x_k\ .$$

Сума *s* ёсць плошча многавугольніка, які змяшчаецца ў крывалінейнай трапецыі. Сума *S* ёсць плошча многавугольніка, які змяшчае крывалінейную трапецыю (рыс. 18). Таму $s \le P \le S$, г. зн.

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_k{}''\right)\ \Delta x_k \le P \le \sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_k{}'\right)\ \Delta x_k. \qquad (17)$$

Адзначым, што сумы *s* і *S* з’яўляюцца інтэгральнымі сумамі для функцыі $f\left(x\right)$ на адрэзку $\left[a,\ b\right]$. Паколькі згодна з умовай $f\left(x\right)$ — непарыўная на адрэзку $\left[a,\ b\right]$ функцыя, то яна будзе інтэгравальнай на гэтым адрэзку. Таму пры $\lambda \to 0$ сумы *s* і *S* маюць ліміт, роўны $\int\limits_a^b f\left(x\right)\ dx$.



Рыс. 19

Калі ўлічыць гэты факт і ў няроўнасці (17) перайсці да ліміту пры $\lambda \to 0$, то атрымаем:

$$\int\limits_a^b f\left(x\right)\ dx \le P \le \int\limits_a^b f\left(x\right)\ dx.$$

Адсюль і вынікае роўнасць (16).

Прыклад 3. Разгледзім круг радыуса *r*. Дакажам, што ён з’яўляецца квадравальнай фігурай і яго плошча роўная $P = \pi r^2$.

Доказ. Разгледзім круг радыўса *r*. Пабудуем прамавугольную сістэму каардынат, каб яе пачатак супадаў з цэнтрам круга (рыс. 19).

У гэтай сістэме каардынат акружнасць, якая з'яўляецца граніцай дадзенага круга, задаецца раўнаннем $x^2+y^2=r^2$.

Адсюль: $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$.

Знак «+» адпавядае верхняй паўакружнасці, «–» — ніжняй паўакружнасці.

Граніца дадзенага круга складаецца з дзвюх частак (дзве паўкружнасці), раўнанні якіх маюць выгляд:

$$y=+\sqrt{r^2-x^2},\ -r\le x\le r,$$
$$y=-\sqrt{r^2-x^2},\ -r\le x\le r.$$

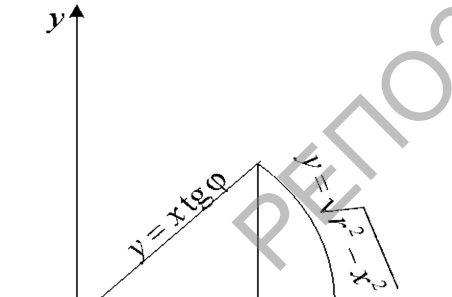
Паколькі гэтыя функцыі непарыўныя на адрэзку $[-r,\ r]$, то на падставе тэарэмы 2 можам сцвярджаць, што круг з'яўляецца квадравальнай фігурай.

Вылічым цяпер плошчу дадзенага круга. Спачатку вылічым плошчу P_1 чацвёртай часткі круга. Скарыстаўшы формулу (16), будзем мець:

$$P_1=\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}dx=\left|\begin{array}{c} x=r\cos t\\ dx=-r\sin t\ dt\\ x=0\ \text{пры}\ t=\dfrac{\pi}{2}\\ x=r\ \text{пры}\ t=0\end{array}\right|=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left(-r^2\sin^2 t\right)dt=r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\frac{\pi r^2}{4}.$$

Калі цяпер скарыстаць уласцівасці інварыянтнасці і адытыўнасці плошчы, то атрымаем, што плошча круга роўная $P=\pi r^2$.

Прыклад 4. Разгледзім кругавы сектар радыуса *r*, які адпавядае вуглу φ (рыс. 20).



Рыс. 20

Рашэнне.Кругавы сектар — квадравальная фігура (гл. тэарэму 2). Вылічым плошчу кругавога сектара. Для зручнасці будзем лічыць, што $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$.

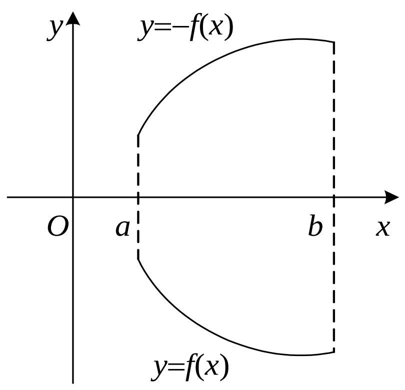
Маем:

$$P=\int_0^{r\cos\varphi}x\ tg\varphi\ dx+\int_{r\cos\varphi}^{r}\sqrt{r^2-x^2}dx=$$
$$=\frac{x^2}{2}tg\varphi\Big|_0^{r\cos\varphi}-r^2\int_\varphi^0\sin^2 t\ dt=\frac{1}{2}r^2\varphi.$$

Заўвага 1. Няхай функцыя $y=f(x)$ вызначана на адрэзку $[a,\ b]$. Мяркуем, што функцыя $f(x)$ з'яўляецца непарыўнай на дадзеным адрэзку, дзе $f(x)\le 0$.

Разгледзім фігуру, якая абмежавана графікам дадзенай функцыі і прамымі $x=a$, $x=b$, $y=0$ (рыс. 21).

Гэта фігура з'яўляецца квадравальнай (тэарэма 2). Вылічым яе плошчу *P*.



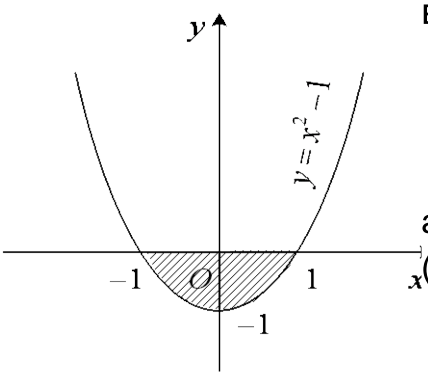
Рыс. 21

З гэтай мэтай пабудуем крывалінейную трапецыю, абмежаваную прамымі $x=a$, $x=b$, $y=0$ і графікам функцыі $y=-f(x)$. Плошчу пабудаванай крывалінейнай трапецыі можна вылічыць па формуле (16):

$$\int_a^b \left(-f(x)\right)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Калі скарыстаць уласцівасць інварыянтнасці плошчы, то атрымаем наступную формулу для вылічэння плошчы разглядаемай плоскай фігуры:

$$P = -\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (18)$$



Рыс. 22

Прыклад 5. Вылічыць плошчу фігуры, якая абмежавана воссю *Ox* і графікам функцыі $y=x^2-1$ (рыс. 22).

Рашэнне. Скарыстаўшы формулу (18), атрымаем:

$$P = -\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)dx = \left(-\frac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_{-1}^{1} = -\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}+1 = \frac{4}{3}$$

(кв. адз.).

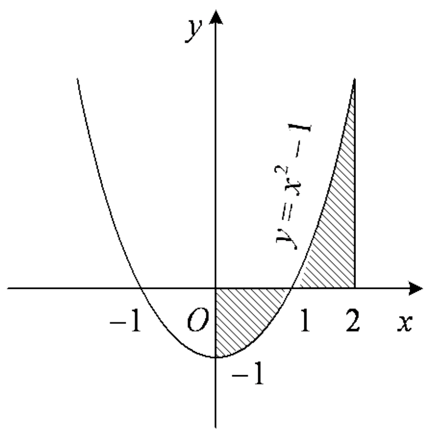
Заўвага 2. Падчас неабходна вылічыць плошчу фігуры, абмежаванай графікам функцыі, якая непарыўная на некаторым адрэзку і мяняе знак у канечным ліку пунктаў гэтага адрэзка. Вылічэнне плошчы ў гэтым выпадку зводзіцца да выкарыстання формул (16) і (18), а таксама ўласцівасці адытыўнасці плошчы.

Прыклад 6. Вылічыць плошчу фігуры, якая абмежавана графікам функцыі $y=x^2-1$ і прамымі $x=0$, $x=2$, $y=0$ (рыс. 23).

Рашэнне.

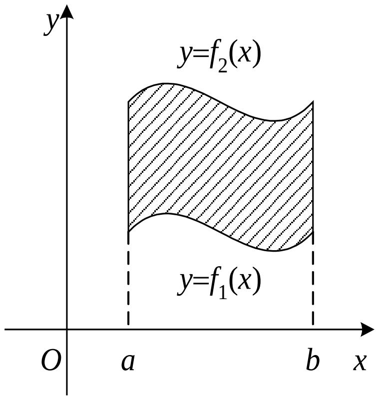
$$P_1 = -\int_0^1\left(x^2-1\right)dx = \frac{2}{3},\quad P_2 = \int_1^2\left(x^2-1\right)dx = \frac{4}{3}.$$

$$P = P_1 + P_2 = \frac{2}{3}+\frac{4}{3} = 2 \text{ (кв. адз.).}$$



Рыс. 23

Заўвага 3. Няхай функцыі $y=f_1(x)$ і $y=f_2(x)$ вызначаныя і непарыўныя на адрэзку $[a, b]$, прычым $f_1(x)\le f_2(x)$ на гэтым адрэзку. Разгледзім фігуру, якая абмежавана графікамі дадзеных функцый і прамымі $x=a$, $x=b$ (рыс. 24).



Рыс. 24

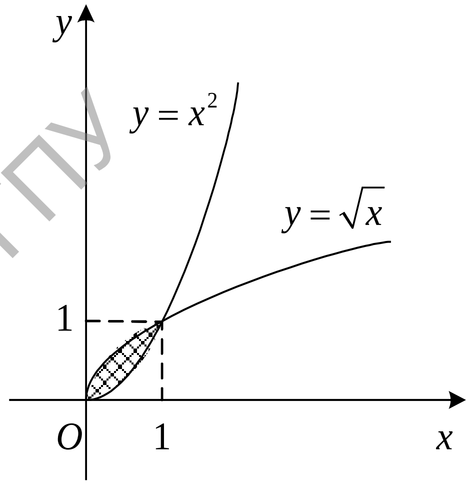
Гэта фігура з'яўляецца квадравальнай (тэарэма 2). Вылічым яе плошчу P. Карыстаючыся формулай (16) і ўласцівасцю адытыўнасці плошчы, атрымаем наступную формулу для вылічэння плошчы разглядаемай фігуры:

$$P = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx. \qquad (19)$$

Прыклад 7. Вылічыць плошчу P фігуры, якая абмежавана графікамі функцый $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$ (рыс. 25).

Рашэнне. Скарыстаўшы формулу (19), атрымаем:

$$P = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2 \right) dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 - \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \text{ (кв. адз.).}$$

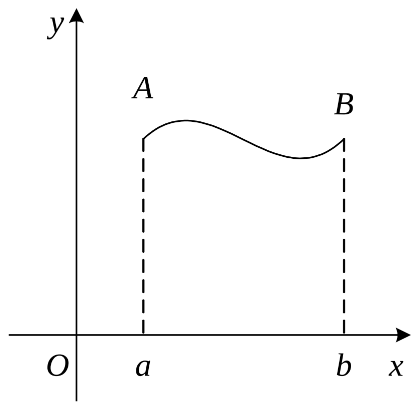


Рыс. 25

Заўвага 4. Разгледзім крывую AB, зададзеную паметрычнымі раўнаннямі

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t).$$

Няхай раўнанні вызначаюць функцыю $y = f(x)$ аргумента x, якая непарыўная і неадмоўная на адрэзку $[a,\ b]$. Вылічым плошчу P фігуры, якая абмежавана прамымі $x = a$, $x = b$ і крывой AB (рыс. 26).



Рыс. 26

Скарыстаўшы формулу (16), будзем мець:

$$P = \int_a^b y\ dx.$$

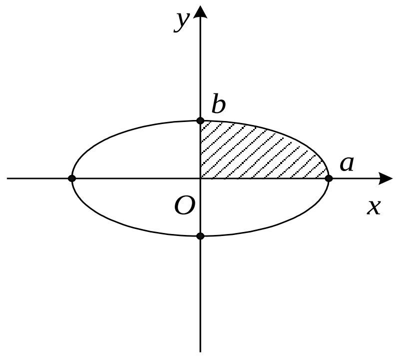
Здзейснім у гэтым інтэграле падстаноўку $x = \varphi(t)$, тады $dx = \varphi'(t)\ dt$, $y = \psi(t)$. Атрымаем:

$$P = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \varphi'(t)\ dt. \qquad (20)$$

Новыя ліміты інтэгравання знаходзяцца з раўнанняў: $a = \varphi(t_1)$, $b = \varphi(t_2)$, г. зн. t_1, t_2 з'яўляюцца значэннямі параметра, якія адпавядаюць $x = a$ і $x = b$.

Такім чынам, мы атрымалі формулу (20) для вылічэння плошчы крывалінейнай трапецыі, якая абмежавана крывой, зададзенай параметрычна.

