ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ»

УДК 514.76

Богданович
Сергей Адамович

Геометрия кватернионных структур на многообразиях

01.01.04. — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Минск, 2007

Работа выполнена в учреждении образования «Белорусский государственный педагогический университете имени Максима Танка»

Научный руководитель: **Ермолицкий Александр Александрович**, кандидат физико-математических наук, доцент, учреждение образования «Минский государственный высший радиотехнический колледж», кафедра математики

Официальные оппоненты: **Муранов Юрий Владимирович**, доктор физико-математических наук, профессор, Технологический Университета Микстека, профессор-исследователь

Балащенко Виталий Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент, учреждение образования «Белорусский государственный университет», кафедра геометрии, топологии и методики преподавания математики

Оппонирующая организация: государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский государственный университет им. В.И. Ульянова-Ленина»

Защита состоится 4 февраля 2008 года в 16.00 часов на заседании совета по защите диссертаций Д 01.02.01 при Государственном научном учреждении «Институт математики НАН Беларуси» по адресу: 220072, г. Минск, ул. Сурганова 11, тел. ученого секретаря — 284-17-78

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики НАН Беларуси.

Автореферат разослан ……декабря 2007 года.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций
кандидат физ.-мат. наук
Тихонов С. В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с крупными научными программами (проектами) и темами. Работа над диссертацией проводилась в соответствии с заданиями научных тем «Многообразия. Группы и подгруппы, в том числе и топологические» (2001-2005), № гос. регистрации 20014512, «Структуры на многообразиях, интегрируемые гамильтоновые системы, полугруппы эндоморфизмов, группы и кольца характеров» (2006-2010), № гос. регистрации 20064305.

Цель и задачи исследования. *Цель* диссертационной работы: описание многообразий с почти гиперэрмитовой структурой и с почти гиперэрмитовой структурой второго рода с точки зрения канонической связности и второго фундаментального тензорного поля.

Основные *задачи* исследования следующие:

1) построить каноническую связность $\overline{\nabla}$ и второе фундаментальное тензорное поле h почти гиперэрмитовой структуры и почти гиперэрмитовых структур второго рода;

2) получить аналитические выражения связи тензора кривизны римановой связности ∇ и тензора кривизны и кручения канонической связности $\overline{\nabla}$ почти гиперэрмитовой структуры и почти гиперэрмитовых структур второго рода;

3) применить второе фундаментальное тензорное поле h к изучению инфинитезимальных преобразований почти гиперэрмитовых структур и почти гиперэрмитовых структур второго рода;

4) применить второе фундаментальное тензорное поле h к изучению ортогональных преобразований почти гиперэрмитовых структур и почти гиперэрмитовых структур второго рода;

5) построить примеры почти гиперэрмитовых структур и почти гиперэрмитовых структур второго рода на касательном расслоении риманова многообразия и использовать соответствующее второе фундаментальное тензорное поле построенной структуры для ее исследования.

Объект исследования — гладкие многообразия с почти гиперэрмитовыми структурами.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие основные результаты:

1) построение канонической связности $\overline{\nabla}$ и второго фундаментального тензорного поля h почти гиперэрмитовой структуры и почти гиперэрмитовой структуры второго рода;

2) применение второго фундаментального тензорного поля h к изучению почти гиперэрмитовых структур и почти гиперэрмитовых структур второго рода и их преобразований на римановом многообразии и самого многообразия;

3) ряд предложений и теорем, связывающих второе фундаментальное тензорное поле h почти гиперэрмитовой структуры или почти гиперэрмитовой структуры второго рода и вторые фундаментальные тензорные поля почти эрмитовых структур и структур почти произведения;

4) конструкция почти гиперэрмитовых структур и почти гиперэрмитовых структур второго рода на касательном расслоении риманова многообразия.

Личный вклад соискателя. Результаты раздела 1.3 получены автором самостоятельно, за исключением ортогональных преобразований почти гиперэрмитовой структуры (совместно с научным руководителем). Результаты второй главы автором получены самостоятельно. Примеры почти гиперэрмитовой структуры на касательном расслоении строились совместно с научным руководителем и исследовались самостоятельно. Построение и исследование почти гиперэрмитовых структур второго рода на касательном расслоении проводилось автором самостоятельно.

Апробация результатов диссертации. Результаты, вошедшие в диссертационную работу, докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях и семинарах:

1) международной научно-практической конференции «Современная радиоэлектроника: научные исследования и подготовка кадров» (Минск, 10-11 апрель, 2007 г.),

2) городском геометрическом семинаре им. В. И. Ведерникова (БГУ, Минск, 2007 г.),

3) городском геометрическом семинаре им. В. И. Ведерникова (БГУ, Минск, 2004 г.),

4) городском геометрическом семинаре им. В. И. Ведерникова (БГУ, Минск, 2001 г.),

5) VIII Белорусской международной математической конференции (Минск, 19-24 июнь, 2000 г.)

и были представлены на следующих международных математических конференциях:

1) «Еругинские чтения — XI» (ГГУ, Гомель, 24-26 май, 2006 г.),

2) IX Белорусской математической конференции (Гродно, 3-6 ноябрь, 2004г.),

3) VI конференция “Geometry and topology of manifolds” (Лодзь, Польша, 2-8 май, 2004 г.),

4) V конференция “Geometry and topology of manifolds” (Лодзь, Польша, 27 апрель - 3 май, 2003 г.),

5) «Еругинские чтения — IX» (ВГУ, Витебск, 20-22 май, 2003 г.).

Опубликованность результатов. Основные результаты диссертации опубликованы в 12 работах. В том числе: 5 статей (4 — без соавторов) в журналах и в сборниках трудов международных научных конференций объемом 1,75 авторских листов, 3 материалы конференций (1 — без соавторов), 4 тезисов докладов. Соавтору в совместных публикациях принадлежит постановка задачи и общее руководство исследованием.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, трех глав, заключения и библиографического списка, включающего 109 наименований: 97 — использованные источники, 12 — публикации соискателя. Полный объем диссертационной работы — 109 стр. (101 стр. без библиографического списка).

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** раскрывается актуальность темы диссертации.

В настоящее время одним из наиболее интересных и развивающихся разделов современной дифференциальной геометрии и ее приложений является теория различных структур на многообразиях, в частности, кватернионных структур. Это обусловлено как внутренними проблемами математики, о чем свидетельствует большое количество публикаций, например[1-9], так и многочис-

---

[1] Obata, M. Affine connections on manifolds with almost complex, quaternion or Hermitian structures / M. Obata // Japan J. Math. – 1956. – V. 26. – P. 43–77.

[2] Bonan, E. Sur les *G*–structures de type quaternionien / E. Bonan // Cahiers topol. ot geom. different. Ch. Ehresmann. Fac. sci. Paris. – 1967. – V. 9, № 4. – P.389–463.

[3] Almost quaternion structures of the second kind and almost tangent structures / K. Yano [et al.] // Kodai Math. Sem. Rep. – 1973. – Vol. 25. – P. 63–91.

[4] Алексеевский, Д.В. Классификация кватернионных пространств с транзитивной разрешимой группой движений / Д.В. Алексеевский // Изв. АН СССР, сер. Матем. – 1975. – Т. 39, № 2. – С. 315–362.

[5] Decomposition of a space of curvature tensors on a quaternion Kähler manifold and spectrum theory / F. Tricerri [et al.] // Simon Stevin (Belg.). – 1979. – V. 53, № 1/2. – P. 163–173.

[6] Joyce, D. Compact hypercomplex and quaternionic manifolds / D. Joyce // J. Diff. Geom. – 1992. – Vol. 35, № 3. – P. 743-761.

[7] Quaternionic–like structures on a manifold. Note I. 1-integrability and integrability conditions / D.V. Alekseevsky [et al.] // Rend. Mat. Acc. Lincei. – 1993. – Vol. 4, № 1. – P. 43–52.

[8] Quaternionic–like structures on a manifold. Note II. Automorphism groups and their interrelations / D.V. Alekseevsky [et al.] // Rend. Mat. Acc. Lincei. – 1993. – Vol. 4, № 1. – P. 53–61.

[9] Barberis, M.L. Hypercomplex structures on four-dimensional Lie group / M.L. Barberis // Proc. Amer. Math. Soc. – 1997. – Vol. 125, № 4. – P. 1043–1054.

[10] Lukierski, J. Complex and quaternionic supergeometry / J. Lukierski // Supergravity. Proc. Workshop / Stony Brook; Amsterdam e. a., 1979. – P. 301-309.

