



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA ASTRONAUTICA
ELETTRICA ED ENERGETICA

TESI DI DOTTORATO DI RICERCA IN INGEGNERIA AEROSPAZIALE

DINAMICA, GUIDA E CONTROLLO
DI SISTEMI SPAZIALI
MULTIPIATTAFORMA

Relatore

Prof. Giovanni B. Palmerini

Dottorando

Leonard Felicetti

Anno Accademico 2011/2012

A mamma ed a papà

Indice

Motivazioni	6
I Modellazione di sistemi spaziali multicorpo	8
1 Cinematica e Dinamica dei Sistemi Multicorpo Spaziali	11
1.1 Generalità	11
1.2 Tipologie di Vincoli	13
1.3 Spazio nullo dei vincoli	15
1.4 Formulazione di Eulero Lagrange per la Dinamica	16
1.5 Formulazione di Newton Eulero per la Dinamica	18
1.6 Modello dinamico adottato	20
1.7 Rappresentazione della posizione e dell'orientamento di un corpo mediante matrici omogenee	22
1.8 Rappresentazione della velocità e dell'accelerazione mediante l'approccio matriciale	26
1.9 Matrici per lo studio della dinamica dei manipolatori terrestri	30
1.10 Algoritmo di derivazione delle equazioni della dinamica	32
1.11 Adattamento dell'algoritmo allo studio di oggetti flottanti	35
1.12 Verifica dell'algoritmo nel caso di singola piattaforma	38
2 Strategie di Controllo per Manipolatori Spaziali	40
2.1 Algoritmo di calcolo per sistemi multibody in orbita	40
2.2 Test case di prova per le simulazioni	44
2.3 Cinematica inversa per il manipolatore	46
2.4 Determinazione dello Jacobiano del manipolatore	51
2.5 Strategia di controllo per la piattaforma orbitante	53
2.6 Dispiegamento del manipolatore	55
2.7 Manovra di grasping	59
2.8 Simulazione della collisione	60

II	Dinamica e Controllo delle Space Webs	65
3	Modellazione dei sistemi tethered	68
3.1	Il problema della modellazione delle corde	68
3.2	Modellazione della dinamica di una corda nello spazio	69
3.3	Dinamica della corda non tesa	71
3.4	Dinamica della corda tesa	77
3.5	Modello della dinamica dei corner satellite	81
3.6	Caratteristiche del codice numerico	83
3.7	Risultati Numerici	84
4	Stabilità e Controllo delle Space Webs	93
4.1	Azione del gradiente di gravità su una space web	93
4.2	Evoluzione della dinamica libera di una struttura a croce	98
4.3	Manovra di spin up della space web	102
4.4	Inserimento dei cavi laterali	108
III	Guida e Controllo delle Formazioni di Satelliti	109
5	Le formazioni come sistemi multibody	112
5.1	Equivalenza tra le equazioni della dinamica	113
5.2	Equivalenza delle forzanti gravitazionali	116
5.3	Equazioni Cinematiche per il Modello Equivalente	119
5.4	Assemblaggio del sistema equivalente ed imposizione dei vincoli	121
5.5	Modello Multibody Equivalente per la Formazione	122
6	Strategie di guida utilizzando codici multibody	124
6.1	Computo delle azioni di controllo	125
6.2	Modalità di simulazione	126
6.3	Mantenimento della formazione lungo la verticale locale	127
6.4	Manovra di acquisizione della formazione	130
6.5	Configurazioni a catena cinematica chiusa	134
6.6	Confronto con le tecniche di controllo classiche	136
6.7	Introduzione dell'elasticità nei links	138
7	Coordinazione dell'assetto tra satelliti	141
7.1	Puntamento del target	141
7.2	Coordinazione dell'assetto tra satelliti	144
7.3	Schemi di controllo classico per il tracking del target e la coordinazione dell'assetto	146
7.4	Stabilità asintotica della strategia di controllo classico	148
7.5	Applicazione della strategia di coordinazione classica	150

7.6	Ottimizzazione del controllo	154
7.7	Linearizzazione delle equazioni	157
7.8	Applicazione del Linear Quadratic Regulator	159
7.9	State Dependent Riccati Equation Method	166
7.10	Parametrizzazione SDC delle Equazioni	171
7.11	Applicazione del SDRE all'assetto coordinato	173
Conclusione		180
Bibliografia		181
Ringraziamenti		191

Motivazioni

La presente tesi di dottorato in Ingegneria Aerospaziale è la sintesi lavoro svolto dal candidato durante i tre anni del corso legale previsto per il terzo grado di formazione universitaria. Il periodo trascorso dal candidato nel *Dipartimento di Ingegneria Astronautica Elettrica ed Energetica dell'Università degli Studi di Roma "La Sapienza"* è stato utilizzato per approfondire la conoscenza degli argomenti riguardanti la *modellazione, la guida ed il controllo di sistemi spaziali formati da più piattaforme*.

La tesi è organizzata in tre parti, che rappresentano essenzialmente i tre campi in cui si è suddivisa l'attività, portando il candidato ad affrontare problemi di natura diversa pur mantenendo un filo logico nella ricerca. La prima parte descrive e studia la dinamica dei sistemi multibody propriamente detti, cioè vere e proprie catene cinematiche che presentino un grado di vincolo "rigido" che si trovano ad operare in un ambiente non usuale come quello spaziale. Questo è tipicamente il caso di manipolatori spaziali montati a bordo di piattaforme orbitanti atti ad effettuare manovre di grasping di altri oggetti in orbita, ma anche, ad esempio, dei sistemi di dispiegamento dei pannelli solari sui satelliti. Successivamente si è rilassato il grado di vincolo riducendolo da rigido ad elastico e studiando la dinamica delle "Space Webs", cioè sistemi formati da più piattaforme poste a grande distanza reciproca ma allo stesso tempo interconnesse tra loro mediante l'utilizzo di cavi. Infine nella terza parte si giunge alla completa eliminazione del vincolo materiale tra le piattaforme e quindi allo studio delle formazioni di satelliti, siano essi considerati come punti materiali (ed analizzandone la sola posizione) o come corpi di dimensioni finite (e considerandone quindi anche l'assetto relativo). La ricerca in questo caso ha riguardato lo studio di leggi di guida e controllo atte proprio a ridefinire un vincolo di tipo virtuale tra le piattaforme stesse, eseguendo manovre di riconfigurazione della posizione relativa e riorientamento dell'assetto come se appartenessero ad un unico sistema multibody.

Il percorso intrapreso è iniziato con una approfondita riflessione sulle varie metodologie di analisi di sistemi multibody proposte sia in campo spaziale che terrestre: ciò ha permesso al candidato di approfondire molti aspetti teorici legati all'analisi di tali sistemi, nonché sviluppare in senso critico una sensibilità nell'adozione delle diverse tecniche di modellazione e risoluzione dei problemi in base agli output richiesti o in base all'accuratezza richiesta nella modellazione. Tale studio ha portato alla formulazione di una metodologia di modellazione di sistemi spaziali orbitanti originale (Capitolo 1): basandosi sull'approccio di Denavit Hartenberg per l'analisi della cinematica e della dinamica di ma-

nipolatori industriali terrestri, si è estesa tale metodologia al caso spaziale. In particolare, seppur siano presenti adattamenti di tale tecnica riguardanti lo studio e l'inversione della cinematica dei sistemi robotici spaziali, la modellazione della dinamica con l'approccio matriciale derivato da tale metodologia, non è mai stata applicato al caso spaziale. Classici esempi di manovre possibili con un manipolatore spaziale ancorato ad una piattaforma orbitante sono esposti nel Capitolo 2, dove si è usato un codice multibody sviluppato autonomamente basandosi proprio su questo originale modello.

Il Capitolo 3 affronta la dinamica dei sistemi spaziali tethered, evidenziando come questi presentino numerose difficoltà nella modellazione proprio perché il moto risultante è dovuto ad effetti di diversa natura, con scale temporali e spaziali estremamente diverse tra loro, ma che non possono essere studiate separatamente a causa del forte accoppiamento tra le equazioni della dinamica orbitale del sistema, le equazioni dell'assetto delle piattaforme e quelle strutturali dei cavi. Anche in questo caso, si è sviluppato autonomamente un modello che permettesse l'analisi di tali strutture, verificandone i pregi e le limitazioni dello stesso nella simulazione di un semplice sistema tethered. L'analisi si è quindi estesa nel Capitolo 4 dove lo stesso modello è stato applicato a strutture di dimensioni e complessità via via maggiore fino ad arrivare all'effettuazione di alcune manovre su tali strutture.

Dal Capitolo 5 si eliminano totalmente i vincoli fisici tra le piattaforme, che ora si potranno muovere secondo le leggi della meccanica orbitale, ma di fatto lo si reinserisce nel modello attraverso la definizione di leggi di guida che si basano sull'utilizzo di codici multibody. Il capitolo cerca di affrontare teoricamente il problema dell'equivalenza tra i modelli della dinamica di prossimità dei satelliti e quello atto a modellare la dinamica di un sistema multibody opportunamente scelto. Tale equivalenza è quindi usata nel Capitolo 6 in cui sono presenti i risultati ottenuti applicando tale metodologia per effettuare delle classiche manovre sulle formazioni. Infine il Capitolo 7 affronta il problema della coordinazione dell'assetto delle piattaforme che volano in formazione, andando ad applicare tecniche di controllo non lineare al caso di tracking coordinato di un target.

Parte I

Modellazione di sistemi spaziali multicorpo

Introduzione

La necessità di simulazioni sempre più accurate è strettamente legata al progresso tecnologico. La complessità crescente dei modelli utilizzati nell'ingegneria e di conseguenza della simulazione del loro funzionamento è ben rappresentata dal concetto attuale di "sistema di sistemi" in cui forzatamente convergono i contributi e le conoscenze di numerose differenti discipline. Simulazioni estremamente complesse, con più parti (sottosistemi) interagenti, e software adatti a questo scopo, sono da alcuni anni diffusi nelle industrie per il progetto di prodotti di largo mercato (industria automobilistica, industria delle materie plastiche). Anche nel settore spaziale, certamente di nicchia ma caratterizzato da elevata tecnologia, la necessità di simulazioni complesse si impone sempre più con i nuovi concetti di missione, quali in-orbit servicing o debris removal.

L'idea di rappresentare il comportamento di un sistema complesso come combinazione ordinata dei comportamenti di sistemi più semplici ha portato sin dagli anni '70 alla nascita della linea di ricerca sull'approccio multibody. Ad esempio, le equazioni del sistema complesso possono essere ottenute a partire dalle caratteristiche delle singole parti in maniera classica mediante gli approcci Newtoniano o Lagrangiano. Da un punto di vista teorico i principi fondamentali sono ben noti, ma l'effettiva – e ingegneristica – implementazione è tutt'altro che ovvia. Si evidenzia così come la teoria del multibody abbia da sempre aspetti legati all'efficienza computazionale.

Il settore spaziale è un campo d'azione privilegiato per l'approccio multibody. I sistemi sono complessi, e la simulazione è un ingrediente indispensabile visto l'alto costo dei progetti e la difficoltà (economica ma anche organizzativa) di reperire opzioni di lancio: una simulazione spinta non assicura ma certo rende più probabile un corretto funzionamento del sistema una volta in orbita. La necessità di tenere in conto diverse discipline (ad esempio sono fondamentali i problemi termici) porta a considerare simulazioni modulari e combinate, nelle quali i diversi effetti possano essere trascurati o introdotti, anche localmente e nelle singole parti interessate, e questo porta necessariamente a considerare sistemi composti da più parti elementari. Fra l'altro l'insorgenza di fenomeni non lineari rimarca gli aspetti computazionali della teoria multibody.

L'estensione dei codici disponibili commercialmente per le applicazioni terrestri al caso spaziale non è banale, in quanto in quest'ultimo contesto sono presenti fenomeni che hanno scale temporali e spaziali notevolmente diverse: si pensi ad esempio alla differenza tra i periodi orbitali tipici delle piattaforme orbitanti e il tempo caratteristico della dinamica

di vibrazione delle strutture flessibili ovvero alla la differenza tra le distanze orbitali e le ampiezze di oscillazione delle strutture. La presenza di questi fenomeni determina effetti comunque visibili in un ambiente pressoché libero come nel caso spaziale: ne scaturisce quindi la necessità di una modellazione accurata di tutte le interazioni presenti e che coinvolgono nozioni sia di meccanica orbitale, di dinamica d'assetto e di problemi natura strutturale.

Se si pensa inoltre al caso in cui un sistema multibody spaziale possa articolare la propria configurazione al fine di compiere una manovra di grasping di un altro oggetto orbitante, gli effetti degli eventuali attuatori meccanici coinvolti nella manovra dovranno essere presi in considerazione, con tutte le ripercussioni sia a livello di moto orbitale, sia sulla dinamica d'assetto, sia a livello di vibrazioni delle strutture del sistema stesso. La trattazione presentata in questi primi capitoli della tesi, è il frutto del lavoro svolto dal candidato nel primo e in parte nel secondo anno di dottorato, con lo scopo di acquisire gli strumenti e le conoscenze necessarie a trattare la dinamica dei sistemi multicorpo. In questo modo il candidato ha potuto sviluppare una padronanza dei vari modelli e tecniche di simulazione, che poi sono state applicate durante le attività svolte nella restante parte del dottorato. Il risultato ottenuto, oltre a quello puramente formativo, è stato lo sviluppo di un codice di analisi multicorpo per oggetti flottanti in orbita. L'approccio seguito e i dettagli del codice, con la presentazione delle equazioni implementate, vengono riportati nel capitolo 1. Tale codice è stato quindi utilizzato per effettuare alcune simulazioni di approcci in orbita di oggetti flottanti mediante manipolatori robotici montati su piattaforme spaziali. I risultati di queste simulazioni sono presentati e discussi nel successivo capitolo 2.

Capitolo 1

Cinematica e Dinamica dei Sistemi Multicorpo Spaziali

1.1 Generalità

Si definisce un sistema multibody un insieme di corpi interconnessi mediante vincoli, in modo tale che siano permessi solo alcuni gradi di libertà relativi tra un corpo e l'altro. In generale ogni singolo corpo può muoversi nello spazio con 6 gradi di libertà (3 di traslazione e 3 di rotazione) a cui si possono associare altrettante coordinate (*set completo delle coordinate x_i*) al fine di descrivere in modo completo la posizione e l'orientamento del corpo nello spazio. Qualora nel sistema siano presenti vincoli, il numero di gradi di libertà ammissibile al sistema si riduce seguendo la regola di Kutzbach[34]:

$$n_{dof} = 6n_{bodies} - n_{constr} \quad (1.1)$$

dove n_{dof} è il numero di gradi di libertà ammessi nel sistema, n_{bodies} è il numero di corpi presenti nel sistema e n_{constr} è il numero totale di gradi di libertà bloccati dai vincoli presenti nel sistema. In base alle tipologia di catena cinematica che rappresenta il sistema multicorpo è possibile definire un *set minimo di coordinate q_i* che può comunque rappresentare totalmente lo stato del sistema.

Con riferimento alla Fig.1.1, è possibile distinguere tre grandi famiglie topologiche che possono essere descritte in diverso modo. In particolare, la Fig.1.1a rappresenta una classica catena cinematica aperta i cui membri sono conseguentemente collegati tra loro e lo stato di un singolo membro è dipendente dalla posizione relativa rispetto al membro che lo precede nella catena: i $6 - n_{constr}^k$ gradi di mobilità ammessi dal k-esimo vincolo tra due corpi possono esser rappresentati con altrettante variabili q_i , e così per tutti i membri della catena cinematica. Si ha quindi la possibilità di definire un set minimo di coordinate che possono descrivere in modo univoco lo stato dell'intero sistema. Allo stesso modo la Fig.1.2b rappresenta sempre una catena cinematica aperta, ma in questa sono presenti diversi rami cinematici: anche in questo caso, per le stesse considerazioni fatte nel caso precedente è sempre possibile definire lo stato cinematico del sistema, con l'unica

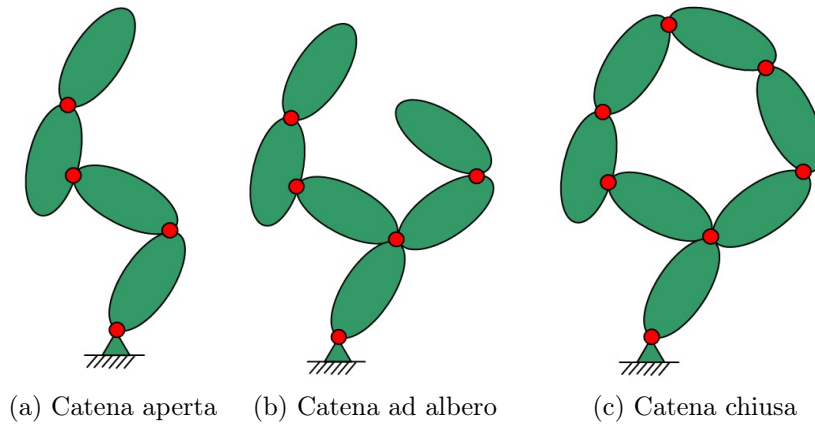


Figura 1.1: Catene cinematiche per i sistemi multibody terrestri

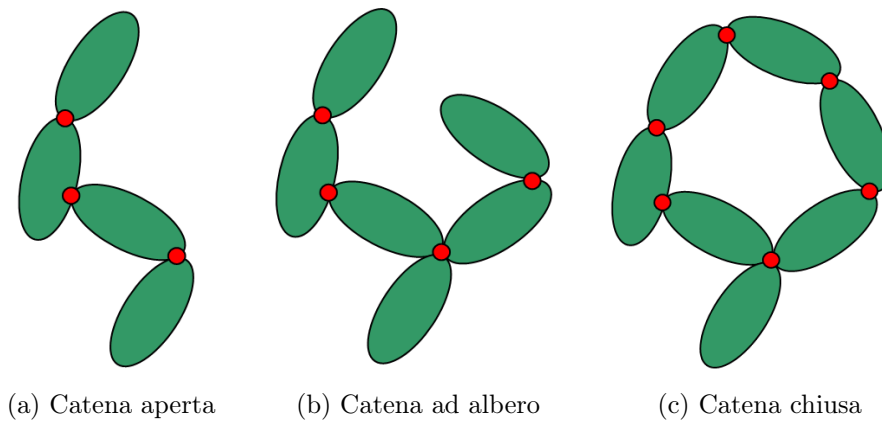


Figura 1.2: Catene cinematiche per i sistemi multibody flottanti

differenza che due o più membri riferiranno il loro stato relativamente allo stesso membro madre. Invece, nel caso rappresentato in Fig.1.1c, in cui è presente una catena cinematica chiusa, la definizione di un set minimo di coordinate non è univocamente determinata. In particolare è possibile interrompere la catena in corrispondenza di un qualsiasi vincolo appartenente al loop cinematico e ricondurci quindi al caso precedente; tuttavia l'arbitrarietà del punto di rottura determina una diversa definizione di variabili che descrivono lo stato cinematico. In questo caso è necessaria l'informazione su dove interrompere la catena oppure si dovranno considerare un numero ridondante di coordinate per la descrizione dello stato del sistema.

Negli esempi precedenti è sempre presente il vincolo che ancora l'intera catena cinematica al riferimento base: se si è in presenza di sistemi flottanti, come nel caso delle piattaforme spaziali, tale vincolo non è ammissibile nella modellazione. Nella Fig.1.2 sono rappresentate le tre casistiche per i sistemi multibody svincolati dal riferimento base: l'assenza del vincolo a terra determina una riduzione del grado di vincolo n_{constr} nell'Eq.1.1 con il conseguente incremento del set minimo delle variabili necessarie per rappresentare lo stato del sistema. Occorre notare che, a differenza dei casi in Fig.1.1, non esiste in generale un riferimento "privilegiato" ma ogni corpo potrebbe essere il punto di partenza a cui

riferire la posizione e l'orientamento relativo dei restanti membri della catena cinematica.

1.2 Tipologie di Vincoli

La stessa natura dei vincoli gioca un ruolo fondamentale nella scelta e nell'implementazione di un modello corretto per l'analisi del sistema. In particolare possiamo distinguere i vincoli in:

1. vincoli *olonomi scleronomi*: dipendenti solamente dalla posizione, possono essere definiti mediante una o più equazioni algebriche del tipo:

$$\psi_k(X) = 0 \quad (1.2)$$

dove si è indicato con X il generico vettore contenente tutte variabili x_i necessarie a descrivere lo stato del sistema, mentre ψ_k rappresenta la funzione di vincolo ($k = 1, 2, \dots, o$, con o rappresentante il numero di equazioni algebriche necessarie per rappresentare il vincolo stesso).

2. vincoli *olonomi reonomi*: dipendenti esplicitamente dalla posizione e dal tempo. Tali vincoli possono quindi essere espressi mediante equazioni algebriche del tipo:

$$\psi_k(X, t) = 0 \quad (1.3)$$

dove si è indicato con t la variabile temporale.

3. vincoli *anolonomi*: dipendenti esplicitamente anche dalla velocità e non esprimibili mediante l'Eq.1.2 o l'Eq. 1.3 in termini finiti. Le equazioni di vincolo possono essere poste nella forma:

$$\psi_h(X, \dot{X}, t) = 0 \quad (1.4)$$

(con $h = 1, 2, \dots, a$ dove a rappresenta il numero di equazioni anolonime presenti nel sistema) dove compare esplicitamente il vettore delle velocità \dot{X} del sistema, e l'integrazione dell'Eq.1.4 è strettamente dipendente dal percorso fatto dal sistema.

Tuttavia è possibile comprendere appieno tale classificazione se si fa riferimento ad una rappresentazione Pfaffiana[53] dei suddetti vincoli, cioè ponendo il vincolo in termini di relazioni ammissibili per le velocità del sistema \dot{x}_i , cioè nella forma¹:

$$\sum_{i=1}^{6n_{bodies}} \chi_{ki}(X, \dot{X}, t) \dot{x}_i + \tau_k(X, \dot{X}, t) = 0 \quad (1.5)$$

dove $\chi_{ki}(X, \dot{X}, t)$ e $\tau_k(X, \dot{X}, t)$ in generale sono funzioni dello stato X , delle relative velocità \dot{X} dello stesso e del tempo t .

¹Si definisce forma Pfaffiana una forma differenziale che è combinazione lineare delle velocità associate alle variabili che rappresentano lo stato del sistema.

I vincoli olonomi, siano essi scleronomi o reonomi, possono essere rappresentati mediante l'Eq.1.5 dove le funzioni χ_{ki} e τ_k sono di fatto le derivate parziali delle Eq.1.2 e 1.3 fatte rispettivamente rispetto alle variabili che compongono lo stato del sistema e nel tempo. Cioè la suddetta equazione pfaffiana diventa:

$$\frac{d\psi_k}{dt} = \sum_{i=1}^{6n_{bodies}} \frac{\partial\psi_k}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial\psi_k}{\partial t} = 0 \quad (1.6)$$

da cui è possibile ricondursi ad una *forma differenziale esatta* del tipo:

$$d\psi_k = \sum_{i=1}^{6n_{bodies}} \frac{\partial\psi_k}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial\psi_k}{\partial t} dt = 0 \quad (1.7)$$

consentendo l'integrazione e la definizione di un vincolo finito espresso dall'Eq.1.3 indipendentemente dall'evoluzione effettuata dal sistema. La stessa forma Pfaffiana nell'Eq.1.5 può rappresentare vincoli anolonomi quando le funzioni χ_{ki} e τ_k non possono essere integrate o l'integrazione dipende anche dal percorso effettuato dal sistema.

Generalizzando si può affermare che i vincoli olonomi possono rappresentare quelle tipologie di vincolo legate alla "geometria" del sistema multibody, mentre al caso di vincoli anolonomi si ascrivono quei vincoli così detti "cinematici" del sistema: le equazioni di vincolo rappresentate dalle Eq.1.2, 1.3 riducono il possibile spazio delle configurazioni finite ammissibili dai corpi e definiscono un sottospazio della dimensione data dall'Eq.1.1² in cui il sistema può trovare la propria configurazione, mentre la non integrabilità dell'Eq.1.5 nel caso anolonomo limita solamente il campo delle velocità ammissibili del sistema³, ma non lo spazio delle configurazioni da questo assumibili.

Da un punto di vista puramente formale, la definizione di queste tipologie di vincolo completa la casistica che si incontra nella meccanica classica e l'insieme totale degli o vincoli olonomi e a vincoli anolonomi presenti nel sistema concorre alla definizione del numero minimo necessario di coordinate generalizzate q_i e velocità generalizzate \dot{q}_i per muoversi lungo le superfici multidimensionali definite dai vincoli[4]. Infatti, la rappresentazione del moto del sistema multibody potrà quindi effettuata mediante due approcci ben distinti che si possono riassumere in:

1. Utilizzare il *set completo delle coordinate* x_i e delle *velocità* \dot{x}_i per descrivere totalmente lo stato del sistema e limitare mediante l'applicazione delle equazioni di vincolo lo spazio operativo.
2. Utilizzare un *set minimo di coordinate* q_i e delle *velocità* \dot{q}_i generalizzate, in cui la limitazione del moto dovuta ai vincoli è già stata applicata nella riduzione del numero delle variabili necessarie a descrivere lo stato del sistema.

L'utilizzo dell'una o dell'altra tecnica di rappresentazione è sostanzialmente legata al tipo di vincoli presenti nel sistema: se infatti sono presenti solo o vincoli di tipo olonomo,

²Si sostituisca nell'Eq.1.1 $n_{constr} = o$

³Si assuma valida l'Eq.1.1 per le variabili rappresentative della velocità e si sostituisca $n_{constr} = a$.

allora in linea di principio si potrà definire un set minimo di coordinate, generalmente individuate da un vettore Q , e le relative velocità generalizzate \dot{Q} , dove entrambi i vettori avranno dimensioni pari ai gradi di libertà ammessi dal sistema, cioè $n_{dof} = 6n_{bodies} - o$. Ma se si è in presenza anche di a vincoli anolonomi allora la rappresentazione minima non sarà più possibile ed occorrerà lavorare con un set completo di coordinate, indicato generalmente con il vettore X , e con le velocità, racchiuse nel vettore \dot{X} , ed imporre di volta in volta le $a + o$ equazioni di vincolo.

Nel presente lavoro di tesi in particolare sono state utilizzate entrambe le formulazioni, andandole ad applicare nella descrizione dei sistemi spaziali formati da più corpi. In particolare nell'analisi dei manipolatori robotici su piattaforme spaziali si sono utilizzati le coordinate q_i e le velocità \dot{q}_i per la descrizione dello stato assunto dai manipolatori, andando ad estendere l'approccio classico adottato nell'analisi cinematica degli stessi anche al caso di piattaforme flottanti, mentre nel caso delle space webs e nel controllo delle formazioni con codici multibody, l'approccio è stato quello di descrivere il sistema con un set completo di coordinate e quindi limitare gli atti di moto degli stessi mediante il soddisfacimento dei vincoli.

1.3 Spazio nullo dei vincoli

La rappresentazione dei vincoli olonomi (siano essi scleronomi o reonomi) di un sistema multibody mediante l'Eq.1.6 può esser messa in una forma matriciale del tipo:

$$\Psi_{,X}(X, t)\dot{X} + \Upsilon(X, t) = 0 \quad (1.8)$$

dove si è indicata con $\Psi_{,X}(X, t)$ la matrice contenente le $\frac{\partial \psi_k}{\partial x_i}(X, t)$ disposte in o righe (numero totale di equazioni di vincolo olonomo) e $6n_{bodies}$ colonne (numero delle variabili del set totale di coordinate) e con $\Upsilon(X, t)$ il vettore di o righe contenente le $\frac{\partial \psi_k}{\partial t}(X, t)$ per il caso di vincoli reonomi. Analogamente per gli a vincoli anolonomi nell'Eq.1.5 è possibile definire un sistema matriciale del tipo:

$$\Phi(X, t)\dot{X} + \Sigma(X, t) = 0 \quad (1.9)$$

dove la matrice $\Phi(X, t)$ contiene le $\chi_{hi}(X, t)$ e il vettore $\Sigma(X, t)$ contiene le $\tau_h(X, t)$ dei suddetti vincoli. In questo modo è possibile definire un sistema matriciale dei vincoli nella forma:

$$\mathbf{V}(X, t)\dot{X} + W(X, t) = 0 \quad (1.10)$$

in cui $\mathbf{V}(X, t) = \begin{bmatrix} \Psi_{,X}(X, t) \\ \Phi(X, t) \end{bmatrix}$ e $W(X, t) = \begin{bmatrix} \Upsilon(X, t) \\ \Sigma(X, t) \end{bmatrix}$.

Il rango della matrice $\mathbf{V}(X, t)$ definisce il numero di vincoli linearmente indipendenti presenti nel sistema e di fatto costituisce un utile strumento per quantificare in modo

corretto il numero minimo di variabili necessarie per descrivere il moto. Ma la matrice $\mathbf{V}(X, t)$ diviene fondamentale nell'identificazione delle traiettorie ammesse dai vincoli: in particolare è possibile identificare le direzioni nello spazio di stato ammesse dai vincoli attraverso l'individuazione della matrice $\mathbf{N}(X, t)$ rappresentante lo spazio nullo di $\mathbf{V}(X, t)$, cioè quella matrice per cui risulta essere verificata la seguente condizione:

$$\mathbf{V}(X, t)\mathbf{N}(X, t) = 0 \quad (1.11)$$

In particolare ogni colonna di $\mathbf{N}(X, t)$, chiamata $N_j(X, t)$, rappresenta una direzione di moto ammissibile dai vincoli. Ciò significa che sarà possibile scrivere ogni possibile moto del sottospazio ammesso dai vincoli come la combinazione lineare delle direzioni del moto $N_j(X, t)$ per le \dot{q}_j velocità generalizzate ed in forma matriciale, ottenendo quindi⁴:

$$\dot{X} = \mathbf{N}(X, t)\dot{Q} \quad (1.12)$$

nel caso di vincoli solamente scleronomi, mentre nel caso di vincoli reonomi si ha:

$$\dot{X} = \mathbf{N}(X, t)\dot{Q} - \mathbf{V}^\#(X, t)W(X, t) \quad (1.13)$$

dove si è indicato con l'apice $\#$ l'operazione di pseudoinversa⁵ della matrice di vincolo $\mathbf{V}(X, t)$ per ottenere un termine di drift dovuto al "moto" del vincolo. E' altresì da notare che sia nell'Eq.1.12 che nell'Eq.1.13 si è identificato il vettore \dot{Q} i cui elementi contengono le velocità generalizzate \dot{q}_j del sistema.

1.4 Formulazione di Eulero Lagrange per la Dinamica

La definizione delle equazioni di vincolo e la definizione del set minimo di coordinate q_j e velocità generalizzate \dot{q}_j , necessarie per descrivere lo stato di un particolare sistema multicorpo, è alla base della formulazione di Eulero Lagrange per l'identificazione delle equazioni della dinamica che governano il sistema stesso. Tale formulazione si basa sulla definizione di "quantità energetiche" legate al sistema stesso (energia cinetica \mathcal{K} e po-

⁴L'Eq.1.12 può scriversi nel seguente modo:

$$\dot{X} = \sum_{j=1}^{6n_{bodies} - rank(\mathbf{V})} N_j(X, t)\dot{q}_j$$

⁵Si definisce pseudoinversa di una matrice \mathbf{A} di dimensioni $m \times n$ e di rango pieno per colonne l'operazione :

$$\mathbf{A}^\# = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$$

mentre se il rango pieno è per righe si usa:

$$\mathbf{A}^\# = \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1}$$

tenziale del sistema \mathcal{U}) che possono essere combinate in modo da ottenere la funzione Lagrangiana \mathcal{L} , così definita [15, 4, 53]:

$$\mathcal{L}(Q, \dot{Q}, t) = \mathcal{K}(\dot{Q}, t) - \mathcal{U}(Q, t) \quad (1.14)$$

e quindi derivare da questa funzione le equazioni di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \mathcal{F}_i \quad (1.15)$$

che permettono di ottenere un sistema completo di equazioni indipendenti che descrivono totalmente la dinamica del sistema. Nell'Eq.1.15 compare il termine \mathcal{F}_i rappresentante la forza generalizzata associata alla coordinata generalizzata q_i che, come si vedrà in seguito, servirà per inserire nel modello eventuali forze non conservative agenti nelle direzioni ammesse dai vincoli.

Questa metodologia di analisi è del tutto analitica e permette di studiare i sistemi multibody attraverso proprietà per così dire “complessive” del sistema. Ciò significa ad esempio che l'equazione scritta per l' i -esimo grado di libertà q_i sarà influenzata anche dall'evoluzione e dall'andamento degli altri gradi di libertà. In particolare, se si esplicitano dall'Eq.1.15 le equazioni del moto, queste possono essere scritte in una forma matriciale del tipo [75]:

$$\mathbf{M}(Q)\ddot{Q} + \mathbf{C}(Q, \dot{Q})\dot{Q} + \mathbf{G}(Q) = \mathbf{F}(Q, \dot{Q}) \quad (1.16)$$

dove $\mathbf{M}(Q)$ è la matrice di massa i cui elementi m_{ij} possono essere visti come rappresentativi dell'inerzia “vista” dalla coordinata q_i quando la coordinata q_j accelera nel sistema. Il termine $\mathbf{C}(Q, \dot{Q})\dot{Q}$ è un termine antisimmetrico che tiene conto delle azioni centrifughe e di Coriolis che agiscono sui membri del sistema. In particolare si può pensare di esplicitare tale termine in modo tale che, se si considera l' i -esima equazione del moto (i -esima riga) si ottiene:

$$\mathbf{C}_i(Q, \dot{Q})\dot{Q} = \sum_{j,k=1}^{n_{dof}} h_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (1.17)$$

in cui:

1. le $h_{ijj} \dot{q}_j^2$ ($j = k$) rappresenta l'azione centrifuga sentita dalla coordinata risente dovuta alla velocità associata alla coordinata j -esima del sistema \dot{q}_j .
2. le $h_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k$ ($j \neq k$) rappresentano l'effetto di Coriolis indotto sul moto della coordinata i dall'accoppiamento delle velocità generalizzate \dot{q}_j e \dot{q}_k .

I termini contenuti invece nel vettore $\mathbf{G}(Q)$ rappresentano tutti quei termini che derivano dalle forze conservative presenti nel sistema, quindi di cui è nota l'espressione dell'energia potenziale: generalmente energia potenziale elastica e gravitazionale. Infine il vettore

re $\mathbf{F}(Q, \dot{Q})$ contiene tutte le altre forze generalizzate di altra natura che agiscono sulla coordinata generalizzata definita dall'indice della riga che si considera.

Quindi l'approccio lagrangiano permette di scrivere un set minimo di equazioni per un set minimo di coordinate generalizzate, in cui le matrici della dinamica risultano essere piene perchè in esse sono condensati tutti gli accoppiamenti dinamici ammissibili dai vincoli del sistema. Nelle equazioni non compaiono esplicitamente le reazioni vincolari, ciò in ragion del fatto che, come anche mostrato in [15], le equazioni del moto non sono altro che quelle ottenute andando ad applicare il principio di d'Alambert[53], cioè andando a proiettare le equazioni del moto proprio nelle direzioni concesse dal vincolo, cioè dove le reazioni vincolari non compiono lavoro.

L'utilità di questo tipo di formulazione sta proprio nel fatto che, essendo le equazioni derivate da funzioni globali del sistema come le energie cinetiche e potenziali, esse definiscono le traiettorie a minima energia percorse sulle superfici multidimensionali definite dai vincoli. Questo permette di avere alcune proprietà, come ad esempio di simmetria della matrice di massa o di antisimmetrica dei termini centrifughi, che spesso possono essere usate per progettare sistemi di controllo che permettano un utile funzionamento del sistema multibody.

In definitiva, l'utilizzo di questa metodologia di analisi può esser utile quando la geometria, il campo di applicazione e le caratteristiche dinamiche del sistema sono note e non modificabili: in questo modo sarà possibile derivare le equazioni del moto una volta per tutte ed utilizzarle non solo per la simulazione del funzionamento della dinamica, ma anche per essere d'aiusilio nella progettazione di leggi di controllo adattative o robuste per il sistema multibody.

1.5 Formulazione di Newton Eulero per la Dinamica

L'altro grande approccio che si può adottare nello studio dei sistemi multibody spaziali è quello che va sotto il nome di *formulazione euleriana* delle equazioni della dinamica del sistema[70, 5]. In questo caso la posizione e l'assetto di ogni membro del sistema multibody è descritto da un set completo di coordinate x_i e quindi sarà possibile scrivere tante equazioni quante sono le coordinate utilizzate. Come abbiamo visto, non tutte di queste coordinate sono necessarie nella descrizione del moto, ma la presenza di vincoli nel sistema aggiunge $o + a$ incognite al problema in quanto è necessario trovare le reazioni vincolari che forzano la dinamica dei corpi. Per poter completare il set di equazioni, sarà quindi necessario utilizzare le equazioni di vincolo, espresse nella sezione 1.2.

Andiamo a vedere più nel dettaglio in che cosa consiste tale metodo. Basandosi sulle assunzioni della meccanica classica⁶ sarà possibile scrivere per ogni corpo le seguenti

⁶Con tale termine si indica l'insieme dei principi e delle assunzioni fatte per studiare la meccanica. In particolare ci si riferisce ai principi della dinamica formulati da Newton, al principio di relatività di Galilei, alla presenza di riferimenti detti inerziali, al principio di conservazione della massa, al principio di conservazione della quantità di moto, al principio di conservazione del momento della quantità di moto ed

relazioni:

$$\frac{d\vec{Q}_i}{dt} = \vec{F}_i \quad (1.18)$$

$$\frac{d\vec{H}_i^{(P)}}{dt} = \vec{M}_i^{(P)} + \vec{V}_P \times \vec{Q}_i \quad (1.19)$$

dove \vec{Q}_i ed \vec{H}_i sono la quantità di moto ed il momento della quantità di moto (rispetto al polo P) dell' i -esimo corpo, \vec{F}_i e $\vec{M}_i^{(P)}$ sono le risultanti delle forze e dei momenti (rispetto al polo P) applicate al corpo e \vec{V}_P è la velocità del polo P rispetto ad un riferimento inerziale. Esse rappresentano un set di 6 equazioni differenziali che generalmente regolano la dinamica libera di un corpo. L'insieme di tutte le equazioni del moto per ogni corpo presente nel sistema concorre nella costruzione di un sistema di equazioni differenziali esprimibile da [74]:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{F} \quad (1.20)$$

dove \mathbf{M} è una matrice che contiene a blocchi 6×6 sulla sua diagonale le matrici di massa di tutti i corpi che compongono il sistema, \mathbf{F} è un vettore rappresentante le forze esterne agenti sui corpi del sistema.

Ma se la dinamica è forzata da un vincolo (sia esso olonomo o no) sarà necessario esplicitare le reazioni vincolari \vec{R}_h ed \vec{S}_h nelle Eq.1.18 e Eq.1.19. Di fatto si introducono due nuove incognite vettoriali: per completare il sistema sarà quindi necessario definire le equazioni di vincolo come le equazioni 1.2, 1.3 o 1.4 rispettivamente per i casi di vincoli olonomi scleronomi, olonomi reonomi o i vincoli anolonomi.

In realtà, come già visto nella sezione 1.3, è possibile scrivere tutti i vincoli in un sistema di equazioni Pfaffiane come nell'Eq.1.10. Derivando ulteriormente nel tempo il sistema espresso dall'Eq.1.10 [74], si ottiene un sistema in cui compare lo stato derivato due volte, cioè con le stesse variabili incognite presenti nell'Eq.1.20, come è evidenziato dalla seguente espressione:

$$\mathbf{V}\ddot{\mathbf{X}} = -\dot{\mathbf{V}}\dot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{W}} \quad (1.21)$$

dove si può definire un unico vettore riga $\Xi = -\dot{\mathbf{V}}\dot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{W}}$.

Attraverso la definizione di $o + a$ moltiplicatori di lagrange racchiusi nel vettore riga Λ , si potrà inserire il vincolo differenziale espresso dall'Eq.1.21 nell'Eq.1.20, in modo tale da poter ottenere un sistema risolutivo espresso dal seguente sistema⁷ :

al principio di conservazione dell'energia meccanica[4, 15].

⁷In realtà il passaggio logico che occorre fare è molto più sottile [37]. Abbiamo visto che sia i vincoli olonomi che anolonomi possono esser messi nella forma espressa dall'Eq.1.5 che rappresenta la forma differenziale (esatta o no in base al tipo di vincolo) dei vincoli presenti nel sistema, cioè permetterà di definire le velocità $\delta\dot{x}_i$ ammesse dal vincolo stesso, cioè che risolvono il sistema:

$$V_{ki}\delta\dot{x}_i = 0$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{V}^T \\ \mathbf{V} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{X}} \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \Xi \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

in cui il vettore delle incognite sarà di dimensioni $6N_{bodies} + o + a$ ed occorrerà invertire una matrice quadrata di dimensioni $(6N_{bodies} + o + a) \times (6N_{bodies} + o + a)$. Le reazioni vincolari che forzano il sistema sono espresse dal vettore:

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}^T \Lambda \quad (1.23)$$

e si trovano andando a risolvere l'intero sistema espresso dall'Eq.1.22.

Come si è visto, una tale metodologia è facilmente implementabile nei moderni calcolatori, perchè è possibile definire separatamente la dinamica di ogni corpo e quindi attraverso l'imposizione dei vincoli, calcolare le reazioni vincolari che forzano il moto a compiere una determinata traiettoria, senza la definizione analitica di grandezze quali quelle energetiche. Infatti proprio questa metodologia è alla base dei classici codici di analisi multibody presenti attualmente nel mercato o nella comunità scientifica, proprio perchè è più versatile e permette di cambiare il sistema senza la ridefinizione delle equazioni della dinamica.

1.6 Modello dinamico adottato

Moltissime varianti sono state introdotte nel corso degli anni, al fine di adattare più o meno l'una o l'altra metodologia di analisi a scopi ben precisi in ambito ingegneristico, anche nel campo spaziale. Numerose sono stati i miglioramenti negli algoritmi di risoluzione: ad esempio algoritmi di tipo ricorsivo al fine di ridurre lo sforzo computazionale dovuto alla risoluzione del sistema espresso dall'Eq.1.22, come illustrato in [91, 92, 55, 56, 13, 57, 43, 72] o algoritmi per l'inclusione degli effetti della flessibilità [73, 74, 70, 92, 91, 11, 13, 55], che

cioè per l'appunto una combinazione lineare delle velocità infinitesime per le direzioni definite dallo spazio nullo \mathbf{N} , come trovato nell'Eq.1.12.

Applicando il principio di d'Alambert al sistema espresso dall'Eq.1.20 è possibile ottenere $6N_{bodies}$ equazioni differenziali nella forma :

$$\delta \dot{x}_i (f_i - m_{ij} \ddot{x}_j) = 0$$

rappresentante il concetto fondamentale per cui il lavoro virtuale (in questo caso la potenza virtuale) in direzione perpendicolare al vincolo deve risultare sempre nullo. Ma dal momento che comunque vale la 1.5 nella sua forma vista sopra, allora dovendo valere per entrambi i sistemi di equazioni l'ugualianza a zero, si potrà scrivere:

$$\delta \dot{x}_i (f_i - m_{ij} \ddot{x}_j) = \lambda_k V_{ki} \delta \dot{x}_i$$

e dovendo valere il principio dei lavori virtuali per ogni spostamento virtuale ammissibile dal vincolo, risulterà sempre verificato il termine:

$$\delta \dot{x}_i (f_i - m_{ij} \ddot{x}_j - \lambda_k V_{ki}) = 0$$

da cui si ottiene la prima parte dell'Eq.1.22. La seconda parte invece è conseguenza diretta della derivazione delle equazioni di vincolo stesso del sistema.

caratterizza la dinamica delle strutture spaziali, solo per citare alcuni dei miglioramenti legati alla ricerca in campo spaziale. E parallelamente a questi miglioramenti dei modelli di simulazione si sono sviluppate teorie per il controllo dei sistemi multibody in orbita [24, 88, 87, 56].

Ma l'applicazione dei modelli multibody si è essenzialmente sviluppata negli anni soprattutto per esigenze di tipo industriale: una delle classiche applicazioni delle teorie multibody è il loro utilizzo per il controllo dei sistemi robotici di manipolazione terrestre [46, 15, 75, 47, 48]. Proprio in questo campo si è sviluppata una metodologia di analisi basata su un approccio matriciale che permette tra l'altro, di cambiare in modo automatizzabile il riferimento a cui riferire le grandezze vettoriali in gioco nella dinamica e nella cinematica di tali sistemi: tale problema per quanto banale, diventa complicato da gestire se il numero di corpi da modellare è sufficientemente alto. Inoltre la risoluzione del problema cinematico inverso, problema non lineare che può portare a più soluzioni, può esser compiuta mediante l'ausilio di codici basati proprio su tale metodologia sia per quanto riguarda i manipolatori terrestri [46], sia per quanto riguarda eventuali manipolatori spaziali [24]. Queste considerazioni, oltre che ad una più semplice definizione delle caratteristiche cinematiche dei sistemi multibody, basata sulle convenzioni di Denavit Hartenberg [20], hanno portato il candidato ad adottare tali metodologie per lo sviluppo del proprio codice numerico. Da un'attenta analisi bibliografica non è stato trovato nessun adattamento della suddetta rappresentazione matriciale al caso di manipolatori spaziali, se non nell'approccio detto di "manipolatore virtuale" introdotto in [87, 88], utilizzato soprattutto nella risoluzione del problema cinematico dei manipolatori seriali montati su piattaforme spaziali. L'utilizzo di tale teoria per ricavare e integrare le equazioni della dinamica di oggetti flottanti in orbita non è mai stata teorizzata ed applicata.

Il modello della dinamica ottenibile mediante l'utilizzo di un'approccio matriciale, come esposto in [46, 47, 48], pur partendo da un approccio di tipo newtoniano, permette di definire univocamente la direzione ammessa dai vincoli imposti sul sistema e quindi di poter scrivere un set minimo di equazioni differenziali in un set minimo di incognite, come tipicamente si ottiene da un approccio di tipo lagrangiano. Tale caratteristica può esser utile se si ha a che fare con sistemi come i manipolatori spaziali, la cui topologia risulta essere fissata e descritta in modo univoco dalle convenzioni di Denavit Hartenberg, e quindi una simulazione di tipo newtoniano classico risulterebbe superflua. Per questo motivo lo sforzo del candidato è stato quello di valutare i benefici dell'adattamento al caso spaziale della metodologia di analisi con matrici omogenee, andando ad eliminare di fatto l'ancoraggio a terra su cui questa teoria si era basata.

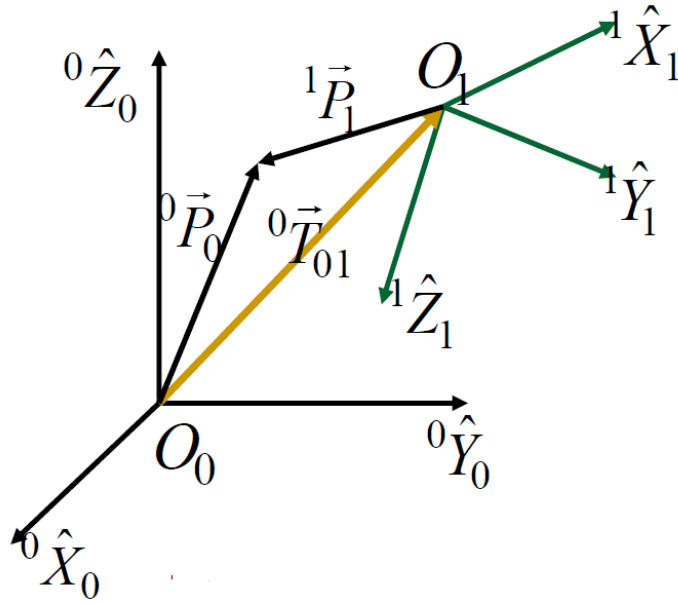


Figura 1.3: Cambiamento di riferimento con l'approccio matriciale

1.7 Rappresentazione della posizione e dell'orientamento di un corpo mediante matrici omogenee

L'approccio di tipo matriciale per lo studio della cinematica dei sistemi di corpi rigidi è comunemente utilizzato nella modellazione e nel controllo di manipolatori industriali ed in tutti quei meccanismi in cui è presente una catena cinematica aperta. Tale teoria si basa sul metodo matriciale proposto da Denavit e Hartenberg [20] per rappresentare contemporaneamente posizione e orientamento di un corpo nello spazio mediante l'utilizzo di matrici 4x4 e successivamente esteso da Uicker all'analisi della cinematica dei sistemi multibody [85, 19].

In Fig.1.3 sono presenti due riferimenti (0 ed 1) e un punto P . La posizione del punto P può essere identificata dal vettore ${}^0\vec{P}_0$ ⁸ con origine nel punto O_0 e le cui componenti sono riferite al riferimento 0. Ma lo stesso punto può essere identificato da un vettore ${}^1\vec{P}_1$ se riferito al riferimento 1 con origine nel punto O_1 . Tra i due vettori vale la relazione:

$${}^0\vec{P}_0 = {}^0\vec{T}_{01} + {}^0\mathbf{R}_{01} {}^1\vec{P}_1 \quad (1.24)$$

dove si sono ruotate le coordinate del vettore ${}^1\vec{P}_1$ mediante la premoltiplicazione del vettore stesso per la matrice di rotazione ${}^0\mathbf{R}_{01}$, in modo averle riferite al sistema di riferimento 0 e quindi poter sommare il vettore distanza tra le due origini dei sistemi di riferimento ${}^0\vec{T}_{01}$. Si è quindi operata una roto-traslazione delle coordinate di un punto da un riferimento 1 ad un riferimento 0. Se si definisce il vettore di coordinate omogenee 1P_1 espresso nel seguente modo:

⁸Si indica con l'apice preposto alla lettera il sistema di riferimento a cui si riferiscono le coordinate del vettore, mentre con il pedice l'origine da cui è definito il vettore.

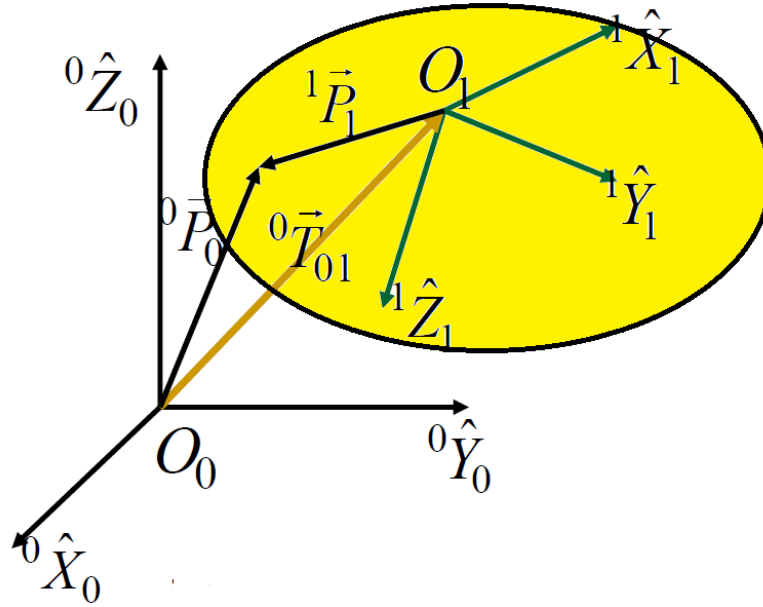


Figura 1.4: Rototraslazione delle coordinate di un punto appartenente ad un corpo rigido

$${}^1P_1 = \begin{bmatrix} {}^1\vec{P}_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

cioè un vettore di 4 componenti di cui l'ultima rappresenta un fattore di scala unitario, allora è possibile effettuare la stessa rototraslazione espressa dall'Eq.1.24 mediante la seguente operazione matriciale:

$${}^0P_0 = \begin{bmatrix} {}^0\vec{P}_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_{01} & {}^0\vec{T}_{01} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1\vec{P}_1 \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0\mathbf{M}_{01} {}^1P_1 \quad (1.26)$$

dove la matrice ${}^0\mathbf{M}_{01}$ prende il nome di matrice di posizione del riferimento 1 rispetto al polo 0 ed al riferimento 0.

L'utilizzo di questo tipo di rappresentazione è utile perchè con una sola operazione matriciale si possono effettuare rototraslazioni di coordinate di grandezze vettoriali da un riferimento corpo ad un altro.

Se ora si considera la Fig.1.4, in cui il punto P è appartenente ad un corpo rigido 1 a cui è associata la terna di riferimento 1, allora l'Eq.1.26 assume il significato di matrice di posizione del corpo 1 rispetto al riferimento 0, proprio perchè rappresenta in modo univoco la posizione di qualsiasi punto del corpo, definito da un vettore 1P_1 generico, rispetto ad un altro riferimento come ad esempio il riferimento 0.

Tra l'altro l'inversione dell'operazione, cioè il cambiamento di riferimento da 0 ad 1 è effettuato mediante l'inversione della matrice ${}^0\mathbf{M}_{01}$ stessa, infatti si ha che:

$${}^1\mathbf{M}_{10} = {}^0\mathbf{M}_{01}^{-1} = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_{01}^T & -{}^0\mathbf{R}_{01}^T {}^0\vec{T}_{01} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

Una tale rappresentazione della posizione di un corpo diventa molto comoda se asso-

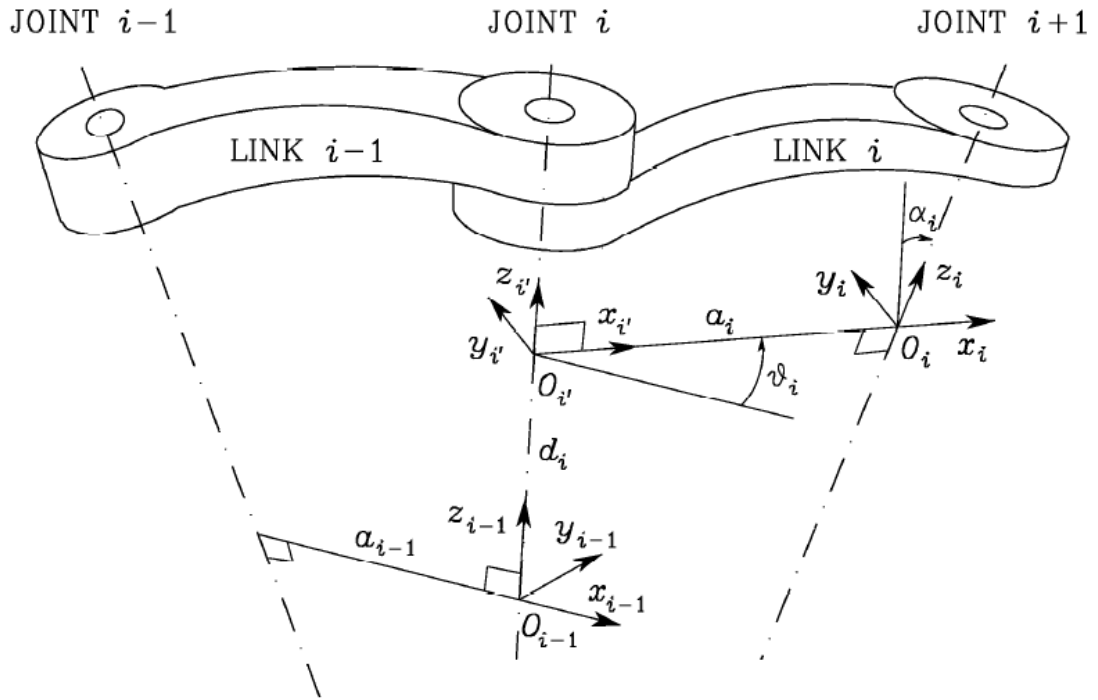


Figura 1.5: Convenzioni di Denavit Hartenberg (da [75])

ciata ad una scelta opportuna dei sistemi di riferimento corpo che costituiscono il sistema multibody. In particolare nello studio delle catene cinematiche seriali, come nel caso dei manipolatori industriali terrestri, è possibile adottare la convenzione di Denavit-Hartenberg per un'attribuzione univoca dei sistemi di riferimento.

Si consideri ad esempio la Fig.1.5, in cui sono rappresentati due link di una ipotetica catena cinematica uniti da un giunto di tipo rotoidale⁹. L'attribuzione della terna di riferimento per i -esimo link della catena cinematica si basa sulle seguenti regole:

1. L'asse \hat{Z}_i è coincidente con l'asse del giunto che collega il link i al link $i+1$.
2. L'asse \hat{X}_i è normale ed intersecante l'asse \hat{Z}_{i-1} e diretto da \hat{Z}_{i-1} a \hat{Z}_i
3. L'origine del riferimento O_i è ottenuta dall'intersezione dell'asse \hat{X}_i con l'asse \hat{Z}_i
4. L'asse \hat{Y}_i forma una terna destra con gli assi \hat{Z}_i ed \hat{X}_i nell'origine O_i del riferimento.

Esistono poi dei casi particolari dove la definizione con queste regole non è possibile per cui si adottano le seguenti convenzioni:

- se \hat{Z}_{i-1} e \hat{Z}_i si intersecano, allora l'asse \hat{X}_i è diretto nella direzione del prodotto vettoriale $\hat{Z}_{i-1} \times \hat{Z}_i$.

⁹Si definisce giunto un collegamento tra due membri di una catena cinematica, atto a bloccare alcuni gradi di mobilità relativa tra i due corpi e lasciarne consentiti altri. In particolare le tipologie di giunto più comuni sono quelli rotoidali (è consentita solo una rotazione relativa tra i due corpi) e quello prismatico (in cui è consentita una traslazione relativa tra i due link). Questo tipo di giunti tipicamente fornisce dei vincoli di tipo olonomo.

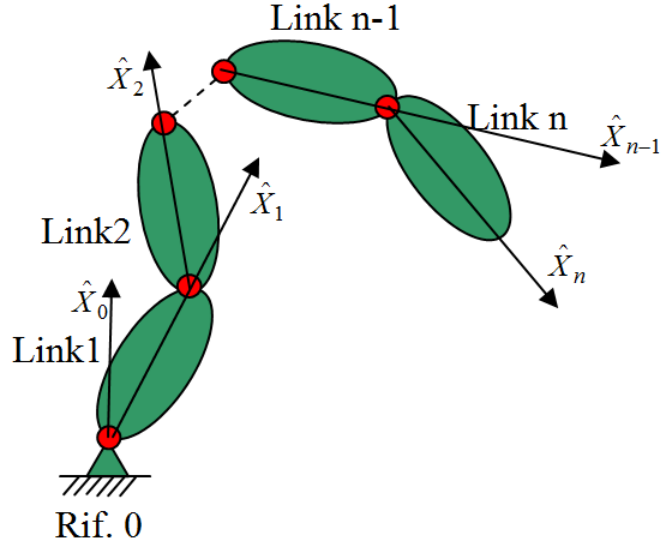


Figura 1.6: Catena cinematica aperta fissata a terra

- se \hat{Z}_i è parallelo a \hat{Z}_{i-1} si pone \hat{X}_i in modo tale da passare per l'origine della terna i-1.

Come anche mostrato in Fig.1.5 tra due terne contigue è possibile definire una serie di parametri, detti appunto parametri di *Denavit Hartenberg*:

1. l'angolo tra gli assi \hat{Z}_{i-1} e \hat{Z}_i è indicato con α_i ed è chiamato *torsione* (twist) del membro i
2. l'angolo tra gli assi \hat{X}_{i-1} e \hat{X}_i è indicato con θ_i ed è chiamato *rotazione*
3. la distanza tra l'origine della terna i-1 (O_{i-1}) e l'asse \hat{X}_i è indicata con d_i ed è chiamata con *offset* del link
4. la distanza tra origine della terna i (O_i) e l'asse \hat{Z}_{i-1} è indicata con a_i ed è chiamata *lunghezza* del membro i

Se si adottano tali convenzioni e definizioni, allora la matrice di rototraslazione che definisce la posizione relativa tra i due link contigui i-1 ed i può scriversi nel seguente modo:

$${}^{i-1}\mathbf{M}_{i-1,i} = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i}c_{\alpha_i} & s_{\theta_i}s_{\alpha_i} & \vdots & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i}s_{\alpha_i} & \vdots & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & \vdots & d_i \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

Assegnata una catena cinematica fissata a terra (riferimento 0), come rappresentato in Fig.1.6, sarà quindi possibile individuare la posizione e l'orientamento del corpo n-esimo rispetto al riferimento base 0, mediante la:

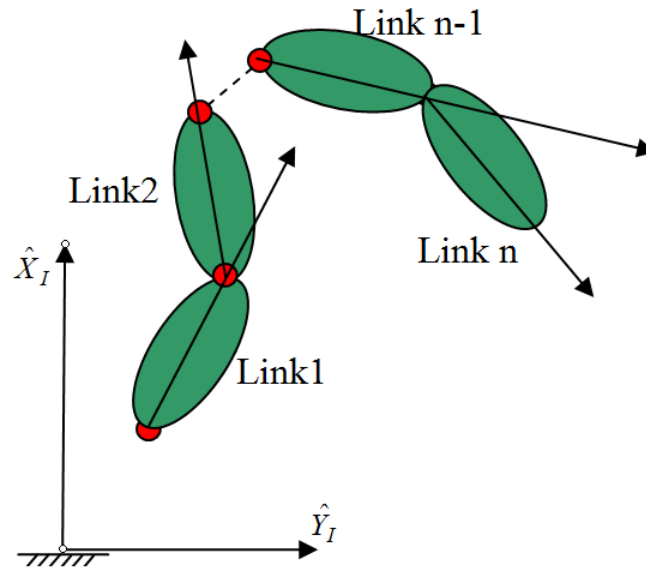


Figura 1.7: Catena cinematica flottante

$${}^0M_{0n} = \prod_{i=1}^n {}^{i-1}M_{i-1,i} = {}^0M_{01} {}^1M_{12} \dots {}^{n-1}M_{n-1,n} \quad (1.29)$$

e così per tutti i membri intermedi. Ovviamente le cose cambiano se, invece che una catena cinematica ancorata a terra, abbiamo una catena cinematica flottante. In questo caso non sarà possibile definire dei parametri come è indicato dalla convenzione di Denavit Hartenberg ma, facendo riferimento alla Fig.1.7, è possibile notare che tra il riferimento inerziale I e la prima piattaforma della catena cinematica intercorrerà sempre una matrice di posizione ${}^I M_{I1}$ così definita:

$${}^I M_{I1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{I1} & \vec{T}_{I1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

dove ${}^I \mathbf{R}_{I1}$ è la matrice di rotazione che trasforma le coordinate prese nel riferimento 1 in coordinate riferite al riferimento inerziale, \vec{T}_{I1} è il vettore tra l'origine del sistema inerziale e quella del primo corpo della catena cinematica flottante¹⁰.