Адзначым, што пры вывадзе гэтай формулы трэба меркаваць, што



Рыс. 27

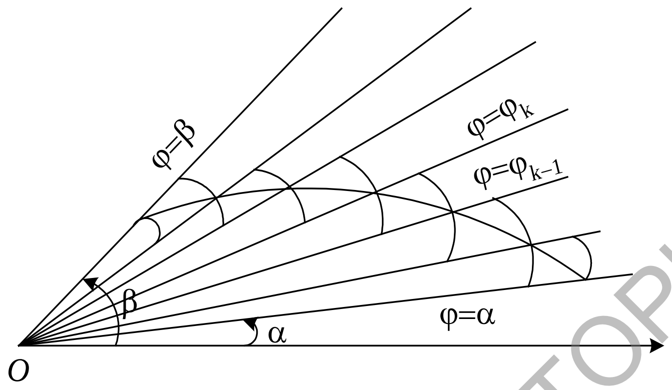
функцыі $\varphi(t)$, $\psi(t) \geq 0$, $\varphi'(t)$ непарыўныя на адрэзку з канцамі t_1 і t_2, а таксама, што функцыя $\varphi(t)$ строга манатонная на гэтым адрэзку.

Прыклад 8. Вылічыць плошчу фігуры, якая абмежавана эліпсам $x = a\cos\, t$, $y = b\sin\, t$ (рыс. 27).

Рашэнне.

$$P = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin\, t\ \left(a\cos\, t\right)'\, dt\ = \pi\, ab \text{ (кв. адз.)}.$$

Вылічэнне плошчы крывалінейнага сектара ў палярнай сістэме каардынат



Рыс. 28

Няхай $r = f(\varphi)$ — непарыўная і неадмоўная на адрэзку $[\alpha,\beta]$ функцыя. У палярнай сістэме каардынат графікам гэтай функцыі з'яўляецца некаторая крывая. Разгледзім плоскую фігуру, якая абмежавана гэтай крывой і праменямі $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$. Гэтую фігуру будзем называць крывалінейным сектарам (рыс. 28).

Тэарэма 6. *Крывалінейны сектар з'яўляецца квадравальнай фігурай. Яго плошчу P можна вылічыць пры дапамозе наступнай формулы:*

$$P = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)\ d\varphi,$$

г. зн.

$$P = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi. \qquad (21)$$

Доказ. Разбіваем адрэзак $[\alpha,\beta]$ на *n* частак (неабавязкова роўных) пунктамі $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_{k-1} < \varphi_k < \ldots < \varphi_n = \beta$.

Няхай $\Delta\, \varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$ (k = 1, 2, … , n).

Пунктам разглядаемай разбіўкі ў палярнай сістэме каардынат будуць адпавядаць наступныя прамені:

$$\varphi = \alpha\,,\ \varphi = \varphi_1,\ \varphi = \varphi_2,\ \ldots\ ,\varphi = \varphi_{k-1}, \varphi = \varphi_k,\ \ldots\ ,\ \varphi = \beta\,.$$

Дадзеныя прамені разбіваюць крываліне́йны сектар на n частковых крывалінейных сектараў. Зафіксуем увагу на k-тым частковым сектары. Ён абмежаваны праменямі $\varphi = \varphi_{k-1}$ і $\varphi = \varphi_k$.

Для разглядаемага частковага крывалінейнага сектара пабудуем два кругавыя сектары, якія таксама абмежаваны разглядаемымі праменямі, і радыусы якіх роўныя m_k і M_k, дзе m_k — найменшае значэнне непарыўнай на адрэзку $\left[\varphi_{k-1}, \varphi_k\right]$ функцыі $r = f\left(\varphi\right)$, а M_k — найбольшае значэнне функцыі $r = f\left(\varphi\right)$ на гэтым адрэзку.

Плошчы пабудаваных кругавых сектараў адпаведна роўныя:

$$\frac{1}{2} m_k{}^2 \Delta\varphi_k = \frac{1}{2} f^2\left(\xi_k{}'\right) \Delta\varphi_k$$

і

$$\frac{1}{2} M_k{}^2 \Delta\varphi_k = \frac{1}{2} f^2\left(\xi_k{}''\right) \Delta\varphi_k,$$

дзе $\xi_k{}'$, $\xi_k{}''$ — пункты адрэзка $\left[\varphi_{k-1}, \varphi_k\right]$, у якіх дадзеная функцыя дасягае адпаведна свайго найменшага і найбольшага значэнняў.

Разгледзім цяпер наступныя сумы:

$$Q = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} m_k{}^2 \Delta\varphi_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} f^2\left(\xi_k{}'\right) \Delta\varphi_k \tag{22}$$

і

$$R = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} M_k{}^2 \Delta\varphi_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} f^2\left(\xi_k{}''\right) \Delta\varphi_k. \tag{23}$$

Сума Q — гэта плошча фігуры, якая змяшчаецца ў разглядаемым крывалінейным сектары; сума R — плошча фігуры, якая змяшчае крывалінейны сектар.

Разгледзім якую-небудзь асноўную паслядоўнасць разбівак адрэзка $\left[\alpha, \beta\right]$ і адпаведныя ёй паслядоўнасці сум (22) і (23);

$$Q_1, Q_2, \; \ldots \;, Q_n, \; \ldots \;, \tag{24}$$

$$R_1, \mathrm{R}_2, \; \ldots \;, \mathrm{R}_n, \; \ldots \; . \tag{25}$$

Дадзеныя паслядоўнасці з’яўляюцца паслядоўнасцямі значэнняў інтэгральнай сумы для функцыі $\frac{1}{2} f^2\left(\varphi\right)$.

Паколькі функцыя непарыўная на адрэзку $\left[\alpha, \beta\right]$, то яна будзе інтэгравальнай на гэтым адрэзку. Значыць, паслядоўнасці (24) і (25) маюць агульным лімітам $\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} f^2\left(\varphi\right) d\varphi$:

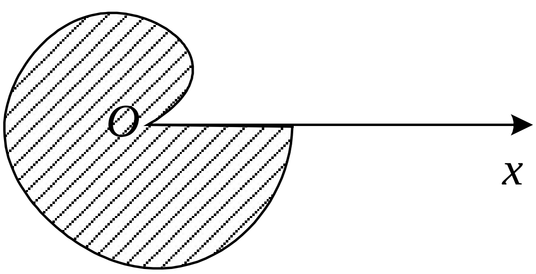
$$\lim_{k\to\infty} Q_k = \lim_{k\to\infty} R_k = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} f^2(\varphi)\ d\varphi.$$

Такім чынам, мы пабудавалі дзве паслядоўнасці квадравальных фігур, якія адпаведна змяшчаюцца ў крывалінейным сектары і змяшчаюць крывалінейны сектар, плошчы якіх маюць агульным лімітам інтэграл $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\varphi)d\varphi$.

Калі скарыстаць тэарэму 4, то атрымаем, што крывалінейны сектар з'яўляецца квадравальнай фігурай, а яго плошча P роўная $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\varphi)d\varphi$:

$$P = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\varphi)\ d\varphi\ .$$

Тэарэму даказалі цалкам.



Рыс. 29

Прыклад 9. Вылічыць плошчу фігуры, якую абмяжоўвае спіраль Архімеда $r = a\varphi$ $(a > 0)$ і палярная вось (рыс. 29).

Рашэнне. Скарыстаўшы формулу (21), атрымаем:

$$P = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\varphi)^2\, d\varphi = \frac{4}{3}a^2\pi^3 \text{ (кв.адз.).}$$

§ 11. КУБАВАЛЬНЫЯ ЦЕЛЫ

Дапаможныя паняцці

Няхай a — некаторы пункт прасторы, ε — адвольны дадатны лік. Сукупнасць усіх пунктаў прасторы, адлегласць якіх ад пункта a меншая (або роўная) ε, называецца адкрытым (замкнутым) шарам радыуса ε з цэнтрам у пункце a.

Адкрыты шар радыуса ε з цэнтрам у пункце a называецца ε-наваколлем пункта a.

Аналагічна таму, як было зроблена ў § 10, можна ўвесці паняцці ўнутранага пункта, гранічнага пункта, граніцы мноства пунктаў прасторы.

Няхай (V) — некаторае мноства пунктаў прасторы. Мноства (V) называецца абмежаваным, калі яно змяшчаецца ў некаторым шары.

Абмежаванае мноства пунктаў прасторы называецца прасторавай фігурай (целам).

Мнагаграннай фігурай (мнагаграннікам) называецца такое мноства пунктаў прасторы, якое можа быць складзена з канечнага ліку тэтраэдраў, што не маюць агульных унутраных пунктаў.

Азначэнне кубавальнасці і аб'ёму цела

З курса геаметрыі вядома паняцце аб'ёму мнагагранніка.

Аб'ём мнагагранніка — гэта лік, які валодае наступнымі ўласцівасцямі.

Уласцівасць 1 (дадатнасць). Аб'ём мнагагранніка ёсць неадмоўны лік.

Уласцівасць 2 (інварыянтнасць). Роўныя мнагаграннікі маюць роўныя аб'ёмы.

Уласцівасць 3 (адытыўнасць). Няхай (X_1), (X_2) — два мнагаграннікі, якія не маюць агульных унутраных пунктаў, а (X) — іх аб'яднанне. Тады аб'ём мнагагранніка (X) будзе роўны суме аб'ёмаў мнагаграннікаў (X_1) і (X_2).

Уласцівасць 4 (нармаванасць). Аб'ём адзінкавага куба роўны адзінцы.

Распаўсюдзім паняцце аб'ёму, захоўваючы ўсе чатыры ўласцівасці, з мнагаграннікаў на некаторы больш шырокі клас прасторавых цел.

Няхай (V) — некаторае прасторавае цела. Разгледзім адвольны мнагаграннік (X), які змяшчаецца ў целе (V). Яго аб'ём абазначым праз *X*. Разгледзім таксама адвольны мнагаграннік (Y), які змяшчае цела (V). Яго аб'ём абазначым праз *Y*.

Зразумела, што для любых двух мнагаграннікаў мае месца наступная няроўнасць:

$$X \le Y .$$

Дадзеная няроўнасць сведчыць аб тым, што мноства $\{X\}$ аб'ёмаў разнастайных мнагаграннікаў, якія змяшчаюцца ў целе (V), абмежавана зверху аб'ёмам *Y* любога мнагагранніка (Y), які змяшчае цела (V). Таму гэта мноства мае верхнюю мяжу. Абазначым яе праз V_*:

$$V_* = \sup\{X\}.$$

Згодна з азначэннем верхняй мяжы лікавага мноства маем

$$V_* \le Y , \ \forall (Y).$$

Гэта няроўнасць сведчыць аб тым, што мноства $\{Y\}$ абмежавана знізу лікам V_*. Таму яно мае ніжнюю мяжу. Абазначым яе праз V^*:

$$V^* = \inf\{Y\}.$$

Згодна з азначэннем ніжняй мяжы лікавага мноства маем

$$V_* \le V^* . \qquad (1)$$

Такім чынам, для любога прасторавага цела (V) мы даказалі праўдзівасць няроўнасці (1). Лік V_* называецца ўнутраным аб'ёмам цела (V), а лік V^* — вонкавым аб'ёмам цела (V).

Азначэнне. Калі $V_* = V^*$, то цела (V) называецца кубавальным, а лік

$$V = V_* = V^*$$

называецца аб'ёмам гэтага цела.

Такім чынам, мы распаўсюдзілі паняцце аб'ёму з мнагаграннікаў на некаторы больш шырокі клас прасторавых цел.

Можна даказаць, што вызначанае вышэй паняцце аб'ёму прасторавага цела валодае ўласцівасцямі 1— 4.

Прыметы кубавальнасці

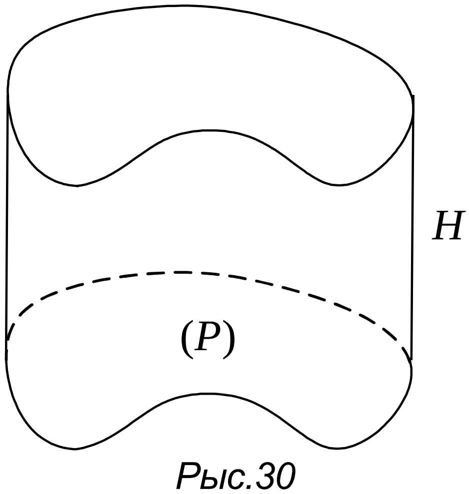
Можна даказаць тэарэмы, аналагічныя тэарэмам 1, 1', 1'', 2, 3, 4 з § 10.

Сфармулюем толькі тэарэмы, аналагічныя тэарэмам 3 і 4.

Тэарэма 3. *Для таго, каб цела (V) было кубавальным, неабходна і дастаткова, каб існавалі такія дзве паслядоўнасці мнагаграннікаў $\{(X_n)\}$ і $\{(Y_n)\}$, якія адпаведна змяшчаюцца ў (V) і змяшчаюць (V), аб'ёмы якіх мелі б агульны ліміт: $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = \lim\limits_{n\to\infty} Y_n = V$.*

Тады гэты ліміт V будзе аб'ёмам цела (V).

