Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Белорусский государственный педагогический университет
имени Максима Танка»

Институт повышения квалификации и переподготовки кадров

С. А. Богданович, С. И. Василец

Практикум по геометрии

Минск 2011

УДК 514(075.8)
ББК 22.151я73
Б735

Печатается по решению редакционно-издательского совета БГПУ
Рекомендовано секцией физико-математических и технических наук (протокол № 2 от 21.06.10)

Рецензенты:
кафедра геометрии и математического анализа УО «Витебский государственный университет им. П. М. Машерова»;

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математических и естественнонаучных дисциплин МГВРК А.А. Ермолицкий

Богданович, С. А.
Б735 Практикум по геометрии / С.А., Богданович, С.И. Василец. — Минск: БГПУ, 2011. — 64 с.
ISBN 978-985-541-009-7.

В пособии содержится краткий теоретический материал, решенные примеры по геометрии курса «Алгебра и геометрия» и упражнения для самостоятельного решения.

Адресуется слушателям специальностей «Математика» и «Информатика» ИПК и ПК БГПУ, а также может быть полезно студентам физико-математических специальностей педагогических вузов и преподавателям для проведения практических занятий.

УДК 514(075.8)
ББК 22.151я73
Б 735

ISBN 978-985-541-009-7

Предисловие

Данное пособие по геометрии предназначен слушателям специальностей «Математика», «Информатика» института повышения квалификации и переподготовки кадров БГПУ.

Практикум поможет слушателям систематизировать и закрепить теорию по курсу «Алгебра и геометрия», подготовиться к зачетам и экзаменам.

Содержание практикума соответствует учебной программе по курсу «Алгебра и геометрия» и состоит из семи разделов: «Векторная алгебра», «Метод координат», «Линии первого порядка», «Поверхности первого порядка», «Линии второго порядка», «Поверхности второго порядка», «Конструктивная геометрия».

Цель пособия — помочь слушателям самостоятельно овладеть методами решения задач по геометрии.

Это и определило структуру пособия.

Каждый раздел содержит краткие теоретические сведения с иллюстрациями, разобранные примеры, обширный подбор задач для решения, что позволяет данное пособие использовать для организации самостоятельной работы.

К особенностям этого пособия можно отнести наличие раздела «Конструктивная геометрия», так как данная тема в настоящее время недостаточно отражена в учебной литературе.

1. Векторная алгебра

1.1. Векторные величины. *Вектором* называется направленный отрезок. Один из концов этого отрезка называется *началом*, а второй — *концом вектора*. Считают, что вектор направлен от своего начала до своего конца. Если начало вектора находится в точке A, а конец — в точке B, то вектор обозначается $\overrightarrow{AB}$. Если же начало и конец вектора не указаны, то его обозначают строчной буквой латинского алфавита полужирного шрифта **a**, **b**, **c**, …, **y**, **z**, или буквой со стрелкой над ней $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots, \vec{y}, \vec{z}$. На рисунке направление вектора обозначается стрелкой (рис. 1).

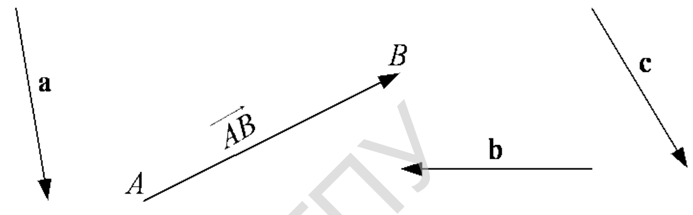

Рис. 1

Вектор, у которого начало и конец совпадают, называется *нулевым* и обозначается цифрой нуль: **0** или $\vec{0}$. Его направление считается неопределенным.

Модулем или *длиной вектора* называется расстояние между его началом и концом. Обозначается модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ и **a** записью $|\overrightarrow{AB}|$ (или AB) и $|a|$ (или a) соответственно.

Вектор, модуль которого равен единице, называется *единичным*.

Два вектора **a** и **b** называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Коллинеарные векторы обозначаются знаком «||»: **a**||**b**.

Три вектора называются *компланарными*, если они параллельны одной плоскости или лежат в одной плоскости.

Два вектора считаются *одинаково направленными* (или имеют одно и то же направление), если они коллинеарные и направлены в одну сторону.

Два вектора называются *равными*, если они коллинеарные, одинаково направлены и равны их модули. Отсюда следует, что векторы можно переносить параллельно самим себе. Такие векторы называются *свободными*.

Для обозначения равенства векторов **a** и **b** применяют обычный знак равенства «=»: **a**=**b**.

Два вектора называются *противоположными*, если они коллинеарные, направлены в противоположные стороны и имеют равные модули. Через $\overrightarrow{BA}$ и –**a** обозначают вектор, противоположный вектору $\overrightarrow{AB}$ и **a** соответственно.

1.2. Линейные операции над векторами. К линейным операциям над векторами относятся:

1) сложение векторов;

2) умножение вектора на число.

Суммой векторов **a** и **b** называется вектор **c**, начало которого находится в начале вектора **a**, а конец — в конце вектора **b** при условии, что начало вектора **b** совмещено с концом вектора **a**. Для обозначения суммы векторов используют знак плюс «+»: **c**=**a**+**b** (рис. 2).

Сложение трех и более векторов проводится по *правилу многоугольника*: суммой нескольких векторов является вектор, который соединяет начало первого с концом последнего при условии, что начало каждого последующего вектора совмещено с концом предыдущего.

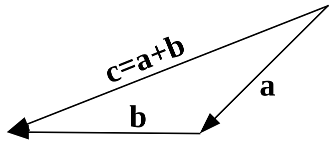

Рис. 2

Законы сложения векторов:

1) коммутативность: **a**+**b**=**b**+**a**;

2) ассоциативность: (**a**+**b**)+**c**=**a**+(**b**+**c**);

3) для любого вектора **a**: **a**+**0**=**a** и **a**+(–**a**)=**0**.

Операция нахождения разности двух векторов **a** и **b** называется *вычитанием* и обозначается знаком «–»: **a**–**b**=**a**+(–**b**). Операция вычитания является обратной операции сложения векторов.

Произведением вектора **a** *на число* α называется вектор, обозначаемый $\alpha\mathbf{a}$, модуль которого равен $|\alpha||\mathbf{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора **a**, если $\alpha>0$, и противоположно ему, если $\alpha<0$. Если $\alpha=0$, то $0\cdot\mathbf{a}=\mathbf{0}$.

Деление вектора на число определяется как произведение этого вектора на обратное число: $\dfrac{\mathbf{a}}{\alpha}=\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)\mathbf{a}$.

Законы умножения вектора на число:

1) коммутативность: $\alpha\mathbf{a}=\mathbf{a}\alpha$;

2) ассоциативность: $\alpha(\beta)\mathbf{a}=(\alpha\beta)\mathbf{a}$, где β — число;

3) дистрибутивность для векторов: $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\alpha=\mathbf{a}\alpha+\mathbf{b}\alpha$;

4) дистрибутивность для чисел: $(\alpha+\beta)\mathbf{a}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{a}$.

Два ненулевые вектора **a** и **b** коллинеарные тогда и только тогда, когда существует такое число α, что $\mathbf{b}=\alpha\mathbf{a}$.

1.3. Проекция вектора на ось. Координаты вектора. Прямая l с заданным на ней направлением, принимаемым за положительное, называется *осью* l. Это направление определяется направлением произвольно выбранного ненулевого вектора, параллельного прямой l.

Проекцией вектора **a** *на ось* l называется число, обозначаемое $\text{пр}_l\mathbf{a}$ и равное $|\mathbf{a}|\cos\varphi$, где φ — угол между положительным направлением оси l и направлением вектора **a** ($0\le\varphi\le\pi$). Другими словами, проекция вектора **a** есть длина отрезка AB, взятая со знаком «+», если $\varphi<\dfrac{\pi}{2}$, и со знаком «–», если $\varphi>\dfrac{\pi}{2}$ (рис. 3). Когда $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$, то $\text{пр}_l\mathbf{a}=0$.

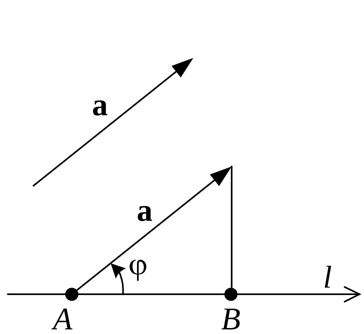

Рис. 3

Свойства проекции вектора на ось:

1) $\text{пр}_l(\alpha\mathbf{a})=\alpha\,\text{пр}_l\mathbf{a}$, где α — число;

2) $\text{пр}_l(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\text{пр}_l\mathbf{a}+\text{пр}_l\mathbf{b}$.

Координатами вектора **a** называются его проекции на оси координат Ox, Oy, Oz. Они обозначаются соответственно буквами x, y, z. Если вектор **a** имеет координаты x, y, z, то это записывается так: $\mathbf{a}=(x;\ y;\ z)$.

Два вектора равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты.

Вектор **a**, который соединяет начало системы координат с произвольной точкой M пространства (такой вектор часто обозначают **r**), называется *радиус-вектором* точки M.

Если начало вектора **a** находится в точке $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, а конец — в точке $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то

$$\mathbf{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1).$$

Векторы $\mathbf{i}=(1;\ 0;\ 0)$, $\mathbf{j}=(0;\ 1;\ 0)$, $\mathbf{k}=(0;\ 0;\ 1)$ называются *ортами координатных осей* или *единичными векторами* соответствующих осей Ox, Oy, Oz.

Система координат называется *правой*, если при наблюдении с конца третьего орта **k** поворот от первого орта **i** до второго орта **j** осуществляется против часовой стрелки. Если же поворот происходит по часовой стрелке, то система координат называется *левой*.

В дальнейшем будет использоваться только правая система координат.

Вектор $\mathbf{a}=(x;\ y;\ z)$ раскладывается единственным образом по координатным ортам:

$$\mathbf{a}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}.$$

Если $\mathbf{a}=x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}$ и $\mathbf{b}=x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}$, то линейные операции над векторами имеют вид:

1) $\mathbf{a}\pm\mathbf{b}=(x_1\pm x_2)\mathbf{i}+(y_1\pm y_2)\mathbf{j}+(z_1\pm z_2)\mathbf{k}$;
2) $\alpha\mathbf{a}=\alpha x_1\mathbf{i}+\alpha y_1\mathbf{j}+\alpha z_1\mathbf{k}$.

1.4. Скалярное произведение векторов. *Скалярным произведением двух векторов* называется произведение модулей этих векторов на косинус угла между ними. Скалярное произведение векторов **a** и **b** обозначается следующим образом: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, **ab** или (**a**, **b**). Таким образом:

$$\mathbf{ab}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi,$$

где φ — меньший угол между направлениями векторов **a** и **b**, причем всегда $0\le\varphi\le\pi$.

Векторы **a** и **b** называются *ортогональными* (или *перпендикулярными*), если $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$. Ортогональные векторы обозначается знаком «$\perp$»: $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$.

Свойства скалярного произведения векторов:

1) $\mathbf{ab}=\mathbf{ba}$;
2) $(\alpha\mathbf{a})\mathbf{b}=\alpha(\mathbf{ab})=\mathbf{a}(\alpha\mathbf{b})$;
3) $\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{ab}+\mathbf{ac}$;
4) $\mathbf{ab}=|\mathbf{a}|\text{пр}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}=|\mathbf{b}|\text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$;
5) $\mathbf{aa}=|\mathbf{a}|^2$;
6) $\mathbf{ab}=0 \Leftrightarrow \mathbf{a}\perp\mathbf{b}$.

Если $\mathbf{a}=x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}$ и $\mathbf{b}=x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}$, то имеют место следующие формулы в *координатной форме*:

$$\mathbf{ab}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2;$$

$$|\mathbf{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}; \quad |\mathbf{b}|=\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2};$$

$$\cos\varphi=\frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

Вектор $\mathbf{a}=x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}$ образует углы α, β, γ с положительными направлениями осей координат Ox, Oy, Oz соответственно (или, что то же самое, с векторами **i**, **j**, **k**). Тогда

$$\cos\alpha=\frac{\mathbf{ai}}{|\mathbf{a}||\mathbf{i}|}=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}};$$

$$\cos\beta=\frac{\mathbf{aj}}{|\mathbf{a}||\mathbf{j}|}=\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}};$$

$$\cos\gamma=\frac{\mathbf{ak}}{|\mathbf{a}||\mathbf{k}|}=\frac{z_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}};$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Величины $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами вектора* **a**.

Работа A силы **F** при перемещении материальной точки на пути $|\mathbf{s}|$, определяемом вектором **s**, находится по формуле: $A=\mathbf{Fs}$.

Замечание. Линейные операции над векторами и скалярное произведение векторов, которые заданы на плоскости своими координатами, выполняются по тем же формулам, что и в пространстве, но без координаты z, так как вектор на плоскости имеет две координаты: x и y. Например, на плоскости Oxy скалярное произведение двух векторов $\mathbf{a}=x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}$ и $\mathbf{b}=x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}$ в координатной форме имеет вид: $\mathbf{ab}=x_1x_2+y_1y_2$.

1.5. Векторное произведение векторов. *Векторным произведением двух векторов* **a** *и* **b** называется вектор **c**, обозначаемый $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ или $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, который удовлетворяет следующим условиям:

- $|\mathbf{c}|=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi$, где φ — угол между векторами **a** и **b**;
- $\mathbf{c}\perp\mathbf{a}$, $\mathbf{c}\perp\mathbf{b}$;
- векторы **a**, **b** и **c** образуют правую тройку векторов (рис. 4).

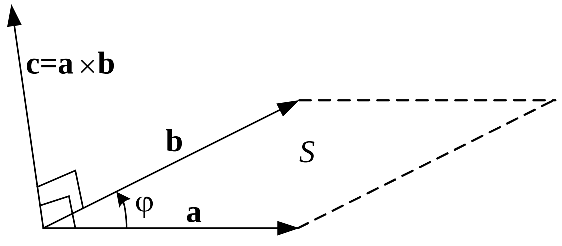

Рис. 4

Свойства векторного произведения векторов:

1) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}$;
2) $(\alpha\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\alpha(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}\times(\alpha\mathbf{b})$;
3) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$;
4) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a}\|\mathbf{b}$;

5) $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=S$, где S — площадь параллелограмма, построенного на направленных отрезках, которые представляют собой отложенные из одной точки перемножаемые векторы **a** и **b** (рис. 4).

Векторное произведение двух векторов в *координатной форме* равно определителю третьего порядка, элементами первой строки которого являются единичные векторы **i**, **j**, **k**, второй — координаты первого множителя, а третьей — координаты второго множителя:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix},$$

где $\mathbf{a}=x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}$ и $\mathbf{b}=x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}$.

Вращающий момент **M** *силы* **F**, приложенной к точке B тела, закрепленного в точке A, находится по формуле: $\mathbf{M}=\overrightarrow{AB}\times\mathbf{F}$.

1.6. Смешанное произведение векторов. *Смешанным произведением трех векторов* **a**, **b**, **c** называется число $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$.

Свойства смешанного произведения векторов:

1) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$,поэтому смешанное произведение векторов **a**, **b**, **c** принято обозначать проще: **abc**;

2) $\mathbf{abc}=\mathbf{bca}=\mathbf{cab}=-\mathbf{bac}=-\mathbf{cba}=-\mathbf{acb}$;

3) $(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)\mathbf{bc}=\mathbf{a}_1\mathbf{bc}+\mathbf{a}_2\mathbf{bc}$;

4) $(\alpha\mathbf{a})\mathbf{bc}=\alpha(\mathbf{abc})=\mathbf{a}(\alpha\mathbf{b})\mathbf{c}=\mathbf{ab}(\alpha\mathbf{c})$;

5) $\mathbf{abc}=0 \Leftrightarrow$ **a**, **b**, **c** — компланарные векторы;

6) $|\mathbf{abc}|=V$, где V — объем параллелепипеда, построенного на направленных отрезках, которые представляют собой отложенные из одной точки перемножаемые векторы **a**, **b**, **c** (рис. 5).

Если векторы **a**, **b**, **c** образуют правую тройку, то $\mathbf{abc}>0$; если же они образуют левую тройку, то $\mathbf{abc}<0$.

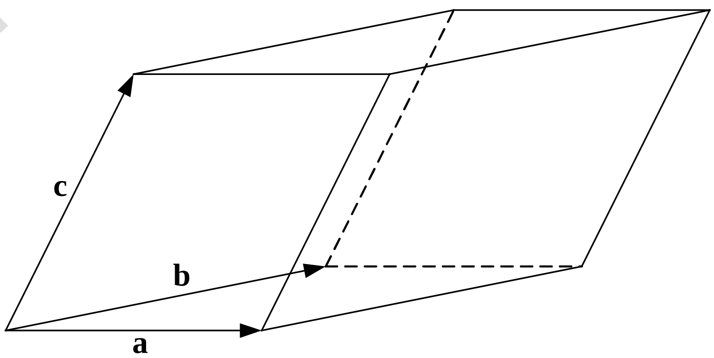

Рис. 5

Смешанное произведение векторов в *координатной форме* имеет вид определителя третьего порядка:

$$\mathbf{abc}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix},$$

где $\mathbf{a}=x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}$ и $\mathbf{c}=x_3\mathbf{i}+y_3\mathbf{j}+z_3\mathbf{k}$.

1.7. Двойное векторное произведение. *Двойным векторным произведением трех векторов* **a**, **b**, **c** называется вектор $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$.

Вектор $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ раскладывается по векторам **a** и **b** следующим образом:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b},$$

где $\lambda=-\mathbf{bc}$, $\mu=\mathbf{ac}$.

Тождество Якоби:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{0}.$$

Пример 1. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(1;\ 1)$, $B(-4;\ 0)$.

Решение. Из координат точки B вычитаем соответствующие координаты точки A и получаем вектор $\overrightarrow{AB}=(-4-1)\mathbf{i}+(0-1)\mathbf{j}=-5\mathbf{i}-1\mathbf{j}$.

Ответ: $\overrightarrow{AB}=(-5;\ -1)$.

Пример 2. Найти длину вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, где $M_1(-1;\ -2)$, $M_2(1;\ 3)$.

Решение. Здесь $x_1=-1$, $y_1=-2$, $x_2=1$, $y_2=3$. Тогда длина этого вектора:

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\sqrt{(1-(-1))^2+(3-(-2))^2}=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}.$$

Ответ: $\sqrt{29}$.

Пример 3. Найти вектор $\mathbf{d}=2\mathbf{a}-3\mathbf{b}+7\mathbf{c}$, если $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{b}=-\mathbf{i}-\mathbf{j}$, $\mathbf{c}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$.

Решение. Имеем: $2\mathbf{a}=2(\mathbf{i}+\mathbf{j})=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}$, $-3\mathbf{b}=-3(-\mathbf{i}-\mathbf{j})=3\mathbf{i}+3\mathbf{j}$, $7\mathbf{c}=7(2\mathbf{i}+3\mathbf{j})=14\mathbf{i}+21\mathbf{j}$. Здесь мы воспользовались правилом умножения вектора на число. Далее, $\mathbf{d}=(2\mathbf{i}+2\mathbf{j})+(3\mathbf{i}+3\mathbf{j})+(14\mathbf{i}+21\mathbf{j})=(2+3+14)\mathbf{i}+(2+3+21)\mathbf{j}=19\mathbf{i}+26\mathbf{j}$ на основании правила сложения векторов.

Ответ: $\mathbf{d}=19\mathbf{i}+26\mathbf{j}$.

Пример 4. Разложить вектор $\mathbf{c}=3\mathbf{i}-4\mathbf{j}$ по векторам $\mathbf{a}=-\mathbf{i}-\mathbf{j}$ и $\mathbf{b}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$.