1.8 Rappresentazione della velocità e dell'accelerazione mediante l'approccio matriciale

Attraverso la rappresentazione matriciale 4x4 è possibile anche definire in modo molto elegante, ma allo stesso tempo utile, la matrice delle velocità e quella delle accelerazioni associate al moto di un corpo rispetto ad un altro.

¹⁰Bisogna porre attenzione alla definizione della matrice ${}^I \mathbf{R}_{I1}$ perchè questa è la trasposta di quella che generalmente viene usata in campo spaziale: dove si definisce matrice di rotazione la matrice che trasforma le coordinate dal riferimento inerziale a quello corpo.

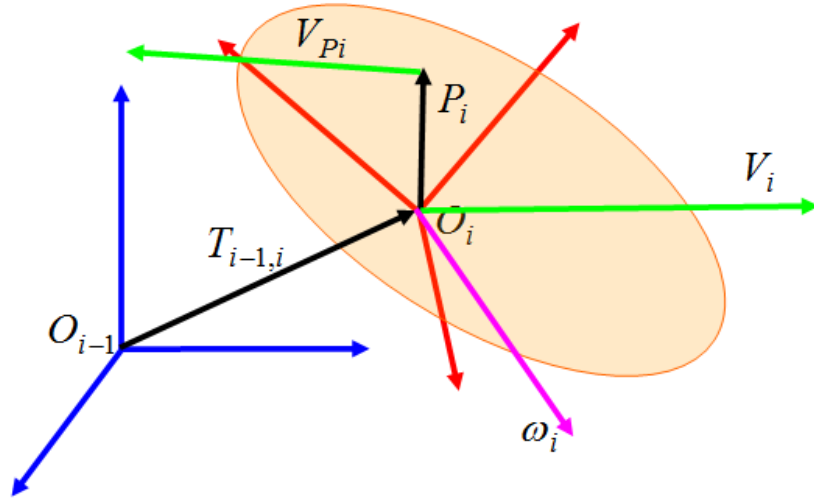


Figura 1.8: Definizione della matrice delle velocità di un corpo

Si consideri l'esempio mostrato in Fig.1.8 in cui l'origine di un sistema di riferimento si trovi in movimento con una velocità \vec{V}_i ed il corpo stia ruotando di una velocità angolare $\vec{\omega}_i$, è noto che la velocità di un generico punto \vec{P}_i appartenente al corpo sarà data da:

$$\vec{V}_{P_i} = \vec{V}_i + \vec{\omega}_i \times \vec{P}_i \quad (1.31)$$

ma allora si potrà rappresentare lo stato cinematico di un corpo andando a definire la seguente matrice delle velocità:

$$\mathbf{W}_i = \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_{iI} & \vec{V}_{iI} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

dove si è indicato con il simbolo $\tilde{\omega}$ la matrice antisimmetrica associata alla velocità angolare del corpo¹¹ in modo tale che la velocità del punto P_i possa esser trovata mediante l'operazione matriciale:

$$V_{P_i} = \mathbf{W}_i P_i \quad (1.33)$$

Analogamente l'accelerazione di un punto \vec{A}_{P_i} dovuta al moto del corpo di appartenenza è data dall'operazione vettoriale:

$$\vec{A}_{P_i} = \vec{A}_i + \dot{\vec{\omega}}_i \times \vec{P}_i + \vec{\omega}_i \times (\vec{\omega}_i \times \vec{P}_i) \quad (1.34)$$

in cui $\dot{\vec{\omega}}_i$ è l'accelerazione angolare del corpo i e \vec{A}_i è l'accelerazione dell'origine del ri-

¹¹Cioè:

$$\tilde{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

ferimento associato al corpo i , che potrà essere riscritta in forma matriciale mediante la:

$$A_{P_i} = \mathbf{H}_i P_i \quad (1.35)$$

dove la matrice \mathbf{H}_i è la matrice delle accelerazioni così definita:

$$\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} \ddot{\tilde{\omega}}_{iI} + \tilde{\omega}_{iI}^2 & \vec{A}_{iI} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

dove $\tilde{\omega}_{iI}^2$ fa sì che si possa sviluppare il doppio prodotto vettore della velocità angolare del corpo in forma matriciale e quindi far comparire i termini centrifughi dovuti alla rotazione del corpo¹².

Se si considerano le due tipologie di vincolo olonomo che si incontrano maggiormente nei sistemi meccanici, se si sono adottate le convenzioni di Denavit Hartenberg, risulterà possibile scrivere le matrici di velocità relativa tra due link contigui nel seguente modo:

1. se il vincolo risulta essere *rotoidale* allora la matrice delle velocità del corpo i rispetto al corpo $i-1$ è data da:

$${}^{i-1}\mathbf{W}_{i-1,i} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{q}_i = {}^{i-1}\mathbf{L}_{i-1,i} \dot{q}_i \quad (1.37)$$

mentre la matrice delle accelerazioni tra i due corpi potrà essere scritta nel seguente modo:

$${}^{i-1}\mathbf{H}_{i-1,i} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ddot{q}_i + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{q}_i^2 = {}^{i-1}\mathbf{L}_{i-1,i} \ddot{q}_i + {}^{i-1}\mathbf{L}_{i-1,i}^2 \dot{q}_i^2 \quad (1.38)$$

dove \dot{q}_i e \ddot{q}_i rappresentano le coordinate di giunto tra il membro $i-1$ ed il membro i .

2. se il vincolo risulta essere *prismatico* allora la matrice delle velocità del corpo i

¹²La relazione tra la derivata della matrice di posizione e la matrice di velocità è la seguente:

$$\mathbf{W} = \dot{\mathbf{M}}\mathbf{M}^{-1}$$

e quella tra la derivata della matrice delle posizioni e la matrice delle accelerazioni è:

$$\mathbf{H} = \ddot{\mathbf{M}}\mathbf{M}^{-1}$$

rispetto al corpo i-1 è data da:

$${}^{i-1}\mathbf{W}_{i-1,i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{q}_i = {}^{i-1}\mathbf{L}_{i-1,i}\dot{q}_i \quad (1.39)$$

mentre la matrice delle accelerazioni tra i due corpi potrà esser scritta nel seguente modo:

$${}^{i-1}\mathbf{H}_{i-1,i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ddot{q}_i + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{q}_i^2 = {}^{i-1}\mathbf{L}_{i-1,i}\ddot{q}_i + {}^{i-1}\mathbf{L}_{i-1,i}^2\dot{q}_i^2 \quad (1.40)$$

dove \dot{q}_i e \ddot{q}_i rappresentano le coordinate di giunto tra il membro i-1 ed il membro i.

E' da notare che, attraverso la definizione della matrice di vincolo ${}^{i-1}\mathbf{L}_{i-1,i}$ è sempre possibile definire in modo univoco la direzione del moto relativo tra due corpi ammessa dal vincolo stesso. Di fatto, ritornando al discorso svolto nelle prime sezioni del capitolo, in questo modo è possibile definire una velocità generalizzata \dot{q}_i che in questo caso coincide con la velocità della coordinata di giunto. La matrice ${}^{i-1}\mathbf{L}_{i-1,i}$ può esser pensata come un versore appartenente allo spazio nullo di definizione del vincolo tra i due corpi.

E' inoltre possibile cambiare il sistema di riferimento con cui sono espresse tali matrici cinematiche, infatti vale la regola:

$$\begin{aligned} {}^k\mathbf{W}_{ij} &= {}^k\mathbf{M}_{ki} {}^i\mathbf{W}_{ij} {}^k\mathbf{M}_{ki}^{-1} \\ {}^k\mathbf{H}_{ij} &= {}^k\mathbf{M}_{ki} {}^i\mathbf{H}_{ij} {}^k\mathbf{M}_{ki}^{-1} \end{aligned} \quad (1.41)$$

che permette il passaggio da un riferimento k a partire dalla conoscenza delle matrici di posizione tra terna k e terna i, quest'ultima è quella rispetto a cui sono espresse le componenti della velocità del corpo j. Infine è possibile scrivere le relazioni relative alla dinamica relativa tra tre riferimenti i, j, k riferite ad un quarto riferimento h;

$${}^h\mathbf{M}_{ik} = {}^h\mathbf{M}_{ij} {}^h\mathbf{M}_{jk} \quad (1.42)$$

$${}^h\mathbf{W}_{ik} = {}^h\mathbf{W}_{ij} + {}^h\mathbf{W}_{jk} \quad (1.43)$$

$${}^h\mathbf{H}_{ik} = {}^h\mathbf{H}_{ij} + {}^h\mathbf{H}_{jk} + 2{}^h\mathbf{W}_{ij} {}^h\mathbf{W}_{jk} \quad (1.44)$$

Quindi se si ha un sistema come quello in Fig.1.6, allora sarà possibile trovare la matrice di velocità e quella di accelerazione dell'ultimo corpo andando ad applicare le Eq.1.42, 1.43 e 1.44:

$$\mathbf{W}_{0n} = \sum_{i=1}^n \mathbf{L}_{i-1,i} \dot{q}_i \quad (1.45)$$

$$\mathbf{H}_{0n} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{L}_{i-1,i}^2 \dot{q}_i^2 + \mathbf{L}_{i-1,i} \ddot{q}_i) + 2 \sum_{j=2}^n \sum_{k=1}^{j-1} \mathbf{L}_{j-1,j} \mathbf{L}_{k-1,k} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (1.46)$$

dove ovviamente il riferimento a cui sono riferite tutte le matrici deve essere unico per tutte. Nell'Eq.1.46 è possibile distinguere in modo molto evidente tutti e tre i tipi di accelerazioni generalmente presenti nei sistemi in movimento relativo: un termine di accelerazione relativa pura, i termini centrifughi e gli accoppiamenti di Coriolis dovuti ai movimenti relativi tra le varie parti del sistema.

Generalmente tali matrici servono per risolvere, in modo molto semplice e soprattutto automatizzabile, i problemi cinematici diretti ed inversi per il controllo ed il buon funzionamento dei sistemi robotici terrestri. Attraverso l'ausilio di queste matrici, grandezze cinematiche come l'accelerazione o la velocità di un corpo possono essere riferite al riferimento di un qualsiasi altro corpo senza dover creare complessi algoritmi per risolvere separatamente il problema traslazionale che rotazionale dei corpi: con la definizione delle matrici di accelerazione e velocità attraverso semplici operazioni matriciali si tratterà sia il problema traslazionale che il problema rotazionale del sistema multibody.

1.9 Matrici per lo studio della dinamica dei manipolatori terrestri

Come visto nella sezione precedente, è possibile trovare una forma espressa in forma matriciale delle equazioni cinematiche relative al moto di sistemi di corpi rigidi. Sarebbe interessante se, con matrici del tutto analoghe, si potesse trattare anche il problema dinamico. Una possibile teoria in merito è stata sviluppata da [47, 48], in cui si definiscono delle matrici molto simili a quelle viste in precedenza, ma relative a grandezze tipicamente usate nello studio della dinamica (matrici di inerzia e di forza).

In particolare, per un corpo è possibile definire una matrice delle azioni ${}^i\Phi$ applicate al corpo i ¹³:

$${}^i\Phi_i = \begin{bmatrix} {}^i\tilde{C} & {}^iF \\ -{}^iF^T & 0 \end{bmatrix} \quad (1.47)$$

¹³Tale matrice deriva dalla definizione:

$${}^i\Phi = \int (PF^T - FP^T) dV$$

dove ogni singola forza viene moltiplicata per la posizione del punto di applicazione in modo tale da formare una matrice di cui si prende solo la parte antisimmetrica andando ad operare una sottrazione della trasposta.

che gode della proprietà di antisimmetria e contiene le componenti della coppia C riferite al riferimento del corpo stesso sia come componenti che come polo di calcolo coincidente con l'origine del sistema corpo, e le componenti di tutte le forze F applicate al corpo.

Analogamente è possibile definire un pseudo-tensore d'inerzia ${}^i\mathbf{J}_i$ del corpo i :

$${}^i\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} {}^i\hat{\mathbf{J}}_i & {}^iS_i \\ {}^iS_i^T & m_i \end{bmatrix} \quad (1.48)$$

in cui ${}^i\hat{\mathbf{J}}_i$ è un pseudo-tensore d'inerzia¹⁴, iS_i è l'eventuale momento statico presente tra corpo e riferimento considerato ed m_i è la massa del corpo stesso.

Se si osserva ottentamente le equazioni del moto di tipo vettoriale:

$$\vec{F}_i = m_i \vec{A}_i \quad (1.49)$$

$$\vec{C}_i = \mathbf{I}_i \cdot \dot{\vec{\omega}}_i + \vec{\omega}_i \times (\mathbf{I}_i \cdot \vec{\omega}_i) + (P - 0) \times \vec{F}_i \quad (1.50)$$

allora una possibile relazione in forma matriciale che “contenga” entrambe le equazioni della dinamica del singolo corpo può esser trovata nella seguente espressione¹⁵:

$$\Phi_i = \mathbf{H}_{oi}\mathbf{J}_i - \mathbf{J}_i\mathbf{H}_{oi}^T = skew[\mathbf{H}_{oi}\mathbf{J}_i] \quad (1.51)$$

che di fatto è una relazione matriciale antisimmetrica 4x4 le cui 6 componenti fuori diagonale rappresentano le 6 equazioni della dinamica classica espresse dalle Eq.1.18 e Eq.1.19. Si può altresì notare che valgono le seguenti proprietà di cambio di riferimento:

$$\begin{aligned} {}^k\Phi_i &= {}^k\mathbf{M}_{ki} {}^i\Phi_i {}^k\mathbf{M}_{ki}^T \\ {}^k\mathbf{J}_i &= {}^k\mathbf{M}_{ki} {}^i\mathbf{J}_i {}^k\mathbf{M}_{ki}^T \end{aligned} \quad (1.52)$$

per cui anche in questo caso, cambiare riferimento e polo di calcolo per entrambi i problemi rotazionale e traslazionale di un corpo diventa automatico, dovendo solo svolgere delle semplici operazioni matriciali. Questo rappresenta un enorme vantaggio se si pensa

¹⁴Infatti tale tensore ha come elementi:

$${}^i\hat{\mathbf{J}}_i = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} \end{bmatrix}$$

dove $J_{xx} = \int x^2 dm$, $J_{yy} = \int y^2 dm$, $J_{zz} = \int z^2 dm$, $J_{xy} = \int xy dm$, $J_{xz} = \int xz dm$ ed $J_{yz} = \int yz dm$. Tali elementi sono in relazione con il diadico d'inerzia classico ${}^i\mathbf{I}_i$ mediante le relazioni:

$$J_{xx} = \frac{-I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}}{2} \quad J_{yy} = \frac{-I_{yy} + I_{zz} + I_{xx}}{2} \quad J_{zz} = \frac{-I_{zz} + I_{yy} + I_{xx}}{2}$$

$$J_{xy} = -I_{xy} \quad J_{yz} = -I_{yz} \quad J_{zx} = -I_{zx}$$

$$I_{xx} = J_{yy} + J_{zz} \quad I_{yy} = J_{zz} + J_{xx} \quad I_{zz} = J_{xx} + J_{yy}$$

¹⁵Per ulteriori dettagli ci si riferisca a [46],

che, normalmente le equazioni della dinamica di rotazione sono scritte nel riferimento corpo ed effettuare contemporaneamente una rotazione del sistema di riferimento ed una traslazione di polo è spesso una procedura laboriosa se si trattano separatamente i due problemi.

1.10 Algoritmo di derivazione delle equazioni della dinamica

Per lo studio dei manipolatori terrestri esiste un algoritmo di derivazione delle equazioni della dinamica che, basandosi sulle equazioni matriciali rappresentanti la dinamica dei corpi che compongono il sistema, riesce a proiettare tali equazioni nelle direzioni ammesse del vincolo, al fine di ottenere un set minimo di equazioni differenziali nelle sole accelerazioni generalizzate rappresentate dalle \ddot{q}_i .

Sfortunatamente questo algoritmo si basa sull'assunzione che tutte le grandezze cinematiche e dinamiche siano riferite alla base su cui è ancorato il sistema multibody e tale base deve essere ferma nello spazio inerziale per ottenere una corretta rappresentazione della dinamica del sistema.

Con riferimento sempre alla Fig.1.6 possiamo notare che il movimento di un generico corpo della catena cinematica sarà dato dalla somma delle azioni provocate dal movimento dei giunti che si trovano tra il corpo considerato e la base del sistema multibody. In definitiva per ogni corpo i -esimo della catena cinematica si trova una relazione del tipo:

$$\mathbf{H}_{0i} = \sum_{j=1}^i \mathbf{L}_{j-1,j} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^i \mathbf{L}_{j-1,j}^2 \dot{q}_j^2 + 2 \sum_{j=2}^i \sum_{k=1}^{j-1} \mathbf{L}_{j-1,j} \mathbf{L}_{k-1,k} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (1.53)$$

dove possiamo distinguere dei termini moltiplicati per le derivate seconde delle variabili associate ai giunti e altri termini rappresentanti le azioni centrifughe e di Coriolis provocate dal movimento dei giunti che si trovano a monte del corpo considerato. Questi ultimi termini si possono racchiudere in un'unica matrice \mathbf{H}_i^* definita come segue:

$$\mathbf{H}_i^* = \sum_{j=1}^i \mathbf{L}_{j-1,j}^2 \dot{q}_j^2 + 2 \sum_{j=2}^i \sum_{k=1}^{j-1} \mathbf{L}_{j-1,j} \mathbf{L}_{k-1,k} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (1.54)$$

e quindi la matrice delle accelerazioni del corpo i potrà esser riscritta come:

$$\mathbf{H}_{0i} = \sum_{j=1}^i \mathbf{L}_{j-1,j} \ddot{q}_j + \mathbf{H}_i^* \quad (1.55)$$

di cui il primo termine risulta essere incognito, mentre il secondo è noto.

Allora per ogni corpo della catena cinematica sarà possibile riscrivere l'Eq.1.51 nel seguente modo:

$$\Phi_i = skew \left[\left(\sum_{j=1}^i \mathbf{L}_{j-1,j} \ddot{\mathbf{q}}_j + \mathbf{H}_i^* \right) \mathbf{J}_i \right] \quad (1.56)$$

Ma anche le azioni che agiscono sull' i -esimo corpo potranno essere scomposte in:

1. azioni esterne, come la forza peso applicata al corpo stesso, definita nel seguente modo:

$$\Phi_i^g = skew(\mathbf{G}_i \mathbf{J}_i) \quad (1.57)$$

dove \mathbf{G}_i è la matrice di accelerazione di gravità. Ma sull' i -esimo corpo graveranno anche i pesi dei corpi che stanno a valle dello stesso oltre che al proprio:

$$\hat{\Phi}_i^g = \sum_{k=i+1}^n skew(\mathbf{G}_k \mathbf{J}_k) \quad (1.58)$$

2. azioni “inerziali” dovute al moto dei corpi a valle di quello considerato:

$$\hat{\Phi}_i = \sum_{k=i+1}^n skew \left[\left(\sum_{j=1}^k \mathbf{L}_{j-1,j} \ddot{\mathbf{q}}_j + \mathbf{H}_k^* \right) \mathbf{J}_k \right] \quad (1.59)$$

3. la reazione vincolare dovuta al corpo precedente al corpo i nella catena cinematica $-\Phi_i^*$.

Per cui sul corpo i sarà possibile trovare la Φ_i agente su di esso attraverso il bilancio delle azioni:

$$\Phi_i = -\Phi_i^* + \Phi_i^g + \hat{\Phi}_i^g + \hat{\Phi}_i \quad (1.60)$$

Applicando il principio di d’Alambert all’equazione relativa al i -esimo corpo, sarà possibile trovare un’equazione scalare nelle incognite \ddot{q}_j con $j = 1, 2, \dots, n$ ottenuta dall’uguaglianza a zero del lavoro virtuale $\delta \mathcal{L}_i$ delle azioni che insistono sul i -esimo giunto della catena cinematica dovuto al suo spostamento infinitesimo¹⁶:

¹⁶Sostituendo l’Eq.1.60 nell’Eq.1.56 e portando tutto al primo membro si ottiene:

$$-\Phi_i^* + \Phi_i^g + \hat{\Phi}_i^g + \hat{\Phi}_i + skew \left[\left(\sum_{j=1}^i \mathbf{L}_{j-1,j} \ddot{\mathbf{q}}_j + \mathbf{H}_i^* \right) \mathbf{J}_i \right] = 0$$

Il lavoro infinitesimo prodotto dal movimento del giunto i -esimo è ottenuto proiettando tale equazione nella direzione di moto ammessa dal vincolo, come mostrato nella seguente espressione:

$$\delta \mathcal{L}_i = \mathbf{L}_{i-i,i} \odot \left\{ -\Phi_i^* + \Phi_i^g + \hat{\Phi}_i^g + \hat{\Phi}_i + skew \left[\left(\sum_{j=1}^i \mathbf{L}_{j-1,j} \ddot{\mathbf{q}}_j + \mathbf{H}_i^* \right) \mathbf{J}_i \right] \right\} \delta \dot{q}_i = 0$$

ma proprio per come è definito il vincolo tra corpo i e corpo $i-1$, le reazioni vincolari tra i due corpi sono perpendicolari alla direzione del moto del giunto $L_{i-i,i}$ e quindi producono lavoro nullo. L’unico lavoro possibile sarà quindi dato da eventuali attuatori posti sul giunto stesso, che producono un’azione τ_i . Ne risulta quindi un’equazione scalare relativa al moto del giunto i :

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{L}_{i-i,i} \odot \left\{ \sum_{k=i+1}^n skew \left[\left(\sum_{j=1}^k \mathbf{L}_{j-1,j} \ddot{\mathbf{q}}_j \right) \mathbf{J}_k \right] + skew \left[\left(\sum_{j=1}^i \mathbf{L}_{j-1,j} \ddot{\mathbf{q}}_j \right) \mathbf{J}_i \right] \right\} = \\
 & = \tau_i - \mathbf{L}_{i-i,i} \odot \left[\sum_{k=i}^n (skew(\mathbf{G}_k \mathbf{J}_k) + \Phi_k^e) + \sum_{k=i+1}^n skew \left(\sum_{j=1}^k \mathbf{H}_k^* \mathbf{J}_k \right) + skew(\mathbf{H}_i^* \mathbf{J}_i) \right]
 \end{aligned} \tag{1.61}$$

dove \odot è lo pseudo prodotto scalare definito per l'approccio matriciale¹⁷, τ_i è la coppia di attuazione applicata al i -esimo giunto e Φ_k^e le eventuali altre forze esterne applicate ai k -esimi corpi. Operando così per tutti i gradi di libertà del sistema, si ottiene un sistema di tante equazioni per quanti sono i gradi di libertà del sistema, che può essere messo nella forma matriciale:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F} \tag{1.62}$$

cioè proprio come quello che si otterrebbe dallo sviluppo di tipo Lagrangiano. Nell'Eq.1.62 i vari termini saranno ottenuti da:

1. gli elementi delle matrici di massa mediante la¹⁸:

$$M_{ij} = trace(\mathbf{L}_i \hat{\mathbf{J}}_h \mathbf{L}_j^T) \tag{1.63}$$

dove $h = \max(i, j)$ e $\hat{\mathbf{J}}_h = \sum_{k=h}^n \mathbf{J}_k$

2. gli elementi del vettore delle forze mediante la:

$$F_i = \tau_i + \mathbf{L}_{i-1,i} \odot \left[\sum_{j=i}^n (\Phi_j^e - skew(\mathbf{H}_j^* \mathbf{J}_j)) + skew(\mathbf{G} \hat{\mathbf{J}}_i) \right] \tag{1.64}$$

Attraverso l'inversione della matrice di massa di dimensioni $N \times N$, sarà possibile trovare l'andamento delle accelerazioni delle variabili di giunto e quindi, integrando il sistema, si potrà studiare l'evoluzione della dinamica del sistema multibody seriale.

$$-\tau_i + \mathbf{L}_{i-i,i} \odot \left\{ \Phi_i^g + \hat{\Phi}_i^g + \hat{\Phi}_i + skew \left[\left(\sum_{j=1}^i \mathbf{L}_{j-1,j} \ddot{\mathbf{q}}_j + \mathbf{H}_i^* \right) \mathbf{J}_i \right] \right\} = 0$$

che, se esplicitata produce l'Eq.1.61.

¹⁷Il risultato dello pseudo-prodotto scalare tra due matrici omogenee \mathbf{A} e \mathbf{B} è uno scalare definito dalla seguente espressione tra gli elementi delle matrici:

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = a_{13}b_{13} + a_{21}b_{21} + a_{32}b_{32} + a_{14}b_{14} + a_{24}b_{24} + a_{34}b_{34}$$

¹⁸Si ricordi la proprietà matriciale:

$$\mathbf{L}_{i-i,i} \odot skew(\mathbf{L}_{j-1,j} \mathbf{J}_k) = trace(\mathbf{L}_{i-i,i} \mathbf{J}_k \mathbf{L}_{j-1,j}^T)$$

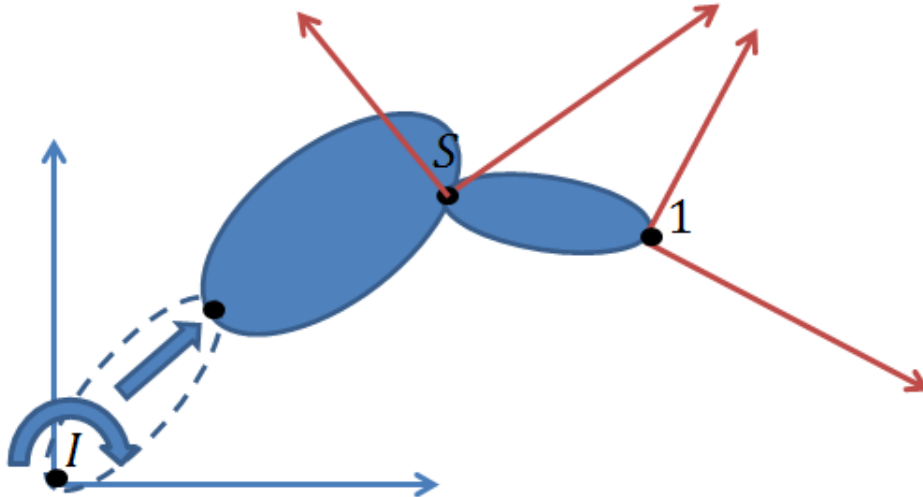


Figura 1.9: Vincolo virtuale tra riferimento inerziale e piattaforma satellitare

1.11 Adattamento dell'algoritmo allo studio di oggetti flottanti

Come visto, l'algoritmo presentato nella sezione 1.10 si basa sull'assunzione che tutte le grandezze cinematiche e dinamiche dei corpi siano riferiti ad una base ferma. L'applicazione diretta dell'algoritmo al caso di base flottante non è banale, in particolare esistono due problemi che devono essere affrontati:

1. tener conto dei gradi di libertà così detti "mobili", cioè dovuti al fatto che la piattaforma da cui parte la catena cinematica multicorpo è flottante nello spazio.
2. tener conto delle "azioni" provocate dalla rotazione della piattaforma base sui corpi della catena cinematica e viceversa delle azioni dovute ai movimenti dei corpi sul moto della piattaforma stessa.

La risoluzione del primo punto non è affatto banale, dal momento che le matrici di velocità \mathbf{W}_i ed accelerazione \mathbf{H}_i permettono di rappresentare rispettivamente la velocità e l'accelerazione di un punto a patto che questo sia appartenente al corpo rigido a cui queste sono associate. Pur ipotizzando la presenza di un riferimento inerziale I e definendo una matrice di posizione \mathbf{M}_{IS} tra il sistema di riferimento inerziale e quello associato alla piattaforma satellitare S , non si potrà pensare di trovare la velocità e l'accelerazione di un punto P_s appartenente alla piattaforma stessa mediante l'applicazione diretta dell'Eq.1.33 e dell'Eq.1.35. Intatti le suddette equazioni sono basate sull'ipotesi che il movimento sia relativo ad un corpo rigido ed almeno uno dei punti della piattaforma sia in comune con il riferimento precedente (in questo caso quello inerziale), come succedeva nei casi di sistemi multibody ancorati a terra. Con riferimento alla Fig.1.9, la definizione delle matrici ${}^I\mathbf{W}_{IS}$ e ${}^I\mathbf{H}_{IS}$ presuppone la definizione di un vincolo olonomo tra il riferimento inerziale e quello

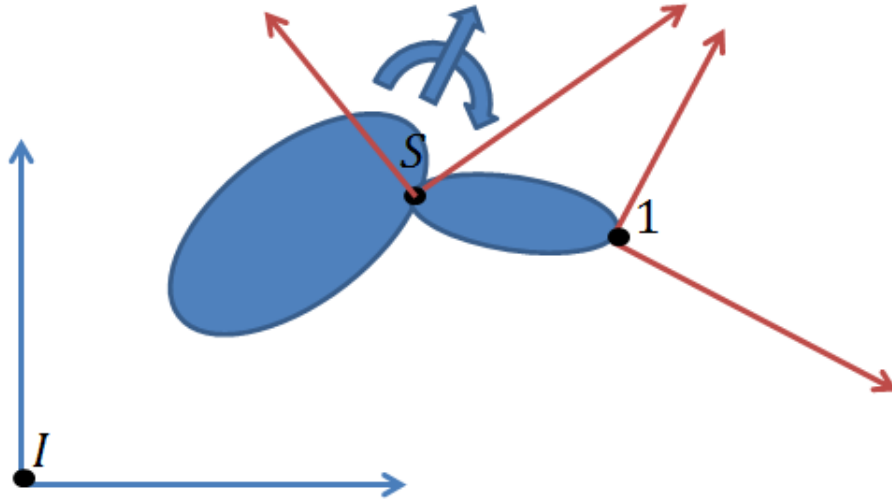


Figura 1.10: Riferimenti nel caso di piattaforma flottante

satellitare che nella realtà non sussiste, come se tra i due fosse presente un link virtuale di cui sono note le caratteristiche geometriche.

Tuttavia se si assume come riferimento “principale” quello relativo alla piattaforma satellitare, cioè si riferiscono a questo tutte le grandezze cinematiche del sistema, sarà possibile rappresentare il movimento della piattaforma senza dover imporre un vincolo olonomo per definire le eventuali matrici di velocità ${}^S\mathbf{W}_{SI}$ e di accelerazione ${}^S\mathbf{H}_{SI}$. Con riferimento alla Fig.1.10 il movimento della piattaforma rispetto al riferimento inerziale è determinato da atti di moto riferiti direttamente al riferimento della piattaforma senza dover definire vincoli virtuali tra i due sistemi di riferimento.

In particolare, proprio perchè la matrice delle velocità della piattaforma satellitare è definita nel riferimento satellitare stesso, questa può essere scomposta in 6 atti di moto indipendente (coincidente con le sei velocità generalizzate per il moto di un corpo libero) come mostrato dalla seguente relazione:

$${}^S\mathbf{W}_{SI} = \sum_{j=1}^6 {}^S\mathbf{L}_{Sj}\dot{q}_{Sj} \quad (1.65)$$

dove i singoli termini sono:

$${}^S\mathbf{L}_{S1}\dot{q}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} {}^Sv_x; \quad {}^S\mathbf{L}_{S2}\dot{q}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} {}^Sv_y;$$

$$\begin{aligned}
 {}^s\mathbf{L}_{S3}\dot{q}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} {}^s v_z; & {}^s\mathbf{L}_{S4}\dot{q}_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} {}^s \omega_x; \\
 {}^s\mathbf{L}_{S5}\dot{q}_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} {}^s \omega_y; & {}^s\mathbf{L}_{S6}\dot{q}_6 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} {}^s \omega_z;
 \end{aligned}$$

dove tutte le velocità sono prese nel riferimento della piattaforma satellitare. La matrice di accelerazione della piattaforma satellitare rispetto al riferimento inerziale sarà quindi esplicitabile come segue:

$${}^s\mathbf{H}_{SI} = {}^s\dot{\mathbf{W}}_{SI} + {}^s\mathbf{W}_{SI} {}^s\mathbf{W}_{SI} \quad (1.66)$$

dove si possono distinguere le accelerazioni angolari e lineari:

$${}^s\dot{\mathbf{W}}_{SI} = \sum_{j=1}^6 {}^s\mathbf{L}_{Sj}\ddot{q}_j \quad (1.67)$$

dal termine ${}^s\mathbf{W}_{SI} {}^s\mathbf{W}_{SI}$ che rappresenta l'accelerazione centrifuga dovuta alla rotazione del satellite.

Quindi l'equazione della dinamica per la singola piattaforma satellitare potrà essere rappresentata dall'equazione matriciale:

$${}^s\Phi_S = skew [{}^s\mathbf{H}_{SI} {}^s\mathbf{J}_S] \quad (1.68)$$

esplicitando secondo l'Eq.1.66 si ottiene:

$$skew [{}^s\dot{\mathbf{W}}_S {}^s\mathbf{J}_S] = {}^s\Phi_S - skew [{}^s\mathbf{W}_{SI} {}^s\mathbf{W}_{SI} {}^s\mathbf{J}_S] \quad (1.69)$$

e quindi, proiettando su ognuno delle direzioni di moto indipendenti, ci si riconduce ad un set di 6 equazioni scalari in 6 accelerazioni generalizzate espresse da un sistema posto nella forma:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F} \quad (1.70)$$

dove gli elementi della matrice di massa si ottengono mediante la:

$$M_{ij} = trace [{}^s\mathbf{L}_{Si} {}^s\mathbf{J}_S {}^s\mathbf{L}_{Sj}^T]$$

e le componenti del vettore delle forze generalizzate sono date da:

$$F_i = {}^s\mathbf{L}_{Si} \odot [{}^s\Phi_S - skew ({}^s\mathbf{W}_{SI} {}^s\mathbf{W}_{SI} {}^s\mathbf{J}_S)]$$

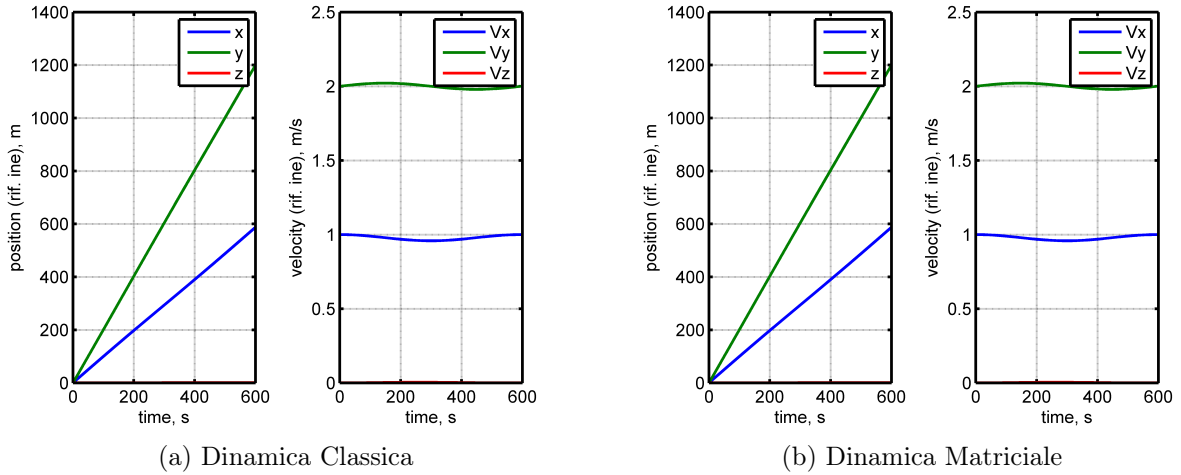


Figura 1.11: Posizione e Velocità dell'origine del riferimento corpo

1.12 Verifica dell'algoritmo nel caso di singola piattaforma

Al fine di verificare la veridicità delle simulazioni effettuate con l'algoritmo sopra esposto, si è effettuato un primo confronto con i dati ottenuti da una simulazione effettuata attraverso l'integrazione delle classiche equazioni della dinamica di un corpo rigido. In particolare si è considerato il caso di un singolo corpo che si muova e ruoti con la propria dinamica libera. Il corpo, di massa $m_S = 100kg$ e di diadi d'inerzia intorno al suo sistema di riferimento corpo $\mathbf{I}_S = \text{diag}([100, 150, 200])kgm^2$, in cui è presente anche un momento statico $\vec{S}_S = [0, 200, 0]^T kgm$, viene posto in rotazione libera con le seguenti condizioni iniziali:

$$\vec{P}_{S0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} m \quad \vec{V}_{S0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} m/s$$

$$\mathcal{Q}_{S0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{\omega}_{S0} = \begin{bmatrix} 1.0e-2 \\ 1.0e-2 \\ 1.0e-1 \end{bmatrix} rpm$$

L'integrazione viene effettuata in parallelo con entrambe le metodologie e, come si può vedere dall'analisi delle Fig.1.11 e Fig.1.12 porta ad avere identici andamenti delle variabili di stato che descrivono l'andamento del sistema con entrambi i metodi utilizzati per descrivere la dinamica del sistema. La veridicità di entrambi i metodi è verificata dalla conservazione dell'energia cinetica del corpo, come mostrato nella Fig.1.13.

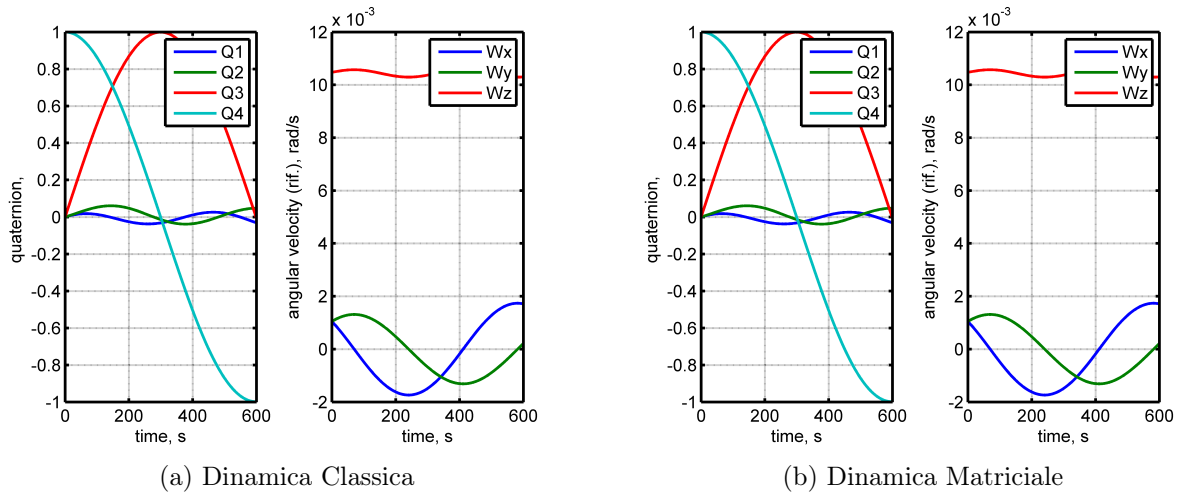


Figura 1.12: Assetto e Velocità Angolare del riferimento corpo

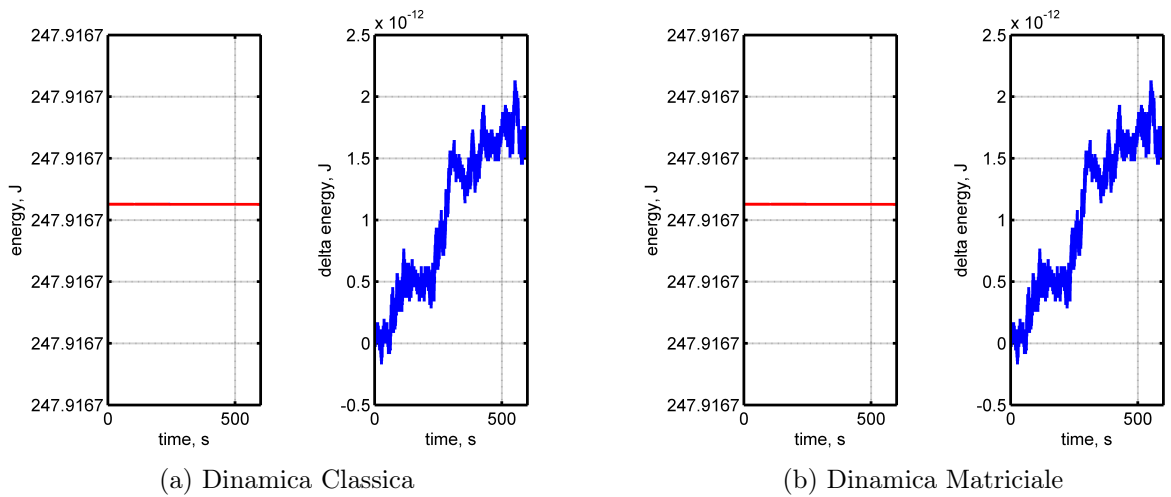


Figura 1.13: Energia cinetica e sua conservazione

Capitolo 2

Strategie di Controllo per Manipolatori Spaziali

2.1 Algoritmo di calcolo per sistemi multibody in orbita

Nel capitolo precedente si è mostrato come sia possibile adattare la metodologia di Denavit Hartember allo studio di oggetti flottanti in orbita e quindi, a partire dalle matrici che definiscono le proprietà del sistema, ricavare le equazioni della dinamica espresse in forma minima. Si è altresì trovata una espressione matriciale che permette di valutare l'entità delle azioni gravitazionali che forzano il sistema. Tuttavia, il problema relativo alla simulazione della dinamica di strutture poste in orbita non è ancora stato risolto. In particolare occorre separare gli ordini di grandezza dei termini presenti nelle equazioni della dinamica. Ciò al fine di trovare un set di equazioni con variabili di tipo omogeneo che tengano conto delle diverse dinamiche presenti nel sistema multibody.

Come già visto nella sezione 1.9, per ogni corpo che compone il sistema multibody orbitante è possibile associare una equazione della dinamica che, se scritta in forma matriciale è posta nella forma espressa dall'Eq.1.51. Se si considera che il sistema sia formato da $N + 1$ corpi come mostrato in Fig.2.1, si potrà scrivere un sistema di $N + 1$ equazioni differenziali matriciali poste nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\Phi_S &= skew[\mathbf{H}_{0S}\mathbf{J}_S] \\ \Phi_1 &= skew[\mathbf{H}_{01}\mathbf{J}_1] \\ \Phi_2 &= skew[\mathbf{H}_{02}\mathbf{J}_2] \\ &\vdots \\ \Phi_N &= skew[\mathbf{H}_{0N}\mathbf{J}_N]\end{aligned}\tag{2.1}$$

dove si sono omessi gli apici del sistema di riferimento a cui sono riferite le grandezze per una questione di semplicità di trattazione, ma con l'accortezza di dover scrivere ogni equazione nello stesso sistema di riferimento in modo da poter effettuare le operazioni

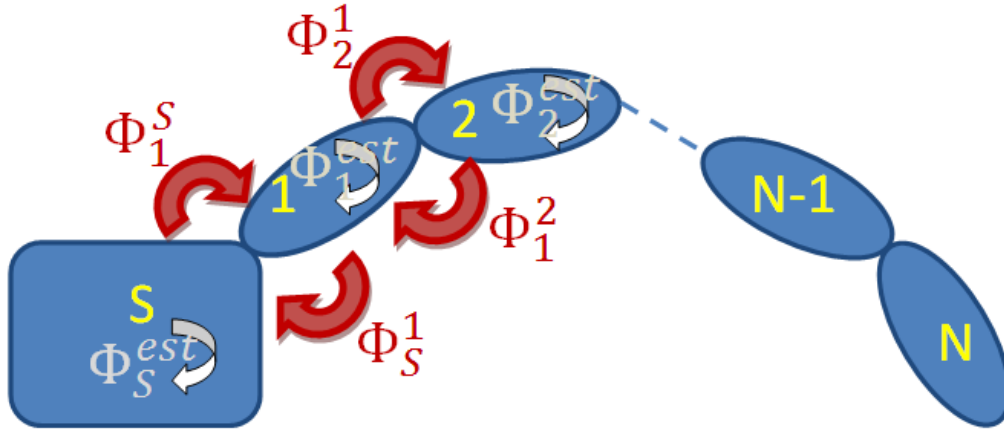


Figura 2.1: Matrici delle azioni agenti su una catena cinematica orbitante

seguenti. Si è indicato con S il corpo a cui riferire tutte le grandezze di moto relativo. Il moto di tale piattaforma potrà quindi essere esplicitato come indicato nell'Eq.1.69, dove è possibile anche distinguere i vari contributi al computo delle azioni come segue:

$$skew \left[\dot{\mathbf{W}}_S \mathbf{J}_S \right] = \Phi_S^{est} + \Phi_S^1 - skew \left[\mathbf{W}_{SI} \mathbf{W}_{SI} \mathbf{J}_S \right] \quad (2.2)$$

in cui la matrice Φ_S^1 rappresenta le azioni scambiate dal link 1 (dell'eventuale manipolatore montato sulla piattaforma) nei confronti della piattaforma S e si può definire il termine \mathbf{H}_S^* :

$$\mathbf{H}_S^* = \mathbf{W}_{SI} \mathbf{W}_{SI} \quad (2.3)$$

Esplicitando ora l'equazione per il link 1 e tenendo conto del Eq.1.53 si ha:

$$\begin{aligned} skew \left[\left(\dot{\mathbf{W}}_{SI} + \dot{\mathbf{W}}_{1S} \right) \mathbf{J}_1 \right] &= \Phi_1^{est} + \Phi_1^S + \Phi_1^2 + \\ &- skew \left[\left(\mathbf{W}_{SI} \mathbf{W}_{SI} + 2\mathbf{W}_{SI} \mathbf{W}_{1S} + \mathbf{W}_{1S} \mathbf{W}_{1S} \right) \mathbf{J}_1 \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

in cui si può nominare \mathbf{H}_1^* il termine:

$$\mathbf{H}_1^* = \mathbf{H}_S^* + 2\mathbf{W}_{SI} \mathbf{W}_{1S} + \mathbf{W}_{1S} \mathbf{W}_{1S} \quad (2.5)$$

e quindi riscrivere l'equazione nel seguente modo:

$$skew \left[\left(\dot{\mathbf{W}}_S + \dot{\mathbf{W}}_{1S} \right) \mathbf{J}_1 \right] = \Phi_1^{est} + \Phi_1^S + \Phi_1^2 - \mathbf{H}_1^* \mathbf{J}_1 \quad (2.6)$$

Quindi in generale per l' i -esimo link della catena cinematica si potrà avere un'equazione del tipo:

$$skew \left[\left(\dot{\mathbf{W}}_{SI} + \dot{\mathbf{W}}_{1S} + \dots + \dot{\mathbf{W}}_{i,i-1} \right) \mathbf{J}_i \right] = \Phi_i^{est} + \Phi_i^{i-1} + \Phi_i^{i+1} - \mathbf{H}_i^* \mathbf{J}_i \quad (2.7)$$

dove il termine \mathbf{H}_i^* si ricava ricorsivamente:

$$\mathbf{H}_i^* = \mathbf{H}_{i-1}^* + 2 \left(\mathbf{W}_{SI} + \mathbf{W}_{1S} + \sum_{j=2}^{i-1} \mathbf{W}_{j,j-1} \right) \mathbf{W}_{i,i-1} + \mathbf{W}_{i,i-1}^2 \quad (2.8)$$

ed include tutti gli accoppiamenti dovute alle azioni di Coriolis e centrifughe agenti sul corpo i .

Effettuando ora la somma membro a membro di tutte le equazioni del sistema presente nell'Eq.2.1 e ricordando che¹:

$$\Phi_i^{i-1} = -\Phi_{i-1}^i \quad (2.9)$$

si può scrivere un'equazione che rappresenta globalmente il sistema:

$$\begin{aligned} skew \left[\dot{\mathbf{W}}_{SI} \left(\mathbf{J}_s + \sum_{j=1}^N \mathbf{J}_j \right) + \dot{\mathbf{W}}_{1S} \left(\sum_{j=1}^N \mathbf{J}_j \right) + \sum_{i=2}^N \dot{\mathbf{W}}_{i,i-1} \left(\sum_{j=i}^N \mathbf{J}_j \right) \right] = \\ = \Phi_S^{est} + \sum_{i=1}^N \Phi_i^{est} - \mathbf{H}_S^* \mathbf{J}_S - \sum_{i=1}^N \mathbf{H}_i^* \mathbf{J}_i \end{aligned} \quad (2.10)$$

in cui risulta evidente che la dinamica del sistema globale è influenzata dalla somma della azioni esterne applicate ai corpi. Pur contenendo sia le accelerazioni dovute al moto della piattaforma ($\dot{\mathbf{W}}_{SI}$) sia quelle relative dei giunti di collegamento tra i link ($\dot{\mathbf{W}}_{i,i-1}$), tuttavia l'Eq.2.10 può al massimo rappresentare 6 relazioni indipendenti tra tali grandezze. L'estrazione di tali relazioni può essere fatta, ad esempio, andando a proiettare tale equazione sulle 6 direzioni di atti di moto fondamentali della piattaforma (le ${}^S\mathbf{L}_{Si}$ che compaiono nell'Eq.1.67):

$$\begin{aligned} {}^S\mathbf{L}_{Sk} \odot skew \left[\dot{\mathbf{W}}_{SI} \left(\mathbf{J}_s + \sum_{j=1}^N \mathbf{J}_j \right) + \dot{\mathbf{W}}_{1S} \left(\sum_{j=1}^N \mathbf{J}_j \right) + \sum_{i=2}^N \dot{\mathbf{W}}_{i,i-1} \left(\sum_{j=i}^N \mathbf{J}_j \right) \right] = \\ = \left[\Phi_S^{est} + \sum_{i=1}^N \Phi_i^{est} - \mathbf{H}_S^* \mathbf{J}_S - \sum_{i=1}^N \mathbf{H}_i^* \mathbf{J}_i \right] \end{aligned} \quad (2.11)$$

con $k = 1, 2, \dots, 6$. Le altre N equazioni scalari possono essere ricavate andando a sottrarre all'Eq.2.10 di volta in volta una delle equazioni che compaiono nel sistema espresso dall'Eq.2.1 e proiettando il risultato lungo la direzione del giunto che collega la parte restante del sistema con la parte tolta, come illustrato nella Fig.2.2.

Ad esempio si può togliere all'Eq.2.10 l'equazione del moto relativa alla piattaforma S e quindi proiettare il risultato lungo la direzione \mathbf{L}_{S1} , ottenendo:

¹Per il terzo principio della dinamica.

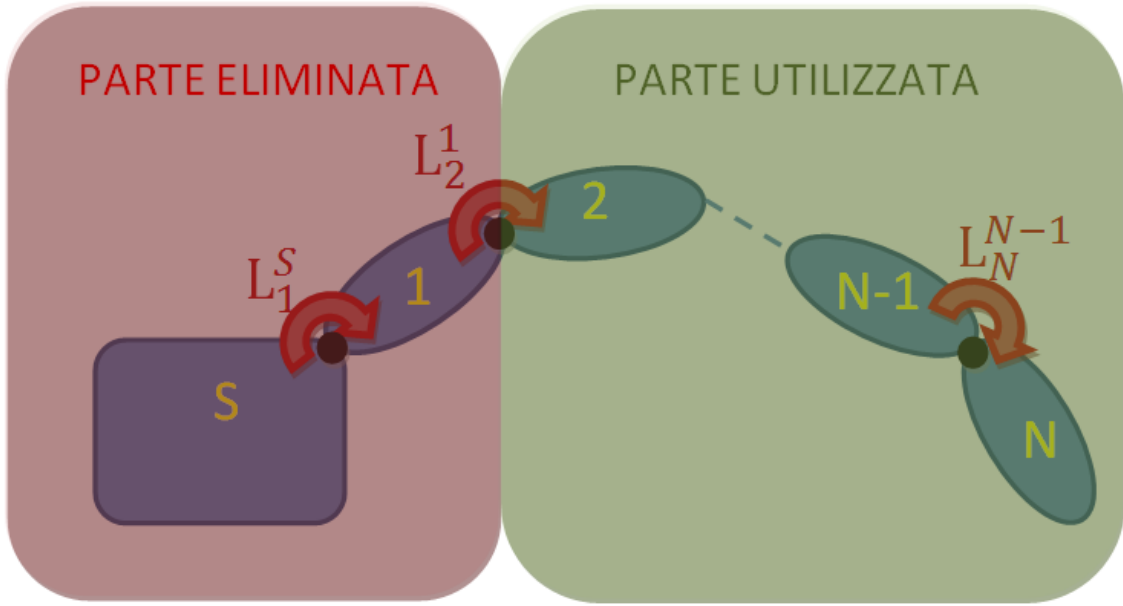


Figura 2.2: Partizionamento del sistema e proiezione delle equazioni del moto lungo le direzioni di giunto

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L}_{1S} \odot skew \left[\dot{\mathbf{W}}_{SI} \left(\sum_{j=1}^N \mathbf{J}_j \right) + \dot{\mathbf{W}}_{1S} \left(\sum_{j=1}^N \mathbf{J}_j \right) + \sum_{i=2}^N \dot{\mathbf{W}}_{i,i-1} \left(\sum_{j=i}^N \mathbf{J}_j \right) \right] &= \\
 = \mathbf{L}_{1S} \odot \left[-\Phi_S^1 + \sum_{i=1}^N \Phi_i^{est} - \sum_{i=1}^N \mathbf{H}_i^* \mathbf{J}_i \right] & \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

in cui risulta evidente come in questo caso ricompaia la matrice delle azioni tra piattaforma e link 1 (Φ_S^1). Tuttavia proiettando tale relazione nella direzione ammessa del vincolo tra piattaforma e link 1, l'unico contributo della che viene evidenziato è proprio quello relativo all'eventuale attuazione di controllo del moto su tale giunto, mentre tutte le reazioni vincolari, siano esse forze o coppie, non vengono prese in considerazione perchè ortogonali all'asse di vincolo. Sottraendo ancora l'equazione relativa al primo link e proiettando lungo \mathbf{L}_{12} è possibile trovare la seconda equazione rappresentativa della dinamica del secondo giunto:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L}_{21} \odot skew \left[\dot{\mathbf{W}}_{SI} \left(\sum_{j=2}^N \mathbf{J}_j \right) + \dot{\mathbf{W}}_{1S} \left(\sum_{j=2}^N \mathbf{J}_j \right) + \sum_{i=2}^N \dot{\mathbf{W}}_{i,i-1} \left(\sum_{j=i}^N \mathbf{J}_j \right) \right] &= \\
 = \mathbf{L}_{21} \odot \left[-\Phi_1^2 + \sum_{i=2}^N \Phi_i^{est} - \sum_{i=2}^N \mathbf{H}_i^* \mathbf{J}_i \right] & \quad (2.13)
 \end{aligned}$$

e quindi per la generica k-esima equazione risulta:

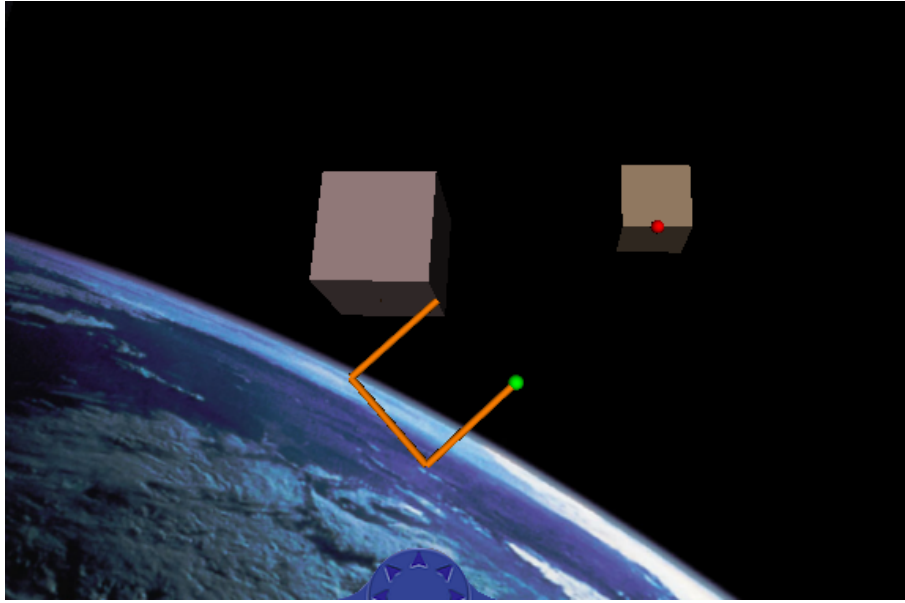


Figura 2.3: Piattaforma orbitante con manipolatore a 4 DOF

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L}_{k,k-1} \odot skew \left[\dot{\mathbf{W}}_{SI} \left(\sum_{j=k}^N \mathbf{J}_j \right) + \dot{\mathbf{W}}_{1S} \left(\sum_{j=k}^N \mathbf{J}_j \right) + \sum_{i=k}^N \dot{\mathbf{W}}_{i,i-1} \left(\sum_{j=i}^N \mathbf{J}_j \right) \right] &= \\
 &= \mathbf{L}_{k,k-1} \odot \left[-\Phi_{k-1}^k + \sum_{i=k}^N \Phi_i^{est} - \sum_{i=k}^N \mathbf{H}_i^* \mathbf{J}_i \right]
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

fino all'N-esima equazione che risulta essere:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L}_{N,N-1} \odot skew \left[\dot{\mathbf{W}}_{SI} \mathbf{J}_N + \dot{\mathbf{W}}_{1S} \mathbf{J}_N + \sum_{i=k}^N \dot{\mathbf{W}}_{i,i-1} \mathbf{J}_N \right] &= \\
 &= \mathbf{L}_{N,N-1} \odot \left[-\Phi_{N-1}^N + \Phi_N^{est} - \mathbf{H}_N^* \mathbf{J}_N \right]
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

In questo modo, in modo analogo a quanto visto nel caso di manipolatore terrestre nella sezione 1.10, è possibile trovare un set minimo di equazioni differenziali rappresentanti l'intera dinamica del sistema multibody preso in considerazione, che potranno esser messe nella forma rappresentata dall'Eq.1.70.

2.2 Test case di prova per le simulazioni

Al fine di valutare il metodo sopra evidenziato si è provveduto ad effettuare alcune simulazioni con un sistema costituito da un satellite centrale a cui è stato montato un manipolatore di 4 link [59], come rappresentato in Fig.2.3.

La piattaforma satellitare di forma cubica (di lato $L_S = 3m$) ha una massa di $m_S = 500kg$ e la sua diade d'inerzia risulta essere:

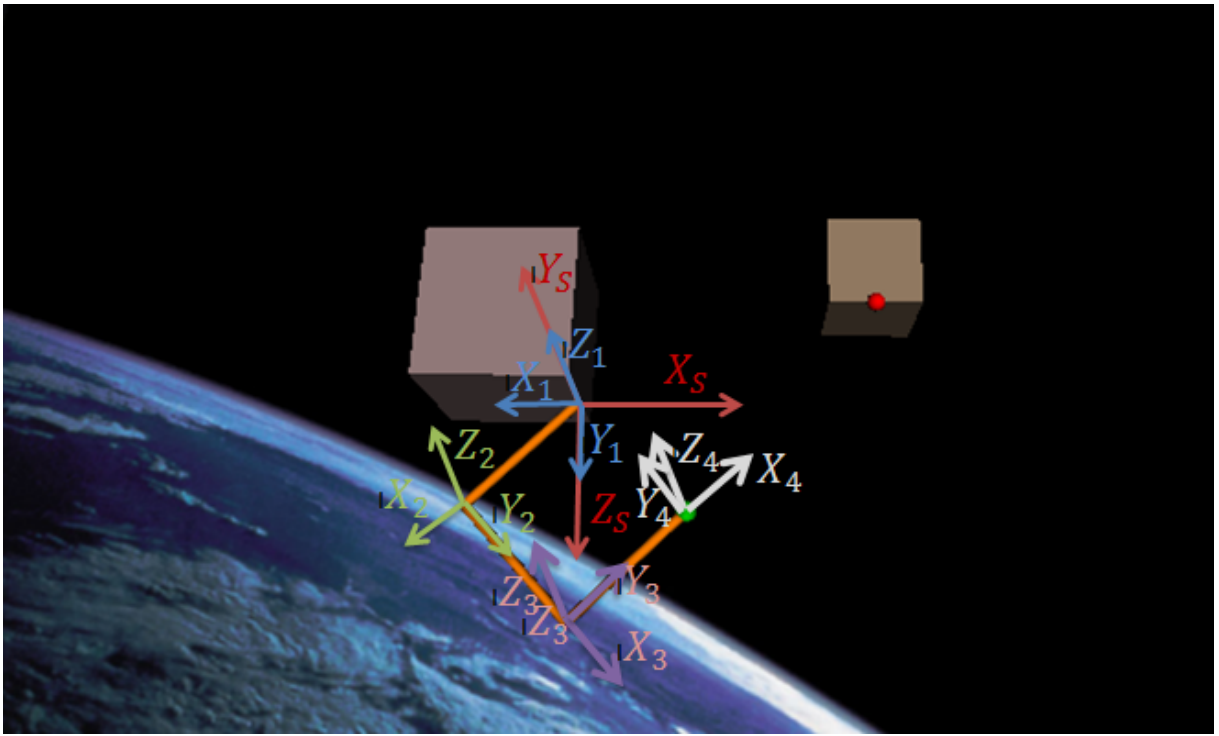


Figura 2.4: Assegnazione delle terne di riferimento secondo le convenzioni di Denavit Hartenberg

$$\mathbf{I}_S = \begin{bmatrix} 1275 & 0 & 0 \\ 0 & 1350 & 0 \\ 0 & 0 & 1500 \end{bmatrix} kg \cdot m^2$$

il sistema di riferimento relativo alla piattaforma è posto in corrispondenza dell'attacco tra satellite e manipolatore, per questo motivo esisterà un momento statico del satellite pari a $\vec{S}_S = \begin{bmatrix} -700 & 0 & -800 \end{bmatrix}^T kg \cdot m$. Il manipolatore è costituito da 4 link, anche se in Fig.2.3 se ne vedono solo 3. Ciò è dovuto alla particolare natura del primo link, in quanto questo è piccolo $a_1 = 0.1m$ ed è collegato alla piattaforma satellitare mediante un vincolo rotoidale il cui asse è coincidente con l'asse \hat{Z}_S del satellite. I restanti 3 link di lunghezza $a_2 = a_3 = a_4 = 3m$ e diametro $D_2 = 0.1m$ hanno una massa pari a $m = 20kg$ e sono caratterizzati dal seguente diattico d'inerzia:

$$\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 60 \end{bmatrix} kg \cdot m^2$$

e dal momento che le convenzioni di Denavit Hartenberg pongono il riferimento associato ai link agli estremi degli stessi, esisterà un momento statico pari a $\vec{S}_S = \begin{bmatrix} -30 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T kg \cdot m$.