Тэарэма 4. *Калі для цела (V) існуюць такія дзве паслядоўнасці кубавальных цел $\{(U_n)\}$, $\{(Z_n)\}$, якія адпаведна змяшчаюцца ў (V) і змяшчаюць (V), аб'ёмы якіх маюць агульны ліміт: $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} Z_n = V$, то цела (V) будзе кубавальным, а гэты агульны ліміт V з'яўляецца яго аб'ёмам.*



Рыс.30

Вылічэнне аб'ёмаў некаторых цел

Тэарэма 5. *Калі асновай прамога цыліндра з'яўляецца квадравальная фігура (P) (рыс. 30), то гэты цыліндр будзе кубавальным целам, і яго аб'ём вылічваецца па формуле $V = P \cdot H$, дзе P — плошча фігуры (P), H — вышыня цыліндра.*

Доказ. Разгледзім многавугольнікі (A_n) і (B_n), якія адпаведна змяшчаюцца ў фігуры (P) і змяшчаюць фігуру (P), плошчы якіх маюць агульны ліміт, роўны P:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} B_n = P .$$

Адзначым, што такія многавугольнікі існуюць (гл. тэарэму 3 § 10).

На гэтых многавугольніках пабудуем прызмы (X_n) і (Y_n) з вышынёй H. Прызмы адпаведна змяшчаюцца ў целе (V) і змяшчаюць гэтае цела. Іх аб'ёмы адпаведна роўныя

$$X_n = A_n \cdot H , \; Y_n = B_n \cdot H$$

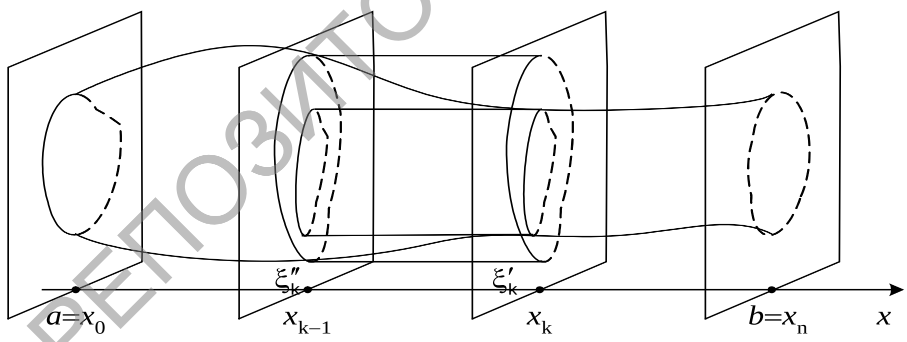
і маюць агульны ліміт:

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} Y_n = P \cdot H .$$

Калі скарыстаем тэарэму 3, то атрымаем, што дадзены цыліндр з'яўляецца кубавальным целам, а яго аб'ём роўны $V = P \cdot H$.

Вынік. Прамы кругавы цыліндр з'яўляецца кубавальным целам, а яго аб'ём роўны $V = \pi r^2 H$, дзе r — радыус асновы, H — вышыня цыліндра.

Разгледзім цела (V), якое размяшчаецца паміж пласкасцямі $x = a$, $x = b$ (рыс. 31).



Рыс. 31

Будзем перасякаць яго пласкасцямі, перпендыкулярнымі восі *Ox*. Мяркуем, што ўсе сечывы ўяўляюць сабой квадравальныя фігуры, і што $P(x)$ — плошча сечыва, якое адпавядае абсцысе *x*, уяўляе сабой непарыўную на адрэзку $[a,\ b]$ функцыю.

Мяркуем, што, калі любую пару сечываў спраектаваць на плоскасць, перпендыкулярную восі *Ox*, то праекцыя аднаго з сечываў будзе змяшчацца ў праекцыі другога.

Тэарэма 6*. Разглядаемае цела* (V) *з'яўляецца кубавальным, а яго аб'ём V можна знайсці па наступнай формуле:*

$$V = \int_a^b P(x)\, dx. \qquad (2)$$

Доказ. Адрэзак $[a,\ b]$ разбіваем на n частак пунктамі

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ \ldots\ < x_{k-1} < x_k < \ \ldots\ < x_n = b.$$

Няхай $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, ($k$ = 1, 2, … , n).

Праз пункты x_0, x_1, … , x_{k-1}, x_k, … , x_n праводзім плоскасці, перпендыкулярныя восі *Ox*. Плоскасці разбіваюць цела (V) на n элементарных цел.

Зафіксуем нашу ўвагу на k-м элементарным целе. Яно змяшчаецца паміж пласкасцямі $x = x_{k-1}$ і $x = x_k$.

Паколькі функцыя $P(x)$ непарыўная на адрэзку $[x_{k-1},\ x_k]$, то згодна з другой тэарэмай Вейерштраса яна дасягае свайго найменшага значэння m_k у некаторым пункце ξ_k', а таксама свайго найбольшага значэння M_k у некаторым пункце ξ_k'' адрэзка $[x_{k-1},\ x_k]$:

$$m_k = P(\xi_k'),\ M_k = P(\xi_k'').$$

Пабудуем прамы цыліндр з вышынёй Δx_k і плошчай асновы m_k. Цыліндр змяшчаецца ў k-м элементарным целе. Аб'ём цыліндра роўны $\mathrm{m_k}\Delta x_k$ (тэарэма 5).

Пабудуем таксама прамы цыліндр з вышынёй Δx_k і плошчай асновы M_k. Цыліндр змяшчае k-тае элементарнае цела. Аб'ём гэтага цыліндра роўны $M_k \Delta x_k$.

Разгледзім наступныя сумы:

$$U = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{m_k} \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k')\, \Delta x_k,$$

$$Z = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{M_k} \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k'')\, \Delta x_k.$$

Сума U ёсць аб'ём цела, якое змяшчаецца ў целе (V). Сума Z — аб'ём цела, якое змяшчае цела (V).

Разгледзім якую-небудзь асноўную паслядоўнасць разбівак адрэзка $[a,\ b]$ і адпаведныя ёй паслядоўнасці значэнняў сум U і Z:

$$U_1,\ U_2,\ \ldots\ ,\ U_k,\ \ldots\ , \qquad (3)$$

$$Z_1,\ \mathrm{Z}_2,\ \ldots\ ,\ \mathrm{Z}_k,\ \ldots\ . \qquad (4)$$

Адзначым, што паслядоўнасці (3) і (4) з'яўляюцца паслядоўнасцямі значэнняў інтэгральнай сумы для функцыі $P(x)$.

Паколькі функцыя $P(x)$ непарыўная на адрэзку $[a, b]$, то яна і інтэгравальная на гэтым адрэзку. Таму паслядоўнасці (3) і (4) маюць агульным лімітам $\int_a^b P(x)\,dx$.

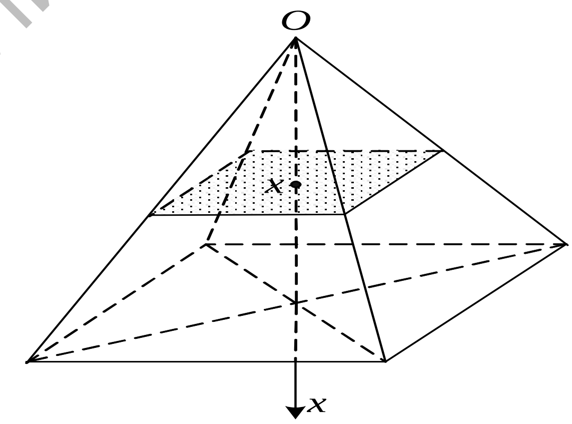
Такім чынам, мы пабудавалі дзве паслядоўнасці кубавальных цел, якія адпаведна змяшчаюцца ў целе (V) і змяшчаюць цела (V), аб'ёмы якіх маюць агульны ліміт: $\lim_{k\to\infty} U_k = \lim_{k\to\infty} Z_k = \int_a^b P(x)\,dx$.

Калі скарыстаць тэарэму 4, то атрымаем, што цела (V) з'яўляецца кубавальным, а аб'ём V роўны $\int_a^b P(x)\,dx$:

$$V = \int_a^b P(x)\,dx.$$

Тэарэму даказалі.

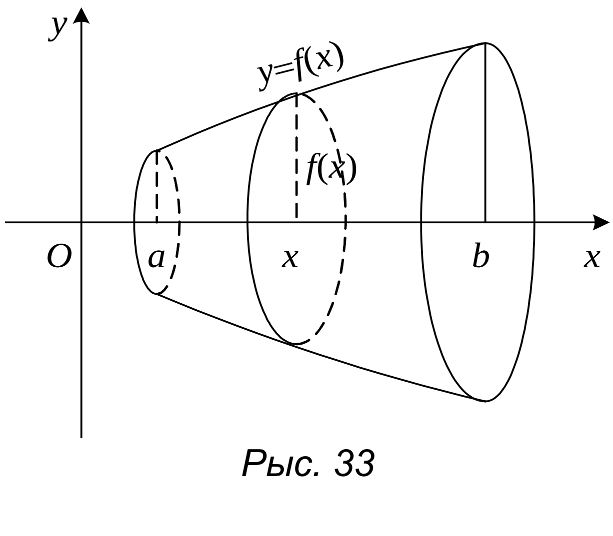
Заўвага 1. З даказанай тэарэмы вынікае праўдзівасць наступнага сцвярджэння: калі целы I і II размяшчаюцца паміж паралельнымі пласкасцямі *α* і *β* і валодаюць той уласцівасцю, што пры перасячэнні іх любой плоскасцю *γ*, паралельнай пласкасцям *α* і *β*, атрымліваюцца фігуры, якія маюць роўныя плошчы, то целы I і II маюць роўныя аб'ёмы (незалежна ад іх формы). Гэта сцвярджэнне носіць назву прынцыпу Кавальеры. Упершыню яго сфармуляваў італьянскі матэматык Кавальеры.



Рыс. 32

Прыклад 1. вылічыць аб'ём піраміды, у якой плошча асновы роўная *P*, а вышыня роўная *H* (рыс. 32).

Рашэнне. Праз вяршыню *O* праводзім вось, перпендыкулярную плоскасці асновы. Назавём яе воссю *Ox*. На гэтай восі возьмем пункт *x*. Праз гэты пункт праводзім плоскасць, перпендыкулярную восі *Ox*. Плошчу атрыманага пры гэтым сечыва абазначым праз $P(x)$.



Рыс. 33

З элементарнай геаметрыі вядома, што $\dfrac{P(x)}{P} = \dfrac{x^2}{H^2}$,

адкуль $P(x) = \dfrac{P}{H^2} x^2$.

Скарыстаўшы формулу (2), атрымаем:

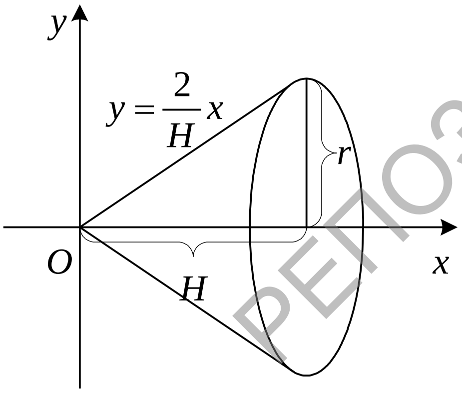
$$V = \int_0^H \frac{P}{H^2} x^2 dx = \frac{P}{H^2} \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^H = \frac{1}{3} PH .$$

Заўвага 2. Няхай функцыя $f(x)$ вызначаная, непарыўная і неадмоўная на адрэзку $[a,\ b]$. Разгледзім крывалінейную трапецыю, абмежаваную графікам дадзенай функцыі і прамымі $x = a$, $x = b$, $y = 0$. Дадзеную крывалінейную трапецыю будзем круціць вакол восі *Ox*. Атрыманае пры гэтым цела назавём целам вярчэння (рыс. 33).

Дакажам, што гэта цела з’яўляецца кубавальным. Знойдзем формулу для вылічэння аб’ёму *V* цела вярчэння.

На адрэзку $[a,\ b]$ возьмем пункт *x* і правядзём праз яго плоскасць, перпендыкулярную восі *Ox* . Пры перасячэнні цела (V) гэтай плоскасцю атрымаем круг радыуса $f(x)$. Плошча $P(x)$ атрыманага сечыва роўная $\pi f^2(x)$:

$$P = \pi f^2(x).$$



Рыс. 34

Калі скарыстаць тэарэму 6, то атрымаем, што цела вярчэння (V) з’яўляецца кубавальным, а аб’ём *V* гэтага цела вылічваецца па формуле

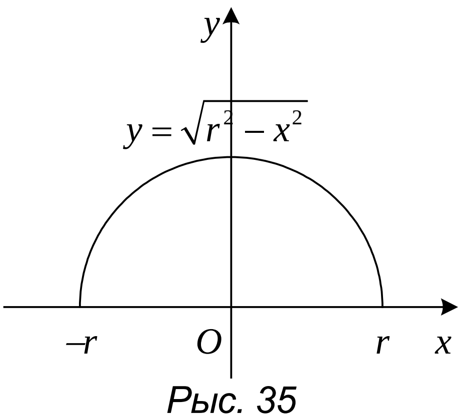
$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\ dx . \qquad (5)$$

Прыклад 2. Вылічыць аб’ём *V* конуса вярчэння, у якога радыус асновы роўны *r*, а вышыня *H* (рыс. 34).