[11] Geometric structure and ultraviolet finiteness in supersymmetric σ-model / L. Alvarez-Gaume [et al.] // Comm. Math. Phys. – 1981. – V. 80. – P. 443-451.

[12] Galicki, K. Quaternionic Kähler and hyperKähler nonlinear σ-models / K. Galicki // Nucl. Phys. – 1986. – V. B271, № 2. – P. 402-416.

ленными приложениями в теоретической физике и теории поля[10-14], что вызывает еще больший интерес к ним.

В работе изучаются такие кватернионные структуры как почти гиперэрмитовы структуры и почти гиперэрмитовы структуры второго рода, которые представляют собой обобщение почти эрмитовых структур и римановых структур почти произведения.

Появившиеся в начале 80-х годов XX века в работах А. А. Ермолицкого[15,16] понятия каноническая связность $\overline{\nabla}$ и второе фундаментальное тензорное поле h G–структуры явились удачными «инструментами» для изучения многообразий со структурами. Была описана риманова геометрия многообразий с почти эрмитовыми структурами, римановыми структурами почти произведения и f–структурами[17,18]. Рассматриваемая структура изучается совместно со связанной с ней римановой метрикой (ассоциированной метрикой), которая значительно обогащает исходную структуру. Эта метрика играет роль «первого фундаментального тензорного поля» структуры. В связи с этим несомненную актуальность приобрел вопрос о построении и применении $\overline{\nabla}$ и h к изучению и описанию геометрии почти гиперэрмитовых структур и почти гиперэрмитовых структур второго рода. Отметим, что способ исследование этих структур при помощи соответствующих вторых фундаментальных тензорных полей почти эрмитовых структур и римановых структур почти произведения во многих случаях является более эффективным, чем использование второго фундаментального тензорного поля гиперэрмитовой структуры или почти гиперэрмитовой структуры второго рода, так как позволяет применить многочисленные сведения о почти эрмитовых структурах и римановых структурах почти произведения.

Еще одной не менее актуальной задачей являются исследование инфинитезимальных и ортогональных преобразований почти гиперэрмитовых структур и почти гиперэрмитовых структур второго рода, так как решение второй позволяет получить ряд других таких структур, например, так называемой почти гиперэрмитовой структуры типа ξ.

Построение почти эрмитовой структуры и римановой структуры почти произведения на касательном расслоении риманова многообразия[19-21] обусло-

---

[13] HyperKähler manifolds and nonlinear supermultipletes / A. Karlhede [et al.] // Comm. Math. Phys. – 1987. – V. 108, № 4. – P. 529-534.

[14] Besse, A.L. Einstein manifolds / A.L. Besse – Berlin etc.: Springer, 1987. – 510 p.

[15] Ermolitski, A.A. The second quadratic form of G-structure and nearly particular structures / A.A. Ermolitski // C. R. Bulgarian Acad. Sci. – 1981. – V. 34, № 7. – P. 963-964.

[16] Ермолицкий, А.А. Вторая квадратичная форма G-структуры / А.А. Ермолицкий; Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – Минск, 1981. – 15 с. – Деп. в ВИНИТИ 09.12.81, № 5612-81 // РЖ: 03. Математика. 3А764ДЕП.

вило сформулировать задачу о построении почти гиперэрмитовой структуры и почти гиперэрмитовой структуры второго рода на касательном расслоении риманова многообразия и исследовании последних при помощи h. Решение этой задачи позволило доказать существование бесчисленного множества почти гиперэрмитовых структур и почти гиперэрмитовых структур второго рода.

Диссертационная работа выполнена методом исчисления векторных полей Кошуля, методами теории гладких многообразий и дифференциально-геометческих структур на гладких многообразиях.

Таким образом, главная цель представляемой диссертационной работы — описание многообразий с почти гиперэрмитовой структурой и с почти гиперэрмитовой структурой второго рода с точки зрения их канонической связности и второго фундаментального тензорного поля соответственно.

Глава 1 диссертации содержит обзор литературы за последние годы по теме исследования. В **разделе 1.1** приводятся основные понятия теории G–структур и связностей: главное расслоение, G–структура, связность в главном расслоении, ассоциированная риманова метрика g. Далее показан способ построения $\overline{\nabla}$ и h, описанный в[18]. Пара (g, h) является определяющей для структуры $P(G)$, т.е. определяет класс G–структуры. **Раздел 1.2** содержит основные результаты по применению h к описанию почти эрмитовых структур и римановых структур почти произведения[18]. Пусть (M, J, g) — почти эрмитово многообразие и ∇ — риманова связность метрики g. Тогда $\overline{\nabla}$, h, $\overline{T}$ и $\overline{R}$ имеют вид:

$$\overline{\nabla}_X Y=\frac{1}{2}(\nabla_X Y-J\nabla_X JY)=\nabla_X Y+\frac{1}{2}\nabla_X(J)JY, \tag{1.5}$$

$$h_X Y=\nabla_X Y-\overline{\nabla}_X Y=-\frac{1}{2}\nabla_X(J)JY=\frac{1}{2}(\nabla_X Y+J\nabla_X JY), \tag{1.6}$$

$$h_{XYZ}=g(h_X Y, Z)=-h_{XZY}, \tag{1.7}$$

$$\overline{T}_X Y=\frac{1}{2}(J\nabla_Y JX-J\nabla_X JY-[X,Y]), \tag{1.9}$$

$$\overline{R}_{XY}Z=\frac{1}{2}R_{XY}Z-\frac{1}{2}JR_{XY}JZ+h_Y h_X Z-h_X h_Y Z. \tag{1.10}$$

---

[17] Ермолицкий, А.А. Вторая квадратичная форма, кривизна и кручение почти комплексной структуры / А.А. Ермолицкий; Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – Минск, 1981. – 26 с. – Деп. в ВИНИТИ 15.10.81, № 4789-81 // РЖ: 01. Математика. 1А881ДЕП.

[18] Ермолицкий, А.А. Римановы многообразия с геометрическими структурами / А.А. Ермолицкий – Минск: БГПУ, 1998. – 196 с.

[19] Dombrowski, P. On the Geometry of the Tangent Bundle / P. Dombrowski // J. Reine und Angew. Math. – 1962. – № 210. – P. 73–88.

[20] On the geometry of tangent bundle of a (pseudo-) Riemannian manifold / V. Oproiu [et al.] // An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi. Mat. (N. S.). – 1998. – Vol. 44, № 1. – P. 67-83.

[21] Almost product structures on tangent bundle / B.B. Sinha [et al.] // Indian J. Pure and Appl. Math. – 1981. – Vol. 12, № 1. – P. 61-70.

Классификация[22] Грея-Хервеллы почти эрмитовых структур может быть переписана в терминах h. В диссертационной работе эта классификация приведена в виде таблицы 1. Например: структура (J, g) является келеровой (класс **K**), если h=0; является приближенно келеровой ($\mathbf{U}_1$=**NK**), если $h_X X$=0; является почти келеровой ($\mathbf{U}_2$=**AK**), если σh_{XYZ}=0, где σ — циклическая сумма по X, Y, Z.

Пусть (P, g) — риманова структура почти произведения на многообразии M. Тогда $\overline{\nabla}$, h, $\overline{R}$ и $\overline{T}$ пары (P, g) имеют вид

$$\overline{\nabla}_X Y=\frac{1}{2}(\nabla_X Y+P\nabla_X PY)=\nabla_X Y-\frac{1}{2}\nabla_X(P)PY, \tag{1.11}$$

$$h_X Y=\nabla_X Y-\overline{\nabla}_X Y=\frac{1}{2}\nabla_X(P)PY=\frac{1}{2}(\nabla_X Y-P\nabla_X PY), \tag{1.12}$$

$$\overline{R}_{XY}Z=\frac{1}{2}R_{XY}Z+\frac{1}{2}PR_{XY}PZ+h_Y h_X Z-h_X h_Y Z, \tag{1.15}$$

$$\overline{T}_X Y=\frac{1}{2}(P\nabla_X PY-P\nabla_Y PX-[X,Y]). \tag{1.16}$$

Построению $\overline{\nabla}$ и h почти гиперэрмитовой структуры и применению этих терминов к изучению инфинитезимальных и ортогональных преобразований этой структуры посвящен **раздел 1.3**. Здесь же рассматривается вопрос о существовании и построении некоторых примеров почти гиперэрмитовых структур. В **подразделе 1.3.1** строится $\overline{\nabla}$, а в **подразделе 1.3.2** — h.