Решение. Имеем $\mathbf{c}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}$ $\Leftrightarrow$ $3\mathbf{i}-4\mathbf{j}=\lambda(-\mathbf{i}-\mathbf{j})+\mu(2\mathbf{i}+3\mathbf{j})=(2\mu-\lambda)\mathbf{i}+(3\mu-\lambda)\mathbf{j}$ $\Leftrightarrow$ $2\mu-\lambda=3$, $3\mu-\lambda=-4$. Вычитая из второго уравнения первое, находим, что $\mu=-7$. Но тогда $\lambda=-17$. Значит, $\mathbf{c}=-17\mathbf{a}-7\mathbf{b}$.

Ответ: $\mathbf{c}=-17\mathbf{a}-7\mathbf{b}$.

Пример 5. Коллинеарны ли векторы $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{b}=-2\mathbf{i}+4\mathbf{j}$?

Решение. Здесь $a_x=1$, $a_y=1$; $b_x=-2$, $b_y=4$. Не выполняется условие $\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}$. Значит, данные векторы не являются коллинеарными.

Ответ: нет.

Пример 6. Найти $\angle CAB$ в треугольнике с вершинами $A(1;\ 6)$, $B(1;\ 0)$, $C(-2;\ 3)$.

Решение. Имеем: $\overrightarrow{AC}=(-2-1;\ 3-6)=(-3;\ -3)$, $\overrightarrow{AB}=(0;\ 0-6)=(0;\ -6)$.

Тогда, $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-3)^2+(-3)^2}=\sqrt{18}$, $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{0^2+(-6)^2}=6$, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=-3\cdot0+(-3)\cdot(-6)=18$. Далее, $\cos\angle CAB=\dfrac{18}{\sqrt{18}\cdot6}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Отсюда $\angle CAB=\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\pi}{4}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

Пример 7. Найти направляющие косинусы вектора a=(–2; –1; 3).

Решение. $a=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+3^2}=\sqrt{14}$. Далее находим $\cos\alpha=\frac{-2}{\sqrt{14}}=-\frac{\sqrt{14}}{7}$, $\cos\beta=\frac{-1}{\sqrt{14}}$, $\cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{14}}$.

Ответ: $\cos\alpha=\frac{-2}{\sqrt{14}}=-\frac{\sqrt{14}}{7}$, $\cos\beta=\frac{-1}{\sqrt{14}}$, $\cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{14}}$.

Упражнения

1. Вершины треугольника *ABC* имеют радиус-векторы $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_3$. Найти радиус-вектор точки пересечения медиан треугольника. *Ответ*: $\frac{1}{3}(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3)$.

2. Векторы $\overrightarrow{AC}=\mathbf{a}$ и $\overrightarrow{BD}=\mathbf{b}$ являются диагоналями параллелограмма *ABCD*. Выразить векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AD}$ через векторы **a** и **b**.

3. В треугольнике *ABC* проведены медианы AM_1, BM_2 и CM_3. Найти сумму векторов $\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{BM_2}$ и $\overrightarrow{CM_3}$.

4. В параллелограмме *ABCD* на стороне *AD* взята точка *K* так, что 5*AK*=*AD*, а на диагонали *AC* — точка *L* так, что 6*AL*=*AC*. Доказать, что векторы $\overrightarrow{KL}$ и $\overrightarrow{LB}$ коллинеарные.

5. Векторы **a** и **b** перпендикулярные, причем |**a**|=5, |**b**|=12. Найти |**a**+**b**| и |**a**–**b**|.

6. Даны векторы **a**=(1; 5; 3), **b**=(6; –4; –2), **c**=(0; –5; 7), **d**=(–20; 27; –35). Найти такие числа α, β и γ, чтобы α**a**+β**b**+γ**c**+**d**=**0**. *Ответ*: α=2, β=3, γ=5.

7. Найти координаты вектора, модуль которого равен 8, если он образует с осями *Ox* и *Oz* углы $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{3}$ соответственно, а с осью *Oy* — острый угол.

8. Даны два вектора **a**=(–3; 0; 4) и **b**=(5; –2; –14). Найти координаты единичного вектора, делящего пополам угол между векторами **a** и **b**.

9. Найти углы, образуемые вектором **a**=(6; 2; 9) с координатными плоскостями *Oxy*, *Oxz*, *Oyz*.

10. При каких значениях α и β векторы **a**=–2**i**+3**j**+α**k** и **b**=β**i**–6**j**+2**k** будут коллинеарными?

11. Найти орты вектора **a**=(3; 4; –12).

12. На плоскости даны векторы **a**=(2; –3) и **b**=(1; 2). Найти разложение вектора **c**=(9; 4) по векторам **a** и **b**. *Ответ*: **c**=2**a**+5**b**.

13. Даны три вектора **a**=(3; –2; 1), **b**=(–1; 1; –2) и **c**=(2; 1; –3). Найти разложение вектора **d**=(11; –6; 5) по векторам **a**, **b** и **c**.

14. Даны точки $A(1; 2; 3)$ и $B(3; –4; 6)$. Найти модуль и направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$.

15. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ — трапеция, если $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}+2\mathbf{b}$, $\overrightarrow{BC}=-4\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\overrightarrow{CD}=-5\mathbf{a}-3\mathbf{b}$.

16. При каком значении α векторы $\mathbf{a}=\alpha\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ и $\mathbf{b}=4\mathbf{i}+\alpha\mathbf{j}-7\mathbf{k}$ перпендикулярные? *Ответ*: $\alpha=4$.

17. Найти $(5\mathbf{a}+3\mathbf{b})(2\mathbf{a}-\mathbf{b})$, если $|\mathbf{a}|=2$, $|\mathbf{b}|=3$, $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$.

18. Стороны треугольника ABC равны $AB=7$, $BC=5$, $CA=6$. Найти скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$.

19. Найти проекцию вектора $\mathbf{a}=(-14; 2; 5)$ на прямую с направляющим вектором $\mathbf{b}=(2; -2; 1)$.

20. Найти внутренние углы треугольника ABC, если $A(1; 2; 3)$, $B(3; 0; 4)$, $C(2; 1; 3)$.

21. Даны вершины четырехугольника $ABCD$: $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$, $D(-5; -5; 3)$.Доказать, что диагонали AC и BD взаимно перпендикулярные.

22. Вектор $\mathbf{x}$, коллинеарный вектору $\mathbf{a}=(6; -8; -7{,}5)$, образует тупой угол с осью Oz и имеет длину, равную 50. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$.

23. Три силы $\mathbf{F}_1=(3; -4; 2)$, $\mathbf{F}_2=(2; 3; -5)$ и $\mathbf{F}_3=(-3; -2; 4)$ приложены к одной точке. Найти работу, производимую равнодействующей этих сил, когда ее точка приложения движется прямолинейно из положения $A(5; 3; -7)$ в положение $B(4; -1; -4)$.

24. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$, перпендикулярного к векторам $\mathbf{a}=(2; 3; -1)$ и $\mathbf{b}=(1; -2; 3)$ и удовлетворяющего условию $\mathbf{x}(2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})=-6$.

25. Найти $\text{пр}_{\mathbf{c}}(3\mathbf{a}-2\mathbf{b})$, если $\mathbf{a}=(-2; 1; 1)$, $\mathbf{b}=(1; 5; 0)$, $\mathbf{c}=(4; 4; -2)$.

26. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}+3\mathbf{b}$ и $3\mathbf{a}+\mathbf{b}$, если $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=1$ и угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равен $\dfrac{\pi}{6}$.

27. Найти площадь треугольника ABC с вершинами в точках $A(1; 1; 1)$, $B(2; 3; 4)$, $C(4; 3; 2)$. *Ответ*: $4\sqrt{6}$.

28. Даны два вектора $\mathbf{a}=(11; 10; 2)$ и $\mathbf{b}=(4; 0; 3)$. Найти третий единичный вектор $\mathbf{c}$ такой, что $\mathbf{c}\perp\mathbf{a}$, $\mathbf{c}\perp\mathbf{b}$ и векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ образуют правую тройку.

29. Найти $((2\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{a}+2\mathbf{b}))^2$, если $|\mathbf{a}|=1$, $|\mathbf{b}|=2$ и угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равен $\dfrac{2\pi}{3}$.

30. Найти $(2\mathbf{a}-\mathbf{b})\times(2\mathbf{a}+\mathbf{b})$, если $\mathbf{a}=(3; -1; -2)$ и $\mathbf{b}=(1; 2; -1)$.

31. Сила $\mathbf{F}=(2; -4; 5)$ приложена к точке $B(4; -2; 3)$. Найти момент этой силы относительно точки $A(3; 2; -1)$.

32. Найти длину высоты треугольника ABC, опущенную из вершины B, если $A(1; -1; 2)$, $B(5; -6; 2)$, $C(1; 3; -1)$.

33. Доказать, что векторы $\mathbf{a}-\mathbf{d}$ и $\mathbf{b}-\mathbf{c}$ коллинеарные, если $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{c}\times\mathbf{d}$ и $\mathbf{a}\times\mathbf{c}=\mathbf{b}\times\mathbf{d}$.

34. Доказать тождество $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2+(\mathbf{ab})^2=\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2$.

35. Являются ли векторы **a**=2**i**–**j**–**k**, **b**=**i**+3**j**–**k**, **c**=**i**+**j**+4**k** компланарными?

36. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах **a**=(1; –1; 3), **b**=(–2; 2; 1), **c**=(3; –2; 5). *Ответ*: 7.

37. Найти **abc**, если |**a**|=6, |**b**|=3, |**c**|=3, **c**⊥**a**, **c**⊥**b** и угол между векторами **a** и **b** равен $\frac{\pi}{6}$.

38. Доказать, что точки $A(1; 2; -1)$, $B(0; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$ и $D(2; 1; 3)$ лежат в одной плоскости.

39. Найти длину высоты треугольной пирамиды $ABCD$, опущенной из вершины D, если $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(6; 3; 7)$, $D(-5; -4; 8)$.

40. Найти координаты вектора **x**, коллинеарного с высотой треугольника ABC, опущенной из вершины A, если $A(2; -1; -3)$, $B(1; 2; -4)$, $C(3; -1; -2)$ и вектор **x** образует с осью Oy острый угол.

2. Метод координат

2.1. Расстояние между двумя точками. Деление отрезка в данном отношении. *Расстояние между двумя точками* $A(x_1; y_1; z_1)$ *и* $B(x_2; y_2; z_2)$ пространства находится по формуле:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

В частности, если точки A и B заданы на плоскости Oxy и $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, то

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

Координаты точки $M(x; y; z)$, делящей отрезок M_1M_2 в данном отношении $\lambda = \dfrac{M_1M}{MM_2}$ $(\lambda \neq -1)$ с концами в точках $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ (рис. 6), находятся по формулам

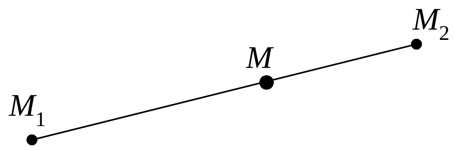

Рис. 6

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Если точка M является серединой отрезка M_1M_2, то есть $\lambda=1$, то координаты точки M равны

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

В случае, когда точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ заданы на плоскости Oxy, формулы для координат точки $M(x; y)$ принимают вид

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},$$

а если точка M — середина отрезка M_1M_2, то

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

2.2. Полярная система координат на плоскости. *Полярная система координат* определяется заданием точки O, называемой *полюсом*, луча Op, называемого *полярной осью*, и *масштаба* для измерения длин.

Положение произвольной точки M, отличной от точки O, определяется двумя упорядоченными числами: $r=|\overrightarrow{OM}|$ и $\varphi=\angle(Op;\ \overrightarrow{OM})$. Угол φ отсчитывается от полярной оси Op к радиус-вектору $\overrightarrow{OM}$ против часовой стрелки и измеряется в радианах. Число $r\in[0;\ +\infty)$ называется *полярным радиусом*, а $\varphi\in[0;\ 2\pi)$ — *полярным углом* (или *амплитудой*) точки M. Запись $M(r;\ \varphi)$ означает, что точка M имеет полярные координаты r и φ (рис. 7).

Для точки O, $r=0$ а φ не определен.

Пусть начало точка O прямоугольной системы координат Oxy является полюсом, а положительная часть оси Ox — полярной осью (рис. 8). Тогда имеют место формулы перехода от полярных координат к прямоугольным и наоборот:

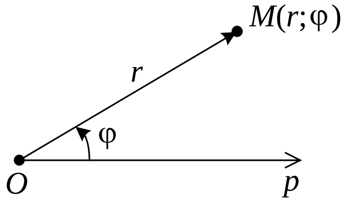

Рис. 7

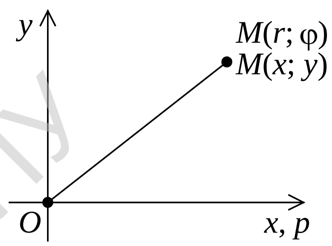

Рис. 8

$$x=r\cos\varphi,$$
$$y=r\sin\varphi$$

и

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \sin\varphi=\frac{y}{r},\quad \cos\varphi=\frac{x}{r},$$

соответственно, где $(x;\ y)$ — координаты точки M в прямоугольной системе координат Oxy, а $(r;\ \varphi)$ — координаты этой же точки в полярной системе координат.

Расстояние между двумя точками $A(r_1;\ \varphi_1)$ и $B(r_2;\ \varphi_2)$ в полярной системе координат находится по формуле

$$AB=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}\,.$$

2.3. Поверхности вращения. Пусть плоская линия l расположена в координатной плоскости Oxy. Поверхность, образованная вращением линии l вокруг оси Ox или Oy, называется *поверхностью вращения*.

Для получения уравнения поверхности вращения необходимо в уравнении линии, которая вращается, координату, соответствующую оси, вокруг которой происходит вращение, оставить без изменения, а вторую координату заменить корнем квадратным из суммы квадратов этой же координаты и координаты, которая отсутствует в уравнении линии.

2.4. Преобразование координат плоскости. Преобразование прямоугольных координат при *параллельном переносе координатных осей* определяется формулами

$$x=x'+a,$$

$$y=y'+b.$$
Здесь $(x; y)$ — координаты произвольной точки M плоскости в *старой* системе координат Oxy; $(x'; y')$ — координаты той же точки в *новой* системе координат $Ox'y'$; $(a; b)$ — координаты начала O' новой системы координат в старой системе координат (рис. 9).

Преобразование прямоугольных координат при *повороте координатных осей на угол* α задается формулами
$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,$$
$$y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha.$$
Здесь $(x; y)$ — координаты точки M в старой системе координат, $(x'; y')$ — координаты той же точки в новой системе координат; $\alpha=\angle(Ox; Ox')$ — угол поворота (рис. 10).

Формулы
$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha+a,$$
$$y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha+b.$$
задают *общее преобразование системы координат*, то есть параллельный перенос осей координат и их поворот (рис. 11).

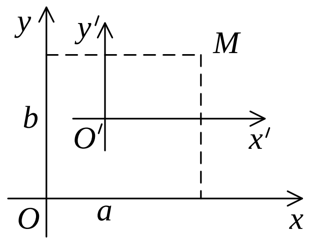

Рис. 9

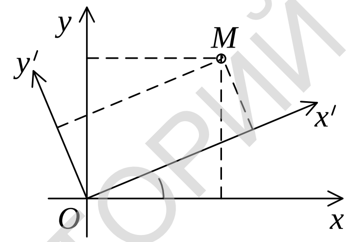

Рис. 10

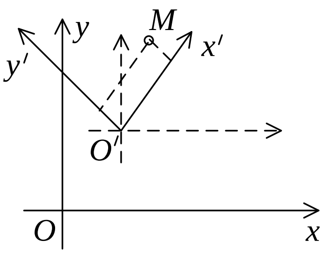

Рис. 11

Все вышеприведенные формулы выражают старые координаты произвольной точки M через новые. Обратные формулы (то есть выражение новых координат точки M через старые) имеют вид:

1) параллельный перенос: $x'=x-a,$
$y'=y-b;$

2) поворот: $x'=x\cos\alpha+y\sin\alpha,$
$y'=-x\sin\alpha+y\cos\alpha;$

3) общее преобразование: $x'=(x-a)\cos\alpha+(y-b)\sin\alpha,$
$y'=-(x-a)\sin\alpha+(y-b)\cos\alpha.$

2.5. Сжатие плоскости и пространства. *Сжатие плоскости к координатной оси Ox* (или *вдоль оси Oy*) называется преобразование координат точек плоскости по формулам
$$x'=x;$$
$$y'=ky,$$
где $(x; y)$ — координаты произвольной точки M плоскости до сжатия; $(x'; y')$ — координаты точки M', которая соответствует точке M после сжатия; k — некоторое постоянное положительное число, называемое *коэффициентом сжатия* (рис. 12).

По аналогии определяется сжатие плоскости к координатной оси Oy:

$$x'=kx;$$
$$y'=y.$$

Сжатием пространства к координатной плоскости Oxy (или *вдоль оси Oz*) называется преобразование координат точек пространства по формулам

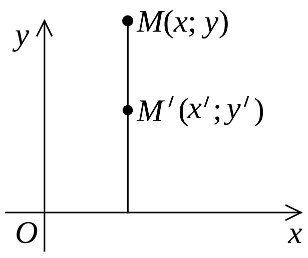

Рис. 12

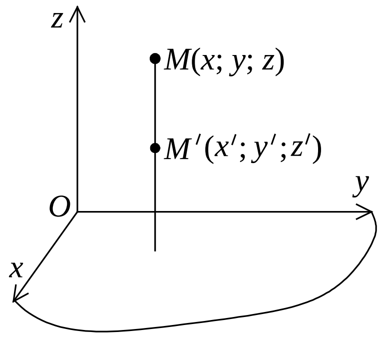

Рис. 13

$$x'=x;$$
$$y'=y;$$
$$z'=kz,$$

где $(x;\ y;\ z)$ — координаты произвольной точки M пространства до сжатия; $(x';\ y';\ z')$ — координаты точки M', которая соответствует точке M после сжатия; k — некоторое постоянное положительное число, называемое *коэффициентом сжатия* (рис. 13).

Сжатие пространства вдоль оси Ox или Oy определяется аналогично.

Пример 1. Найти расстояние между точками $A(1;\ 2)$ и $B(4;\ –2)$.

Решение. Имеем $d=\sqrt{(4-1)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{25}=5$.

Ответ: 5.

Пример 2. Найти координаты середин сторон треугольника с вершинами $A(1;\ 1)$, $B(–1;\ –2)$, $C(3;\ 0)$.

Решение. Находим координаты середин сторон данного треугольника по формулам $x=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{1+(-1)}{2}=0$, $y=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{1+(-2)}{2}=-\frac{1}{2}$ — координаты середины стороны AB; $x=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{1+3}{2}=2$, $y=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}$ — координаты середины стороны AC; $x=\frac{x_C+x_B}{2}=\frac{3+(-1)}{2}=1$, $y=\frac{y_C+y_B}{2}=\frac{0+(-2)}{2}=-1$ — координаты середины стороны CB.

Ответ: для стороны AB середина $\left(0;-\frac{1}{2}\right)$; для стороны AC середина $\left(2;\frac{1}{2}\right)$; для стороны CB середина $(1;\ –1)$.

Пример 3. Применяя параллельный перенос координат, преобразовать уравнение $9x^2–18x+4y^2+16y–11=0$ к виду, не содержащему членов с переменными x и y в первой степени.

Решение. Подставим в уравнение $9x^2–18x+4y^2+16y–11=0$ вместо x и y их выражения через новые координаты x', y':

$$9(x'+a)^2+4(y'+b)^2-18(x'+a)+16(y'+b)-11=0;$$
$$9(x')^2+4(y')^2+(18a-18)x'+(8b+16)y'+9a^2+4b^2-18a+16b-11=0.$$

Подберем теперь a и b такими, чтобы коэффициенты при x' и y' обратились в нуль. Для этого достаточно решить систему двух линейных уравнений $\begin{cases} 18a-18=0, \\ 8b+16=0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ a=1, b=–2. Подставляем в последнее уравнение a=1, b=–2 и приходим к уравнению $9(x')^2+4(y')^2-36=0$.