Рашэнне. Спачатку знойдзем раўнанне ўтваральнай. Яно мае наступны выгляд: $y = \dfrac{r}{H} x$.

Дадзены конус атрымаецца, калі крывалінейную трапецыю, абмежаваную прамымі $y = \dfrac{r}{H} x$, $y = 0$, $x = r$, круціць вакол восі *Ox*.

Калі скарыстаць заўвагу 2, то атрымаем, што разглядаемы конус з’яўляецца кубавальным целам. Знойдзем яго аб’ём. Маем:



Рыс. 35

$$V=\pi\int_0^H\left(\frac{r}{H}x\right)^2dx=\frac{\pi r^2}{H^2}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^H=\frac{1}{3}\pi r^2H.$$

Прыклад 3. Вылічыць аб’ём шара радыуса *r*.

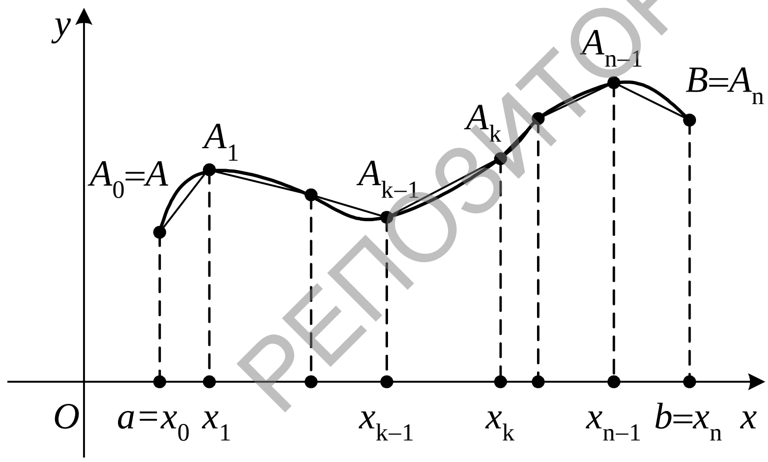
Рашэнне. Шар радыуса *r* мы атрымаем, калі паўкруг, абмежаваны паўакружнасцю $y=\sqrt{r^2-x^2}$ і прамой $y=0$, будзем круціць вакол восі *Ox* (рыс. 35).

Калі скарыстаць заўвагу 2, то атрымаем, што шар з’яўляецца кубавальным целам. Знойдзем аб’ём шара. Маем: $V=\pi\int_{-r}^{r}\left(r^2-x^2\right)dx=\frac{4}{3}\pi r^3$.

§ 12. ДАЎЖЫНЯ ДУГІ КРЫВОЙ

Няхай плоская крывая *AB* зададзена раўнаннем $y=f(x)$, дзе $f(x)$ — непарыўная функцыя на прамежку $[a,b]$. Разаб’ём адрэзак $[a,b]$ на *n* частак пунктамі $a=x_0<x_1<x_2<\ \ldots\ <x_{k-1}<x_k<\ \ldots\ <x_n=b$.

У кожным пункце x_k пабудуем перпендыкуляр да восі *Ox*. Тады дуга *AB* таксама разбіваецца на *n* частак пунктамі $A_0=A$, A_1, A_2, … , A_{k-1}, A_k, … , $A_n=B$ (рыс. 36).



Рыс. 36

Злучым гэтыя пункты хордамі і атрымаем некаторую упісаную ламаную лінію $A_0A_1A_2\ldots A_n$, перыметр якой абазначым праз *p*.

Азначэнне 1. *Калі існуе канечны ліміт s перыметра p упісанай у крывую ламанай, калі найбольшае з яе звёнаў імкнецца да нуля, то гэты ліміт называецца даўжынёй дугі AB:* $s=\lim\limits_{\mu\to 0}p$, *дзе μ — даўжыня найбольшага звяна ламанай.*

Крывую, даўжыня якой існуе, называюць выпрастальнай.

Тэарэма. *Калі функцыя $f(x)$ непарыўная разам са сваёй вытворнай $f'(x)$ на адрэзку $[a,b]$, то крывая AB з’яўляецца выпрастальнай, а даўжыня яе выражаецца формулай*

$$s=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx. \qquad (1)$$

Доказ. Пункты A_0, A_1, A_2, … , A_n маюць наступныя каардынаты:

$$A_0\left(x_0, f\left(x_0\right)\right),\ A_1\left(x_1, f\left(x_1\right)\right),\ A_2\left(x_2, f\left(x_2\right)\right),\ \ldots.,\ A_n\left(x_n, f\left(x_n\right)\right).$$

Даўжыня l_k аднаго звяна $A_{k-1}A_k$ ламанай лініі вылічваецца па вядомай формуле

$$l_k = \sqrt{\left(x_k - x_{k-1}\right)^2 + \left(f\left(x_k\right) - f\left(x_{k-1}\right)\right)^2},\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \qquad (2)$$

Згодна з тэарэмай Лагранжа маем:

$$f\left(x_k\right) - f\left(x_{k-1}\right) = f'\left(\xi_k\right)\left(x_k - x_{k-1}\right) = f'\left(\xi_k\right)\Delta x_k,$$

дзе $\xi_k \in \left(x_{k-1},\ x_k\right)$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

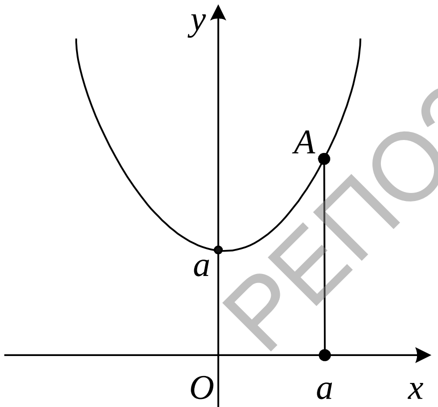
Значыць, $l_k = \sqrt{\left(\Delta x_k\right)^2 + \left(f'\left(\xi_k\right)\Delta x_k\right)^2} = \sqrt{1 + \left(f'\left(\xi_k\right)\right)^2}\,\Delta x_k$.

Такім чынам, перыметр усёй ламанай $A_0A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$ роўны

$$p = \sum_{k=1}^{n} l_k = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{1 + \left(f'\left(\xi_k\right)\right)^2}\,\Delta x_k. \qquad (3)$$

Сума (3) уяўляе сабой інтэгральную суму для функцыі $\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}$. Паколькі гэтая функцыя непарыўная на адрэзку $[a,\ b]$, то ліміт сумы (3) існуе, калі $\lambda = \max\left\{\Delta x_k\right\}$ імкнецца да нуля і роўны адпаведнаму вызначанаму інтэгралу, г. зн.

$$s = \lim_{\mu\to 0} p = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1 + \left(f'\left(\xi_k\right)\right)^2}\,\Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx$$



Рыс. 37

Прыклад 1. Знайсці даўжыню дугі ланцуговай лініі

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$ ад $x = 0$ да $x = a$ (рыс. 37).

Рашэнне. Знойдзем $y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$. Згодна з формулай (1) маем:

$$s = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^a \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)dx = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)\Bigg|_0^a = \frac{a}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right).$$

Вылічэнне даўжыні дугі плоскай крывой, зададзенай у параметрычнай форме

Разгледзім параметрычна зададзеную крывую

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t)\ \ (\alpha\le t\le\beta),$$

дзе $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — непарыўныя на адрэзку $[\alpha,\ \beta]$ функцыі, якія маюць непарыўныя вытворныя, прычым $\varphi'(t)\neq 0\ \ \forall t\in[\alpha,\ \beta]$.

Няхай $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$. У інтэграле (1) здзейснім падстаноўку $x=\varphi(t)$. Паколькі $y'=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$, то атрымаем:

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2}\,\varphi'(t)\,dt=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}\,dt.$$

Такім чынам,

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}\,dt. \qquad (4)$$

Прыклад 2. Знайсці даўжыню акружнасці радыуса R.

Рашэнне. Раўнанне акружнасці ў параметрычнай форме мае выгляд

$$x=R\cos t,\ y=R\sin t.$$

Знойдзем чацвёртую частку s_1 даўжыні акружнасці. Згодна з формулай (4) маем: $s=4s_1=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left((R\cos t)'\right)^2+\left((R\sin t)'\right)^2}dt=$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(-R\sin t'\right)^2+\left(R\cos t\right)^2}dt=4Rt\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2\pi R.$$

Вылічэнне даўжыні дугі плоскай крывой у палярных каардынатах

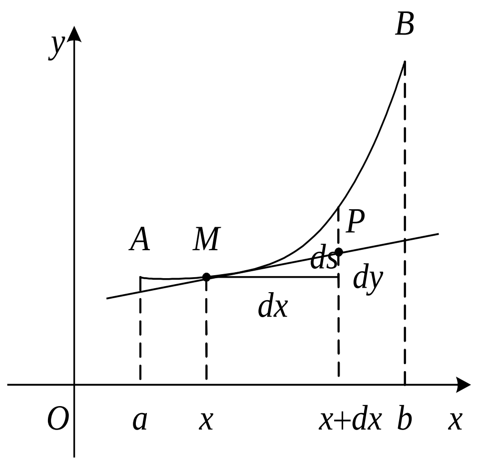
Няхай крывая зададзена раўнаннем у палярных каардынатах $r=r(\varphi)$, дзе функцыя $r(\varphi)$ і яе вытворная $r'(\varphi)$ непарыўныя на адрэзку $[\alpha,\ \beta]$. Скарыстаем формулы пераходу ад палярных каардынат да дэкартавых:

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi.$$

Тады раўнанні

$$x=r(\varphi)\cos\varphi,\ y=r(\varphi)\sin\varphi$$

можна разглядаць як параметрычныя раўнанні крывой пры змяненні параметра φ у межах $\alpha\le\varphi\le\beta$. Тады па формуле (4) знаходзім



Рыс. 38

$$s=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(r'(\varphi)\cos\varphi-r(\varphi)\sin\varphi\right)^2+\left(r'(\varphi)\sin\varphi+r(\varphi)\cos\varphi\right)^2}\,d\varphi=$$

$$=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(r'(\varphi)\right)^2+\left(r(\varphi)\right)^2}\,d\varphi.$$

Дыферэнцыял дугі

Возьмем на дузе *AB* адвольны пункт *M*, які адпавядае значэнню *x* з прамежку $[a,\ b]$, і будзем лічыць яго зменным пунктам крывой *AB* (рыс.38).

Тады даўжыня дугі *AM* будзе функцыяй ад *x*. Згодна з формулай (1) для дугі *AM* маем:

$$s(x)=\int\limits_{a}^{x}\sqrt{1+f'^2(t)}\,dt.$$

Адсюль знаходзім

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+f'^2(x)}.$$

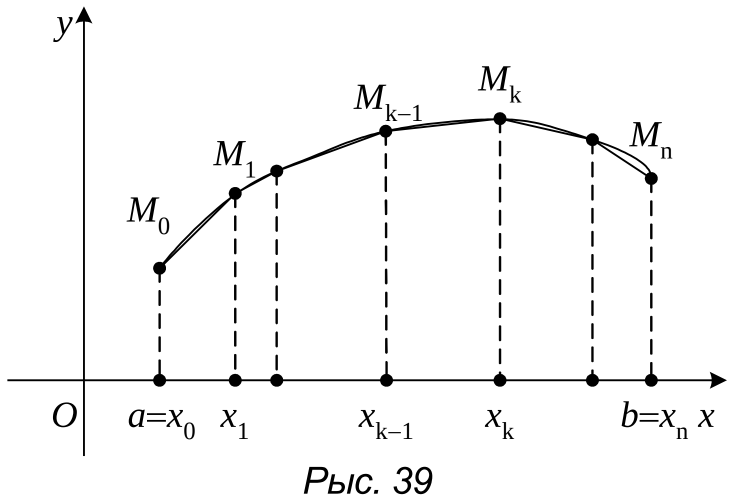
З апошняй роўнасці вынікае, што

$$ds=\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\sqrt{dx^2+dy^2}\,.$$

Такім чынам, дыферэнцыял дугі *ds* лікава роўны даўжыні адрэзка *MP* датычнай да крывой у пункце *M*, г. зн. ёсць гіпатэнуза прамавугольнага трохвугольніка з катэтамі $|dx|$ і $|dy|$.