Почти гиперэрмитова структура на многообразии M ($\dim M=4n$) определяется парой почти эрмитовых структур (J_1, g) и (J_2, g) таких, что $J_1J_2=-J_2J_1=J_3$, $g(J_iX, J_iY)=g(X,Y)$, i=1, 2, 3, где g — риманова метрика, называемая *гиперэрмитовой*. Многообразие M с фиксированной почти гиперэрмитовой структурой называется *почти гиперэрмитовым многообразием*. Доказывается

ТЕОРЕМА 1.6 [1-А]. *Пусть* ∇ — *риманова связность гиперэрмитовой метрики* g=< , >. *Тогда каноническая связность* $\overline{\nabla}$ *пары* $((P(H), g)$, *соответствующей почти гиперэрмитовой структуре* (J_1, J_2, J_3, g), *определяется по формуле* $\overline{\nabla}_X Y=\frac{1}{4}\left(\nabla_X Y-\sum_{i=1}^{3}J_i\nabla_X J_iY\right)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.7. $\overline{\nabla}$ — *метрическая связность, то есть* $\overline{\nabla}g=0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.8. $\overline{\nabla}J_i=0$, i=1, 2, 3.

На почти гиперэрмитовом многообразии M определяем связности $\overset{i}{\overline{\nabla}}$, соответствующие структурам (J_i, g), i=1, 2, 3, по (1.5). Тогда имеют место

[22] The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants / A. Gray [et al.] // Ann. Mat. Pura Appl. – 1980. – №123. – P. 35-58.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.10. *Если* $\nabla J_1=0$, *то*: 1) $\overset{1}{\nabla}=\nabla$, 2) $\overline{\nabla}=\overset{2}{\overline{\nabla}}=\overset{3}{\overline{\nabla}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.11. *Если* $\overline{\nabla}=\nabla$, *то* $\overset{1}{\overline{\nabla}}=\overset{2}{\overline{\nabla}}=\overset{3}{\overline{\nabla}}=\nabla$.

Тензорное поле h называется *вторым фундаментальным тензорным полем* структуры (J_1, J_2, J_3, g), где $h_XY=\nabla_XY-\overline{\nabla}_XY$ и $h_{XYZ}=g(h_XY, Z)=-h_{XZY}$. Если h^i — второе фундаментальное тензорное поле структуры (J_i, g), $i=1, 2, 3$, то имеем:

$$h_XY=\frac{1}{2}\left(h_X^1Y+h_X^2Y+h_X^3Y\right), \qquad h_X^1Y=h_X^3Y-J_3h_X^2J_3Y,$$

$$h_X^2Y=h_X^3Y-J_3h_X^1J_3Y, \qquad h_X^3Y=h_X^1Y+J_3h_X^2J_3Y=h_X^2Y+J_3h_X^1J_3Y.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.12 [1-А]. *Если* (J_1, g) *— келерова структура, то есть* $h^1=0$ $(\nabla J_1=0)$, *то* $h=h^2=h^3$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.13. *Если* $h^2=h^3$, *то* (J_1, g) *— келерова структура*.

Заканчивается **подраздел 1.3.2** рассмотрением тензорных полей кручения $\overline{T}$ и кривизны $\overline{R}$ связности $\overline{\nabla}$. Имеем $\overline{T}_XY=\frac{1}{2}\left(\overline{T}_X^1Y+\overline{T}_X^2Y+\overline{T}_X^3Y\right)$.

ТЕОРЕМА 1.16 [1-А]. *Если* $\overline{R}$, R *и* $\overline{R}^i$, $i=1, 2, 3$, *— тензорные поля кривизны связностей* $\overline{\nabla}$, ∇ *и* $\overset{i}{\overline{\nabla}}$ *соответственно, то*

$$\overline{R}_{XY}Z=h_Xh_YZ-h_Yh_XZ+\sum_{i=1}^{3}\left(\overline{R}_{XY}^iZ+\frac{1}{4}J_iR_{XY}J_iZ\right)-\frac{5}{4}R_{XY}Z, \tag{1.30}$$

где h *— второе фундаментальное тензорное поле структуры* (J_1, J_2, J_3, g).

В **подразделе 1.3.3** исследуется инфинитезимальное преобразование на почти гиперэрмитовом многообразии. Доказаны

ТЕОРЕМА 1.19 [3-А]. *Пусть* $L_\xi g=0$, $L_\xi J_1=0$, $L_\xi J_2=0$, *где* L_X *— производная Ли. Тогда* ξ *есть инфинитезимальная изометрия и инфинитезимальное аффинное преобразование относительно канонической связности* $\overline{\nabla}$.

ТЕОРЕМА 1.21 [3-А]. *Пусть* $L_\xi g=0$, $L_\xi J_1=0$ *и* (J_2, g) *— келерова структура. Тогда* ξ *есть инфинитезимальная изометрия и инфинитезимальное аффинное преобразование относительно канонической связности* $\overline{\nabla}$.

Ортогональные преобразования почти гиперэрмитовых структур изучаются в **подразделе 1.3.4**. Пусть дана структура $(J_1', J_2', J_3', g=\langle\ ,\ \rangle)$ на гладком связном многообразии M, ∇ — связность метрики $\langle\ ,\ \rangle$. Рассматривается отображение A: $M \to O(3; \boldsymbol{R})$: $x \mapsto A(x)=(a_{ij}(x))$, $i, j=1, 2, 3$, $a_{ij}\in F(M)$, и тензорные поля типа (1, 1) $J_i=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}J_j'$. Эти поля определяют почти гиперэрмитову структуру $(J_1, J_2, J_3, \langle\ ,\ \rangle)$ на M. Выбирая функции a_{ij} (или углы Эйлера), получаем бесчисленное множество почти гиперэрмитовых структур на M. В случае, когда структуры (J_i', < , >) являются келеровыми, найдены h^i структур (J_i, < , >) и рассмотрен пример, иллюстрирующий эту ситуацию. Основным является

ТЕОРЕМА 1.22 [7-А]. *Существует почти гиперэрмитова структура* (J_1, J_2, J_3, < , >) *на* M, *для которой* $\nabla J_3=0$ *и* $h_X Y=\frac{1}{2}<\xi, X>J_3 Y$, *где* $\|\xi\|\neq 0$, ξ, X, Y — *векторные поля на* M.

Почти гиперэрмитову структуру из теоремы 1.22 назвали *почти гиперэрмитовой структурой типа* ξ. Для этой структуры доказывается ряд утверждений, в частности,

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.25 [2-А]. *Почти гиперэрмитова структура* (J_1, J_2, J_3, < , >) *типа* ξ *на* M *является квазиоднородной структурой* (*то есть* $\overline{\nabla}h=0$), *тогда и только тогда, когда* $\overline{\nabla}\xi=0$ *на* M, *где* $\overline{\nabla}$ — *каноническая связность почти гиперэрмитовой структуры* (J_1, J_2, J_3, < , >) *типа* ξ.

Подраздел 1.3.5 посвящен вопросу существования и построения некоторых примеров структур (J_1, J_2, J_3, g). Для любого класса $\boldsymbol{U}_\alpha$ (α= 0, 1, ..., 15) таблицы 1 существует такая структура (J_1, J_2, J_3, g) на некотором многообразии, что (J_1, g) принадлежит классу $\boldsymbol{U}_\alpha$ ([11-А]). Пример структуры (J_1, J_2, J_3, g), когда структура (J_1, g) — келерова (класс $\boldsymbol{K}$), а структура (J_2, g) принадлежит любому из класса $\boldsymbol{U}_\beta$ (β = 0, ..., 15), получен в **пункте 3.1.5.2**.

Заканчивается **подраздел 1.3.5** доказательством невозможности построения инвариантной почти гиперэрмитовой структуры на локальном k–симметрическом римановом пространстве ([4-А]).

Во **второй главе** вводятся понятия $\overline{\nabla}$ и h почти гиперэрмитовых структур второго рода типов (J, P_1, P_2) и (J_1, J_2, P). Здесь же эти понятия применяются к изучению инфинитезимальных и ортогональных преобразований почти гиперэрмитовых структур второго рода типа (J, P_1, P_2). **Раздел 2.1** посвящен гиперэрмитовой структуре второго рода типа (J, P_1, P_2). В **подразделе 2.1.1** строится $\overline{\nabla}$ этой структуры и доказывается ряд предложений, которые используются в третьей главе. Поле h рассматривается в **подразделе 2.1.2**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1[3]. *Три тензорных поля* J, P_1, P_2 *типа* (1, 1) *на гладком многообразии* M (dim$M$=2n), *удовлетворяющие условиям*

$$J^2=-I, \quad P_1^2=I, P_2^2=I, \tag{2.1}$$

$$J=-P_1P_2=P_2P_1, \quad P_1=P_2J=-JP_2, \quad P_2=JP_1=-P_1J, \tag{2.2}$$

называются почти кватернионной структурой второго рода (*структурой типа* (J, P_1, P_2)), *а гладкое многообразие с почти кватернионной структурой второго рода называется почти кватернионным многообразием второго рода*.