L'assegnazione delle terne di riferimento associate ai link che compongono il sistema è mostrata in Fig.2.4, in cui è possibile notare come le terne associate al satellite S e il link 1 abbiano l'asse \hat{Z} coincidente, in ragion del fatto che la rotazione del link avviene proprio

	a_i	d_i	α_i	θ_i
link 1	$0 m$	$0 m$	$\frac{\pi}{2} rad$	$-\pi + q_1 rad$
link 2	$3 m$	$0 m$	$0 rad$	$-\frac{\pi}{2} + q_2 rad$
link 3	$3 m$	$0 m$	$0 rad$	$-\frac{\pi}{2} + q_3 rad$
link 4	$3 m$	$0 m$	$0 rad$	$-\frac{\pi}{2} + q_4 rad$

Tabella 2.1: Parametri di Denavit Hartenberg per il manipolatore spaziale

in quella direzione. Da tale assegnazione è possibile anche ricavare i parametri di Denavit Hartenberg utili nello studio della cinematica del sistema: tali parametri sono mostrati in Tab.2.1, in cui gli angoli θ_{i-0} sono tali da rappresentare la condizione di manipolatore completamente “ripiegato” intorno al satellite (configurazione *stowed*).

L’intero sistema è posto in un’orbita circolare ad una quota di $h_R = 500 km$ e le uniche azioni esterne agenti sul sistema sono dovute alla gravità (forza gravitazionale e forza e coppia di gradiente di gravità).

La manovra che ci si prefigge di compiere è quella di afferrare mediante il braccio robotico un secondo satellite. Si suppone che siano state già compiute le manovre di avvicinamento mediante sistemi propulsivi e lo studio riguarda solamente la movimentazione del braccio robotico e gli effetti che questo provoca sul moto d’assetto della piattaforma orbitante. In particolare si cercherà di simulare una manovra di dispiegamento del manipolatore e successivamente la manovra di grasping dell’oggetto target [101].

2.3 Cinematica inversa per il manipolatore

La pianificazione delle operazioni di grasping non può trascendere dalla risoluzione del problema cinematico inverso. Con tale termine si indica il problema che, una volta assegnate la posizione e le velocità dell’end effector del manipolatore in un riferimento cartesiano solidale con il riferimento cui è montato il manipolatore, si ricavano le combinazioni di valori delle coordinate ai giunti necessarie a permettere una corretta posa dell’end effector nella posizione desiderata.

La missione prevista nel nostro caso, con riferimento alla Fig.2.3, prevede che l’end effector rappresentato dalla sfera verde dovrà afferrare il satellite target nel punto rosso. Occorrerà quindi pianificare opportunamente il moto dei giunti.

A tal fine ci viene d’aiuto l’opportuna scelta delle terne di riferimento assegnate ai corpi che costituiscono il sistema. Proprio perchè si è scelto di adottare la convenzione di Denavit Hartenberg, le matrici di posizione relative tra i diversi link che costituiscono il sistema possono esprimersi mediante le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{S1} &= \begin{bmatrix} c_{\theta 1} & 0 & s_{\theta 1} & 0 \\ s_{\theta 1} & 0 & -c_{\theta 1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{M}_{12} &= \begin{bmatrix} c_{\theta 2} & -s_{\theta 2} & 0 & a_2 c_{\theta 2} \\ s_{\theta 2} & c_{\theta 2} & 0 & a_2 s_{\theta 2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{M}_{23} &= \begin{bmatrix} c_{\theta 3} & -s_{\theta 3} & 0 & a_3 c_{\theta 3} \\ s_{\theta 3} & c_{\theta 3} & 0 & a_3 s_{\theta 3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{M}_{34} &= \begin{bmatrix} c_{\theta 4} & -s_{\theta 4} & 0 & a_4 c_{\theta 4} \\ s_{\theta 4} & c_{\theta 4} & 0 & a_4 s_{\theta 4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

per cui, rispetto all'origine del riferimento associato alla piattaforma satellitare S , la posizione e l'orientamento dell'end-effector (supposto coincidente con l'origine della terna 4), può essere ricavato dalla seguente espressione:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{S-ee} &= \mathbf{M}_{S1} \mathbf{M}_{12} \mathbf{M}_{23} \mathbf{M}_{34} = \\
 &= \begin{bmatrix} c_{\theta 1} c_{\theta 2 + \theta 3 + \theta 4} & -c_{\theta 1} s_{\theta 2 + \theta 3 + \theta 4} & s_{\theta 1} & c_{\theta 1} (a_2 c_{\theta 2} + a_3 c_{\theta 2 + \theta 3} + a_4 c_{\theta 2 + \theta 3 + \theta 4}) \\ s_{\theta 1} c_{\theta 2 + \theta 3 + \theta 4} & s_{\theta 1} s_{\theta 2 + \theta 3 + \theta 4} & -c_{\theta 1} & s_{\theta 1} (a_2 c_{\theta 2} + a_3 c_{\theta 2 + \theta 3} + a_4 c_{\theta 2 + \theta 3 + \theta 4}) \\ s_{\theta 2 + \theta 3 + \theta 4} & c_{\theta 2 + \theta 3 + \theta 4} & 0 & a_2 s_{\theta 2} + a_3 s_{\theta 2 + \theta 3} + a_4 s_{\theta 2 + \theta 3 + \theta 4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

L'Eq.2.17 permette di individuare sia l'assetto, rappresentato dalla matrice di rotazione posta in alto a sinistra, e la posizione dell'origine del sistema di riferimento associato all'end effector, rappresentato dai termini dell'ultima colonna, in funzione degli angoli di giunto θ_i e le lunghezze dei link a_i del sistema multibody in questione. In questa espressione matriciale, sia l'assetto che la posizione della terna associata all'end effector sono riferite rispetto al riferimento legato al satellite e quindi non rappresentano grandezze assolute², ma esse sono rappresentative dell'assetto relativo tra piattaforma base ed end effector. Tale end effector dovrà essere movimentato in modo da raggiungere un punto target rappresentato da un vettore posizione ${}^S P_T$ ³ ed un assetto target voluto per l'end effector, rappresentato da una matrice di rotazione \mathbf{R}_{ST} .

Se il manipolatore è ancorato a terra, cioè la base è fissa nel riferimento inerziale, si potrebbe pensare di ricercare le combinazioni di coordinate di giunto q_i tali da consentire le seguenti due uguaglianze:

$$\begin{aligned}
 {}^S P_{ee} &= {}^S P_T \\
 \mathbf{R}_{See} &= \mathbf{R}_{ST}
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Tuttavia nel caso spaziale, se non si adottano particolari accorgimenti, la movimentazione del braccio robotico basata sulla semplice risoluzione del problema cinematico inverso risulta essere inefficiente se non completamente fallimentare: ciò in ragion del fat-

²Cioè riferite ad un riferimento inerziale.

³Le cui componenti sono prese nel riferimento S

to che la base non può considerarsi fissa nello spazio inerziale. La piattaforma satellitare trasla e ruota in modo tale da mantenere costante, nel caso di assenza di forze e coppie esterne, la quantità di moto e il momento della quantità di moto complessiva del sistema.

Al fine di garantire il grasping della piattaforma target da parte del sistema robotico spaziale, sarà quindi necessario adottare una strategia di controllo opportuna. Tra le tante proposte ed esistenti in letteratura è possibile scegliere tra:

1. Muovere i giunti del braccio robotico come se la base fosse inerzialmente ferma e il controllo di posizione e d'assetto della piattaforma è tale da compensare ogni azione provocata dalle reazioni dovute al moto del braccio robotico.
2. Progettare le leggi di moto dei giunti del robot in modo da non perturbare, al limite minimizzare, i disturbi provocati dal manipolatore sulla piattaforma satellitare a cui è ancorato.
3. Progettare contemporaneamente leggi di moto dei giunti e della piattaforma al fine di permettere il raggiungimento della posa dell'end effector al target.

Nelle prime due strategie risulta essere utile la risoluzione del problema cinematico inverso: nel primo caso la soluzione di tale problema può essere applicata direttamente al manipolatore in quanto si deroga al controllo della piattaforma tutto lo sforzo di controllo necessario a mantenere valida l'ipotesi di piattaforma ferma. Nel secondo caso la soluzione ottenuta dal problema cinematico inverso può essere utilizzata come soluzione di primo tentativo al fine di valutare le azioni che la piattaforma subisce, per quindi scegliere i movimenti che riducano tali azioni.

La risoluzione del problema cinematico inverso per il solo manipolatore può essere trovata per via geometrica⁴. Si consideri ad esempio il disegno in Fig.2.5 in cui è rappresentata la piattaforma satellitare con il proprio riferimento, il braccio robotico ed il punto target. Data la configurazione del manipolatore i cui link operano sempre in un piano selezionato dalla rotazione del primo giunto θ_1 , si può pensare di ricavare tale angolo mediante la seguente relazione:

$$\theta_1 = \text{atan2}(P_{Ty}, P_{Tx}) \quad (2.19)$$

dove P_{Ty}, P_{Tx} sono le componenti nel piano $\hat{X}_S \hat{Y}_S$ del vettore posizione del target \vec{P}_T ed atan2 è l'inversa della tangente di un angolo, in cui è stata eliminata l'ambiguità di rappresentazione per diversi quadranti.

Una volta selezionato il piano di lavoro del manipolatore si può individuare l'assetto dell'ultimo link rispetto al riferimento $\hat{X}'_S \hat{Z}'_S$ della piattaforma satellitare, mediante un unico angolo θ_{ee} preso a partire dalla direzione \hat{X}'_S come mostrato in Fig.2.6. Tale angolo

⁴In generale si potrebbero adottare tecniche di ricerca numeriche, ma dal momento che la configurazione risulta essere ancora abbastanza semplice, si è preferito utilizzare la tecnica basata su considerazioni geometriche, al fine di valutare anche eventuali singolarità e/o molteplicità delle soluzioni.

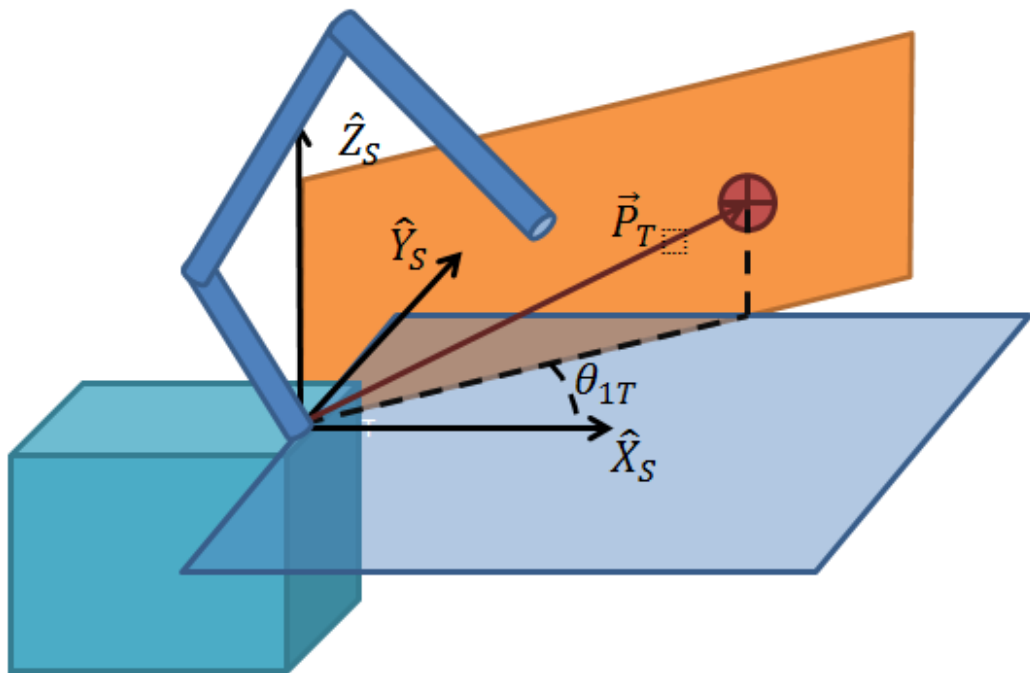


Figura 2.5: Selezione del piano di lavoro del manipolatore

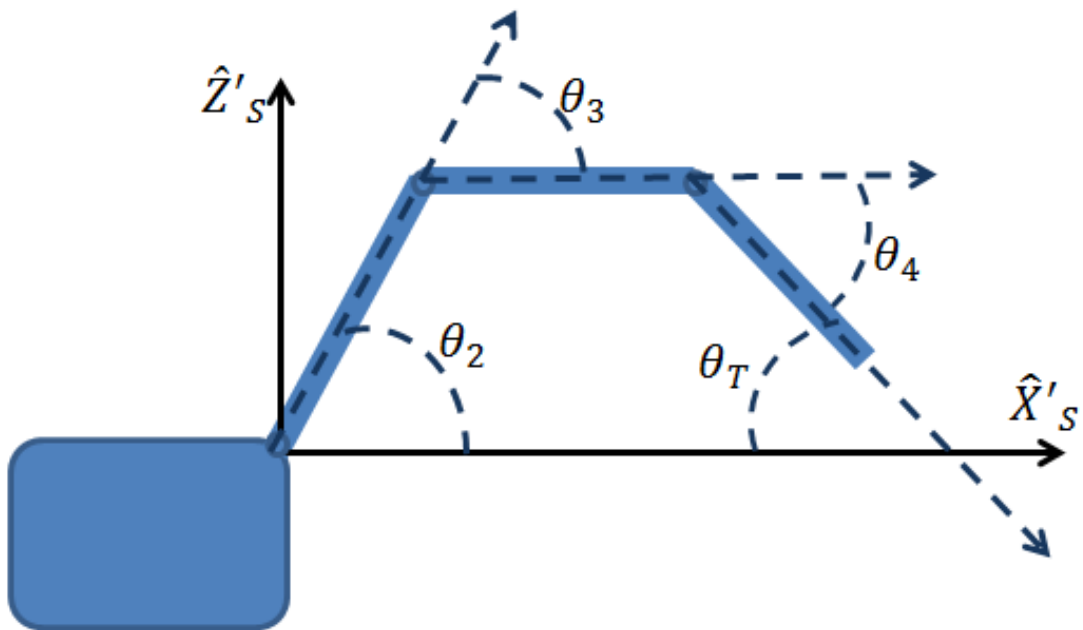


Figura 2.6: Determinazione delle coordinate ai giunti

sarà quindi un dato di input e da considerazioni di tipo puramente geometrico sarà sempre valida la relazione:

$$\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = \theta_{ee} \quad (2.20)$$

e dovrà risultare $\theta_{ee} = \theta_T$ una volta raggiunta la posa finale dell'end effector.

Assegnata la posizione del target \vec{P}_T e l'assetto target voluto per l'end effector θ_T , sarà possibile individuare la posizione P_{34} dell'ultimo giunto (tra link 3 e link 4) mediante la seguente uguaglianza:

$$\begin{aligned} P_{34-x} &= P_{Tx} - a_4 c_{\theta_{ee}} = a_2 c_{\theta_2} + a_3 c_{\theta_2 + \theta_3} \\ P_{34-z} &= P_{Tz} - a_4 s_{\theta_{ee}} = a_2 s_{\theta_2} + a_3 s_{\theta_2 + \theta_3} \end{aligned} \quad (2.21)$$

in cui il secondo membro è completamente noto dai dati forniti in input, mentre l'ultimo membro contiene ancora gli angoli che sono incogniti. Elevando al quadrato e sommando membro a membro i termini dell'Eq.2.21 si può ottenere il coseno del terzo angolo di giunto⁵:

$$c_{\theta_3} = \frac{P_{34-x}^2 + P_{34-z}^2 - (a_2^2 + a_3^2)}{2a_2 a_3} \quad (2.22)$$

dovendo valere necessariamente $-1 \leq c_{\theta_3} \leq 1$, qualsiasi altro valore al di fuori di tale dominio sarà indicativo dell'irraggiungibilità del target da parte dell'end effector. Per tale valore di coseno si potranno avere due angoli possibili relativi all'ambiguità della radice quadrata:

$$s_{\theta_3} = \pm \sqrt{1 - c_{\theta_3}^2} \quad (2.23)$$

per cui si potranno avere due soluzioni ammissibili:

1. $\theta_3 = \bar{\theta}_3$
2. $\theta_3 = -\bar{\theta}_3$

dove si è indicato con $\bar{\theta}_3$ il valore ottenuto andando ad effettuare l'arcoseno del caso con radicale positivo.

Per questi due casi si dovrà quindi procedere parallelamente andando a calcolare i corrispondenti valori di θ_2 . In particolare sempre partendo dall'Eq.2.21, è possibile ottenere le espressioni:

⁵Infatti si ha:

$$\begin{aligned} P_{34-x}^2 + P_{34-z}^2 &= a_2^2 c_{\theta_2}^2 + a_2^2 s_{\theta_2}^2 + a_3^2 c_{\theta_2 + \theta_3}^2 + a_3^2 s_{\theta_2 + \theta_3}^2 + 2a_2 a_3 c_{\theta_2} c_{\theta_2 + \theta_3} + 2a_2 a_3 s_{\theta_2} s_{\theta_2 + \theta_3} \\ P_{34-x}^2 + P_{34-z}^2 &= a_2^2 + a_3^2 + 2a_2 a_3 c_{\theta_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s_{\theta_2} &= \frac{(a_2 + a_3 c_3) P_{34-z} - a_3 s_{\theta_3} P_{34-x}}{P_{34-x}^2 + P_{34-z}^2} \\
 c_{\theta_2} &= \frac{(a_2 + a_3 c_3) P_{34-x} + a_3 s_{\theta_3} P_{34-z}}{P_{34-x}^2 + P_{34-z}^2}
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

e quindi applicando:

$$\theta_2 = \text{atan2}(s_{\theta_2}, c_{\theta_2}) \tag{2.25}$$

si potranno ottenere due valori di θ_2 corrispondenti ai due casi precedenti. Utilizzando quindi l'Eq.2.20, si potrà infine trovare gli angoli θ_4 :

$$\theta_4 = \theta_{ee} - \theta_2 - \theta_3 \tag{2.26}$$

per entrambi i casi.

Come si è potuto notare, non esiste un'unica soluzione del problema cinematico inverso nel caso preso in considerazione, ma potrà esistere un'unica soluzione, due soluzioni o persino nessuna soluzione in base alle condizioni che di volta in volta vengono a verificarsi. In particolare l'eventuale funzione che deve risolvere tale problema deve selezionare la soluzione più opportuna, cioè quella che rispetti eventuali vincoli imposti sugli attuatori, come ad esempio il range di funzionamento degli stessi:

$$\begin{aligned}
 \theta_{1-min} &\leq \theta_1 \leq \theta_{1-max} \\
 \theta_{2-min} &\leq \theta_2 \leq \theta_{2-max} \\
 \theta_{3-min} &\leq \theta_3 \leq \theta_{3-max} \\
 \theta_{4-min} &\leq \theta_4 \leq \theta_{4-max}
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

dove si è indicato con il pedice min il minimo valore ammissibile e con il pedice max il massimo valore ammissibile di tali angoli. Ma un'altro criterio di selezione potrebbe essere quello di utilizzare la soluzione che prevede spostamenti minimi tra la configurazione attuale dei giunti del manipolatore e quella voluta per il raggiungimento del target:

$$(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = \min [f(\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\theta_3, \Delta\theta_4)] \tag{2.28}$$

dove f è una funzione di penalità dipendente dalle differenze $\Delta\theta_i = \theta_{i-voluta} - \theta_{i-attuale}$.

2.4 Determinazione dello Jacobiano del manipolatore

L'ultima colonna della matrice espressa nell'Eq.2.17 rappresenta la posizione dell'end effector rispetto all'origine del sistema associato al satellite a cui è ancorato il manipolatore. Rispetto a tale riferimento è possibile calcolare anche le relazioni relative alla velocità dell'end-effector in funzione delle velocità delle coordinate ai giunti $\dot{\theta}_i$ presenti nel sistema.

In particolare differenziando l'ultima colonna della matrice in Eq.2.17 è possibile trovare una relazione del tipo:

$${}^S\vec{V}_{S-ee} = \mathbf{J}_{S-ee}\dot{Q} \quad (2.29)$$

dove si è indicato con ${}^S\vec{V}_{S-ee}$ la velocità relativa tra base del manipolatore ed end-effector, con $Q = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 & \dot{q}_2 & \dot{q}_3 & \dot{q}_4 \end{bmatrix}^T$ il vettore contenente tutte le coordinate ai giunti del manipolatore stesso e con \mathbf{J}_{S-ee} la matrice Jacobiana, che nel caso in questione assume la forma:

$$\mathbf{J}_{S-ee} = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} & j_{14} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} & j_{24} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} & j_{34} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

dove:

$$j_{11} = -s_{\theta_1} (a_2 c_{\theta_2} + a_3 c_{\theta_2+\theta_3} + a_4 c_{\theta_2+\theta_3+\theta_4})$$

$$j_{21} = c_{\theta_1} (a_2 c_{\theta_2} + a_3 c_{\theta_2+\theta_3} + a_4 c_{\theta_2+\theta_3+\theta_4})$$

$$j_{31} = 0$$

$$j_{12} = -c_{\theta_1} (a_2 s_{\theta_2} + a_3 s_{\theta_2+\theta_3} + a_4 s_{\theta_2+\theta_3+\theta_4})$$

$$j_{22} = -s_{\theta_1} (a_2 s_{\theta_2} + a_3 s_{\theta_2+\theta_3} + a_4 s_{\theta_2+\theta_3+\theta_4})$$

$$j_{32} = (a_2 c_{\theta_2} + a_3 c_{\theta_2+\theta_3} + a_4 c_{\theta_2+\theta_3+\theta_4})$$

$$j_{13} = -c_{\theta_1} (a_3 s_{\theta_2+\theta_3} + a_4 s_{\theta_2+\theta_3+\theta_4})$$

$$j_{23} = -s_{\theta_1} (a_3 s_{\theta_2+\theta_3} + a_4 s_{\theta_2+\theta_3+\theta_4})$$

$$j_{33} = (a_3 c_{\theta_2+\theta_3} + a_4 c_{\theta_2+\theta_3+\theta_4})$$

$$j_{14} = -c_{\theta_1} (a_4 s_{\theta_2+\theta_3+\theta_4})$$

$$j_{24} = -s_{\theta_1} (a_4 s_{\theta_2+\theta_3+\theta_4})$$

$$j_{34} = (a_4 c_{\theta_2 + \theta_3 + \theta_4})$$

Le stesse accelerazioni relative dell'end effector saranno ottenibili a partire dalle velocità ed accelerazione delle coordinate dei giunti del manipolatori mediante l'espressione:

$${}^S \vec{A}_{S-ee} = \mathbf{J}_{S-ee} \ddot{\mathbf{Q}} + \dot{\mathbf{J}}_{S-ee} \dot{\mathbf{Q}} \quad (2.31)$$

dove si è indicata con $\dot{\mathbf{J}}_{S-ee}$ la matrice i cui valori sono le derivate nel tempo dei termini presenti nell'Eq.2.30.

2.5 Strategia di controllo per la piattaforma orbitante

La strategia adottata per controllare il manipolatore e la piattaforma orbitante durante le fasi necessarie ad effettuare le manovre di grasping si basa sulla compensazione, da parte della piattaforma satellitare di tutte le azioni dovute al moto dei link del manipolatore. In tal modo la piattaforma cerca di essere ferma mentre il manipolatore compie la manovra come se questo fosse ancorato a terra. Tale strategia adotta quindi direttamente le procedure espote nella sezione precedente riguardo la determinazione delle leggi di moto necessarie a movimentare i giunti, tuttavia questa semplicità di trattazione si traduce in sforzi di controllo abbastanza elevati che la piattaforma deve sostenere al fine di compiere le manovre desiderate. Ma data la semplicità di questo approccio e dal momento che lo scopo di questo capitolo è quello di verificare il modello dinamico esposto e sviluppato nel capitolo 1, tale strategia è più che sufficiente per gli scopi prefessati.

In sostanza il loop di controllo è mostrato nella Fig.2.7 in cui si può notare come, una volta determinata la posizione voluta dell'end effector, si risolve il problema cinematico inverso associato al manipolatore per così ottenere la combinazione di variabili di giunto $\theta_{i-voluta}$ utile al raggiungimento del target. Tali valori vengono quindi confrontati con i valori attuali $\theta_{i-attuale}$ delle variabili di giunto in modo da quantificare gli spostamenti che ogni giunto deve compiere $\Delta\theta_i = \theta_{i-voluta} - \theta_{i-attuale}$ e quindi inseriti come input in una funzione che genera la legge di movimentazione dei giunti in funzione del tempo $\theta_i(t)$, seguendo i seguenti requisiti:

1. Assegnato un tempo di manovra t_{man} , i cambiamenti di tutte le variabili di giunto dovranno avvenire entro tale tempo e tali movimenti avverranno contemporaneamente per tutti i giunti del sistema, cioè deve risultare che:

$$\begin{aligned} \theta_i &= \theta_{i-0} && \text{per } t \leq t_0 \\ \theta_i &= \tilde{\theta}_{i-des}(t) && \text{per } t_0 < t < t_0 + t_{man} \\ \theta_i &= \theta_{i-voluta} && \text{per } t \geq t_0 + t_{man} \end{aligned} \quad (2.32)$$

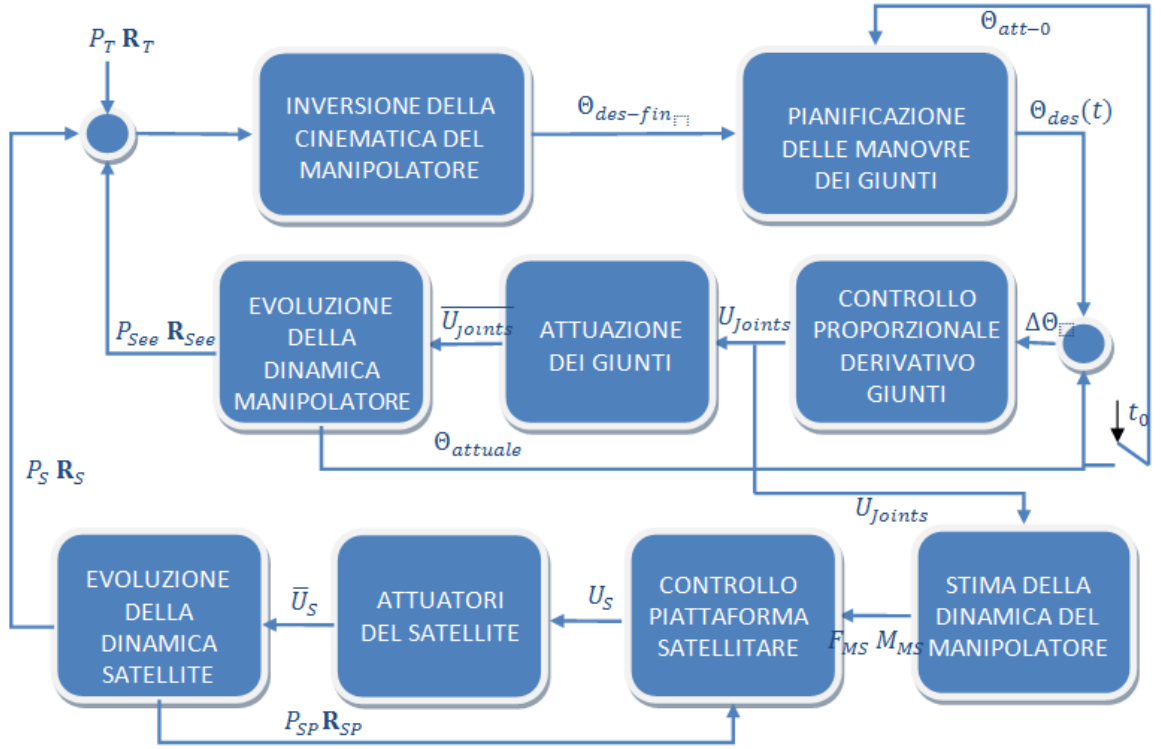


Figura 2.7: Strategia di controllo per il sistema di manipolazione su piattaforma orbitante

2. Le leggi di guida dei giunti dovranno essere opportunamente progettate al fine da evitare picchi di accelerazione delle variabili di giunto, che potrebbero provocare vibrazioni sulle strutture che costituiscono il sistema.

Una volta pianificata la traiettoria dei giunti nel tempo, si dovrà farla seguire dagli attuatori. A tal fine si è scelto un controllo controeazionato decentralizzato di tipo proporzionale derivativo per ogni giunto che istante per istante cerca di far coincidere la coordinata di giunto attuale con quella pianificata, mediante l'applicazione di una coppia pari a :

$$u_i = -k_{p-i} \left(\theta_{i-attuale} - \tilde{\theta}_{i-des}(t) \right) - k_{d-i} \left(\dot{\theta}_{i-attuale} - \dot{\tilde{\theta}}_{i-des}(t) \right) \quad (2.33)$$

dove k_{p-i} e k_{d-i} sono degli opportuni guadagni da scegliere in base alle caratteristiche degli attuatori. Una volta valutate le varie coppie u_i che devono essere erogate nel tempo dagli attuatori presenti nei giunti del sistema, sarà possibile valutare, attraverso un algoritmo di risoluzione diretta della dinamica del sistema, l'eventuale coppia (\vec{M}_{1S}) e le reazioni (\vec{R}_{1S}) che si trasferiscono dal manipolatore alla piattaforma. Tali coppie e reazioni dovranno essere quindi cancellate dagli attuatori presenti nella piattaforma satellitare che fa da base per il manipolatore. La legge di controllo che guida la piattaforma satellitare sarà quindi della forma:

$$\begin{aligned} \vec{M}_{US} &= -k_{p-AS} (\vec{q}_S - \vec{q}_P) - k_{d-AS} (\vec{\omega}_S - \vec{\omega}_P) - \vec{M}_{1S} \\ \vec{T}_{US} &= -k_{p-PS} (\vec{P}_S - \vec{P}_P) - k_{d-PS} (\vec{V}_S - \vec{V}_P) - \vec{R}_{1S} \end{aligned} \quad (2.34)$$

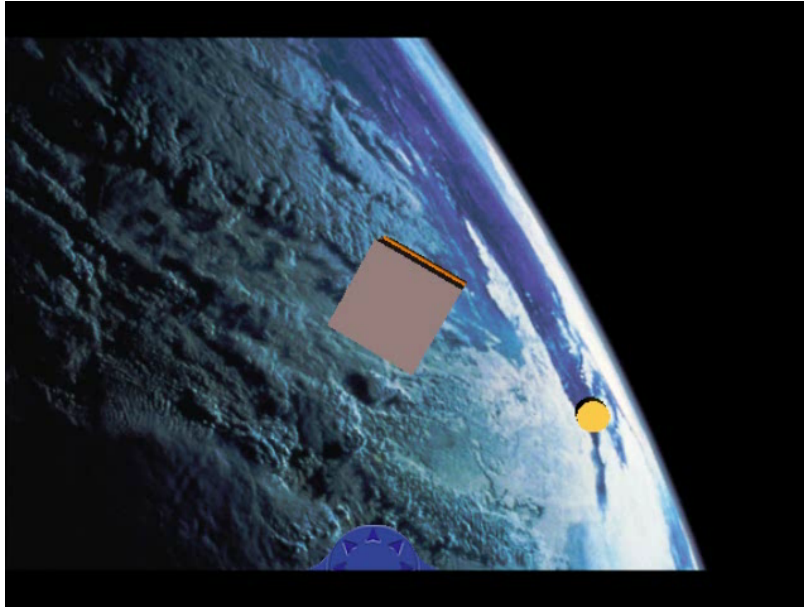


Figura 2.8: Snapshot del dispiegamento

dove \vec{M}_{US} è la coppia che dovrà essere fornita dagli attuatori al fine di garantire un puntamento corretto dell'assetto del satellite, rappresentato dalla parte vettoriale del quaternion⁶ \vec{q}_P , \vec{q}_S è invece la parte vettoriale relativa al quaternion dell'assetto della piattaforma, $\vec{\omega}_S$ ed $\vec{\omega}_P$ sono rispettivamente la velocità angolare del satellite e quella relativa all'assetto di puntamento target. I coefficienti di proporzionalità k_{p-AS} e k_{d-AS} devono essere scelti in modo tale da eliminare eventuali incertezze nel modello e nella stima delle coppie che si trasferisce tra manipolatore e satellite. Analogamente per il controllo orbitale, la spinta eventualmente fornita dagli attuatori del satellite \vec{T}_{US} deve essere proporzionale all'errore tra posizione voluta \vec{P}_P e quella attuale \vec{P}_S ed alla differenza tra le rispettive velocità \vec{V}_S e \vec{V}_P .

2.6 Dispiegamento del manipolatore

Dato il sistema descritto nella sezione 2.2, il modello con cui simulare la sua dinamica dinamica (capitolo 1) e le leggi di movimentazione e controllo del manipolatore e del satellite (sezione 2.5), si è pronti all'analisi dei risultati ottenuti con un tale sistema di simulazione. Ipotizzando che il manipolatore parta da una configurazione stowed, tale per cui risulta essere "avvolto" intorno al satellite come mostrato in Fig.2.8, il manipolatore dovrà compiere delle manovre di dispiegamento in modo da raggiungere una configurazione di default come quella già mostrata in Fig.2.3.

A tal fine si è studiata una manovra in cui vengono assegnate già in partenza le leggi temporali con cui movimentare i giunti del manipolatore: il primo attuatore a muoversi è quello che collega il link 3 al link 4 $\Delta\theta_4 = -\frac{\pi}{2}$, in modo da portare fuori dal satellite il

⁶Assegnato il quaternion di puntamento target $Q_P = [\vec{q}_P \quad q_{P0}]$, si definisce parte vettoriale di tale quaternion il termine \vec{q}_P .

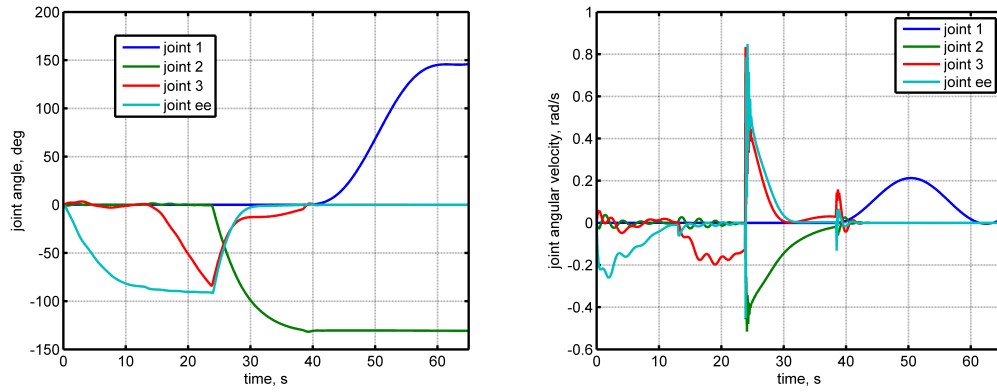


Figura 2.9: Variabili di giunto durante il deployment

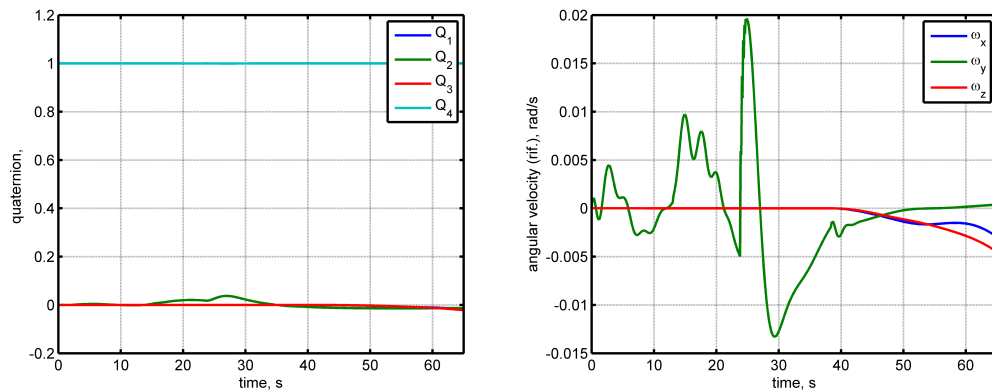


Figura 2.10: Assetto e velocità angolare della piattaforma base

link 4. Successivamente si muove il link 3 attraverso una rotazione del giunto 3 pari a $\Delta\theta_3 = -\frac{\pi}{2}$ e quindi appena raggiunta la posizione voluta del link 3, il giunto 2 inizia a ruotare di un angolo pari a $\Delta\theta_2 = -\frac{3\pi}{2}$ e contemporaneamente i due giunti a valle del giunto 2 si ripiegano in modo da formare una struttura a L. Infine l'ultima rotazione coinvolge il giunto 1 che deve ruotare di $\Delta\theta_1 = \pi$ in modo da orientare l'intero manipolatore nella configurazione voluta. Se si segue tale descrizione avendo come riferimento l'effettiva evoluzione delle variabili di giunto, mostrate in Fig.2.9, si può notare come queste operazioni vengano effettivamente compiute dal sistema.

Lo schema di controllo riassunto in Fig.2.7 permette di stabilizzare in modo sostanzialmente buono la piattaforma satellitare durante tutte le operazioni svolte dal manipolatore. In Fig.2.10 sono rappresentati rispettivamente gli spostamenti d'assetto e la velocità angolare del satellite rispetto a quelli di riferimento: risulta evidente che, pur essendo momentaneamente disturbato durante le manovre, l'assetto della piattaforma torna nella configurazione nominale. Nel caso della posizione e della velocità della piattaforma, mostrata in Fig.2.11, ciò non avviene in quanto è stata spenta la parte di controllo alla traslazione per vedere di quanto si sposta tale piattaforma se non viene usata una spinta di reazione.

L'algoritmo di calcolo così sviluppato consente una piena simulazione di tutte le dinamiche coinvolte anche nel dispiegamento del manipolatore, inoltre è possibile valutare in

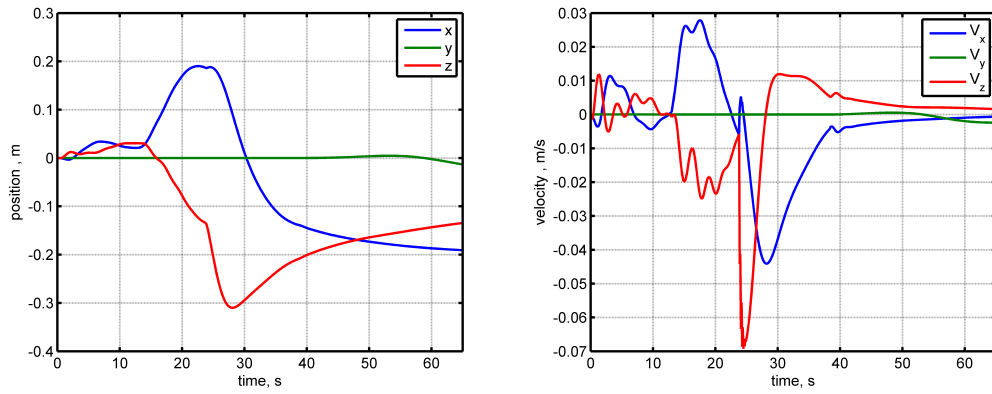


Figura 2.11: Posizione e Velocità della piattaforma base

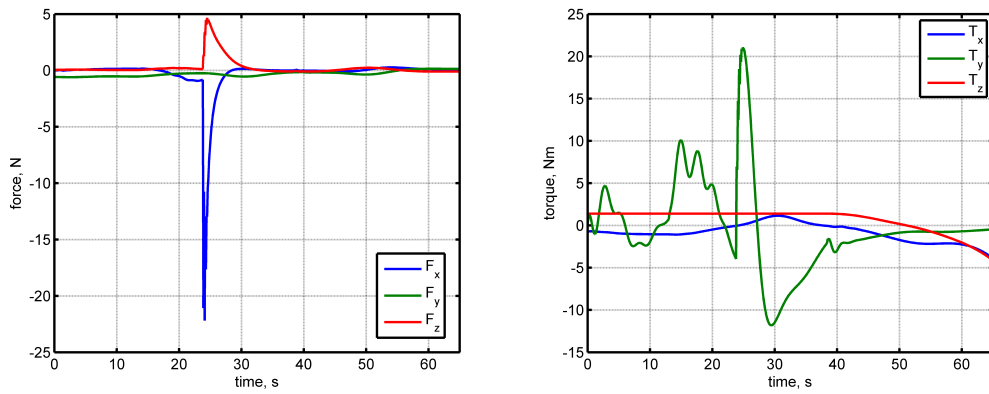


Figura 2.12: Forze e coppie applicate al link1

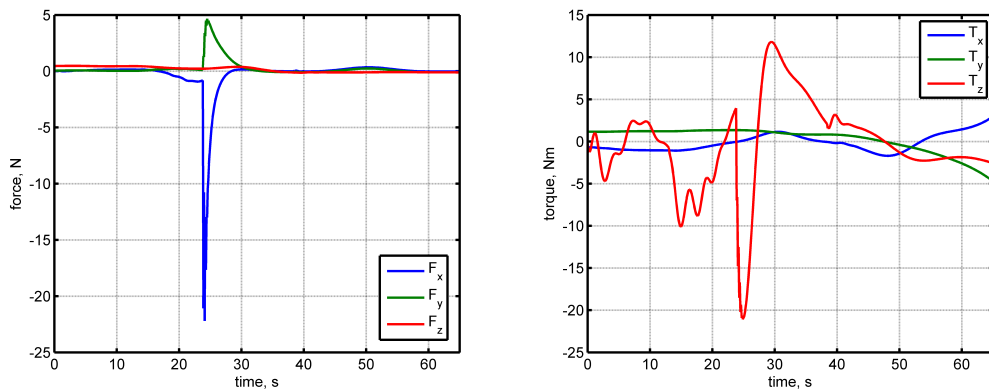


Figura 2.13: Forze e coppie applicate al link 2 durante il deployment

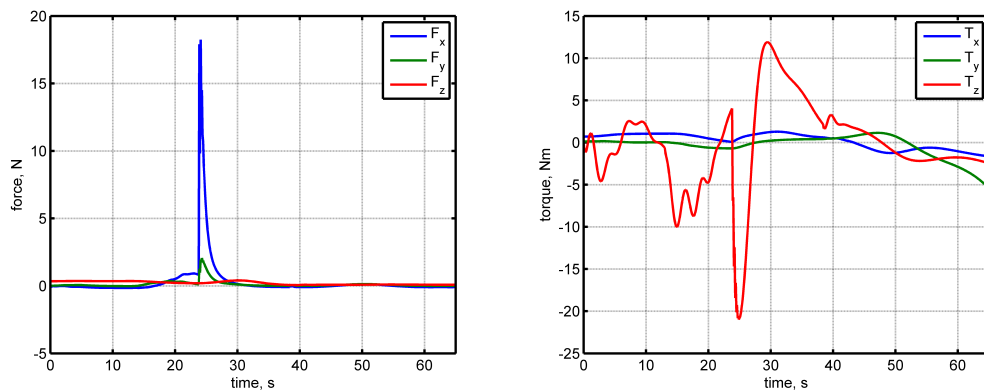


Figura 2.14: Forze e coppie link 3 deployment

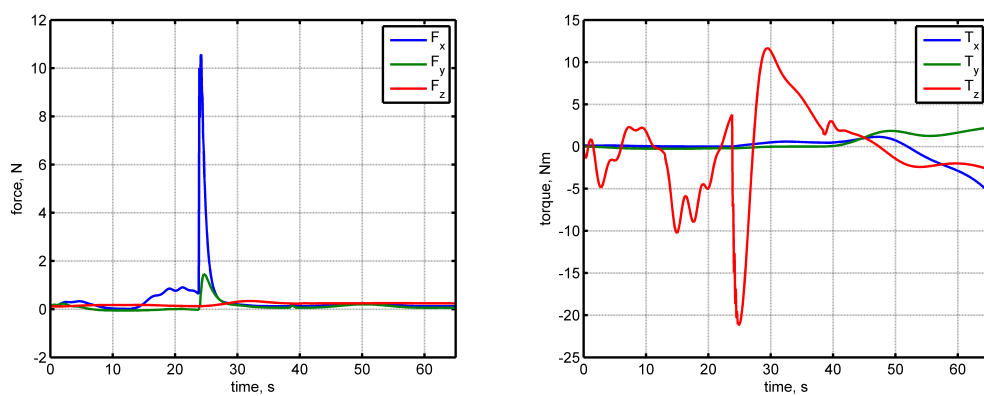


Figura 2.15: forze e coppie applicate all'end effector durante il deployment

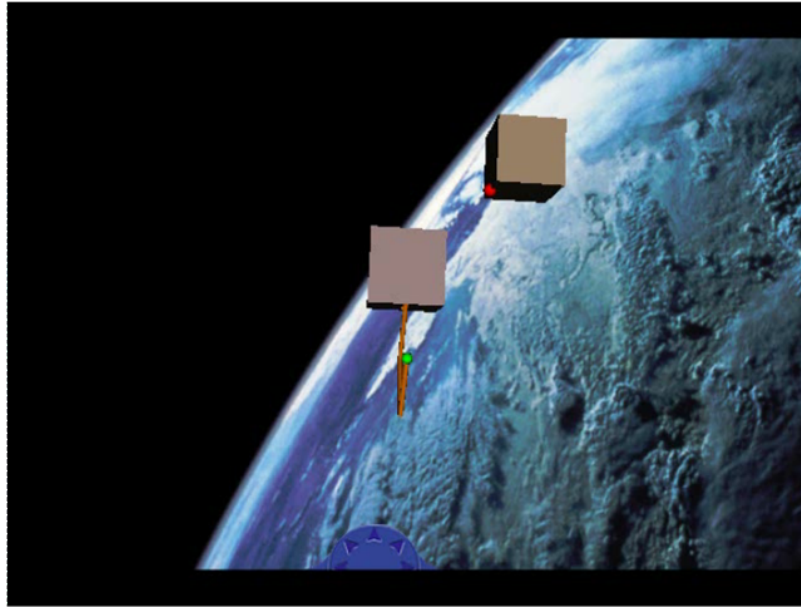


Figura 2.16: Snapshot della manovra di grasping

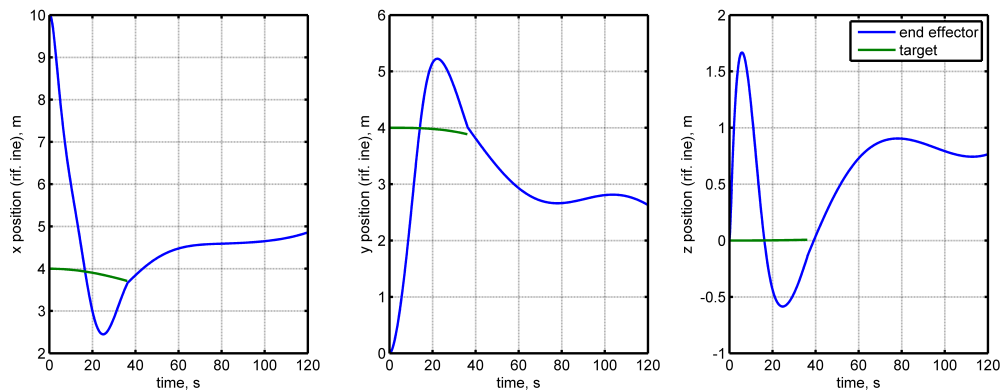


Figura 2.17: Distanze relative tra end effector e punto di presa

modo molto semplice anche le azioni che vengono applicate ai vari link. Nelle Fig.2.12, 2.13, 2.14 e 2.15 sono mostrati gli andamenti temporali delle forze e delle coppie che agiscono su tali elementi durante tutte le fasi della manovra di dispiegamento. L'entità di tali forze e coppie è compatibile con i valori presenti in letteratura.

2.7 Manovra di grasping

Partendo dalla configurazione di riposo mostrata in Fig.2.3 si vuole effettuare con il manipolatore una manovra di grasping del satellite target portando l'end effector nel punto evidenziato con il rosso.

In Fig.2.16 è mostrata una visuale del satellite target e del satellite di servizio durante la fasi di grasping del primo per mezzo del manipolatore.

Come anche evidenziato nella sezione 2.5, lo schema di guida e controllo del manipolatore prevede di stimare la posizione di tra base del manipolatore (punto S) e target (punto T) e quindi spostare l'end effector (punto E) dalla sua posizione attuale fino a farlo

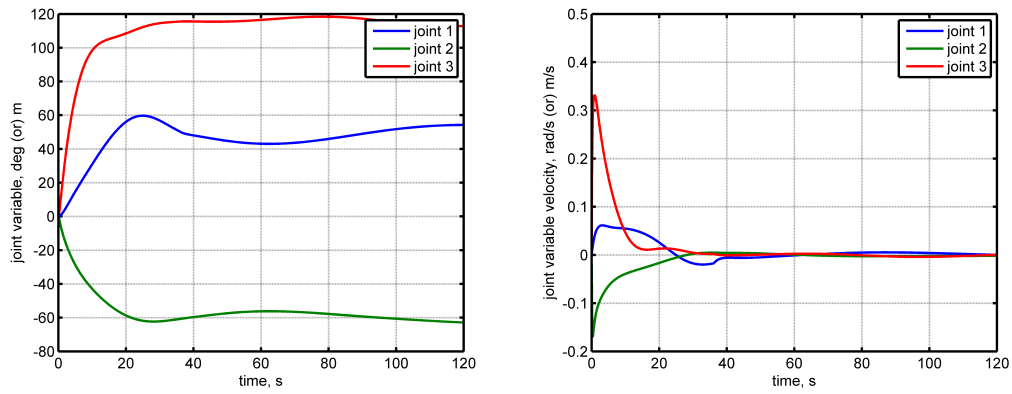
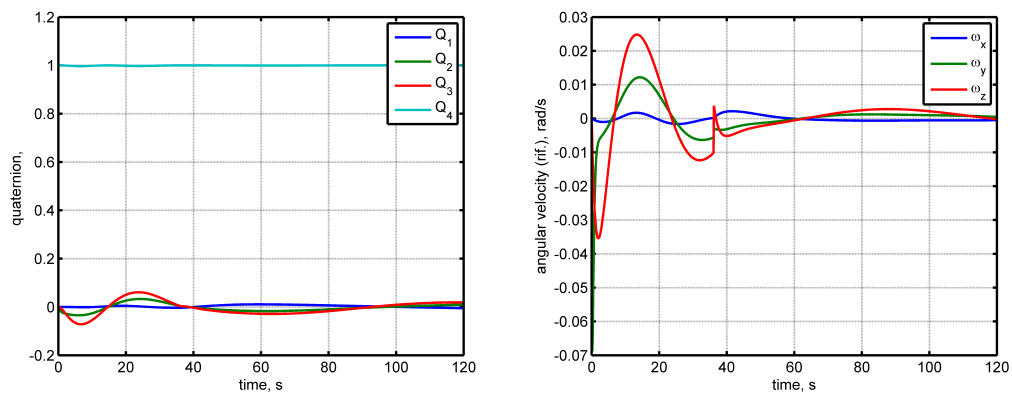


Figura 2.18: Variabili di giunto nel caso di manovra di grasping



S

Figura 2.19: Quaternione rappresentante l'assetto e velocità angolare della piattaforma base

coincidere con il punto T del satellite target. In Fig.2.17 sono mostrate le componenti della posizione dell'end effector e del punto target, come è possibile evincere da tale figura, la manovra avviene correttamente in quanto dopo circa 40 secondi i due punti vengono a coincidere.

Lo stesso schema di controllo calcola l'evoluzione delle coordinate di giunto necessaria a compiere tale manovra: in Fig.2.18 è mostrata la suddetta, dove risulta anche evidente come, pur cercando di limitare al massimo le azioni propriamente dette inerziali (azione centrifuga e di Coriolis), queste disturbano il moto dei link rispetto a quello di riferimento.

In Fig.2.19 è rappresentato l'assetto della piattaforma base durante la fase di manovra ed in Fig. 2.20 l'assetto del target fin tanto che questo non viene afferrato dall'end effector.

2.8 Simulazione della collisione

Il problema del grasping della piattaforma target risulta essere uno dei problemi più importanti che attualmente è affrontato nel mondo della ricerca aerospaziale. Generalmente le manovre di docking vengono effettuate tra oggetti cooperanti tra loro, ma in questo caso

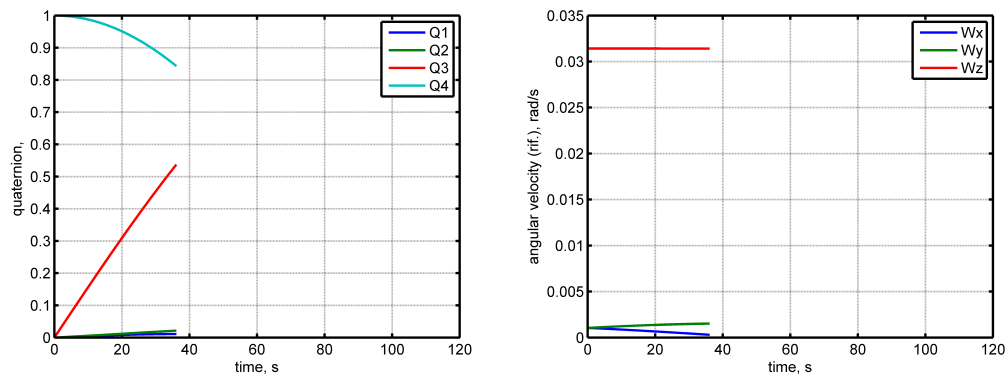


Figura 2.20: Assetto e velocità angolare del target

il satellite target potrebbe stare in avaria. Quindi non è difficile pensare, durante le fasi di grasping possa succedere qualche evento catastrofico come l'urto tra le due piattaforme.

Il codice di calcolo multibody sviluppato è servito anche a simulare eventi catastrofici come quelli relativi alle collisioni di due satelliti. Ovviamente si è modificato il codice in modo tale da:

1. Individuare quando due superfici di due corpi diversi vengono in contatto e quindi uscire dal ciclo di integrazione.
2. Applicare il metodo di Routh per la simulazione degli eventi impulsivi tra due corpi [15].
3. Riprendere l'integrazione partendo dalle condizioni iniziali ottenute dal metodo di Routh.

In questo modo si è potuto simulare la fenomenologia coinvolta in una dinamica di tipo impulsivo come ad esempio quella di collisione tra due piattaforme orbitanti.

In Fig.2.21 è rappresentata un'istantanea delle fasi che vedono il satellite target urtare prima sul braccio e poi sulla carrozza del satellite di servizio. In Fig.2.22 sono rappresentate le posizioni e le velocità delle due piattaforme coinvolte ed in Fig. 2.23 le rispettive componenti del quaternione rappresentanti l'assetto del satellite e le velocità angolari degli stessi. E' possibile infatti notare come l'assetto delle piattaforme cambi istantaneamente trend intorno ai 30 secondi: proprio quando avviene l'urto tra le due piattaforme. In Fig. 2.24 in cui risulta evidente lo spostamento dell'end effector a causa dell'urto con il satellite target, ma anche le altre coordinate dei giunti risultano essere spostate a causa dell'urto.

Il modello permette di rappresentare anche le forze e coppie applicate ai vari link del manipolatore, come quelli mostrati in Fig.2.25 in cui è possibile notare come queste azioni si trasferiscano di link in link durante l'impatto dell'end effector con il satellite target.