Этот же результат можно получить, выделив полные квадраты относительно переменных x и y.

Ответ: $9(x')^2+4(y')^2-36=0$.

Упражнения

1. На плоскости дана точка $M(x;\ y)$. Найти координаты точки, симметричной точке M, относительно:
а) начала координат;
б) оси абсцисс;
в) оси ординат;
г) биссектрисы первого и третьего координатных углов;
д) биссектрисы второго и четвертого координатных углов.

2. Даны две вершины $A(-1;\ 3)$ и $B(2;\ 1)$ параллелограмма $ABCD$. Найти координаты вершин C и D, если $AC \| Ox$ и $BD \| Oy$. *Ответ*: $C(5;\ 3)$, $D(2;\ 5)$.

3. Найти центр C и радиус R окружности, описанной около треугольника с вершинами в точках $A(-2;\ 2)$, $B(2;\ 6)$, $C(5;\ -3)$.

4. Даны середины сторон треугольника $M_1(2;\ 4)$, $M_2(-3;\ 0)$, $M_3(2;\ 1)$. Найти координаты вершин треугольника.

5. Даны три вершины трапеции $ABCD$: $A(-2;\ -3)$, $B(1;\ 4)$, $C(3;\ 1)$. Найти координаты вершины D, если основание AD в пять раз больше основания BC.

6. Найти координаты точек A и B, если точка $C(-5;\ 4)$ делит отрезок AB в отношении $\frac{3}{4}$, а точка $D(6;\ -5)$ — в отношении $\frac{2}{3}$.

7. В треугольнике с вершинами в точках $A(4;\ 1)$, $B(7;\ 5)$, $C(-4;\ 7)$ найти длину медианы AM и длину биссектрисы угла BAC.

8. Даны две вершины треугольника $A(3;\ 8)$ и $B(10;\ 2)$ и точка пересечения медиан $M(1;\ 1)$. Найти координаты третьей вершины треугольника.

9. Длина отрезка AB равна 17. Найти координаты точки A, если известно, что $A \in Oy$ и $B(-8;\ 13)$.

10. В пространстве дана точка $M(x;\ y;\ z)$. Найти координаты точки, симметричной точке M относительно:
а) начала координат;
б) координатных плоскостей Oxy, Oxz, Oyz;
в) координатных осей Ox, Oy, Oz.

11. Найти координаты центра C и радиус R сферы, проходящей через точки $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(5;\ 2;\ 3)$, $C(2;\ 5;\ 3)$, $D(1;\ 2;\ -1)$.

12. Даны две вершины треугольника $A(-4; -1; 2)$ и $B(3; 5; -16)$. Найти координаты третьей вершины C, если середина стороны AC лежит на оси Oy, а середина стороны BC — на плоскости Oxz. *Ответ*: $C(4; -5; -2)$.

13. В каком отношении координатная плоскость Oxy делит отрезок AB с концами в точках $A(2; -1; 7)$ и $B(4; 5; -2)$?

14. Даны точки $A(3; 3; 3)$ и $B(-1; 5; 7)$. Найти координаты точек C и D, делящих отрезок AB на три равные части.

15. Доказать, что в треугольнике с вершинами в точках $A(1; 2; 3)$, $B(7; 10; 3)$, $C(-1; 3; 1)$ угол BAC тупой.

16. Даны вершины $A(2; -3; -5)$ и $B(-1; 3; 2)$ параллелограмма $ABCD$. Найти координаты вершин C и D, если точка пересечения диагоналей параллелограмма имеет координаты $(4; -1; 7)$.

17. Даны вершины треугольника $A(1; -1; -3)$, $B(2; 1; -2)$ и $C(-5; 2; -6)$. Найти длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине A.

18. Найти полярные координаты точки $M(1; -\sqrt{3})$, заданной в прямоугольной системе координат. *Ответ*: $M(2; -\frac{\pi}{3})$.

19. Найти прямоугольные координаты точки $A(3; -\frac{\pi}{6})$, заданной в полярной системе координат.

20. Найти расстояние между точками $A(4; \frac{\pi}{5})$ и $B(1; \frac{5\pi}{12})$ и координаты середины отрезка AB, если точки заданы в полярной системе координат.

21. В полярной системе координат дана точка $A(5; \frac{2\pi}{3})$. Найти координаты точки, симметричной точке A относительно:
а) полюса;
б) полярной оси.

22. Одна из вершин треугольника OAB находится в полюсе, а две другие имеют координаты $A(r_1; \varphi_1)$ и $B(r_2; \varphi_2)$. Найти площадь треугольника OAB.

23. Найти площадь треугольника, вершины которого $A(3; \frac{\pi}{8})$, $B(8; \frac{7\pi}{24})$, $C(6; \frac{5\pi}{8})$ заданы в полярной системе координат.

24. Составить уравнение поверхности, полученной при вращении прямой $\begin{cases} x + y = 4, \\ z = 0 \end{cases}$ вокруг оси Ox.

25. Составить уравнение поверхности, полученной при вращении параболы $\begin{cases} z = 4x^2, \\ y = 0 \end{cases}$ вокруг ее оси. *Ответ*: $x^2+y^2=\frac{1}{4}z$.

26. Составить уравнение поверхности, полученной при вращении эллипса $\begin{cases} \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1, \\ z=0 \end{cases}$ вокруг:

а) большой оси;

б) малой оси.

27. Составить уравнение поверхности, полученной при вращении гиперболы $\begin{cases} \dfrac{y^2}{25}-\dfrac{z^2}{9}=1, \\ x=0 \end{cases}$ вокруг:

а) действительной оси;

б) мнимой оси.

28. Составить уравнение поверхности, полученной при вращении окружности $(x–5)^2+z^2=4$ вокруг оси Oz.

29. Начало новой системы координат расположено в точке $O'(3; –4)$. Найти координаты точки $M(x'; y')$ в новой системе координат, если в старой системе координат $M(7; 8)$.

30. Система координат повернута на угол $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$. Определить новые координаты точки $M(\sqrt{3}; 3)$, заданной в старой системе координат.

31. Дана точка $A(4; 3)$. Система координат повернута вокруг начала координат так, что новая ось Ox' прошла через точку A. Найти старые координаты точки $M(x; y)$, если в новой системе координат $M(5; 5)$.

32. Даны три точки: $A(5; 5)$, $B(2; –1)$, $C(12; –6)$. Найти их координаты в новой системе координат, если начало координат перенесено в точку A, а оси координат повернуты на угол $\alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}$.

33. Определить, в какую линию преобразуется окружность $x^2+y^2=25$, если коэффициент сжатия плоскости к оси Ox равен $\dfrac{4}{5}$. *Ответ*: $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{\frac{625}{16}}=1$.

34. Коэффициент сжатия плоскости к оси Oy равен $\dfrac{3}{4}$. Составить уравнение линии, в которую при таком сжатии преобразуется эллипс $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

35. Составить уравнение линии, в которую преобразуется эллипс $\dfrac{x^2}{49}+\dfrac{y^2}{9}=1$ при двух последовательных сжатиях плоскости к осям Ox и Oy с коэффициентами сжатия $\dfrac{4}{3}$ и $\dfrac{6}{7}$ соответственно.

36. Найти коэффициент сжатия k плоскости к оси Oy, при котором эллипс $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{25}=1$ преобразуется в эллипс $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$.

37. При каких значениях коэффициентов k_1 и k_2 двух последовательных сжатий плоскости к осям Ox и Oy соответственно эллипс $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ преобразуется в окружность $x^2+y^2=16$?

38. Коэффициент сжатия пространства к плоскости Oxz равен $\frac{3}{4}$. Составить уравнение поверхности, полученной при таком сжатии сферы $x^2+y^2+z^2=9$.

39. Составить уравнение поверхности, полученной при сжатии эллипсоида $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1$ последовательно к плоскости Oxy с коэффициентом сжатия $\frac{3}{4}$ и к плоскости Oxz с коэффициентом сжатия $\frac{4}{5}$.

40. Найти коэффициенты k_1 и k_2 двух последовательных сжатий пространства к плоскостям Oxy и Oxz соответственно, при которых сфера $x^2+y^2+z^2=25$ преобразуется в эллипсоид $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1$.

41. Доказать, что треугольник с вершинами $P(-2;\ -1)$, $Q(6;\ 1)$, $R(3;\ 4)$ — прямоугольный.

42. Дана середина отрезка $L(5;\ 2)$ и один из его концов $M(2;\ -1)$. Найти координаты второго конца отрезка.

43. На оси абсцисс найти точку, находящуюся на расстоянии $d=10$ от точки $A(2;\ 6)$.

44. Найти длину медианы PN треугольника с вершинами $P(-3;\ 2)$, $Q(5;\ 4)$, $R(7;\ -2)$.

45. На оси ординат найти точку, расстояние от которой до точки $A(-2;\ 7)$ равно $\sqrt{68}$.

46. Доказать, что треугольник с вершинами $P(3;\ 4)$, $Q(7;\ 7)$, $R(4;\ 3)$ — равнобедренный.

47. Найти полярные координаты точек $A(1;\ 1)$, $B(0;\ 2)$

48. Построить точки по их полярных координатах $E(5;\ \pi)$, $F(1{,}5;\ \frac{7\pi}{4})$, $G(4;\ 0)$.

3. Линии первого порядка

3.1. Виды уравнений прямой. Любой ненулевой вектор **a** на плоскости или в пространстве, параллельный данной прямой, называется *направ-*

ляющим вектором этой прямой. Любой ненулевой вектор $\mathbf{n}$ на плоскости, перпендикулярный данной прямой, называется *нормальным вектором* этой прямой.

Векторные уравнения прямой:

1) $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+t\mathbf{a}$;

2) $\mathbf{nr}+C=0$,

где $\mathbf{r}=\overrightarrow{OM}$ — радиус-вектор произвольной точки M на прямой; $\mathbf{r}_0=\overrightarrow{OM_0}$ — радиус-вектор заданной точки M_0 на прямой; t $(-\infty<t<+\infty)$ — некоторый параметр; $C=-\mathbf{nr}_0$ (рис. 14).

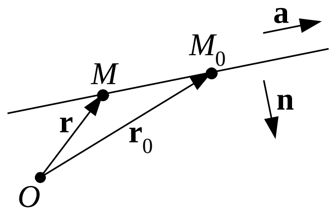

Рис. 14

Отметим, что первое из векторных уравнений прямой имеет место как на плоскости, так и в пространстве, а второе — только на плоскости.

Если $\mathbf{r}=(x;\ y;\ z)$, $\mathbf{r}_0=(x_0;\ y_0;\ z_0)$ и $\mathbf{a}=(a_x;\ a_y;\ a_z)$, то уравнения

$$x=x_0+a_xt;$$
$$y=y_0+a_yt;$$
$$z=z_0+a_zt,$$

называются *параметрическими уравнениями* прямой в пространстве.

В частности, когда прямая задана на плоскости Oxy, ее *параметрические уравнения* имеют вид

$$x=x_0+a_xt;$$
$$y=y_0+a_yt.$$

Уравнения

$$\frac{x-x_0}{a_x}=\frac{y-y_0}{a_y}=\frac{z-z_0}{a_z}$$

и

$$\frac{x-x_0}{a_x}=\frac{y-y_0}{a_y}$$

называются *каноническими уравнениями* прямой в пространстве и *каноническим уравнением* прямой на плоскости соответственно.

Уравнение $Ax+By+C=0$ называется *общим уравнением* прямой на плоскости. Пара чисел $(A;\ B)$ является координатами нормального вектора, а пара $(-B;\ A)$ — координатами направляющего вектора этой прямой.

Если прямая проходит через две точки $M_1=(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2=(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то уравнения

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

называются *уравнениями прямой, проходящей через две данные точки*.

В случае плоскости Oxy — это уравнение

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

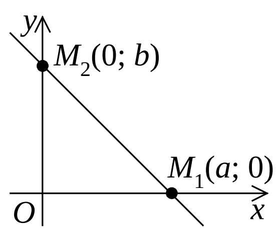

Рис. 15

Когда точки M_1 и M_2 лежат на координатных осях Ox и Oy соответственно (рис. 15) и имеют координаты $M_1(a;\ 0)$ и $M_2(0;\ b)$, то последнее уравнение принимает вид

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Это уравнение называется *уравнением прямой в отрезках*.

Уравнение

$$y-y_0=k(x-x_0)$$

называется *уравнением прямой, проходящей через данную точку* $M_0=(x_0;\ y_0)$ *в данном направлении* k. Это направление задается коэффициентом k, который называется *угловым коэффициентом прямой* и равен $k=\mathrm{tg}\alpha$, где α — угол между положительным направлением оси Ox и прямой, отсчитанный против часовой стрелки (рис. 16).

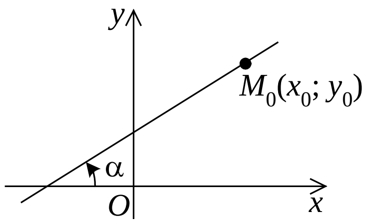

Рис. 16

Если точка M_0 расположена на оси Oy и имеет координаты $M_0(0;\ b)$, то из последнего уравнения получается уравнение

$$y=kx+b,$$

которое называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*.

Нормальное уравнение прямой на плоскости в векторной форме имеет вид

$$\mathbf{r}\mathbf{n}^0-p=0.$$

Здесь $\mathbf{n}^0$ — нормальный вектор прямой, модуль которого равен единице, p — расстояние от начала координат до прямой (рис. 17).

Нормальное уравнение прямой в координатной форме имеет вид

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0,$$

где α — угол между вектором $\mathbf{n}^0$ и положительным направлением оси Ox.

Для того, чтобы общее уравнение прямой $Ax+By+C=0$ привести к нормальному виду, необходимо все его члены умножить на число

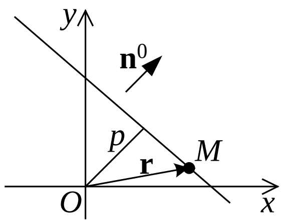

Рис. 17

$$\mu=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Это число называется *нормирующим множителем*. Знак множителя μ берется противоположным знаку свободного члена C в общем уравнении прямой. Если $C=0$, то знак μ можно выбрать произвольно.

3.2. Расстояние от точки до прямой. Если прямая задана векторным уравнением $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+t\mathbf{a}$ и $\mathbf{r}_1$ — радиус-вектор точки M_1, которая не принадлежит этой прямой, то расстояние d от точки M_1 до данной прямой находится по формуле

$$d=\frac{|(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)\times\mathbf{a}|}{|\mathbf{a}|}.$$

Расстояние от точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ до прямой, заданной каноническими уравнениями $\frac{x-x_0}{a_x}=\frac{y-y_0}{a_y}=\frac{z-z_0}{a_z}$, равно

$$d=\frac{\operatorname{mod}\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

В случае, когда прямая задана на плоскости общим уравнением $Ax+By+C=0$, и $M_1(x_1;\ y_1)$, то

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

а если прямая задана нормальным уравнением $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$, то

$$d=|x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha-p|.$$

3.3. Угол между двумя прямыми. Пусть на плоскости даны две прямые, имеющие направляющие векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$. Углом φ между этими прямыми называется наименьший из ориентированных углов между векторами $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$. Таким образом,

$$\cos\varphi=\frac{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1||\mathbf{a}_2|}.$$

Если $\mathbf{a}_1=(a_{x1};\ a_{y1};\ a_{z1})$ и $\mathbf{a}_2=(a_{x2};\ a_{y2};\ a_{z2})$, то

$$\cos\varphi=\frac{a_{x1}a_{x2}+a_{y1}a_{y2}+a_{z1}a_{z2}}{\sqrt{a_{x1}^2+a_{y1}^2+a_{z1}^2}\sqrt{a_{x2}^2+a_{y2}^2+a_{z2}^2}}.$$

Когда прямые заданы на плоскости Oxy, то последняя формула принимает вид:

$$\cos\varphi=\frac{a_{x1}a_{x2}+a_{y1}a_{y2}}{\sqrt{a_{x1}^2+a_{y1}^2}\sqrt{a_{x2}^2+a_{y2}^2}}.$$

В случае, когда прямые заданы общими уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$, то $\mathbf{a}_1=(-B_1;\ A_1)$, $\mathbf{a}_2=(-B_2;\ A_2)$ и

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Если прямые заданы уравнениями $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$, то

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}.$$

Рассмотрим условия *параллельности или совпадения* и *перпендикулярности* двух прямых.

Если прямые параллельны (или совпадают), то $\mathbf{a}_1\|\mathbf{a}_2$ (на плоскости еще $\mathbf{n}_1=(A_1;\ B_1)\|\mathbf{n}_2=(A_2;\ B_2)$). Значит,

$$a_{x1}=ta_{x2};$$

$$a_{y1}=ta_{y2};$$
$$a_{z1}=ta_{z2}$$
(на плоскости будем иметь $a_{x1}=ta_{x2}$; $a_{y1}=ta_{y2}$) или на плоскости
$$A_1=tA_2;$$
$$B_1=tB_2.$$

В случае, когда параллельные или совпадающие прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами, имеем
$$k_1=k_2.$$

Если прямые перпендикулярные, то $\mathbf{a}_1\perp\mathbf{a}_2$ (на плоскости еще $\mathbf{n}_1\perp\mathbf{n}_2$). Значит,
$$a_{x1}a_{x2}+a_{y1}a_{y2}+a_{z1}a_{z2}=0$$
(на плоскости будем иметь $a_{x1}a_{x2}+a_{y1}a_{y2}=0$) или
$$A_1A_2+B_1B_2=0.$$

В случае, когда перпендикулярные прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами, имеем
$$k_2=-\frac{1}{k_1}.$$

Отметим, что условия параллельности или совпадения и перпендикулярности двух прямых являются необходимыми и достаточными.

3.4. Взаимное расположение двух прямых. Две прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ на плоскости могут: А) пересекаться, Б) быть параллельными, В) совпадать. Рассмотрим каждый из этих случаев.

А) Нормальные векторы $\mathbf{n}_1=(A_1;\ B_1)\nparallel\mathbf{n}_2=(A_2;\ B_2)$, то есть
$$\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}.$$

Координаты точки пересечения прямых можно найти, решив систему уравнений этих прямых.

Б)
$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}.$$

В)
$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

Рассмотрим две прямые, заданные в пространстве каноническими уравнениями $\frac{x-x_1}{a_{x1}}=\frac{y-y_1}{a_{y1}}=\frac{z-z_1}{a_{z1}}$ и $\frac{x-x_2}{a_{x2}}=\frac{y-y_2}{a_{y2}}=\frac{z-z_2}{a_{z2}}$.

Если эти прямые параллельные или совпадают, то $\mathbf{a}_1\|\mathbf{a}_2$.

Когда $\mathbf{a}_1\nparallel\mathbf{a}_2$ и $(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2=0$, то прямые пересекаются. В координатах последнее из этих условий имеет вид: $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_{x1} & a_{y1} & a_{z1} \\ a_{x2} & a_{y2} & a_{z2} \end{vmatrix}=0$.

В случае, когда прямые скрещиваются, будем иметь $\mathbf{a}_1 \nparallel \mathbf{a}_2$ и $(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \neq 0$.

3.5. Расстояние между двумя прямыми в пространстве. Пусть заданы две скрещивающиеся прямые уравнениями $\frac{x-x_1}{a_{x1}}=\frac{y-y_1}{a_{y1}}=\frac{z-z_1}{a_{z1}}$ и $\frac{x-x_2}{a_{x2}}=\frac{y-y_2}{a_{y2}}=\frac{z-z_2}{a_{z2}}$. Тогда $\mathbf{a}_1=(a_{x1};\ a_{y1};\ a_{z1})$, $\mathbf{a}_2=(a_{x2};\ a_{y2};\ a_{z2})$ и $\mathbf{r}_1=(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $\mathbf{r}_2=(x_2;\ y_2;\ z_2)$.