Пусть g=< , > — риманова метрика на (M, J, P_1, P_2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. *Структуру типа* (J, P_1, P_2), *для которой* $<JX, JY>=$ $=<P_1X,\ P_1Y>=<P_2X,\ P_2Y>=<X,Y>$ *будем называть почти гиперэрмитовой структурой второго рода типа* (J, P_1, P_2) *и обозначать* (J, P_1, P_2, g).

ТЕОРЕМА 2.2 [5-А]. *Пусть* ∇ — *риманова связность метрики* $g=<\ ,\ >$. *Тогда каноническая связность* $\overline{\nabla}$ *структуры* (J, P_1, P_2, g) *определяется по формуле*

$$\overline{\nabla}_X Y = \frac{1}{4}\left(\nabla_X Y - J\nabla_X JY + P_1\nabla_X P_1 Y + P_2\nabla_X P_2 Y\right), \tag{2.5}$$

для любых векторных полей X, Y *на* M.

Устанавливается, что эта связность является метрической и для нее $\overline{\nabla}J = \overline{\nabla}P_1 = \overline{\nabla}P_2 = 0$. На многообразии ($M$, J, P_1, P_2, g) определим связности $\overset{J}{\nabla}$, $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ структур (J, g), (P_1, g) и (P_2, g) соответственно. Тогда верно:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. *Если* $\nabla J=0$, *то*: 1) $\overset{J}{\nabla} = \nabla$, 2) $\overline{\nabla} = \overset{1}{\nabla} = \overset{2}{\nabla}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.9. *Если* $\overline{\nabla} = \nabla$, *то* $\overset{J}{\nabla} = \overset{1}{\nabla} = \overset{2}{\nabla} = \nabla$.

Тензорное поле h называется *вторым фундаментальным тензорным полем* структуры (J, P_1, P_2, g), где $h_XY=\nabla_XY-\overline{\nabla}_XY$ и $h_{XYZ}=g(h_XY, Z)=-h_{XZY}$. Найдена связь между h, h^J, h^1 и h^2 структур (J, P_1, P_2, g), (J, g), (P_1, g) и (P_2, g) соответственно:

$$h_XY=\frac{1}{2}\left(h_X^J Y + h_X^1 Y + h_X^2 Y\right), \qquad h_X^J Y = h_X^1 Y + P_1 h_X^2 P_1 Y,$$

$$h_X^2 Y = h_X^1 Y + P_1 h_X^J P_1 Y, \qquad h_X^1 Y = h_X^J Y - P_1 h_X^2 P_1 Y = h_X^2 Y - P_1 h_X^J P_1 Y.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.10 [5-А]. *Если* (J, g) — *келерова структура*, *то есть* $h^J=0$ ($\nabla J=0$), *то* $h=h^1=h^2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.11. *Если* $h^1=h^2$, *то* (J, g) — *келерова структура*.

Заканчивается **подраздел 2.1.2** рассмотрением тензорного поля кручения $\overline{T}$ и кривизны $\overline{R}$ связности $\overline{\nabla}$. Получили $\overline{T}_X Y = \frac{1}{2}\left(\overline{T}_X^J Y + \overline{T}_X^1 Y + \overline{T}_X^2 Y\right)$.

ТЕОРЕМА 2.17 [5-А]. *Если* $\overline{R}$, R, $\overline{R}^J$ *и* $\overline{R}^i$, i=1, 2, — *тензорные поля кривизны связностей* $\overline{\nabla}$, ∇, $\overset{J}{\nabla}$ *и* $\overset{i}{\nabla}$ *соответственно*, *то для любых векторных полей* X, Y, Z

$$\overline{R}_{XY} Z = h_X h_Y Z - h_Y h_X Z + \overline{R}_{XY}^J Z + \overline{R}_{XY}^1 Z + \overline{R}_{XY}^2 Z +$$

$$+\frac{1}{4}\left(JR_{XY}JZ - P_1 R_{XY} P_1 Z - P_2 R_{XY} P_2 Z - 5R_{XY} Z\right), \tag{2.17}$$

где h — *второе фундаментальное тензорное поле структуры* (J, P_1, P_2, g).

В **подразделе 2.1.3** изучается инфинитезимальное преобразование на структуре (J, P_1, P_2, g). Основным результатом является следующая

ТЕОРЕМА 2.22 [12-А]. *Пусть* $L_\xi g=0$, $L_\xi P_1=0$ (*или* $L_\xi P_2=0$) *и* (J, g) — *келерова структура. Тогда* ξ *есть инфинитезимальная изометрия и инфинитезимальное аффинное преобразование относительно связности* $\overline{\nabla}$.

Подраздел 2.1.4 посвящен ортогональным преобразованиям структуры (J, P_1, P_2, g). Пусть дана структура $(J', P'_1, P'_2, g=<\ ,\ >)$ на гладком связном многообразии M. Рассмотрим отображение A: $M \to O(3;\ \boldsymbol{R})$: $x \mapsto A(x)=(a_{ij}(x))$, $a_{ij}\in F(M)$, i, j=1, 2, 3, и тензорные поля $\left.\begin{aligned} J &= a_{11}J' + a_{12}P'_1 + a_{13}P'_2, \\ P_1 &= a_{21}J' + a_{22}P'_1 + a_{23}P'_2, \\ P_2 &= a_{31}J' + a_{32}P'_1 + a_{33}P'_2. \end{aligned}\right\}$ Из тождеств (2.1) получаем условия $a_{12}=a_{13}=a_{21}=a_{31}=0$. В этом случае тензорные поля J, P_1, P_2 определяют на M структуру $(J, P_1, P_2, <\ ,\ >)$. Выбирая функции a_{ij} (или углы Эйлера), мы получаем бесчисленное множество таких структур на M. Доказывается основная теорема этого подраздела:

ТЕОРЕМА 2.23. *Существует почти гиперэрмитова структура второго рода* $(J, P_1, P_2, <\ ,\ >)$ *на* M, *для которой* $\nabla J=0$ *и* $h_XY=\nabla_XY-\dfrac{1}{2}<\xi, X>JY$, *где* $\|\xi\|\neq 0$, ξ, X, Y — *векторные поля на* M.

Раздел 2.2 посвящен почти гиперэрмитовой структуре второго рода типа (J_1, J_2, P). Рассмотрим на гладком многообразии M размерности $2n$ тензорные поля J_1, J_2, P типа (1, 1), которые определяют почти кватернионную структуру второго рода типа (J_1, J_2, P), то есть удовлетворяют условиям

$$J_1^2=-I,\ J_2^2=-I,\ P^2=I,\ J_1=-J_2P=-PJ_2,\ J_2=-PJ_1=-J_1P,\ P=J_1J_2=J_2J_1.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. *Структуру типа* (J_1, J_2, P), *для которой* $<J_1X, J_1Y>=$ $=<J_2X, J_2Y>=<PX, PY>=<X, Y>$, *где* $g=<\ ,\ >$ — *риманова метрика на* M, X *и* Y — *векторные поля на* M, *будем называть почти гиперэрмитовой структурой второго рода типа* (J_1, J_2, P) *и обозначать* (J_1, J_2, P, g).

Основным результатом **подраздела 2.2.1** является

ТЕОРЕМА 2.25 [8-А]. *Пусть* ∇ — *риманова связность метрики* $g=<\ ,\ >$. *Тогда каноническая связность* $\overline{\nabla}$ *структуры* (J_1, J_2, P, g) *определяется по формуле*

$$\overline{\nabla}_XY=\frac{1}{4}\left(\nabla_XY-J_1\nabla_XJ_1Y-J_2\nabla_XJ_2Y+P\nabla_XPY\right), \qquad (2.29)$$

для любых векторных полей X, Y *на* M.

Доказывается, что $\overline{\nabla}g=0$ и $\overline{\nabla}J_1=\overline{\nabla}J_2=\overline{\nabla}P=0$. Если $\overset{i}{\nabla}$ (i=1, 2) — каноническая связность структуры (J_i, g), $\overset{P}{\nabla}$ — структуры (P, g), то имеют место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.28. *Если* $\nabla J_1=0$, *то*: 1) $\overset{1}{\nabla}=\nabla$, 2) $\overline{\nabla}=\overset{2}{\nabla}=\overset{P}{\nabla}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.30. *Если* $\overline{\nabla}=\nabla$, *то* $\overset{1}{\nabla}=\overset{2}{\nabla}=\overset{P}{\nabla}=\nabla$.