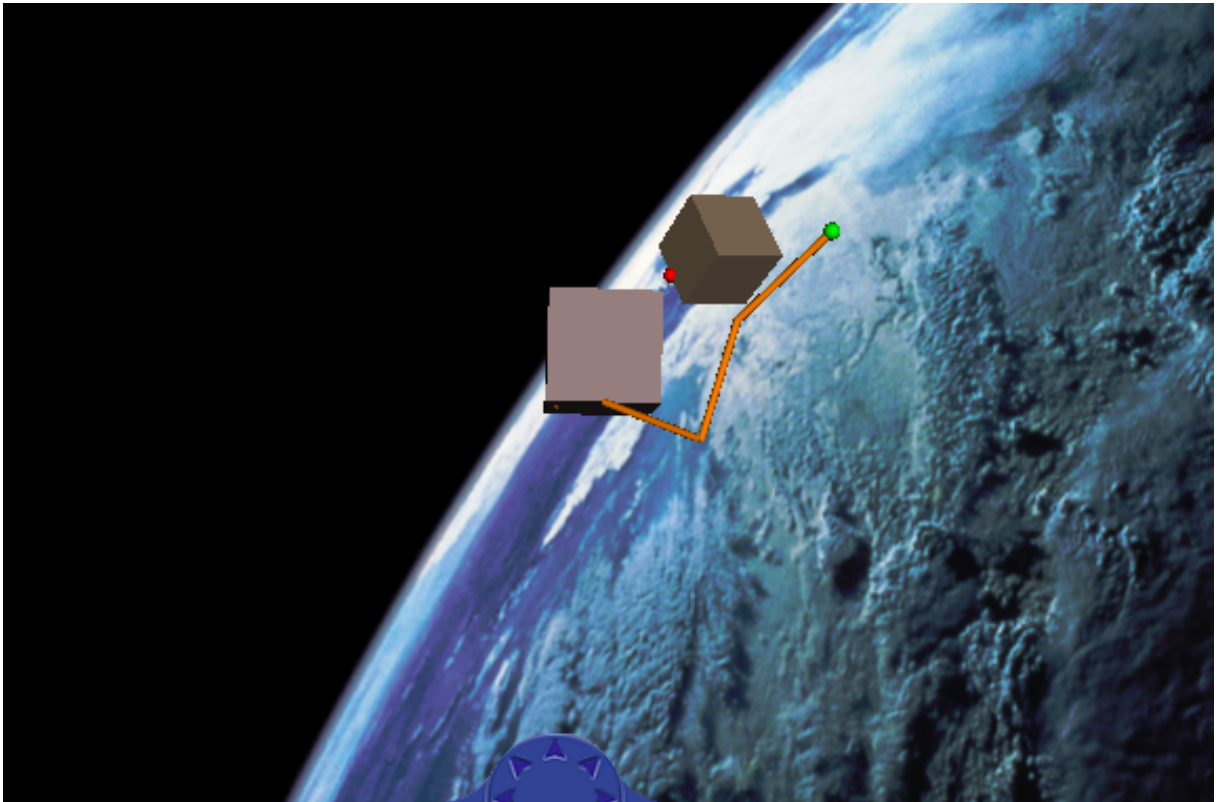


Figura 2.21: Snapshot rappresentate il momento della collisione tra due piattaforme

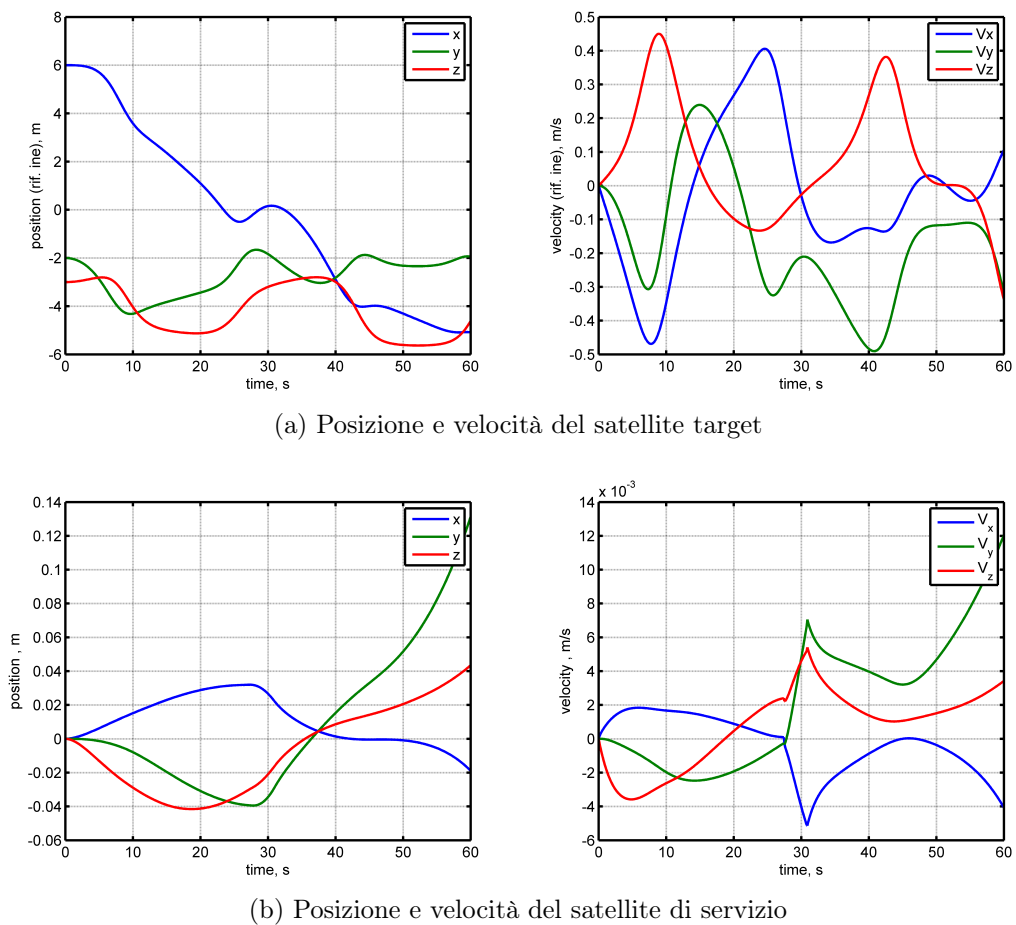
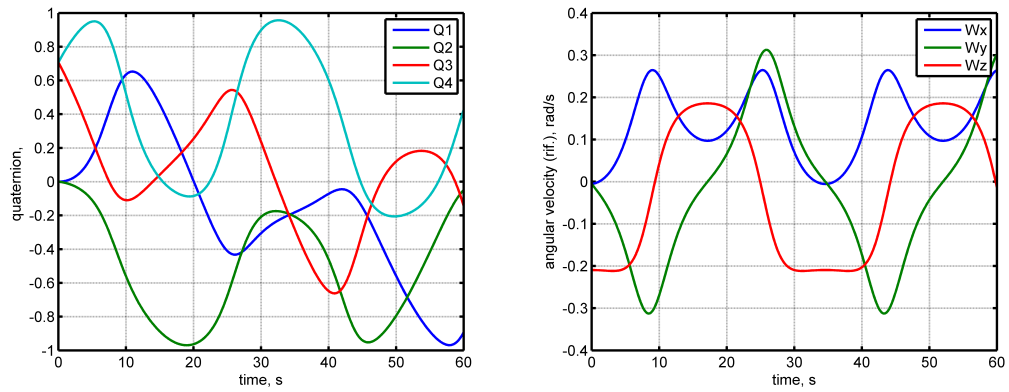
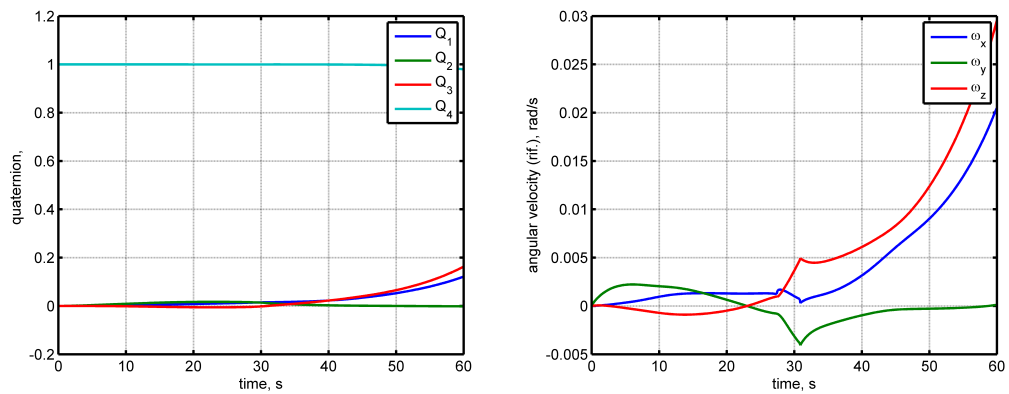


Figura 2.22: Pozione delle due piattaforme durante le fasi della collisione



(a) Assetto e velocità angolare del satellite target



(b) Assetto e velocità angolare del satellite di servizio

Figura 2.23: Assetto e velocità angolare delle due piattaforme

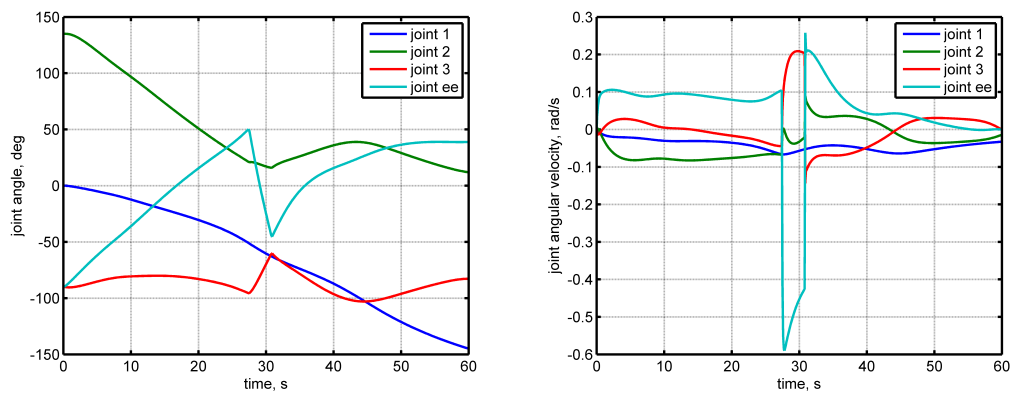
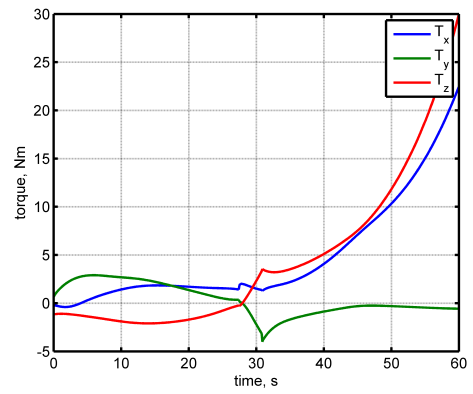
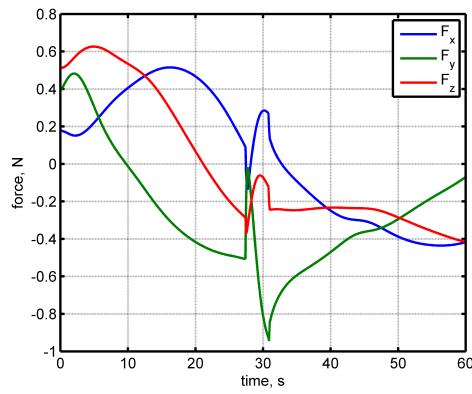
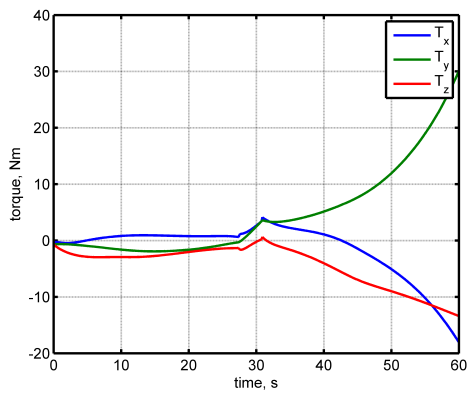
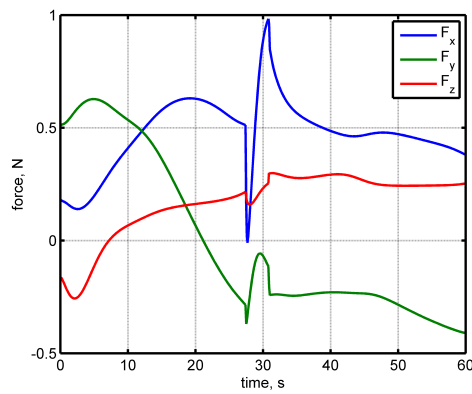


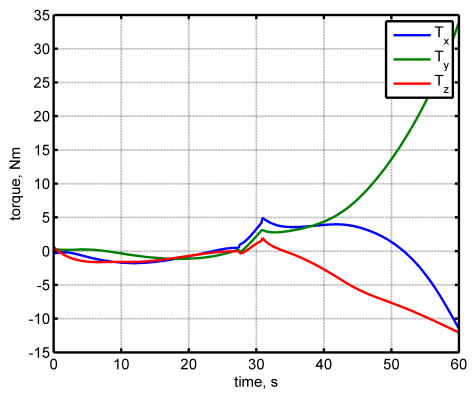
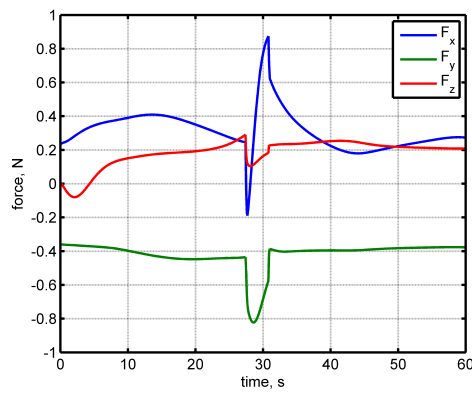
Figura 2.24: Coordinate dei giunti del manipolatore durante la collisione



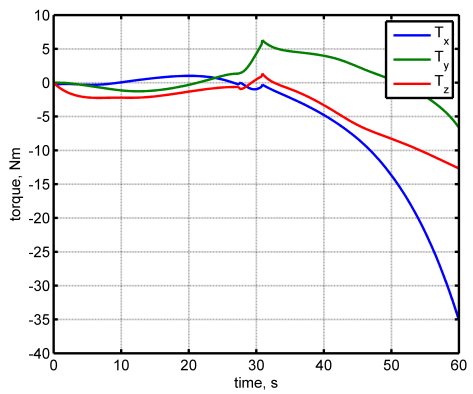
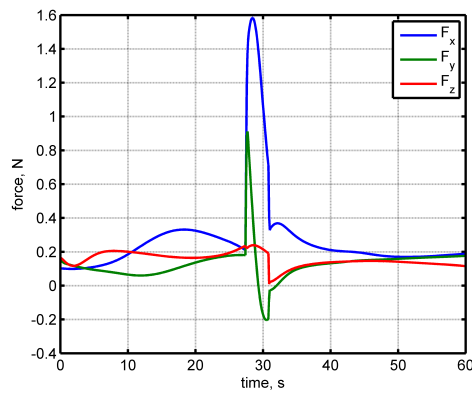
(a) Link 1



(b) Link 2



(c) Link 3



(d) Link 4

Figura 2.25: Forze e coppie applicate ai link del manipolatore durante la collisione

Parte II

Dinamica e Controllo delle Space Webs

Introduzione

Uno dei vincoli più stringenti per lo sviluppo di nuovi concetti di missioni spaziali è quello imposto dalle capacità degli attuali sistemi di lancio, sia in termini di massa trasportabile che di dimensioni ammesse ad essere stivate dentro i fairing. D'altra parte recenti progetti di missioni per l'interferometria astronomica [23, 31] o missioni di telerilevamento radar [41] in sviluppo, hanno evidenziato la possibilità di dispiegare una rete di sensori a distanze note al fine di poter effettuare operazioni altrimenti non possibili con un unico satellite: queste missioni prevedono o utilizzano due satelliti che orbitano in formazione. In alternativa parte della comunità tecnica spaziale ritiene sia possibile utilizzare per questa tipologia di missione i sistemi spaziali tethered, ricorrendo a due o più piattaforme collegate tra loro mediante dei cavi. Tali sistemi permetterebbero di avere sistemi spaziali compatti al lancio, ma che una volta in orbita avrebbero la capacità di dispiegarsi anche per distanze chilometriche, permettendo quindi missioni fino ad ora non concepibili. Le tecnologie coinvolte nel dispiegamento di tether sono state già utilizzate, con parziale successo, nei sistemi TTS-1 e TTS-1R durante le missioni dello space shuttle STS-46 e STS-75 [79].

Recentemente, in particolare da ricercatori giapponesi [82, 52, 80, 81, 84], sono state proposte missioni che propongono di costruire una vera e propria rete di satelliti collegati mediante cavi, come ad esempio mostrato in Fig.2.26: tali strutture sono conosciute col nome di Space Webs e possono considerarsi una via di mezzo tra le grandi strutture spaziali, che richiedono un complesso assemblaggio in orbita (ad esempio l'ISS), e le formazioni di satelliti, che devono usare parte notevole del loro propellente al fine di garantire un mantenimento accurato della formazione e dell'assetto relativo per compiere la loro missione.

Collettori solari [81, 49] e grandi reti di sensori per l'osservazione astronomica [52] sono state proposte come alcune delle tante applicazioni possibili. Altri concetti di missione [80, 40] prevedono l'utilizzo di veri e propri robot che, spostandosi lungo le maglie della Space Web, distribuiscono i sensori in modo ottimale per il compimento di specifiche missioni.

Questa tipologia di sistema ben si inserisce nella linea di ricerca portata avanti in questa tesi. Si tratta infatti di passare dall'analisi di strutture interconnesse "rigidamente" tra di loro, come nel caso di manipolatori spaziali trattati nella parte precedente, all'analisi di strutture di tipo elastico, quali i sistemi tethered e le space webs. I due capitoli che

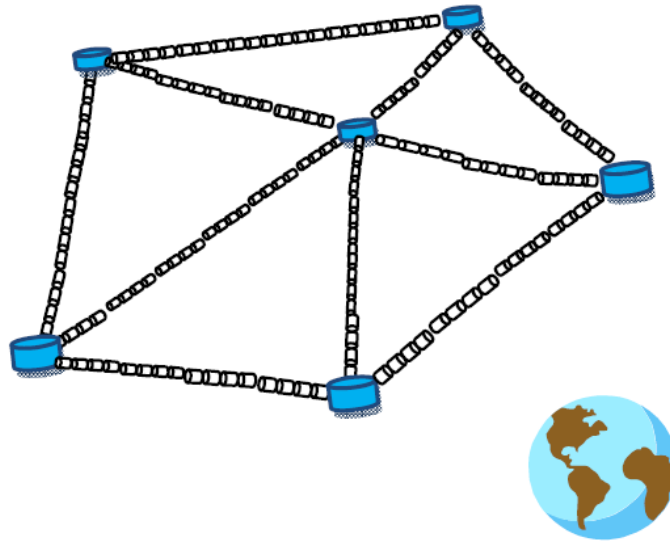


Figura 2.26: Esempio di Space Web

compongono questa parte sono dedicati alla presentazione dei modelli adottati (Capitolo 3) e dei risultati ottenuti (Capitolo 4) mediante simulazioni numeriche nello studio di questo tipo di strutture spaziali [25, 29].

Capitolo 3

Modellazione dei sistemi tethered

Uno dei punti critici per lo studio dei Sistemi Spaziali Tethered e delle Space Webs risulta essere la scelta dei modelli atti a simulare una dinamica così complessa. In letteratura esistono numerosi modelli che sono stati ipotizzati per simulare tali strutture [10, 52, 33, 32, 62, 100, 83, 78] da diversi punti di vista (dinamica, materiali, meccanismi di dispiegamento, studi termici etc.) e un modello universalmente accettato non è stato ancora scelto. La notevole complicazione nello studio di tali sistemi è dovuta all'accoppiamento tra effetti di diversa natura, che agiscono con scale temporali e spaziali estremamente diverse, ma che non possono essere studiate separatamente a causa del forte accoppiamento tra le equazioni della dinamica orbitale del sistema, le equazioni dell'assetto delle piattaforme e quelle strutturali dei cavi. Ad esempio la dinamica dei cavi sarà soggetta ad azioni di natura strutturale come vibrazioni o le sollecitazioni applicate dai satelliti agli estremi, ma anche dall'azione del gradiente di gravità, che data l'estensione di tali strutture non potrà essere assolutamente trascurata. La stessa dinamica d'assetto dei *corner satellites* cioè delle piattaforme poste agli spigoli di tali strutture, produrrà e sarà affetta dalle oscillazioni provocate da onde di natura meccanica che si propagano nei cavi.

Data questa natura così complessa si è scelto di utilizzare un modello estremamente semplificato per le simulazioni ma che comunque a portato a risultati estremamente interessanti e che mostrano un'evoluzione della dinamica di tali strutture compatibile con altri studi presenti in letteratura. Il presente capitolo presenta tale modello e mostra l'evoluzione della dinamica di un singolo tether evidenziando gli effetti dovuti agli accoppiamenti tra le varie dinamiche che agiscono sul sistema.

3.1 Il problema della modellazione delle corde

Forse l'aspetto che più caratterizza le space webs è la presenza di funi che tengono unite le piattaforme poste agli estremi della struttura. Tali elementi devono essere modellati opportunamente, altrimenti le simulazioni potrebbero non rispecchiare la loro evoluzione nello spazio. In letteratura sono disponibili approcci basati su un modello di corpo ri-

gido (con o senza massa) dei cavi [10] atti a rappresentare analiticamente la dinamica e le proprietà di stabilità di un sistema spaziale tethered, ipotizzando che le funi risultino essere sempre in tensione a causa della presenza del gradiente di gravità. Tali approcci, di natura analitica ma approssimati, permettono di ottenere risultati essenzialmente qualitativi delle proprietà di stabilità intorno alle posizioni di equilibrio prodotte dal campo di forze agente su di esse, ma sono poco utili se si vuole rappresentare l'intera evoluzione di una struttura molto più complessa del singolo tether. Tra l'altro alcuni effetti di accoppiamento tra elongazione e librazione di tali strutture risultano completamente cancellate dall'ipotesi di corpo rigido imposta. Per questo motivo altri modelli sostituiscono l'elemento centrale con un corpo in cui sono presenti anche proprietà elastiche [10, 63] analizzandone le frequenze caratteristiche di oscillazioni e come queste influenzano la stabilità del moto. Altri modelli adottano una modellazione multibody del cavo, cercando di simulare sia i problemi estensionali che flessionali degli stessi [83, 100].

Una peculiare caratteristica di queste strutture è l'esistenza di configurazioni nelle quali parte dei cavi non si trovano più in tensione a causa dell'azione delle forze di gradiente di gravità. Ciò comporta la necessità di trovare modelli atti a rappresentare tali situazioni che, seppur in modo temporaneo, caratterizzano comunque la vera evoluzione di queste strutture [62, 69, 64]. Occorre quindi distinguere i casi in cui i cavi risultino in tensione ed i casi in cui a causa delle condizioni al contorno raggiunte (cioè distanza tra le piattaforme più piccola dell'estensione del tether) non sia presente alcuna tensione lungo il cavo.

Altro aspetto non meno importante è la necessità di poter modellare anche le onde meccaniche che si propagano lungo i cavi: queste giocano un ruolo fondamentale nello studio della dinamica d'assetto dei corner satellites e non si possono quindi trascurare se, come è fatto in questa tesi, si deve considerare anche l'assetto delle piattaforme che delimitano la space web.

3.2 Modellazione della dinamica di una corda nello spazio

Per i motivi visti nella sezione 3.1 si è posta molta attenzione alla scelta del modello da adottare per studiare le space webs. La soluzione è rappresentata dalle equazioni che governano la dinamica strutturale di una corda però soggetta anche alle azioni e sollecitazioni presenti in orbita ed ai diversi stati tensionali che la caratterizzano.

In una configurazione come quella rappresentata in Fig.3.1, è possibile definire un riferimento inerziale a cui riferire le componenti dei vettori posizione $\vec{r}(s, t)$ e velocità $\vec{v}(s, t)$ delle posizioni assunte dagli elementi (infinitesimi) che compongono la corda flottante in orbita, un'ascissa curvilinea s rappresentante la distanza percorsa lungo la corda non tesa dall'estremo A per raggiungere un generico punto della stessa, e quindi scrivere l'equazione della dinamica di ogni punto che compone la stessa [63]:

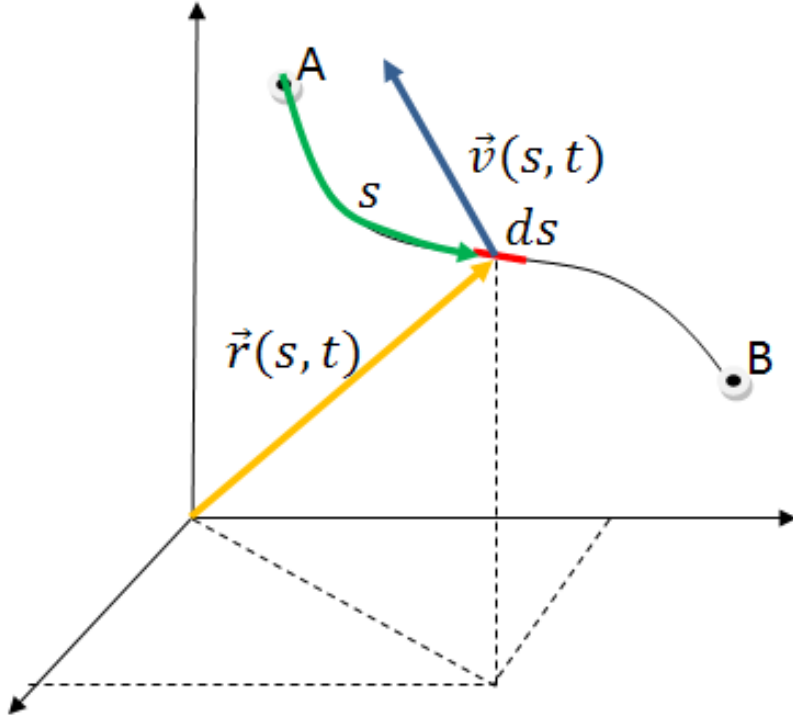


Figura 3.1: Definizioni base per lo studio della dinamica di una corda nello spazio

$$\lambda_c(s) \frac{\partial \vec{v}(s, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} [T_c(s, t) \hat{\tau}_c(s, t)] + \vec{F}_c(s, t) [1 + \epsilon_c(s, t)] \quad (3.1)$$

dove per ogni punto della corda individuato dall'ascissa curvilinea s e per ogni tempo t , si sono indicati con $\lambda_c(s)$ la densità lineare, con $T_c(s, t)$ la tensione, con $\hat{\tau}_c(s, t)$ il versore tangente alla corda, con $\vec{F}_c(s, t)$ la risultante delle forze agenti e con $\epsilon_c(s, t)$ la deformazione estensionale. Dalle note relazioni di geometria differenziale è possibile definire il versore tangente $\hat{\tau}_c(s, t)$ come:

$$\hat{\tau}_c(s, t) = \frac{1}{1 + \epsilon_c(s, t)} \frac{\partial \vec{r}_c(s, t)}{\partial s} \quad (3.2)$$

per cui si potrà ottenere l'equazione:

$$\lambda_c(s) \frac{\partial^2 \vec{r}(s, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{T_c(s, t)}{1 + \epsilon_c(s, t)} \frac{\partial \vec{r}_c(s, t)}{\partial s} \right] + \vec{F}_c(s, t) [1 + \epsilon_c(s, t)] \quad (3.3)$$

rappresentante un'equazione alle derivate parziali nelle variabili s e t .

Al fine di consentire una corretta modellazione in tutte le situazioni in cui si può trovare la corda, occorre ora distinguere il comportamento quando:

1. la corda è tesa, per cui la relazione costitutiva in questo caso risulta essere una legge elastico lineare del tipo:

$$T_c(s, t) = EA [\epsilon(s, t) + c(s) \dot{\epsilon}(s, t)] \quad (3.4)$$

quando $\epsilon(s, t) > 0$, dove si è indicato con $\dot{\epsilon}(s, t)$ la velocità di deformazione del-

la corda per poter aggiungere anche gli effetti di smorzamento rappresentati dal coefficiente $c(s)$.

2. la corda è lasca, in cui si ipotizza che la corda non opponga rigidità alla compressione, perciò si ha:

$$T_c(s, t) = 0 \quad (3.5)$$

quando $\epsilon(s, t) \leq 0$.

3.3 Dinamica della corda non tesa

Proprio il caso di corda non tesa, risulta essere più semplice da analizzare, perchè di fatto è possibile trascurare proprio gli effetti dovuti alla rigidità della corda [1] e l'Eq.3.3 diventa:

$$\lambda_c(s) \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} = \vec{F}_c(s, t) \quad (3.6)$$

dove quindi sono scomparse le azioni strutturali e la dinamica è forzata solamente dalle altre forze esterne.

Diventa quindi fondamentale modellare opportunamente tali forze esterne in modo da poter studiare l'evoluzione della dinamica del cavo compresso nel modo più accurato possibile. Per far ciò non è possibile pensare di usare metodi linearizzati, perchè la configurazione del cavo in questo caso è molto distante da una configurazione lineare o linearizzabile intorno ad una configurazione nota.

Tale approccio può essere anche giustificato se si scrive in forma debole l'Eq.3.6, cioè in forma integrale:

$$\int_0^{l_c} \left[\lambda_c(s) \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} - \vec{F}_c(s, t) \right] ds = 0 \quad (3.7)$$

dal momento che l'azione dominante agente sul sistema è quella gravitazionale, allora possiamo pensare di esplicitare tale termine rispetto alle altre forze di altra natura, per così ottenere:

$$\int_0^{l_c} \left[\lambda_c(s) \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + \lambda_c(s) \frac{\mu_{\oplus}}{r^3} \vec{r} - \vec{F}_p(s, t) \right] ds = 0 \quad (3.8)$$

dove si è indicato con $\vec{F}_p(s, t)$ le forze di altra natura agenti sugli elementi della corda. In tale forma è possibile andare ad identificare gli ordini di grandezza in gioco¹ e quindi

¹Se infatti si considera che $\vec{r} = \vec{r}_c + \vec{d}$, dove \vec{r}_c è la posizione del centro di massa della corda espressa da:

$$\vec{r}_c = \frac{\int_0^{l_c} \rho_c(s) \vec{r}(s, t) ds}{m_c}$$

per cui se la corda si trova in orbita $\vec{r}_c \cong o(R_{\oplus})$, mentre $\vec{d} = o(l_c)$ con $\frac{l_c}{R_{\oplus}} \ll 1$. Adimensionalizzando le

suddividere l'equazione del moto in due contributi di cui uno è di tipo globale espresso da:

$$\frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2} + \frac{\mu_{\oplus}}{r_c^3} \vec{r}_c = \frac{\vec{F}_p}{m_c} \quad (3.9)$$

dove si è indicata con \vec{r}_c la posizione del centro di massa della corda, ed uno di ordine superiore rappresentante l'equazione della dinamica locale della corda espresso da:

$$\int_0^{l_c} \left[\lambda_c(s) \frac{\partial^2 \vec{d}(s,t)}{\partial t^2} - \lambda_c(s) \frac{\mu_{\oplus}}{r_c^3} (3\hat{r}_c \hat{r}_c - \underline{\underline{u}}) \vec{d} - \vec{F}_p(s,t) \right] ds = 0 \quad (3.10)$$

dove si è indicato con $\vec{d}(s,t)$ la distanza del punto della corda individuato dall'ascissa curvilinea s dal centro di massa della corda e si è espressa l'azione del gradiente di gravità attraverso una linearizzazione della stessa intorno al centro di massa della corda. Se poi ci si pone su di un'orbita circolare e si esprimono le componenti in un riferimento LVLH (Local Vertical Local Horizontal), allora si può scrivere un'equazione simile a quella del moto di prossimità per oggetti orbitanti espressa in forma debole[17]:

$$\int_0^{l_c} \left[\lambda_c \ddot{\vec{d}} + 2\lambda_c \vec{\omega}_{orb} \times \dot{\vec{d}} + \lambda_c \vec{\omega}_{orb} \times (\vec{\omega}_{orb} \times \vec{d}) - \lambda_c \frac{\mu_{\oplus}}{r_c^3} (3\hat{r}_c \hat{r}_c - \underline{\underline{u}}) \vec{d} - \vec{F}_p(s,t) \right] ds = 0 \quad (3.11)$$

Ma allora suddividendo il dominio dell'ascissa curvilinea in parti uguali si ottiene²:

$$\sum_{e=1}^{N_e} \int_{l_e(e-1)}^{l_e e} \left[\lambda_c \ddot{\vec{d}} + 2\lambda_c n_{orb} \hat{h}_c \times \dot{\vec{d}} + \lambda_c n_{orb}^2 (\hat{h}_c \hat{h}_c - 3\hat{r}_c \hat{r}_c) \vec{d} - \vec{F}_p(s,t) \right] ds = 0 \quad (3.12)$$

dove si è indicata con $\vec{\omega}_{orb}$ la velocità orbitale con cui ruota il riferimento LVLH:

$$\vec{\omega}_{orb} = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{r_c^3}} \hat{h}_{orb} = n_{orb} \hat{h}_{orb} \quad (3.13)$$

e si sono espresse le forze centrifughe e le forze di gradiente di gravità in forma diadica.

Andando ad ipotizzare che ogni elemento possa essere costituito da due nodi, cioè che possa essere caratterizzato dalla posizione dei due suoi punti estremali, allora per ogni elemento si potrà definire la coordinata adimensionalizzata ξ tale per cui risulta [44]:

$$\xi = \frac{s - s_{e-1}}{s_e - s_{e-1}} = \frac{s - s_{e-1}}{l_e} \quad (3.14)$$

grandezze in gioco, cioè ponendo $\vec{\delta} = \frac{\vec{d}}{R_{\oplus}}$, $\vec{\rho}_c = \frac{\vec{r}_c}{R_{\oplus}}$ e $\tau = \frac{t}{T_{orb}} = \frac{n_0 t}{2\pi} = \frac{\mu_{\oplus}}{2\pi \rho_c^3 R_{\oplus}^3} t$ si ottiene:

da cui si possono estrarre due equazioni integro-differenziali che rappresentano dinamiche non comparabili tra di loro.

²Tale operazione è lecita in quanto vale la proprietà additiva degli integrali definiti.

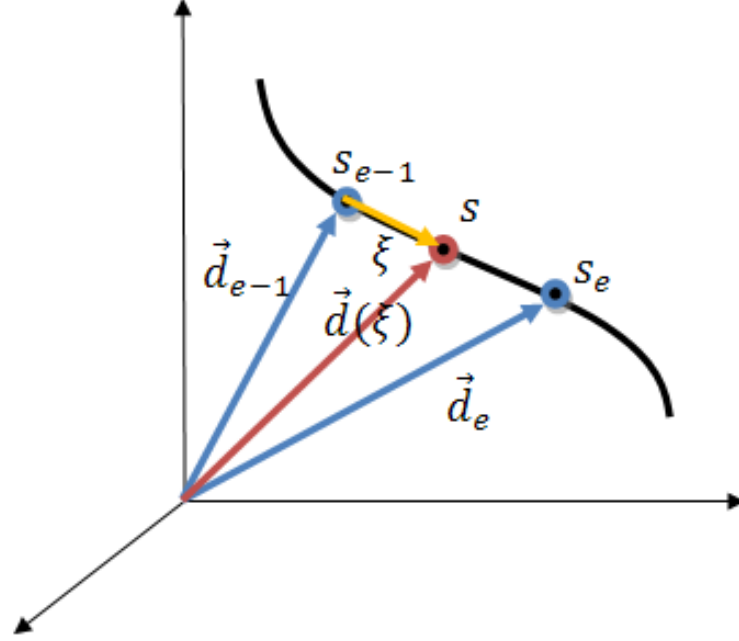


Figura 3.2: Definizione della coordinata adimensionale ξ caratteristica di un elemento

che identifica un punto appartenente all'elemento di estremi s_{e-1} e s_e di lunghezza l_e , come illustrato in Fig.3.2. E la posizione del generico punto della corda $\vec{d}(\xi)$ potrà esser rappresentata da³:

$$\vec{d}(\xi) = (1 - \xi)\vec{d}_{i-1} + \xi\vec{d}_i = h_1(\xi)\underline{u}_{3x3}\vec{d}_{i-1} + h_2(\xi)\underline{u}_{3x3}\vec{d}_i \quad (3.15)$$

che potrà essere riscritta definendo una matrice \mathbf{H} nel seguente modo:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1(\xi)\underline{u}_{3x3} \\ h_2(\xi)\underline{u}_{3x3} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

di dimensioni 6x3 e contenente le due funzioni di interpolazione, in modo tale che risulti:

$$\vec{d} = \begin{bmatrix} h_1(\xi)\underline{u}_{3x3} & h_2(\xi)\underline{u}_{3x3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{d}_{i-1} \\ \vec{d}_i \end{bmatrix} = \mathbf{H}^T \mathbf{D}_e \quad (3.17)$$

dove $\mathbf{U} = \underline{u}_{6x6}$ e \mathbf{D}_e è un vettore contenente i due poli che costituiscono l'elemento a cui ci si sta riferendo. Per cui sostituendo l'Eq. 3.17 nell'Eq.3.12 si ha:

$$\sum_{e=1}^{N_e} \int_0^1 \lambda_c \left[\mathbf{H}^T \ddot{\mathbf{D}}_e + 2n_{orb} \left[\hat{h}_c \times \right] \mathbf{H}^T \dot{\mathbf{D}}_e + \lambda_c n_{orb}^2 \left[\hat{h}_c \hat{h}_c - 3\hat{r}_c \hat{r}_c \right] \mathbf{H}^T \mathbf{D}_e - \frac{\vec{F}_p}{\lambda_c} \right] d\xi = 0 \quad (3.18)$$

³Si potrebbero scegliere altre funzioni di forma, ma la trattazione risulterebbe complicata. I risultati ottenuti con questa interpolazione lineare, come vedremo permettono una descrizione apparentemente veritiera dei fenomeni e degli effetti che avvengono in questo caso.

che può essere proiettata su sulla stessa base polinomiale definita dalla matrice in Eq.3.16 ottenendo:

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{N_e} \int_0^1 \lambda_c \left[\mathbf{H}\mathbf{H}^T \ddot{\mathbf{D}}_e + 2n_{orb} \mathbf{H} \left[\hat{h}_c \times \right] \mathbf{H}^T \dot{\mathbf{D}}_e \right] d\xi + \\ & \sum_{e=1}^{N_e} \int_0^1 + \left[\lambda_c n_{orb}^2 \mathbf{H} \left[\hat{h}_c \hat{h}_c - 3\hat{r}_c \hat{r}_c \right] \mathbf{H}^T \mathbf{D}_e - \mathbf{H} \vec{F}_p \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

e quindi integrando nel dominio dell'elemento si ottiene:

$$\sum_{e=1}^{N_e} \left[\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{D}}_e + \mathbf{C}_e \dot{\mathbf{D}}_e + \mathbf{K}_e \mathbf{D}_e - \mathbf{F}_e \right] = 0 \quad (3.20)$$

dove:

$$\mathbf{M}_e = \frac{1}{6} m_e \begin{bmatrix} 2\underline{u}_{3x3} & \underline{u}_{3x3} \\ \underline{u}_{3x3} & 2\underline{u}_{3x3} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\mathbf{C}_e = \frac{1}{3} m_e n_{orb} \begin{bmatrix} 2 \left[\hat{h}_c \times \right] & \left[\hat{h}_c \times \right] \\ \left[\hat{h}_c \times \right] & 2 \left[\hat{h}_c \times \right] \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\mathbf{K}_e = \frac{1}{6} m_e n_{orb}^2 \begin{bmatrix} 2 \left[\hat{h}_c \hat{h}_c - 3\hat{r}_c \hat{r}_c \right] & \left[\hat{h}_c \hat{h}_c - 3\hat{r}_c \hat{r}_c \right] \\ \left[\hat{h}_c \hat{h}_c - 3\hat{r}_c \hat{r}_c \right] & 2 \left[\hat{h}_c \hat{h}_c - 3\hat{r}_c \hat{r}_c \right] \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$\mathbf{F}_e = \int_0^1 \lambda_c \mathbf{H} \vec{F}_p \quad (3.24)$$

dove l'Eq.3.21 rappresenta la matrice delle masse consistenti.

Se ora si considerano tutti gli elementi che compongono la corda ($e = 1 \rightarrow N_e$) ed assembliamo il sistema in modo tale da poter esplicitare in modo univoco i nodi con cui abbiamo discretizzato la corda, si ottiene:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{D}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{K} \mathbf{D} = \mathbf{F}_e \quad (3.25)$$

dove:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{6} m_e \begin{bmatrix} 2\underline{u}_{3x3} & \underline{u}_{3x3} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \underline{u}_{3x3} & 4\underline{u}_{3x3} & \underline{u}_{3x3} & & & \vdots \\ 0 & \underline{u}_{3x3} & 4\underline{u}_{3x3} & \underline{u}_{3x3} & & \vdots \\ \vdots & & \underline{u}_{3x3} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 4\underline{u}_{3x3} & \underline{u}_{3x3} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \underline{u}_{3x3} & 2\underline{u}_{3x3} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$\mathbf{C} = \frac{1}{3} m_e n_{orb} \begin{bmatrix} 2 \begin{bmatrix} \hat{h}_c \times \\ \hat{h}_c \times \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \hat{h}_c \times \\ \hat{h}_c \times \end{bmatrix} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \begin{bmatrix} \hat{h}_c \times \\ \hat{h}_c \times \end{bmatrix} & 4 \begin{bmatrix} \hat{h}_c \times \\ \hat{h}_c \times \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \hat{h}_c \times \\ \hat{h}_c \times \end{bmatrix} & & & \vdots \\ 0 & \begin{bmatrix} \hat{h}_c \times \\ \hat{h}_c \times \end{bmatrix} & 4 \begin{bmatrix} \hat{h}_c \times \\ \hat{h}_c \times \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \hat{h}_c \times \\ \hat{h}_c \times \end{bmatrix} & & \vdots \\ \vdots & & \begin{bmatrix} \hat{h}_c \times \\ \hat{h}_c \times \end{bmatrix} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 4 \begin{bmatrix} \hat{h}_c \times \\ \hat{h}_c \times \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \hat{h}_c \times \\ \hat{h}_c \times \end{bmatrix} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \begin{bmatrix} \hat{h}_c \times \\ \hat{h}_c \times \end{bmatrix} & 2 \begin{bmatrix} \hat{h}_c \times \\ \hat{h}_c \times \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$\mathbf{K} = \frac{1}{6} m_e n_{orb}^2 \begin{bmatrix} 2 \begin{bmatrix} \hat{h}_c \hat{h}_c - 3 \hat{r}_c \hat{r}_c \\ \hat{h}_c \hat{h}_c - 3 \hat{r}_c \hat{r}_c \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \hat{h}_c \hat{h}_c - 3 \hat{r}_c \hat{r}_c \\ \hat{h}_c \hat{h}_c - 3 \hat{r}_c \hat{r}_c \end{bmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ \begin{bmatrix} \hat{h}_c \hat{h}_c - 3 \hat{r}_c \hat{r}_c \\ \hat{h}_c \hat{h}_c - 3 \hat{r}_c \hat{r}_c \end{bmatrix} & 4 \begin{bmatrix} \hat{h}_c \hat{h}_c - 3 \hat{r}_c \hat{r}_c \\ \hat{h}_c \hat{h}_c - 3 \hat{r}_c \hat{r}_c \end{bmatrix} & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & 4 \begin{bmatrix} \hat{h}_c \hat{h}_c - 3 \hat{r}_c \hat{r}_c \\ \hat{h}_c \hat{h}_c - 3 \hat{r}_c \hat{r}_c \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \hat{h}_c \hat{h}_c - 3 \hat{r}_c \hat{r}_c \\ \hat{h}_c \hat{h}_c - 3 \hat{r}_c \hat{r}_c \end{bmatrix} \\ 0 & \dots & 0 & \begin{bmatrix} \hat{h}_c \hat{h}_c - 3 \hat{r}_c \hat{r}_c \\ \hat{h}_c \hat{h}_c - 3 \hat{r}_c \hat{r}_c \end{bmatrix} & 2 \begin{bmatrix} \hat{h}_c \hat{h}_c - 3 \hat{r}_c \hat{r}_c \\ \hat{h}_c \hat{h}_c - 3 \hat{r}_c \hat{r}_c \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$\mathbf{F}_e = \int_0^1 \mathbf{H} \frac{\vec{F}_p}{\lambda_c} \quad (3.29)$$

Guardando la matrice espressa dall'Eq.3.26 possiamo notare che, a parte i due nodi posti agli estremi della corda, ogni nodo (espresso dalle colonne) è di fatto condiviso con due elementi finiti e se si va a conteggiare la massa che tale nodo assume, ci si accorge che è proprio pari alla massa di un elemento di corda. D'altra parte, se si confronta l'Eq.3.26 con Eq.3.21 del singolo elemento, possiamo notare che, in corrispondenza di un nodo di fatto viene assegnata mezza massa dell'elemento precedente al nodo e mezza massa dell'elemento successivo al nodo. Tale proprietà si mantiene anche quando si diagonalizza il sistema e si ottiene una matrice di massa Lumped del tipo:

$$\mathbf{M} = m_e \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \underline{\underline{u}}_{3 \times 3} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \underline{\underline{u}}_{3 \times 3} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \underline{\underline{u}}_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{2} \underline{\underline{u}}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

e le altre matrici risultano essere:

$$\mathbf{C} = m_e n_{orb} \begin{bmatrix} \left[\hat{h}_c \times \right] & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 \left[\hat{h}_c \times \right] & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 2 \left[\hat{h}_c \times \right] & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \left[\hat{h}_c \times \right] \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

$$\mathbf{K} = m_e n_{orb}^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left[\hat{h}_c \hat{h}_c - 3 \hat{r}_c \hat{r}_c \right] & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \left[\hat{h}_c \hat{h}_c - 3 \hat{r}_c \hat{r}_c \right] & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \left[\hat{h}_c \hat{h}_c - 3 \hat{r}_c \hat{r}_c \right] & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \left[\hat{h}_c \hat{h}_c - 3 \hat{r}_c \hat{r}_c \right] \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Se si osserva attentamente tali matrici ci si accorge che una possibile metodologia d'analisi di questa situazione è quella di discretizzare la corda in molti nodi e quindi andare a studiare l'evoluzione di tali nodi nello spazio sotto l'azione delle forze di gravità e del gradiente di gravità. In particolare, assegnata una certa configurazione della corda non tesa si può pensare di suddividere la corda lungo la sua ascissa curvilinea s in N_e parti di lunghezza curvilinea uguale, per cui risulta che ogni elemento ha una lunghezza a riposo pari a:

$$l_e = \frac{l_c}{N_e} \quad (3.33)$$

ed ipotizzando che la distribuzione di massa lungo la corda sia omogenea, sarà possibile valutare la massa di ogni elemento attraverso la relazione:

$$m_e = \frac{m_c}{N_e} \quad (3.34)$$

ed i nodi associati a tale suddivisione risulteranno essere pari a:

$$N_n = N_e + 1 \quad (3.35)$$

ma se si escludono i nodi estremi (a cui può essere associata una massa pari alla metà degli altri), si può dotare tali nodi una massa uguale a quella degli elementi da cui derivano. L'evoluzione nel tempo della corda potrà essere assimilata all'evoluzione di $N_e - 1$ punti materiali che volano in formazione, senza che vi sia una forza di richiamo elastica dal momento che la corda non risulta essere tesa e vale la condizione espressa dall'Eq.3.5.

3.4 Dinamica della corda tesa

Di diversa natura risulta essere il comportamento della corda quando questa è tirata. In tale configurazione l'equazione costitutiva risulta essere quella espressa dall'Eq.3.4, cioè si ipotizza che la corda sia soggetta ad una tensione di richiamo elastico proporzionale all'entità della deformazione subita. Anche in questo caso, la procedura che si può attuare è proprio quella già vista nella sezione 3.3, ma con la differenza che in questo caso esisterà uno stato tensionale nell'Eq.3.3 che non può essere più trascurato come fatto in precedenza.

Anche in questo caso si può trovare una formulazione debole dell'Eq.3.3 andando ad integrare tale equazione in tutto il dominio dell'ascissa curvilinea:

$$\int_0^{l_c} \left[\lambda_c(s) \frac{\partial^2 \vec{r}(s, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{T_c(s, t)}{1 + \epsilon_c(s, t)} \frac{\partial \vec{r}_c(s, t)}{\partial s} \right] - \vec{F}_c(s, t) [1 + \epsilon_c(s, t)] \right] ds \quad (3.36)$$

andando ad effettuare le stesse procedure del caso precedente, si ripetono molte operazioni che portano ai medesimi risultati del caso di corda non tesa⁴, mentre risulta essere sostanzialmente diversa la procedura che coinvolge il secondo termine dell'Eq.3.36. Si giunge quindi alla seguente equazione:

$$\int_0^{l_c} \left[\lambda_c \ddot{\vec{d}} + 2\lambda_c \vec{\omega}_{orb} \times \dot{\vec{d}} + \lambda_c \vec{\omega}_{orb} \times (\vec{\omega}_{orb} \times \vec{d}) - \lambda_c \frac{\mu_{\oplus}}{r_c^3} (3\hat{r}_c \hat{r}_c - \underline{\underline{1}}) \vec{d} - \vec{F}_p(s, t) \right] ds + \\ - \int_0^{l_c} \left[\frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{T_c(s, t)}{1 + \epsilon_c(s, t)} \frac{\partial \vec{d}(s, t)}{\partial s} \right] \right] ds = 0 \quad (3.37)$$

dove la prima parte è sostanzialmente la stessa che si ottiene nel caso della sezione 3.3, mentre l'ultimo termine deve essere ancora sviluppato. Per semplicità da ora si considera quindi solo quest'ultimo termine, rimandando ai risultati ottenuti precedentemente per gli altri termini. Moltiplicando tale equazione per una generica funzione di forma $w(s)$ ed integrando per parti si ottiene infatti⁵:

$$\int_0^{l_c} \left[\frac{\partial}{\partial s} [T_c(s, t) \hat{r}_c(s, t)] \right] w ds = [T_c(s, t) \hat{r}_c(s, t) w(s)]_0^{l_c} - \int_0^{l_c} T_c(s, t) \hat{r}_c(s, t) \frac{dw(s)}{ds} ds \quad (3.38)$$

dove le condizioni al contorno saranno imposte nella sezione 3.5. La restante parte dell'integrale può quindi suddiviso in N_e elementi di lunghezza a riposo pari ad $l_e = l_c/N_e$ [1]:

⁴La matrice di massa del sistema rimane ad esempio immutata ed anche le imposizioni di moto relativo del riferimento orbitale e del gradiente di gravità portano alla definizione delle stesse matrici che riguardano questi effetti.

⁵Si ricordino inoltre le definizioni espresse dall'Eq.3.2.

$$\sum_{e=1}^{N_e} \int_{l_e(e-1)}^{l_e e} \frac{dw(s)}{ds} T_c(s, t) \hat{\tau}_c(s, t) ds = \sum_{e=1}^{N_e} \int_{l_e(e-1)}^{l_e e} \frac{dw}{ds} \frac{EA(\epsilon_c + c\dot{\epsilon}_c)}{1 + \epsilon_c} \frac{\partial \vec{d}}{\partial s} ds \quad (3.39)$$

in cui l'ultima relazione la si ottiene sostituendo l'Eq.3.4 e l'Eq.3.2. Ma allora ricordando l'Eq.3.15, l'Eq.3.16 e l'Eq.3.17, si possono esplicitare i vari termini:

$$\sum_{e=1}^{N_e} \int_{l_e(e-1)}^{l_e e} \frac{dw}{ds} \frac{EA(\epsilon_c + c\dot{\epsilon}_c)}{1 + \epsilon_c} \frac{\partial \vec{d}}{\partial s} ds = \sum_{e=1}^{N_e} \int_0^1 \frac{dw}{d\xi} \frac{EA(\epsilon_c + c\dot{\epsilon}_c)}{1 + \epsilon_c} \frac{\partial \vec{d}}{\partial \xi} d\xi \quad (3.40)$$

andando ad effettuare le derivate richieste si ottiene:

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{N_e} \int_0^1 \frac{dw}{d\xi} \frac{EA(\epsilon_c + c\dot{\epsilon}_c)}{1 + \epsilon_c} \frac{\partial \vec{d}}{\partial \xi} d\xi = \\ & \sum_{e=1}^{N_e} \int_0^1 \frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} -\underline{u}_{3x3} \\ \underline{u}_{3x3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\delta}_e \hat{\delta}_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\underline{u}_{3x3} & \underline{u}_{3x3} \end{bmatrix} d\xi \begin{bmatrix} \vec{d}_{e-1} \\ \vec{d}_e \end{bmatrix} + \\ & \sum_{e=1}^{N_e} \int_0^1 c \frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} -\underline{u}_{3x3} \\ \underline{u}_{3x3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\delta}_e \hat{\delta}_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\underline{u}_{3x3} & \underline{u}_{3x3} \end{bmatrix} d\xi \begin{bmatrix} \dot{\vec{d}}_{e-1} \\ \dot{\vec{d}}_e \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.41)$$

dove si è definita la diade $\hat{\delta}_e \hat{\delta}_e$ per indicare la direzione di estensione dell'elemento, dove il versore $\hat{\delta}_e$ è stato così definito:

$$\hat{\delta}_e = \frac{\vec{d}_e - \vec{d}_{e-1}}{l_e(1 + \epsilon_c)} \quad (3.42)$$

per cui per ogni elemento sarà possibile definire la matrice di richiamo elastico \mathbf{K}_e :

$$\mathbf{K}_e^{el} = \frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\delta}_e \hat{\delta}_e \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} \hat{\delta}_e \hat{\delta}_e \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} \hat{\delta}_e \hat{\delta}_e \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \hat{\delta}_e \hat{\delta}_e \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

e la matrice di damping strutturale:

$$\mathbf{C}_e^{el} = c \frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\delta}_e \hat{\delta}_e \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} \hat{\delta}_e \hat{\delta}_e \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} \hat{\delta}_e \hat{\delta}_e \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \hat{\delta}_e \hat{\delta}_e \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Così la dinamica relativa al singolo elemento può scriversi mediante il seguente sistema:

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{D}}_e + (\mathbf{C}_e + \mathbf{C}_e^{el}) \dot{\mathbf{D}}_e + (\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_e^{el}) \mathbf{D}_e = \mathbf{F}_e \quad (3.45)$$

Assemblando tutti gli elementi si ottiene un sistema bandato come quello dell'Eq.3.25, ma con l'aggiunta delle seguenti matrici di rigidezza e smorzamento:

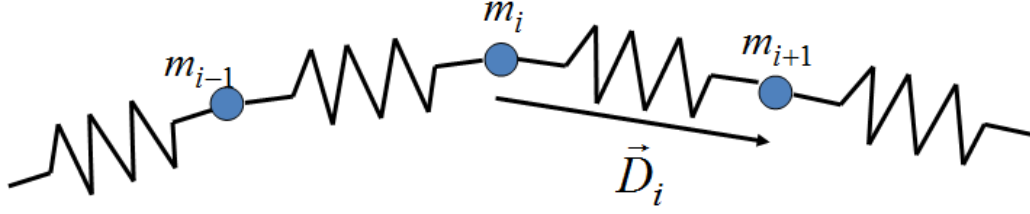


Figura 3.3: Modello di cavo schematizzato come sistema seriale di masse e molle

$$\mathbf{C}^{el} = c \frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\delta}_1 \hat{\delta}_1 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} \hat{\delta}_1 \hat{\delta}_1 \end{bmatrix} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\begin{bmatrix} \hat{\delta}_1 \hat{\delta}_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \hat{\delta}_1 \hat{\delta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\delta}_2 \hat{\delta}_2 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} \hat{\delta}_2 \hat{\delta}_2 \end{bmatrix} & & & \vdots \\ 0 & -\begin{bmatrix} \hat{\delta}_2 \hat{\delta}_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \hat{\delta}_2 \hat{\delta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\delta}_3 \hat{\delta}_3 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} \hat{\delta}_3 \hat{\delta}_3 \end{bmatrix} & & \vdots \\ \vdots & & -\begin{bmatrix} \hat{\delta}_3 \hat{\delta}_3 \end{bmatrix} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -\begin{bmatrix} \hat{\delta}_{Ne} \hat{\delta}_{Ne} \end{bmatrix} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\begin{bmatrix} \hat{\delta}_N \hat{\delta}_{Ne} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \hat{\delta}_{Ne} \hat{\delta}_{Ne} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

$$\mathbf{K}^{el} = \frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\delta}_1 \hat{\delta}_1 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} \hat{\delta}_1 \hat{\delta}_1 \end{bmatrix} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\begin{bmatrix} \hat{\delta}_1 \hat{\delta}_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \hat{\delta}_1 \hat{\delta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\delta}_2 \hat{\delta}_2 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} \hat{\delta}_2 \hat{\delta}_2 \end{bmatrix} & & & \vdots \\ 0 & -\begin{bmatrix} \hat{\delta}_2 \hat{\delta}_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \hat{\delta}_2 \hat{\delta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\delta}_3 \hat{\delta}_3 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} \hat{\delta}_3 \hat{\delta}_3 \end{bmatrix} & & \vdots \\ \vdots & & -\begin{bmatrix} \hat{\delta}_3 \hat{\delta}_3 \end{bmatrix} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -\begin{bmatrix} \hat{\delta}_{Ne} \hat{\delta}_{Ne} \end{bmatrix} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\begin{bmatrix} \hat{\delta}_N \hat{\delta}_{Ne} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \hat{\delta}_{Ne} \hat{\delta}_{Ne} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

per cui il sistema complessivo risulta essere espresso da un sistema del tipo:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{D}} + (\mathbf{C} + \mathbf{C}^{el})\dot{\mathbf{D}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}^{el})\mathbf{D} = \mathbf{F} \quad (3.48)$$

dove le matrici \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} sono le stesse del caso non teso.

Diagonalizzando l'Eq.3.48 è possibile trovare un sistema che può essere rappresentato da $N_e - 1$ nodi dotati di massa pari m_e (ai nodi agli estremi viene attribuita mezza massa di elemento), governati dalle azioni di gradiente di gravità e dalle forze apparenti dovute alla rotazione del sistema di riferimento e dall'azione di richiamo di una molla che agisce lungo la congiungente ai due nodi che compongono un elemento.

Proprio questa considerazione è di fondamentale importanza nella modellazione delle

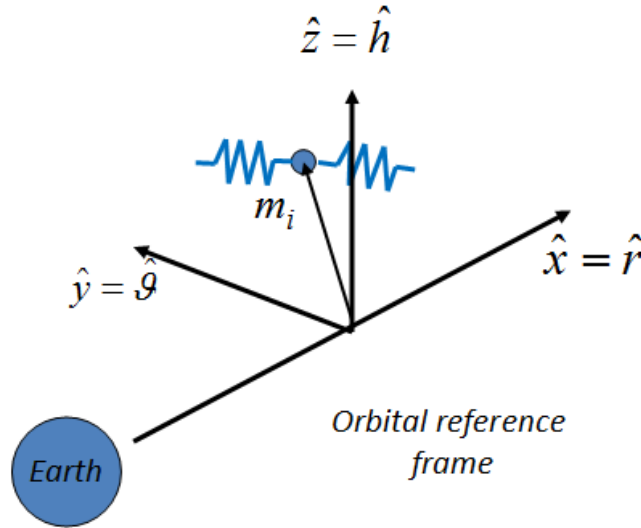


Figura 3.4: Elemento massa-molle nel riferimento LVLH

space webs perchè giustifica l'assunzione fatta di modellare il cavo mediante una serie di punti materiali, collegati proprio da molle, come rappresentato in Fig.3.3, il cui comportamento è dipendente dallo stato tensionale del cavo. In particolare si avrà che per ogni elemento è possibile scrivere la seguente equazione caratteristica della molla:

$$\vec{T}_e = \begin{cases} -k_e(D_e - D_{e0})\hat{D}_e - ck_e\dot{D}_e\hat{D}_e & \text{se } (D_e - D_{e0}) > 0 \\ 0 & \text{se } (D_e - D_{e0}) \leq 0 \end{cases} \quad (3.49)$$

dove si è indicato con D_e la distanza tra due nodi che compongono uno stesso elemento, D_{e0} la distanza di riposo della molla e con \hat{D}_e il versore che collega il nodo $e - 1$ con il nodo e . Con il termine k_e si è indicata la rigidezza equivalente della molla nel caso in cui il cavo sia esteso. Dalle considerazioni fatte in precedenza risulta evidente che:

$$k_e = \frac{EA}{l_e} = \frac{EAN_e}{l_c} \quad (3.50)$$

cioè più è suddivisa la corda e più la molla associata ad ogni elemento sarà rigida: questo giocherà un ruolo importante per quanto riguarda il problema delle simulazioni di queste dinamiche.

Le equazioni che governano la dinamica dei nodi sono quindi le equazioni di Eulero Hill [17] in cui è presente anche le azioni delle due molle che sono collegate a tale nodo, come anche rappresentato nella Fig.3.4:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_e &= 2n_0\dot{y}_e + 3n_0^2x_e + \frac{T_e^x - T_{e-1}^x}{m_e} \\ \ddot{y}_e &= -2n_0\dot{x}_e + \frac{T_e^y - T_{e-1}^y}{m_e} \\ \ddot{z}_e &= -n_0^2z_e + \frac{T_e^z - T_{e-1}^z}{m_e} \end{aligned} \quad (3.51)$$

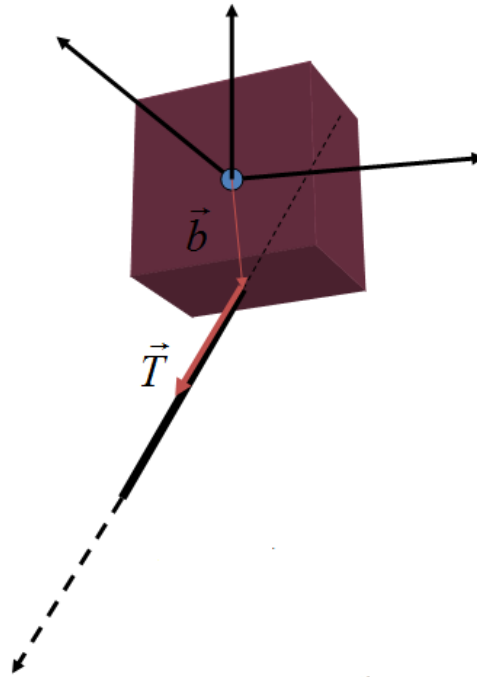


Figura 3.5: Corner Satellite

dove si sono indicate con x_e , y_e e z_e le componenti del vettore \vec{d}_e nel riferimento LVLH ed in particolare rispettivamente la componente radiale, la componente tangenziale e la componente fuori dal piano orbitale di riferimento.

3.5 Modello della dinamica dei corner satellite

Il modello della corda esposto nei paragrafi precedenti ha mostrato come sia necessario fornire una condizione al contorno agli estremi dei cavi che devono modellare l'evoluzione del tether. Questa condizione in molti lavori è spesso data per mezzo della tensione che una piattaforma, considerata come punto, esercita sul primo ed ultimo nodo della catena di massa e molle con cui è modellato il cavo. Di fatto questi modelli [62, 69] sostituiscono alla prima ed all'ultima massa della catena un punto materiale della stessa massa dei corner satellite della web. E' ragionevole farlo, se lo studio è dedicato a trovare configurazioni stabili per tali strutture, ma pecca di approssimazione qualora si voglia comprendere anche gli effetti dovuti all'accoppiamento tra satellite e cavo.

Proprio questo aspetto è stato introdotto durante l'attività di ricerca in questo campo: si sono introdotti i corner satellite modellati come corpi rigidi, come rappresentato in Fig.3.5. In generale quindi si potrà si applicare l'Eq.3.51 andandola ad esplicitare con la massa del satellite, ma il punto d'attacco del cavo e il centro di massa del satellite si troveranno in punti non coincidenti. L'equazione traslazionale sarà quindi modellabile dalla seguente relazione:

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_{i-sat} &= 2n_0\dot{y}_{i-sat} + 3n_0^2x_e + \sum_{j=1}^{N_a} \frac{T_{j-0}^x}{m_{i-sat}} \\
\ddot{y}_{i-sat} &= -2n_0\dot{x}_{i-sat} + \sum_{j=1}^{N_a} \frac{T_{j-0}^y}{m_{i-sat}} \\
\ddot{z}_{i-sat} &= -n_0^2z_{i-sat} + \sum_{j=1}^{N_a} \frac{T_{j-0}^z}{m_{i-sat}}
\end{aligned} \tag{3.52}$$

dove m_{i-sat} è la massa del satellite, mentre ipotizzando che sul satellite siano attaccati N_a cavi, occorrerà calcolare la risultante di tutte le tensioni applicate al primo nodo del cavo e quindi per reazione al satellite.