§ 13. ПЛОШЧА ПАВЕРХНІ

Няхай на адрэзку $[a,\ b]$ зададзена непарыўная функцыя $y=f(x)$. Разгледзім крывую, якая з'яўляецца графікам дадзенай функцыі. Мяркуем, што крывая ляжыць над воссю *Ox* (рыс. 39).



Рыс. 39

Калі круціць разглядаемую крывую вакол восі *Ox*, то атрымаем некаторую паверхню. Назавём яе паверхняй вярчэння *π*.

Увядзём паняцце плошчы паверхні вярчэння *π*. Гэта можна зрабіць наступным чынам. Разбіваем адрэзак $[a,\ b]$ на *n* частак (не абавязкова роўных) пунктамі

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ \dots \ < x_{k-1} < x_k < \ \dots \ < x_n = b.$$

Сукупнасць усіх пунктаў назавём разбіўкай T адрэзка $[a,\ b]$ (рыс. 39). Абазначым $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ (k=1, 2, … , n). Даўжыню найбольшага частковага адрэзка абазначым праз λ. Пунктам $x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_n$ на дадзенай крывой адпавядаюць пункты $M_0(x_0, f(x_0))$, $M_1(x_1, f(x_1))$, … , $M_{k-1}(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, $M_k(x_k, f(x_k))$, … , $M_n(x_n, f(x_n))$.

Разгледзім ламаную $M_0M_1 \dots M_n$. Плошчу паверхні, атрыманай пры вярчэнні ламанай вакол восі Ox, абазначым праз $P(T)$. Гэта будзе сума бакавых паверхняў усечаных конусаў. Дамовімся казаць, што плошча $P(T)$ пры $\lambda \to 0$ мае ліміт, роўны P, калі для любога ліку $\varepsilon > 0$ можна знайсці такі лік $\delta > 0$, што пры любой разбіўцы адрэзка $[a,\ b]$, які падпарадкоўваецца толькі адзінай умове $\lambda < \delta$, выконваецца няроўнасць $|P(T) - P| < \varepsilon$. Запішам:

$$P = \lim_{\lambda \to 0} P(T).$$

Азначэнне. *Калі існуе ліміт P плошчы $P(T)$ пры $\lambda \to 0$, то паверхня вярчэння π называецца квадравальнай, а ліміт P называецца яе плошчай.*

Такім чынам, плошча паверхні вярчэння π роўная:

$$P = \lim_{\lambda \to 0} P(T). \tag{1}$$

Тэарэма. *Калі функцыя $y = f(x)$ на адрэзку $[a,\ b]$ мае непарыўную вытворную $f'(x)$, то паверхня π, атрыманая пры вярчэнні графіка гэтай функцыі вакол восі Ox, квадравальная, а яе плошча P можа быць вылічана па наступнай формуле: $P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$,*

г. зн.

$$P = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,dx. \tag{2}$$

Доказ. Даўжыню адрэзка $M_{k-1}M_k$ абазначым праз l_k. Пры вярчэнні гэтага адрэзка вакол восі Ox атрымаем усечаны конус, бакавая паверхня якога роўная

$$\pi\left(f(x_{k-1}) + f(x_k)\right)\, l_k.$$

Плошча паверхні, атрыманай пры вярчэнні ламанай $M_0M_1 \dots M_n$ вакол восі Ox роўная

$$P(T)=\pi\sum_{k=1}^{n}\left(f(x_{k-1})+f(x_k)\right)\ l_k. \qquad (3)$$

Вылічым l_k:

$$l_k=\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+\left(f(x_k)-f(x_{k-1})\right)^2}.$$

Паколькі згодна з тэарэмай Лагранжа

$$f(x_k)-f(x_{k-1})=f'(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) \text{ (дзе } x_{k-1}<\xi_k<x_k\text{)},$$

то

$$l_k=\sqrt{1+\left(f'(\xi_k)\right)^2}\,(x_k-x_{k-1})=\sqrt{1+\left(f'(\xi_k)\right)^2}\,\Delta x_k.$$

Таму (3) прыме выгляд:

$$P(T)=\pi\sum_{k=1}^{n}\left(f(x_{k-1})+f(x_k)\right)\sqrt{1+\left(f'(\xi_k)\right)^2}\,\Delta x_k.$$

Лёгка заўважыць, што выраз для $P(T)$ можна запісаць у наступным выглядзе:

$$P(T)=2\pi\sum_{k=1}^{n}\left(f(\xi_k)\right)\sqrt{1+\left(f'(\xi_k)\right)^2}\,\Delta x_k+$$

$$+\pi\sum_{k=1}^{n}\left(f(x_{k-1})-f(\xi_k)+f(x_k)-f(\xi_k)\right)\sqrt{1+\left(f'(\xi_k)\right)^2}\,\Delta x_k. \qquad (4)$$

Заўважым, што першы складнік у правай частцы роўнасці (4) з'яўляецца інтэгральнай сумай для функцыі $2\pi f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}$. Паколькі функцыя непарыўная на адрэзку $[a,b]$, то яна інтэгравальная на гэтым адрэзку. Таму пры $\lambda\to 0$ разглядаемая сума мае ліміт, які роўны $2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx$:

$$\lim_{\lambda\to 0}2\pi\sum_{k=1}^{n}\left(f(\xi_k)\right)\sqrt{1+\left(f'(\xi_k)\right)^2}\,\Delta x_k=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx. \qquad (5)$$

Дакажам, што

$$\lim_{\lambda\to 0}\pi\sum_{k=1}^{n}\left(f(x_{k-1})-f(\xi_k)+f(x_k)-f(\xi_k)\right)\sqrt{1+\left(f'(\xi_k)\right)^2}\,\Delta x_k=0, \qquad (6)$$

тады з роўнасцяў (4), (5), (6) будзе вынікаць наступная роўнасць:

$$\lim_{\lambda\to 0}P(T)=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx.$$

Гэтым і будзе даказана, што паверхня вярчэння квадравальная, а яе плошча роўная $P = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.

Такім чынам, доказ тэарэмы зводзіцца да доказу роўнасці (6).

Возьмем адвольны лік $\varepsilon > 0$. Будзем шукаць такі лік $\delta > 0$, які патрэбны, каб пераканацца ў праўдзівасці роўнасці (6).

Найбольшае значэнне непарыўнай на адрэзку $[a, b]$ функцыі $\sqrt{1+(f'(x))^2}$ абазначым праз *M*. Паколькі функцыя $f(x)$ непарыўная на адрэзку $[a, b]$, то яна і раўнамерна непарыўная на гэтым адрэзку. Таму для ліку $\frac{\varepsilon}{2M\pi(b-a)} > 0$ існуе такі лік $\delta > 0$, што для любой пары пунктаў $x', x'' \in [a, b]$, якія задавальняюць умове $|x' - x''| < \delta$, выконваецца няроўнасць

$$\left|f(x') - f(x'')\right| < \frac{\varepsilon}{2M\pi(b-a)}. \tag{7}$$

Пакажам, што знойдзены лік *δ* і з'яўляецца тым лікам $\delta > 0$, які патрэбны для доказу роўнасці (6).

Разгледзім адвольную *T* адрэзка $[a, b]$, які падпарадкоўваецца толькі адзінай умове $\lambda < \delta$. Пры такой разбіўцы даўжыня кожнага частковага адрэзка $[x_{k-1}, x_k]$ будзе меншай *δ*.

Паколькі пункт ξ_k ляжыць унутры адрэзка $[x_{k-1}, x_k]$, то, відавочна, будзем мець: $|x_{k-1} - \xi_k| < \delta$, $|x_k - \xi_k| < \delta$.

Таму, на падставе (7), атрымаем:

$$\left|f(x_{k-1}) - f(\xi_k)\right| < \frac{\varepsilon}{2M\pi(b-a)},$$

$$\left|f(x_k) - f(\xi_k)\right| < \frac{\varepsilon}{2M\pi(b-a)}.$$

Калі ўлічыць гэтыя няроўнасці, то прыйдзем да наступнай няроўнасці:

$$\left|\pi\sum_{k=1}^{n}\left(f(x_{k-1}) - f(\xi_k) + f(x_k) - f(\xi_k)\right)\sqrt{1+(f'(\xi_k))^2}\,\Delta x_k\right| \le$$

$$\le \pi\sum_{k=1}^{n}\left(\left|f(x_{k-1}) - f(\xi_k)\right| + \left|f(x_k) - f(\xi_k)\right|\right)\sqrt{1+(f'(\xi_k))^2}\,\Delta x_k <$$

$$< \pi\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\varepsilon}{2M\pi(b-a)} + \frac{\varepsilon}{2M\pi(b-a)}\right) M\,\Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Такім чынам , мы даказалі, што для любога ліку $\varepsilon > 0$ можна знайсці такі лік $\delta > 0$, што пры любой разбіўцы *T* адрэзка $[a, b]$, які падпарадкаўваецца толькі адзінай умове $\lambda < \delta$, выконваецца няроўнасць

$$\left| \pi \sum_{k=1}^{n} \left(f(x_{k-1}) - f(\xi_k) + f(x_k) - f(\xi_k) \right) \sqrt{1 + \left(f'(\xi_k) \right)^2} \Delta x_k \right| < \varepsilon .$$

Гэтым мы даказалі роўнасць (6), а разам з ёй і тэарэму.

Прыклад. Вылічыць плошчу паверхні, атрыманай пры вярчэнні вакол восі *Ox* дугі акружнасці $x^2 + y^2 = 4$ ($y > 0$) паміж пунктамі з абсцысамі $x = -1$ і $x = 1$.

Рашэнне. З раўнання акружнасці маем: $y = \sqrt{4 - x^2}$;

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}; \; 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 1 + \frac{x^2}{4 - x^2} = \frac{4}{4 - x^2};$$

$$y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} = \sqrt{4 - x^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}} = 2.$$

Згодна з формулай (2) атрымаем $P = 2\pi \int_{-1}^{1} 2 \, dx = 8\pi$.

Заўвага 1. Няхай паверхня атрыманага пры вярчэнні вакол восі *Ox* крывой, якая зададзена параметрычнымі раўнаннямі

$$x = \varphi(t), \; y = \psi(t), \; (\alpha \le t \le \beta),$$

прычым функцыі $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi(t)$, $\psi'(t)$ на адрэзку $[\alpha, \beta]$ непарыўныя, $\varphi'(t) \ne 0 \;\; \forall t \in [\alpha, \beta]$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. У гэтым выпадку, калі ў інтэграле (2) здзейсніць падстаноўку $x = \varphi(t)$ (пры гэтым $y = \psi(t)$, $y'_x = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$, $dx = \varphi'(t)\, dt$), то атрымаем наступную формулу для вылічэння плошчы паверхні вярчэння:

$$P = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} \, dt. \qquad (8)$$

Заўвага 2. Няхай крывая, пры вярчэнні якой вакол восі *Ox* атрымана паверхня вярчэння, зададзена ў палярнай сістэме каардынат раўнаннем $r = r(\varphi)$ $(\alpha \le \varphi \le \beta)$, прычым функцыі $r(\varphi)$, $r'(\varphi)$ непарыўныя на адрэзку $[\alpha, \beta]$. У гэтым выпадку формула (8) прыме наступны выгляд:

$$P = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi) \sin\varphi \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} \, d\varphi,$$

бо крывую можна задаць параметрычнымі раўнаннямі

$$x = r(\varphi)\cos\varphi, y = r(\varphi)\sin\varphi,\ \alpha \le \varphi \le \beta.$$

§ 14. ЗНАХОДЖАННЕ КААРДЫНАТ ЦЭНТРА ЦЯЖАРУ МАТЭРЫЯЛЬНАЙ КРЫВОЙ

На плоскасці xOy разгледзім матэрыяльны пункт $A(x, y)$, у якім сканцэнтравана маса m (рыс. 40).

Азначэнне 1. Статычным момантам матэрыяльнага пункта адносна некаторай восі называецца здабытак масы матэрыяльнага пункта на адлегласць да разглядаемай восі. Калі матэрыяльны пункт ляжыць па адзін бок ад восі, то адлегласці прыпісваецца знак «+»; калі па другі, то знак «–».

Відавочна, што my ёсць статычны момант матэрыяльнага пункта A адносна восі Ox, а mx — статычны момант адносна восі Oy.

Няхай маем сістэму n матэрыяльных пунктаў $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, … , $A_k(x_k, y_k)$, … , $A_n(x_n, y_n)$, у кожным з якіх сканцэнтраваны адпаведна масы m_1, m_2, … , m_k, … , m_n. Статычныя моманты матэрыяльных пунктаў гэтай сістэмы адносна восяў Ox і Oy будзем адпаведна абазначаць праз M_x і M_y.

Відавочна, што $M_x = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k y_k$, $M_y = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k x_k$.