Тензорное поле h называется *вторым фундаментальным тензорным полем* структуры (J_1, J_2, P, g), где $h_X Y=\nabla_X Y-\overline{\nabla}_X Y$, $h_{XYZ}=g(h_X Y, Z)=-h_{XZY}$. Получена связь между h, h^1, h^2, h^P структур (J_1, J_2, P, g), (J_1, g), (J_2, g), (P, g):

$$h_X Y=\frac{1}{2}\left(h^1_X Y+h^2_X Y+h^P_X Y\right), \qquad h^1_X Y=h^P_X Y+Ph^2_X PY,$$

$$h^2_X Y=h^P_X Y+Ph^1_X PY, \qquad h^P_X Y=h^1_X Y-Ph^2_X PY=h^2_X Y-Ph^1_X PY.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.31. *Если* (J_1, g) — *келерова структура, то есть* $h^1=0$ $(\nabla J_1=0)$, *то* $h=h^2=h^P$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.32. *Если* $h^2=h^P$, *то* (J_1, g) — *келерова структура*.

Заканчивается **подраздел 2.2.2** рассмотрением тензорного поля кручения $\overline{T}$ и кривизны $\overline{R}$ связности $\overline{\nabla}$. Имеем $\overline{T}_X Y=\frac{1}{2}\left(\overline{T}^1_X Y+\overline{T}^2_X Y+\overline{T}^P_X Y\right)$.

ТЕОРЕМА 2.38 [8-А]. *Если* $\overline{R}$, R, $\overline{R}^P$ *и* $\overline{R}^i$, i=1, 2, — *тензорные поля кривизны связностей* $\overline{\nabla}$, ∇, $\overset{P}{\nabla}$ *и* $\overset{i}{\nabla}$ *соответственно, то для любых векторных полей* X, Y, Z

$$\overline{R}_{XY}Z=h_X h_Y Z-h_Y h_X Z+\overline{R}^1_{XY}Z+\overline{R}^2_{XY}Z+\overline{R}^P_{XY}Z+$$
$$+\frac{1}{4}\left(J_1R_{XY}J_1Z+J_2R_{XY}J_2Z-PR_{XY}PZ-5R_{XY}Z\right), \tag{2.41}$$

где h — *второе фундаментальное тензорное поле структуры* (J_1, J_2, P, g).

Построение почти гиперэрмитовых структур и почти гиперэрмитовых структур второго рода на касательном расслоении риманова многообразия и их изучение дано в **главе 3**. В **подразделе 3.1.1** приведены известные факты об отображении связности[19]. Если (M, g) — риманово многообразие размерности n и TM — его касательное расслоение, то для метрической связности $\widetilde{\nabla}$ рассмотрим отображение $\widetilde{K}$:

$$\widetilde{\nabla}_X Z=\widetilde{K}\,Z_*X, \tag{3.1}$$

где Z рассматривается как отображение из M в TM. Для векторных полей $\overline{X}=\overline{X}^h\oplus\overline{X}^v$ и $\overline{Y}=\overline{Y}^h\oplus\overline{Y}^v$ на TM и тензорного поля кривизны $\widetilde{R}$ связности $\widetilde{\nabla}$ имеют место следующие равенства[19] $(U\in TM)$:

$$\pi_*\overline{X}^h_U=X_{\pi(U)}, \quad \widetilde{K}\overline{X}^h_U=0_{\pi(U)}, \quad \pi_*\overline{X}^v_U=0_{\pi(U)}, \quad \widetilde{K}\overline{X}^v_U=X_{\pi(U)}, \quad [\overline{X}^v,\overline{Y}^v]=0,$$

$$[\overline{X}^h,\overline{Y}^v]=\left(\overline{\widetilde{\nabla}_X Y}\right)^v, \quad \pi_*([\overline{X}^h,\overline{Y}^h]_U)=[X,Y]_U, \quad \widetilde{K}([\overline{X}^h,\overline{Y}^h]_U)=\widetilde{R}(X,Y)U.$$

Естественная риманова метрика $\hat{g}=\langle\,,\rangle$ на TM задается формулой

$$\langle\overline{X},\overline{Y}\rangle=g(\pi_*\overline{X},\pi_*\overline{Y})+g(\widetilde{K}\,\overline{X},\widetilde{K}\,\overline{Y}). \tag{3.8}$$

В **подразделе 3.1.2** вычисляются компоненты h^1 канонической почти эрмитовой структуры $(J_1, \langle\,,\rangle)$ на TM, построенной в[19]:

$$h^1_{\bar{X}^h\bar{Y}^h\bar{Z}^h} = \frac{1}{2}(g(\nabla_X Y, Z) - g(\tilde{\nabla}_X Y, Z)). \tag{3.12}$$

$$h^1_{\bar{X}^h\bar{Y}^h\bar{Z}^v} = -\frac{1}{4}(g(\tilde{R}(X, Y)Z, U) + g(\tilde{R}(Z, X)Y, U)). \tag{3.13}$$

$$h^1_{\bar{X}^h\bar{Y}^v\bar{Z}^h} = -\frac{1}{4}(g(\tilde{R}(Z, X)Y, U) + g(\tilde{R}(X, Y)Z, U)). \tag{3.14}$$

$$h^1_{\bar{X}^v\bar{Y}^h\bar{Z}^h} = -\frac{1}{4}g(\tilde{R}(Z, Y)X, U). \tag{3.15}$$

$$h^1_{\bar{X}^v\bar{Y}^v\bar{Z}^v} = \frac{1}{4}g(\tilde{R}(Z, Y)X, U). \tag{3.16}$$

$$h^1_{\bar{X}^v\bar{Y}^v\bar{Z}^h} = 0. \tag{3.17}$$

$$h^1_{\bar{X}^v\bar{Y}^h\bar{Z}^v} = 0. \tag{3.18}$$

$$h^1_{\bar{X}^h\bar{Y}^v\bar{Z}^v} = \frac{1}{2}(g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z)). \tag{3.19}$$

В **подразделе 3.1.3** строится структура (J_1, J_2, J_3, g), когда дополнительно на (M, g) задана почти эрмитова структура J, второе фундаментальное тензорное поле которой h [4-A]. Определим тензорные поля J_2 и J_3 на TM равенствами $J_2\bar{X}^h = \left(\overline{JX}\right)^h$, $J_2\bar{X}^v = -\left(\overline{JX}\right)^v$ и $J_3\bar{X}^h = \left(\overline{JX}\right)^v$, $J_3\bar{X}^v = \left(\overline{JX}\right)^h$.

Для второго фундаментального тензорного поля h^2 структуры $(J_2, <\ ,\ >)$:

$$h^2_{\bar{X}^h\bar{Y}^h\bar{Z}^h} = h_{XYZ}. \tag{3.23}$$

$$h^2_{\bar{X}^h\bar{Y}^h\bar{Z}^v} = -\frac{1}{4}(g(\tilde{R}(X, Y)Z, U) + g(\tilde{R}(X, JY)JZ, U)). \tag{3.24}$$

$$h^2_{\bar{X}^h\bar{Y}^v\bar{Z}^h} = \frac{1}{4}(g(\tilde{R}(X, Z)Y, U) + g(\tilde{R}(X, JZ)JY, U)). \tag{3.25}$$

$$h^2_{\bar{X}^v\bar{Y}^h\bar{Z}^h} = -\frac{1}{4}(g(\tilde{R}(Z, Y)X, U) - g(\tilde{R}(JZ, JY)X, U)). \tag{3.26}$$

$$h^2_{\bar{X}^v\bar{Y}^v\bar{Z}^v} = 0. \tag{3.27}$$

$$h^2_{\bar{X}^v\bar{Y}^v\bar{Z}^h} = 0. \tag{3.28}$$

$$h^2_{\bar{X}^v\bar{Y}^h\bar{Z}^v} = 0. \tag{3.29}$$

$$h^2_{\bar{X}^h\bar{Y}^v\bar{Z}^v} = \frac{1}{2}(g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) - g(\tilde{\nabla}_X JY, JZ)). \tag{3.30}$$