Associata una terna di riferimento a tali corpi, sarà possibile stabilirne l'assetto rispetto al riferimento inerziale per mezzo del quaternione[99]:

$$\mathcal{Q}_{i-sat} = \begin{bmatrix} \vec{q}_{i-sat} \\ q_{4i-sat} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \frac{\phi}{2} \hat{a} \\ \cos \frac{\phi}{2} \end{bmatrix} \tag{3.53}$$

dove si è indicato con \vec{q}_{i-sat} la parte vettoriale e con q_{4i-sat} la parte scalare del quaternione. E' altresì possibile scrivere l'equazione cinematica del satellite [99]:

$$\dot{\mathcal{Q}}_{i-sat} = \frac{1}{2} \mathcal{Q}_{i-sat} \otimes \Omega_{i-sat} \tag{3.54}$$

dove Ω_{i-sat} è il quaternione associato alla velocità angolare del satellite $\vec{\omega}_{i-sat}$ espressa in componenti riferite al riferimento solidale al satellite:

$$\Omega_{i-sat} = \begin{bmatrix} \vec{\omega}_{i-sat} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.55}$$

L'equazione della dinamica sarà quindi espressa dalla seguente relazione:

$$\dot{\vec{\omega}}_{i-sat} = \mathbf{J}_{i-sat}^{-1} \left[-\vec{\omega}_{i-sat} \times (\mathbf{J}_{i-sat}^{-1} \cdot \vec{\omega}_{i-sat}) + \vec{M}_{i-sat} \right] \tag{3.56}$$

dove \mathbf{J}_{i-sat}^{-1} è la diade d'inerzia del satellite ed \vec{M}_{i-sat} è la risultante delle coppie applicate allo stesso che si possono esplicitare in:

$$\vec{M}_{i-sat} = \vec{M}_{i-sat}^{gg} + \vec{M}_{i-sat}^{att} + \vec{M}_{i-sat}^{cavi} + \vec{M}_{i-sat}^{altro} \tag{3.57}$$

dove \vec{M}_{i-sat}^{gg} è la coppia dovuta al gradiente di gravità, \vec{M}_{i-sat}^{att} sono le coppie di attuazione generate dai dispositivi per il controllo d'assetto a bordo del satellite, \vec{M}_{i-sat}^{altro} sono altre coppie di disturbo che agiscono sul satellite ed infine \vec{M}_{i-sat}^{cavi} sono le coppie dovute alle reazioni esercitate dai cavi:

$$\vec{M}_{i-sat}^{cavi} = \sum_{j=1}^{N_a} \vec{b}_j \times \vec{T}_{j-0} \tag{3.58}$$

in cui si è indicata con il vettore \vec{b}_j la distanza tra il centro di massa della piattaforma e il punto di aggancio del j -esimo tether. Tale punto sarà anche il punto in cui sarà presente il primo (o l'ultimo) nodo della corda, per cui la condizione al contorno da applicare all'equazione della corda sarà:

$${}^{orb}\vec{d}_{j-0} = {}^{orb}\vec{d}_{i-sat} + {}^{orb}\mathbf{R}_{i-sat} {}^{i-sat}\vec{b}_j \quad (3.59)$$

dove si è indicato con ${}^{orb}\vec{d}_{i-sat}$ il vettore posizione del satellite rispetto al riferimento LVLH e con ${}^{orb}\mathbf{R}_{i-sat}$ la matrice di rotazione relativa tra satellite e riferimento orbitale, che si può calcolare andando a definire il quaternione relativo tra i due sistemi di riferimento:

$${}^{orb}\mathcal{Q}_{i-sat} = \mathcal{Q}_{orb}^* \otimes \mathcal{Q}_{i-sat} \quad (3.60)$$

dove \mathcal{Q}_{orb}^* è il quaternione complesso coniugato del quaternione rappresentante l'orientamento del riferimento LVLH rispetto al riferimento inerziale. Per la regola di trasformazione tra componenti del quaternione e la relativa matrice di rotazione, si consideri come referenza [99].

3.6 Caratteristiche del codice numerico

Il codice numerico atto a simulare una dinamica così variegata, risulta essere abbastanza complicato: ciò in ragion del fatto che durante la simulazione vengono ad interagire fenomeni che hanno scale temporali estremamente diverse. Come abbiamo visto infatti, il modello che simula la dinamica dei cavi è un sistema seriale di masse e molle la cui frequenza caratteristica risulta essere abbastanza alta: quindi la dinamica di vibrazione delle corde avrà scale temporali estremamente piccole, decimi se non centesimi di secondo. Ciò si scontra invece con il moto orbitale delle piattaforme, che viceversa è dell'ordine delle ore. Oltretutto per una corretta modellazione del cavo, al fine di ridurre l'errore commesso con la metodologia stile elementi finiti, è necessario avere un numero di elementi elevato, ma come abbiamo visto dall'Eq.3.49 ciò comporta un incremento della rigidità e quindi delle frequenze naturali del tether.

D'altra parte gli stessi gradi di libertà che il risolutore delle equazioni differenziali deve affrontare risulta essere estremamente elevato. Infatti se si va a conteggiare il numero di equazioni da risolvere è:

$$N_{equations} = 6(N_{elements} - 1)N_{tethers} + 13N_{sats} \quad (3.61)$$

Per cui anche se abbiamo un sistema costituito da 2 satelliti e si simula ogni corda con 100 elementi, il numero di equazioni differenziali da risolvere è 620 a cui corrispondono 620 variabili incognite per la sola dinamica del sistema. Ipotizzando che, data la necessità di simulare opportunamente anche la dinamica del sistema, si utilizzi uno step temporale di 1/100 di secondo e si vuole simulare ciò che avviene in 90min, l'integrazione dovrà

effettuare $3.24e + 7$ cicli. Se poi si vuole memorizzare tutte le variabili di stato per tutti gli istanti di integrazione, allora sarà necessario disporre di $2.01e + 10$ allocazioni di memoria atte a memorizzare numeri in virgola mobile a doppia precisione ($64\text{bit} = 8\text{byte}$), cioè $1.61e + 11\text{byte} = 161\text{Gbyte}$. Fortunatamente non c'è necessità di memorizzare tutti gli istanti di tempo, né l'andamento di tutti i nodi del tether, per cui non è necessaria così tanta memoria secondaria. Tuttavia l'operazione di inversione e la successiva integrazione avvengono su tutto lo spazio di stato e per $3.24e + 7$ cicli consecutivi. , per cui lo sforzo computazionale per risolvere questo problema è comunque enorme.

Per questo motivo il codice autonomamente sviluppato è scritto in linguaggio C, che permette di avere un miglior accesso alla memoria delle attuali piattaforme di calcolo e d'altra parte, essendo un linguaggio compilato, le operazioni di elaborazione dati avvengono più velocemente rispetto ad un eventuale codice sviluppato in MATLAB (interpretato). L'integratore adottato è un Runge Kutta del 4° ordine a passo fisso. Lo step temporale di integrazione è preso come $1/100$ del tempo minimo caratteristico del sistema, al fine di ridurre gli errori numerici durante la simulazione [25, 29].

3.7 Risultati Numerici

Sono state effettuate alcune simulazioni al fine di comprendere il comportamento di un sistema basilare, ma comunque complicato, come è quello di una configurazione a singolo tether: due satelliti collegati da cavi. Le piattaforme agli estremi hanno forma cubica di lato $l_{sat} = 1m$ e massa pari a $m_{sat} = 100kg$ ed un diadico d'inerzia:

$$\mathbf{J}_{sat} = \begin{bmatrix} 16.6 & & \\ & 16.6 & \\ & & 25 \end{bmatrix} kgm^2$$

La lunghezza del cavo è di $l_c = 1000m$ ed il materiale che generalmente viene usato per questo tipo di missioni è il KEVLAR, che ha una densità $\rho = 1440kg/m^3$ ed un modulo di Young $E = 112GPa$. Gli attuatori producono coppie massime di $1Nm$.

Il primo tipo di manovra è rappresentato in Fig.3.6: un sistema tether inizialmente allineato lungo la verticale locale, quindi in una posizione di equilibrio stabile, all'istante $t = 100s$ ad uno dei due satelliti viene fornita una coppia di $1Nm$ (step) in modo da far ruotare tale satellite nella direzione tangente all'orbita $\hat{\theta}$: l'equilibrio del sistema viene di fatto disturbato da tale azione. In Fig.3.7 sono rappresentati gli andamenti della velocità angolare dei due satelliti in cui si può notare come l'azione della coppia determina un cambio repentino della velocità angolare del primo satellite, cioè quello a cui viene applicata la coppia, mentre la perturbazione viene sentita dalla seconda piattaforma dopo circa $\Delta t = 1000s$. Tale comportamento è dovuto al fatto che l'onda, innescata dal movimento repentino fatto dal primo satellite quando è applicata la coppia, si deve propagare per tutta la lunghezza del tether prima di raggiungere il secondo satellite. L'effetto di tale

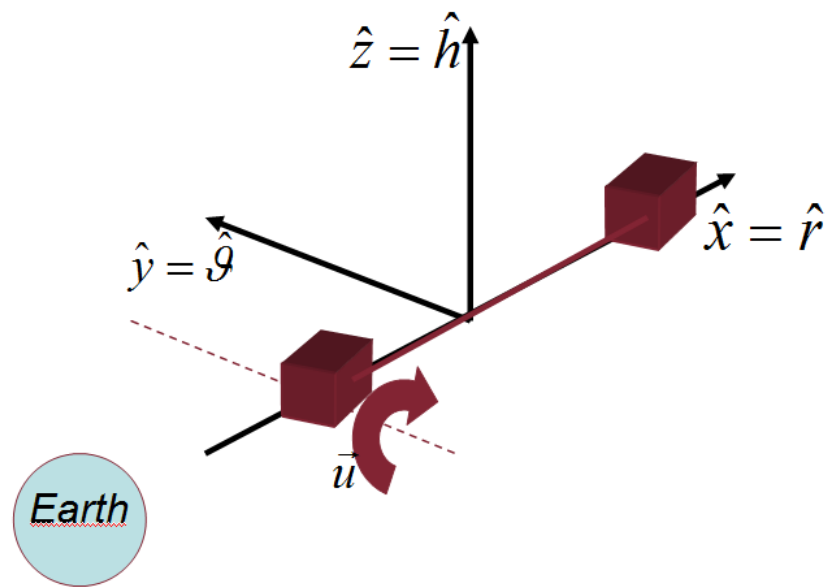


Figura 3.6: Manovra d'assetto effettuata con satellite allineato lungo verticale locale

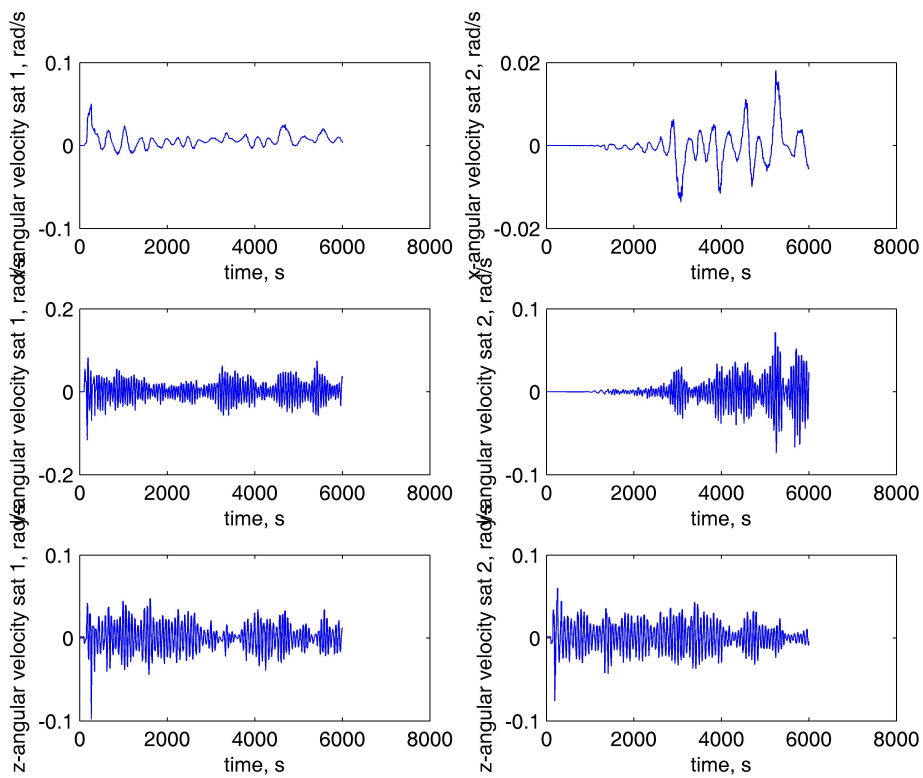


Figura 3.7: Velocità angolare delle piattaforme nel caso di manovra a partire dalla verticale locale

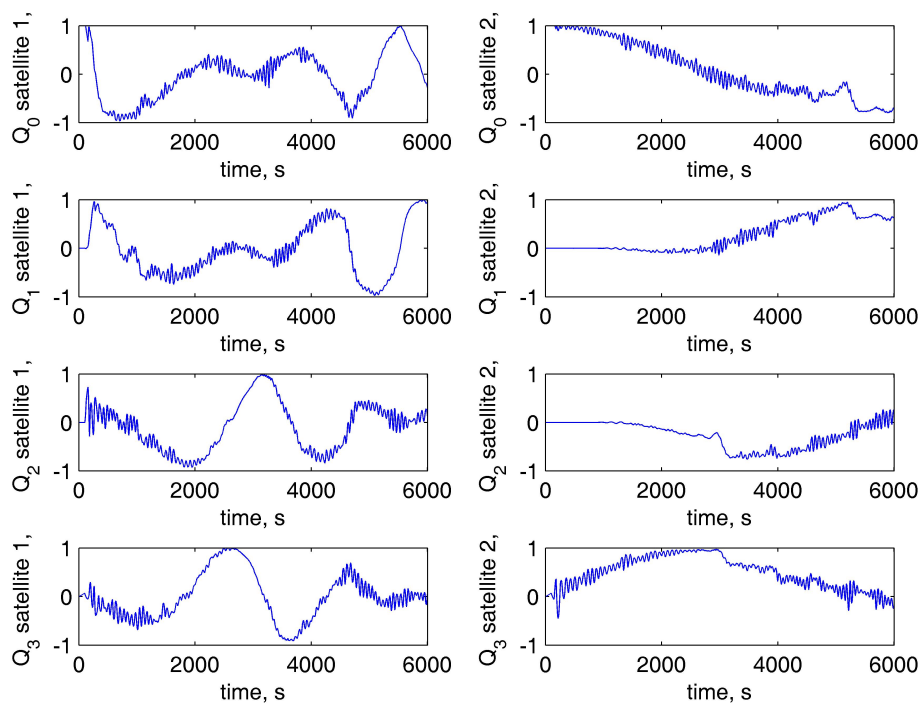


Figura 3.8: Quaternione dell'assetto nel caso di manovra a partire dalla verticale locale

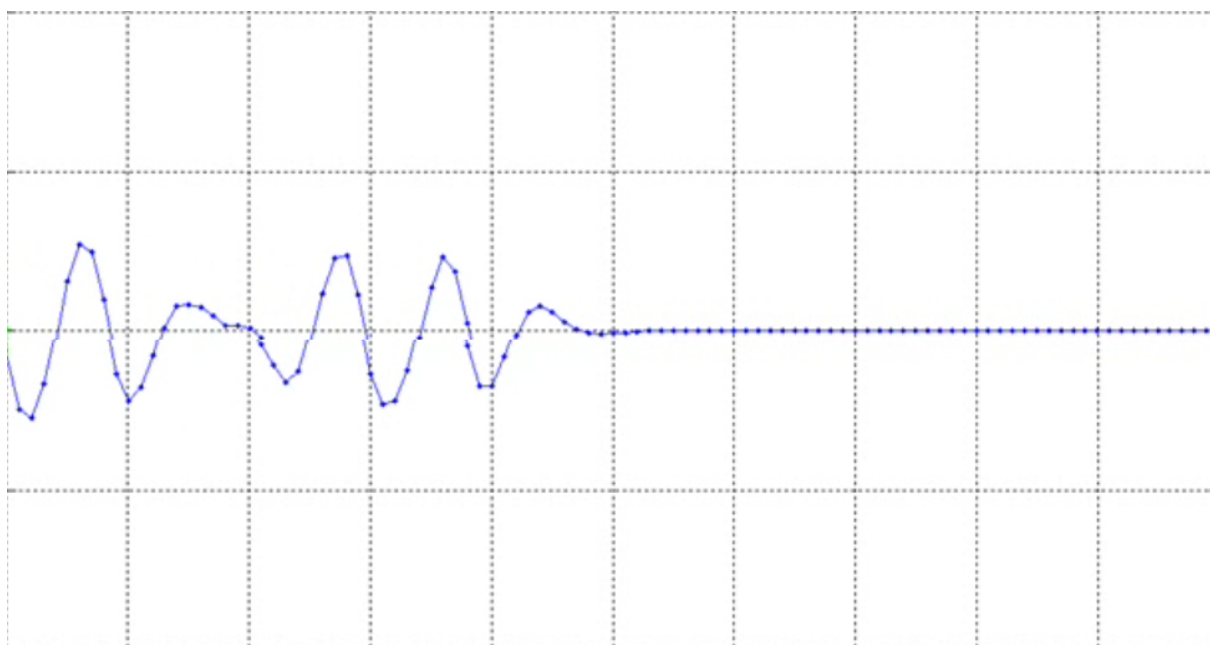


Figura 3.9: Snapshot dell'onda lungo il tether

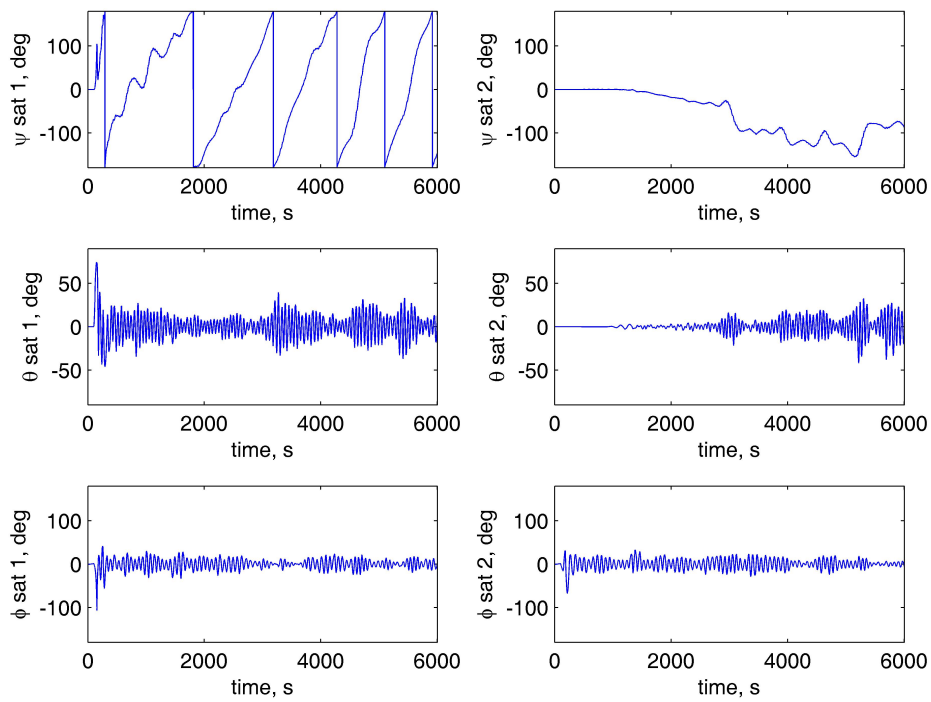


Figura 3.10: Angoli di Eulero 123 nel caso di manovra a partire dalla verticale locale

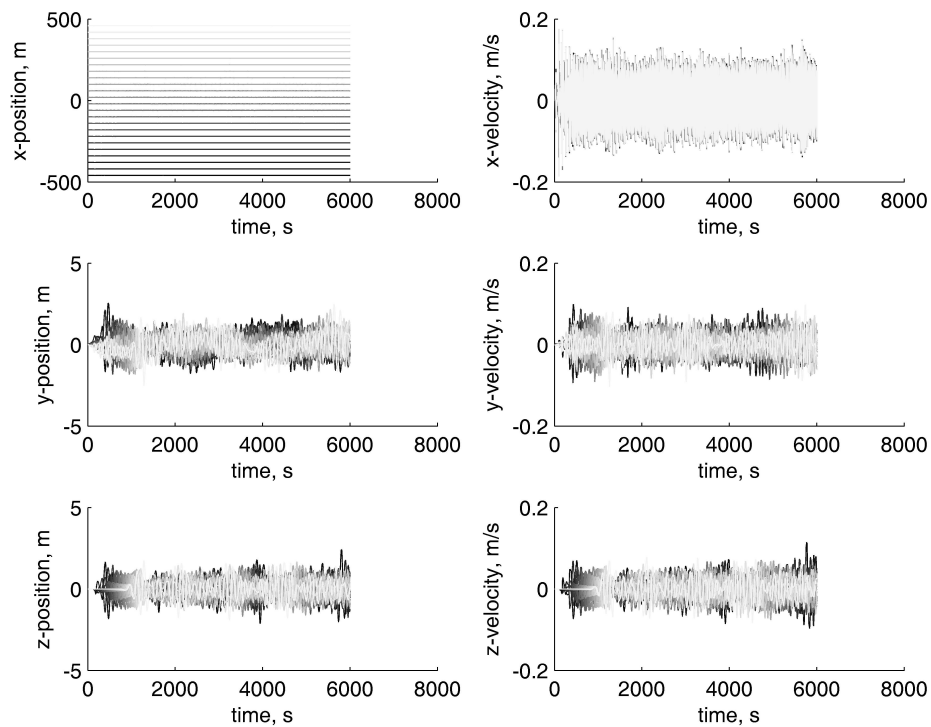


Figura 3.11: Oscillazioni dei nodi

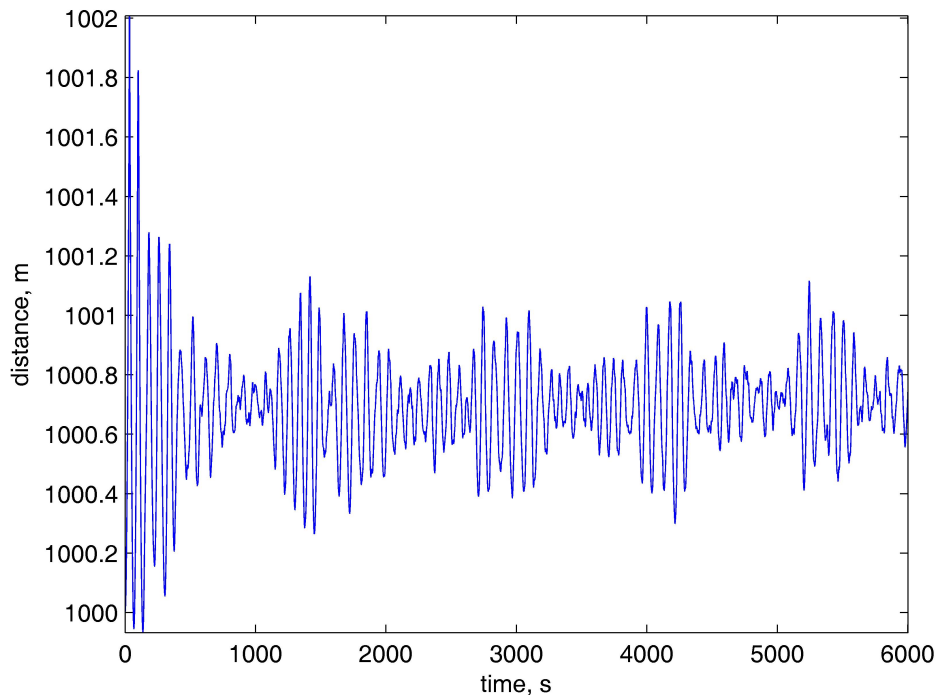


Figura 3.12: Distanza tra i due satelliti

onda è anche visibile in Fig.3.8 e in Fig.3.10 dove sono rappresentate rispettivamente le componenti del quaternion dell'assetto delle piattaforme rispetto al riferimento inerziale e le gli angoli di Eulero rispetto alla terna LVLH.

In Fig.3.9 è visualizzato un fotogramma del filmato che mostra come l'onda si propaga durante l'intervallo di tempo che intercorre tra le manifestazioni della perturbazione sul moto d'assetto dei due satelliti. Come possiamo notare il modello adottato nelle simulazioni permette di simulare e visualizzare anche questo fenomeno. In Fig.3.11 si è cercato di rappresentare l'evoluzione dell'onda durante tutto il periodo della manovra: in scuro sono state plottate le posizioni dei nodi che costituiscono il tether che si trovano vicino al primo satellite, mentre in chiaro quelli più vicini al satellite al secondo satellite. Se si fa attenzione alla gradazione di grigi si può notare che, i primi ad oscillare sono proprio i nodi in nero mentre più si va avanti nel tempo la gradazione di grigio diventa sempre più chiara: ciò è indicativo del fatto che l'onda sta percorrendo la corda fino a raggiungere il secondo satellite. Successivamente l'onda, dopo aver trasferito parte della sua energia al secondo satellite, viene riflessa e quindi interferisce con i fronti d'onda che invece stanno ancora percorrendo la corda nell'altro senso. Il tutto avviene con onde che si propagano anche in direzione longitudinale, come anche dimostrato dalle oscillazioni della distanza inter-satellite rappresentata in Fig.3.12.

In Fig.3.13 e in Fig.3.14 sono rappresentate rispettivamente le componenti della velocità angolare e gli angoli di eulero rappresentanti l'evoluzione dell'assetto nel caso in cui, dopo aver applicato una coppia lungo $\hat{\theta}$ sul primo satellite ad un tempo $t = 100s$, si applica una contro-coppia di segno opposto segno al tempo $t = 1000s$. In questo caso si

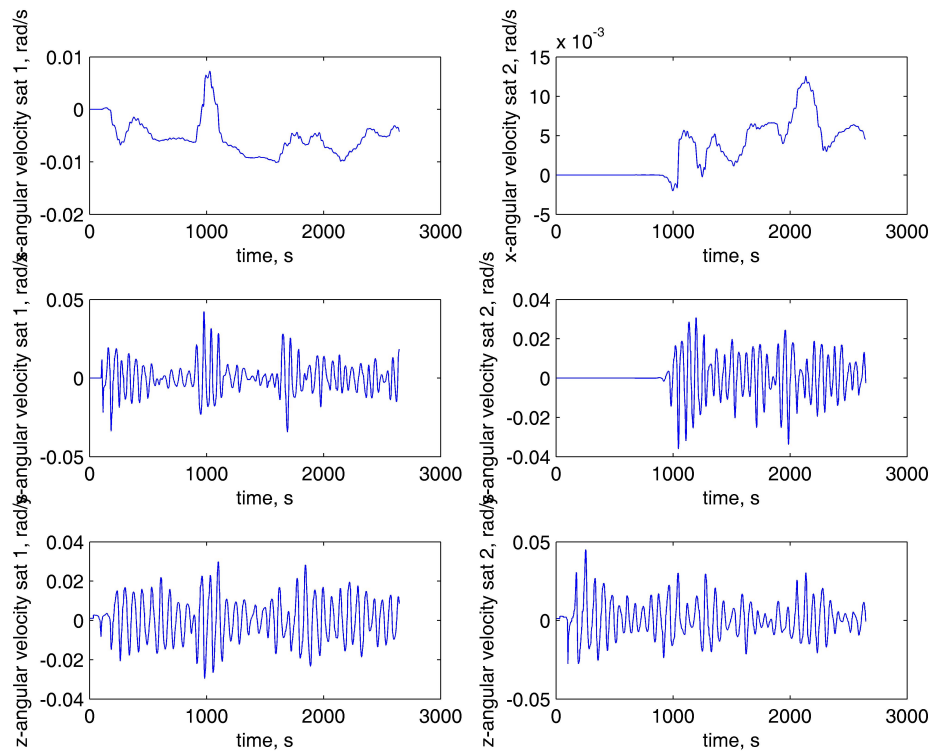


Figura 3.13: Velocità angolare delle piattaforme nel caso di manovra bangbang a partire dalla verticale locale

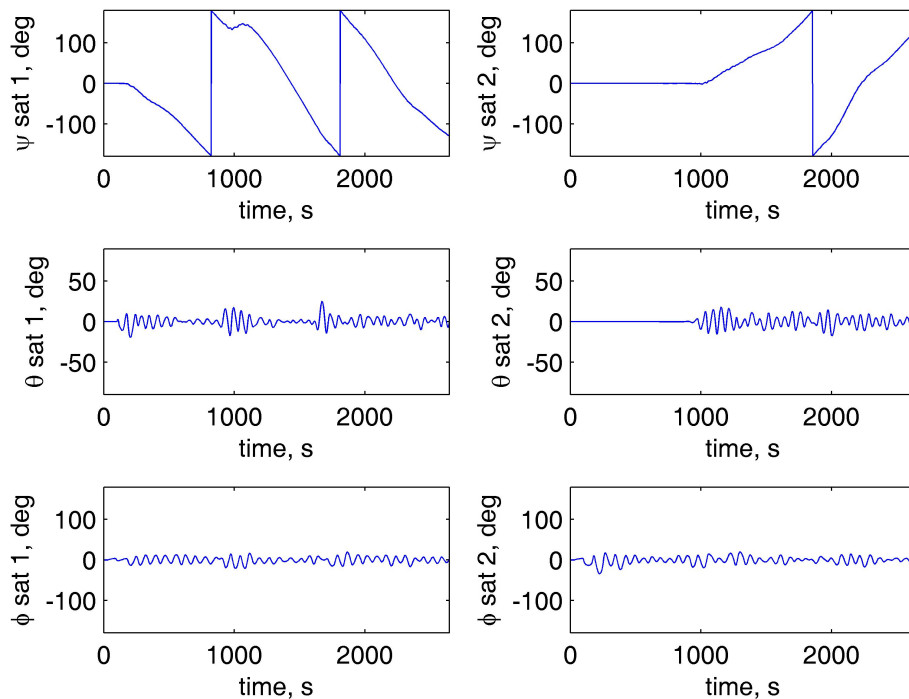


Figura 3.14: Angoli di Eulero 123 nel caso di manovra bangbang a partire dalla verticale locale

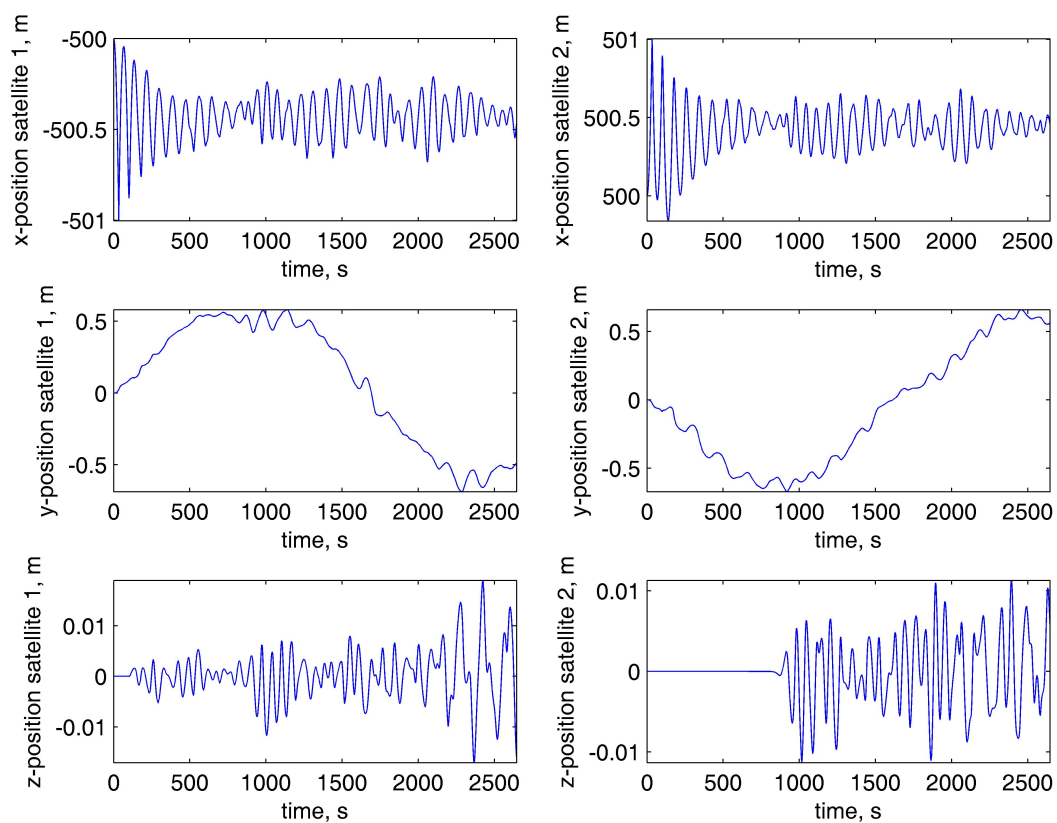


Figura 3.15: Componenti della posizione delle piattaforme nel caso di manovra bang-bang

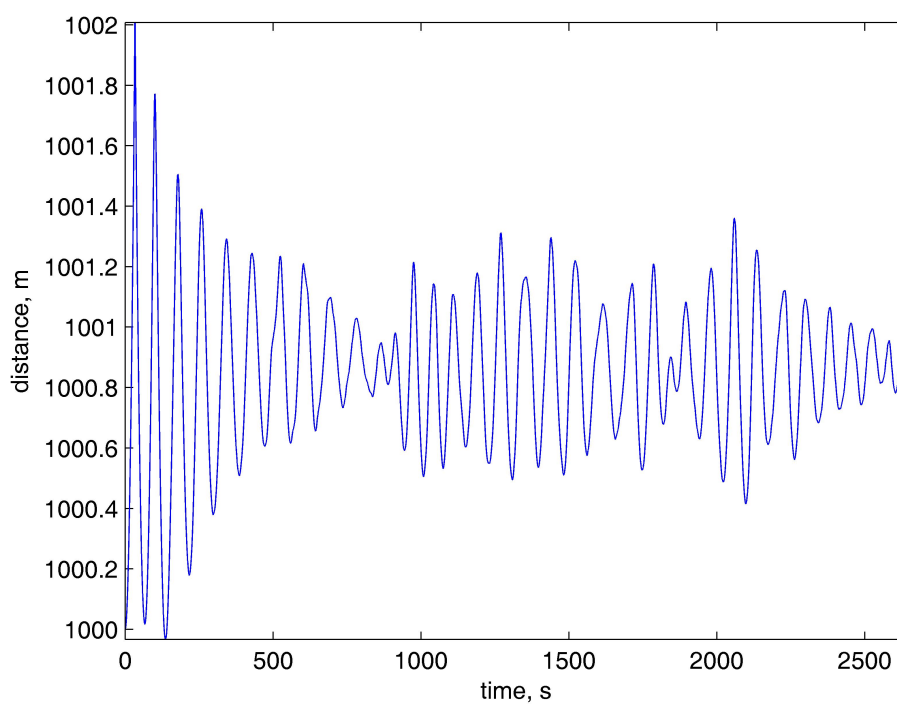


Figura 3.16: Distanza tra le piattaforme nel caso di manovra bang-bang

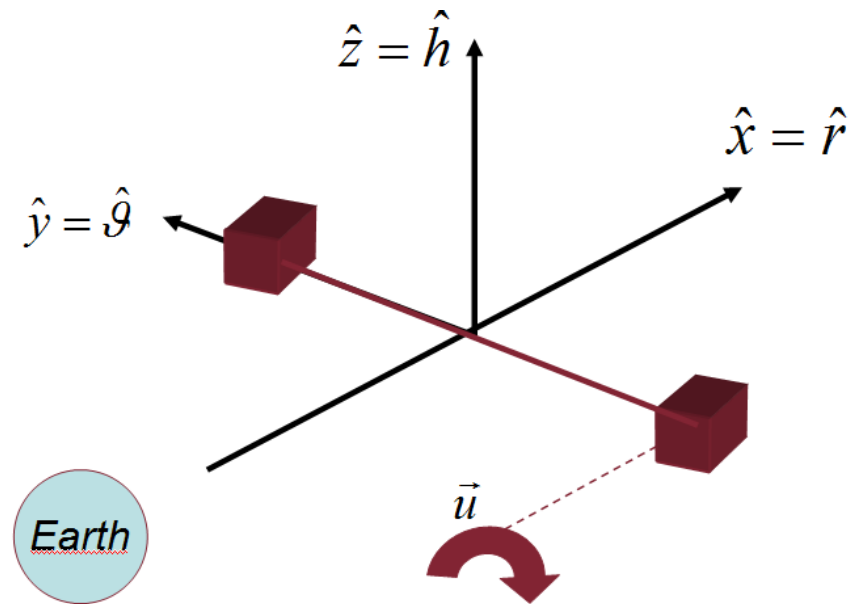


Figura 3.17: Manovra d'assetto effettuata con satellite allineato lungo l'orizzontale locale

genera un'onda e successivamente una contro-onda, ma gli effetti sono comunque destabilizzanti dalla posizione di equilibrio posizionale dei satelliti, come mostrato in Fig. 3.15 ed in Fig.3.16.

Ma gli effetti dell'instabilità sul moto orbitale del tether prodotti da manovre d'assetto sono molto più evidenti quando il tether si trova in una situazione di equilibrio precario, cioè quando questo è allineato lungo l'orizzontale locale, come illustrato in Fig.3.17. Anche in questo caso viene applicata una coppia con lo stesso profilo temporale della precedente, ma in direzione radiale in modo da generare onde trasverse nella corda nel piano $\hat{\theta}\hat{h}$. In Fig.3.18 possiamo notare che entrambe le piattaforme ben presto perdono il loro assetto iniziale e incominciano a tombolare. Ciò è essenzialmente dovuto al fatto che, pur avendo effettuato una semplice manovra d'assetto su di una piattaforma, l'accoppiamento con il cavo fa sì che questa perde la sua posizione di equilibrio orbitale ed il tether incomincia ad oscillare con ampiezze tali da portare le piattaforme ad invertirsi nella posizione: tale comportamento è illustrato in Fig.3.19, dove si sono sovrapposti alcuni fotogrammi relativi al movimento nel piano del tether.

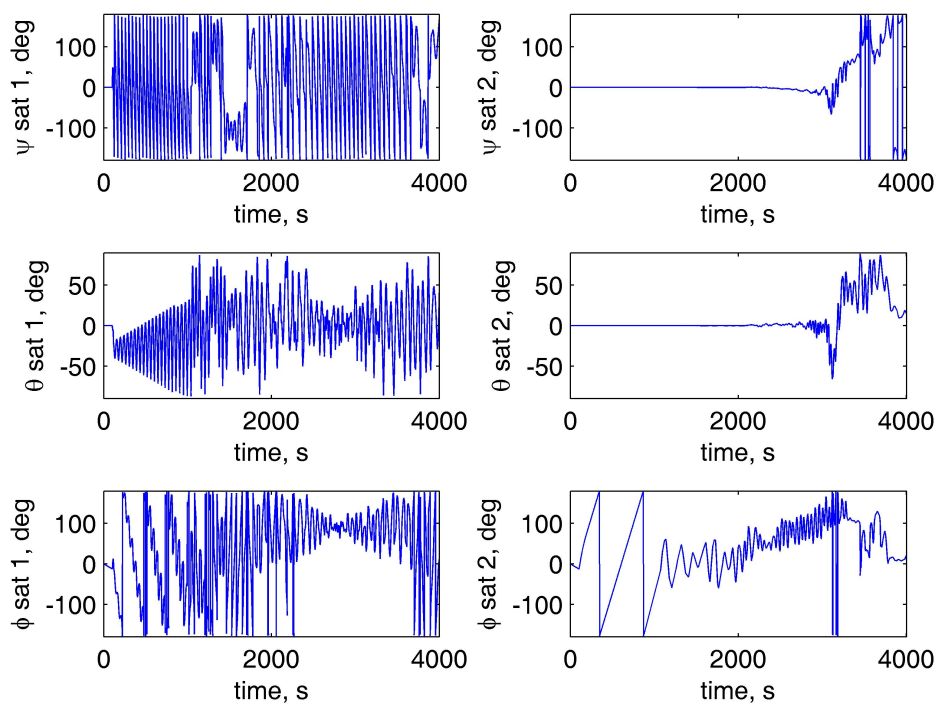


Figura 3.18: Angoli di Eulero 123 nel caso di manovra da orizzontale locale

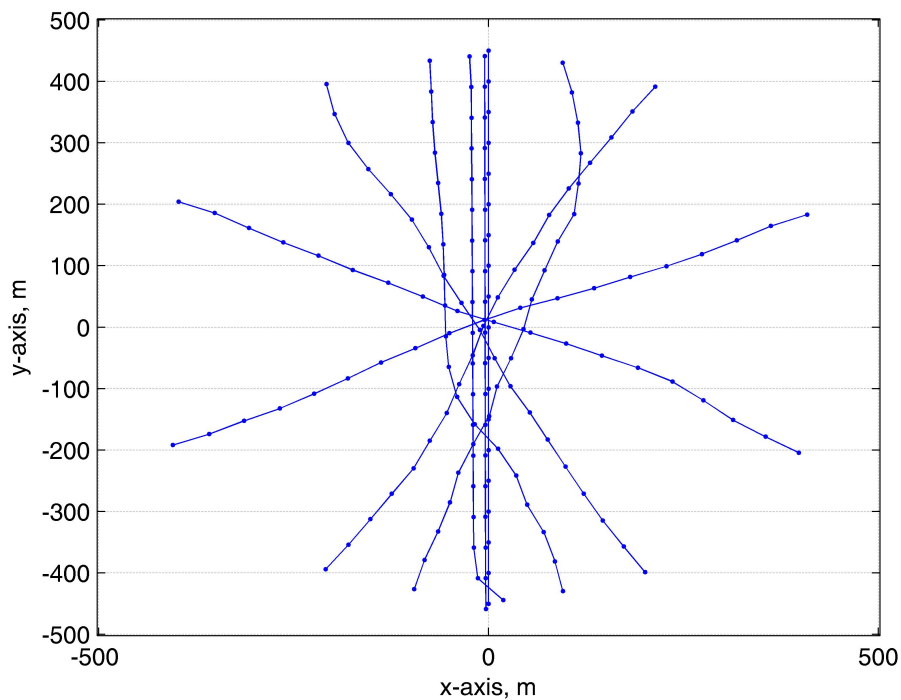


Figura 3.19: Snapshots della rotazione del tether

Capitolo 4

Stabilità e Controllo delle Space Webs

Il modello ottenuto nel capitolo 3 può essere facilmente esteso a strutture molto più complesse, costituite da 3 o più satelliti collegate sempre dai cavi, come illustrato in Fig.4.1. Data la forma reticolare che queste strutture di solito assumono, vengono generalmente chiamate space webs. In questo capitolo si effettua un'analisi della stabilità di questi sistemi mediante l'ausilio del codice precedentemente illustrato.

4.1 Azione del gradiente di gravità su una space web

L'utilizzo del codice di simulazione numerica è di fondamentale importanza, proprio perché il sistema coinvolto risulta essere troppo complicato per essere trattato in modo analitico, come si è anche visto nei risultati relativi al singolo tether. Tuttavia alcune considerazioni di ordine generale sono comunque possibili se si pensa alle azioni alle quali una space web potrebbe essere soggetta.

Come abbiamo potuto appurare nel capitolo 3 la forzante naturale più importante che affligge questo tipo di sistemi è il gradiente di gravità. Proprio grazie a questo è possibile mantenere un tether teso nell'intorno della verticale locale, come dimostrato anche dalle simulazioni effettuate in precedenza. Tuttavia non sempre l'azione del gradiente di gravità permette di tenere tesi i cavi della struttura, ma esistono particolari posizioni per cui l'azione del gradiente di gravità risulta essere attrattiva e non repulsiva tra le due piattaforme poste agli estremi del cavo. Se si guarda ad esempio la seguente espressione della forza di gradiente di gravità [36]:

$$\vec{F}^{gg} = \frac{\mu_{\oplus}}{r^3} (3\hat{r}\hat{r} - \underline{\underline{1}}) \cdot \vec{d} \quad (4.1)$$

e si ipotizza ad esempio un sistema rigido simil-tether come illustrato in Fig.4.2, costituito da due masse di massa m poste a distanza $\vec{d}_{1,2} = \pm \frac{l}{2} \hat{l}_t$, dove si è indicato con \hat{l}_t il versore della direzione di orientamento del tether modellato come barra indeformabile, allora si riscontrerà che:

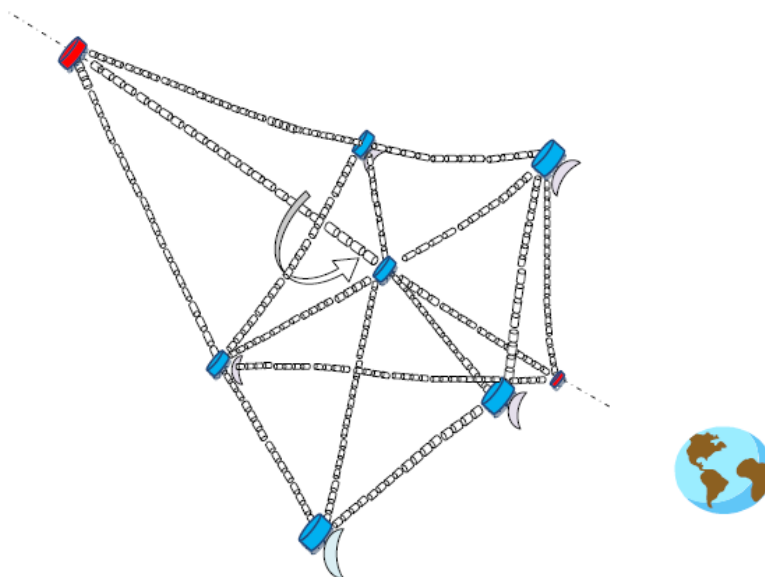


Figura 4.1: Esempio di Space Web tridimensionale

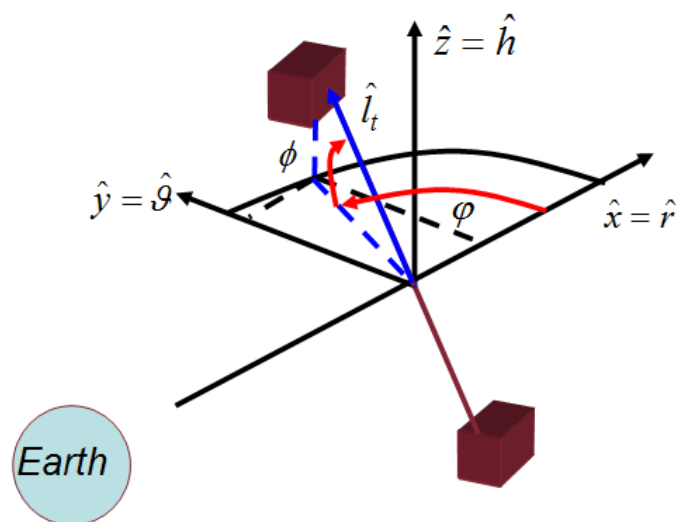


Figura 4.2: Modello di tether rigido soggetto al gradiente di gravità

1. se \hat{l}_t è diretto lungo la direzione radiale \hat{r} , l'azione agente sulle due masse risulta essere repulsiva dal momento che vale:

$$\vec{F}^{gg} \left(\pm \frac{l_t}{2} \hat{r} \right) = m \frac{\mu_{\oplus}}{r^3} (3\hat{r}\hat{r} - \underline{\underline{u}}) \cdot \left(\pm \frac{l_t}{2} \hat{r} \right) = \pm 2m \frac{\mu_{\oplus}}{r^3} \frac{l_t}{2} \hat{r} \quad (4.2)$$

quindi per la massa posta nella direzione radiale positiva la forza sarà anch'essa diretta nella direzione radiale positiva, mentre per la massa posta in direzione negativa la direzione sarà anch'essa in direzione negativa. Il filo risulterà quindi essere tirato agli estremi con una tensione proprio pari a quella esplicitata dall'Eq.4.2.

2. se \hat{l}_t è diretto lungo la direzione $\hat{\theta}$, l'azione agente sulle due masse risulta essere attrattiva, infatti si ha che:

$$\vec{F}^{gg} \left(\pm \frac{l_t}{2} \hat{\theta} \right) = m \frac{\mu_{\oplus}}{r^3} (3\hat{r}\hat{r} - \underline{\underline{u}}) \cdot \left(\pm \frac{l_t}{2} \hat{\theta} \right) = \mp m \frac{\mu_{\oplus}}{r^3} \frac{l_t}{2} \hat{\theta} \quad (4.3)$$

per cui ad una massa posta nella direzione tangenziale positiva, la forza sarà diretta in senso opposto a tale direzione e viceversa. Ne risulterà uno stato tensionale della barra atto a comprimere la stessa.

3. se \hat{l}_t è diretto lungo la direzione \hat{h} , l'azione agente sulle due masse risulta essere attrattiva, infatti si ha che:

$$\vec{F}^{gg} \left(\pm \frac{l_t}{2} \hat{h} \right) = m \frac{\mu_{\oplus}}{r^3} (3\hat{r}\hat{r} - \underline{\underline{u}}) \cdot \left(\pm \frac{l_t}{2} \hat{h} \right) = \mp m \frac{\mu_{\oplus}}{r^3} \frac{l_t}{2} \hat{h} \quad (4.4)$$

per cui ad una massa lungo la normale orbitale positiva, la forza sarà diretta in senso opposto a tale direzione e viceversa. Ne risulterà uno stato tensionale della barra atto a comprimere la stessa.

Le configurazioni in cui il filo viene compresso dalle due masse estremali non sono supportate dal cavo stesso: la configurazione del tether risulta quindi essere instabile in tali posizioni. Una rappresentazione delle zone di stabilità ed instabilità strutturale determinata dalla sola azione del gradiente di gravità può esser rappresentata dalla Fig.4.3¹, in cui le zone stabili sono evidenziate con il colore rosso (modulo della tensione positiva) mentre le forze di compressione sono evidenziate con il blu (modulo della tensione negativa), rispetto alla direzione del versore \hat{l}_t rappresentata dai due angoli:

1. ψ è l'angolo individuato dalla proiezione di \hat{l}_t nel piano orbitale e preso a partire dalla direzione \hat{r} positiva (simil-longitudine) ($-180^\circ \leq \psi \leq 180^\circ$)
2. ϕ è l'angolo preso sul piano contenente \hat{l}_t e la normale orbitale \hat{h} preso a partire dall'intersezione di tale piano con quello orbitale (simil-latitudine) ($-90^\circ \leq \psi \leq 90^\circ$)

¹I valori della tensione sono riferiti ad un tether di lunghezza $1km$ orbitante a $500km$ di quota.

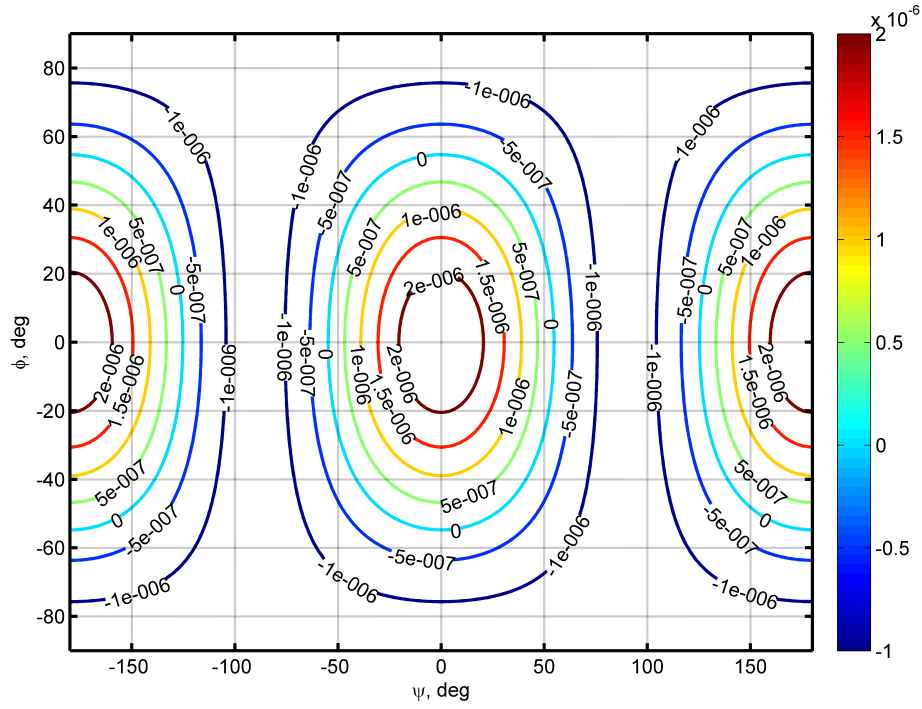


Figura 4.3: Zone di stabilità in base agli angoli d'assetto nel caso di tether fermo

Come possiamo intuire, esisterà una zona in cui il tether risulterà compresso e quindi non ammissibile per la stabilità di un'eventuale space web in cui parte dei fili ricadano in tali condizioni. Oltretutto il caso sopra menzionato è un caso limite in quanto realizzabile soltanto qualora il sistema fosse in caduta libera lungo la verticale locale. In generale sarà necessario aggiungere all'azione centrifuga dovuta al moto rotatorio che il tether deve fare per poter mantenere la stessa configurazione rispetto al riferimento LVLH. In tale caso la risultante dell'azione centrifuga e del gradiente di gravità agente sulle due masse potrà essere rappresentata dalla relazione²:

$$\vec{F}^{gg+fc} = \frac{\mu_{\oplus}}{r^3} \left(3\hat{r}\hat{r} - \hat{h}\hat{h} \right) \cdot \vec{d} \quad (4.5)$$

L'andamento dello stato tensionale dell'eventuale tether posto con l'assetto determinato dagli angoli ψ e ϕ rispetto al riferimento LVLH, è rappresentato in Fig.4.4. Come si può vedere lungo la retta definita dalla condizione $\phi = 0^\circ$, cioè quando il tether si trova sul piano orbitale, la tensione risulta essere quasi sempre tale da tendere il cavo, tranne quando il tether si trova allineato con l'orizzontale locale ($\psi = \pm 90^\circ$) dove l'azione della forza centrifuga bilancia perfettamente l'azione del gradiente di gravità e quindi la tensione risultante sul cavo sarà nulla.

Le regioni di instabilità possono essere notevolmente ridotte, se non eliminate qualora si pone in rotazione il tether. Infatti l'azione centrifuga dovuta al moto rotatorio di tale struttura, produce in parte gli stessi effetti dati dal gradiente di gravità. Si può pensare quindi di porre in rotazione tali strutture al fine di cancellare gli effetti del gradiente

²Si ipotizza che l'orbita con cui orbita il tether sia circolare.

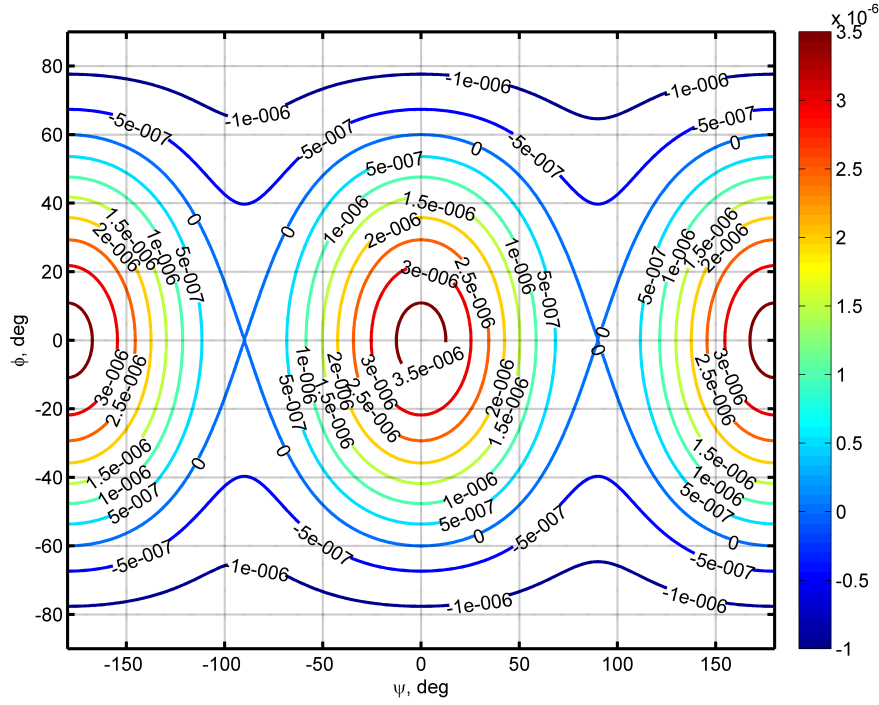


Figura 4.4: Zone di stabilità in base all'orientamento del tether stabilizzato rispetto alla rotazione del riferimento LVLH

di gravità e quindi tirare ogni corda della space web per mezzo della forza centrifuga indotta dalla rotazione della struttura. Proprio questa modalità, proposta in [62, 69], è al momento la più accreditata per un'eventuale stabilizzazione di questo tipo di strutture in orbita. Infatti, limitandoci al solo caso di rotazione del tether rigido nel piano orbitale possiamo esprimere la tensione sul tether mediante la seguente espressione:

$$\vec{F}^{gg+rot} = \left[3\frac{\mu_{\oplus}}{r^3}\hat{r}\hat{r} + \left(\Omega^2 - \frac{\mu_{\oplus}}{r^3} \right) \underline{\underline{u}} - \Omega^2\hat{h}\hat{h} \right] \cdot \vec{d} \quad (4.6)$$

dove si è indicata con Ω il modulo della velocità angolare di rotazione del tether nel caso in cui l'asse di rotazione sia orientato come la normale orbitale. Come si può vedere in Fig.4.5 dove sono rappresentate le zone di trazione e compressione attraversate dal tether durante il suo moto rotatorio $\Omega = 2n_0$ intorno all'asse \hat{h} , la zona di instabilità dovuta alla compressione si è ridotta in modo significativo ed interessa solamente valori elevati di elevazione rispetto al piano orbitale.

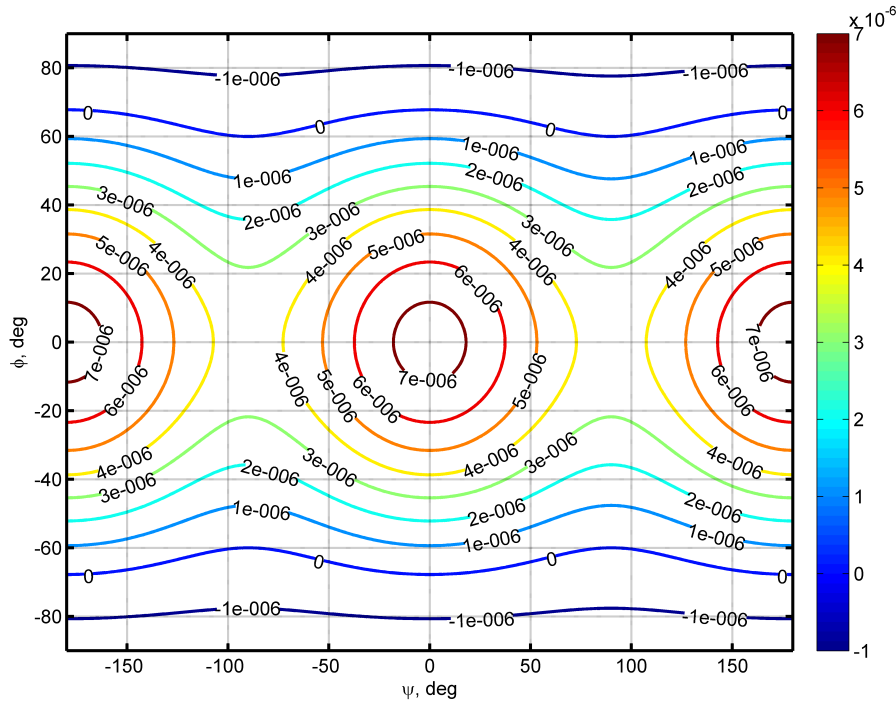


Figura 4.5: Zone di stabilità nel caso di rotazione del tether con velocità angolare pari a $\Omega = 2n_0$ lungo la normale orbitale

4.2 Evoluzione della dinamica libera di una struttura a croce

La diretta evoluzione al bidimensionale del modello a singolo tether fin'ora studiato è rappresentata da una space web a forma di croce, cioè costituita da 4 piattaforme collegate da due cavi che di fatto si intersecano al centro della struttura in cui è presente un altro satellite, come mostrato in Fig.4.6.

Con tale struttura ad esempio si potrebbe mantenere una rete di 5 sensori posti a bordo delle piattaforme agli estremi con l'intento di effettuare misure in cui sia necessario avere una misura nota della baseline tra due o più sensori. Quindi il cavo permette di mantenere un vincolo di distanza fissa tra le piattaforme a costo quasi nullo e con un risparmio in termini di propellente pari a quello necessario per mantenere a distanza costante con la stessa precisione le piattaforme se queste avessero volato in formazione.

Come anche riscontrato in [62, 69] l'unico modo per mantenere una stabilità di forma di una tale struttura è porla in rotazione nel piano orbitale con una velocità angolare superiore ad $\Omega_0 = \sqrt{3}n_0$ in virtù del fatto che uno dei due rami, partendo da una posizione di equilibrio stabile, deve contrastare un campo di forze avverso che ne provoca una forte decelerazione rispetto all'altro ramo. Se si considera infatti il caso di una velocità angolare iniziale della web pari ad $\vec{\Omega}_0 = n_0 \hat{h}^3$, uno dei rami della struttura a croce non riesce ad

³Allora le piattaforme avranno velocità iniziale pari a:

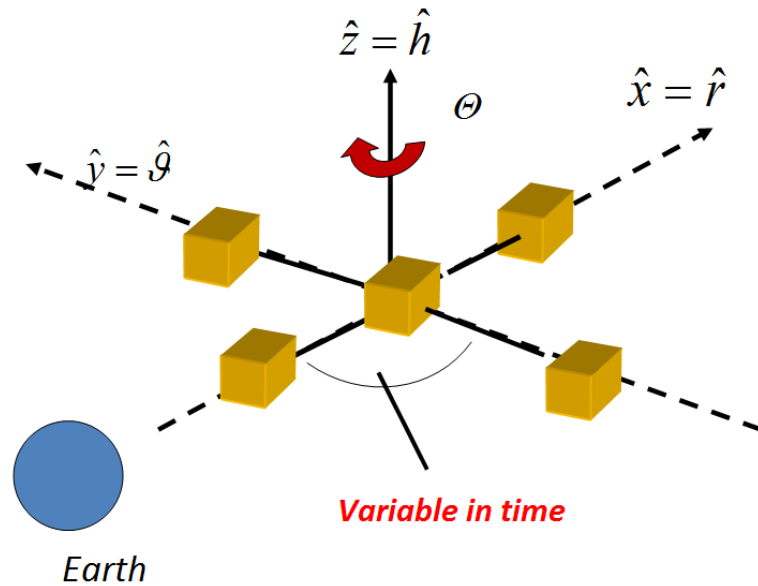


Figura 4.6: Esempio di space web cruciforme

oltrepassare l'orizzontale locale, librando quindi intorno alla verticale locale. Il moto della struttura risulta essere non stabile, come rappresentato in Fig.4.7, in cui si nota evidentemente che uno dei due rami della croce è in ritardo rispetto all'altro e i cavi sono fortemente deformati a causa dell'azione distruttiva del gradiente di gravità.