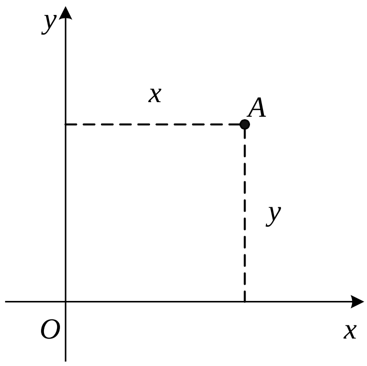
Азначэнне 2. Цэнтрам цяжару сістэмы n матэрыяльных пунктаў называецца такі пункт C, што, калі ў ім сканцэнтраваць масы усіх матэрыяльных пунктаў сістэмы, то статычны момант гэтага пункта адносна любой восі будзе роўны статычнаму моманту ўсёй сістэмы матэрыяльных пунктаў адносна разглядаемай восі.

Відавочна, што, калі пункт C мае каардынаты (x_C, y_C), то

$$x_C \sum_{k=1}^{n} m_k = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k,\ y_C \sum_{k=1}^{n} m_k = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k.$$

Адсюль атрымліваем, што

$$x_C = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k},\ y_C = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k y_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k}. \qquad (1)$$



Рыс. 40

Разгледзім матэрыяльную крывую AB. Мяркуем, што раўнанне крывой AB мае выгляд $y = f(x)$, $a \le x \le b$, прычым $f(x)$ і $f'(x)$ — непарыўныя на адрэзку $[a,\ b]$ функцыі. Мяркуем, што крывая AB з'яўляецца аднароднай, г. зн. уздоўж яе распаўсюджана маса са сталай лінейнай шчыльнасцю γ (лінейная шчыльнасць — маса, якая прыходзіцца на адзінку даўжыні).

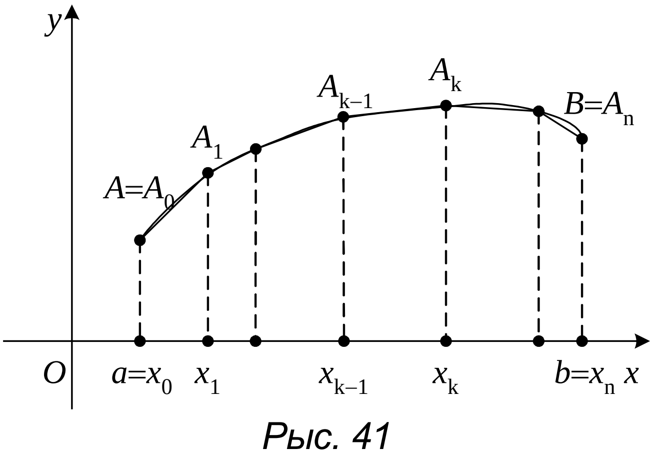
Знойдзем каардынаты цэнтра цяжару крывой AB. Адрэзак $[a,\ b]$ з пунктамі $a = x_0 < x_1 < \ \ldots\ < x_{k-1} < x_k < \ \ldots\ < x_n = b$ (рыс. 41) разбіваем на n частковых адрэзкаў. Даўжыню частковага адрэзка $[x_{k-1},\ x_k]$ абазначым праз $\Delta\, x_k$: $\Delta\, x_k = x_k - x_{k-1}$ (k = 1, 2, … , n). Даўжыню найбольшага частковага адрэзка абазначым праз λ.

Пунктам $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{k-1},\ x_k,\ \ldots,\ x_n$ разбіўкі адрэзка $[a,\ b]$ адпавядаюць наступныя пункты $A = A_0(x_0,\ y_0),\ A_1(x_1,\ y_1),\ \ldots,\ A_{k-1}(x_{k-1},\ y_{k-1}),\ A_k(x_k,\ y_k),$ $\ldots,\ A_n(x_n,\ y_n) = B$ крывой AB. Злучым гэтыя пункты і атрымаем ламаную $A_0A_1A_2\ldots A_{k-1}A_k\ldots A_n$, упісаную ў крывую AB.

Разгледзім k-тую частковую дугу $A_{k-1}A_k$ крывой AB. Будзем абстрагавацца ад рэчаіснасці і заменім k-тую частковую дугу $A_{k-1}A_k$ крывой AB k-тым звяном ламанай. Даўжыню k-тага звяна ламанай абазначым праз l_k. Як было паказана раней, даўжыня l_k k-тага звяна ламанай роўная $\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\ \Delta\, x_k$, дзе $x_{k-1} < \xi_k < x_k$. Відавочна, што лік $\gamma\, l_k = \gamma\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\Delta\, x_k = m_k$ можна разглядаць як набліжанае значэнне масы k-тай частковай дугі $A_{k-1}A_k$ крывой AB.

Сканцэнтруем масу m_k у пункце $M_k(\xi_k, f(\xi_k))$. Калі здзейсніць аналагічнае для астатніх частковых дуг крывой AB, то атрымаем сістэму n матэрыяльных пунктаў $M_1(\xi_1, f(\xi_1)),\ M_2(\xi_2, f(\xi_2)),\ \ldots,\ M_k(\xi_k, f(\xi_k)),\ \ldots,$ $M_n(\xi_n, f(\xi_n))$, у кожным з якіх сканцэнтраваны адпаведна масы $m_1 = \gamma\sqrt{1+f'^2(\xi_1)}\ \Delta\, x_1,\ m_2 = \gamma\sqrt{1+f'^2(\xi_2)}\ \Delta\, x_2,\ \ldots,\ m_k = \gamma\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\ \Delta\, x_k,\ \ldots,$

$$m_n = \gamma\sqrt{1+f'^2(\xi_n)}\ \Delta\, x_n.$$



Рыс. 41

Каардынаты x_C, y_C цэнтра цяжару атрыманай сістэмы n матэрыяльных пунктаў вылічваем па формулах (1):

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} \gamma \xi_k \sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\ \Delta x_k}{\sum_{k=1}^{n} \gamma \sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\ \Delta x_k},$$

$$y_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} \gamma f(\xi_k) \sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\ \Delta x_k}{\sum_{k=1}^{n} \gamma \sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\ \Delta x_k}. \qquad (2)$$

Каардынаты $\overline{x}$, $\overline{y}$ цэнтра цяжару матэрыяльнай крывой AB, відавочна, вызначыць наступным чынам:

$$\overline{x} = \lim_{\lambda \to 0} x_C,\ \overline{y} = \lim_{\lambda \to 0} y_C. \qquad (3)$$

З формул (2) і (3) канчаткова атрымліваем:

$$\overline{x} = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+f'^2(x)}dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}dx}, \qquad (4)$$

$$\overline{y} = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}dx}. \qquad (5)$$

Адзначым, што формулы (4) і (5) можна запісаць у наступным выглядзе:

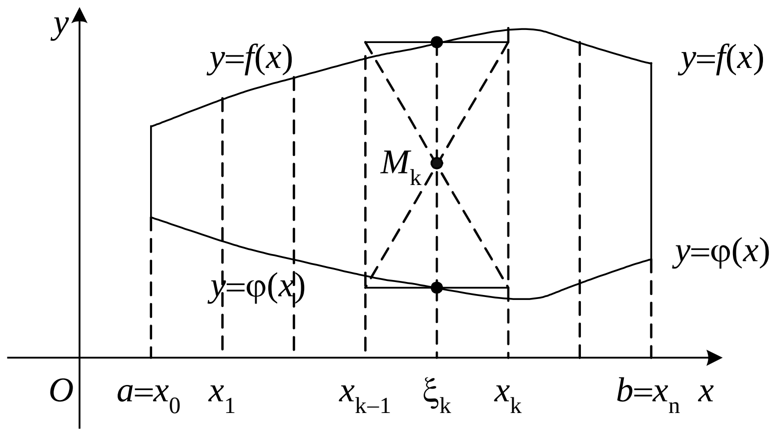
$$\overline{x} = \frac{M_y}{s},\ \overline{y} = \frac{M_x}{s},$$

дзе M_x, M_y — статычныя моманты матэрыяльнай крывой AB адносна восяў Ox і Oy адпаведна, а s — даўжыня дугі AB.

Разгледзім формулу (5). Запішам яе ў наступным выглядзе:

$$\overline{y} = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\ dx}{s}.$$

З гэтай формулы вынікае, што



Рыс. 42

$$2\pi\overline{y}s = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx \qquad (6)$$

У правай частцы роўнасці (6) маем плошчу *P* паверхні, атрыманай пры вярчэнні крывой *AB* вакол восі *Ox*. Таму маем $2\pi\overline{y}s = P$.

Атрымалі першую тэарэму Гюльдэна.

Тэарэма*. Плошча паверхні, атрыманай пры вярчэнні дугі крывой AB вакол некаторай восі, якая гэтую дугу не перасякае, роўная здабытку даўжыні дугі AB на шлях, які прайшоў пры гэтым цэнтр цяжару крывой AB.*

§ 15. ЗНАХОДЖАННЕ КААРДЫНАТ ЦЭНТРА ЦЯЖАРУ МАТЭРЫЯЛЬНАЙ ФІГУРЫ

Няхай дадзена матэрыяльная фігура, г. зн. плоская фігура, абмежаваная графікамі функцый $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ і прамымі $x = a$, $x = b$ (рыс. 42).

Будзем лічыць, што функцыі $f(x)$ і $\varphi(x)$ на адрэзку $[a,\ b]$ непарыўныя і на адрэзку $\varphi(x) \le f(x)$. Мяркуем, што матэрыяльная фігура аднародная, г. зн. уздоўж яе распаўсюджана маса са сталай паверхневай шчыльнасцю *γ* (паверхневая шчыльнасць — гэта маса, якая прыходзіцца на адзінку плошчы). Знойдзем каардынаты цэнтра цяжару матэрыяльнай фігуры.

Адрэзак $[a,\ b]$ з пунктамі

$$a{=}x_0{<}x_1{<}\ \ldots{<}x_{k-1}{<}x_k{<}\ldots{<}x_n{=}b$$

разбіваем на *n* частковых адрэзкаў. Даўжыню адрэзка $[x_{k-1},\ x_k]$ (*k* = 1, 2, … , *n*) абазначым $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Даўжыню найбольшага частковага адрэзка абазначым праз *λ*. Праз пункты x_0, x_1, … , x_{k-1}, x_k, … , x_n правядзём прамыя, перпендыкулярныя восі *Ox*. Прамыя разбіваюць матэрыяльную фігуру на *n* элементарных фігур.

Разгледзім *k*-тую элементарную фігуру, г. зн. фігуру, якая заключана паміж прамымі $x = x_{k-1}$, $x = x_k$. Будзем абстрагавацца ад рэчаіснасці і заменім *k*-ую элементарную фігуру прамавугольнікам з асновай Δx_k і вышынёй $f(\xi_k) - \varphi(\xi_k)$, дзе $\xi_k = \dfrac{x_{k-1} + x_k}{2}$.

Плошча дадзенага прамавугольніка роўная

$$\left(f\left(\xi_k\right)-\varphi\left(\xi_k\right)\right)\Delta\, x_k .$$

Відавочна, што лік $m_k=\gamma\left(f\left(\xi_k\right)-\varphi\left(\xi_k\right)\right)\Delta\, x_k$ можна разглядаць як набліжанае значэнне масы k-тай элементарнай фігуры. Сканцэнтруем масу ў пункце $M_k\left(\xi_k,\dfrac{f\left(\xi_k\right)+\varphi\left(\xi_k\right)}{2}\right)$, які з’яўляецца пунктам перасячэння дыяганаляў прамавугольніка.