Расстояние между ними — это длина их общего перпендикуляра, равная расстоянию от любой точки второй прямой до плоскости, проходящей через первую прямую параллельно второй (рис. 18).

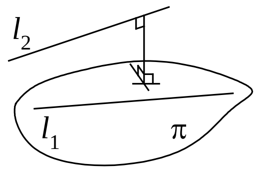

Рис. 18

Это расстояние d находится по формуле

$$d=\frac{|(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2|}{|\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2|},$$

или в координатах

$$d=\frac{\operatorname{mod}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_{x1} & a_{y1} & a_{z1} \\ a_{x2} & a_{y2} & a_{z2} \end{vmatrix}}{\operatorname{mod}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_{x1} & a_{y1} & a_{z1} \\ a_{x2} & a_{y2} & a_{z2} \end{vmatrix}}.$$

Если прямые параллельные, то расстояние между ними можно найти как расстояние от точки, расположенной на одной из них, до другой прямой.

Расстояние между двумя пересекающимися прямыми равно нулю.

Пример 1. Дана прямая $3x-2y+1=0$. Выяснить какие из точек $A(-1;\ -1)$, $B(0;\ 0)$, $C(0{,}5;\ 0)$, $D(3;\ 5)$ принадлежат этой прямой.

Решение. Точка A принадлежит прямой, потому что ее координаты удовлетворяют уравнению прямой: $3\cdot(-1)-2\cdot(-1)+1=0$; точка B не принадлежит прямой, так как $3\cdot0-2\cdot0+1\neq0$; точка C также не принадлежит прямой: $3\cdot0{,}5-2\cdot0+1\neq0$; точка D принадлежит прямой, так как $3\cdot3-2\cdot5+1=0$.

Ответ: точки A и D.

Пример 2. Найти угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $A(1;\ 2)$ и $B(4;\ -2)$.

Решение. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через точки $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$: $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$.

Подставляя в уравнение вместо x_1, y_1, x_2, y_2 координаты точек A и B, получаем $\frac{y-2}{-2-2}=\frac{x-1}{4-1}$, отсюда $3y-6=-4x+4$, или $y=-\frac{4}{3}x+\frac{10}{3}$. Угловой коэффициент $k=-\frac{4}{3}$.

Ответ: $-\frac{4}{3}$.

Пример 3. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $M(1;\ 1)$, $T(-1;\ 2)$.

Решение. Подставляем в общее уравнение прямой координаты данных точек и получаем систему двух уравнений для нахождения коэффициентов уравнения искомой прямой $\begin{cases} A\cdot 1+B\cdot 1+C=0, \\ A\cdot(-1)+B\cdot 2+C=0. \end{cases}$ Складывая эти уравнения, получим равенство $3B+2C=0$, из которого находим $B=-\frac{2}{3}C$. Подставляем затем $-\frac{2}{3}C$ вместо B в первое уравнение и определяем A: $A-\frac{2}{3}C+C=0$, т.е. $A=-\frac{1}{3}C$. Найденные A и B подставляем в общее уравнение прямой $Ax+By+C=0$: $-\frac{1}{3}Cx-\frac{2}{3}Cy+C=0$. Умножаем это равенство на $-\frac{3}{C}$ и находим уравнение искомой прямой: $x+2y-3=0$.

Ответ: $x+2y-3=0$.

Пример 4. Одна прямая проходит через точки $A(-1;\ 0)$, $B(0;\ 2)$, вторая — через точки $C(1;\ 0)$, $D(0;\ 1)$. Найти точку пересечения этих прямых.

Решение. Поступая так же, как и в предыдущем примере, находим уравнения прямых, которые проходят через заданные точки: $2x-y+2=0$, $x+y-1=0$. Так как точка пересечения прямых принадлежит каждой из этих прямых, то координаты ее должны удовлетворять одновременно обоим уравнениям прямых, поэтому имеем следующую систему уравнений $\begin{cases} 2x-y+2=0, \\ x+y-1=0. \end{cases}$ Отсюда находим $x=-\frac{1}{3}$ и $y=\frac{4}{3}$. Значит, данные прямые пересекаются в точке с координатами $\left(-\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$.

Ответ: $\left(-\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$.

Пример 5. Найти площадь S треугольника, образованного прямой $2x+y+2=0$ с осями координат.

Решение. Запишем уравнение данной прямой в отрезках. Для этого перенесем число 2 в правую часть и разделим полученное уравнение на –2: $\frac{2x}{-2}+\frac{y}{-2}=1 \Leftrightarrow \frac{x}{-1}+\frac{y}{-2}=1$. Значит, a=–1, b=–2. Площадь треугольника $S=\frac{1}{2}|a||b|=\frac{1}{2}|-1||-2|=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=1$.

Ответ: 1.

Пример 6. Прямая отсекает на осях координат положительные отрезки, один из которых больше вдвое другого. Составить уравнение прямой в отрезках, если площадь треугольника, образованного прямой с осями координат равна 4.

Решение. Предположим, что b=2a, тогда площадь отсеченного треугольника равна $4=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b=\frac{1}{2}a\cdot 2a=a^2$. Берем a=2, т.к. по условию задачи отрезки положительные. Значит b=4 и прямая в отрезках задается уравнением $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$.

Ответ: $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$.

Упражнения

1. Найти точки пересечения прямой $3x–4y–29=0$ с осями координат и с прямой $2x+5y+19=0$.

2. Площадь треугольника ABC равна 8. Найти координаты вершины C, если она лежит на прямой $3x–y–8=0$ и $A(2; –3)$.

3. Найти координаты точки B, симметричной точке $A(–6; 4)$ относительно прямой $4x–5y+3=0$. *Ответ*: $B(2; –6)$.

4. Основания медиан треугольника есть точки $M_1(3; –4)$, $M_2(2; 1)$, $M_3(5; 3)$. Составить уравнения его сторон.

5. Даны вершины треугольника ABC: $A(3; 5)$, $B(–2; 1)$, $C(1; –1)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины C на медиану, проведенную из вершины B.

6. Составить уравнения биссектрис внутреннего и внешнего углов при вершине A треугольника ABC, если $A(1; –2)$, $B(5; 4)$, $C(–2; 0)$.

7. На оси ординат найти такую точку A, чтобы сумма расстояний от нее до точек $B(1; 2)$ и $C(3; 4)$ была наименьшей.

8. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2; 1)$ и образующей с прямой $2x+3y+4=0$ угол $\frac{\pi}{4}$.

9. Доказать, что для угла φ между прямыми $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ справедлива формула $\mathrm{tg}\varphi=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}$.

10. Даны две вершины треугольника ABC: $A(6; 4)$, $B(–10; 2)$. Найти координаты третьей вершины C, если его высоты пересекаются в точке $N(5; 2)$.

11. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(1; 6)$ параллельно вектору $\mathbf{a}=(2; 9)$. *Ответ*: $x=1+2t$, $y=6+9t$.

12. Составить уравнения сторон равнобедренной трапеции, если середины ее оснований имеют координаты $E(1; 1)$ и $F(2; 8)$, а точки $M(–15; 14)$ и $N(4; –3)$ лежат на боковых сторонах.

13. Найти на прямой $x+y–4=0$ точку, из которой отрезок AB виден под углом $\frac{\pi}{4}$, если $A(0; 2)$, $B(3; 3)$.

14. Найти косинус того угла между прямыми $y=–0{,}2x$ и $10x+2y+1=0$, в котором лежит точка $A(1; 1)$.

15. Составить уравнения касательных к окружности с центром $C(1; 1)$ и радиусом 3, которые параллельны прямой $5x–12y=0$.

16. Дана прямая $x+8y–7=0$. Составить ее:

а) уравнение в отрезках;

б) уравнение с угловым коэффициентом;

в) каноническое уравнение;

г) параметрические уравнения;

д) нормальное уравнение.

17. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $A(3; 2; –2)$ и пересекающей ось Oy под прямым углом. *Ответ*: $\frac{x-3}{3}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+2}{-2}$.

18. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M(1; 2; 3)$ и перпендикулярной векторам $\mathbf{n}_1=(2; 3; 1)$ и $\mathbf{n}_2=(3; 1; 2)$.

19. Составить уравнения стороны AB параллелограмма $ABCD$, если известно, что $C(–2; 3; –5)$, $D(0; 4; –7)$ и точка пересечения диагоналей $E(1; 2; –3{,}5)$.

20. При каких значениях a и b прямые $ax+8y+b=0$ и $2x+ay–1=0$:

а) параллельные;

б) совпадают;

в) перпендикулярные;

г) имеют одну общую точку?

21. Через точку $A(3; 4)$ проведена прямая, отсекающая от координатного угла треугольник, площадь которого равна 3. Найти точки пересечения этой прямой с осями координат.

22. Доказать, что через точку $A(4; –5)$ невозможно провести прямую на расстоянии 12 от точки $B(–2; 3)$.

23. Доказать, что прямая $2x+y+3=0$ пересекает отрезок с концами в точках $A(3; 7)$ и $B(–5; 1)$.

24. Найти точки пересечения прямой, проходящей через точки $A(12; –6; 1)$ и $B(–6; 6; –5)$, с координатными плоскостями.

25. Даны вершины треугольника *ABC*: *A*(4; –7; –2), *B*(–5; 2; 3), *C*(3; 6; –7). Составить канонические уравнения его медианы, проведенной из вершины *A*.

26. Даны вершины треугольника *ABC*: *A*(3; –1; –1), *B*(–5; 14; –3), *C*(1; 2; –7). Составить параметрические уравнения биссектрисы его внутреннего угла при вершине *B*.

27. Даны вершины треугольника *ABC*: *A*(5; 1; –7), *B*(1; –2; –4), *C*(3; 1; –3). Составить параметрические уравнения перпендикуляра, опущенного из вершины *B* на его высоту (продолжение высоты), проведенную из вершины *A*.

28. При каком значении *m* прямые $\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{4}$ и $\frac{x-3}{m}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-7}{2}$ пересекаются? Найти координаты точки пересечения этих прямых.

29. Составить уравнения прямой, проходящей через точку *A*(–4; –5; 3) и пересекающей прямые $\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{-1}$ и $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-5}$.

30. Составить канонические уравнения общего перпендикуляра двух прямых, заданных параметрическими уравнениями $x=-7+3t$, $y=4-2t$, $z=4+3t$ и $x=1+t$, $y=-8+2t$, $z=-12-t$.

31. Найти расстояние от точки *M*(1; –1; –2) до прямой $\frac{x+3}{-3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-8}{2}$.

32. Найти расстояние между прямыми $\frac{x+5}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-1}{-2}$ и $x=9+6t$, $y=-2t$, $z=2-t$.

33. Выяснить, лежат ли в одной плоскости прямые $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{4}$ и $x=7+3t$, $y=2+2t$, $z=1-2t$.

34. Стороны треугольника лежат на прямых $x+5y-7=0$, $7x+y+19=0$, $3x-2y-4=0$. Найти его периметр.

35. Дана прямая $2x+9y-10=0$. Найти угловой коэффициент прямой:
а) параллельной дано прямой;
б) перпендикулярной к данной прямой.

36. Установить, пересекаются ли в одной точке три прямые $y=3x+2$, $4x-5y+5=0$, $2x+3y-1=0$.

37. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку *A*(1; 2; –1) параллельно вектору **a**=(2; –3; 0).

38. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку *A*(2; 0; 3) параллельно прямой $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{0}=\frac{z+1}{-1}$. *Ответ*: $x=2+5t$, $y=0$, $z=3-t$.

39. Составить уравнение прямой:

а) имеющей угловой коэффициент 2 и отсекающей на оси ординат отрезок длиной 3;
б) проходящей через точку $A(1; 8)$ и имеющей угловой коэффициент, равный –7;
в) проходящей через точку $A(–2; 3)$ параллельно оси Ox;
г) проходящей через точку $A(3; –2)$ перпендикулярно оси Oy;
д) проходящей через две точки $A(4; 5)$ и $B(–4; –6)$;
е) отсекающей на осях Ox и Oy отрезки, соответственно равные 4 и 6.

40. В треугольнике ABC сторона AB лежит на прямой $x–2y+7=0$. Медианы треугольника, выходящие из вершин A и B, имеют уравнения $2x+y–11=0$ и $x+y–5=0$ соответственно. Найти координаты вершин треугольника ABC.

41. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(–2; 3)$ и параллельной биссектрисе второго координатного угла.

42. Найти вершины треугольника, заданного своими сторонами: $x–y=0$, $2x+3y+5=0$, $x+2y+6=0$.

43. Построить прямые $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ и $-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1$.

44. Выяснить, являются ли перпендикулярными прямые $3x–y–3=0$ и $x+3y–17=0$. *Ответ*: являются.

45. Найти угол между прямыми $5y+2x–15=0$, $7y–3x–2=0$.

46. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(3; 4)$ параллельно прямой $y–5x–3=0$.

47. Через точку пересечения прямых $x+2y+2=0$, $3x+4y+9=0$ проведен перпендикуляр к прямой $2x+3y–6=0$. Написать уравнение перпендикуляра.

48. Найти площадь треугольника, образованного прямой $4x+5y–2=0$ и осями координат.

49. Найти расстояние от точки $A(–5; 2)$ до прямой $4x+3y–16=0$.

50. Найти точку пересечения прямых $3x–2y–4=0$, $x+3y–5=0$.

4. Поверхности первого порядка

4.1. Виды уравнений плоскости. Любой ненулевой вектор **n**, перпендикулярный плоскости, называется *нормальным вектором* этой плоскости.

Векторные уравнения плоскости:
1) $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$,
2) $\mathbf{nr}+D=0$,
где $\mathbf{r}=\overrightarrow{OM}$ — радиус-вектор произвольной точки M плоскости; $\mathbf{r}_0=\overrightarrow{OM_0}$ – радиус-вектор заданной точки M_0 на плоскости; α и β ($-\infty<\alpha<+\infty$; $-\infty<\beta<+\infty$) — некоторые параметры; **a** и **b** — ненулевые векторы, коллинеарные плоскости, и $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$; $D=-\mathbf{nr}_0$ (рис. 19).

Уравнение

$$Ax+By+Cz+D=0$$

называется *общим уравнением плоскости*. Тройка чисел (A; B; C) есть координаты нормального вектора этой плоскости.

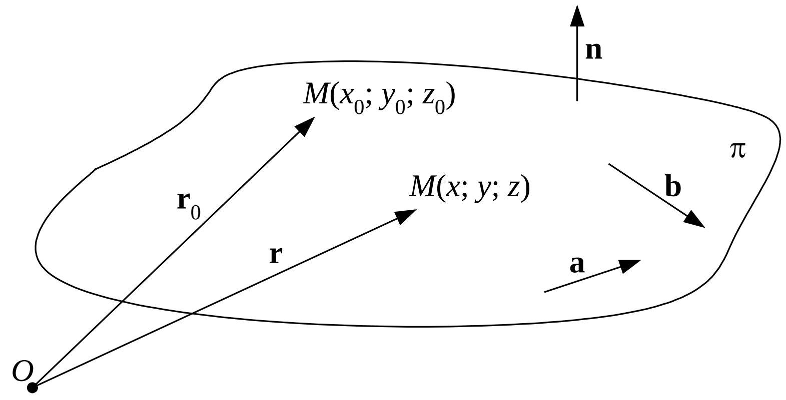

Рис. 19

Уравнение *плоскости, проходящей через данную точку* $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ *и имеющей данный нормальный вектор* $\mathbf{n}=(A;\ B;\ C)$ имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Если *плоскость проходит через три данные точки* $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $M_3(x_3;\ y_3;\ z_3)$, не лежащие на одной прямой, то ее уравнение записывается в виде определителя

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

В частности, если плоскость пересекает оси координат Ox, Oy, Oz в точках $M_1(a;\ 0;\ 0)$, $M_2(0;\ b;\ 0)$, $M_3(0;\ 0;\ c)$ соответственно (рис. 20), то после подстановки координат этих точек в последнее уравнение плоскости, раскрытия определителя и преобразования получаем *уравнение плоскости в отрезках*

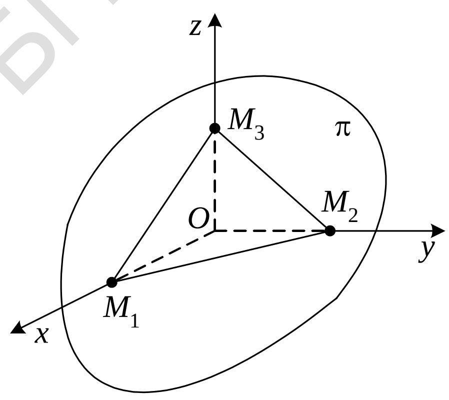

Рис. 20

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Нормальное уравнение плоскости в векторной форме имеет вид

$$\mathbf{rn}^0-p=0.$$

Здесь $\mathbf{n}^0$ — нормальный вектор плоскости, модуль которого равен единице, p — расстояние от начала координат до плоскости.

Нормальное уравнение плоскости в координатной форме имеет вид

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы вектора $\mathbf{n}^0$.

Для того, чтобы общее уравнение плоскости привести к нормальному виду, необходимо все его члены умножить на *нормирующий множитель*

$$\mu=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Знак множителя μ берется противоположным знаку свободного члена D. Если $D=0$, то знак μ можно выбрать произвольно.

4.2. Расстояние от точки до плоскости. Если плоскость задана нормальным уравнением в векторной форме $\mathbf{rn}^0-p=0$ и $\mathbf{r}_1$ — радиус-вектор данной точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, которая не принадлежит этой плоскости, то расстояние d от этой точки до данной плоскости находится по формуле

$$d=|\mathbf{r}_1\mathbf{n}^0-p|.$$

В координатной форме последняя формула принимает вид

$$d=|x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-p|.$$

Когда плоскость задана общим уравнением, расстояние находится по формуле

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

4.3. Угол между двумя плоскостями. Две плоскости $\mathbf{nr}_1+D_1=0$ и $\mathbf{nr}_2+D_2=0$ при пересечении образуют четыре двугранных угла, величины которых парами равны между собой. *Углом* φ *между двумя плоскостями* называют величину наименьшего из двух двугранных углов. Отсюда $\varphi\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Величина этого угла находится как величина угла между нормальными векторами этих плоскостей:

$$\cos\varphi=\frac{\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_1|}.$$

Если плоскости заданы общими уравнениями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, то последняя формула принимает вид

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Условие перпендикулярности двух плоскостей:

$$\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2=0 \text{ или } A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

Условие параллельности двух плоскостей:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}.$$

Условие пересечения двух плоскостей:

$$\mathbf{n}_1 \nparallel \mathbf{n}_2.$$

Условие совпадения двух плоскостей:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}.$$

4.4. Общие уравнения прямой в пространстве. Две плоскости, которые пересекаются, определяют прямую в пространстве. Если плоскости заданы векторными уравнениями $\mathbf{nr}_1+D_1=0$ и $\mathbf{nr}_2+D_2=0$, то *общие уравнения прямой в векторной форме* имеют вид системы

$$\begin{cases}\mathbf{rn}_1+D_1=0;\\ \mathbf{rn}_2+D_2=0.\end{cases}$$

В случае, когда плоскости заданы общими уравнениями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, то *общие уравнения прямой* — это система

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Направляющий вектор **a** прямой (рис. 21), заданной последней системой, определяется по формуле

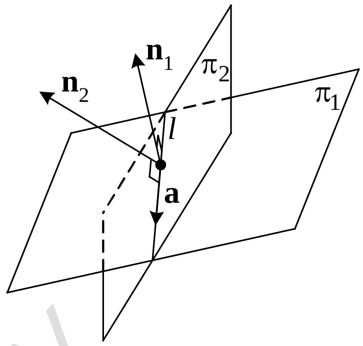

Рис. 21

$$\mathbf{a} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix},$$

а координаты какой-либо точки $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, лежащей на этой прямой, можно найти как решение этой системы. Тогда общие уравнения прямой можно записать в канонической форме

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

4.5. Взаимное расположение прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью. Пусть задана прямая и плоскость векторными уравнениями $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+t\mathbf{a}$ и $\mathbf{nr}+D=0$ соответственно. Возможны следующие случаи их взаимного расположения:

А) прямая и плоскость *пересекаются*:

$$\mathbf{na} \neq 0;$$

(в частности, прямая и плоскость *взаимоперпендикулярные*, если $\mathbf{n} \| \mathbf{a}$)

Б) прямая и плоскость *параллельные*:

$$\begin{cases} \mathbf{na} = 0; \\ \mathbf{r}_0\mathbf{n} + D \neq 0; \end{cases}$$

В) *прямая принадлежит плоскости*:

$$\begin{cases} \mathbf{na} = 0; \\ \mathbf{r}_0\mathbf{n} + D = 0. \end{cases}$$

Углом между прямой и плоскостью называется угол φ, образованный данной прямой и ее проекцией на плоскость (рис. 22). Величина этого угла φ вычисляется по формуле

$$\sin\varphi = |\cos\psi| = \frac{|\mathbf{na}|}{|\mathbf{n}||\mathbf{a}|},$$

где ψ — угол между векторами **n** и **a**.