Tuttavia se si considera l'evoluzione di una space web in cui è stata fornita una velocità angolare complessiva della struttura pari a $\Omega_0 = 2n_0$, questa mantiene sotto tensione i cavi, come mostrato dall'allineamento dei nodi nella Fig.4.8 e dalla Fig.4.9, in cui è evidenziato come la distanza tra le piattaforme si mantiene sempre al di sopra della lunghezza nominale del tether $l_t = 1000m$. Tuttavia in Fig.4.8 si nota che i rami della space web non hanno mantenuto la condizione di perpendicolarità: ciò è mostrato anche nella Fig.4.10, in cui è rappresentato l'andamento dell'angolo di apertura tra i due rami del tempo. Tale situazione va assolutamente evitata in quanto porterebbe ad una collisione tra le piattaforme.

Per questo motivo è necessario aumentare la velocità complessiva della web per lo meno fino a raggiungere una velocità angolare media di $\Omega_0 = 5n_0$, affinché l'azione della forza centrifuga permetta un miglioramento della stabilità di forma della web cruciforme. In Fig.4.11 è rappresentata un'istantanea del moto che si registra in questo caso in cui si notano i rami della web posti in modo perpendicolare tra di loro.

$$\vec{V}_{0-sat} = \vec{\Omega} \times \vec{d}_{i-sat}$$

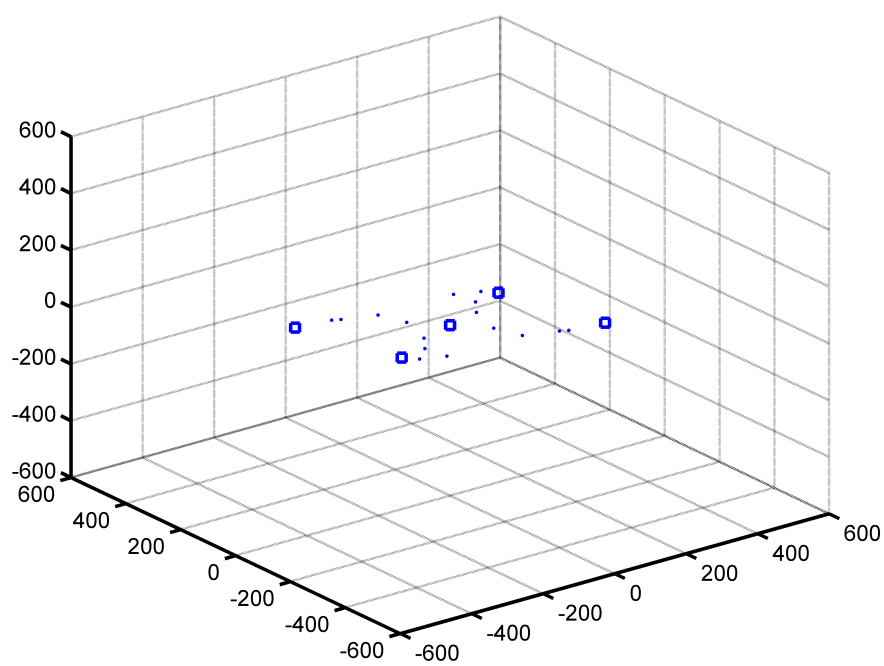


Figura 4.7: Fotogramma di una space web a croce in instabilità

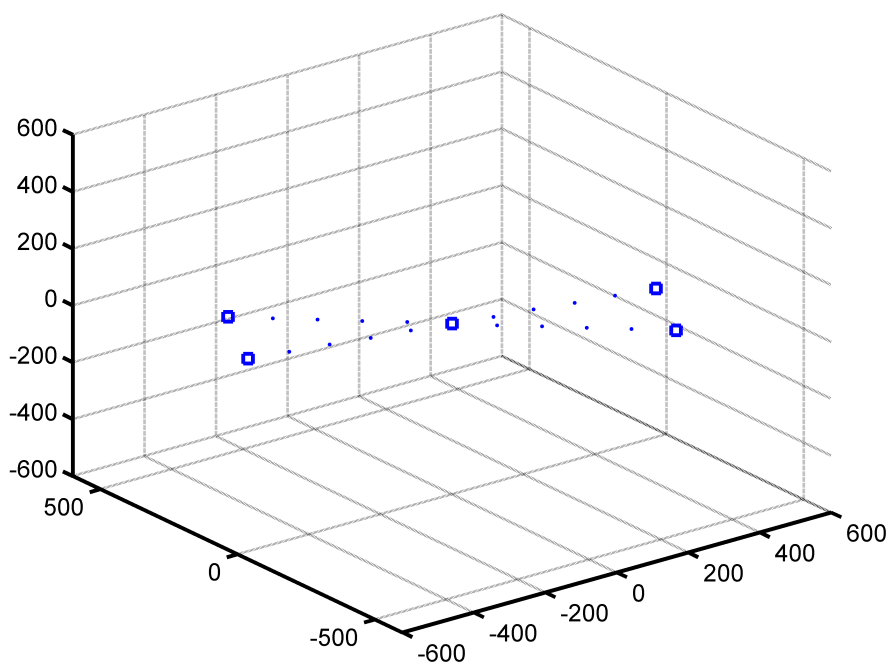


Figura 4.8: Fotogramma di una space web a croce con angolo di apertura non più perpendicolare

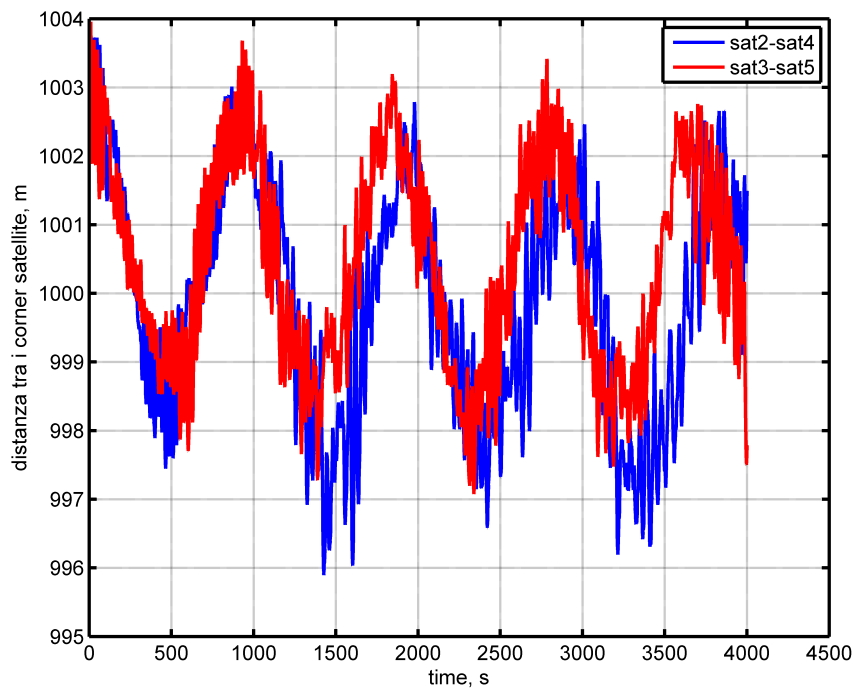


Figura 4.9: Distanza tra le piattaforme agli estremi della web

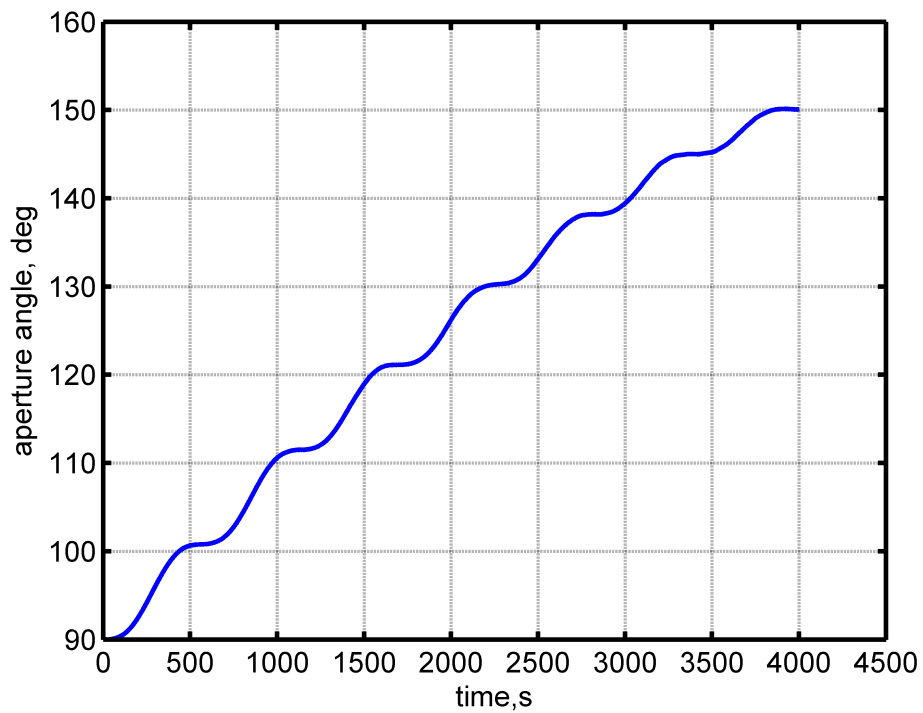


Figura 4.10: Angolo di apertura dei due rami della web a croce

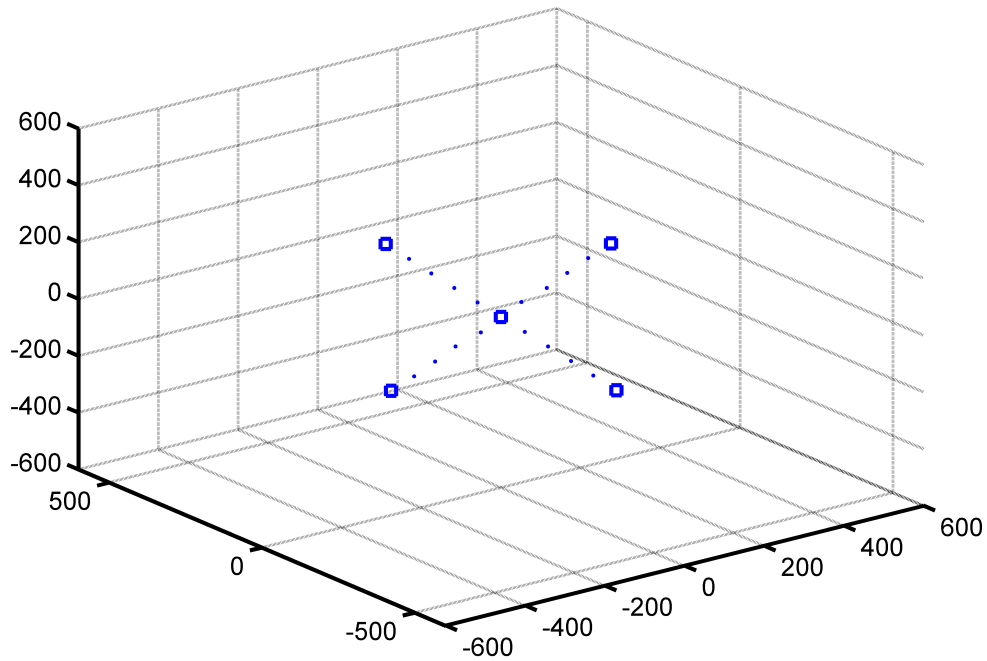


Figura 4.11: Istantanea del moto della web a forma di croce con velocità angolare iniziale $\Omega_0 = 5n_0$

4.3 Manovra di spin up della space web

Gli esempi mostrati in precedenza hanno permesso di trovare una condizione per cui la web a forma di croce sia stabile sia nella forma che nell'evoluzione della dinamica. A questo punto si è studiata una possibile manovra di spin-up effettuata non con dei thrusters posti sulle piattaforme laterali, ma con un attuatore per il controllo d'assetto posto sulla piattaforma centrale della web [29]. Tale manovra, per quanto possa sembrare improbabile, è in realtà realizzabile in quanto la piattaforma centrale risulta essere "tirata" dai quattro tethers con cui essa è collegata alle restanti piattaforme della web: una tale configurazione permette di applicare una coppia alla piattaforma centrale senza che i cavi si avvolgano su di essa o, cambiando il riferimento, la piattaforma si intrecci con le corde. La situazione è rappresentata in Fig. 4.6, dove si nota che l'asse di applicazione della coppia è coincidente con la normale al piano orbitale della web.

In Fig.4.12 è rappresentato il meccanismo di trasferimento della coppia dalla piattaforma centrale alle piattaforme poste agli estremi della web. In particolare l'azione della coppia, di intensità precalcolata in modo tale da non disturbare troppo il sistema, tende ad incrementare la velocità angolare con cui ruota il satellite centrale: l'apparente rotazione del satellite visibile nel riferimento con cui ruota la web fa sì che i tethers si disallineino dalla configurazione nominale cambiando la condizione al contorno della corda. Di fatto si viene a generare un'onda che si propaga attraverso la corda e, una volta arrivata agli estremi, l'onda trasferisce la propria energia incrementando la velocità (sia

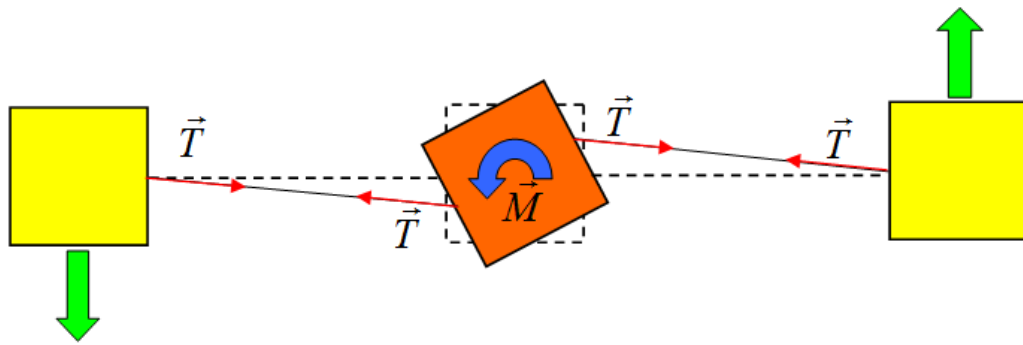


Figura 4.12: Manovra di Spin Up

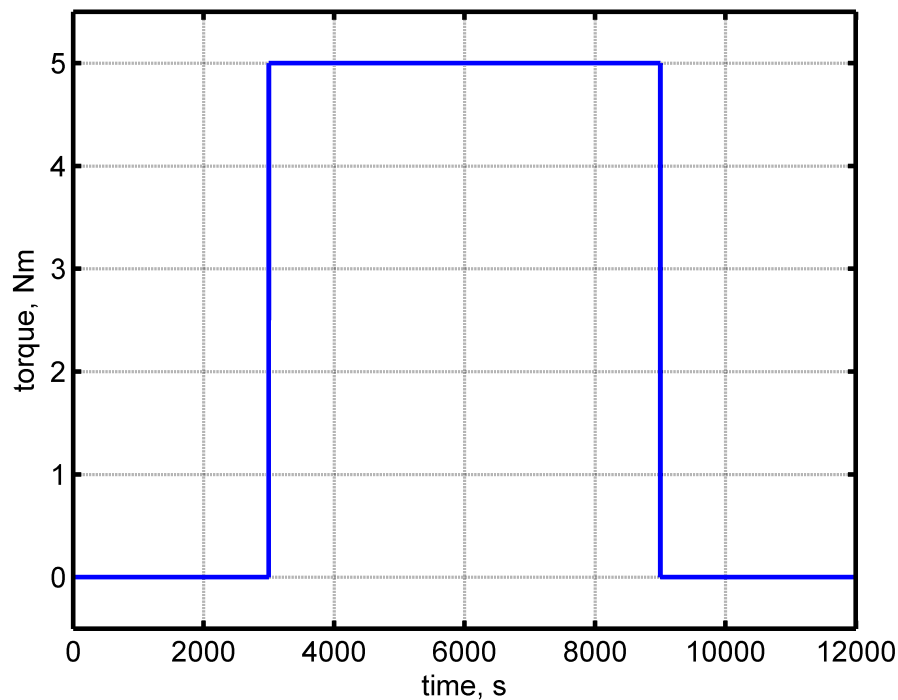


Figura 4.13: Profilo della coppia applicata al satellite centrale

rotazionale che traslazionale) dei satelliti: di fatto la corda “strattona” i satelliti laterali che quindi vengono tirati verso il centro della web, con il conseguente incremento di velocità di rotazione dell’intera struttura intorno al satellite centrale. Il meccanismo accoppia quindi la dinamica d’assetto, la dinamica elastica della corda e la dinamica orbitale di prossimità tra i satelliti. Ovviamente il meccanismo funziona nel caso in cui, al momento dell’applicazione della coppia, la corda in corrispondenza dell’attacco al satellite centrale sia tirata, cioè quando l’azione centrifuga dovuta alla rotazione della web supera l’azione di richiamo dovuta al gradiente di gravità. In questa configurazione vale il modello di corda tirata visto nel capitolo precedente e, seppur la corda ammetta un trasferimento di azioni del tutto assiali, il cambiamento delle condizioni genera un’onda in parte anche trasversale come è anche evidenziato nella Fig.3.9 già illustrata nel capitolo precedente.

In Fig.4.13 è rappresentato il profilo ideale della coppia che è stata applicata al satellite

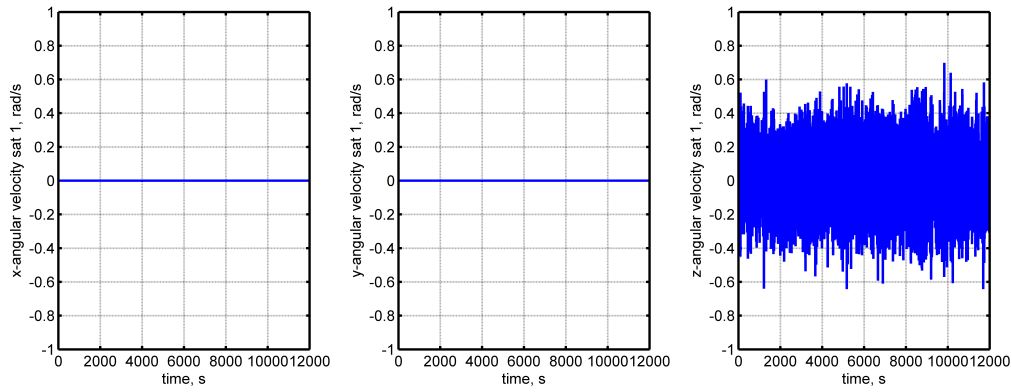


Figura 4.14: Componenti della velocità angolare del satellite centrale

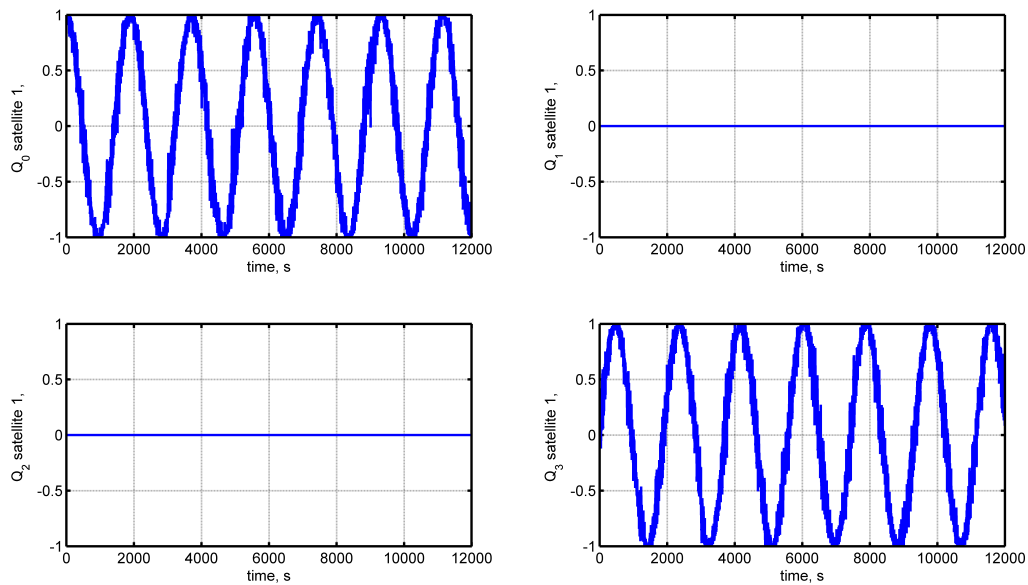


Figura 4.15: Quaternione rappresentante l'assetto della piattaforma centrale

centrale della web. Al tempo $t = 3000s$ viene erogata mediante ruote di reazione una coppia al satellite pari a $5Nm$, al tempo $t = 9000s$ l'azione della coppia termina. Se ci sarà evidente correlazione tra il periodo di erogazione della coppia ed un'eventuale modifica dello stato di moto delle piattaforme, allora il meccanismo di trasferimento realmente ha luogo, almeno per le ipotesi fatte per la simulazione.

Il primo effetto della coppia è quella di modificare lo stato di moto del satellite centrale. In Fig.4.14 è rappresentato l'andamento della velocità angolare della piattaforma centrale, dove è chiaro che gli effetti dovuti alla coppia non sono visibili, perché cancellati dal continuo richiamo provocato dalle azioni delle corde. Tuttavia se si osserva il moto d'assetto del satellite, rappresentato in Fig.4.15, e più in particolare si fa uno zoom negli istanti di applicazione della coppia, come fatto in Fig.4.16, è possibile notare come questa di fatto modifichi l'assetto della piattaforma centrale. E' altresì evidente come le azioni dei 4 tethers a cui è collegata la piattaforma centrale disturbino, con le loro vibrazioni, non poco l'assetto di tale piattaforma. Un'altra rappresentazione dell'assetto può essere

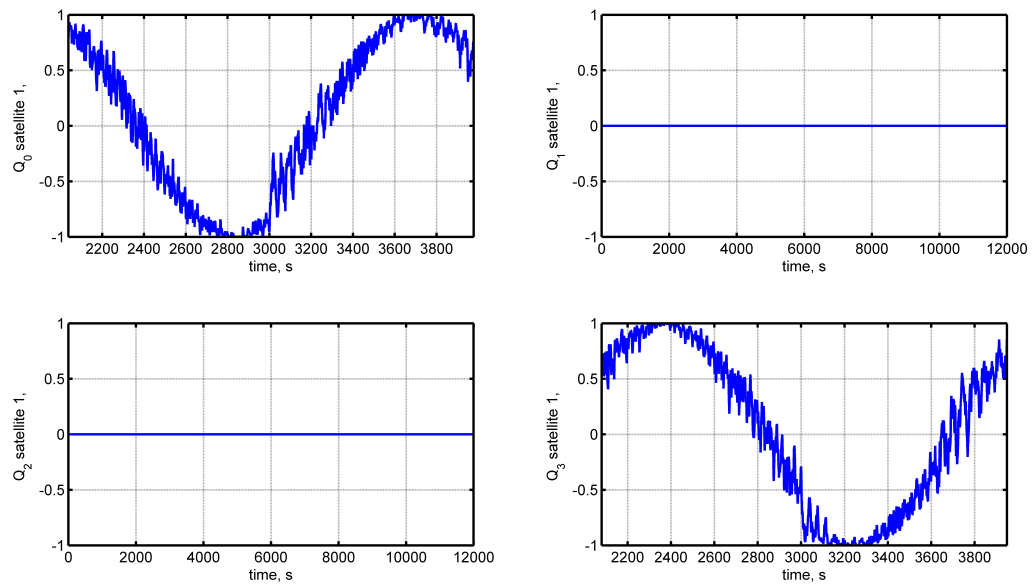


Figura 4.16: Assetto negli istanti di inizio dell'applicazione della coppia

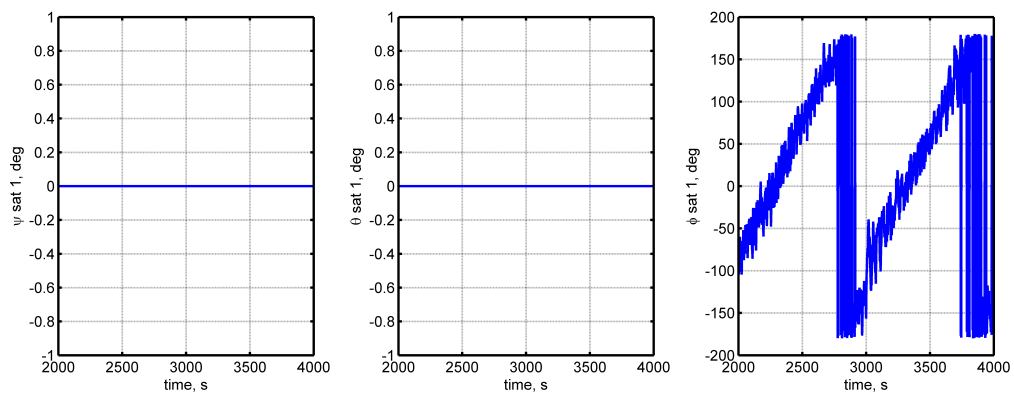


Figura 4.17: Angoli di Eulero 123 dell'assetto della piattaforma centrale rispetto al riferimento LVLH

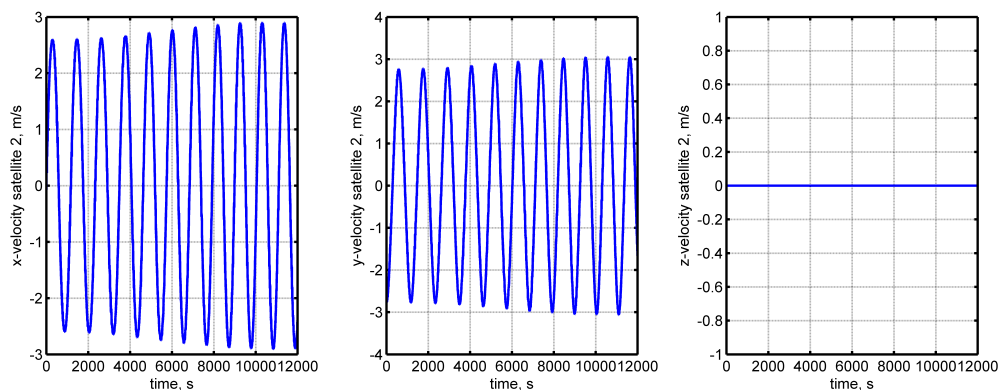


Figura 4.18: Componenti delle velocità angolari per di uno dei 4 satelliti laterali

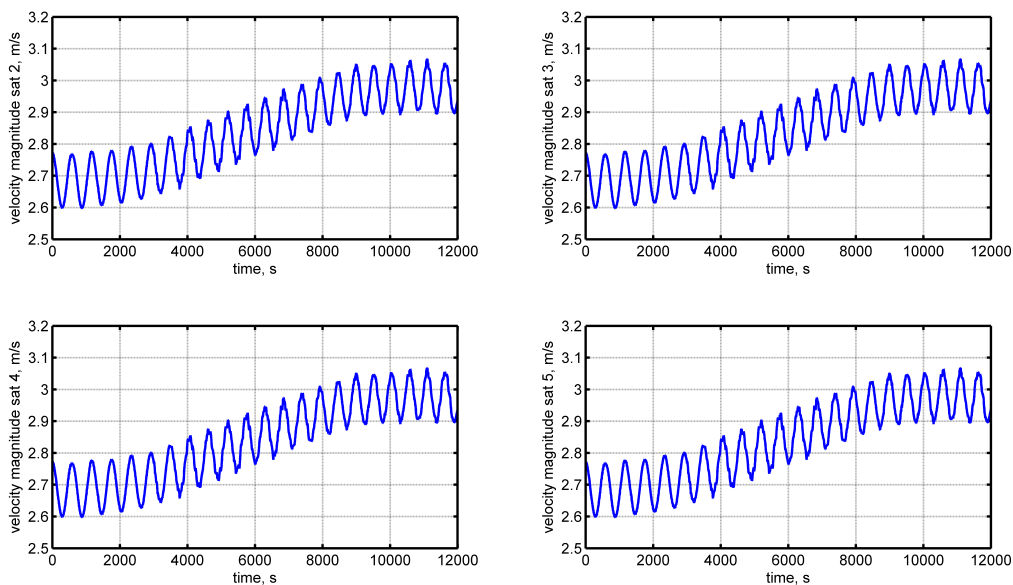


Figura 4.19: Modulo delle velocità delle piattaforme agli estremi della web

più esemplificativa: attraverso l'andamento degli angoli di Eulero 123 dell'assetto della piattaforma rispetto al riferimento LVLH mostrati in Fig.4.17, è possibile notare come tali vibrazioni avvenghino proprio intorno alla normale del piano orbitale (piano su cui giacciono i tethers).

L'incremento della velocità dei satelliti laterali risulta apprezzabile se, come fatto in Fig.4.18, si va a plottare l'andamento della velocità delle piattaforme laterali della web: infatti è evidente una modulazione in ampiezza delle oscillazioni, dovuta invece al moto delle piattaforme intorno al riferimento LVLH. Se poi si va ad osservare l'andamento del modulo delle velocità di tali piattaforme, come rappresentato in Fig.4.19, è possibile rilevare la stretta correlazione temporale dell'incremento di velocità ed il tempo di applicazione della coppia.

Tuttavia occorre porre molta attenzione nel non provocare effetti indesiderati applicando al sistema coppie troppo elevate, come nell'esempio di Fig.4.20: negli istanti di applicazione della coppia si instaura un moto di tombolamento non controllato della

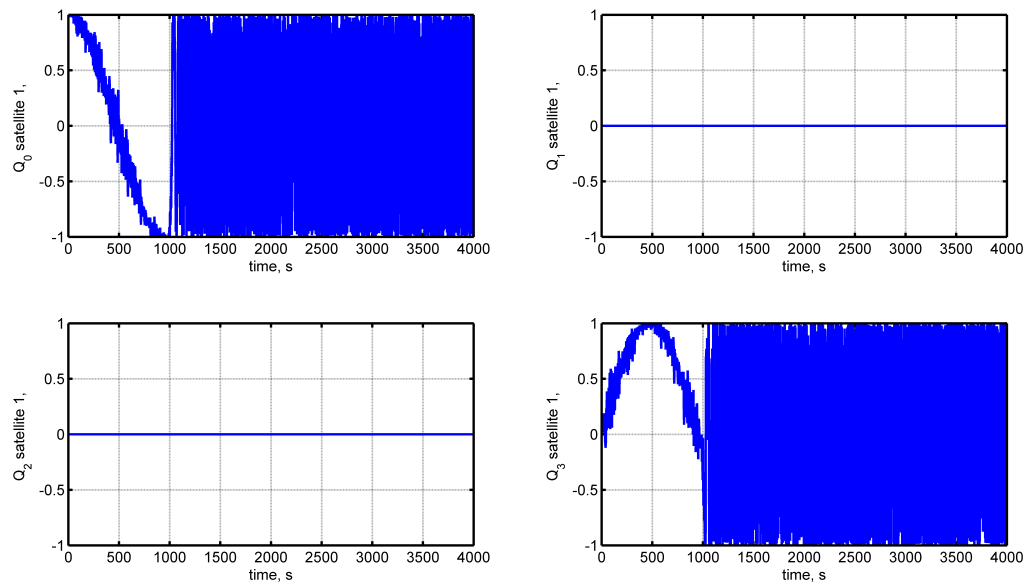


Figura 4.20: Assetto della piattaforma centrale nel caso di applicazione di una coppia di 10Nm

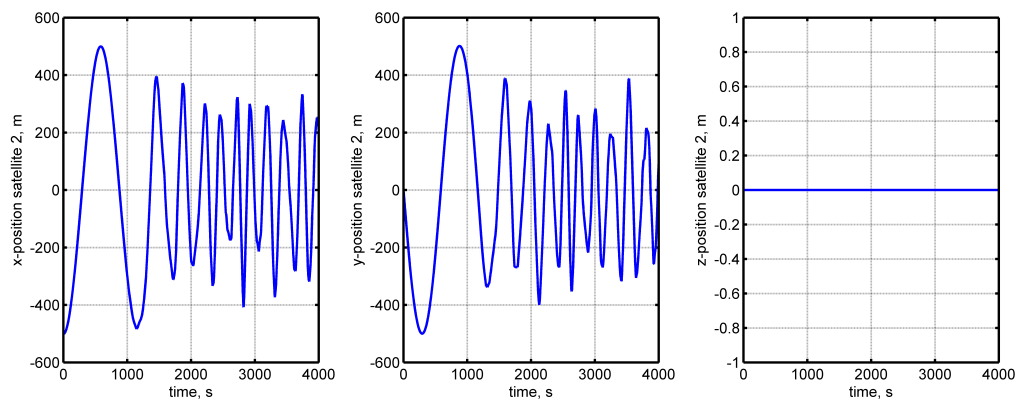


Figura 4.21: Componenti della posizione di uno dei satelliti laterali nel caso di coppia 10Nm

piattaforma. La stessa web perde la forma ed incomincia ad intrecciarsi, come è anche evidenziato dall'andamento della posizione di uno dei satelliti laterali mostrato in Fig.4.21 e dalla Fig.4.22.

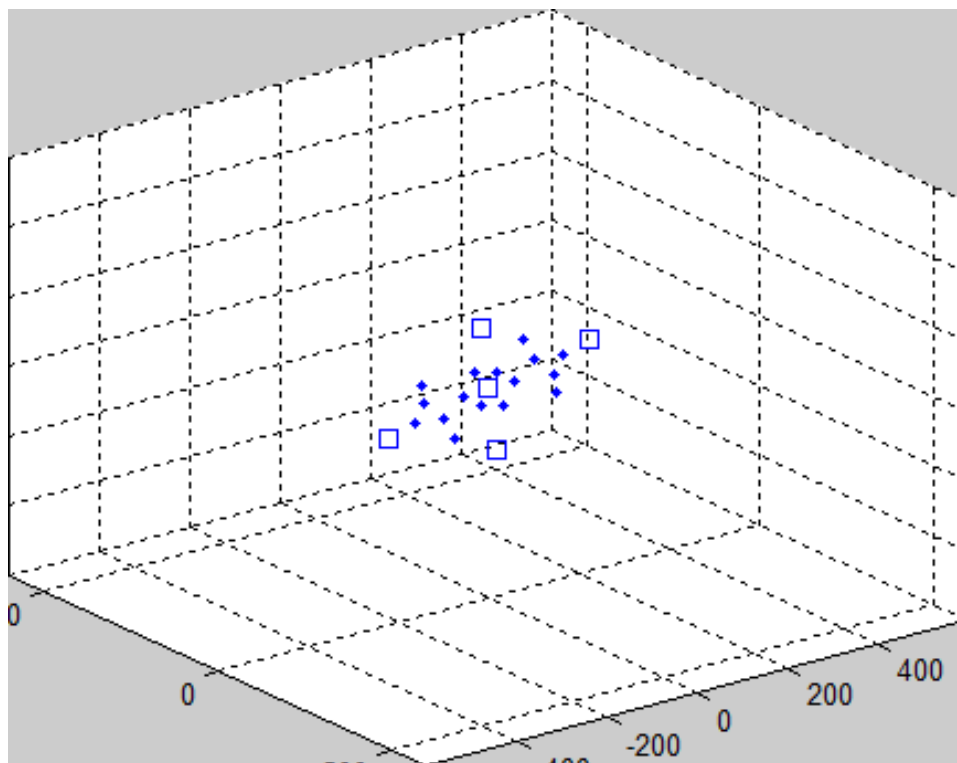


Figura 4.22: Snapshot della perdita di forma della web

4.4 Inserimento dei cavi laterali

Proprio dopo aver riscontrato i problemi relativi alla perdita di forma dopo l'applicazione della coppia, ed anche per fornire alla space web un range più grande di stabilità più elevato, si sono inseriti degli ulteriori cavi atti a collegare le piattaforme esterne, come si evince anche dalla Fig.4.23.

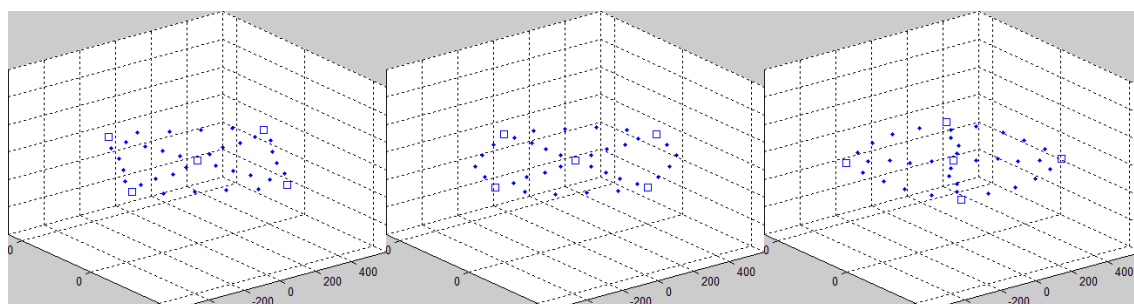


Figura 4.23: Snapshots della web con i cavi laterali

Parte III

Guida e Controllo delle Formazioni di Satelliti

Introduzione

Il volo in formazione di satelliti è una tipologia di missione spaziale che prevede l'utilizzo contemporaneo di più piattaforme orbitanti che mantengano una assegnata configurazione orbitale. La distribuzione del carico pagante su due o più piattaforme permette una migliore flessibilità in termini di scelta dei lanciatori (diminuzione del peso dei satelliti), riduzione dei rischi (la perdita di un satellite può non compromettere l'intera missione), versatilità. Inoltre la ripartizione dei compiti su più piattaforme permette di effettuare missioni altrimenti non possibili con un solo satellite: si pensi all'osservazione della terra attraverso radar bistatici od alle missioni di interferometria ottica per lo spazio profondo. Al fine di rendere possibile questa tipologia di missione si è reso necessario sviluppare nuove leggi di guida e navigazione al fine di controllare la geometria relativa ed eventualmente anche l'assetto tra i satelliti [3, 60, 61, 67, 68, 71].

Con riguardo al percorso di ricerca esposto in questa tesi, le formazioni possono essere considerate quali sistemi multiplatforma in cui non è più presente un "vincolo" nel senso stretto della parola [58]. In generale l'assenza del vincolo materiale tra due o più piattaforme non significa che queste possano considerarsi del tutto indipendenti, ma se volano in formazione occorrerà dotare i sistemi di logiche di guida atte ad evitare collisioni reciproche ed a rispettare i vincoli di distanza, configurazione ed orientamento della formazione stessa. Ciò significa che, seppur non presente un collegamento fisico tra le piattaforme, è pur sempre possibile individuare un collegamento funzionale tra le stesse che non può essere totalmente ignorato. Per questo motivo l'attività di ricerca sviluppata nel campo delle formazioni è stata sostanzialmente quella di sviluppare un sistema di guida che, basandosi sull'utilizzo di codici multibody, riesca a controllare l'evoluzione della formazione nel rispetto di eventuali vincoli preassegnati.

Il primo argomento affrontato è la dimostrazione dell'equivalenza tra una modellazione di tipo multibody della formazione e un classico modello di analisi della dinamica delle formazioni, evidenziando le differenze e le ipotesi su cui si basa l'analogia. Si ottiene così una legge di trasformazione che lega le azioni agenti sul sistema multibody alle spinte necessarie per guidare la formazione nel compiere geometrie progettate con il software multibody. Questo approccio è stato sfruttato per una serie di simulazioni relative a problemi tipici come l'acquisizione o il mantenimento di una formazione [26, 27].

Ma i vincoli di tipo funzionale non possono riguardare solamente il moto orbitale delle formazioni, ma anche l'assetto delle piattaforme che lo compongono: l'ultimo capitolo

della tesi analizza proprio la problematica della coordinazione dell'assetto. Dopo la definizione del problema della coordinazione e dell'analisi del moto d'assetto relativo, si è cercato di applicare diversi schemi di controllo al fine di soddisfare sia i requisiti di puntamento di un target assegnato che la coordinazione tra le piattaforme stesse: si sono implementate leggi di guida ottima basate sia su modelli lineari che tecniche di controllo non lineare come la State Dependent Riccati Equation Method [28].

Capitolo 5

Le formazioni come sistemi multibody

Lo scopo di questo capitolo è proporre un metodo alternativo di analisi e guida del moto relativo tra piattaforme spaziali in formazione, con l'obiettivo di poter valutare in modo pressoché diretto le azioni necessarie a mantenere una determinata configurazione della formazione. L'intero sistema costituito da più satelliti che volano in formazione, può essere pensato come un insieme di giunti (punti materiali) che collegano due o più link virtuali in modo da rendere possibile una configurazione ben precisa della formazione. In particolare lo studio nasce dalla volontà di includere il mantenimento di una distanza minima prefissata tra le piattaforme: un concetto fondamentale per la riuscita della missione di volo in formazione al fine di evitare collisioni tra le stesse.

L'idea fondamentale è quindi quella della costruzione di un modello multibody equivalente come mostrato in Fig.5.1, in cui i satelliti sono rappresentati dai giunti del sistema multicorpo e tra di essi sono presenti uno o più link virtuali. Il moto dei satelliti della formazione sarà quindi assimilato ad un'elongazione od ad una rotazione dei link stessi. Facendo riferimento all'analogia con le teorie multibody presentate nella parte I, si può pensare di implementare uno schema di controllo per il mantenimento della formazione, basandosi su coppie e forze prodotte dalla risoluzione del problema dinamico inverso dei manipolatori robotici [26, 27].

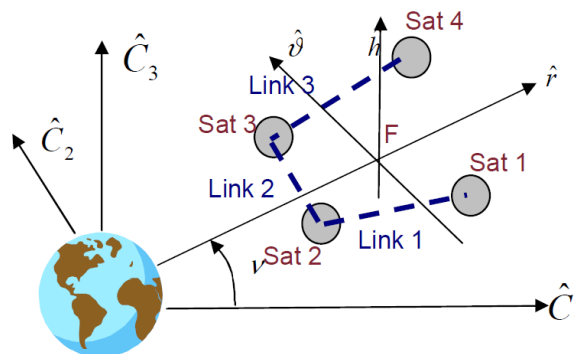


Figura 5.1: Formazione di 4 satelliti collegata da 3 link ideali

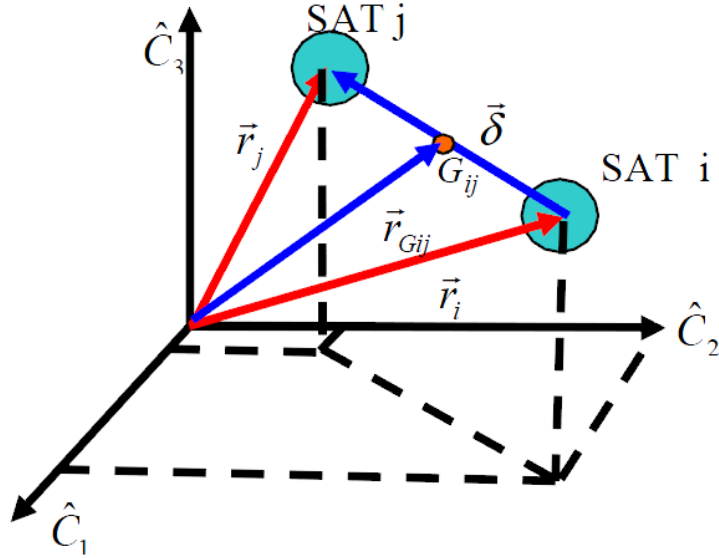


Figura 5.2: Link virtuale equivalente

5.1 Equivalenza tra le equazioni della dinamica

Lo studio parte da un'attenta analisi relativa all'equivalenza tra le equazioni del moto di prossimità tra due piattaforme e quelle di un link a lunghezza variabile ai cui estremi sono presenti le piattaforme stesse (Fig.5.2).

Dati due vettori posizione \vec{r}_i e \vec{r}_j dei due satelliti, rispettivamente di massa m_i e m_j , è possibile definire un vettore \vec{r}_{Gij} che individua la posizione del centro di massa del sistema formato dai due satelliti:

$$\vec{r}_{Gij} = \frac{m_i \vec{r}_i + m_j \vec{r}_j}{m_i + m_j} = \mu_{ij}^i \vec{r}_i + \mu_{ij}^j \vec{r}_j \quad (5.1)$$

dove nell'ultimo termine si sono definiti i rapporti μ_{ij}^i e μ_{ij}^j relativi alle masse dei singoli satelliti rispetto alla massa totale del sistema dei due corpi $m_{ij} = m_i + m_j$:

$$\mu_{ij}^i = \frac{m_i}{m_{ij}}; \quad \mu_{ij}^j = \frac{m_j}{m_{ij}}; \quad (5.2)$$

Il moto relativo tra i due satelliti può essere convenientemente descritto dal vettore distanza tra i due satelliti così definito:

$$\vec{\delta}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i \quad (5.3)$$

Il moto di una piattaforma orbitante intorno alla terra può essere descritto dalla relazione:

$$\frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{g}(\vec{r}_i) + \frac{\vec{f}_i}{m_i} \quad (5.4)$$

dove si è indicata con $\vec{g}(\vec{r}_i)$ l'accelerazione gravitazionale subita dal satellite e con \vec{f}_i la

risultante delle forze di perturbazione e di controllo applicate alla piattaforma stessa. Se si considera un sistema formato da due piattaforme, sarà necessario integrare due equazioni vettoriali come l'Eq.5.4 con le relative condizioni iniziali. In totale occorrerà quindi risolvere un sistema del secondo ordine di 6 equazioni scalari. L'equivalenza del modello multibody deve portare ad ottenere lo stesso numero di equazioni differenziali, in modo da poter chiudere il sistema.

Derivando due volte nel tempo l'Eq.5.1 e sostituendo l'Eq.5.4 si ottiene un'equazione che può descrivere il moto del centro di massa del sistema dei due satelliti:

$$\frac{d^2 \vec{r}_{Gij}}{dt^2} = \mu_{ij}^i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} + \mu_{ij}^j \frac{d^2 \vec{r}_j}{dt^2} = \mu_{ij}^i \vec{g}(\vec{r}_i) + \mu_{ij}^j \vec{g}(\vec{r}_j) + \frac{\vec{f}_i + \vec{f}_j}{m_{ij}} \quad (5.5)$$

che fornisce un primo set di 3 equazioni scalari relative all'intero sistema dei due satelliti.

D'altra parte utilizzando l'Eq.5.3 è possibile ottenere la seguente relazione:

$$\frac{d^2 \vec{\delta}_{ij}}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{r}_j}{dt^2} - \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{g}(\vec{r}_j) - \vec{g}(\vec{r}_i) + \frac{\vec{f}_j}{m_j} - \frac{\vec{f}_i}{m_i} \quad (5.6)$$

rappresentante il restante set di 3 equazioni differenziali necessario per completare la descrizione del moto del sistema. Il sistema formato dall'Eq.5.5 e dall'Eq.5.6 è totalmente equivalente a quello formato dalle due equazioni del moto associate ai singoli satelliti, perché semplicemente combinazioni lineari dell'Eq.5.4. Proprio per questo motivo non ne risulta nessun specifico vantaggio nell'adozione del set così ottenuto rispetto a quello di partenza. Tuttavia proprio dall'Eq.5.6 è possibile derivare una forma delle equazioni del moto che possono rappresentare il moto del sistema equivalente.

Se si proietta l'Eq.5.6 in un riferimento solidale al vettore $\vec{\delta}_{ij}^1$, si ottiene un'equazione vettoriale del tipo:

$$m_{ij} \mu_{ij}^i \mu_{ij}^j \left[\ddot{\vec{\delta}}_{ij} + \dot{\vec{\omega}}_{ij} \times \vec{\delta}_{ij} + 2\vec{\omega}_{ij} \times \dot{\vec{\delta}}_{ij} + \vec{\omega}_{ij} \times (\vec{\omega}_{ij} \times \vec{\delta}_{ij}) \right] = m_{ij} \mu_{ij}^i \mu_{ij}^j [\vec{g}(\vec{r}_j) - \vec{g}(\vec{r}_i)] + \mu_{ij}^i \vec{f}_j - \mu_{ij}^j \vec{f}_i \quad (5.7)$$

dove $\vec{\omega}_{ij}$ è la velocità angolare associata al link virtuale e riferita al riferimento corpo definito in precedenza.

Una prima equazione del moto equivalente può esser trovata andando a considerare la sola componente lungo $\hat{\delta}_{ij}$ dell'Eq.5.7:

$$m_{ij} \mu_{ij}^i \mu_{ij}^j \left[\ddot{\delta}_{ij} + \delta_{ij} \vec{\omega}_{ij} \cdot \left(\underline{\underline{u}} - \hat{\delta}_{ij} \hat{\delta}_{ij} \right) \cdot \vec{\omega}_{ij} \right] = m_{ij} \mu_{ij}^i \mu_{ij}^j [g^{\delta_{ij}}(\vec{r}_j) - g^{\delta_{ij}}(\vec{r}_i)] + \mu_{ij}^i f_j^{\delta_{ij}} - \mu_{ij}^j f_i^{\delta_{ij}} \quad (5.8)$$

che mostra oltretutto come la dinamica di elongazione del link equivalente sia dipendente dalle forze centrifughe dovute alla rotazione del link stesso².

¹Si consideri ad esempio un riferimento $\hat{\delta}_{ij} \hat{\lambda}_{ij} \hat{\eta}_{ij}$, con l'asse $\hat{\delta}_{ij}$ allineato con la congiungente ai due satelliti ed i restanti assi a formare una terna levogira.

²Si noti che si è adottata una notazione diadica del termine relativo alla forza centrifuga, in cui sono

Le restanti due equazioni scalari possono ottenersi andando a premoltiplicare vettorialmente l'Eq.5.7 per il versore $\hat{\delta}_{ij}$, ottenendo così:

$$\begin{aligned} m_{ij}\mu_{ij}^i\mu_{ij}^j \left[\left(\delta_{ij}^2 \underline{u} - \vec{\delta}_{ij}\vec{\delta}_{ij} \right) \cdot \dot{\vec{\omega}}_{ij} + 2\vec{\delta}_{ij} \times \left(\vec{\omega}_{ij} \times \dot{\vec{\delta}}_{ij} \right) + \vec{\omega}_{ij} \times \left(\delta_{ij}^2 \underline{u} - \vec{\delta}_{ij}\vec{\delta}_{ij} \right) \cdot \vec{\omega}_{ij} \right] = \\ = m_{ij}\mu_{ij}^i\mu_{ij}^j\vec{\delta}_{ij} \times [\vec{g}(\vec{r}_j) - \vec{g}(\vec{r}_i)] + \vec{\delta}_{ij} \times \left(\mu_{ij}^i\vec{f}_j - \mu_{ij}^j\vec{f}_i \right) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Quindi un sistema equivalente di equazioni può esser scritto, nel caso di una formazione di due satelliti, andando a considerare rispettivamente l'equazione alla traslazione del centro di massa del sistema rappresentata dall'Eq.5.5, un'equazione scalare rappresentante il problema estensionale del link rappresentata dall' Eq.5.8 e le due equazioni non identicamente nulle rappresentanti il moto rotazionale del link stesso espresse dall'Eq.5.9. In totale si sono ottenute 6 equazioni scalari del moto.

Lo stesso set di equazioni lo si ottiene qualora si vada a considerare direttamente le equazioni del moto di un corpo a forma di manubrio di pari proprietà di massa. Considerando come polo di calcolo dei momenti proprio il centro di massa del link virtuale³, è possibile scrivere direttamente le equazioni del moto del link a partire da:

$$\frac{d\vec{Q}_{ij}}{dt} = \vec{f}_{ij}^g + \vec{f}_{ij} \quad (5.10)$$

$$\frac{d\vec{H}_{ij}^{G_{ij}}}{dt} = \vec{M}_{ij}^{g-G_{ij}} + \vec{M}_{ij}^{G_{ij}} \quad (5.11)$$

dove \vec{f}_{ij}^g e $\vec{M}_{ij}^{g-G_{ij}}$ sono rispettivamente la forza e la coppia dovuta al campo gravitazionale agente sul link stesso, mentre \vec{f}_{ij} e $\vec{M}_{ij}^{G_{ij}}$ sono le restanti forze e coppie di perturbazione e di controllo che agiscono sul link stesso. Si è indicato con \vec{Q}_{ij} la quantità di moto del link virtuale, che può essere espressa da:

$$\vec{Q}_{ij} = m_{ij} \frac{d\vec{r}_{G_{ij}}}{dt} \quad (5.12)$$

mentre con $\vec{H}_{ij}^{G_{ij}}$ il momento angolare del link calcolato rispetto al centro di massa del link ed espresso dalla:

$$\vec{H}_{ij}^{G_{ij}} = \underline{\underline{J}}_{ij}^{G_{ij}} \cdot \vec{\omega}_{ij} \quad (5.13)$$

dove $\underline{\underline{J}}_{ij}^{G_{ij}}$ è il diadico d'inerzia del link che può essere facilmente calcolato applicando la definizione stessa del momento d'inerzia al sistema formato dalle due masse connesse da una barra senza massa⁴:

presenti la diade unitaria \underline{u} e la diade rappresentante la direzione lungo il link della forza centrifuga espressa da $\hat{\delta}_{ij}\hat{\delta}_{ij}$

³Tale assunzione è stata fatta per semplicità nel computo delle equazioni e non comporta alcuna limitazione nella generalità della trattazione.

⁴Si consideri il sistema costituito dalle due masse, come rappresentato in Fig.5.2, e si consideri come

$$\underline{\underline{J}}_{ij}^{G_{ij}} = m_{ij} \mu_{ij}^i \mu_{ij}^j \left(\delta_{ij}^2 \underline{\underline{u}} - \vec{\delta}_{ij} \vec{\delta}_{ij} \right) \quad (5.14)$$

Includendo l'Eq.5.14 dentro l'Eq.5.13 ed applicando l'Eq.5.11, si ottiene il primo membro dell'Eq.5.9, mentre sostituendo l'Eq.5.12 nell'Eq.5.10 si ottiene il primo membro dell'Eq.5.5, verificando parzialmente l'equivalenza della formulazione multibody a quella del moto della formazione.

5.2 Equivalenza delle forzanti gravitazionali

Occorre altresì notare che per una completa dimostrazione dell'equivalenza sia necessario valutare in modo analogo anche le espressioni relative ai termini forzanti presenti nelle Eq.5.5, 5.8, 5.9: in particolare è necessario che l'equivalenza sia verificata anche per i termini gravitazionali⁵.

Sotto l'ipotesi che il campo gravitazionale possa esser approssimato dal solo termine di monopolo⁶ è possibile calcolare i termini forzanti dovuti all'azione gravitazionale agente sul link equivalente nelle Eq.5.5, 5.8, 5.9:

$$\vec{f}_{ij}^g = m_{ij} \left(\mu_{ij}^i \vec{g}(\vec{r}_i) + \mu_{ij}^j \vec{g}(\vec{r}_j) \right) = -\mu_{\oplus} m_{ij} \left(\mu_{ij}^i \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} + \mu_{ij}^j \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} \right) \quad (5.15)$$

$$f_{ij}^{g-\delta} = m_{ij} \mu_{ij}^i \mu_{ij}^j \hat{\delta}_{ij} \cdot (\vec{g}(\vec{r}_j) - \vec{g}(\vec{r}_i)) = -\mu_{\oplus} m_{ij} \mu_{ij}^i \mu_{ij}^j \hat{\delta}_{ij} \cdot \left(\frac{\vec{r}_j}{r_j^3} - \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \right) \quad (5.16)$$

polo il centro di massa del sistema G_{ij} , il momento d'inerzia del link può essere calcolato applicando la definizione:

$$\underline{\underline{J}}_{ij}^{G_{ij}} = \int [\rho^2 \underline{\underline{u}} - \vec{\rho} \vec{\rho}] dm = m_i [\rho_i^2 \underline{\underline{u}} - \vec{\rho}_i \vec{\rho}_i] + m_j [\rho_j^2 \underline{\underline{u}} - \vec{\rho}_j \vec{\rho}_j]$$

dove $\vec{\rho}_i$ e $\vec{\rho}_j$ sono i vettori che collegano il centro di massa rispettivamente alla i -esima massa ed alla j -esima massa:

$$\vec{\rho}_i = -\mu_{ij}^j \vec{\delta}_{ij}$$

$$\vec{\rho}_j = \mu_{ij}^i \vec{\delta}_{ij}$$

per cui sostituendo e raggruppando opportunamente si ottiene:

$$\underline{\underline{J}}_{ij}^{G_{ij}} = m_{ij} \mu_{ij}^i \mu_{ij}^j \left(\delta_{ij}^2 \underline{\underline{u}} - \vec{\delta}_{ij} \vec{\delta}_{ij} \right)$$

⁵Ciò in ragione del fatto che l'azione gravitazionale risulta dare il maggior contributo a forzare il sistema dinamico, ma a rigore di logica tutte le forzanti devono esser modellate con sistemi equivalenti.

⁶Viene introdotta qui questa ipotesi al fine di semplificare la trattazione, ma le successive considerazioni sono valide anche se si considerano armoniche di ordine superiore per definire il campo gravitazionale terrestre.

$$\vec{M}_{ij}^{g-G_{ij}} = m_{ij} \left[\mu_{ij}^i \vec{\delta}_{ij} \times \mu_{ij}^j \vec{g}(\vec{r}_j) - \mu_{ij}^j \vec{\delta}_{ij} \times \mu_{ij}^i \vec{g}(\vec{r}_i) \right] = -\mu_{\oplus} m_{ij} \mu_{ij}^i \mu_{ij}^j \vec{\delta}_{ij} \times \left(\frac{\vec{r}_j}{r_j^3} - \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \right) \quad (5.17)$$

Seppur possibile, l'integrazione diretta di questi termini non effettuata con metodi accurati porta all'insorgere di errori numerici non trascurabili, per tale motivo è d'uopo andare a linearizzare i termini gravitazionali intorno al centro del riferimento della formazione F. Indicando con \vec{d} la distanza di un satellite della formazione da tale punto, il termine di accelerazione di gravità può essere sviluppato nel seguente modo:

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{\mu_{\oplus}}{r^3} \vec{r} = -\frac{\mu_{\oplus}}{r_F^3} \left[\vec{r}_F - (3\hat{r}_F \hat{r}_F - \underline{\underline{u}}) \cdot \vec{d} + o(d^2) \right] \quad (5.18)$$

che sostituita nell'Eq.5.15 produce⁷:

$$\vec{f}_{ij}^g \cong -m_{ij} \frac{\mu_{\oplus}}{r_F^3} \left[\vec{r}_F - (3\hat{r}_F \hat{r}_F - \underline{\underline{u}}) \cdot \vec{d}_{G_{ij}} \right] \quad (5.19)$$

da cui si evince che il termine gravitazionale che regola il moto del centro di massa del link equivalente è essenzialmente costituito da un termine dominante, relativo all'azione complessiva prodotta sul moto della formazione, ed un termine differenziale dipendente dalla posizione del centro di massa del link rispetto al centro della formazione. E' da notare inoltre come, al primo ordine non esiste alcuna dipendenza della forza rispetto alla posizione relativa delle due masse, come si evince anche dalla dimostrazione presente nella nota 7.

Sostituendo l'Eq.5.18 all'Eq.5.16 si ottiene⁸:

$$f_{ij}^{g-\delta} \cong m_{ij} \mu_{ij}^i \mu_{ij}^j \frac{\mu_{\oplus}}{r_F^3} \left[3 \left(\hat{r}_F \cdot \hat{\delta}_{ij} \right)^2 - 1 \right] \quad (5.20)$$

ed allo stesso modo si ottiene il termine di coppia gravitazionale a partire dall'Eq.5.17⁹:

$$\vec{M}_{ij}^{g-G_{ij}} = 3 \frac{\mu_{\oplus}}{r_F^3} \hat{r}_F \times \underline{\underline{J}}_{ij}^{G_{ij}} \cdot \hat{r}_F \quad (5.21)$$

⁷Infatti si ha:

$$\begin{aligned} \vec{f}_{ij}^g &\cong -m_{ij} \frac{\mu_{\oplus}}{r_F^3} \left[\left(\mu_{ij}^i + \mu_{ij}^j \right) \vec{r}_F - (3\hat{r}_F \hat{r}_F - \underline{\underline{u}}) \cdot \left(\mu_{ij}^i \vec{d}_i + \mu_{ij}^j \vec{d}_j \right) \right] = \\ &= -m_{ij} \frac{\mu_{\oplus}}{r_F^3} \left[\vec{r}_F - (3\hat{r}_F \hat{r}_F - \underline{\underline{u}}) \cdot \left(\vec{d}_{G_{ij}} - \mu_{ij}^i \mu_{ij}^j \vec{\delta}_{ij} + \mu_{ij}^i \mu_{ij}^j \vec{\delta}_{ij} \right) \right] \end{aligned}$$

dove si è posto $\vec{d}_i = \vec{d}_{G_{ij}} - \mu_{ij}^j \vec{\delta}_{ij}$ e $\vec{d}_j = \vec{d}_{G_{ij}} + \mu_{ij}^i \vec{\delta}_{ij}$ proprio per definizione di centro di massa del link virtuale.