Для второго фундаментального тензорного поля h^3 структуры $(J_3, <\ ,\ >)$:

$$h^3_{\bar{X}^h\bar{Y}^h\bar{Z}^h} = \frac{1}{2}(g(\nabla_X Y, Z) - g(\tilde{\nabla}_X JY, JZ)). \tag{3.32}$$

$$h^3_{\bar{X}^h\bar{Y}^h\bar{Z}^v} = -\frac{1}{4}(g(\tilde{R}(X, Y)Z, U) + g(\tilde{R}(X, JZ)JY, U)). \tag{3.33}$$

$$h^3_{\bar{X}^h\bar{Y}^v\bar{Z}^h} = \frac{1}{4}(g(\tilde{R}(X, Z)Y, U) - g(\tilde{R}(X, JY)JZ, U)). \tag{3.34}$$

$$h^3_{\bar{X}^v\bar{Y}^h\bar{Z}^h} = -\frac{1}{4}g(\tilde{R}(Z, Y)X, U). \tag{3.35}$$

$$h^3_{\bar{X}^v\bar{Y}^v\bar{Z}^v} = \frac{1}{4}\mathrm{g}(\tilde{R}(JZ, JY)X, U). \tag{3.36}$$

$$h^3_{\bar{X}^v\bar{Y}^v\bar{Z}^h} = 0. \tag{3.37}$$

$$h^3_{\bar{X}^v\bar{Y}^h\bar{Z}^v} = 0. \tag{3.38}$$

$$h^3_{\bar{X}^h\bar{Y}^v\bar{Z}^v} = \frac{1}{2}(g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) - g(\nabla_X JY, JZ)). \tag{3.39}$$

Из (3.12)-(3.19), (3.23)-(3.30) и (3.32)-(3.39) следует, что структура (J_1, J_2, J_3, $\hat{g}$) определяется только парой (g, $\tilde{\nabla}$). Варьируя g и $\tilde{\nabla}$, получаем бесконечное множество почти гиперэрмитовых структур на *TM* ([4-A]).

В **подразделе 3.1.4** рассматривается вопрос о существовании почти гиперэрмитовых структур на касательном расслоении. Получили следующие основные результаты:

ТЕОРЕМА 3.4 [7-А]. *Пусть* (M, g) *— риманово многообразие, тогда существует окрестность* N_Δ *диагонали* $\Delta(M\times M\times M\times M)$ *в* $M\times M\times M\times M$*, что многообразие* N_Δ *обладает почти гиперэрмитовой структурой.*

ТЕОРЕМА 3.6. *Пусть* (M, J, g) *— почти эрмитово многообразие и* $\tilde{\nabla} = \nabla$*. Тогда структура* (J_1, < , >) *на TM является почти келеровой структурой* (***AK***).

Подраздел 3.1.5 посвящен изучению вложения почти эрмитова многообразия в почти гиперэрмитовое. Здесь описан процесс деформации структурных тензоров ($\bar{g}$, $\bar{J}$) на нормальной трубчатой окрестности (**пункт 3.1.5.1**). Далее, для почти эрмитового многообразия (M, J, g) на *TM* строится почти гиперэрмитова структура (J_1, J_2, J_3, $\bar{g}$) согласно **подразделам 3.1.2** и **3.1.3**. Пусть в формуле (3.1) $\tilde{\nabla} = \nabla$ (∇ — связность метрики g). Многообразие M рассмотрим как нулевое сечение O_M в *TM*. Тогда $\hat{g}_{|M} = g$. Все результаты, содержащиеся в **пункте 3.1.5.1**, можно применить к подмногообразию M в (*TM*, $\hat{g}$). Устанавливается справедливость следующих основных результатов **пункта 3.1.5.2**.

ТЕОРЕМА 3.10. А) *Пусть* (M, J, g) *— почти эрмитово многообразие и* $Tb(M, \varepsilon(p))$ *— соответствующая нормальная трубчатая окрестность относительно метрики* $\hat{g}$ =< , > *на TM. Тогда* $M(O_M)$ *есть вполне геодезическое подмногообразие почти гиперэрмитового многообразия* ($Tb(M, \frac{\varepsilon(p)}{2})$, $\bar{J}_1$, $\bar{J}_2$, $\bar{J}_3$, $\bar{g}$)*, где почти гиперэрмитова структура* ($\bar{J}_1$, $\bar{J}_2$, $\bar{J}_3$, $\bar{g}$) *является деформацией почти гиперэрмитовой структуры* (J_1, J_2, J_3, $\hat{g}$)*, полученной согласно* ***пункта*** **3.1.5.1**;

Б) *Почти эрмитова структура* ($\bar{J}_1$, $\bar{g}$) *является келеровой*;

В) *Если почти эрмитова структура* (J, g) *принадлежит некоторому классу таблицы* 1, *то почти эрмитова структура* ($\bar{J}_2$, $\bar{g}$) *принадлежит этому же классу на* $Tb(M, \frac{\varepsilon(p)}{2})$.

В **разделе 3.2** на касательном расслоении многообразия (M, g) строится почти гиперэрмитова структура второго рода типа (J, P_1, P_2) и подсчитываются компоненты тензорных полей $\overset{J}{h}$, $\overset{1}{h}$ и $\overset{2}{h}$ структур (J, g), (P_1, g) и (P_2, g) соответственно. Каноническая почти эрмитова структура $(J, <\,,\,>)$ на TM определяется равенствами (3.9). Определим тензорные поля P_1 и P_2 на TM равенствами $P_1\bar{X}^h = \bar{X}^h$, $P_1\bar{X}^v = -\bar{X}^v$ и $P_2\bar{X}^h = \bar{X}^v$, $P_2\bar{X}^v = \bar{X}^h$. Тогда

$$\overset{1}{h}_{\bar{X}^h\bar{Y}^h\bar{Z}^h} = 0. \tag{3.61}$$

$$\overset{1}{h}_{\bar{X}^h\bar{Y}^h\bar{Z}^v} = -\frac{1}{2}g(\tilde{R}(X, Y)Z, U). \tag{3.62}$$

$$\overset{1}{h}_{\bar{X}^h\bar{Y}^v\bar{Z}^h} = -\frac{1}{2}g(\tilde{R}(Z, X)Y, U). \tag{3.63}$$

$$\overset{1}{h}_{\bar{X}^v\bar{Y}^h\bar{Z}^h} = 0. \tag{3.64}$$

$$\overset{1}{h}_{\bar{X}^v\bar{Y}^v\bar{Z}^v} = 0. \tag{3.65}$$

$$\overset{1}{h}_{\bar{X}^v\bar{Y}^v\bar{Z}^h} = 0. \tag{3.66}$$

$$\overset{1}{h}_{\bar{X}^v\bar{Y}^h\bar{Z}^v} = 0. \tag{3.67}$$

$$\overset{1}{h}_{\bar{X}^h\bar{Y}^v\bar{Z}^v} = 0. \tag{3.68}$$

$$\overset{2}{h}_{\bar{X}^h\bar{Y}^h\bar{Z}^h} = \frac{1}{2}(g(\nabla_X Y, Z) - g(\tilde{\nabla}_X Y, Z)). \tag{3.70}$$

$$\overset{2}{h}_{\bar{X}^h\bar{Y}^h\bar{Z}^v} = -\frac{1}{4}(g(\tilde{R}(X, Y)Z, U) - g(\tilde{R}(Z, X)Y, U)). \tag{3.71}$$

$$\overset{2}{h}_{\bar{X}^h\bar{Y}^v\bar{Z}^h} = \frac{1}{4}(g(\tilde{R}(X, Y)Z, U) - g(\tilde{R}(Z, X)Y, U)). \tag{3.72}$$

$$\overset{2}{h}_{\bar{X}^v\bar{Y}^h\bar{Z}^h} = -\frac{1}{4}g(\tilde{R}(Z, Y)X, U). \tag{3.73}$$

$$\overset{2}{h}_{\bar{X}^v\bar{Y}^v\bar{Z}^v} = \frac{1}{4}g(\tilde{R}(Z, Y)X, U). \tag{3.74}$$

$$\overset{2}{h}_{\bar{X}^v\bar{Y}^v\bar{Z}^h} = 0. \tag{3.75}$$

$$\overset{2}{h}_{\bar{X}^v\bar{Y}^h\bar{Z}^v} = 0. \tag{3.76}$$

$$\overset{2}{h}_{\bar{X}^h\bar{Y}^v\bar{Z}^v} = \frac{1}{2}(g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z)). \tag{3.77}$$