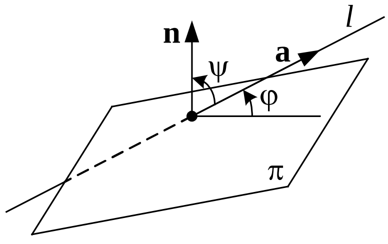

Рис. 22

Если прямая задана каноническими уравнениями $\frac{x-x_0}{a_x}=\frac{y-y_0}{a_y}=\frac{z-z_0}{a_z}$, а плоскость — общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, то

$$\sin\varphi=\frac{|Aa_x+Ba_y+Ca_z|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a_x^2+b_y^2+c_z^2}}.$$

Для случаев их взаимного расположения будем иметь:

А) прямая и плоскость *пересекаются*:

$$Aa_x+Ba_y+Ca_z\neq 0;$$

(в частности, прямая и плоскость *взаимоперпендикулярные*, если $\frac{A}{a_x}=\frac{B}{a_y}=\frac{C}{a_z}$)

Б) прямая и плоскость *параллельные*:

$$\begin{cases} Aa_x+Ba_y+Ca_z=0; \\ Ax_0+By_0+Cz_0\neq 0; \end{cases}$$

В) *прямая принадлежит плоскости*:

$$\begin{cases} Aa_x+Ba_y+Ca_z=0; \\ Ax_0+By_0+Cz_0=0. \end{cases}$$

Упражнения

1. Дана точка $M(1;\ 2;\ 3)$. Составить уравнения плоскостей, проходящих через точку M и
а) параллельных осям координат;
б) через оси координат;
в) перпендикулярных к осям координат.

2. Составить уравнения плоскостей, проходящих через ось Oz и делящих пополам двугранные углы, образованные координатными плоскостями Oxz и Oyz.

3. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;\ 3;\ -5)$ и параллельной векторам $\mathbf{a}=(-5;\ 6;\ 4)$ и $\mathbf{b}=(2;\ -1;\ 0)$. *Ответ*: $4x+8y-7z-67=0$.

4. Составить уравнение плоскости, отсекающей на осях Ox и Oy отрезки, соответственно равные 5 и 7, и проходящей через точку $M(1;\ 1;\ 2)$.

5. Найти объем тетраэдра, образованного координатными плоскостями и плоскостью, проходящей через точку $M(3;\ 5;\ -7)$ и отсекающей на осях координат равные отрезки.

6. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и равноудаленной от точек $M(2;\ 7;\ 3)$ и $N(-1;\ 1;\ 0)$.

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $x=2+3t$, $y=-1+6t$, $z=4t$ и параллельной прямой $x=-1+2t$, $y=3t$, $z=-t$. *Ответ*: $x-3y-3z+11=0$.

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-2;\ 3;\ 0)$ и прямую $x=1$, $y=2+t$, $z=2-t$.

9. Установить, какие из следующих пар плоскостей пересекаются, параллельные или совпадают:

а) $2x-y-z-3=0$, $10x-5y-5z-15=0$;

б) $3x-2y-3z+5=0$, $9x-6y-9z-5=0$;

в) $2x+3y+4z-12=0$, $3x-6y+1=0$.

10. Установить, лежит ли данная прямая в данной плоскости, параллельна плоскости или пересекает ее:

а) $\dfrac{x-7}{5}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z-5}{4}$, $3x-y+2z-5=0$; б) $\dfrac{x-13}{8}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-4}{3}$, $x+2y-4z+1=0$;

в) $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z}{3}$, $3x-3y+2z-5=0$; г) $\begin{cases} x+2y+3z+8=0, \\ 5x+3y+z-16=0, \end{cases}$ $2x-y-4z-24=0$;

д) $\begin{cases} 2x+3y+6z-10=0, \\ x+y+z+5=0, \end{cases}$ $y+4z+17=0$.

11. Установить, какие из следующих пар прямых скрещиваются, параллельные, пересекаются или совпадают:

а) $\begin{cases} x=1+2t, \\ y=7+t, \\ z=3+4t, \end{cases}$ $\begin{cases} x=6+3t, \\ y=-1-2t, \\ z=-2+t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x=9t, \\ y=5t, \\ z=-3+t, \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-3y-3z-9=0, \\ x-2y+z+3=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x+3y=0, \\ x+z-8=0, \end{cases}$ $\begin{cases} z-4=0, \\ 2x+3z-7=0; \end{cases}$ г) $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+8}{-4}=\dfrac{z+3}{-3}$, $\begin{cases} x+y-z=0, \\ 2x-y+2z=0. \end{cases}$

12. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $6x-y+z=0$, $5x+3z-10=0$ и параллельной оси Ox.

13. Составить нормальное уравнение плоскости, если точка $P(2;\ 6;\ -4)$ является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.

14. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $B(6;\ 0;\ 5)$ и перпендикулярной к прямой, проходящей через точки $A(3;\ -2;\ 1)$ и B.

15. Найти точку, симметричную точке $A(1;\ 2;\ 3)$ относительно плоскости $2x-3y+5z-68=0$.

16. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и образующей с плоскостью $2x+y-\sqrt{5}\,z-7=0$ угол $\dfrac{\pi}{3}$.

17. Найти угол между прямой $\begin{cases} x+y-z=0, \\ 2x-3y+z=0 \end{cases}$ и плоскостью $3x+5y-4z+2=0$.

18. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x+7}{-2}=\dfrac{y-6}{3}=\dfrac{z}{1}$ и образующей с прямой $\begin{cases} x-y+z=0, \\ x-y+2z=0 \end{cases}$ угол $\dfrac{\pi}{3}$.

19. Найти длину высоты, опущенной из вершины D тетраэдра $ABCD$, если $A(0; 0; 2)$, $B(1; 1; 0)$, $C(3; 0; 5)$, $D(4; 1; 2)$.

20. Составить уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями $7x+y-6=0$ и $3x+5y-4z+1=0$.

21. Из точки $A(3; -2; 5)$ на координатные оси опущены перпендикуляры. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через их основания. *Ответ*: $10x-15y+6z-30=0$.

22. Составить уравнение плоскости, отсекающей на осях координат Ox, Oy и Oz отрезки, пропорциональные числам 1, 2 и 3 соответственно, и отстоящей от точки $M(3; 5; 7)$ на расстоянии 4.

23. Найти наименьшее расстояние между прямыми $\begin{cases} x+2y-z+1=0, \\ 2x-3y+z-4=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y+z+9=0, \\ 2x-y-z=0. \end{cases}$

24. Привести к нормальному виду уравнение плоскости $2x+3y-6z+21=0$.

25. Из точки $A(2; -3; -2)$ на координатные плоскости опущены перпендикуляры. Составить уравнение плоскости, проходящей через их основания.

5. Линии второго порядка

5.1. Окружность. *Окружностью* называется множество точек плоскости, расположенных на данном расстоянии от одной и той же точки, которая называется *центром*.

Векторное уравнение окружности имеет вид

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|=R,$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор произвольной точки $M(x; y)$ окружности; $\mathbf{r}_1$ — радиус-вектор центра $C(x_1; y_1)$ окружности; R — радиус окружности (рис. 23).

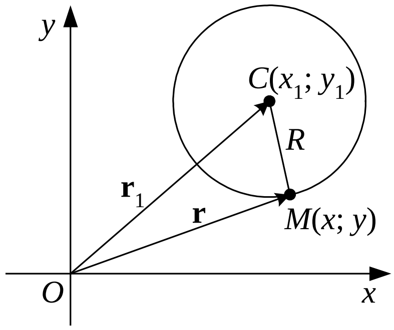

Рис. 23

В *координатной форме* окружность задается уравнением

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=R^2.$$

В частности, если центр окружности C совпадает с началом координат, последнее уравнение принимает вид

$$x^2+y^2=R^2.$$

5.2. Эллипс. *Эллипсом* называется множество точек плоскости, сумма расстояний от любой из них до двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, равная $2a$, большая расстояния $2c$ между фокусами.

Векторное уравнение эллипса:

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|+|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|=2a,$$

где **r** — радиус-вектор произвольной точки $M(x; y)$ эллипса; $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ — радиус-векторы фокусов эллипса.

Когда координатная ось Ox проходит через фокусы, а координатная ось Oy — через середину отрезка между фокусами (рис. 24), получаем *каноническое* (простейшее) *уравнение* эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $b^2=a^2-c^2$.

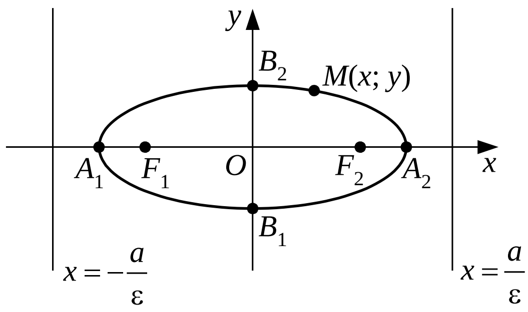

Рис. 24

Координатные оси Ox, Oy и начало координат являются *осями* и *центром симметрии* эллипса соответственно.

Точки пересечения эллипса с осями координат называются *вершинами* эллипса. Таких точек у эллипса четыре: $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$.

Координаты фокусов эллипса: $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$.

Отрезок $OA_1=OA_2=a$ называется *большой* (*фокальной*) *полуосью* эллипса, а отрезок $OB_1=OB_2=b$ — *малой* (*фокальной*) *полуосью*. Величины $2a$ и $2b$ называются *большой* и *малой осями* эллипса соответственно.

Эксцентриситетом ε эллипса называется отношение расстояния между фокусами к большой оси:

$$\varepsilon=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}.$$

Так как $c<a$, то $\varepsilon\in[0; 1)$.

Директрисами эллипса называются прямые, заданные уравнениями

$$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}.$$

Отношение расстояний от любой точки эллипса до фокуса и соответствующей директрисы есть величина постоянная и равная эксцентриситету эллипса.

Величина $p=\dfrac{b^2}{a}$ называется *параметром* эллипса.

Уравнение эллипса *в полярной системе координат* имеет вид

$$r=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi},$$

где (r, φ) — полярные координаты любой точки эллипса.

5.3. Гипербола. *Гиперболой* называется множество точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний от любой из них до двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, равная $2a$, меньшая расстояния $2c$ между фокусами.

Векторное уравнение гиперболы:

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|+|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|=\pm 2a,$$

где **r** — радиус-вектор произвольной точки $M(x;\, y)$ гиперболы; $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ — радиус-векторы фокусов гиперболы.

При выборе прямоугольной системы координат как и в случае с эллипсом (рис. 25), *каноническое уравнение* гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $b^2=c^2-a^2$.

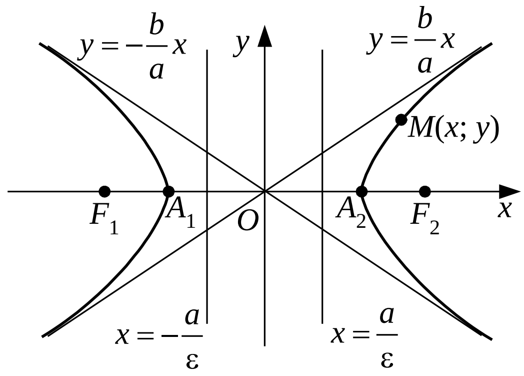

Рис. 25

Оси Ox и Oy являются *осями симметрии* гиперболы, начало координат — *центром симметрии*.

Гипербола, заданная уравнением $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, называются *сопряженной* с гиперболой $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Гипербола пересекает ось Ox в двух точках: $A_1(-a;\, 0)$ и $A_2(a;\, 0)$, которые называются *вершинами*. Ось Ox называется *действительной осью* гиперболы. С осью Oy гипербола не имеет общих точек. Эта ось называется *мнимой*.

Координаты фокусов: $F_1(-c;\, 0)$, $F_2(c;\, 0)$.

Числа a и b ($2a$ и $2b$) называются *действительной* и *мнимой полуосями* (*осями*) гиперболы соответственно.

Прямые

$$y=\pm\frac{b}{a}x$$

называются *асимптотами* гиперболы.

Эксцентриситетом ε гиперболы называется отношение расстояния между фокусами к действительной оси:

$$\varepsilon=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}.$$

Так как $c>a$, то $\varepsilon\in(1;\, +\infty)$.

Прямые

$$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$$

называются *директрисами* гиперболы.

Отношение расстояний от любой точки гиперболы до фокуса и соответствующей директрисы есть величина постоянная и равная эксцентриситету гиперболы.

Величина $p=\frac{b^2}{a}$ называется *параметром* гиперболы.

Уравнение гиперболы для правой ветви *в полярной системе координат* имеет вид

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos\varphi},$$

для левой — $r = -\dfrac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi}$.

5.4. Парабола. *Параболой* называется множество точек плоскости, расположенных на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой *фокусом*, и данной прямой, не проходящей через фокус. Эта прямая называется *директрисой* параболы.

Величина p, равная расстоянию от фокуса до директрисы, называется *параметром* параболы.

Векторное уравнение параболы:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| = p + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\mathbf{e},$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор произвольной точки $M(x;\ y)$ параболы; $\mathbf{r}_1$ — радиус-вектор фокуса; $\mathbf{e}$ — единичный вектор, перпендикулярный директрисе.

В случае, когда координатная ось Ox проходит через фокус перпендикулярно директрисе, а начало координат совпадает с серединой перпендикуляра, опущенного из фокуса на директрису (рис. 26), *каноническое уравнение* параболы имеет вид

$$y^2 = 2px.$$

Координаты фокуса $F\left(\dfrac{p}{2};\ 0\right)$, уравнение директрисы $x = -\dfrac{p}{2}$.

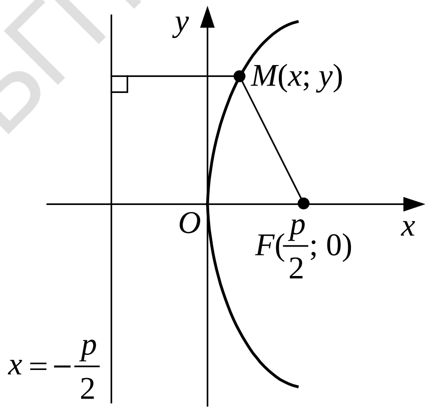

Рис. 26

Парабола *симметрична* относительно оси Ox. Точка пересечения параболы с осью симметрии называется *вершиной* параболы.

Уравнение параболы *в полярной системе координат* имеет вид

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos\varphi},$$

где $\varepsilon = 1$ — *эксцентриситет* параболы.

Отметим, что уравнения

$$y^2 = -2px,\ x^2 = 2py,\ x^2 = -2py$$

определяют параболы, иначе ориентированные относительно осей координат.

Замечание. Уравнения вида

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

определяют соответственно эллипс, гиперболу и параболу, которые параллельно смещены относительно системы координат Oxy таким образом, что центр эллипса и гиперболы и вершина параболы находятся в точке $C(x_0;\, y_0)$.

Пример 1. Найти центр и радиус окружности $2x^2+2y^2+8x+6y-25=0$.

Решение. Сначала разделим данное уравнение на 2: $x^2+y^2+4x+3y-\frac{25}{2}=0$, затем дополним выражения x^2+4x и y^2+3y до полных квадратов, прибавив к первому выражению число 4 и ко второму число $\frac{9}{4}$, добавляя эти же числа к правой части. В результате придем к уравнению $(x^2+4x+4)+(y^2+3y+\frac{9}{4})-\frac{25}{2}=$ $=0+4+\frac{9}{4}$ $\Leftrightarrow$ $(x+2)^2+(y+\frac{3}{2})^2-\frac{25}{2}=0+4+\frac{9}{4}$ $\Leftrightarrow$ $(x+2)^2+(y+\frac{3}{2})^2=\frac{75}{4}$ $\Leftrightarrow$ $\sqrt{\frac{75}{4}}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

Значит, центром окружности является точка $\left(-2;-\frac{3}{2}\right)$, радиус окружности равен $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\left(-2;-\frac{3}{2}\right)$, $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

Пример 2. Выяснить, как расположена прямая относительно эллипса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$: пересекает, касается или проходит вне его, если прямая задана одним из уравнений а) $3x+4y+12=0$, б) $\sqrt{3}x+4y-8\sqrt{3}=0$, в) $y=-4$.

Решение. Если прямая имеет две общие точки с эллипсом, то она пересекает его; если же одну, то она касается эллипса; проходит вне эллипса, если не имеет ни одной общей точки с ним. Для нахождения общих точек нужно решить систему, состоящую из уравнения прямой и уравнения эллипса.

А) Решим систему $\begin{cases} 3x+4y+12=0, \\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1. \end{cases}$ Из первого уравнения находим $y=-\frac{3}{4}x-3$ и подставляем его в первое уравнение: $\frac{x^2}{16}+\frac{\left(-\frac{3}{4}x-3\right)^2}{9}=1$; $x^2+4x=0$; $x_1=0$, $x_2=-4$. Тогда $y_1=-\frac{3}{4}x_1-3=-3$, $y_2=-\frac{3}{4}x_2-3=0$. Значит, прямая $3x+4y+12=0$ имеет две общие точки $A(0;\,-3)$, $B(-4;\,0)$ с эллипсом, т.е. пересекается с ним.

Б) Система $\begin{cases} \sqrt{3}x+4y-8\sqrt{3}=0, \\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1 \end{cases}$ имеет единственное решение $C(2;\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2})$ (проверьте самостоятельно!). Отсюда делаем заключение, что эта прямая является касательной к эллипсу.

В) Система $\begin{cases} y=-4, \\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1 \end{cases}$ не имеет решений, так как равенство $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{(-4)^2}{9}=1$ невозможно. Следовательно, эта прямая проходит вне эллипса.

Ответ: а) пересекает; б) касается; в) проходит вне эллипса.

Пример 3. Даны фокусы эллипса $F_1(0;\ 0)$, $F_2(1;\ 1)$. Пользуясь определением эллипса, составить его уравнение, если большая ось его равна 2.

Решение. Пусть $M(x;\ y)$ — произвольная точка на эллипсе. Вычисляем расстояния от точки M до фокусов: $MF_1=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x)^2+(y)^2}$; $MF_2=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$.

Сумма этих расстояний равна по определению эллипса длине большой оси: $\sqrt{(x)^2+(y)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=2$. Запишем это равенство в виде удобном для возведения в квадрат:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=2-\sqrt{(x)^2+(y)^2}.$$

Возводим левую и правую части данного равенства в квадрат и приходим к равенству $2\sqrt{(x)^2+(y)^2}=x+y+1$, которое также возводим в квадрат. В результате получим уравнение искомого эллипса $3x^2+3y^2-2xy-2x-2y-1=0$.

Ответ: $3x^2+3y^2-2xy-2x-2y-1=0$.

Пример 4. Выяснить, какую кривую второго порядка задает уравнение $xy+x-2y-1=0$.