⁸Infatti si ha:

$$\begin{aligned} f_{ij}^{g-\delta} &\cong m_{ij} \mu_{ij}^i \mu_{ij}^j \frac{\mu_{\oplus}}{r_F^3} \hat{\delta}_{ij} \cdot \left[(3\hat{r}_F \hat{r}_F - \underline{\underline{u}}) \cdot \left(\vec{d}_j - \vec{d}_i \right) \right] = \\ &= m_{ij} \mu_{ij}^i \mu_{ij}^j \frac{\mu_{\oplus}}{r_F^3} \hat{\delta}_{ij} \cdot \left[(3\hat{r}_F \hat{r}_F - \underline{\underline{u}}) \cdot \vec{\delta}_{ij} \right] \end{aligned}$$

da cui si ottiene la 5.20.

⁹Infatti si ha:

Facendo riferimento al metodo di Encke[89] [39], si può sostituire l'Eq.5.15 nell'Eq.5.5 e tenendo conto degli ordini di grandezza coinvolti si ottiene:

$$\frac{d^2 \vec{r}_F}{dt^2} + \frac{\mu_{\oplus}}{r_F^3} \vec{r}_F = 0 \quad (5.22)$$

$$\frac{d^2 \vec{d}_{Gij}}{dt^2} = \frac{\mu_{\oplus}}{r_F^3} (3\hat{r}_F \hat{r}_F - \underline{\underline{u}}) \cdot \vec{d}_{Gij} + \frac{\vec{f}_{ij}}{m_{ij}} \quad (5.23)$$

dove si è indicato con \vec{f}_{ij} la risultante delle forze non gravitazionali applicate ai due satelliti. In particolare possiamo notare come il moto del link possa essere decomposto in un moto globale legato al moto orbitale complessivo della formazione, ed un moto relativo rispetto al centro della formazione. Di fatto l'Eq.5.23, se sviluppata in un riferimento orbitale LVLH sotto l'ipotesi di orbita circolare di riferimento, dà luogo alle equazioni di Eulero-Hill [17] che modellizzano il moto di prossimità del manubrio rispetto al punto di riferimento della formazione:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{Gij} - 2n_0 \dot{y}_{Gij} - 3n_0^2 x_{Gij} &= f_{ij}^x / m_{ij} \\ \ddot{y}_{Gij} + 2n_0 \dot{x}_{Gij} &= f_{ij}^y / m_{ij} \\ \ddot{z}_{Gij} + n_0^2 z_{Gij} &= f_{ij}^z / m_{ij} \end{aligned} \quad (5.24)$$

Questo sistema di equazioni differenziali può essere impostato nel codice multibody in modo da simulare il moto del manubrio rispetto al riferimento della formazione. Altre due equazioni possono essere ricavate andando ad unire l'Eq.5.9 con l'Eq.5.21:

$$\begin{aligned} m_{ij} \mu_{ij}^i \mu_{ij}^j \left[\left(\delta_{ij}^2 \underline{\underline{u}} - \vec{\delta}_{ij} \vec{\delta}_{ij} \right) \cdot \vec{\omega}_{ij} + 2\vec{\delta}_{ij} \times \left(\vec{\omega}_{ij} \times \vec{\delta}_{ij} \right) + \vec{\omega}_{ij} \times \left(\delta_{ij}^2 \underline{\underline{u}} - \vec{\delta}_{ij} \vec{\delta}_{ij} \right) \cdot \vec{\omega}_{ij} \right] = \\ = 3m_{ij} \mu_{ij}^i \mu_{ij}^j \frac{\mu_{\oplus}}{r_F^3} \hat{r}_F \times \left(\delta_{ij}^2 \underline{\underline{u}} - \vec{\delta}_{ij} \vec{\delta}_{ij} \right) \cdot \hat{r}_F + \vec{\delta}_{ij} \times \left(\mu_{ij}^i \vec{f}_j - \mu_{ij}^j \vec{f}_i \right) \end{aligned} \quad (5.25)$$

che rappresenta proprio l'equazione della dinamica d'assetto di un manubrio estensibile soggetto all'azione del gradiente di gravità [36]. Infine l'equazione che chiude il sistema è data dalla sostituzione dell'Eq.5.16 nell'Eq.5.8:

$$m_{ij} \mu_{ij}^i \mu_{ij}^j \left[\ddot{\delta}_{ij} + \delta_{ij} \vec{\omega}_{ij} \cdot \left(\underline{\underline{u}} - \hat{\delta}_{ij} \hat{\delta}_{ij} \right) \cdot \vec{\omega}_{ij} \right] = m_{ij} \mu_{ij}^i \mu_{ij}^j \frac{\mu_{\oplus}}{r_F^3} \left[3 \left(\hat{r}_F \cdot \hat{\delta}_{ij} \right)^2 - 1 \right] + \mu_{ij}^i f_j^{\delta_{ij}} - \mu_{ij}^j f_i^{\delta_{ij}} \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_{ij}^{g-Gij} &= m_{ij} \mu_{ij}^i \mu_{ij}^j \vec{\delta}_{ij} \times \frac{\mu_{\oplus}}{r_F^3} \left[(3\hat{r}_F \hat{r}_F - \underline{\underline{u}}) \cdot \left(\vec{d}_j - \vec{d}_i \right) \right] = m_{ij} \mu_{ij}^i \mu_{ij}^j \vec{\delta}_{ij} \times \frac{\mu_{\oplus}}{r_F^3} \left[(3\hat{r}_F \hat{r}_F - \underline{\underline{u}}) \cdot \vec{\delta}_{ij} \right] = \\ &= 3 \frac{\mu_{\oplus}}{r_F^3} \hat{r}_F \times \left[m_{ij} \mu_{ij}^i \mu_{ij}^j \left(\delta_{ij}^2 \underline{\underline{u}} - \vec{\delta}_{ij} \vec{\delta}_{ij} \right) \right] \cdot \hat{r}_F \end{aligned}$$

da cui si ottiene l'Eq.5.21 se si ricorda l'Eq.5.14.

5.3 Equazioni Cinematiche per il Modello Equivalente

Partendo dalla posizione dei satelliti nel riferimento orbitale, è possibile definire le proprietà cinematiche dei link che compongono il modello multibody equivalente. In particolare è possibile determinare delle leggi di trasformazione che legano le posizione e le velocità dei satelliti, rappresentate rispettivamente dai vettori $\vec{d}_i = \begin{bmatrix} x_i & y_i & z_i \end{bmatrix}^T$ e $\dot{\vec{d}}_i = \begin{bmatrix} \dot{x}_i & \dot{y}_i & \dot{z}_i \end{bmatrix}^T$ e la posizione del centro di massa $\vec{d}_{Gij} = \begin{bmatrix} x_{Gij} & y_{Gij} & z_{Gij} \end{bmatrix}^T$, l'estensione δ_{ij} e l'assetto link (rappresentato da due angoli ψ_{ij}, ϕ_{ij}).

Il centro di massa del link virtuale si trova mediante le:

$$\vec{d}_{Gij} = \mu_{ij}^i \vec{d}_i + \mu_{ij}^j \vec{d}_j \quad (5.27)$$

quindi derivando nel tempo è possibile trovare la relazione che lega le velocità dei satelliti alla velocità del link equivalente rispetto al riferimento della formazione¹⁰:

$$\dot{\vec{d}}_{Gij} = \mu_{ij}^i \dot{\vec{d}}_i + \mu_{ij}^j \dot{\vec{d}}_j \quad (5.28)$$

e le accelerazioni dello stesso:

$$\ddot{\vec{d}}_{Gij} = \mu_{ij}^i \ddot{\vec{d}}_i + \mu_{ij}^j \ddot{\vec{d}}_j \quad (5.29)$$

La lunghezza del link equivalente viene determinata invece dalla relazione:

$$\delta_{ij} = \sqrt{(\vec{d}_j - \vec{d}_i) \cdot (\vec{d}_j - \vec{d}_i)} \quad (5.30)$$

e la sua velocità di elongazione può esser ricavata andando a derivare la precedente espressione, ottenendo:

$$\dot{\delta}_{ij} = \frac{(\vec{d}_j - \vec{d}_i) \cdot (\dot{\vec{d}}_j - \dot{\vec{d}}_i)}{\sqrt{(\vec{d}_j - \vec{d}_i) \cdot (\vec{d}_j - \vec{d}_i)}} = \hat{\delta}_{ij} \cdot (\dot{\vec{d}}_j - \dot{\vec{d}}_i) \quad (5.31)$$

e la derivata seconda dà luogo alla:

$$\ddot{\delta}_{ij} = \frac{(\vec{d}_j - \vec{d}_i) \cdot (\ddot{\vec{d}}_j - \ddot{\vec{d}}_i)}{\sqrt{(\vec{d}_j - \vec{d}_i) \cdot (\vec{d}_j - \vec{d}_i)}} = \hat{\delta}_{ij} \cdot (\ddot{\vec{d}}_j - \ddot{\vec{d}}_i) \quad (5.32)$$

dove si è definito il versore $\hat{\delta}_{ij}$ come:

¹⁰Si fa qui l'ipotesi che i rapporti tra le masse non cambino o che comunque le variazioni siano trascurabili rispetto alla massa totale del sistema manubrio.

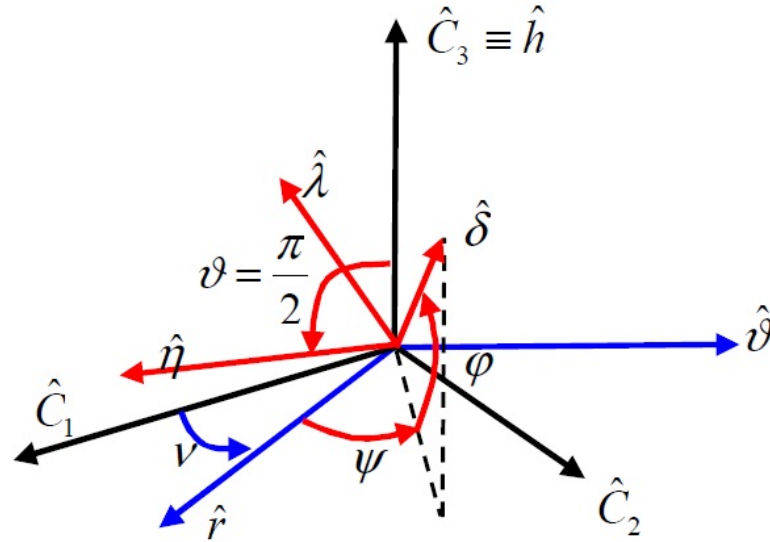


Figura 5.3: Angoli d'assetto del link equivalente

$$\hat{\delta}_{ij} = \frac{(\vec{d}_j - \vec{d}_i)}{\sqrt{(\vec{d}_j - \vec{d}_i) \cdot (\vec{d}_j - \vec{d}_i)}} \quad (5.33)$$

Per quanto riguarda l'assetto del link, si può definire una terna di angoli di Eulero 3-1-3 rispetto al riferimento orbitale LVLH, come mostrato in Fig.5.3, di cui la rotazione centrale è fissata a $\theta_{ij} = \pi/2$. Ciò in ragione del fatto che il moto di rollio del link, cioè quello intorno all'asse stesso del link, non è definito nell'Eq.5.25. Risultano quindi essere significativi solamente l'angolo di precessione ψ_{ij} del link e l'angolo di rotazione propria ϕ_{ij} del link. In questa maniera la terna $\hat{\delta}_{ij}\hat{\lambda}_{ij}\hat{\eta}_{ij}$ associata al link ha il terzo asse $\hat{\eta}_{ij}$ giacente sul piano orbitale e gli angoli di Eulero significativi assumono ψ_{ij} e ϕ_{ij} assumono il significato rispettivamente di angoli di pseudolongitudine e pseudolatitudine del link rispetto al riferimento orbitale. Tali angoli possono quindi essere calcolati a partire dall'Eq.5.33 come qui mostrato:

$$\begin{cases} \sin \phi_{ij} = \hat{h}_F \cdot \hat{\delta}_{ij} & -\pi/2 \leq \phi_{ij} \leq \pi/2 \\ \cos \psi_{ij} = \frac{\hat{r}_F \cdot (\underline{u} - \hat{h}_F \hat{h}_F) \cdot \hat{\delta}_{ij}}{\cos \phi_{ij}} \\ \sin \psi_{ij} = \frac{\hat{\theta}_F \cdot (\underline{u} - \hat{h}_F \hat{h}_F) \cdot \hat{\delta}_{ij}}{\cos \phi_{ij}} \end{cases} \quad 0 \leq \psi_{ij} \leq 2\pi \quad (5.34)$$

E' anche possibile definire un quaternionio rappresentativo dell'assetto del link, in modo tale da evitare la possibilità di avere singolarità nella rappresentazione. Tenendo sempre presente la Fig.5.3, in cui è definita anche l'anomalia vera ν_F del riferimento orbitale, si può definire il quaternionio dell'assetto del link mediante il prodotto:

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s_{\nu_F/2} \\ c_{\nu_F/2} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s_{\psi_{ij}/2} \\ c_{\psi_{ij}/2} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} s_{\pi/4} \\ 0 \\ 0 \\ c_{\pi/4} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s_{\phi_{ij}/2} \\ c_{\phi_{ij}/2} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} c_{(\nu_F+\psi_{ij}-\phi_{ij})/2} \\ s_{(\nu_F+\psi_{ij}-\phi_{ij})/2} \\ s_{(\nu_F+\psi_{ij}+\phi_{ij})/2} \\ c_{(\nu_F+\psi_{ij}+\phi_{ij})/2} \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

dove si è indicato con il simbolo \otimes il prodotto tra quaternioni e la relazione che lega la velocità angolare del link e l'assetto dello stesso può esser scritta nella forma:

$$\dot{Q}_{ij} = \frac{1}{2} Q_{ij} \otimes \begin{bmatrix} \vec{\omega}_{ij} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

dove a sua volta la velocità angolare del link può esser calcolata a partire dal moto dei satelliti che lo compongono mediante la:

$$\vec{\omega}_{ij} = n_0 \hat{h}_F + \frac{1}{\delta_{ij}^2} \left[\vec{\delta} \times (\dot{d}_j - \dot{d}_i) \right] \quad (5.37)$$

5.4 Assemblaggio del sistema equivalente ed imposizione dei vincoli

L'equivalenza tra le equazioni del moto di una coppia di satelliti della formazione e moto di un link equivalente, è il fondamento teorico su cui si basa la visione del sistema dinamico delle formazioni come se fosse un insieme di link interconnessi dai satelliti, che svolgono la funzione di giunti sferici. Assegnata una formazione di 3 o più satelliti, sarà possibile costruire un sistema multibody fittizio definendo il grado di connessione tra due piattaforme alla volta.

Senza perdita di generalità possiamo considerare un sistema formato da 3 satelliti, come mostrato in Fig.5.4. Indicato con j il satellite che funge da giunto con i due link virtuali che collegano tale satellite con le due piattaforme i e k poste agli estremi degli stessi, il giunto sferico in corrispondenza della piattaforma centrale, può essere espresso dall'equazione di vincolo:

$$\Psi_{ijk}^{joint} = \vec{d}_{Gij} + \mu_{ij}^i \vec{\delta}_{ij} - (\vec{d}_{Gjk} - \mu_{jk}^k \vec{\delta}_{jk}) = 0 \quad (5.38)$$

Mediante l'Eq.5.38 si fornisce l'equazione di contabilità che definisce la posizione del satellite j a partire dalla posizione dei due centri dei link equivalenti di cui tale satellite fa parte. Tale condizione, per la propria natura fisica stessa, dovrà essere sempre rispettata durante la simulazione e forzerà il sistema multibody a restare assemblato in modo da mantenere l'equivalenza con il mondo delle formazioni.

Tuttavia altri vincoli si possono aggiungere al fine di migliorare le strategie di guida della formazione. Si pensi al caso in cui alcuni requisiti di missione siano stringenti

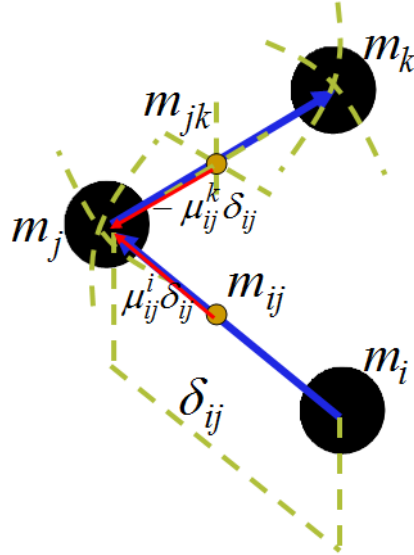


Figura 5.4: Connessione tra due link equivalenti mediante giunto sferico

rispetto alla distanza relativa assunta dai satelliti della formazione, allora sarà possibile ad esempio imporre un vincolo sulla lunghezza del link equivalente nel seguente modo:

$$\Psi_{ij}^{length} = \delta_{ij} - \bar{\delta}_{ij}(X, t) = 0 \quad (5.39)$$

dove si è indicata con il simbolo $\bar{\delta}_{ij}$ la lunghezza voluta del link, che può essere costante o variabile nel tempo secondo una legge che soddisfi i requisiti di missione. Altri requisiti di missione potrebbero interessare l'allineamento relativo tra le piattaforme, ciò si traduce in vincoli sulle differenze degli angoli d'assetto dei link:

$$\Psi_{ijk}^{angle} = \begin{cases} \psi_{ij} - \psi_{jk} - \bar{\psi}_{ijk}(X, t) = 0 \\ \phi_{ij} - \phi_{jk} - \bar{\phi}_{ijk}(X, t) = 0 \end{cases} \quad (5.40)$$

dove $\bar{\psi}_{ijk}$ e $\bar{\phi}_{ijk}$ rappresentano le differenze volute degli angoli d'assetto tra i link.

Oppure la posizione di un link potrebbe essere fissata da alcuni vincoli imposti dalla strumentazione, determinando quindi un vincolo del tipo:

$$\Psi_{ij}^{position} = \vec{d}_{Gij} - \vec{\bar{d}}_{Gij}(X, t) = 0 \quad (5.41)$$

dove $\vec{\bar{d}}_{Gij}$ è la posizione posizione voluta.

5.5 Modello Multibody Equivalente per la Formazione

Come già visto nel capitolo 1 l'insieme delle equazioni dall'Eq.5.22 all'Eq.5.26 può esser scritta in una forma matriciale del tipo:

$$\mathbf{M}(X, t)\ddot{X} = \mathbf{H}(\dot{X}, t)\dot{X} + \mathbf{G}(X, t)X + \mathbf{B}(X, \dot{X}, t)U + F(X, \dot{X}, t) \quad (5.42)$$

dove si è indicata con $\mathbf{M}(X, t)$ la matrice di massa del sistema, con $\mathbf{H}(X, \dot{X}, t)$ la matrice dei termini quadratici nelle velocità (forze Coriolis e centrifughe dovute ai riferimenti rotanti), con $\mathbf{G}(X, t)$ la matrice delle azioni gravitazionali che possono essere inglobate in un unico termine:

$$N(X, \dot{X}, t) = \mathbf{H}(\dot{X}, t)\dot{X} + \mathbf{G}(X, t)X \quad (5.43)$$

mentre $\mathbf{B}(X, \dot{X}, t)$ è la matrice di distribuzione del controllo che verrà esplicitata in seguito e $F(X, \dot{X}, t)$ è il vettore contenente le altre forzanti che agiscono sul sistema.

A tale sistema di equazioni differenziali si aggiungono i vincoli espressi dalle equazioni dall'Eq.5.38 all'Eq.5.41, che possono essere messe nella forma:

$$\Psi = 0 \quad (5.44)$$

e derivati in modo da ottenere una forma matriciale Pfaffiana del tipo:

$$\Psi_{,X} \dot{X} = 0 \quad (5.45)$$

dove si è indicata con $\Psi_{,X}$ la matrice contenente le derivate parziali dell'Eq.5.44 rispetto alle componenti del vettore di stato X . L'Eq.5.45 può essere derivata nuovamente in modo da ottenere equazioni differenziali dello stesso ordine di quelle nell' Eq.5.42:

$$\Psi_{,X} \ddot{X} = \Xi \quad (5.46)$$

dove si è indicato con Ξ il vettore contenente tutti i termini non lineari che si ottengono dalla derivazione dell'Eq.5.45:

$$\Xi = \dot{\Psi}_{,X} \dot{X} \quad (5.47)$$

L'Eq.5.46 può quindi essere aggiunta all'Eq.5.42 mediante la definizione di un vettore dei moltiplicatori di Lagrange Λ come già visto nella sezione 1.5, in modo da ottenere un sistema che si può mettere nella forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \Psi_{,X}^T \\ \Psi_{,X} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N + F + \mathbf{B}U \\ \Xi \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

comunemente risolta dai software di simulazione multibody [74, 72], producendo come output sia l'andamento temporale del sistema multibody soggetto a forze e coppie di gradiente di gravità ed altre opportunamente modellate, sia le reazioni vincolari e le azioni di controllo necessarie a rispettare i vincoli e i requisiti di missione.

Capitolo 6

Strategie di guida utilizzando codici multibody

Il capitolo precedente ha fornito una solida base teorica che dimostra l'equivalenza tra la dinamica di prossimità tipica delle formazioni e un sistema multicorpo soggetto allo stesso tipo di azioni forzanti. Ciò permette di scrivere un sistema equivalente come in Eq.5.48, forma che è comunemente risolta dai codici multibody.

L'utilizzo di questa analogia può essere utile quando si ha necessità di imporre vincoli stringenti nel guidare il moto in formazione dei satelliti. In particolare si può pensare a due tipi applicazioni:

1. *mantenimento della formazione*: il modello multibody può servire per mantenere due o più piattaforme in una configurazione ben determinata. Il computo delle reazioni vincolari ai link è tipicamente una operazione agevole e il risultato può essere utilizzato per dedurre le spinte necessarie a mantenere la configurazione voluta.
2. *riconfigurazione della formazione*: si può pensare di muovere uno o più link del modello multibody in modo tale riconfigurare la formazione. I metodi di inversione cinematica e dinamica utilizzati nel caso di manipolatori spaziali, permettono di ottenere valori di forze e coppie da applicare al multibody che possono essere utilizzate per ricavare le spinte necessarie a compiere la manovra di riconfigurazione voluta.

L'utilizzo di codici multibody validati e la possibilità di “visualizzare” l'andamento della formazione mediante la definizione dei link equivalenti, nonché il soddisfacimento dei vincoli imposti all'interno stesso delle equazioni della dinamica, sono solo alcuni dei pregi che si possono trovare a questa metodologia di guida delle formazioni.

Il presente capitolo mostra come a partire dagli output dei codici multibody sia possibile effettuare le sopraelencate manovre sulla formazione e ne mostra i risultati numerici ottenuti.

6.1 Computo delle azioni di controllo

L'integrazione numerica dell'Eq.5.48 produce due risultati:

1. L'evoluzione della posizione dei giunti, quindi dei satelliti, del sistema multibody flottante in orbita.
2. le forze di reazione agenti tra i link del sistema multibody.

Quest'ultimo output è di fondamentale importanza per poter calcolare le spinte necessarie a guidare i satelliti della formazione ad avere la stessa evoluzione dei giunti calcolata con il codice multibody.

In particolare osservando attentamente l'Eq.5.48, possiamo notare che i vincoli presenti nei sistemi vengono applicati alle equazioni della dinamica mediante il termine:

$$R = -\Psi_{,X}^T \Lambda \quad (6.1)$$

queste sono proprio le reazioni vincolari che forzano il sistema a compiere i movimenti ammessi dai vincoli imposti. Tali forze sono note se si è risolto il sistema nell'Eq.5.48. Se è anche presente un controllo U nel sistema, questo potrà essere aggiunto nel computo generale delle forze mediante la matrice di distribuzione del controllo \mathbf{B} . Entrambe le azioni di vincolo e di controllo sono proiettate nelle direzioni dello spazio di stato del sistema multibody. Le relative accelerazioni imposte alle variabili nello spazio di stato del multibody possono essere ottenute premoltiplicando per l'inversa della matrice di massa del sistema:

$$A = \mathbf{M}^{-1} [-\Psi_{,X}^T \Lambda + \mathbf{B}U] \quad (6.2)$$

Come detto, queste accelerazioni sono nello spazio di stato del sistema multibody e possono essere trasformate in spinte applicabili ai satelliti della formazione. Definendo la matrice \mathbf{J}_F rappresentante lo Jacobiano che converte le velocità delle variabili di stato del sistema del multibody in velocità dei satelliti delle formazioni¹, allora la spinta da applicare alle piattaforme è:

$$T = \mathbf{M}_F \mathbf{J}_F A = \mathbf{M}_F \mathbf{J}_F \mathbf{M}^{-1} [-\Psi_{,X}^T \Lambda + \mathbf{B}U] \quad (6.3)$$

dove si è indicata con \mathbf{M}_F è la matrice di massa del sistema delle formazioni². La spinta T così ottenuta potrà essere usata per controllare la formazione a seguire la traiettoria precalcolata con il codice multibody.

¹Tale matrice si ricava differenziando le equazioni dall'Eq.5.27 all'Eq.5.37 per ogni piattaforma che compone il sistema ed invertendo tale matrice.

²Costituita da tanti blocchi quanti sono i satelliti della formazione. Tali blocchi sono disposti sulla diagonale principale e sono di dimensioni 3x3 contenenti sulla diagonale la massa dei satelliti.

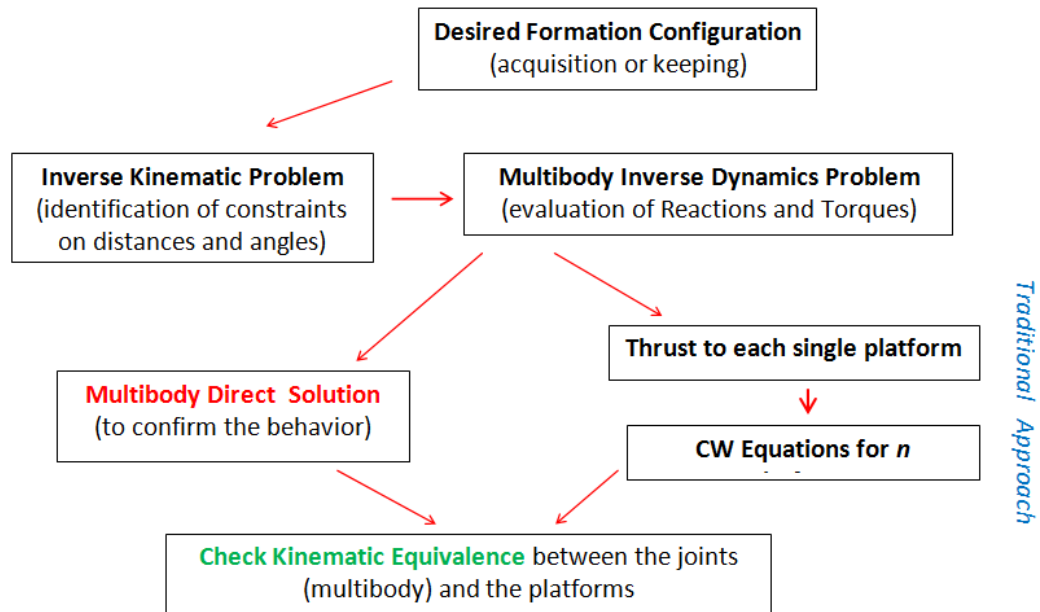


Figura 6.1: Schema usato nelle simulazioni

6.2 Modalità di simulazione

Le simulazioni effettuate sono state condotte nell'intento di avvalorare la tesi dell'equivalenza tra i due sistemi dinamici attraverso un riscontro numerico. Si è quindi adottato uno schema di cosimulazione tra le due dinamiche in modo tale da poter verificare l'equivalenza in tutte le fasi di risoluzione del problema.

Con riferimento alla Fig.6.1, le simulazioni effettuate si prefiggono il raggiungimento di un obiettivo riguardante la configurazione assunta dalla formazione durante la manovra e alla fine della stessa. Tali obiettivi vengono tradotti in vincoli da imporre nel sistema multibody equivalente, calcolando anche i movimenti che gli eventuali giunti dovranno compiere. Tali operazioni di fatto esplicitano la definizione del problema cinematico inverso relativo al multibody il cui output sarà utilizzato dalle librerie di inversione dinamica del codice multibody. L'inversione della dinamica del sistema multibody, come detto si rende necessaria per calcolare le reazioni ai link e le azioni di controllo da espletare ai giunti per controllare il sistema multibody. Gli output così prodotti serviranno in primo luogo alla simulazione del sistema multibody ed altresì verranno utilizzati per il computo delle spinte necessarie a forzare le equazioni della dinamica del moto in formazione dei satelliti. E' prevista una procedura di check della correttezza dell'equivalenza basata sul confronto tra le posizioni dei giunti del sistema multibody e le posizioni assunte dai satelliti sotto l'azione delle spinte applicate.

Tutte le simulazioni prodotte sono state effettuate per una formazione di 4 satelliti di cui 2 di massa pari a $10kg$ ed i restanti di massa pari a $30kg$ e si è assunto che tali masse restino costanti.

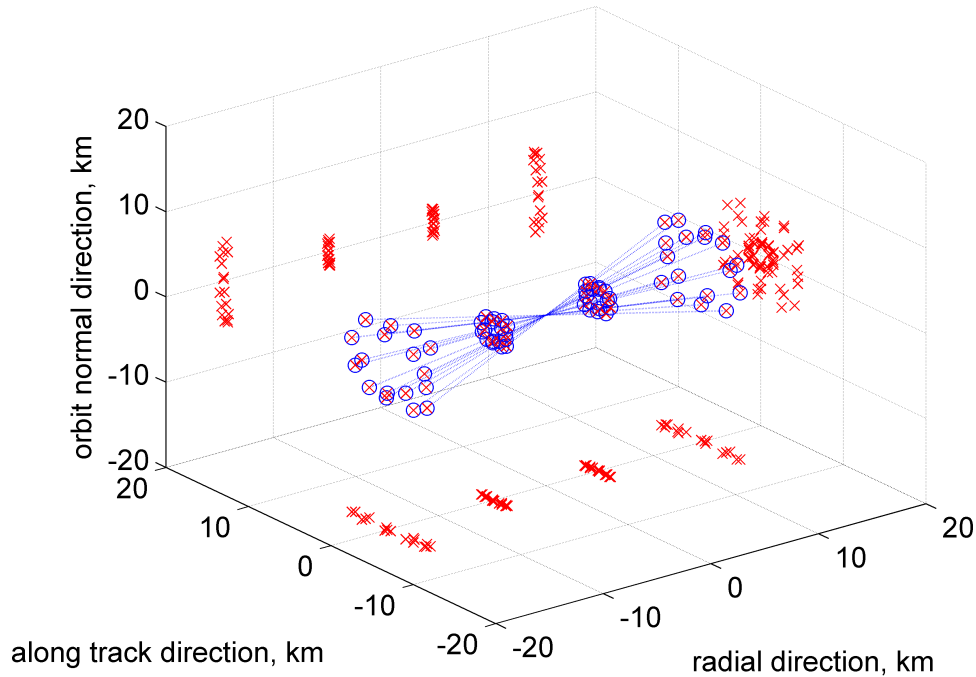


Figura 6.2: Snapshots del moto di librazione del sistema multibody intorno alla verticale locale

6.3 Mantenimento della formazione lungo la verticale locale

Il primo caso preso in considerazione per testare l'equivalenza è quello in cui la formazione di 4 satelliti, che da vita a 3 link virtuali connessi da due giunti sferici (i 2 satelliti centrali), cerca di mantenere un allineamento delle piattaforme lungo la verticale locale e una distanza tra le stesse costante. Tali condizioni possono ascrivere al caso di mantenimento della formazione, in quanto l'unico sforzo di controllo applicato ai link è quello dovuto al mantenimento della distanza reciproca tra le piattaforme, mentre l'allineamento è essenzialmente assicurato dall'azione del gradiente di gravità che agisce in modo da stabilizzare il sistema affinché i momenti d'inerzia massimi dei link siano ortogonali alla verticale locale [36].

In Fig.6.2 sono rappresentati alcuni snapshots rappresentativi del moto della formazione sotto l'azione dei suddetti vincoli. Il moto risultante è un moto di librazione intorno alla verticale locale, come ci si sarebbe aspettato se, ad esempio le reazioni vincolari fossero state generate da link inestensibili tra le piattaforme (moto simile alle librazioni nei tethers).

In particolare si sono identificate con le croci rosse le posizioni occupate dai satelliti della formazione, mentre con le linee blu i link virtuali ottenuti mediante l'imposizione del vincolo di lunghezza del link fissa. Inoltre con i cerchi blu si sono evidenziate le posizioni occupate dai giunti e dalle estremità non collegate dei link. Come si può evincere dalla

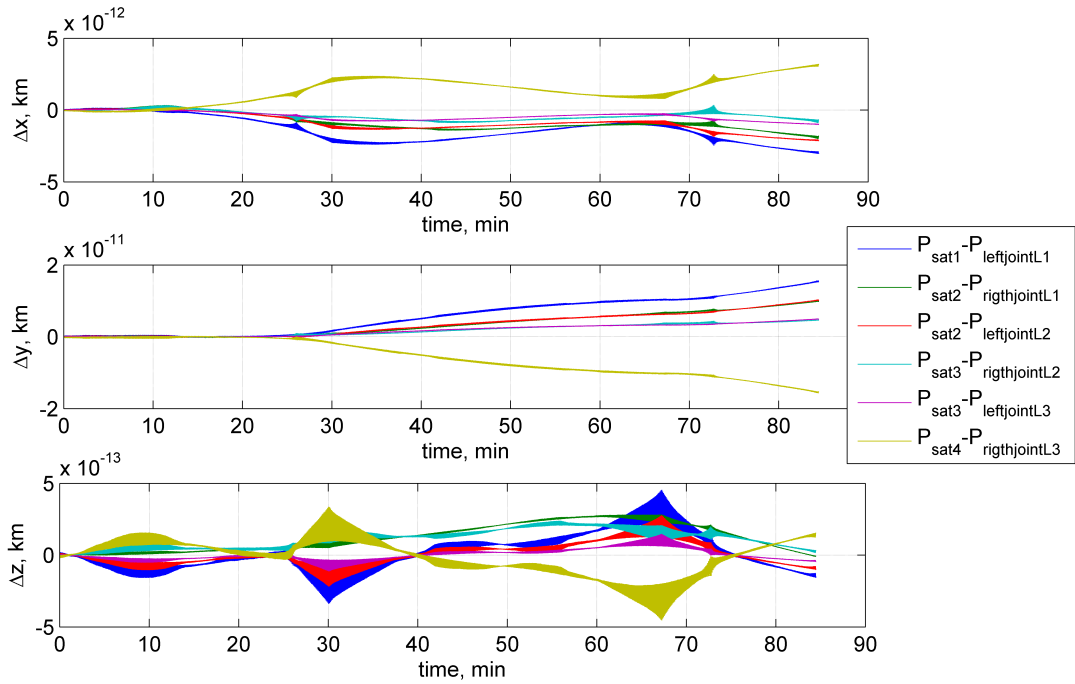


Figura 6.3: Distanze tra le posizioni dei satelliti della formazione e dei giunti del modello multibody associato

figura stessa i cerchi blu e le croci rosse sono perfettamente coincidenti, ciò è indicativo del fatto che la cosimulazione del modello multibody e del moto in formazione forzato dalle azioni di controllo calcolate a partire dai risultati del modello multibody, produce la stessa evoluzione del sistema avvalorando la tesi dell'equivalenza delle due metodologie di analisi e controllo.

La dimostrazione numerica dell'equivalenza è avvalorata anche dalla Fig.6.3 in cui sono stati rappresentati gli andamenti temporali delle distanze (per componente) tra le posizioni degli estremi dei link del modello multibody e le posizioni occupate dai satelliti. Gli errori così ottenuti sono essenzialmente dovuti agli errori fatti durante l'integrazione numerica, come si evince anche dall'incremento di tali errori nel tempo. Tale divergenza nel tempo è un problema ben noto e può essere risolto adottando un metodi di stabilizzazione numerica come ad esempio il metodo di Baumgarte [7].

Il moto di librazione risultante è rappresentabile ad esempio mediante l'adozione di una rappresentazione dell'assetto dei link virtuali con angoli di Eulero 3-(1)-3, come rappresentato in Fig.6.4.

I vincoli di distanza fissa tra le piattaforme si traducono in vincoli espressi dall'Eq.5.39 per ogni link equivalente, a cui si aggiungono i vincoli di giunto sferico espressi dall'Eq.5.38: a tali vincoli corrispondono le relative reazioni vincolari.

In Fig.6.5 sono rappresentati gli andamenti temporali delle reazioni dovuti al vincolo di lunghezza fissa del link. Tali reazioni si espletano lungo la direzione dei 3 link presenti nel sistema equivalente e, data la simmetria del sistema gli andamenti delle reazioni applicate

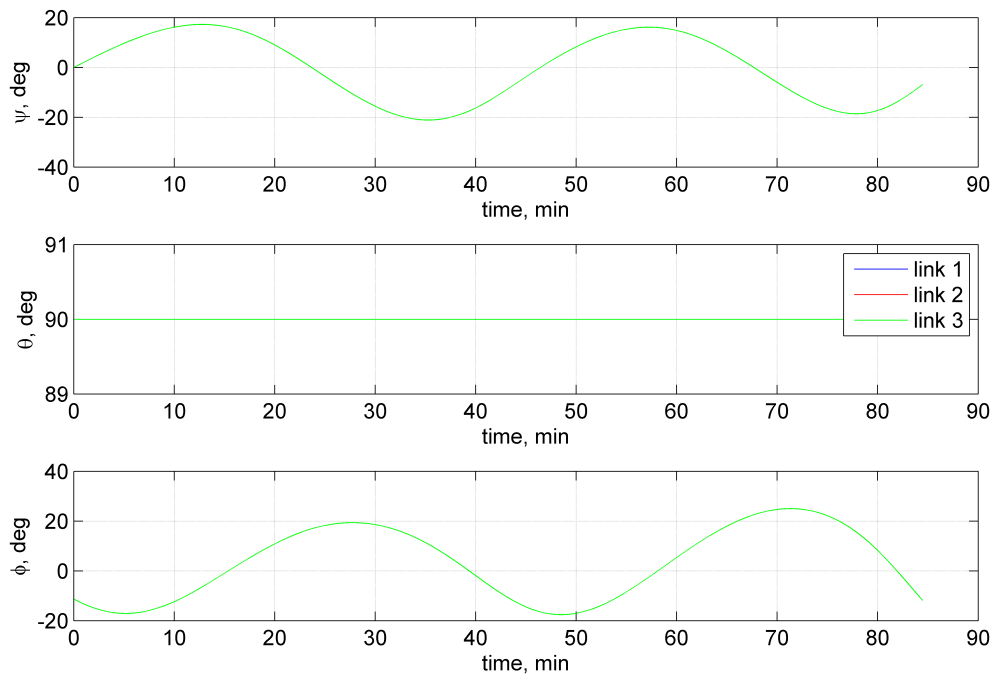


Figura 6.4: Angoli di Eulero 3-(1)-3 rappresentanti l'assetto dei link del modello multibody rispetto al riferimento orbitale

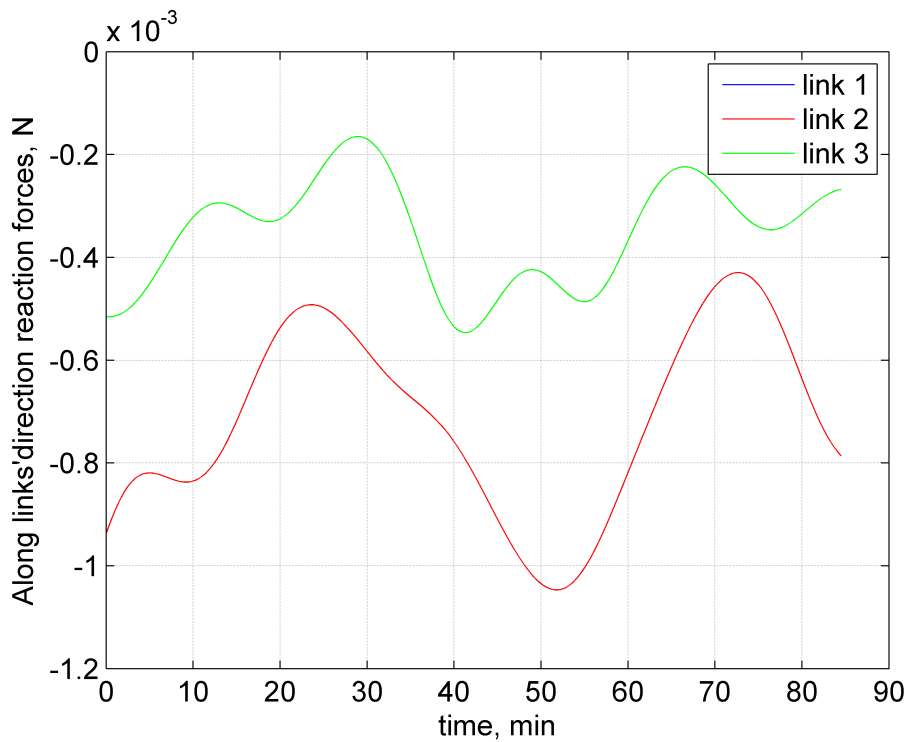


Figura 6.5: Reazioni vincolari agenti lungo i link virtuali dovuti alla condizione di distanza costante tra le piattaforme

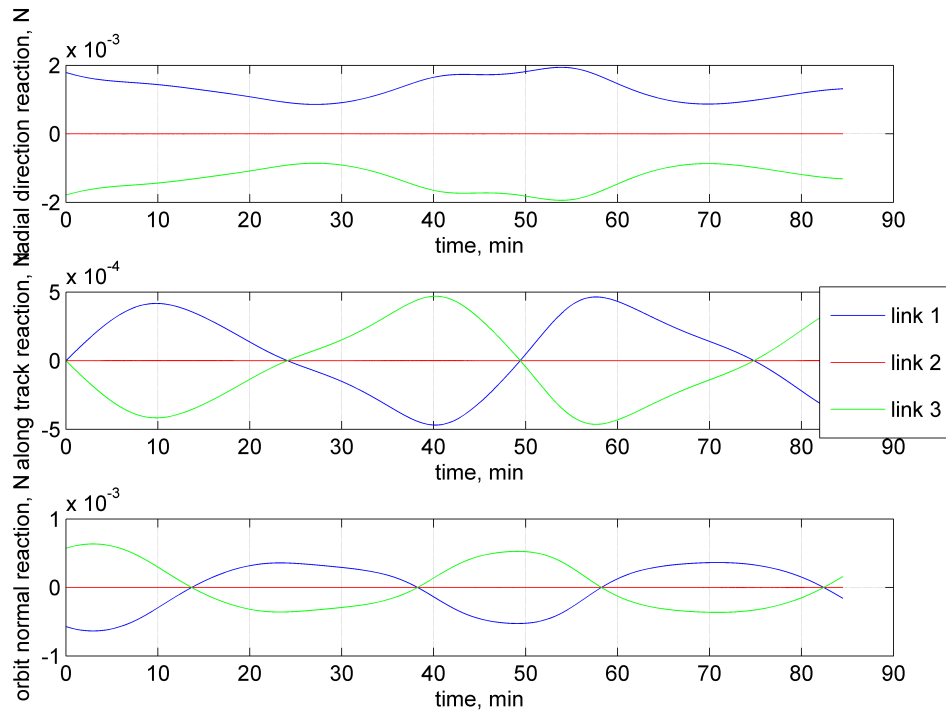


Figura 6.6: Reazioni vincolari dovute ai giunti sferici

al link 1 ed al link3 (i 2 link agli estremi del sistema) si sovrappongono perfettamente.

In Fig.6.6 sono rappresentate le componenti delle reazioni vincolari dovute all'imposizione dei vincoli di giunti sferici che collegano i link del multibody equivalente. Come possiamo vedere dalla figura, i 2 link estremi sono soggetti ad azioni speculari data la simmetria del sistema.

In Fig.6.7 sono state rappresentati gli andamenti delle spinte da applicare ai satelliti della formazione in modo da far evolvere questa allo stesso modo del sistema multibody associato. Tali andamenti sono stati ottenuti mediante l'applicazione delle reazioni in Fig.6.5 e Fig.6.6 nell'Eq.6.3.

6.4 Manovra di acquisizione della formazione

Una seconda possibile manovra può essere quella di riconfigurazione della formazione a partire da una configurazione casuale dei satelliti. In particolare lo scopo della manovra è quello di acquisire una configurazione totalmente allineata lungo l'orizzontale locale con l'ulteriore vincolo di mantenere un eguale distanza tra le piattaforme. Nel mondo multibody tale manovra comporta l'imposizione del vincolo nell'Eq.5.39, l'ovvia imposizione dell'Eq.5.38 e di una azione di controllo U applicata sui due giunti che compongono il sistema multibody in modo da permettere una rotazione dei link lungo la direzione voluta.

L'evoluzione del sistema è rappresentata in Fig.6.8 dove si nota come il moto dei satelliti segua perfettamente quello tracciato dal sistema multibody, senza violare i vincoli

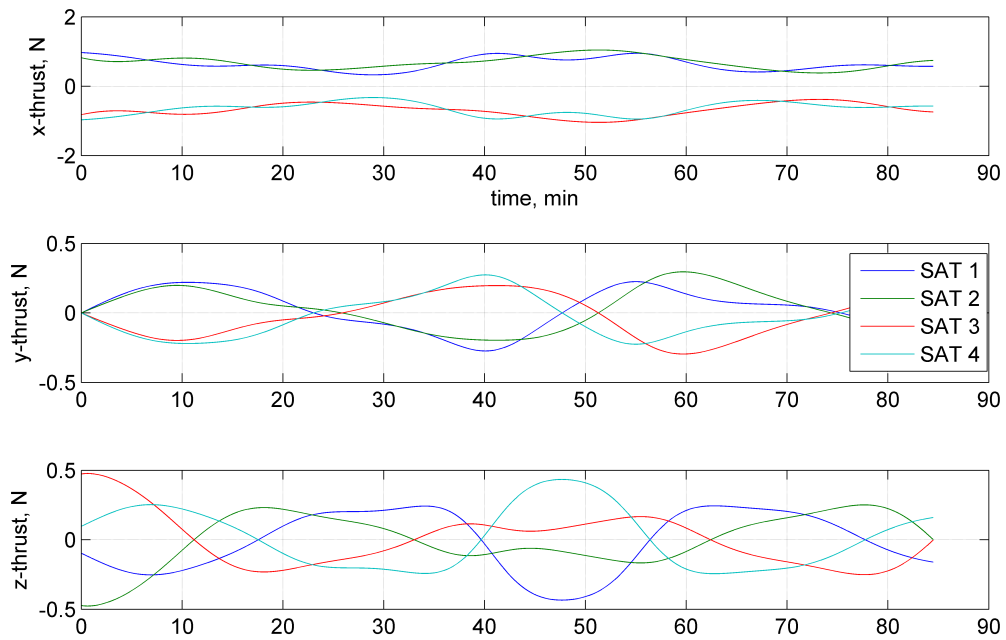


Figura 6.7: Spinte calcolate dal modello multibody da applicare ai satelliti della formazione per far eseguire il moto richiesto.

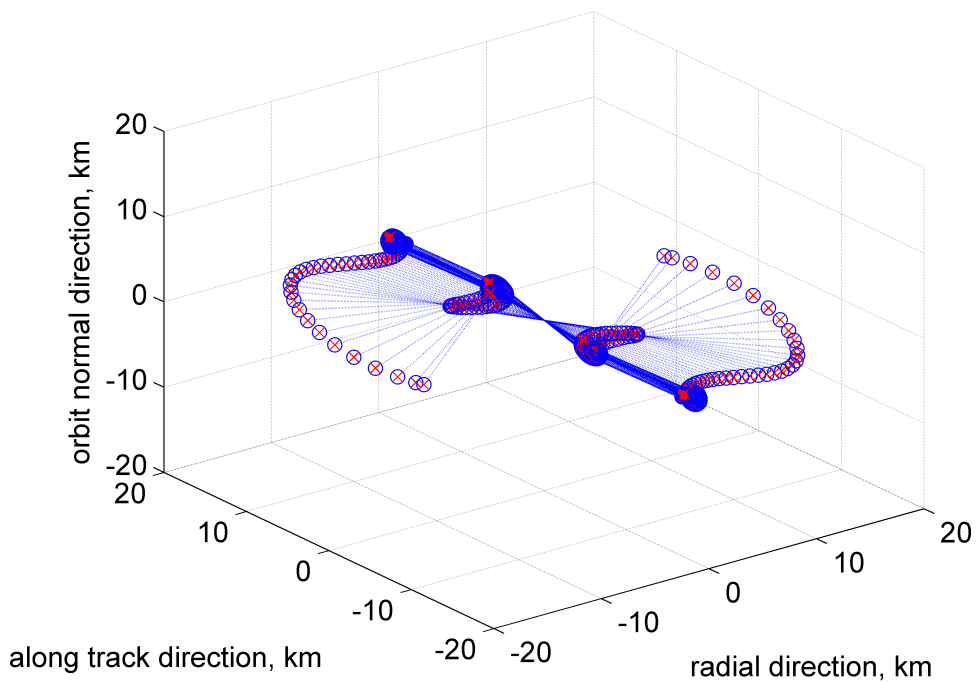


Figura 6.8: Snapshots della manovra di acquisizione della formazione

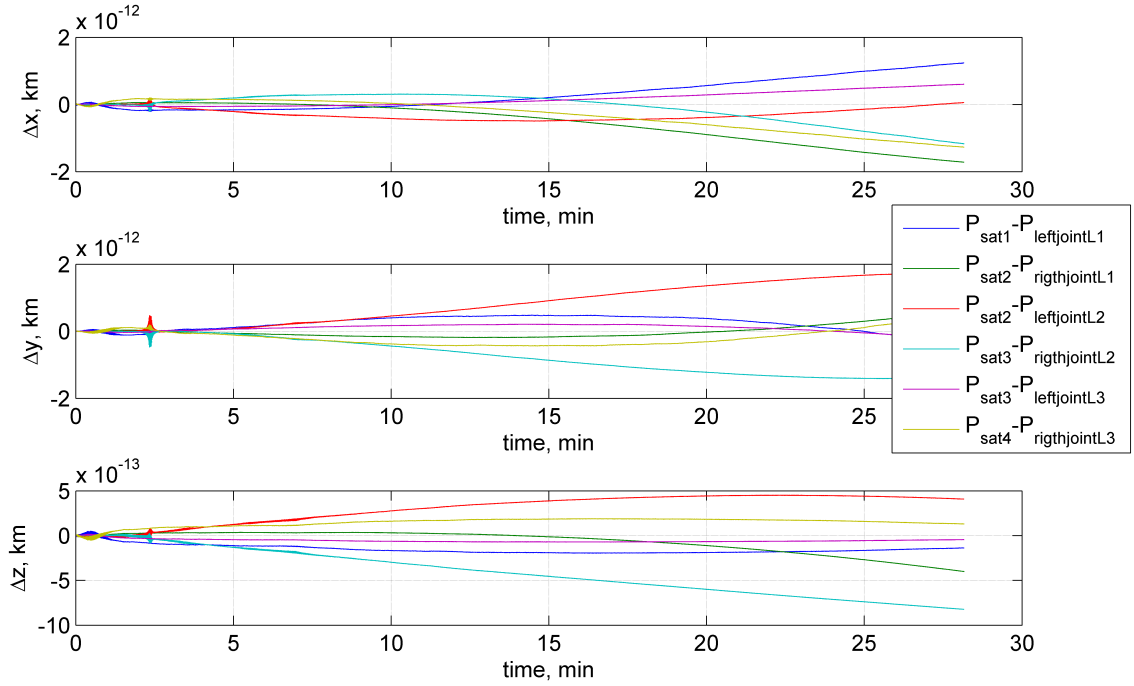


Figura 6.9: Distanze tra giunti del multibody e piattaforme della formazione nel caso di manovra di acquisizione

di distanza costante tra le piattaforme. Si nota altresì come di fatto le piattaforme centrali ruotino a formare due semicerchi e questo in quanto la posizione iniziale loro assegnata era invertita rispetto a quella di destinazione: l'imposizione del vincolo di distanza fissa evita intrinsecamente la possibilità di avere collisioni tra piattaforme che si devono scambiare di posto. Anche in questo caso c'è corrispondenza tra i giunti e le piattaforme, avvalorando la validità dell'Eq.6.3 anche in presenza di un controllo attivo agente sui giunti del modello multibody equivalente. Ciò è anche dimostrato dagli andamenti delle differenze tra giunti e piattaforme rappresentati in Fig.6.9.

L'allineamento lungo la verticale locale è raggiunto alla fine della manovra, come anche dimostrato dall'andamento degli angoli d'assetto dei 3 link virtuali che compongono il modello multibody equivalente, rappresentati in Fig.6.10: infatti i due angoli rappresentativi ψ e ϕ di ogni link convergono ai valori desiderati (rispettivamente di $\psi_{des} = 90^\circ$ e $\phi_{des} = 90^\circ$) rappresentanti l'allineamento dei link lungo l'orizzontale locale.

L'azione del controllo agente in corrispondenza dei giunti sferici produce coppie applicate ai link il cui andamento è rappresentato in Fig.6.11. Tale trend è dovuto al tipo di controllo implementato per ottenere la manovra che risulta essere un controllo proporzionale derivativo esplicitato dalla:

$$\begin{aligned} u_\psi &= -k_{p\psi}(\psi - \psi_{des}) - k_{d\psi}(\dot{\psi} - \dot{\psi}_{des}) \\ u_\phi &= -k_{p\phi}(\phi - \phi_{des}) - k_{d\phi}(\dot{\phi} - \dot{\phi}_{des}) \end{aligned} \quad (6.4)$$

dove $k_{p\psi}$, $k_{d\psi}$, $k_{p\phi}$ e $k_{d\phi}$ sono dei guadagni opportunamente scelti per far raggiungere il

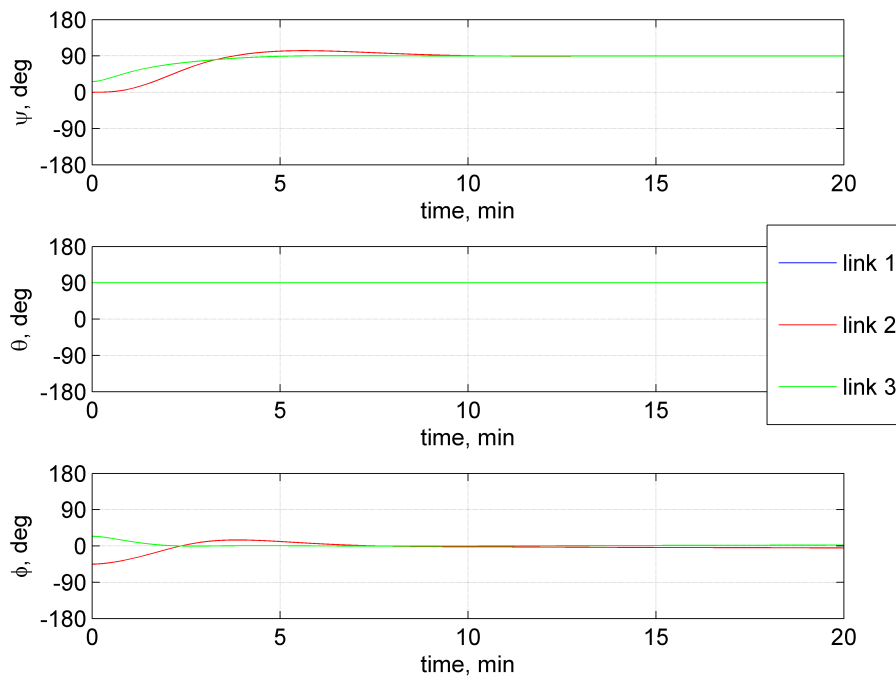


Figura 6.10: Assetto dei link equivalenti rispetto al riferimento LVLH nel caso di manovra di acquisizione

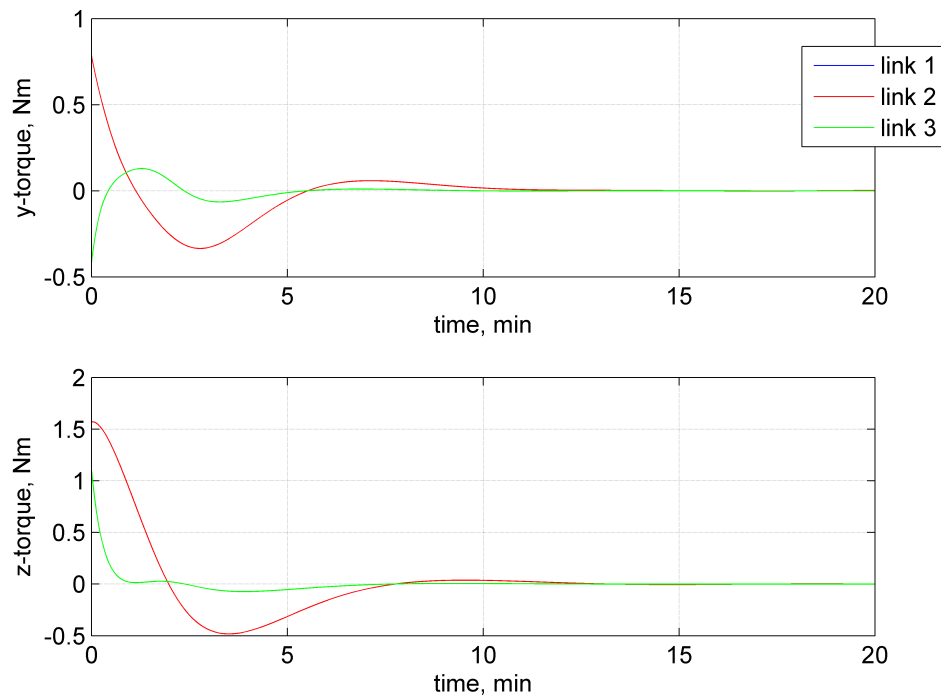


Figura 6.11: Intensità delle coppie applicate ai due giunti sferici per la manovra di riconfigurazione della formazione

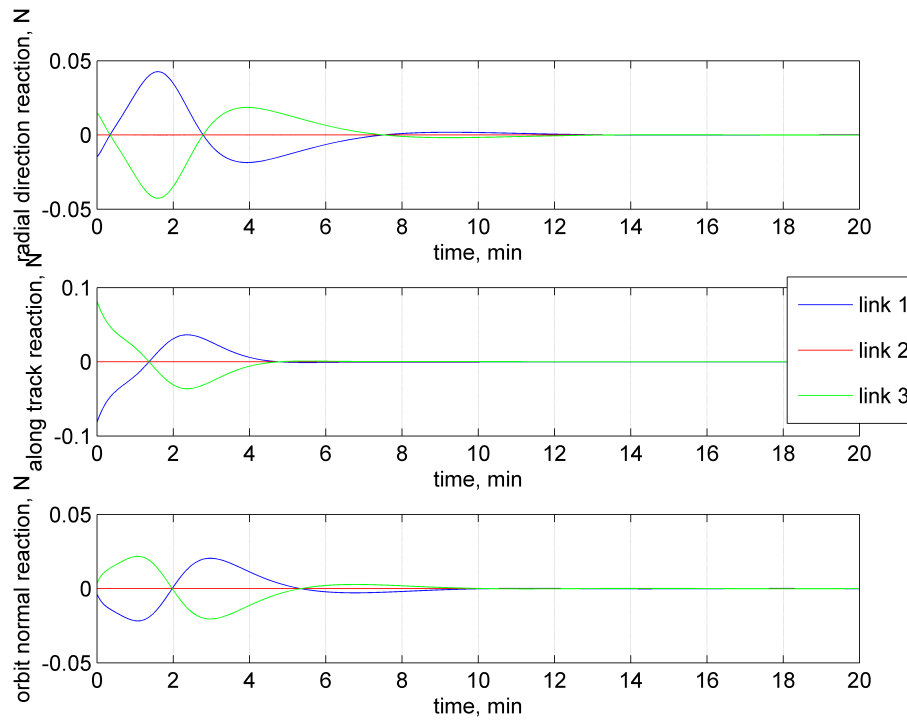


Figura 6.12: Forze di reazione vincolare nel caso di manovra di acquisizione.

target nel tempo prestabilito.

Parallelamente alle coppie agenti sui link sono esplicate anche le forze di reazione che sono rappresentate in Fig.6.12. Entrambe le forzanti concorrono nella definizione della spinte necessarie a far muovere i satelliti della formazione rappresentate in Fig.6.13.

6.5 Configurazioni a catena cinematica chiusa

Il modello multibody associato alle formazioni può essere esteso facilmente in modo tale da contemplare il caso di sistemi multibody la cui catena cinematica risulti essere chiusa.

In particolare, rispetto alle configurazioni presentate in precedenza, sarà possibile aggiungere un ulteriore vincolo di giunto sferico ai due estremi della catena cinematica. In questo modo si genera una configurazione della formazione chiusa a quadrilatero e con l'aggiunta del mantenimento delle distanze reciproche tra due piattaforme adiacenti nella catena, si può pensare di imporre un moto rotatorio a tutta la struttura intorno al centro della formazione F .

L'evoluzione del moto della formazione sotto l'imposizione dei suddetti vincoli è rappresentata in Fig.6.14, dove si possono notare gli effetti di distorsione dovuti alla presenza del gradiente di gravità. In particolare la perpendicolarità tra i link non è mantenuta durante l'evoluzione e si può verificare anche il rischio di avere collisioni tra le due piattaforme diametralmente opposte.