Калі здзейсніць аналагічнае для астатніх элементарных фігур, то атрымаем сістэму n матэрыяльных пунктаў

$$M_1\left(\xi_1,\frac{f\left(\xi_1\right)+\varphi\left(\xi_1\right)}{2}\right),\ \ldots\ ,\ M_k\left(\xi_k,\frac{f\left(\xi_k\right)+\varphi\left(\xi_k\right)}{2}\right),\ \ldots\ ,\ M_n\left(\xi_n,\frac{f\left(\xi_n\right)+\varphi\left(\xi_n\right)}{2}\right),$$

у кожным з якіх сканцэнтраваны адпаведна масы

$$m_1=\gamma\left(f\left(\xi_1\right)-\varphi\left(\xi_1\right)\right)\Delta\, x,\ \ldots\ ,\ m_k=\gamma\left(f\left(\xi_k\right)-\varphi\left(\xi_k\right)\right)\Delta\, x_k,\ \ldots,$$

$$m_n=\gamma\left(f\left(\xi_n\right)-\varphi\left(\xi_n\right)\right)\Delta\, x_n .$$

Скарыстаем формулы (1) § 14 і знойдзем каардынаты x_C, y_C цэнтра цяжару атрыманай сістэмы n матэрыяльных пунктаў:

$$x_C=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\gamma\xi_k\left(f\left(\xi_k\right)-\varphi\left(\xi_k\right)\right)\Delta\, x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}\gamma\left(f\left(\xi_k\right)-\varphi\left(\xi_k\right)\right)\Delta\, x_k},\ y_C=\frac{\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\gamma_k\left(f^2\left(\xi_k\right)-\varphi^2\left(\xi_k\right)\right)\Delta\, x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}\gamma\left(f\left(\xi_k\right)-\varphi\left(\xi_k\right)\right)\Delta\, x_k}. \quad (1)$$

Каардынаты $\overline{x}$, $\overline{y}$ цэнтра цяжару разглядаемай фігуры вызначаюцца наступным чынам:

$$\overline{x}=\lim_{\lambda\to 0}x_C,\ \overline{y}=\lim_{\lambda\to 0}y_C . \quad (2)$$

З роўнасцяў (1) і (2) канчаткова атрымліваем, што

$$\overline{x}=\frac{\int\limits_a^b x\ \left(f\left(x\right)-\varphi\left(x\right)\right)\,dx}{\int\limits_a^b\left(f\left(x\right)-\varphi\left(x\right)\right)\,dx}, \quad (3)$$

$$\overline{y}=\frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b\left(f^2\left(x\right)-\varphi^2\left(x\right)\right)\,dx}{\int\limits_a^b\left(f\left(x\right)-\varphi\left(x\right)\right)\,dx}. \quad (4)$$

Разгледзім формулу (4). Запішам яе у наступным выглядзе:

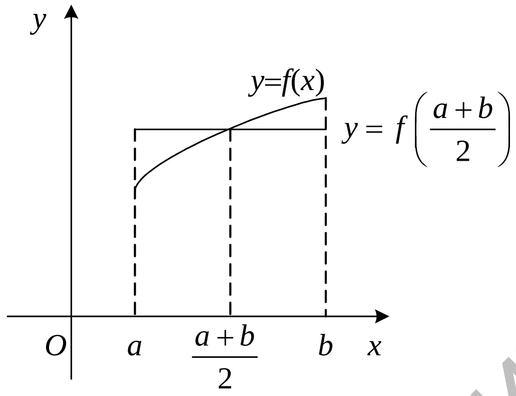
$$\overline{y} = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b \left(f^2(x) - \varphi^2(x)\right)\, dx}{P},$$

дзе P — плошча разглядаемай матэрыяльнай фігуры. З апошняй роўнасці вынікае

$$2\pi\overline{y}P = \pi\int\limits_a^b \left(f^2(x) - \varphi^2(x)\right)\, dx. \qquad (5)$$

Правая частка апошняй роўнасці ўяўляе сабой аб'ём V цела, атрыманага пры вярчэнні разглядаемай матэрыяльнай фігуры вакол восі Ox. Таму роўнасць (5) можна запісаць так: $2\pi\overline{y}P = V$. Атрымалі другую тэарэму Гюльдэна.

Тэарэма. *Аб'ём цела, атрыманага пры вярчэнні матэрыяльнай фігуры вакол некаторай восі, якая гэтую фігуру не перасякае, роўны здабытку плошчы фігуры на шлях, які пройдзе пры гэтым цэнтр цяжару разглядаемай матэрыяльнай фігуры.*



Рыс. 43

§ 16. НАБЛІЖАНАЕ ВЫЛІЧЭННЕ ВЫЗНАЧАНЫХ ІНТЭГРАЛАЎ

Няхай на адрэзку $[a, b]$ зададзена інтэгравальная функцыя $y = f(x)$. Разгледзім пытанне вылічэння вызначанага інтэграла

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx.$$

Дакладнае значэнне вызначанага інтэграла не заўсёды можна знайсці. У выпадку, калі дакладнае значэнне інтэграла знайсці складана, яго вылічваюць набліжана. Гэта можна зрабіць пры дапамозе так званых квадратурных формул. З прасцейшымі з гэтых формул і пазнаёмімся ў дадзеным параграфе.

Квадратурная формула прамавугольнікаў

Падынтэгральную функцыю $f(x)$ заменім мнагаскладам нулявой ступені, які супадае з дадзенай функцыяй у пункце $\frac{a+b}{2}$ (рыс. 43).

У выпадку, калі функцыя $y = f(x)$ непарыўная і неадмоўная на адрэзку $[a,\ b]$, гэта сведчыць аб тым, што плошчу крывалінейнай трапецыі замяняем плошчай прамавугольніка. Пры гэтым атрымліваем набліжаную роўнасць

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a). \quad (1)$$

Набліжаная роўнасць (1) называецца квадратурнай формулай прамавугольнікаў.

Калі адрэзак $[a,\ b]$ разбіць на n роўных частак і на кожным частковым адрэзку скарыстаць квадратурную формулу прамавугольнікаў (1), то атрымаем абагульненую формулу прамавугольнікаў (рыс. 44):

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\big(f(x_1)+f(x_2)+\ \dots\ +f(x_n)\big), \quad (2)$$

дзе $x_k = a + (2k-1)\dfrac{b-a}{2n}$ (k = 1, 2, … , n).

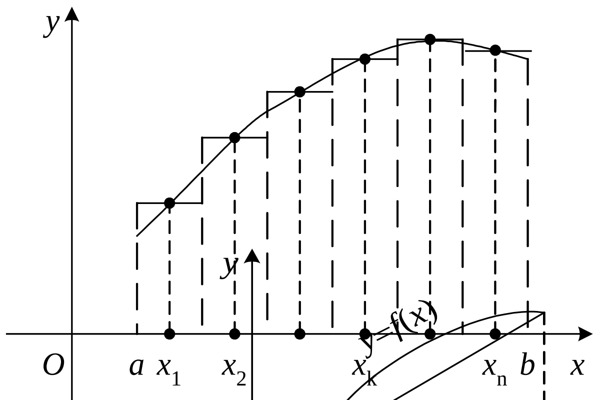
Абагульненную формулу прамавугольнікаў коратка называюць таксама формулай прамавугольнікаў.

Пры карыстанні квадратурнай формулай важна ведаць рознасць паміж дакладным набліжаным значэннем інтэграла. Гэта рознасць называецца астачай або хібнасцю квадратурнай формулы.

Калі функцыя $f(x)$ на адрэзку $[a,\ b]$ мае непарыўную другую вытворную $f''(x)$, то астача $R(f)$ абагульненай формулы прамавугольнікаў роўная

$$R(f) = \frac{(b-a)^3}{24n^2}\cdot f''(\xi), \quad (3)$$

дзе $\xi \in [a,\ b]$.

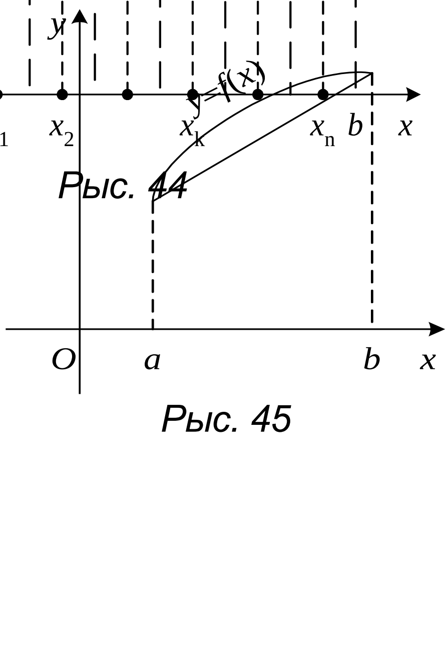


Рыс. 44

Квадратурная формула трапецый

Падынтегральную функцыю $f(x)$ заменім мнагаскладам, ступень якога меншая або роўная 1, які супадае з дадзенай функцыяй у пунктах a і b (рыс. 45).

У выпадку, калі функцыя $f(x)$ непарыўная і неадмоўная на адрэзку $[a,\ b]$, гэта сведчыць аб тым, што плошчу крывалінейнай трапецыі замяняем плошчай трапецыі. Пры гэтым атрымаем



Рыс. 45

набліжаную роўнасць

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big). \tag{4}$$

Дадзеная набліжаная роўнасць называецца квадратурнай формулай трапецый.

Калі адрэзак $[a,\ b]$ падзяліць на n роўных частак і на кожным частковым адрэзку скарыстаць квадратурную формулу (4), то атрымаем абагульненую формулу трапецый

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}\Big(f(x_1)+2\big(f(x_2)+\ldots+f(x_n)\big)+f(x_{n+1})\Big), \tag{5}$$

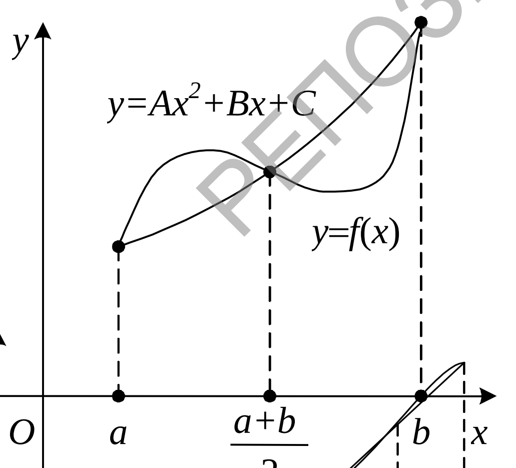
дзе $x_k = a+(k-1)\dfrac{b-a}{n}$ (k = 1, 2, … , n+1) (рыс. 46).

Калі функцыя $f(x)$ на адрэзку $[a,\ b]$ мае непарыўную другую вытворную, то астача $R(f)$ квадратурнай формулы (5) роўная

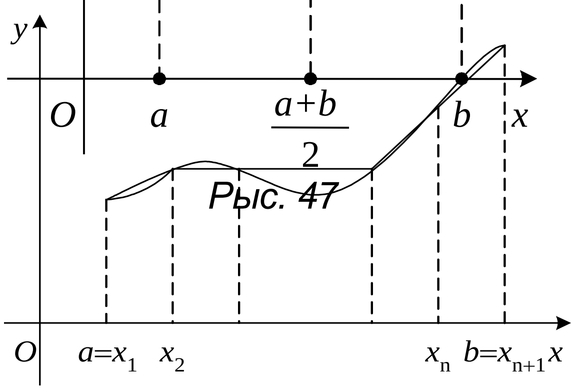
$$R(f) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot f''(\xi), \tag{6}$$

дзе $\xi \in [a,\ b]$.

Квадратурная формула Сімпсана



Рыс. 47



Рыс. 46

Падынтэгральную функцыю $f(x)$ заменім мнагаскладам $y = Ax^2 + +Bx + C$, ступень якога меншая або роўная 2, які супадае з дадзенай функцыяй у пунктах a, b і $\dfrac{a+b}{2}$ (рыс. 47).

У выпадку, калі функцыя $f(x)$ непарыўная і неадмоўная на адрэзку, гэта сведчыць аб тым, што плошчу крывалінейнай трапецыі, абмежаванай графікам функцыі $f(x)$, замяняем плошчай крывалінейнай трапецыі, абмежаванай парабалай $y = Ax^2 + Bx + C$. Атрымаем роўнасць

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b \left(Ax^2 + Bx + C\right)\,dx,$$

г. зн.
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \left(A\frac{x^3}{3} + B\frac{x^2}{2} + Cx\right)\Bigg|_a^b,$$

г. зн.
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{A}{3}\left(b^3 - a^3\right) + \frac{B}{2}\left(b^2 - a^2\right) + C(b-a),$$

г. зн.
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left(2A\left(b^2 + ab + b^2\right) + 3B(b+a) + 6C\right). \qquad (7)$$

Знойдзем правую частку роўнасці (7), скарыстаўшы той факт, што мнагасклад $y = Ax^2 + Bx + C$ супадае з функцыяй $f(x)$ у пунктах *a*, $\frac{a+b}{2}$ і *b*.

Маем $f(a) = Aa^2 + Ba + C$, $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = A\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + B\frac{a+b}{2} + C$,
$$f(b) = Ab^2 + Bb + C.$$

З апошніх трох роўнасцяў вынікае
$$f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) = 2A\left(b^2 + ab + b^2\right) + 3B(b+a) + 6C.$$

Падставім знойдзены выраз у роўнасць (7) і будзем мець, што
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right). \qquad (8)$$

Набліжаная роўнасць (8) называецца квадратурнай формулай Сімпсана.

Калі адрэзак $[a,\ b]$ падзяліць на *n* частак (*n* — цотны лік) і на парах частковых адрэзкаў скарыстаць формулу Сімпсана, то атрымаем абагульненую формулу Сімпсана
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}\Big(f(x_1) + 4\big(f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_n)\big) +$$
$$+ 2\big(f(x_3) + f(x_5) + \ldots + f(x_{n-1})\big) + f(x_{n+1})\Big), \qquad (9)$$

дзе $x_k = a + (k-1)\frac{b-a}{n}$ ($k = 1, 2, \ldots, n+1$), *n* — цотны лік.

Калі функцыя $f(x)$ на адрэзку $[a,\ b]$ мае непарыўную чацвёртую вытворную, то астача $R(f)$ квадратурнай формулы Сімпсана (9) роўная
$$R(f) = \frac{(b-a)^5}{180n^4}\cdot f^{(4)}(\xi),$$

дзе $\xi \in [a,\ b]$.