Решение. Запишем это уравнение в более простой форме, раскладывая его левую часть на линейные множители: $xy+x-2y-1=(x-2)\cdot(y+1)+1$. Здесь $x_0=2$, $y_0=-1$, $a=-1$. Приведенное уравнение задает равностороннюю гиперболу, центром которой является точка $(x_0;\ y_0)=(2;\ -1)$, асимптотами — прямые $x=2$ и $y=-1$.

Ответ: гипербола.

Пример 5. Преобразовать уравнение $9x^2-4y^2-18x-8y-31=0$ к каноническому виду.

Решение. Выделяем полные квадраты: $(9x^2-18x)-(4y^2+8y)-31=0$; $9(x^2-2x)-4(y^2+2y)-31=0$; $9((x^2-2x+1)-1)-4((y^2+2y+1)-1)-31=0$; $9(x-1)^2-4(y+1)^2-36=0$; $\dfrac{(x-1)^2}{4}-\dfrac{(y+1)^2}{9}=1$. Значит, действительная полуось гиперболы равна $a=2$, мнимая полуось равна $b=3$, центр находится в точке $(1;\ -1)$.

Ответ: $\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y+1)^2}{9}=1$.

Пример 6. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Ox и отсекающей от прямой $y=x$ хорду длиной $4\sqrt{2}$.

Решение. Искомая парабола задается уравнением $y^2=2px$. Найдём точки пересечения ее и прямой $y=x$, для чего решим систему $\begin{cases} y=x, \\ y^2=2px. \end{cases}$ Получаем $x=0$ и $x=2p$. Для $x=0$ из первого уравнения системы находим $y=0$. Таким же способом находим, что $y=2p$, если $x=2p$. Таким образом, прямая и парабола пересекаются в двух точках $O(0; 0)$, $A(2p; 2p)$. Так как длина хорды OA равна $4\sqrt{2}$, то $\sqrt{(0-2p)^2+(0-2p)^2}=4\sqrt{2}$; $\sqrt{8p^2}=4\sqrt{2}$; $|p|=2$.

Беря $p=2$, получим параболу $y^2=4x$, при $p=-2$ имеем параболу $y^2=-4x$.

Ответ: $y^2=\pm 4x$.

Пример 7. Представить в каноническом виде кривую $4y^2-12y+6x-11=0$.

Решение. Выделяем полный квадрат относительно y: $4y^2-12y+6x-11=$ $=4(y^2-3y+\frac{9}{4})=-6x+11+9=-6x+20 \Leftrightarrow \left(y-\frac{3}{2}\right)^2=-\frac{3}{2}\left(x-\frac{10}{3}\right)$. Отсюда следует, что мы имеем параболу вида $(y-y_0)^2=2p(x-x_0)^2$.

Ответ: $\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=-\frac{3}{2}\left(x-\frac{10}{3}\right)$.

Пример 8. На параболе $y^2=32x$ найти точку, удаленную на 2 от прямой $4x+3y+10=0$.

Решение. Расстояние от точки $(x; y)$, находящейся на параболе, до прямой равно двум, что означает $\frac{|4x+3y+10|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2 \Leftrightarrow |4x+3y+10|=10$. Это уравнение по свойству модуля распадается на два уравнения: $4x+3y+10=10 \Leftrightarrow 4x+3y=0$; $4x+3y+10=-10 \Leftrightarrow 4x+3y+20=0$.

Присоединяя к этим уравнениям уравнение параболы, получим две системы для нахождения искомых точек: $\begin{cases} y^2=32x, \\ 4x+3y=0, \end{cases}$ $\begin{cases} y^2=32x, \\ 4x+3y+20=0. \end{cases}$ Первой системе удовлетворяют две точки: $O(0; 0)$, $A(18; -24)$. Вторая система решений не имеет. (Решите эти системы!) Следовательно, на параболе есть две точки O и A, находящиеся от заданной прямой на расстоянии 2.

Ответ: (0; 0), (18; –24).

Упражнения

1. Составить уравнение окружности, описанной около треугольника, стороны которого лежат на прямых $x-3y+1=0$, $7x+4y+7=0$, $9x-2y-41=0$.

2. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(-1; 2)$ и $B(1; 4)$, если ее центр лежит на прямой $2x-y-3=0$. *Ответ*: $(x-2)^2+(y-1)^2=10$.

3. Составить уравнение хорды окружности $x^2+y^2=49$, делящейся в точке $A(1; 2)$ пополам.

4. Составить уравнение окружности, симметричной с окружностью $x^2+y^2-2x-4y+4=0$ относительно прямой $x-y-3=0$.

5. Составить уравнения окружностей, проходящих через начало координат и касающихся двух прямых $x+2y-9=0$ и $2x-y+2=0$.

6. При каких значениях углового коэффициента k прямая $y=kx$ и окружность $x^2+y^2=10x-16$:

а) пересекаются;

б) имеют одну общую точку;

в) не имеют общих точек?

7. Составить уравнение касательной к окружности $x^2+y^2=5$ в точке $A(\sqrt{2}; \sqrt{3})$. *Ответ*: $\sqrt{2}x+\sqrt{3}y-5=0$.

8. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(1; 1)$ и $B(0; 2)$ и касающейся окружности $x^2+y^2-10x-10y+34=0$.

9. При каком необходимом и достаточном условии уравнение $Ax^2+Ay^2+2Dx+2Ey+F=0$ определяет действительную окружность?

10. Найти площадь окружности с центром в точке $C(-2; 4)$ и касающейся прямой $x-8y+7=0$.

11. Составить уравнение эллипса, если две его вершины находятся в точках $A_1(-8; 0)$, $A_2(8; 0)$, а фокусы — в точках $F_1(-5; 0)$, $F_2(5; 0)$.

12. Дан эллипс $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Найти его полуоси и расстояние между фокусами. Сделать рисунок.

13. Составить уравнение эллипса, если фокусы его находятся в точках $F_1(-3; 0)$, $F_2(3; 0)$, а длина большой оси равна 12. *Ответ*: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$.

14. Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса $x^2+y^2=400$.

15. Какую линию определяет уравнение $4x^2+9y^2-8x-36y+4=0$?

16. Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, если:

а) полуоси равны 5 и 3;

б) большая ось равна 10, а расстояние между фокусами равно 6;

в) расстояние между фокусами равно 6 и эксцентриситет равен 0,6;

г) большая ось равна 20, а эксцентриситет равен 0,6;

д) малая ось равна 10, а эксцентриситет равен $\frac{12}{13}$;

е) расстояние между директрисами равно 5 и расстояние между фокусами равно 4;

ж) малая ось равна 6, а расстояние между директрисами равно 13;

з) расстояние между директрисами равно 32 и эксцентриситет равен 0,5.

17. Дан эллипс $9x^2+25y^2=225$. Найти полуоси, оси, координаты фокусов и вершин, эксцентриситет, уравнения директрис этого эллипса.

18. Найти координаты точек эллипса $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$, расположенных на расстоянии 14 от его правого фокуса.

19. Определить, при каких значениях m прямая $x+y=m$:

а) пересекает эллипс $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$;

б) касается его;

в) проходит вне этого эллипса.

20. Составить уравнения касательных к эллипсу $x^2+4y^2=20$:

а) параллельных прямой $2x–2y–13=0$;

б) перпендикулярных к прямой $3x+2y+7=0$.

21. Установить, что уравнение $r=\frac{144}{13-\cos\varphi}$ определяет эллипс, и найти его полуоси.

22. На эллипсе $r=\frac{12}{3-\sqrt{2}\cos\varphi}$ найти точки, полярный радиус которых равен 6.

23. Составить каноническое уравнение эллипса $r=\frac{12}{2-\cos\varphi}$.

24. Составить полярное уравнение эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, если направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси абсцисс, а полюс находится в левом фокусе эллипса.

25. Составить полярное уравнение эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, если направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси абсцисс, а полюс находится в левом фокусе эллипса.

26. Найти координаты фокусов и вершин гиперболы $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$. Сделать рисунок.

27. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично начала системы координат, если:

а) ее оси $2a=10$ и $2b=8$;

б) расстояние между фокусами равно 6 и эксцентриситет $\varepsilon=1,5$;

в) расстояние между фокусами $2c=10$ и ось $2b=8$;

г) ось $2a=16$ и эксцентриситет $\varepsilon=1,25$;

д) уравнения асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$ и $2c=20$;

е) расстояние между директрисами равно $22\frac{2}{13}$ и $2c=26$;

ж) расстояние между директрисами равно 6,4 и ось $2b=6$;

з) расстояние между директрисами равно $\frac{8}{3}$ и эксцентриситет $\varepsilon=1,5$;

и) уравнения асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$ и расстояние между директрисами равно 12,4.

28. Дана гипербола $16x^2-9y^2=144$. Найти ее полуоси, координаты фокусов и вершин, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис. *Ответ*: $a=3$, $b=4$, $F_1(-5;\ 0)$, $F_2(5;\ 0)$, $A_1(-3;\ 0)$, $A_2(3;\ 0)$, $\varepsilon=\frac{5}{3}$, $y=\pm\frac{4}{3}x$, $x=\pm\frac{9}{5}$.

29. Найти координаты точек гиперболы $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$, расстояние от которых до правого фокуса равно 4,5.

30. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично начала системы координат, если даны:

а) точки $A(6;\ -1)$ и $B(-8;\ 2\sqrt{2})$ гиперболы;

б) точка $A(-5;\ 3)$ гиперболы и $\varepsilon=\sqrt{2}$;

в) точка $A(4,5;\ -1)$ гиперболы и уравнения асимптот $y=\pm\frac{2}{3}x$;

г) точка $A(-3;\ 2,5)$ гиперболы и уравнения директрис $y=\pm\frac{4}{3}$.

31. Фокусы гиперболы совпадают с фокусами эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет $\varepsilon=2$.

32. Найти координаты центра, полуоси, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис гиперболы:

а) $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$;

б) $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0$.

33. Составить уравнение гиперболы, если $\varepsilon=1,25$, $F(5;\ 0)$ и уравнение ближайшей директрисы $5x-16=0$.

34. При каких значениях m прямая $y=2,5x+m$:

а) пересекает гиперболу $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$;

б) касается ее;

в) проходит вне этой гиперболы?

35. Составить уравнения касательных к гиперболе $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$:

а) параллельных прямой $10x-3y+9=0$;

б) перпендикулярных к прямой $4x+3y-7=0$.

36. Дана гипербола $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. Составить полярное уравнение ее правой ветви, считая, что направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси абсцисс, а полюс находится:
а) в правом фокусе; б) в левом фокусе.

37. Найти полуоси гиперболы $r=\frac{18}{4-5\cos\varphi}$.

38. На гиперболе $r=\frac{15}{3-4\cos\varphi}$ найти точки, полярный радиус которых равен 3.

39. Дана гипербола $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1$. Составить полярное уравнение ее левой ветви, считая, что направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси абсцисс, а полюс находится:
а) в левом фокусе; б) в правом фокусе.

40. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, если:
а) парабола расположена в правой полуплоскости симметрично оси Ox, и ее параметр p=3;
б) парабола расположена в левой полуплоскости симметрично оси Ox, и ее параметр p=0,5;
в) парабола расположена в верхней полуплоскости симметрично оси Oy, и ее параметр p=0,25;
г) парабола расположена в нижней полуплоскости симметрично оси Oy, и ее параметр p=3.

41. Найти координаты фокуса, параметр и уравнение директрисы параболы:
а) $y^2=6x$; б) $x^2=5y$; в) $y^2=-4x$; г) $x^2=-y$.

42. Составить уравнение параболы, если ее фокус $F(-7;\ 0)$ и уравнение директрисы $x-7=0$. *Ответ*: $y^2=-28x$.

43. При каких значениях углового коэффициента k прямая $y=kx+2$:
а) пересекает параболу $y^2=4x$;
б) касается ее;
в) проходит вне этой параболы?

44. Составить уравнение касательной к параболе $y^2=8x$ параллельной прямой $2x+2y-3=0$.

45. Найти координаты точек пересечения:
а) эллипса $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{225}=1$ и параболы $y^2=24x$;
б) гиперболы $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$ и параболы $y^2=3x$;
в) двух парабол $y=x^2-2x+1$ и $x=y^2-6y+7$.

46. Дана параболы $y^2=6x$. Составить ее полярное уравнение, считая, что направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси абсцисс, а полюс находится в фокусе параболы.

47. На параболе $r=\dfrac{p}{1-\cos\varphi}$ найти точки:

а) с наименьшим полярным радиусом;
б) с полярным радиусом, равным параметру параболы.

48. Дана парабола $r=\dfrac{6}{1-\cos\varphi}$. Найти в прямоугольной системе координат вершину, фокус и уравнение директрисы.

6. Поверхности второго порядка

6.1. Сфера. *Сферой* называется множество точек пространства, расположенных на данном расстоянии от одной и той же точки, которая называется *центром*.

Векторное уравнение сферы:

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|=R,$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор произвольной точки $M(x;\ y;\ z)$ сферы; $\mathbf{r}_1$ — радиус-вектор центра $C(x_1;\ y_1;\ z_1)$ сферы; R — радиус сферы (рис. 27).

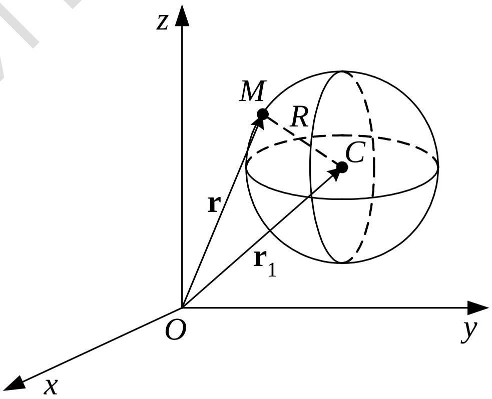

Рис. 27

В *координатной форме* уравнение сферы имеет вид:

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=R^2.$$

В частности, если центр сферы C совпадает с началом координат, последнее уравнение принимает вид

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

6.2. Эллипсоид вращения. *Эллипсоидом вращения* называется множество точек пространства, сумма расстояний от любой из них до двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, равная $2a$, большая расстояния $2c$ между фокусами.

Векторное уравнение эллипсоида вращения:

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|+|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|=2a,$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор произвольной точки $M(x;\ y;\ z)$ эллипсоида вращения; $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ — радиус-векторы фокусов эллипсоида вращения.

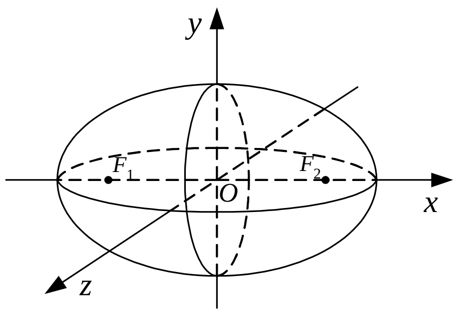

Рис. 28

Если в прямоугольной системе координат $Oxyz$ (рис. 28) фокусы F_1 и F_2 эллипсоида вращения имеют координаты $F_1(-c;\ 0;\ 0)$ и $F_2(c;\ 0;\ 0)$, то уравнение эллипсоида вращения в *координатной форме* имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1,$$

где $b^2=a^2-c^2$.

Замечание. Эллипсоид вращения можно рассматривать как поверхность вращения, полученную при вращении эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вокруг одной из его осей симметрии (в нашем случае — это ось Ox).

6.3. Эллипсоид. Пусть дан эллипсоид вращения $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{b^2}=1$. Если подвергнуть пространство преобразованию сжатия к плоскости OXY по формулам

$$X=x,$$
$$Y=y,$$
$$Z=\frac{b}{c}z,$$

то уравнение эллипсоида вращения примет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

где $a>0$, $b>0$, $c>0$.

Поверхность, заданная последним уравнением, называется *трехосным эллипсоидом* или просто *эллипсоидом* (рис. 29).

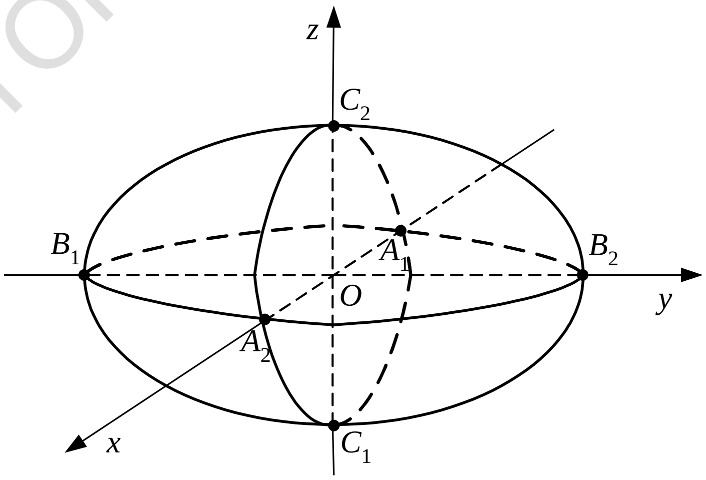

Рис. 29

Эллипсоид имеет три *плоскости симметрии* (координатные плоскости), три *оси симметрии* (координатные оси) и *центр симметрии* (начало координат). Точки пересечения эллипсоида с осями симметрии называются *вершинами*. Эллипсоид имеет шесть вершин: $A_1(-a;\ 0;\ 0)$, $A_2(a;\ 0;\ 0)$, $B_1(0;\ -b;\ 0)$, $B_2(0;\ -b;\ 0)$, $C_1(0;\ 0;\ -c)$, $C_2(0;\ 0;\ c)$.

6.4. Двуполостный гиперболоид вращения. *Двуполостным гиперболоидом вращения* называется множество точек пространства, абсолютная величина разности расстояний от любой из них до двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, равная $2a$, меньшая расстояния $2c$ между фокусами.

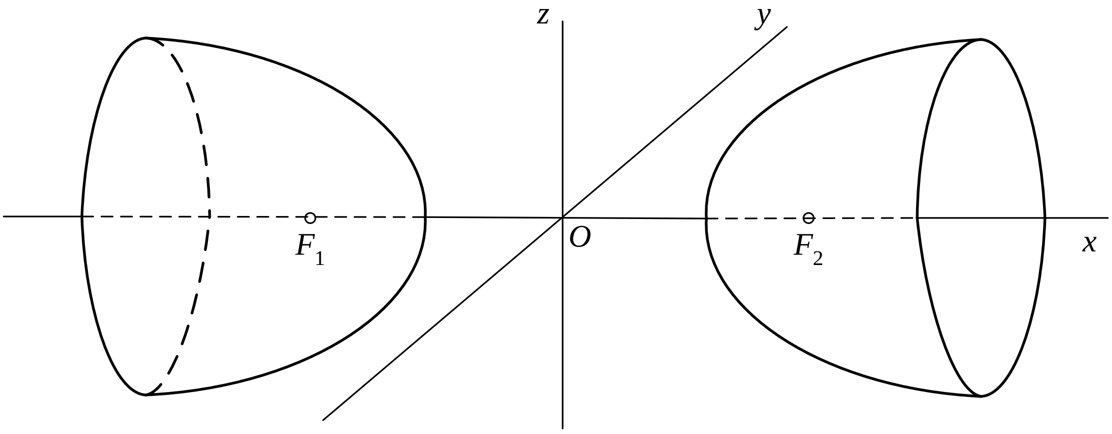

Рис. 30

Векторное уравнение двуполостного гиперболоида вращения:

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|+|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|=\pm 2a,$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор произвольной точки $M(x;\ y;\ z)$ двуполостного гиперболоида вращения; $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ — радиус-векторы фокусов двуполостного гиперболоида вращения.

Если в прямоугольной системе координат $Oxyz$ (рис. 30) фокусы F_1 и F_2 имеют координаты $F_1(-c;\ 0;\ 0)$ и $F_2(c;\ 0;\ 0)$, то *уравнение* двуполостного гиперболоида вращения в *координатной форме* имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1,$$

где $b^2=c^2-a^2$.