Раздел 3.3 содержит конструкцию почти гиперэрмитовой структуры второго рода типа (J_1, J_2, P) на касательном расслоении риманова многообразия (M, g) с почти эрмитовой структурой (J, g) на нем. Здесь подсчитываются компоненты тензорных полей $\overset{1}{h}$, $\overset{2}{h}$ и $\overset{P}{h}$ структур (J_1, g), (J_2, g) и (P, g) соответственно. Каноническая почти эрмитова структура $(J_1, <\,,\,>)$ на TM определяется равенствами (3.9). Определим тензорные поля J_2 и P на TM равенствами $J_2\bar{X}^h = \left(\overline{JX}\right)^h$, $J_2\bar{X}^v = \left(\overline{JX}\right)^v$ и $P\bar{X}^h = \left(\overline{JX}\right)^v$, $P\bar{X}^v = -\left(\overline{JX}\right)^h$. Тогда

$$h^2_{\bar X^h \bar Y^h \bar Z^h} = h_{XYZ}. \tag{3.81}$$

$$h^2_{\bar X^h \bar Y^h \bar Z^v} = -\frac{1}{4}(g(\tilde R(X, Y)Z, U) - g(\tilde R(X, JY)JZ, U)). \tag{3.82}$$

$$h^2_{\bar X^h \bar Y^v \bar Z^h} = \frac{1}{4}(g(\tilde R(X, Z)Y, U) - g(\tilde R(X, JZ)JY, U)). \tag{3.83}$$

$$h^2_{\bar X^v \bar Y^h \bar Z^h} = -\frac{1}{4}(g(\tilde R(Z, Y)X, U) - g(\tilde R(JZ, JY)X, U)). \tag{3.84}$$

$$h^2_{\bar X^v \bar Y^v \bar Z^v} = 0. \tag{3.85}$$

$$h^2_{\bar X^v \bar Y^v \bar Z^h} = 0. \tag{3.86}$$

$$h^2_{\bar X^v \bar Y^h \bar Z^v} = 0. \tag{3.87}$$

$$h^2_{\bar X^h \bar Y^v \bar Z^v} = \frac{1}{2}(g(\tilde\nabla_X Y, Z) - g(\tilde\nabla_X JY, JZ)). \tag{3.88}$$

$$\overset{P}{h}_{\bar X^h \bar Y^h \bar Z^h} = \frac{1}{2}(g(\nabla_X Y, Z) - g(\tilde\nabla_X JY, JZ)). \tag{3.90}$$

$$\overset{P}{h}_{\bar X^h \bar Y^h \bar Z^v} = -\frac{1}{4}(g(\tilde R(X, Y)Z, U) + g(\tilde R(JZ, X)JY, U)). \tag{3.91}$$

$$\overset{P}{h}_{\bar X^h \bar Y^v \bar Z^h} = -\frac{1}{4}(g(\tilde R(Z, X)Y, U) + g(\tilde R(X, JY)JZ, U)). \tag{3.92}$$

$$\overset{P}{h}_{\bar X^v \bar Y^h \bar Z^h} = -\frac{1}{4}(\tilde R(Z, Y)X, U). \tag{3.93}$$

$$\overset{P}{h}_{\bar X^v \bar Y^v \bar Z^v} = -\frac{1}{4}g(\tilde R(JZ, JY)X, U). \tag{3.94}$$

$$\overset{P}{h}_{\bar X^v \bar Y^v \bar Z^h} = 0. \tag{3.95}$$

$$\overset{P}{h}_{\bar X^v \bar Y^h \bar Z^v} = 0. \tag{3.96}$$

$$\overset{P}{h}_{\bar X^h \bar Y^v \bar Z^v} = \frac{1}{2}(g(\tilde\nabla_X Y, Z) - g(\nabla_X JY, JZ)). \tag{3.97}$$

З А К Л Ю Ч Е Н И Е

Основные научные результаты диссертации. Диссертация посвящена построению канонической связности и второго фундаментального тензорного поля почти гиперэрмитовой структуры и почти гиперэрмитовой структуры второго рода и применению этих понятий к изучению и описанию соответствующей структуры. В процессе выполнения работы получены следующие основные результаты:

1. Построена каноническая связность и второе фундаментальное тензорное поле почти гиперэрмитовой структуры и почти гиперэрмитовой структуры второго рода [1-А, 5-А, 8-А, 9-А]. Это дает возможность при исследовании почти гиперэрмитовых структур применить второе фундаментальное тензорное поле почти эрмитовой структуры и структуры почти произведения.

2. Установлена аналитическая связь тензора кривизны и кручения канонической связности и тензора кривизны римановой связности почти гиперэрмитовой структуры и почти гиперэрмитовой структуры второго рода [1-А, 5-А, 8-А].

3. Получены условия, чтобы невырожденное векторное поле на почти гиперэрмитовом многообразии или на почти гиперэрмитовом многообразии второго рода было инфинитезимальной изометрией и инфинитезимальным аффинным преобразованием относительно канонической связности [2-А, 10-А, 12-А].

4. Найдены вторые фундаментальные тензорные поля почти эрмитовых структур и структур почти произведения, задающих почти гиперэрмитову структуру или почти гиперэрмитову структуру второго рода, при ортогональном преобразовании последних [3-А, 7-А]; в частности, получена и исследована так называемая почти гиперэрмитова структура типа ξ.

5. Предъявлена конструкция почти гиперэрмитовых структур и почти гиперэрмитовых структур второго рода на касательном расслоении риманова многообразия и вычислены вторые фундаментальные тензорные поля этих структур [4-А, 6-А]. Это позволяет строить многочисленные примеры почти гиперэрмитовых структур и почти гиперэрмитовых структур второго рода различных типов.

Рекомендации по практическому использованию результатов. Построенная каноническая связность $\overline{\overline{\nabla}}$ и второе фундаментальное тензорное поле h, а также связанные с ними понятия и результаты могут быть использованы для дальнейших исследований по геометрии кватернионных структур, почти эрмитовых многообразий, многообразий со структурой почти произведения, в теоретической физике и теории поля.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ

статьи

1–А Багдановіч, С.А. Кананічная звязнасць і другое фундаментальнае тэнзарнае поле амаль эрмітавай гіперкамплекснай мнагастайнасці / С.А. Багдановіч // Весці Беларус. дзярж. пед. ун-та. – 2002. – №2. – С. 194-198.

2–А Багдановіч, С.А. Інфінітэзімальныя пераўтварэнні на амаль гіперэрмітавых мнагастайнасцях / С.А. Багдановіч // Весці Беларус. дзярж. пед. ун-та. Сер. 3, Фізіка. Матэматыка. Інфарматыка. Біялогія. Геаграфія. – 2004. – №2. – С. 21-22.

3–А Багдановіч, С.А. Аб артаганальных пераўтварэннях амаль гіперэрмітавых структур / С.А. Багдановіч // Весці Беларус. дзярж. пед. ун-та. Сер. 3, Фізіка. Матэматыка. Інфарматыка. Біялогія. Геаграфія. – 2004. – №3. – С. 7-9.

4–А Bogdanovich, S.A. On almost hyperHermitian structures on Riemannian manifolds and tangent bundles / S.A. Bogdanovich, A.A. Ermolitski // Central Europ. J. Math. – 2004. – Vol. 2, Issue 5. – P. 615-623.

5–А Багдановіч, С.А. Кананічная звязнасць і другое фундаментальнае тэнзарнае поле амаль гіперэрмітавай структуры другога роду тыпу (J, P_1, P_2) / С.А. Багдановіч // Весці Беларус. дзярж. пед. ун-та. Сер. 3, Фізіка. Матэматыка. Інфарматыка. Біялогія. Геаграфія. – 2005. – №2. – С. 13-16.

материалы конференций

6–А Bogdanovich, S.A. Hypercomplex structures on tangent bundles / S.A. Bogdanovich, A.A. Ermolitski // Geometry and topology of manifolds: abstracts of 5th conference, Krynica-Zdrój, Poland, 27 April – 3 May 2003. / Institute of Mathematics of the Technical University of Lódź. – Lódź, 2003. – P. 22-24.

7–А Bogdanovich, S.A. Remarks on hyperHermitian manifolds / S.A. Bogdanovich // Geometry and topology of manifolds: abstracts of 6th conference, Krynica-Zdrój, Poland, 2–8 May 2004. / Institute of Mathematics of the Technical University of Lódź. – Lódź, 2004. – P. 54.

8–А Богданович, С.А. Каноническая связность и второе фундаментальное тензорное поле почти гиперэрмитовой структуры второго рода типа (J_1, J_2, P) / С.А. Богданович, А.А. Ермолицкий // Современная радиоэлектроника: научные исследования и подготовка кадров: материалы междунар. науч.-практ. конф., Минск, 10-11 апреля 2007 г.: в 4 ч. / Минский гос. высший радиотехнич. колледж; редкол.: Н.А. Цырельчук [и др.]. – Минск, 2007. – Ч. 3. – С. 155-156.