§ 17. НЯЎЛАСНЫЯ ІНТЭГРАЛЫ

Няўласныя інтэгралы першага роду

Разгледзім прыклады, якія прыводзяць да такіх інтэгралаў.

Прыклад 1. Знайсці плошчу *P* пад крывой $y = \dfrac{1}{x},\ x \ge a > 0$ (рыс. 48).

Рашэнне. Плошчу ўсёй заштрыхаванай фігуры непасрэдна вылічыць складана. Аднак, калі адсекчы бясконцы «хвост» прамой $x = b$, то плошчу крывалінейнай трапецыі *aABb* можна знайсці пры дапамозе вызначанага інтэграла $\int\limits_a^b \dfrac{dx}{x}$. Пры $b \to +\infty$ мы павінны атрымаць плошчу *P* ўсёй заштрыхаванай фігуры, г. зн.

$$P = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \ln|x|\Big|_a^b = \lim_{b\to+\infty} (\ln b - \ln a) = +\infty .$$

Такім чынам, у дадзеным выпадку няма сэнсу весці размову пра плошчу.

Прыклад 2. Знайсці плошчу *P* пад крывой $y = \dfrac{1}{x^2},\ x \ge a > 0$.

Рашэнне. Калі разважаць аналагічным чынам, як і ў прыкладзе 1, будзем мець

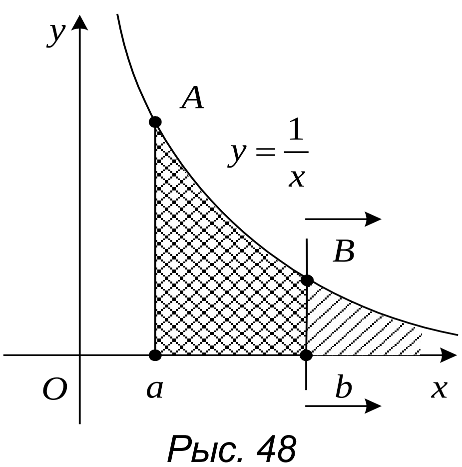
$$P = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_a^b = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a}.$$

Значыць, у дадзеным выпадку плошча бясконцага «хваста» роўная $\dfrac{1}{a}$.

Азначэнне 1. *Няхай функцыя $f(x)$ непарыўная на прамежку $[a,\ +\infty)$. Тады канечны ліміт $\lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx$ (калі ён існуе) будзе называцца няўласным інтэгралам першага роду і абазначыцца $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.*

Такім чынам,

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$



Рыс. 48

Аналагічна вызначаюцца наступныя няўласныя інтэгралы:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)\,dx, \tag{2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{3}$$

Калі існуе канечны ліміт (1), то гавораць, што няўласны інтэграл (1) збягаецца. Калі ж ліміт (1) не існуе або бясконцы, то гавораць, што няўласны інтэграл разбягаецца.

Напрыклад, няўласны інтэграл $\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x}$ у прыкладзе 1 разбягаецца, а няўласны інтэграл $\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ з прыкладу 2 збягаецца.

Адзначым, што няўласны інтэграл у левай частцы роўнасці (3) збягаецца тады, калі збягаецца кожны з няўласных інтэгралаў у правай частцы.

Прыклад 3. Вылічыць $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

Рашэнне.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} arctg\ x\Big|_a^0 + \lim_{b\to+\infty} arctg\ x\Big|_0^b = \lim_{a\to-\infty}\left(-arctg\ \mathrm{a}\right) + \lim_{b\to+\infty} arctg\ \mathrm{b} = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi.$$

г. зн. дадзены інтэграл збягаецца.

Вельмі часта, калі неабходна вызначыць, збягаецца або разбягаецца няўласны інтэграл, невылічваючы яго значэння, карыстаюцца наступнымі прыметамі збежнасці.

Тэарэма 1. *Няхай пры* $x \ge a$ $0 \le f(x) \le \varphi(x)$. *Калі* $\int_{a}^{+\infty}\varphi(x)\,dx$ *збягаецца, то збягаецца і інтэграл* $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$, *прычым* $\int_{a}^{+\infty}\varphi(x)\,dx \ge \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Калі $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ *разбягаецца, то разбягаецца і няўласны інтэграл* $\int_{a}^{+\infty}\varphi(x)\,dx$.

Тэарэма 2. *Няхай пры* $x \ge a$ $|f(x)| \le \varphi(x)$, $\varphi(x) \ge 0$. *Тады калі* $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ *збягаецца, то збягаецца і інтэграл* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Азначэнне 2. Няўласны інтэграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ называецца абсалютна збежным, калі збягаецца інтэграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$. Няўласны інтэграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ называецца ўмоўна збежным, калі ён збягаецца, а інтэграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ разбягаецца.

Прыклад 4. Даследаваць на збежнасць інтэграл $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}$.

Рашэнне. Відавочна, што пры $x > 2$ $\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}} > \frac{1}{x}$.

Вылічым

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int_2^{b} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \ln|x|\Big|_2^b = \lim_{b\to+\infty} \left(\ln|b| - \ln|2|\right) = +\infty.$$

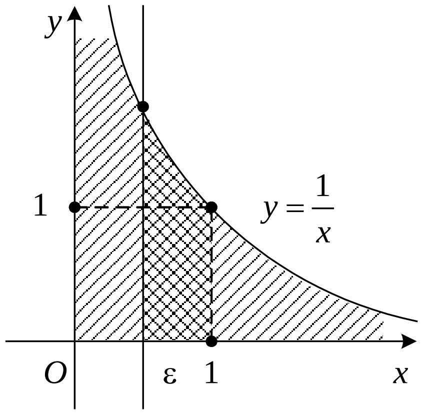
Паколькі няўласны інтэграл $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x}$ разбягаецца, то паводле тэарэмы 1 разбежным будзе і інтэграл $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}$.

Заўвага 1. Усе паняцці і сцвярджэнні, сфармуляваныя для няўласных інтэгралаў выгляду (1), застаюцца праўдзівымі і для інтэгралаў выгляду (2) і (3).

Няўласныя інтэгралы другога роду

Прыклад 5. Знайсці плошчу P пад крывой $y=\dfrac{1}{x}$, $0\le x\le 1$ (рыс. 49).

Рашэнне. Функцыя $y=\dfrac{1}{x}$ мае бясконцы разрыў пры $x=0$. Плошчу ўсёй заштрыхаванай фігуры непасрэдна вылічыць складана. Аднак, калі адсекчы бясконцы «хвост» прамой $x=\varepsilon$, то можна знайсці плошчу двойчы заштрыхаванай крывалінейнай трапецыі. Яна роўная $\int_{\varepsilon}^{1}\dfrac{dx}{x}$. У ліміце пры $\varepsilon\to 0$ мы



Рыс. 49

павінны атрымаць шуканую плошчу, г. зн. $P=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1}\dfrac{dx}{x}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0} ln\left|x\right|\Big|_{\varepsilon}^{1}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\ln\dfrac{1}{\varepsilon}=+\infty$.

Такім чынам, у дадзеным выпадку няма сэнсу весці размову пра плошчу.

Прыклад 6. Знайсці плошчу P пад крывой $y=\dfrac{1}{\sqrt{b-x}}$, $0\le x\le b$ (рыс. 50).

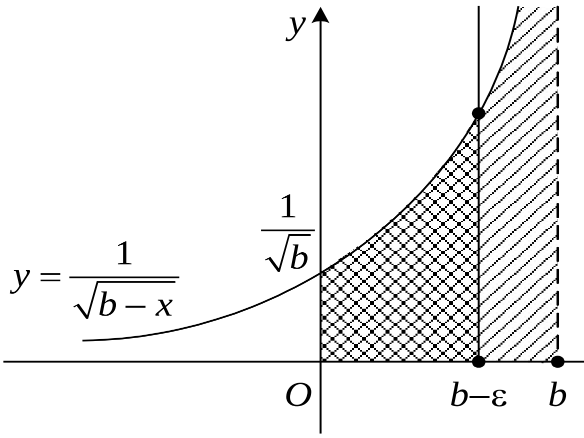
Рашэнне. Функцыя $y=\dfrac{1}{\sqrt{b-x}}$ у пункце $x=b$ нявызначаная. Будзем разважаць, як і ў прыкладзе 5. Маем

$$P=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0}^{b-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{b-x}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-2\sqrt{b-x}\Big|_{0}^{b-\varepsilon}\right)= \\ =2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt{b}-\sqrt{\varepsilon}\right)=2\sqrt{b}.$$

Такім чынам, плошча бясконцага «хваста» у дадзеным выпадку роўная $2\sqrt{b}$.

Азначэнне 5. *Няхай функцыя $f\left(x\right)$ вызначаная і непарыўная на прамежку $\left[a,\,b\right)$, а ў пункце $x=b$ або нявызначаная, або мае разрыў. Тады канечны $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{a}^{b-\varepsilon}f\left(x\right)\,dx$ (калі ён існуе) называецца няўласным інтэгралам другога роду, г. зн.*

$$\int_{a}^{b}f\left(x\right)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a}^{b-\varepsilon}f\left(x\right)\,dx. \qquad (4)$$



Рыс. 50

Аналагічным чынам вызначаецца няўласны інтэграл у тых выпадках, калі падынтэгральная функцыя $f(x)$ нявызначаная або мае разрыў пры $x=a$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx, \tag{5}$$

або пры $x=c\in(a,\,b)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\delta\to 0}\int_{c+\delta}^b f(x)\,dx. \tag{6}$$

Адзначым, што, калі існуе канечны ліміт (4), то гавораць, што няўласны інтэграл (4) збягаецца. Калі ліміт (4) не існуе або бясконцы, то гавораць, што інтэграл (4) разбягаецца.

Прыклад 7. Вылічыць $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Рашэнне. Згодна з формулай (4) знаходзім

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin(1-\varepsilon) = \frac{\pi}{2}.$$

Такім чынам, разглядаемы няўласны інтэграл збягаецца.

Прывядзём без доказу наступныя прыметы збежнасці няўласных інтэгралаў другога роду.

Тэарэма 3*. Няхай пры $x\in[a,\,b)$ $0\le f(x)\le\varphi(x)$ і функцыі $f(x)$ і $\varphi(x)$ або нявызначаныя, або маюць разрыў пры $x=b$.*

Калі $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ збягаецца, то збягаецца і інтэграл $\int_a^b f(x)\,dx$.

Калі $\int_a^b f(x)\,dx$ разбягаецца, то разбягаецца і $\int_a^b \varphi(x)\,dx$.

Тэарэма 4. *Няхай пры $x\in[a,\,b)$ $|f(x)|\le\varphi(x)$, $\varphi(x)\ge 0$ і функцыі $f(x)$ і $\varphi(x)$ або нявызначаныя, або маюць разрыў у пункце $x=b$.*

Калі $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ збягаецца, то і інтэграл $\int_a^b f(x)\,dx$ збягаецца.

ЛІТАРАТУРА

1. Виленкин Н. Я., Мордкович А. Г., Куницкая Е. С. Математический анализ: Интегральное исчисление. М., 1988.
2. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. М., 2000.
3. Уваренков И. М., Маллер М. З. Курс математического анализа: В 2 т. М., 1966. Т.1.
4. Дадаян А. А., Дударенко В. А. Математический анализ. Мн., 1990.
5. Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И. Курс математического анализа. М., 1988.
6. Бохан К. А., Егорова И. М., Лащенов К. В. Курс математического анализа: В 2 т. М., 1972. Т.1.
7. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды. М., 1986.
8. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа : В 2 т. Спб., 2001.
9. Русак В., Шлома Л., Ахраменка В., Крачкоўскі А. Курс вышэйшай матэматыкі. Алгебра і геаметрыя. Аналіз функцыі адной зменнай. Мн., 1994.

ЗМЕСТ

Вучэбнае выданне

Шылінец Уладзімір Адамавіч
Лугоўскі Сяргей Аляксандравіч

ВЫЗНАЧАНЫ ІНТЭГРАЛ

Курс лекцый

Рэдактар Т. А. Белапко
Тэхнічнае рэдагаванне А. А. Пакалы
Камп'ютэрная вёрстка В. І. Малашэвіча

Падпісана ў друк 259.06.04. Фармат $84^{1}/_{16}$. Папера афсетная. Гарнітура Арыял.
Друк афсетны. Ум. друк. арк. 4.2. Ул.-выд. арк. 4.2. Тыраж 100 экз. Заказ 483.

Установа адукацыі «Беларускі дзяржаўны педагагічны універсітэт імя Максіма Танка»
Ліцэнзія № 02330/0133003 ад 01.04.04. 220050, Мінск, Савецкая, 18.

Выдавец і паліграфічнае выкананне: Вучэбна-выдавецкі цэнтр БДПУ.
Ліцэнзія № 02330/0056897 ад 30.04.04. 220007, Мінск, Магілёўская, 37.