Замечание. Двуполостный гиперболоид вращения можно рассматривать как поверхность вращения, полученную при вращении гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ вокруг ее действительной оси (оси Ox).

6.5. Двуполостный гиперболоид. Пусть дан двуполостный гиперболоид вращения $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{b^2}=1$. Преобразуем пространство путем сжатия к плоскости OXY по формулам

$$X=x,$$
$$Y=y,$$
$$Z=\frac{b}{c}z.$$

Тогда уравнение двуполостного гиперболоида вращения примет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

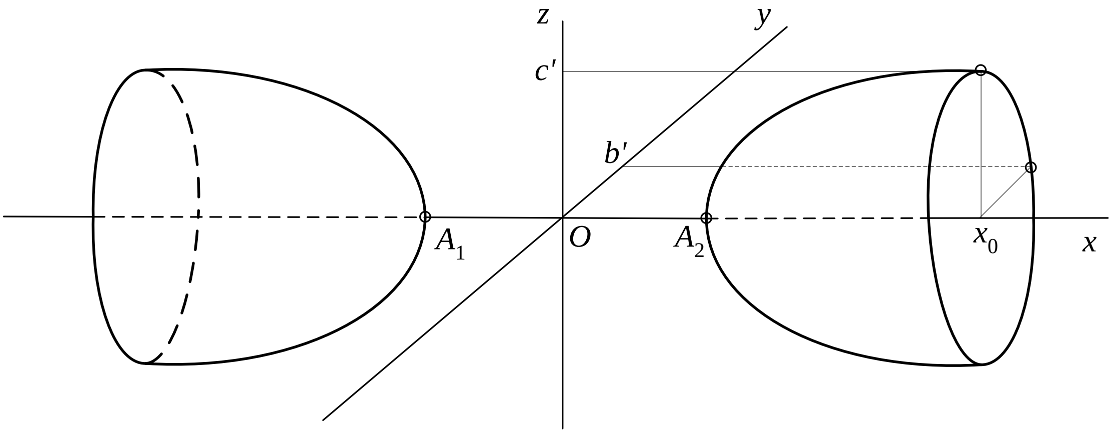

Рис. 31

Поверхность, заданная последним уравнением, называется *двуполостным гиперболоидом*. Она изображена на рисунке 31, где $b' = b\sqrt{\frac{x_0^2}{a^2} - 1}$, $c' = c\sqrt{\frac{x_0^2}{a^2} - 1}$.

Двуполостный гиперболоид имеет три *плоскости симметрии* (координатные плоскости), три *оси симметрии* (координатные оси) и *центр симметрии* (начало координат). Точки пересечения двуполостного гиперболоида с осями симметрии называются *вершинами*. В нашем случае — это две точки $A_1(-a; 0; 0)$ и $A_2(a; 0; 0)$.

6.6. Однополостный гиперболоид вращения. Однополостный гиперболоид. При вращении гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг ее мнимой оси образуется поверхность, которая называется *однополостным гиперболоидом вращения* (рис. 32).

Уравнение однополостного гиперболоида вращения имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1.$$

Пусть дан однополостный гиперболоид вращения $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{a^2} = 1$. Преобразуем пространство путем сжатия к плоскости OXY по формулам

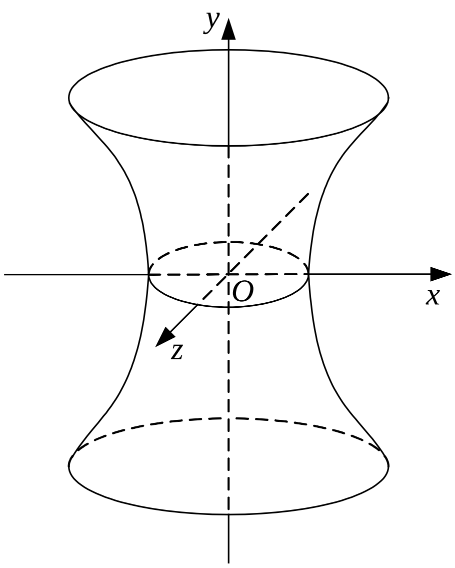

Рис. 32

$$X = x,$$
$$Y = y,$$

$$Z=\frac{a}{c}z.$$

Тогда уравнение однополостного гиперболоида вращения примет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Поверхность, заданная последним уравнением, называется *однополостным гиперболоидом* (рис. 33).

Однополостный гиперболоид имеет три *плоскости симметрии* (координатные плоскости), три *оси симметрии* (координатные оси) и *центр симметрии* (начало координат). Точки пересечения однополостного гиперболоида с осями симметрии называются *вершинами*. Однополостный гиперболоид имеет четыре вершины. В нашем случае — это точки $A_1(-a;\ 0;\ 0)$, $A_2(a;\ 0;\ 0)$, $C_1(0;\ 0;\ -c)$, $C_2(0;\ 0;\ c)$. Ось симметрии, которую не пересекает однополостный гиперболоид, называют *мнимой осью*.

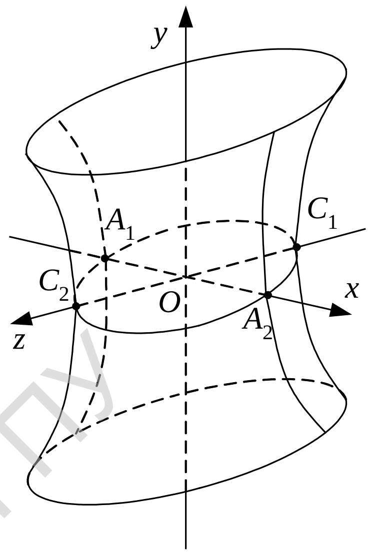

Рис. 33

6.7. Параболоид вращения. *Параболоидом вращения* называется множество точек пространства, расположенных на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой *фокусом*, и данной плоскости, не проходящей через фокус. Эта плоскость называется *директориальной плоскостью*.

Векторное уравнение параболоида вращения:

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|=p+(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\mathbf{e},$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор произвольной точки $M(x;\ y;\ z)$ параболоида вращения; $\mathbf{r}_1$ — радиус-вектор фокуса; p —расстояние от фокуса до директориальной плоскости; $\mathbf{e}$ — единичный вектор, перпендикулярный директориальной плоскости.

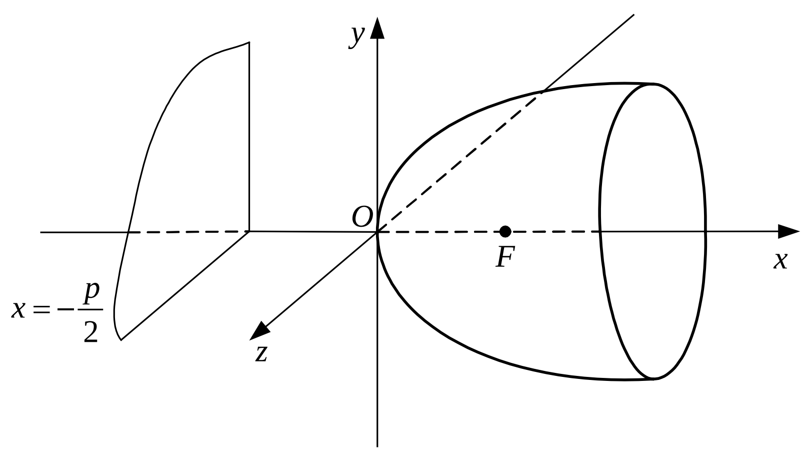

Рис. 34

В прямоугольной системе координат $Oxyz$, где координатная ось Ox проходит через фокус перпендикулярно директориальной плоскости, а координатная плоскость Oyz проходит через середину перпендикуляра, опущенного из фокуса на директориальную плоскость (рис. 34), уравнение параболоида вращения в *координатной форме* имеет вид

$$y^2+z^2=2px.$$

Координаты фокуса $F\left(\frac{p}{2};0;0\right)$, уравнение директориальной плоскости $x=-\frac{p}{2}$.

Замечание. Параболоид вращения можно рассматривать как поверхность вращения, полученную при вращении параболы $y^2=2px$ вокруг координатной оси Ox.

6.8. Эллиптический параболоид. Пусть дан параболоид вращения $\frac{Y^2}{p}+\frac{Z^2}{p}=2X$. Преобразуем пространство путем сжатием к плоскости OXY по формулам

$$X=x,$$
$$Y=y,$$
$$Z=\sqrt{\frac{p}{q}}\,z,$$

где $p>0$, $q>0$. Тогда уравнение параболоида вращения примет вид

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2x.$$

Поверхность, заданная последним уравнением, называется *эллиптическим параболоидом*. Он изображен на рисунке 35, где $p'=\sqrt{2px_0}$, $q'=\sqrt{2px_0}$.

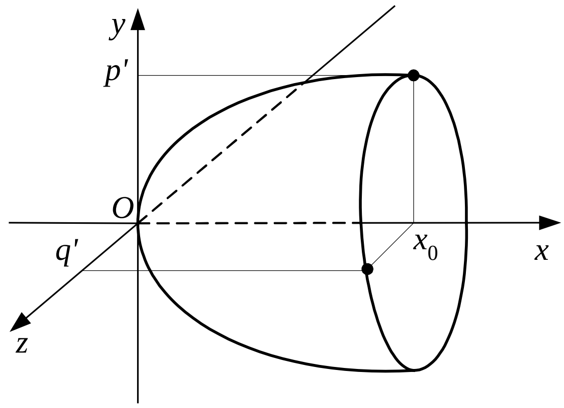

Рис. 35

Эллиптический параболоид имеет две *плоскости симметрии* (координатные плоскости Oxy и Oxz) и одну *ось симметрии* (координатная ось Ox). Точка пересечения эллиптического параболоида с осью симметрии называется *вершиной*.

6.9. Гиперболический параболоид. Поверхность, заданная в прямоугольной системе координат $Oxyz$ уравнением

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z,$$

где $p>0$, $q>0$, называется *гиперболическим параболоидом* (рис. 36).

Гиперболический параболоид имеет две *плоскости симметрии* (координатные плоскости Oxz и Oyz) и одну *ось симметрии* (координатная ось Oz). Точка пересечения гиперболического параболоида с осью симметрии называется *вершиной*.

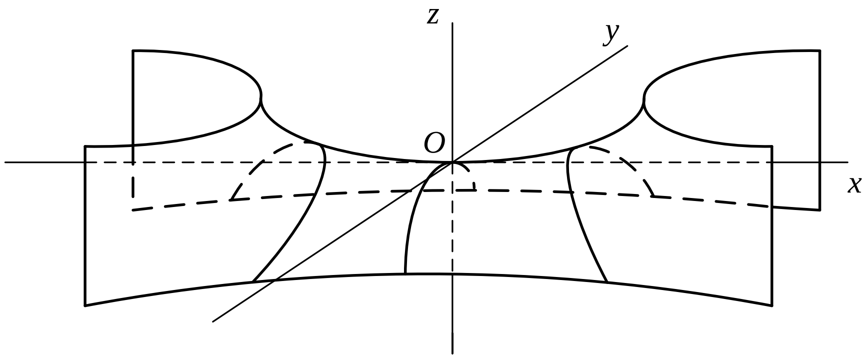

Рис. 36

6.10. Конус вращения. Конус второго порядка. При вращении двух пересекающихся прямых $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, лежащих в координатной плоскости Oyz, вокруг оси Oz, получается плоскость, которая называется *конусом вращения* (рис. 37).

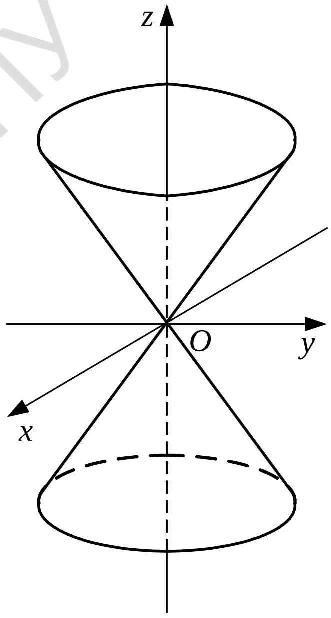

Рис. 37

Уравнение конуса вращения имеет вид

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Пусть дан конус вращения $\frac{X^2}{b^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0$.

Преобразуем пространство путем сжатия к плоскости OXY по формулам

$$X=\frac{b}{a}x,$$
$$Y=y,$$
$$Z=z.$$

Тогда уравнение конуса вращения примет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

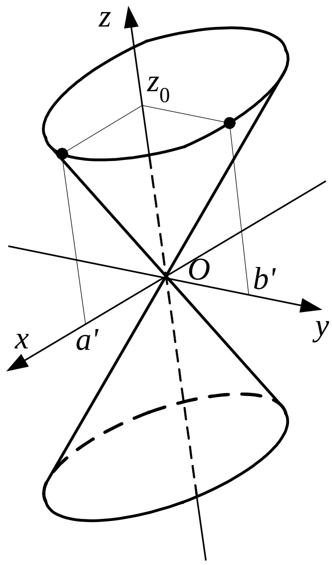

Рис. 38

Поверхность, заданная последним уравнением, называется *конусом второго порядка*. Он изображен на рисунке 38, где $a'=\frac{az_0}{c}$, $b'=\frac{bz_0}{c}$.

Конус второго порядка *симметричен* относительно трех *координатных плоскостей*, трех *осей координат* и имеет *центр симметрии* — начало координат. Он называется *вершиной* конуса второго порядка.

6.11. Цилиндрические поверхности. *Цилиндрическая поверхность* — это поверхность, образованная при поступательном движении прямой, которая называется *образующей*, через все точки некоторой линии, которая называется *направляющей*.

Любое уравнение с двумя переменными в прямоугольной системе координат $Oxyz$ определяет цилиндрическую поверхность, образующая которой параллельна той координатной оси, координата которой отсутствует в уравнении.

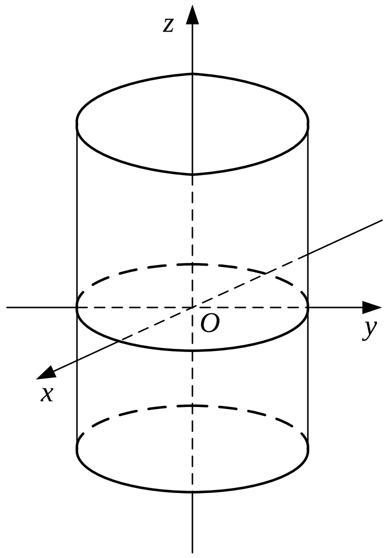

Рис. 39

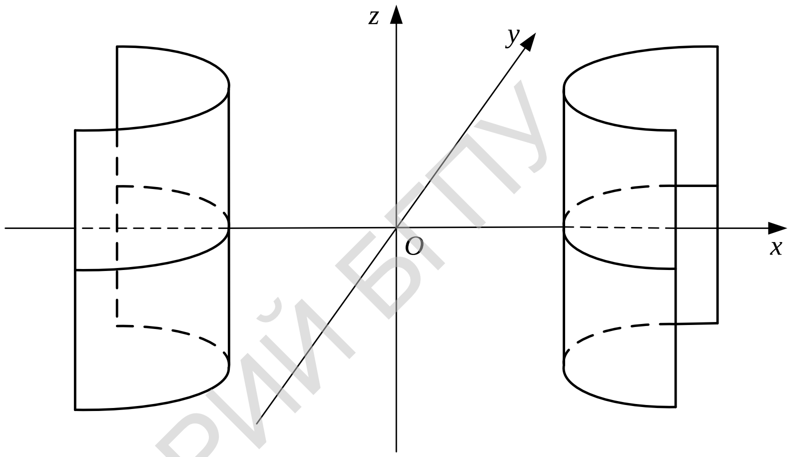

Рис. 40

Существует три типа цилиндрических поверхностей (или *цилиндров второго порядка*).

Эллиптический цилиндр (рис. 39) имеет уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Гиперболический цилиндр (рис. 40) имеет уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Параболический цилиндр (рис. 41) имеет уравнение

$$y^2=2px.$$

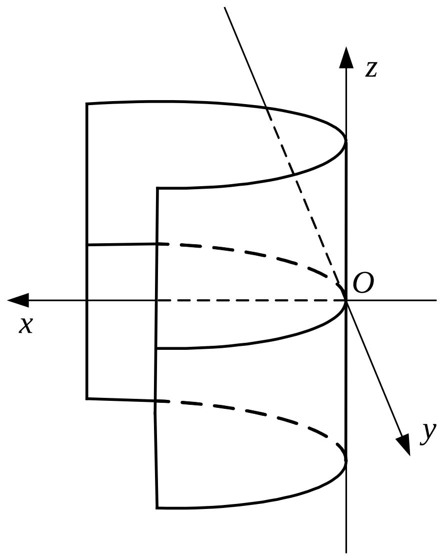

Рис. 41

Упражнения

1. Составить уравнение поверхности, полученной при вращении лежащей в плоскости Oxy параболы вокруг ее оси симметрии, совпадающей с осью Oy, если фокус параболы находится в точке $F(0; 3; 0)$ и вершина совпадает с началом координат. Изобразить полученную поверхность.

2. Составить уравнение поверхности, полученной при вращении параболы, лежащей в плоскости Oxz, вокруг оси симметрии, совпадающей с осью Oz, если вершина параболы совпадает с началом координат, ветви направлены в отрицательном направлении оси Oz и парабола проходит через точку $M(6; 0; –4)$. Изобразить полученную поверхность.

3. Составить уравнение поверхности, полученной при вращении параболы, лежащей в плоскости Oyz, вокруг оси симметрии, параллельной оси Oz, если вершина параболы находится в точке $C(0; 2; 1)$ и парабола проходит через точку $A(0; 4; 5)$. Ветви параболы направлены в положительном направлении оси Oz. Изобразить полученную поверхность.

4. Составить уравнение параболоида, полученного при вращении вокруг оси Oz параболы $y^2=2pz$, $x=0$. Подобрать p так, чтобы полученная поверхность проходила через точку $A(5; 3; 2)$. Изобразить полученную поверхность.

5. Составить уравнение поверхности, полученной при вращении лежащей в плоскости Oyz гиперболы, центр которой совпадает с началом координат, вокруг мнимой оси, совпадающей с осью Oy, если действительная ось гиперболы равна 12 и эксцентриситет ее равен 2. Определить вид и изобразить поверхность.

6. Составить уравнение поверхности, полученной при вращении эллипса, лежащего в плоскости Oyz, центр которого совпадает с началом координат, вокруг большой оси, совпадающей с осью Oy, если расстояние между директрисами эллипса равен 10 и эксцентриситет равен 0,8.

7. Составить уравнение поверхности, полученной при вращении эллипса, лежащего в плоскости Oxz, центр которого совпадает с началом координат, вокруг большой оси, совпадающей с осью Oz, если эксцентриситет равен 0,6, и малая ось равна 8. *Ответ*: $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{64}+\frac{z^2}{100}=1$.

8. Составить уравнение поверхности, полученной при вращении лежащей в плоскости Oxz гиперболы, центр которой совпадает с началом координат, вокруг мнимой оси, совпадающей с осью Oz, если расстояние между директрисами равно 6 и расстояние между фокусами равно 10. Определить вид и изобразить поверхность.

9. Найти координаты центра C и радиус r сферы $x^2+y^2+z^2–5x+3y+6z=0$. *Ответ*: $C(\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}; –3)$, $r=\frac{\sqrt{70}}{2}$.

10. Составить уравнение сферы, описанной около треугольной пирамиды с вершинами в точках $A(1; –1; 1)$, $B(–5; 10; –1)$, $C(4; 1; 11)$, $D(–8; –2; 2)$.

11. Составить уравнение сферы радиуса 5, расположенной во втором октанте и касающейся всех трех координатных плоскостей.

12. Составить уравнение сферы, проходящей через точки $A(2; 2; 3)$, $B(1; 2; –4)$, $C(1; –3; 1)$, если ее центр находится в плоскости Oxy.