тезисы докладов

9–А Богданович, С.А. Каноническая связность на почти гиперкомплексном многообразии // VIII Белорусская математическая конференция: тезисы докладов межденар. конф., Минск, 19-24 июня 2000 г.: в 4 ч. / Инст. матем. НАН Беларуси. – Минск, 2000. – Ч. 2. – С. 95.

10–А Богданович, С.А. Инфинитезимальные преобразования на почти эрмитовых гиперкомплексных многообразиях / Еругинские чтения – IX: тезисы докладов междунар. матем. конф., Витебск, 20-22 мая 2003 г. / Витебск, 2003. – С. 56.

11–А Bogdanovich, S.A. On an almost hyperHermitian structure on a locally k-symmetric Riemannian space / S.A. Bogdanovich // IX Белорусская математическая конференция: тезисы докладов междунар. конф., Гродно, 3-6 ноября 2004 г.: в 3 ч. / Гродн. гос. ун-т. – Гродно, 2004. – Ч. 2 – С. 73-74.

12–А Богданович, С.А. Инфинитезимальные преобразования на почти гиперэрмитовых многообразиях второго рода типа (J, P_1, P_2) / С.А. Богданович // Еругинские чтения – XI: тезисы докладов междунар. матем. конф., Гомель, 24-26 мая 2006 г. / Инст. матем. НАН Беларуси. – Минск, 2006. – С. 131-132.

Р Е З Ю М Е

Богданович Сергей Адамович

Геометрия кватернионных структур на многообразиях

Ключевые слова: почти гиперэрмитова структура, каноническая связность, второе фундаментальное тензорное поле, инфинитезимальное преобразование, ортогональное преобразование, касательное расслоение.

Цель работы: описание многообразий с почти гиперэрмитовой структурой или с почти гиперэрмитовой структурой второго рода с точки зрения канонической связности и второго фундаментального тензорного поля.

Основные результаты, полученные в диссертационной работе:

– построена каноническая связность и второе фундаментальное тензорное поле почти гиперэрмитовой структуры и почти гиперэрмитовой структуры второго рода. Это дает возможность при их исследовании применить второе фундаментальное тензорное поле почти эрмитовой структуры и структуры почти произведения;

– установлена аналитическая связь тензора кривизны и кручения канонической связности и тензора кривизны римановой связности почти гиперэрмитовой структуры и почти гиперэрмитовой структуры второго рода;

– получены условия, когда невырожденное векторное поле на почти гиперэрмитовом многообразии или на почти гиперэрмитовом многообразии второго рода является инфинитезимальной изометрией и инфинитезимальным аффинным преобразованием относительно канонической связности;

– найдены вторые фундаментальные тензорные поля почти эрмитовых структур и структур почти произведения, задающих почти гиперэрмитову структуру или почти гиперэрмитову структуру второго рода, при ортогональном преобразовании последних; в частности, получена и исследована так называемая почти гиперэрмитова структура типа ξ;

– предъявлена конструкция почти гиперэрмитовых структур и почти гиперэрмитовых структур второго рода на касательном расслоении риманова многообразия и вычислены вторые фундаментальные тензорные поля этих структур. Это позволяет строить многочисленные примеры почти гиперэрмитовых структур или почти гиперэрмитовых структур второго рода различных типов.

Все результаты, полученные в диссертационной работе, являются новыми. Построенная каноническая связность и второе фундаментальное тензорное поле, связанные с ними понятия и результаты могут быть использованы для исследований по геометрии кватернионных структур, почти эрмитовых структур, структур почти произведения, в теоретической физике и теории поля.

Р Э З Ю М Э

Багдановіч Сяргей Адамавіч

Геаметрыя кватэрніёнавых структур на мнагастайнасцях

Ключавыя словы: амаль гіперэрмітава структура, кананічная звязнасць, другое фундаментальнае тэнзарнае поле, інфінітэзімальнае пераўтварэнне, артаганальнае пераўтварэнне, датычнае расслаенне.

Мэта працы: апісанне мнагастайнасці з амаль гіперэрмітавай структурай ці з амаль гіперэрмітавай структурай другога роду з пункта гледжання кананічнай звязнасці і другога фундаментальнага тэнзарнага поля.

Асноўныя вынікі, атрыманыя ў дысертацыйнай працы:

– пабудавана кананічная звязнасць і другое фундаментальнае тэнзарнае поле амаль гіперэрмітавай структуры і амаль гіперэрмітавай структуры другога роду. Гэта дазваляе пры іх даследаванні прымяніць другое фундаментальнае тэнзарнае поле амаль эрмітавай структуры і структуры амаль здабытку;

– выяўлена аналітычная сувязь тэнзара крывізны і кручэння кананічнай звязнасці і тэнзара крывізны рыманавай звязнасці амаль гіперэрмітавай структуры і амаль гіперэрмітавай структуры другога роду;

– атрыманы ўмовы, калі нявыраджанае вектарнае поле на амаль гіперэрмітавай мнагастайнасці ці на амаль гіперэрмітавай мнагастайнасці другога роду з'яўляецца інфінітэзімальнай ізаметрыяй і інфінітэзімальным афінным пераўтварэннем адносна кананічнай звязнасці;

– знойдзены другія фундаментальныя тэнзарныя палі амаль эрмітовых структур і структур амаль здабытку, якія вызначаюць амаль гіперэрмітавую структуру ці амаль гіперэрмітавую структуру другога роду, пры артаганальным пераўтварэнні апошніх; у прыватнасці, атрымана і даследавана так званая амаль гіперэрмітава структура тыпу ξ;

– прад'яўлена канструкцыя амаль гіперэрмітавай структуры і амаль гіперэрмітавай структуры другога роду на датычным расслаенні рыманавай мнагастайнасці і падлічаны другія фундаментальныя тэнзарныя палі гэтых структур. Гэта дазваляе будаваць шматлікія прыклады амаль гіперэрмітавых структур і амаль гіперэрмітавых структур другога роду розных відаў.

Усе вынікі, атрыманыя ў дысертацыйнай працы, з'яўляюцца новымі. Пабудаваная кананічная звязнасць і другое фундаментальнае тэнзарнае поле, звязаныя з імі паняцці і вынікі могуць быць выкарыстаны для далейшых даследаванняў па геаметрыі кватэрніёнавых структур, амаль эрмітавых структур, структур амаль здабытку, у тэарэтычнай фізіцы і тэорыі поля.

S U M M A R Y

Bogdanovich Serge Adamovich

On geometry of quaternion structures on manifolds

Key words: almost hyperHermitian structure, canonical connection, second fundamental tensor field, infinitesimal transformation, orthogonal transformation, tangent bundle.

Aim of the work: to describe manifolds with almost hyperHermitian structure or almost hyperHermitian structure of the second kind from the point of view of the canonical connection and the second fundamental tensor field.

The main results of the thesis: the canonical connection and the second fundamental tensor field of an almost hyperHermitian structure and an almost hyperHermitian structure of the second kind have been constructed and applied to investigation of these structures.

The analytic relations between the torsion and curvature tensor fields of the canonical connection and the curvature tensor field of the Riemannian connection of an almost hyperHermitian structure and an almost hyperHermitian structure of the second kind have been established.

The conditions have been obtained for s nonsingular vector field to be an infinitesimal isometry and an infinitesimal affine transformation with respect to the canonical connection.

The so-called almost hyperHermitian structure of type ξ has been introduced by orthogonal transformation of some hyperHermitian structure and the second fundamental tensor fields of almost Hermitian structures and almost product structures connected with the hyperHermitian structure or almost hyperHermitian or almost hyperHermitian structure of the second kind have been considered.

The set of almost hyperHermitian structures and almost hyperHermitian structures of the second kind on a tangent bundle of a Riemannian manifold has been constructed and the second fundamental tensor fields of these structures have been computed. It makes possible to present numerous examples of almost hyperHermitian structures and almost hyperHermitian structures of the second kind of various classes.

All the results of the thesis are new. The constructed canonical connection, the second fundamental tensor field and dependent notions can be applied to investigation of geometry of quaternion structures, almost Hermitian structures, almost product structures, theoretical physics and Einstein manifolds.

Подписано в печать 10.12.2007 г.
Формат 60×84$^{1/16}$.
Усл. печ. л. 1,28. Уч.-изд. л. 1,16.
Тираж 60 экз. Заказ № 22
Отпечатано на ксероксе Института математики НАН Беларуси.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Институт математики НАН Беларуси.
ЛИ 02330 / 0133100.
220072, г. Минск, ул. Сурганова, 11.