13. Найти координаты центра и радиус окружности, образующейся в сечении сферы $(x–3)^2+(y+2)^2+(z–1)^2=100$ плоскостью $2x–2y–z+9=0$.

14. Установить, какие поверхности задаются уравнениями, и построить эти поверхности:

а) $x^2+y^2=4$; б) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; в) $x^2-y^2=1$; г) $y^2=2x$;

д) $z^2=y$; е) $z+x^2=0$; ж) $x^2+y^2=2y$; з) $x^2+y^2=-4$.

15. Составить уравнение конической поверхности, вершиной которой служит точка $M(0;\ 0;\ 1)$, а направляющей — эллипс $\begin{cases} \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1, \\ z=3. \end{cases}$

16. Составить уравнение эллиптического параболоида, имеющего вершину в начале координат, ось которого является ось Oz, если на его поверхности заданы две точки $A(-1;\ -2;\ 2)$ и $B(1;\ 1;\ 1)$. *Ответ*: $\frac{x^2}{\frac{3}{4}}+\frac{y^2}{\frac{3}{2}}=2z$.

17. Установить, какие поверхности определяет уравнение $z^2+x^2=m(z^2+y^2)$, если:
а) $m=0$; б) $0<m<1$; в) $m>1$; г) $m<0$; д) $m=1$.

18. Привести к каноническому виду уравнение поверхности $4x^2+9y^2+36z^2-8x-18y-72z+13=0$ и построить ее.

19. Установить, какие поверхности определяются уравнениями:
а) $x^2+z^2-4x-4z+4=0$; б) $4x^2+y^2-z^2-24x-4y+2z+35=0$;
в) $x^2+y^2-z^2-2x-2y+2z+2=0$; г) $x^2+y^2-6x+6y-4z+18=0$;
д) $9x^2-z^2-18x-18y-6z=0$.

20. Найти координаты вершин и центр эллипса, полученного при пересечении эллипсоида $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1$ плоскостью $y+2=0$. *Ответ*: $A_1(-\frac{5\sqrt{3}}{2};\ -2;\ 0)$, $A_2(\frac{5\sqrt{3}}{2};\ -2;\ 0)$, $B_1(0;\ -2;\ -\sqrt{3})$, $B_2(0;\ -2;\ \sqrt{3})$, $C(0;\ -2;\ 0)$.

21. Найти координаты центра и полуоси эллипсоида $4x^2+2y^2+5z^2+16x-20z-6=0$.

22. Найти координаты вершин, центра и полуоси поверхности $2x^2-4y^2+3z^2-4x+12y-18z+9=0$. Определить вид и построить поверхность.

23. Установить, при каких значениях m плоскость $x+mz-1=0$ пересекает двуполостный гиперболоид $x^2+y^2-z^2=-1$ по:
а) эллипсу;
б) гиперболе.

24. Найти точки пересечения поверхности и прямой:

а) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1,\quad \frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{-6}=\frac{z+2}{4}$;

б) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=z,\quad \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{2}$.

25. Построить тело, ограниченное поверхностями:

а) $x=0$, $z=0$, $y=1$, $y=3$, $x+2z=3$;
б) $2z=x^2+y^2$, $z=2$;
в) $x+y=1$, $z=x^2+y^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;
г) $2x+3y-12=0$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=\frac{y^2}{2}$.

7. Конструктивная геометрия

7.1. Геометрические построения на плоскости. В школьном курсе геометрии рассматриваются задачи на построение с помощью циркуля и линейки.

Линейка не имеет масштабных делений и с ее помощью можно:

- провести произвольную прямую;
- провести прямую через данную точку;
- провести прямую через две данные или построенные точки;
- построить отрезок с концами в данных точках.

С помощью *циркуля* можно:

- построить окружность данного радиуса с центром в данной или построенной точке;
- отложить данный отрезок от данной точки на данной прямой.

Никаких других операций выполнять чертежными инструментами **нельзя**!

Основными фигурами называют точку, прямую, окружность. Все остальные фигуры называются *вспомогательными*.

Суть задачи на построение. Дано конечное множество основных или вспомогательных фигур, связанных некоторым условием. Требуется с помощью циркуля и линейки построить новую фигуру, удовлетворяющую определенному условию, которое связывает эту фигуру с данными.

Решить задачу на построение — это значит свести ее к последовательному выполнению множества построений, которые называются *постулатами построения*:

1) построение прямой через две данные или построенные точки;
2) построение точки пересечения двух непараллельных данных или построенных прямых;
3) построение окружности с центром в данной или построенной точке и радиусом равным длине отрезка с концами в данных или построенных точках;
4) построение точки пересечения данной или построенной прямой с данной или построенной окружностью, если они пересекаются;
5) построение точки пересечения двух данных или построенных окружностей, если они пересекаются.

Заданные в условии задачи фигуры должны удовлетворять следующим требованиям:

1) они считаются построенными;

2) существует хотя бы одна построенная прямая. На любой построенной прямой или окружности существуют по крайней мере две построенные точки.

Если при описании построения перечислять все простейшие построения, то описание будет очень громоздким. Поэтому простейшие построения объединены в некоторые типичные построения, которые называют *основными*:

1) отложить на данном луче от его начала отрезок, равный данному отрезку;
2) отложить от данного луча в данную полуплоскость угол, равный данному углу;
3) построить треугольник по трем сторонам;
4) построить треугольник по двум сторонам и углу между ними;
5) построить треугольник по стороне и двум прилежащим углам;
6) построить биссектрису данного неразвернутого угла;
7) построить серединный перпендикуляр данного отрезка;
8) построить середину данного отрезка;
9) построить прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную данной прямой (2 случая: точка вне прямой и точка на прямой);
10) построить прямую, проходящую через данную точку и параллельную данной прямой;
11) построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и острому углу;
12) построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету;
13) построить касательную к данной окружности, проходящую через данную на ней точку;
14) построить касательную к данной окружности, проходящую через точку, не лежащую на окружности;
15) построить четвертый отрезок, пропорциональный к трем данным.

Решение задачи на построение состоит из четырех этапов.

1. Анализ — поиск решения задачи.

2. Построение — указание последовательности основных построений, приводящих к построению искомой фигуры.

3. Доказательство — необходимо доказать, что построенная фигура действительно удовлетворяет всем условиям, поставленным в задаче.

4. Исследование — выполняя построение, как правило, получаем лишь одну искомую фигуру. Задача на построение считается полностью решенной, если даны ответы на два вопроса: 1) при всяком ли выборе данных эта задача имеет решение, 2) если при данных условиях задача имеет решение, то каково их число?

7.2. Методы решения задач на построение. А) *Метод пересечений (метод геометрических мест)*. Самый распространенный метод. Он основан на знании свойств различных геометрических образов, геометрических мест.

Геометрическим местом точек называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, обладающих определенным свойством.

Суть метода пересечений. Решение задачи сводится к отысканию основного элемента построения, удовлетворяющего двум независимым условиям, вытекающим из задачи. Отбрасывая одно из этих условий (например, второе), строим геометрическое место точек, удовлетворяющее первому условию (фигура F_1). Затем отбрасываем первое условие и строим геометрическое место точек, удовлетворяющее второму условию (фигура F_2). Тогда основной элемент построения находим как пересечение фигур F_1 и F_2. Построив основной элемент, строим искомую фигуру.

Основные геометрические места точек:

1) равноудаленных от одной данной точки, есть *окружность* с центром в данной точке;
2) равноудаленных от двух данных точек A и B, есть *серединный перпендикуляр* отрезка AB;
3) равноудаленных от сторон данного угла, есть *биссектриса* данного угла;
4) находящихся на данном расстоянии от данной прямой, есть *две прямые* параллельные данной и отстоящие от нее на данном расстоянии по обе стороны от нее;
5) равноудаленных от двух данных параллельных прямых есть *ось симметрии* этих прямых;
6) равноудаленных от двух пересекающихся прямых есть *две взаимно перпендикулярные прямые,* являющиеся биссектрисами двух вертикальных углов, образованных данными прямыми;
7) из которых данный отрезок AB виден под прямым углом, есть *окружность*, построенная на данном отрезке как на диаметре (точки A и B исключаются);
8) из которых отрезок AB виден под заданным углом φ ($\varphi \neq \pi/2$, $\varphi \neq \pi$) есть *две дуги* с концами в точках A и B (без точек A и B), симметричные относительно AB;
9) делящих пополам все хорды окружности с центром в точке O, проведенные через заданную на окружности точку A, есть *окружность*, построенная на отрезке OA как на диаметре (без точки A);
10) геометрическое место центров окружностей, проходящих через две данные точки, есть *серединный перпендикуляр* к отрезку, соединяющему эти точки;
11) геометрическое место середин параллельных хорд окружностей есть *диаметр этой окружности*, перпендикулярный данным хордам;
12) геометрическое место хорд равной длины есть *концентрическая окружность*, радиус которой равен расстоянию от центра до одной из хорд.

Б) *Метод геометрических преобразований* состоит в том, что фигура, входящая в условие задачи, или часть ее подвергаются преобразованию — переносу, повороту, подобию, и так далее.

Параллельный перенос. Всю искомую фигуру или ее часть переносят на некоторый вектор, при этом получается новая вспомогательная фигура, построение которой ведет к решению задачи. Выполнив затем параллельный перенос в обратном направлении, получаем искомую фигуру.

Поворот. Рассматривается возможность поворота на известный из условий задачи угол всей искомой фигуры или части ее вокруг целесообразно выбранной точки. При этом образом поворачиваемой фигуры часто является какой-либо элемент искомой, который затем легко построить как пересечение двух множеств. Чтобы решать задачи этим методом, необходимо уметь строить образы точек, отрезков, прямых, окружностей при повороте вокруг данной точки на заданный угол.

Центральная и осевая симметрия. Центральная симметрия (симметрия относительно заданной точки) — есть поворот плоскости вокруг этого центра на угол 180°. Решение задач аналогично тому, которое использует метод поворота вокруг точки.

Гораздо чаще в задачах на построение приходится иметь дело с осевой симметрией, причем в качестве оси симметрии выбирается либо одна из данных прямых, либо прямая, которую легко построить.

Подобие. Преобразование подобия применяется в тех случаях, когда в условии задачи из требований, которым должна удовлетворять искомая фигура, одно можно отбросить. Это дает возможность на первом этапе решения задачи построить вспомогательную фигуру, имеющую произвольные размеры, но подобную искомой. На втором этапе с помощью коэффициента подобия, который обычно равен отношению двух известных сходственных отрезков, строится искомая фигура. При этом используется основное построение: построение четвертого отрезка, пропорционального трем данным.

Часто искомая фигура не только подобна, но и гомотетична вспомогательной, причем центром гомотетии является обычно одна из известных точек. Поэтому при решении задач методом подобия необходимо уметь строить образы геометрических фигур при различных способах задания гомотетии.

В) *Алгебраический метод* используется тогда, когда анализ задачи приводит к построению некоторого отрезка длиной x (или нескольких отрезков), наличие которого является ключом к построению искомой фигуры. Этот отрезок должен выражаться через длины a, b, c, ..., l данных отрезков с помощью формулы. Как бы ни была сложна формула для x, правую ее часть всегда можно преобразовать так, чтобы построение отрезка x свелось к последовательности *простых построений* по основным формулам, к которым относят следующие:

1) $x=a+b$;

2) $x=a-b$, $a>b$;

3) $x=na$, где n — натуральное число;

4) $x=\frac{a}{n}$, где n — натуральное число;

5) $x=\dfrac{m}{n}a$, где m, n — натуральные числа;

6) $x=\dfrac{ab}{c}$, (построение четвертого отрезка пропорционального к трем данным отрезкам);

7) $x=\sqrt{ab}$ (построение отрезка, среднего геометрического между двумя данными отрезками);

8) $x=\sqrt{a^2+b^2}$;

9) $x=\sqrt{a^2-b^2}$, $a>b$.

7.3. Признак разрешимости задач на построение. В конструктивной геометрии важной является следующая задача: можно ли выполнить построение некоторой фигуры, пользуясь только циркулем и линейкой, при условии, что искомая фигура существует и удовлетворяет некоторым данным задачи. Для того, чтобы решить задачу о разрешимости обращаются к алгебраическому методу и пользуются следующими теоремами.

Теорема. Если длина отрезка x выражается через длины данных отрезков при помощи конечного множества арифметических операций (сложения, вычитания, умножения и деления) и извлечения квадратных корней, то этот отрезок можно построить.

Теорема. Если отрезок x можно построить по данным отрезкам циркулем и линейкой, то он выражается через длины данных отрезков при помощи конечного множества арифметических операций и извлечения квадратных корней.

Классические задачи на построение, неразрешимые циркулем и линейкой:

1) *трисекция угла*: разделить данный угол на три равные части;
2) *удвоение куба*: построить ребро куба, объем которого вдвое больше объема данного куба;
3) *спрямление окружности*: построить отрезок, длина которого равно длине данной окружности;
4) *квадратура круга*: построить квадрат, площадь которого равна площади данного круга.

Упражнения

1. Построить простые построения, изложенные в алгебраическом методе.
2. Построить окружность данного радиуса, проходящую через данную точку и касающуюся данной прямой.
3. Построить треугольник по стороне a, углу при вершине A и медиане, проведенной к боковой стороне AC.
4. Построить ромб по диагонали и противолежащему углу.
5. Построить треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к одной из них.

6. Построить окружность данного радиуса, проходящую через данную точку и касающуюся данной окружности.

7. Построить трапецию по основаниям и боковым сторонам.

8. Построить треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.

9. Построить параллелограмм по двум сторонам и диагонали.

10. Построить окружность, касающуюся двух параллельных прямых и проходящую через данную точку.

11. Построить треугольник по стороне, медиане, проведенной к этой стороне, и радиусу описанной окружности.

12. Построить параллелограмм по одной стороне, высоте, опущенной на эту сторону, и одной из диагоналей.

13. Построить окружность данного радиуса, касающуюся двух данных пересекающихся прямых.

14. Построить треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и сумме двух других сторон.

15. Построить ромб по стороне и диагонали.

16. Построить окружность, касающуюся сторон данного угла и проходящую через данную точку.

17. Построить трапецию по основаниям и диагоналям.

18. Построить равносторонний треугольник по радиусу описанной окружности.

19. Построить окружность, касающуюся данной окружности и сторон данного угла.

20. Построить треугольник по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них.

21. Построить окружность, касающуюся двух данных параллельных прямых и данной окружности.

22. Построить параллелограмм по сторонам и углу между ними.

23. Построить треугольник по двум сторонам и высоте, опущенной на одну из них.

24. Построить окружность данного радиуса, касающуюся данной окружности, и отсекающую от данной прямой хорду данной длины.

25. Построить ромб по диагонали и противолежащему углу.

26. Даны две окружности разных радиусов, лежащих одна вне другой, и точка A на одной из них. Провести третью окружность, касающуюся двух данных и проходящую через точку A.

27. Дана окружность, прямая и точка A на этой прямой. Построить окружность, касающуюся данных прямой и окружности и проходящую через точку A.

28. Даны прямая, окружность и точка A на этой окружности. Построить окружность, касающуюся данных прямой и окружности и проходящую через точку A.

29. Построить прямоугольный треугольник по данной гипотенузе c и высоте h, опущенной на гипотенузу.

30. Даны длины сторон *AB*, *BC*, *CD* и *DA* некоторого четырехугольника *ABCD*. Построить этот четырехугольник при условии, что диагональ *AC* делит угол *BAD* пополам.

31. Построить треугольник по точкам пересечения продолжений биссектрисы, медианы и высоты, выходящих из этой, с описанной около этого треугольника окружностью.

32. Построить окружности с центрами в вершинах данного треугольника так, чтобы они попарно касались друг друга.

33. Пересечь трапецию прямой, параллельной основаниям, так, чтобы ее отрезок внутри трапеции делился диагоналями на три равные части.

34. Построить квадрат по заданной вершине и двум точкам, которые лежат на двух сторонах или на их продолжениях, не проходящих через эту вершину.

35. Через точку *M*, лежащую на стороне *AC* треугольника *ABC*, провести прямую *MN*, отсекающую от треугольника такую часть, площадь которой равна $\frac{1}{k}$ (k — натуральное число) площади исходного треугольника.

36. В данный треугольник вписать прямоугольник, имеющий заданную диагональ.

37. Дана прямая *CD* и две точки *A* и *B*, не лежащие на ней. Найти на данной прямой такую точку *M*, что $\angle AMC=2\cdot\angle BMD$.

38. Построить треугольник по биссектрисе, медиане и высоте, выходящих из одной вершины.

39. Найти центра данной окружности.

40. Пользуясь только циркулем, разделить данную окружность с данным центром, на четыре равные части.

Литература

1. *Александров, А.Д.* Геометрия / А.Д. Александров, Н.Ю. Нецветаев. – М.: Наука, 1990. – 671 с.
2. *Атанасян, Л.С.* Геометрия: в 2 ч. / Л.С. Атанасян. – М.: Просвещение, 1973. – Ч. 1. – 480 с.
3. *Атанасян, Л.С.* Геометрия: в 2 ч. /Л.С. Атанасян, Г.Б. Гуревич. – М.: Просвещение, 1976. – Ч. 2. – 447 с.
4. *Дадаян, А.А.* Алгебра и геометрия / А.А. Дадаян, В.А. Дударенко. – Мн.: Выш. шк., 1989. – 288 с.
5. *Кузютин, В.Ф.* Геометрия / В.Ф. Кузютин, Н.А. Зенкевич, В.В. Еремеев. – СПб.: Издательство «Лань», 2003. – 416 с.
6. *Мусхелишвили, Н.И.* Курс аналитической геометрии / Н.И. Мусхелишвили. – СПб.: Издательство «Лань», 2002. – 656 с.
7. *Погорелов, А.В.* Геометрия / А.В. Погорелов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. – 288 с.
8. *Александров, П.С.* Лекции по аналитической геометрии / П.С. Александров. – М.: Наука, 1968. – 911 с.
9. *Базылев, В.Т.* Геометрия: в 2 ч. / В.Т. Базылев, К.И. Дуничев, В.П. Иваницкая. – М.: Просвещение, 1974. – Ч. 1. – 351 с.
10. *Беклемишев, Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д.В. Беклемишев. – М.: Высш. шк., 1998. – 320 с.
11. *Моденов, П.С.* Аналитическая геометрия / П.С. Моденов. – М.: МГУ, 1969. – 563 с.
12. *Орленко, М.И.* Решение геометрических задач на построение / М.И. Орленко. – Мн.: Гос. уч.-пед. из-во Министерства просвещения БССР, 1958. – 438 с.
13. *Атанасян, Л.С.* Сборник задач по геометрии: в 2 ч. / Л.С. Атанасян, В.А. Атанасян. – М.: Просвещение, 1974. – Ч. 1. – 256 с.
14. *Дадаян, А.А.* Сборник задач по аналитической геометрии и элементам линейной алгебры / А.А. Дадаян, Е.С. Масалова. – Мн.: Выш. шк., 1982.– 206 с.
15. *Цубербиллер, О.Н.* Задачи и упражнения по аналитической геометрии. / О.Н. Цубербиллер. – СПб.: Издательство «Лань», 2005.– 336 с.

Содержание

Учебное издание

БОГДАНОВИЧ Сергей Адамович
ВАСИЛЕЦ Сергей Иванович

ПРАКТИКУМ ПО ГЕОМЕТРИИ

Редактор Л.М. Кореневская
Техническое редактирование и компьютерная верстка А.А. Покало

Подписано в печать 10.09.10. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Times. Печать Riso. Усл. печ. л. Уч.–изд. л.
Тираж ____ экз. Заказ

Издатель и полиграфическое исполнение:
Учреждение образования «Белорусский государственный
педагогический университет имени Максима Танка».
ЛИ № 02330/0494368 от 16.03.09.
ЛП № 02330/0494171 от 03.04.09.

220050, Минск, Советская, 18. http://izdat.bspu.unibel.by/