Per tale motivo, se si deve pensare ad una formazione che ciclicamente alterni la visibilità dei satelliti a terra, si può imporre un ulteriore vincolo di perpendicolarità tra i

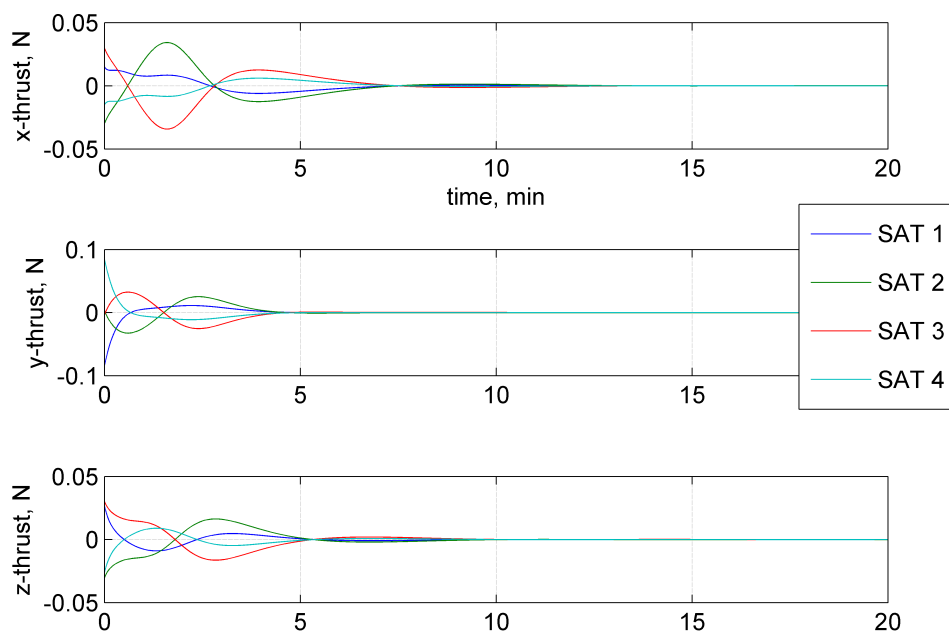
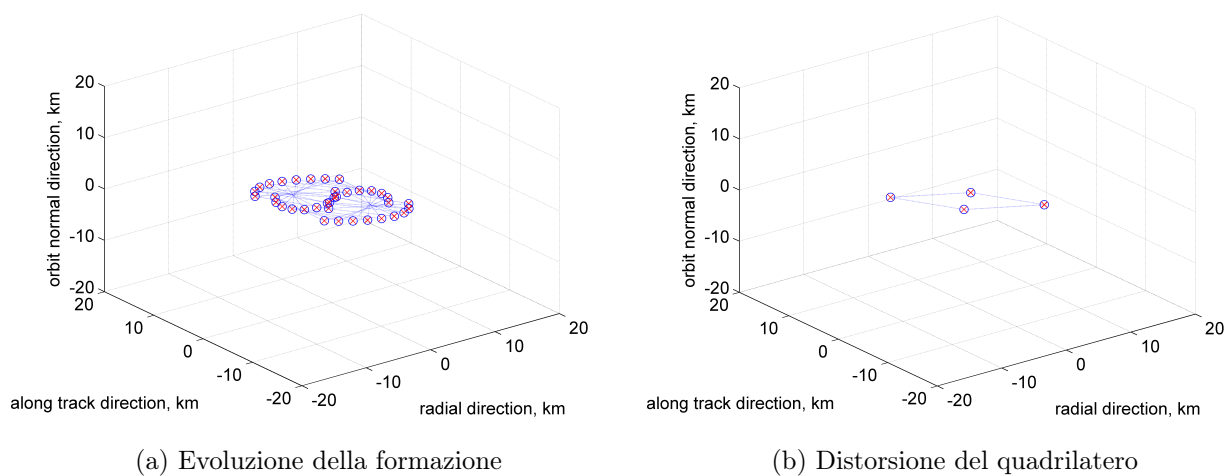


Figura 6.13: Spinte da applicare alle piattaforme della formazione per ottenere la manovra di acquisizione



(a) Evoluzione della formazione

(b) Distorsione del quadrilatero

Figura 6.14: Configurazione formazione chiusa a quadrilatero

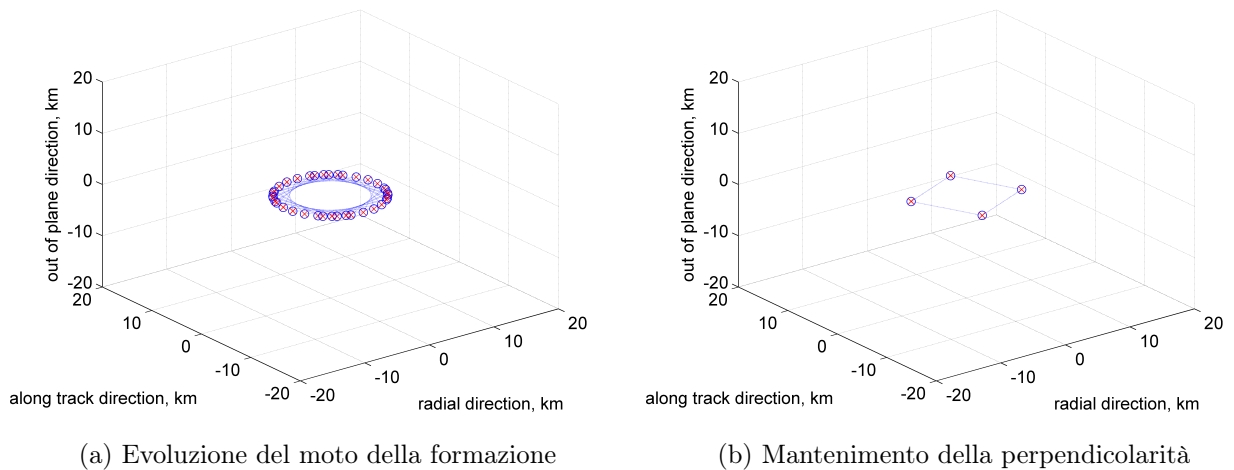


Figura 6.15: Configurazione chiusa della formazione col mantenimento della perpendicolarità tra i link

link, in modo tale che ogni piattaforma vede la successiva sotto un angolo retto formato col link alla precedente.

In Fig.6.15 è rappresentata l'evoluzione della formazione sotto l'azione di questa ulteriore condizione. La perpendicolarità tra i link è mantenuta per tutto il tempo della simulazione come visualizzato nella Fig.6.16, dove è stato effettuato il confronto con l'evoluzione temporale degli angoli del quadrilatero nel caso precedente.

6.6 Confronto con le tecniche di controllo classiche

E' stata fatta un'analisi comparativa in modo da valutare i benefici e gli svantaggi delle tecniche controllo basate sull'utilizzo di codici multibody rispetto agli schemi di controllo classici come l'Eq [86]. Il test case selezionato per questo studio è l'acquisizione di una formazione allineata lungo l'orizzontale locale partendo da una formazione perfettamente allineata lungo la verticale locale. Si è altresì imposto il vincolo per cui la manovra dovrà durare al massimo 10 minuti e la massima spinta consentita ai satelliti deve essere pari a 0.1N.

In Fig.6.17 sono rappresentate le traiettorie percorse dai satelliti della formazione durante la manovra di riconfigurazione. Entrambe le manovre consentono il raggiungimento della configurazione voluta in tempi pressoché uguali, ma il solo controllo LOR non permette il mantenimento del vincolo di distanza costante tra le piattaforme, cosa che invece è intrinsecamente soddisfatta con il controllo multibody.

Per quanto riguarda gli svantaggi in termini di spinte necessarie si può fare riferimento ai grafici in Fig.6.18, dove sono state plottate le spinte necessarie al compimento delle suddette manovre in termini di componenti riferite al riferimento LVLH. In particolare è possibile notare come la componente along-track (componente y) risulta essere sensibilmente più grande nel caso di controllo con schema basato su modelli multibody,

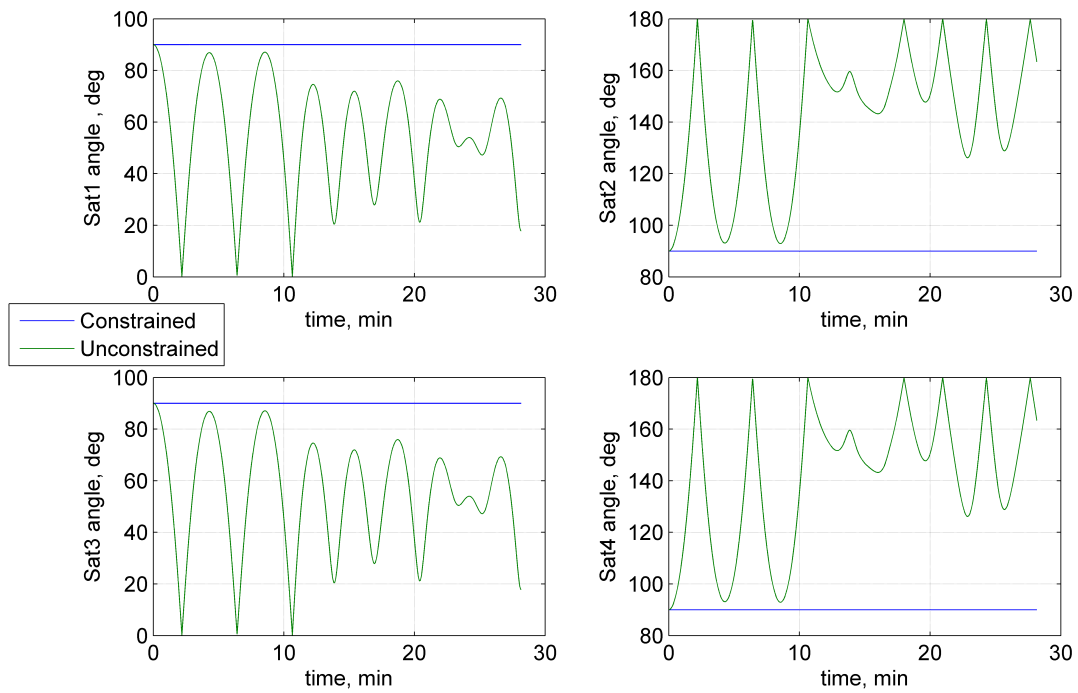


Figura 6.16: Angoli d'assetto relativo tra i link

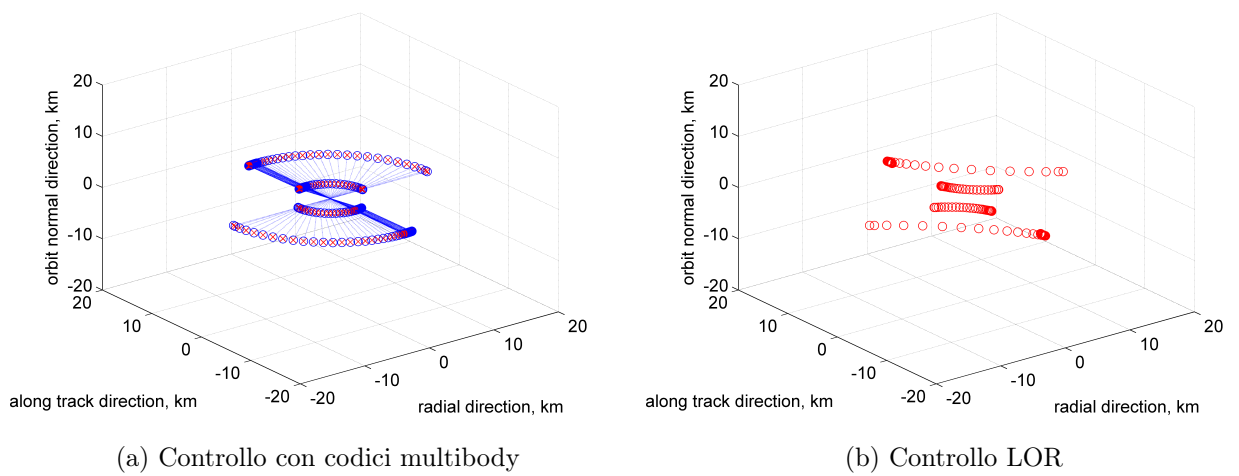


Figura 6.17: Comparazione tra le traiettorie percorse durante la manovra di riallineamento lungo l'orizzontale locale

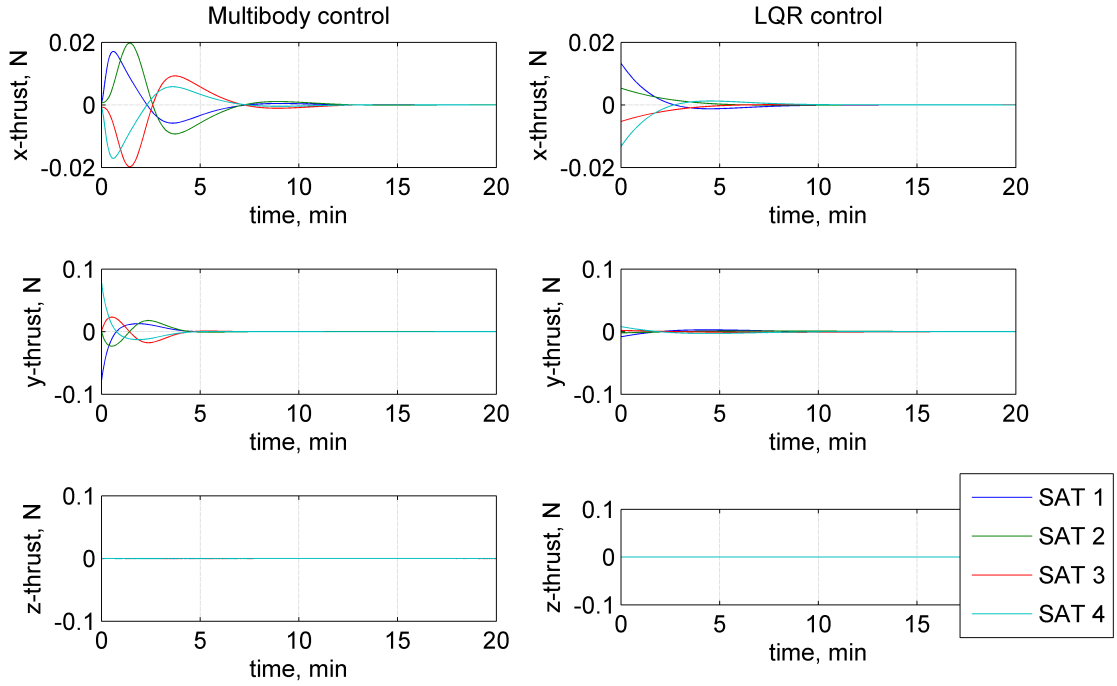


Figura 6.18: Comparazione delle spinte necessarie alla manovra di riconfigurazione

però la componente radiale della spinta risulta essere di intensità paragonabile con quella ottenuta con il controllo LQR.

6.7 Introduzione dell'elasticità nei links

La valutazione comparativa effettuata nella sezione precedente ha portato alla conclusione che l'utilizzo dello schema di controllo basato su modelli multibody è intrinsecamente più esoso in termini di spinte necessarie. Infatti il soddisfacimento del vincolo di una perfetta spaziatura tra le piattaforme per tutta la manovra risulta essere una condizione che produce spinte più grandi di quelle basate su un controllo classico. Tale vincolo oltretutto è poco realistico e difficilmente raggiungibile. Per questo motivo si è pensato di rilassare tale condizione mediante l'introduzione di link elastici nel modello multibody: in questo modo il vincolo durante lo svolgimento della manovra può essere parzialmente violato in modo da ridurre la spinta necessaria a comandare la formazione.

Tale risultato può essere ottenuto mediante la sostituzione dell'Eq. 5.39 con la seguente espressione:

$$\Psi_{,tt}^{elastic} = \ddot{\delta}_{ij} + 2\zeta\omega_n\dot{\delta}_{ij} + \omega_n^2\delta_{ij} = 0 \quad (6.5)$$

dove si è indicate con ζ il coefficiente di smorzamento e con ω_n la pulsazione naturale del vincolo.

In Fig.6.19 sono rappresentate le traiettorie e l'evoluzione del modello multibody che guida la formazione in cui è possibile notare la variazione di lunghezza dei link durante

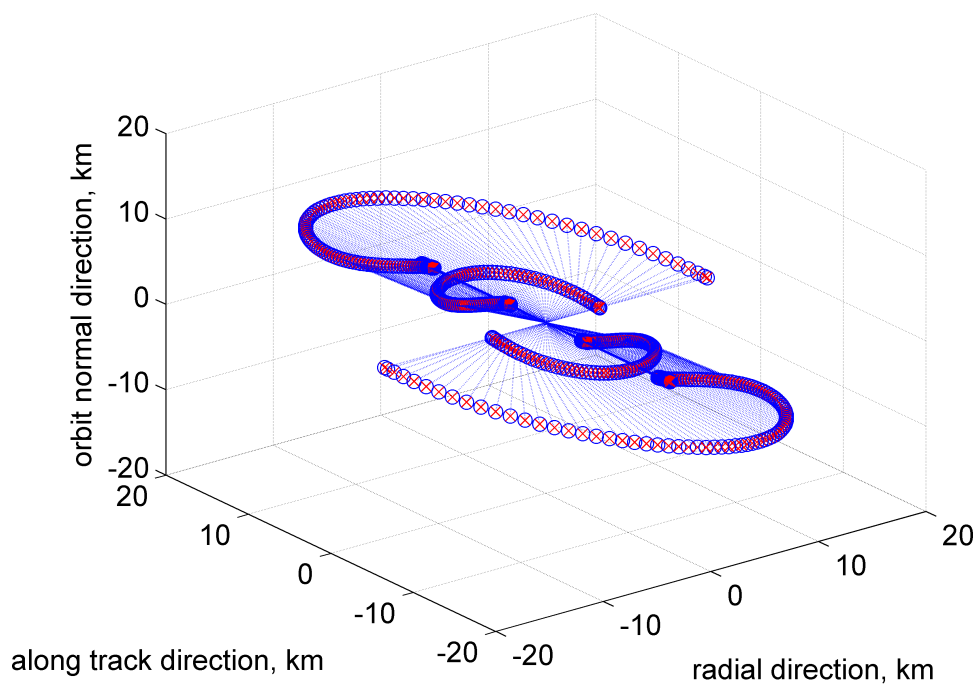


Figura 6.19: Evoluzione della manovra di riconfigurazione con link elastici

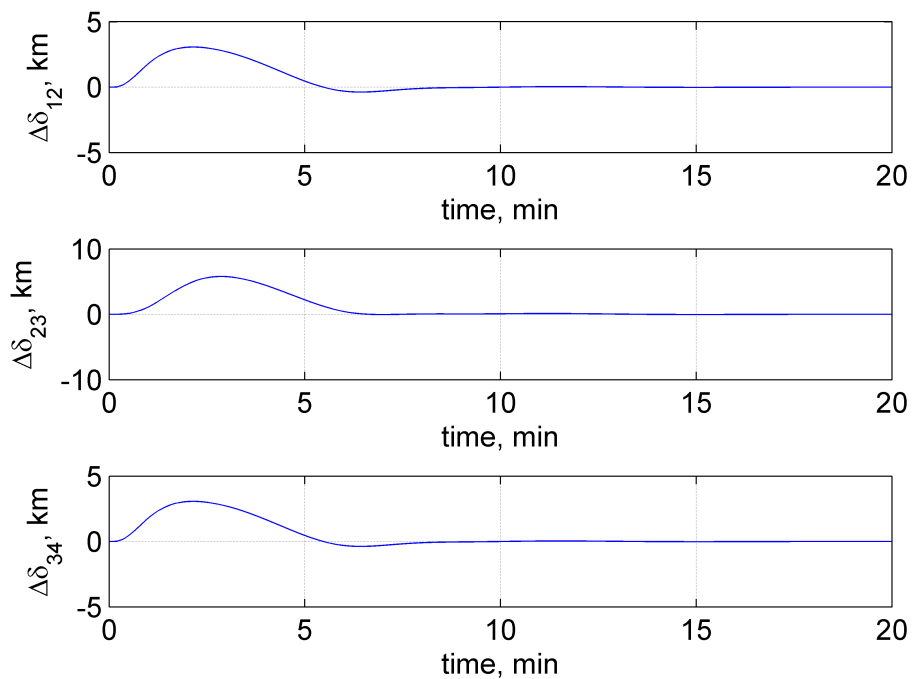


Figura 6.20: Variazione di lunghezza dei link durante la manovra

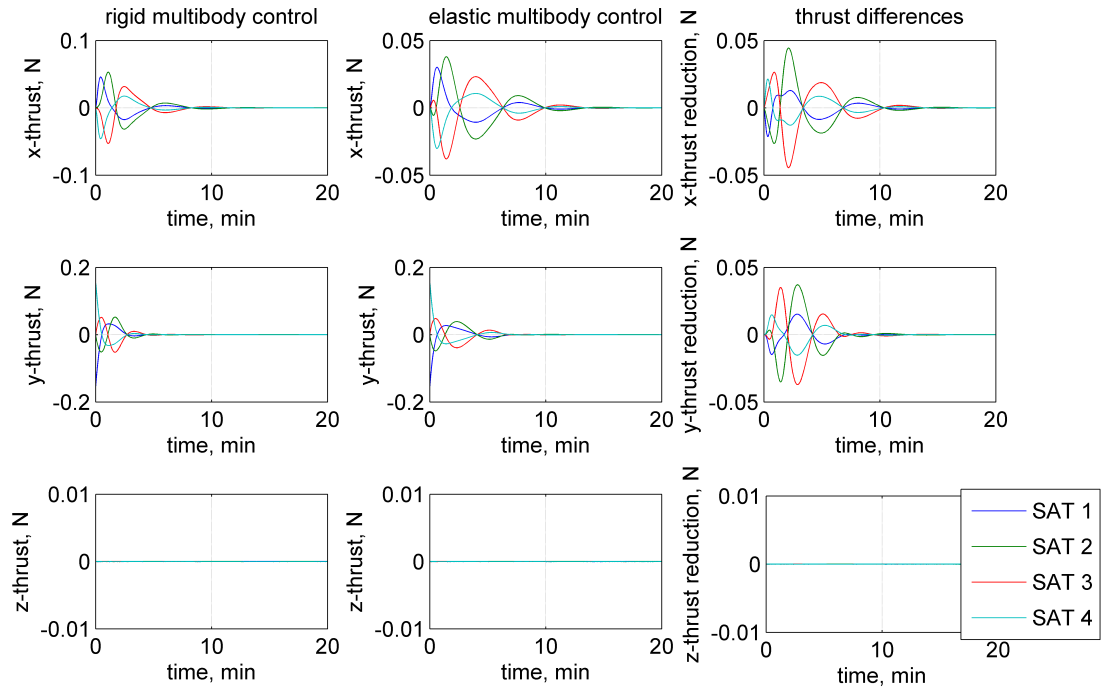


Figura 6.21: Comparazione tra le spinte necessarie alla manovra

la manovra e in Fig.6.20 sono plottati gli andamenti temporali delle estensioni dei link durante la manovra. In entrambe le figure è possibile notare come l'estensione dei link sia maggiore nella parte in cui agisce il gradiente di gravità, cioè nella prima fase della manovra, per poi ritornare a valori di lunghezza voluti e che rispettino il target imposto relativo alle distanze.

La Fig.6.21 presenta le spinte associate a tale manovra e le compara con il caso precedente totalmente rigido: come ci si aspetta il rilassamento della costante permette una sensibile riduzione della spinta e quindi una manovra più efficiente. I risultati così ottenuti sono dello stesso ordine di quelli ottenuti con il controllo LQR, ma oltretutto permettono intrinsecamente di evitare collisioni tra satelliti evitando di effettuare ulteriori check sul mantenimento di una distanza minima tra le piattaforme.

Capitolo 7

Coordinazione dell'assetto tra satelliti

Per completare l'analisi effettuata sul moto delle formazioni, ci si è occupati anche dei problemi relativi alla coordinazione dell'assetto tra due e più piattaforme che volano in formazione. Tale problema completa lo studio effettuato riguardante il volo in formazioni di satelliti, non limitandosi solo al moto orbitale dei satelliti, ma includendo anche problematiche relative all'assetto degli stessi.

Infatti la coordinazione del moto dei satelliti che volano in formazione non può limitarsi al solo caso traslazionale. Per una buona riuscita delle missioni si devono considerare anche i problemi relativi all'assetto delle piattaforme, ciò in ragione del fatto che generalmente le missioni che prevedono l'utilizzo di sistemi multipiattaforma contengono payloads distribuiti che devono essere opportunamente puntati in direzioni specifiche.

Il requisito di puntamento di un target risulta essere uno degli aspetti da tenere in considerazione, come del resto la coordinazione tra le piattaforme [8]: missioni come quelle interferometriche richiedono un'elevata accuratezza di coordinazione tra le piattaforme per il corretto funzionamento dello strumento interferometrico e può essere anche possibile il caso in cui due strumenti montati su piattaforme diverse siano puntati in modo tale da produrre un buon interferogramma pur non puntando al target voluto. Proprio per questo motivo il capitolo si apre definendo i requisiti per un corretto puntamento del target e per la coordinazione tra le piattaforme. Requisiti che spesso possono essere in contrasto tra di loro e che, attraverso un processo di ottimizzazione devono essere soddisfatti entrambi andando a minimizzare un indice di costo. L'analisi e l'ottimizzazione può essere fatta attraverso un approccio "classico", cioè andando a linearizzare il problema, oppure mediante tecniche di controllo non lineare come la risoluzione della State Dependent Riccati Equation [18].

7.1 Puntamento del target

La capacità di poter puntare in una direzione ben precisa dello spazio è una delle caratteristiche principali che si richiede alle attuali piattaforme spaziali. Sempre più strumenti scientifici e commerciali richiedono accuratezze di puntamento da parte del bus ospitante

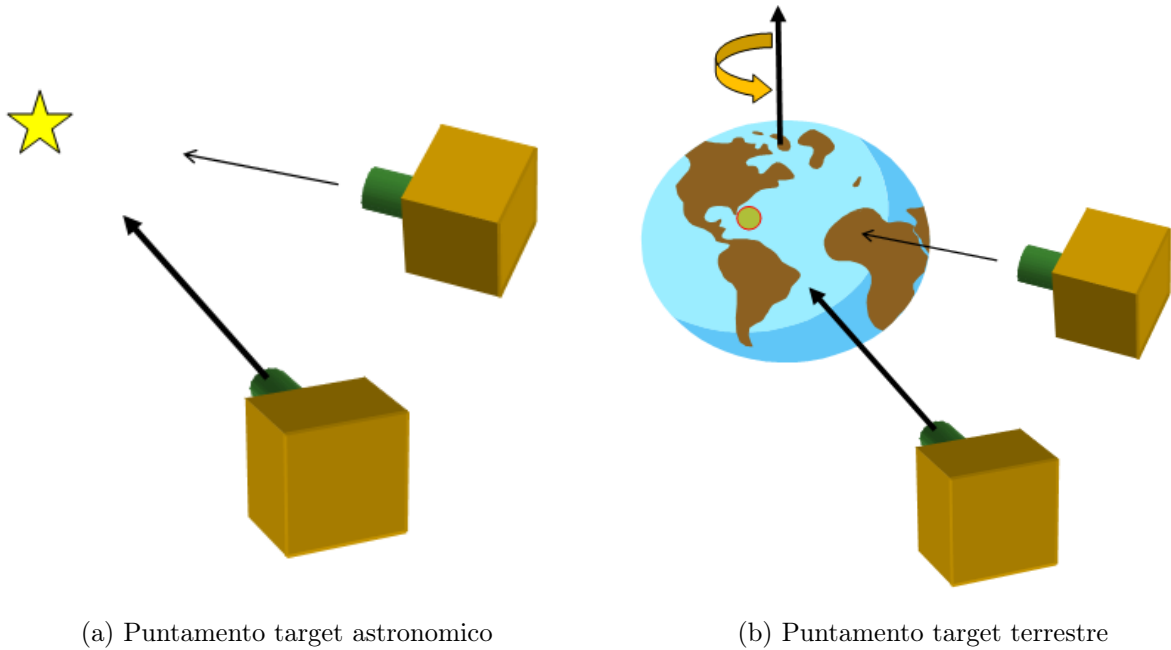


Figura 7.1: Puntamento del target

sempre più stringenti: si pensi al puntamento di sensori ottici e/o interferometrici che debbano osservare lo spazio profondo oppure a sistemi radar bistatici che debbano “osservare” le stesse porzioni di suolo terrestre, come mostrato in Fig.7.1.

La natura e lo stato cinematico del target influiscono in modo molto sensibile sul tipo e sulle modalità di puntamento possibili dalle piattaforme. In particolare nel caso di puntamento astronomico il target può pensarsi fisso nello spazio inerziale e le piattaforme si troveranno in rivoluzione intorno alla terra, viceversa il puntamento di una porzione specifica della superficie terrestre è caratterizzato dalla composizione di due movimenti: la rivoluzione delle piattaforme intorno alla terra e la rotazione stessa della terra.

Per poter trattare univocamente entrambi i problemi occorre definire alcune caratteristiche dello stato di moto del target. In particolare è possibile associare alla direzione che si deve puntare un quaternionione Q_T , rappresentante l’assetto target che le piattaforme devono raggiungere per poter individuare con i loro strumenti il target per cui è stata progettata la missione. Tale quaternionione rappresenta quindi un assetto del satellite rispetto ad un riferimento considerato inerziale, ad esempio si consideri il riferimento ECI. Sempre riferito allo stesso riferimento inerziale è possibile definire il quaternionione rappresentante l’assetto attuale del satellite e lo si nominerà Q_i , dove il pedice i sta ad indicare che l’assetto è della i -esima piattaforma. Quindi sarà possibile definire un quaternionione rappresentante l’errore di puntamento della piattaforma i -esima rispetto al target mediante la seguente relazione:

$$Q_{iT} = Q_T^* \otimes Q_i \quad (7.1)$$

dove si è indicato con il simbolo \otimes il prodotto tra quaternioni¹ e con \mathcal{Q}_T^* il quaternioni coniugato di quello rappresentante l'assetto target².

Si potrà considerare anche la velocità angolare relativa tra il target ed il satellite. In particolare si può definire un vettore velocità angolare del target rispetto al riferimento inerziale ${}^I\vec{\omega}_{TI}$ ed una velocità angolare del satellite sempre rispetto al riferimento inerziale ${}^I\vec{\omega}_{iI}$, quindi la velocità angolare relativa del satellite rispetto target è data dalla differenza:

$${}^I\vec{\omega}_{iT} = {}^I\vec{\omega}_{iI} - {}^I\vec{\omega}_{TI} \quad (7.2)$$

dove tutte le componenti sono riferite al riferimento inerziale come indicato dall'apice preposto alle variabili.

Si potrà dire che il satellite abbia correttamente puntato il target quando il quaternioni relativo \mathcal{Q}_{iT} risulta essere prossimo a quello identità³ e la velocità relativa tra le due terne risulta essere pressoché nulla.

Occorre ricordare che la dinamica del satellite risulta essere di tipo non lineare e, riferendoci ad un riferimento centrale d'inerzia solidale al corpo del satellite, le equazioni della dinamica del satellite possono essere sviluppate ottenendo [99]:

$${}^i\dot{\vec{\omega}}_{iI} = {}^i\mathbf{J}_i^{-1} \cdot \left[-{}^i\vec{\omega}_{iI} \times ({}^i\mathbf{J}_i \cdot {}^i\vec{\omega}_{iI}) + {}^i\vec{M}_i \right] \quad (7.3)$$

dove si sono indicati con ${}^i\mathbf{J}_i$ il diadico d'inerzia dell'*i*-esima piattaforma riferito al riferimento solidale alla piattaforma e con ${}^i\vec{M}_i$ le coppie applicate alla stessa.

Esplicitando l'Eq.7.2 rispetto ad ${}^I\vec{\omega}_{iI}$ si può sostituire tale espressione nell'Eq.7.3, per così ottenere l'espressione della dinamica relativa tra piattaforma e target:

$$\begin{aligned} {}^i\dot{\vec{\omega}}_{iT} = & -{}^i\dot{\vec{\omega}}_{TI} - {}^i\mathbf{J}_i^{-1} \cdot \left[{}^i\vec{\omega}_{TI} \times ({}^i\mathbf{J}_i \cdot {}^i\vec{\omega}_{TI}) + {}^i\vec{\omega}_{TI} \times ({}^i\mathbf{J}_i \cdot {}^i\vec{\omega}_{iT}) \right] \\ & - {}^i\mathbf{J}_i^{-1} \cdot \left[{}^i\vec{\omega}_{iT} \times ({}^i\mathbf{J}_i \cdot {}^i\vec{\omega}_{TI}) + {}^i\vec{\omega}_{iT} \times ({}^i\mathbf{J}_i \cdot {}^i\vec{\omega}_{iT}) - {}^i\vec{M}_i \right] \end{aligned} \quad (7.4)$$

¹L'operazione prodotto tra due quaternioni \mathcal{Q}_1 e \mathcal{Q}_2 restituisce un quaternioni \mathcal{Q}_3 le cui componenti sono date dalla seguente relazione:

$$\mathcal{Q}_3 = \mathcal{Q}_1 \otimes \mathcal{Q}_2 = \begin{bmatrix} \vec{q}_1 \\ q_1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \vec{q}_2 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1\vec{q}_2 + q_2\vec{q}_1 + \vec{q}_1 \times \vec{q}_2 \\ q_1q_2 - \vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2 \end{bmatrix}$$

²Si definisce quaternioni coniugato \mathcal{Q}^* il quaternioni che ha stessa parte scalare e parte parte vettoriale cambiata di segno del quaternioni \mathcal{Q} :

$$\mathcal{Q}^* = \begin{bmatrix} \vec{q} \\ q_4 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} -\vec{q} \\ q_4 \end{bmatrix}$$

³Si definisce come quaternioni identità \mathcal{Q}_I quel quaternioni tale da verificare la seguente relazione:

$$\mathcal{Q}_I \otimes \mathcal{Q}_A = \mathcal{Q}_A$$

in particolare si ha che:

$$\mathcal{Q}_I = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ 1 \end{bmatrix}$$

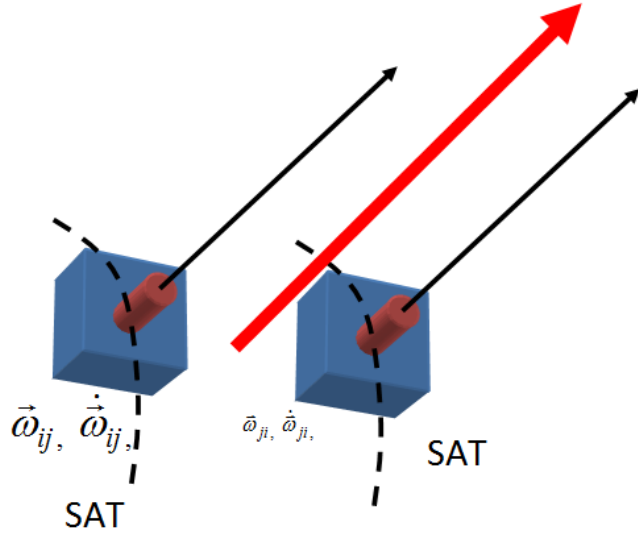


Figura 7.2: Coordinazione dell'assetto tra due piattaforme

dove ${}^i\dot{\vec{\omega}}_{TI}$ e ${}^i\vec{\omega}_{TI}$ sono rispettivamente le accelerazioni e velocità angolari del target rispetto all'inertiale, espresse in componenti riferite al riferimento della i -esima piattaforma, mentre ${}^i\dot{\vec{\omega}}_{iT}$ e ${}^i\vec{\omega}_{iT}$ sono l'accelerazione e la velocità angolare relative le cui componenti sono espresse nel riferimento della stessa piattaforma.

L'integrazione dell'Eq.7.4 permette di trovare la velocità angolare del satellite rispetto al target e tale velocità angolare può essere usata per il computo del quaternione dell'assetto relativo tra la piattaforma ed il target, infatti si ha:

$$\dot{Q}_{iT} = \frac{1}{2} Q_{iT} \otimes \Omega_{iT} \quad (7.5)$$

dove Ω_{iT} rappresenta il quaternione associato alla velocità angolare relativa ${}^i\vec{\omega}_{iT}$ che può essere così definito:

$$\Omega_{iT} = \begin{bmatrix} {}^i\vec{\omega}_{iT} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

7.2 Coordinazione dell'assetto tra satelliti

La coordinazione dell'assetto tra satelliti è di fondamentale importanza quando, per il corretto funzionamento degli strumenti del payload è necessario che entrambe le piattaforme puntino la stessa direzione e/o direzioni prestabilite con requisiti molto stringenti per il successo delle operazioni. In Fig. 7.2 è rappresentata la condizione di puntamento coordinato di entrambe le piattaforme in una direzione prestabilita.

Anche in questo caso si possono definire le grandezze che misurano gli errori di coordinazione dell'assetto. In particolare considerando l'assetto della piattaforma i -esima Q_i rispetto all'assetto assunto dalla piattaforma j -esima Q_j si può definire il quaternione di assetto relativo Q_{ij} nel seguente modo:

$$\mathcal{Q}_{ij} = \mathcal{Q}_j^* \otimes \mathcal{Q}_i \quad (7.7)$$

e per quanto riguarda la velocità angolare relativa tra le due piattaforme:

$${}^I\vec{\omega}_{ij} = {}^I\vec{\omega}_{iI} - {}^I\vec{\omega}_{jI} \quad (7.8)$$

dove tutte le velocità angolari sono riferite allo stesso riferimento, cioè in questo caso quello inerziale.

In questo caso la dinamica relativa è tra due piattaforme, di cui ognuna è governata dall'Eq.7.4. Tuttavia esplicitando l'Eq.7.8 rispetto ad ${}^I\vec{\omega}_{iI}$ e sostituendo tale espressione all'interno dell'Eq.7.3 si ottiene:

$$\begin{aligned} {}^i\dot{\vec{\omega}}_{ij} = & -{}^i\dot{\vec{\omega}}_{jI} - {}^i\mathbf{J}_i^{-1} \cdot [{}^i\vec{\omega}_{jI} \times ({}^i\mathbf{J}_i \cdot {}^i\vec{\omega}_{jI}) + {}^i\vec{\omega}_{jI} \times ({}^i\mathbf{J}_i \cdot {}^i\vec{\omega}_{ij})] \\ & - {}^i\mathbf{J}_i^{-1} \cdot [{}^i\vec{\omega}_{ij} \times ({}^i\mathbf{J}_i \cdot {}^i\vec{\omega}_{jI}) + {}^i\vec{\omega}_{ij} \times ({}^i\mathbf{J}_i \cdot {}^i\vec{\omega}_{ij}) + {}^i\vec{M}_i] \end{aligned} \quad (7.9)$$

da cui se si sostituisce al termine ${}^i\dot{\vec{\omega}}_{jI}$ l'espressione riferita al satellite j-esimo dell'Eq.7.3, si ottiene:

$$\begin{aligned} {}^i\dot{\vec{\omega}}_{ij} = & {}^i\mathbf{J}_j^{-1} \cdot [{}^i\vec{\omega}_{jI} \times ({}^i\mathbf{J}_j \cdot {}^i\vec{\omega}_{jI})] - {}^i\mathbf{J}_i^{-1} \cdot [{}^i\vec{\omega}_{jI} \times ({}^i\mathbf{J}_i \cdot {}^i\vec{\omega}_{jI}) + {}^i\vec{\omega}_{jI} \times ({}^i\mathbf{J}_i \cdot {}^i\vec{\omega}_{ij})] \\ & - {}^i\mathbf{J}_i^{-1} \cdot [{}^i\vec{\omega}_{ij} \times ({}^i\mathbf{J}_i \cdot {}^i\vec{\omega}_{jI}) + {}^i\vec{\omega}_{ij} \times ({}^i\mathbf{J}_i \cdot {}^i\vec{\omega}_{ij})] - {}^i\mathbf{J}_j^{-1} \cdot {}^i\vec{M}_j + {}^i\mathbf{J}_i^{-1} \cdot {}^i\vec{M}_i \end{aligned} \quad (7.10)$$

in cui ${}^i\mathbf{J}_j$, ${}^i\vec{\omega}_{jI}$ e ${}^i\vec{M}_j$ sono rispettivamente la diade d'inerzia, la velocità angolare e le coppie applicate al satellite j-esimo riferite però alla terna corpo del satellite i-esimo. L'espressione nell'Eq.7.10 è dipendente dunque da entrambi gli stati dei satelliti e prende in considerazione le diadi d'inerzia e le coppie applicate ad entrambi i satelliti. Di fatto l'Eq.7.10 rappresenta la dinamica relativa della piattaforma i-esima rispetto alla piattaforma j-esima e tale espressione dovrà essere utilizzata per la coordinazione della prima piattaforma rispetto alla seconda.

L'integrazione dell'Eq.7.10 permette di trovare la velocità angolare del satellite rispetto al target e tale velocità angolare può essere usata per il computo del quaternion dell'assetto relativo tra la piattaforma i-esima ed la piattaforma j-esima, infatti si ha:

$$\dot{\mathcal{Q}}_{ij} = \frac{1}{2} \mathcal{Q}_{ij} \otimes \Omega_{ij} \quad (7.11)$$

dove Ω_{ij} rappresenta il quaternion associato alla velocità angolare relativa ${}^i\vec{\omega}_{ij}$ tra le due piattaforme, che può essere così definito:

$$\Omega_{ij} = \begin{bmatrix} {}^i\vec{\omega}_{ij} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

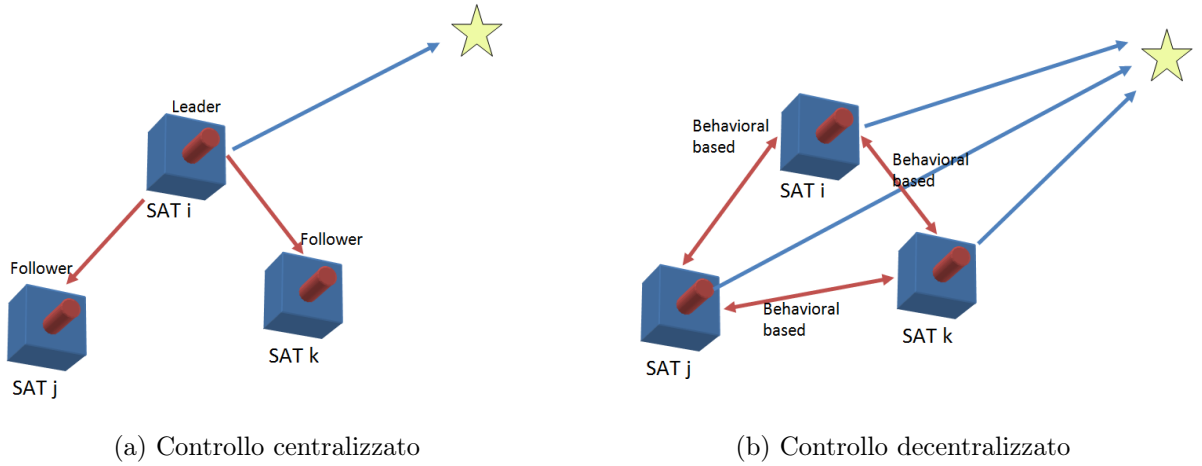


Figura 7.3: Strategie di controllo dell'assetto

7.3 Schemi di controllo classico per il tracking del target e la coordinazione dell'assetto

La metodologia di controllo e coordinazione dell'assetto tra diverse piattaforme è stata già in passato analizzata. Le strategie di controllo che si sono sviluppate si possono dividere in:

1. strategie di controllo centralizzate: in cui uno o più satelliti, identificati come Leader, rappresentano il riferimento su cui si basa il controllo d'assetto per gli altri satelliti, identificati come Followers. In questa architettura i Leader rappresentano agenti di controllo globale, determinando e fornendo le istruzioni di controllo per tutte le altre unità che costituiscono il sistema.
2. strategie di controllo decentralizzate: in cui ogni unità che costituisce la formazione è un agente di controllo locale e determina il proprio assetto in base all'assetto relativo tra i satelliti ad esso interconnessi.

In Fig.7.3 sono illustrate le suddette strategie di controllo.

Entrambi i problemi esposti nelle sezioni 7.1 e 7.2 possono essere trattati mediante un unico approccio: lo schema di controllo proposto in [90] è quello di cancellare completamente la dinamica nonlineare (*feedback linearization*) e quindi applicare un controllo proporzionale derivativo basato sulle "distanze" tra assetto attuale della piattaforma rispetto all'assetto target ed all'assetto della piattaforma con cui si vuole stabilire un legame di coordinazione. In pratica la legge di controllo da applicare ad ogni i -esima piattaforma della formazione è del tipo :

$$\vec{M}_i = \vec{M}_i^{fl} + \vec{M}_i^t + \vec{M}_i^c \quad (7.13)$$

dove \vec{M}_i^{fl} , \vec{M}_i^t , \vec{M}_i^c sono le coppie necessarie rispettivamente per effettuare la linearizzazione mediante controreazione, per puntare il target e per coordinarsi con gli altri satelliti

. Il contributo dovuto alla feedback linearizzazione viene calcolato rispetto al moto rispetto al riferimento inerziale e si cancella anche l'eventuale accelerazione angolare del target rispetto al riferimento inerziale [35]:

$${}^i\vec{M}_i^{fl} = {}^i\vec{\omega}_{iI} \times ({}^i\mathbf{J}_i \cdot {}^i\vec{\omega}_{iI}) + {}^i\mathbf{J}_i \cdot \dot{{}^i\vec{\omega}_{iI}} \quad (7.14)$$

ed un controllo proporzionale derivativo del tipo:

$$\vec{M}_i^t = -k_p^{iT} \text{sign}(q_{4-iT}) \vec{q}_{iT} - k_d^{iT} \vec{\omega}_{iT} \quad (7.15)$$

assicura la convergenza al target e la cancellazione di eventuali disturbi se i guadagni sono scelti opportunamente. Tra i tanti modi che permettono il raggiungimento dell'assetto del target, se si rende necessario coordinare l'assetto di tale piattaforma rispetto ad altre che compongono la flotta in formazione, è necessario stabilire un legame anch'esso proporzionale derivativo per ogni interconnessione presente con le altre piattaforme. In particolare, l'azione dovuta alla coordinazione con le altre piattaforme agente sulla piattaforma i-esima può essere esplicitata come segue:

$$\vec{M}_i^c = - \sum_{j=1}^N k_p^{ij} \text{sign}(q_{4-ij}) \vec{q}_{ij} - \sum_{j=1}^N k_d^{ij} \vec{\omega}_{ij} \quad (7.16)$$

E' da notare che, sia nell'Eq.7.15 che nell'Eq.7.16 il controllo proporzionale è inerente alla parte vettoriale del quaternioni relativo moltiplicato per la funzione segno della relativa parte scalare⁴, ciò è in accordo con [99], infatti in questo modo si elimina l'ambiguità di rappresentazione dell'assetto ottenuta con i quaternioni e si sceglie quella soluzione che fa convergere il sistema a 0.

Tale modellazione delle azioni di controllo può esser vista come cumulativa di entrambe le architetture di controllo presentate in precedenza in quanto, settando opportunamente i guadagni k_p^{iT} e k_d^{iT} si può decidere se e in che modo una piattaforma insegue il target, mentre settando i guadagni k_p^{ij} e k_d^{ij} si può decidere il grado di interconnessione tra la piattaforma i-esima e la generica piattaforma j-esima. In particolare si avrà che :

1. nell'*architettura leader-follower*: il satellite leader ha i guadagni relativi al target definiti positivi ($k_p^{iT} > 0$ e $k_d^{iT} > 0$), mentre non tiene in considerazione lo stato degli altri satelliti presenti nella formazione ($k_p^{ij} = 0$ e $k_d^{ij} = 0$). Viceversa i satelliti followers basano totalmente il loro controllo sullo stato del loro leader ($k_p^{ij} > 0$ e $k_d^{ij} > 0$, dove in questo caso j è il leader) non potendo o comunque non utilizzando direttamente gli errori rispetto al target ($k_p^{iT} = 0$ e $k_d^{iT} = 0$).

⁴Si definisce funzione segno di x:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} +1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

2. nell'*architettura behavior based*: ogni piattaforma decide la propria azione di controllo basandosi sugli errori del proprio assetto rispetto al target ($k_p^{iT} > 0$ e $k_d^{iT} > 0$) ed in base a come sono orientati gli altri satelliti della formazione ($k_p^{ij} \geq 0$ e $k_d^{ij} \geq 0$).

La scelta dei valori dei guadagni può essere pre-assegnata, pesata rispetto alle accuratezze di puntamento di ogni piattaforma o basata su schemi di tipo adattativo e/o robusto. E' altresì da notare che, in caso di failure di uno o più piattaforme è necessario un meccanismo di identificazione delle failure e di resettaggio dei guadagni in modo da poter escludere l'eventuale satellite in avaria nel calcolo dell'azione di controllo.

7.4 Stabilità asintotica della strategia di controllo classico

La convergenza asintotica al puntamento del target da parte dell'intera formazione è provata in [90], mediante l'utilizzo di funzioni di Lyapunov associate alle singole piattaforme definite nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i = & \frac{1}{2} \vec{\omega}_{iT}^T \mathbf{J}_i \vec{\omega}_{iT} + k_p^{iT} \vec{q}_{iT}^T \vec{q}_{iT} + k_p^{iT} [(1 - \text{sign}(q_{4-iT})q_{4-iT})]^2 + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \{ k_p^{ij} \vec{q}_{ij}^T \vec{q}_{ij} + k_p^{ij} [(1 - \text{sign}(q_{4-ij})q_{4-ij})]^2 \} \end{aligned} \quad (7.17)$$

dove l'apice T indica la trasposta del vettore a cui è riferito. Se valgono le ipotesi che i coefficienti proporzionali sono tutti positivi, allora tale funzione candidata risulta essere anch'essa sempre positiva.

La funzione di Lyapunov candidata per studiare la stabilità dell'intera formazione è la somma delle singole funzioni di Lyapunov associate alle singole piattaforme, cioè:

$$\mathcal{L}_F = \sum_{i=1}^N \mathcal{L}_i > 0 \quad (7.18)$$

e sarà anch'essa definita positiva sotto le stesse ipotesi di stabilità per l'Eq.7.17.

Al fine di assicurare che il sistema così trovato sia asintoticamente stabile, occorre che la derivata temporale della funzione candidata di Lyapunov risulti semi-definita negativa, per cui si deve avere che:

$$\dot{\mathcal{L}}_F = \sum_{i=1}^N \dot{\mathcal{L}}_i \leq 0 \quad (7.19)$$

dove⁵:

⁵sostituendo alla derivata della parte vettoriale del quaternioni il termine:

$$\dot{\vec{q}} = \frac{1}{2} \text{sign}(q_4) \vec{\omega} - \frac{1}{2} \vec{\omega} \times \vec{q}$$

e notando che il secondo termine si annulla nell'espressione della derivata dell'Eq.7.17 in quanto

$$\dot{\mathcal{L}}_i = \vec{\omega}_{iT}^T \mathbf{J}_i \dot{\vec{\omega}}_{iT} + \text{sign}(q_{4-iT}) k_p^{iT} \vec{\omega}_{iT}^T \vec{q}_{iT} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \text{sign}(q_{4-ij}) k_p^{ij} \vec{\omega}_{ij}^T \vec{q}_{ij} \quad (7.20)$$

Sostituendo l'Eq.7.4 con il relativo controllo espresso dall'Eq.7.13 nell'Eq.7.20 si ha⁶:

$$\dot{\mathcal{L}}_i = \vec{\omega}_{iT}^T \left[- \sum_{j=1}^N k_p^{ij} \text{sign}(q_{4-ij}) \vec{q}_{ij} - \sum_{j=1}^N k_d^{ij} \vec{\omega}_{ij} - k_d^{iT} \vec{\omega}_{iT} \right] + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \text{sign}(q_{4-ij}) k_p^{ij} \vec{\omega}_{ij}^T \vec{q}_{ij} \quad (7.21)$$

e sommando tutte le derivate si ottiene la derivata della funzione di Lyapunov dell'intera formazione:

$$\dot{\mathcal{L}}_F = \sum_{i=1}^N \left\{ \vec{\omega}_{iT}^T \left[- \sum_{j=1}^N k_p^{ij} \text{sign}(q_{4-ij}) \vec{q}_{ij} - \sum_{j=1}^N k_d^{ij} \vec{\omega}_{ij} - k_d^{iT} \vec{\omega}_{iT} \right] + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \text{sign}(q_{4-ij}) k_p^{ij} \vec{\omega}_{ij}^T \vec{q}_{ij} \right\} \quad (7.22)$$

Prese due tra le N piattaforme della formazione ed indicate con a e b , possiamo scrivere i termini che coinvolgono tali piattaforme:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{L}}_{ab} = & -k_p^{ab} \text{sign}(q_{4-ab}) \vec{\omega}_{aT}^T \vec{q}_{ab} - k_d^{ab} \vec{\omega}_{aT}^T \vec{\omega}_{ab} - k_d^{aT} \vec{\omega}_{aT}^T \vec{\omega}_{aT} + \frac{1}{2} \text{sign}(q_{4-ab}) k_p^{ab} \vec{\omega}_{ab}^T \vec{q}_{ab} + \\ & -k_p^{ba} \text{sign}(q_{4-ba}) \vec{\omega}_{bT}^T \vec{q}_{ba} - k_d^{ba} \vec{\omega}_{bT}^T \vec{\omega}_{ba} - k_d^{bT} \vec{\omega}_{bT}^T \vec{\omega}_{bT} + \frac{1}{2} \text{sign}(q_{4-ba}) k_p^{ba} \vec{\omega}_{ba}^T \vec{q}_{ba} \end{aligned} \quad (7.23)$$

Se si ha un controllo di tipo behavior based, si può fare l'ipotesi semplificativa di uguaglianza tra mutui coefficienti di proporzionalità ($k_p^{ab} = k_p^{ba}$ e $k_d^{ab} = k_d^{ba}$) in modo tale che l'Eq.7.23 si riduce in⁷:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{L}}_{ab} = & -k_p^{ab} \text{sign}(q_{4-ab}) (\vec{\omega}_{aT}^T - \vec{\omega}_{bT}^T) \vec{q}_{ab} - k_d^{ab} (\vec{\omega}_{aT}^T - \vec{\omega}_{bT}^T) \vec{\omega}_{ab} + \\ & -k_d^{aT} \vec{\omega}_{aT}^T \vec{\omega}_{aT} + \text{sign}(q_{4-ab}) k_p^{ab} \vec{\omega}_{ab}^T \vec{q}_{ab} \end{aligned} \quad (7.24)$$

e quindi ricordando la relazione tra le velocità relative si ottiene:

$$\dot{\mathcal{L}}_{ab} = -k_d^{ab} \vec{\omega}_{ab}^T \vec{\omega}_{ab} - k_d^{aT} \vec{\omega}_{aT}^T \vec{\omega}_{aT} \quad (7.25)$$

perpendicolare a \vec{q} stesso.

⁶Andando a sostituire tutti i termini coinvolti, si annullano tutti i termini relativi alla dinamica del satellite e del controllo proporzionale rispetto al target, mentre non vengono cancellati i contributi dovuti al controllo di coordinazione delle piattaforme e il controllo derivativo rispetto al target. I passaggi sono stati omessi ma sono facilmente ricavabili.

⁷Occorre anche ricordare che:

$$\vec{\omega}_{ba} = -\vec{\omega}_{ab}$$

$$\vec{q}_{ba} = -\vec{q}_{ab}$$

che risulta essere per l'appunto semi-definita positiva per $k_d^{ab} \geq 0$ e $k_d^{aT} \geq 0$, ed ovviamente ciò vale per ogni coppia di satelliti presenti nella formazione, per cui risulta che:

$$\dot{\mathcal{L}}_F = \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N \dot{\mathcal{L}}_{ab} \leq 0 \quad (7.26)$$

Quindi si è dimostrata la stabilità del sistema se si utilizza come controllo l'Eq.7.13 per ogni piattaforma.

7.5 Applicazione della strategia di coordinazione classica

Si è svolta una verifica numerica relativa al puntamento di un target mediante la strategia presentata nella sezione 7.3 per un sistema di satelliti di tipo non omogeneo nelle caratteristiche inerziali. In particolare si è considerata un sistema di tre satelliti intorno ad un'orbita di semi-asse maggiore pari a $a = 12000km$, eccentricità $e = 0.3$, inclinazione $i = 70^\circ$, le cui masse sono rispettivamente:

$$m_1 = 10kg \quad m_2 = 50kg \quad m_3 = 100kg$$

ed i diadici d'inerzia:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix} kgm^2 \quad \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 20 & & \\ & 20 & \\ & & 30 \end{bmatrix} kgm^2 \quad \mathbf{J}_3 = \begin{bmatrix} 50 & & \\ & 70 & \\ & & 100 \end{bmatrix} kgm^2$$

l'assetto iniziale di ogni piattaforma è:

$$\mathcal{Q}_1 = \begin{bmatrix} 0.172 \\ -0.022 \\ 0.781 \\ 0.599 \end{bmatrix} \quad \mathcal{Q}_2 = \begin{bmatrix} 0.087 \\ -0.003 \\ 0.130 \\ 0.987 \end{bmatrix} \quad \mathcal{Q}_3 = \begin{bmatrix} 0.586 \\ -0.492 \\ 0.875 \\ 0.111 \end{bmatrix}$$

e la formazione deve orientarsi verso un assetto target fisso nello spazio inerziale il cui assetto è:

$$\mathcal{Q}_T = \begin{bmatrix} 0.408 \\ -0.109 \\ 0.875 \\ 0.234 \end{bmatrix}$$

In Fig.7.4 è rappresentata l'evoluzione dell'assetto delle 3 piattaforme nel orientarsi verso l'assetto target nel caso queste siano completamente scoordinate tra di loro. I gua-

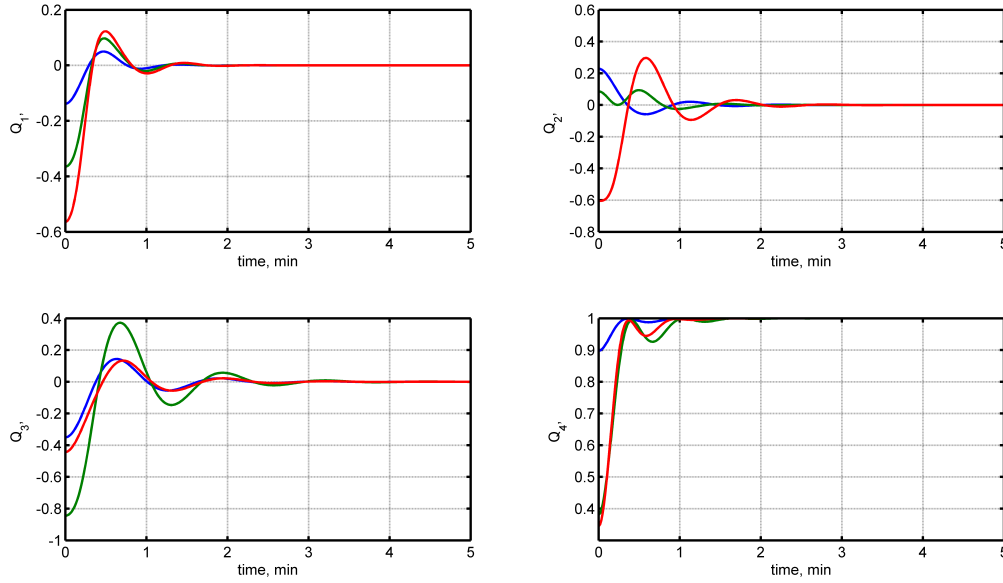


Figura 7.4: Puntamento target fisso nel caso di controllo PD senza coordinazione

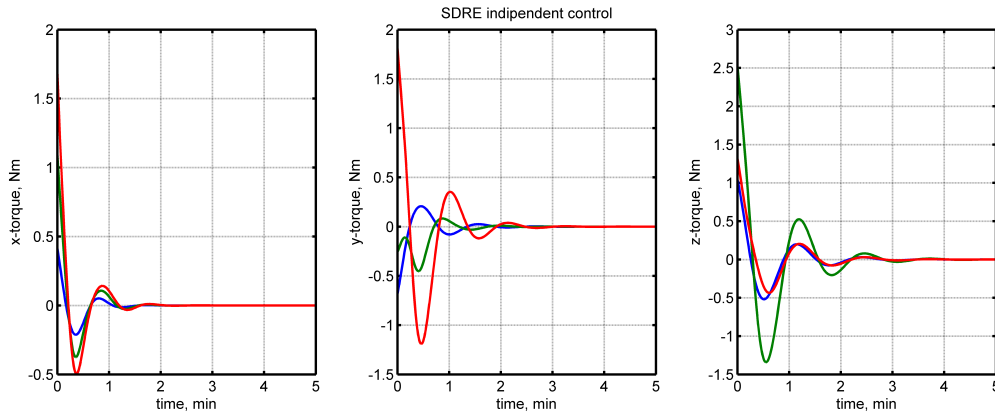


Figura 7.5: Componenti del controllo nel caso di controllo PD non coordinato

dagni per il tracking del target da parte delle piattaforme sono stati scelti mediante un algoritmo *guess and check* con l'obiettivo di raggiungere il target in meno di 3 minuti ed allo stesso tempo non superare valori di coppia pari a $5Nm^8$, ed in questo caso si è ottenuto $k_p^{iT} = 3.27$ e $k_d^{iT} = 10.85$ per tutte le piattaforme della formazione, in quanto i guadagni sono stati adimensionalizzati rispetto alle caratteristiche inerziali delle piattaforme. Come si può notare dall'andamento delle componenti del quaternione, il raggiungimento dell'assetto del target avviene in modo completamente scoordinato: ogni piattaforma cerca di raggiungere il target indipendentemente senza tener conto dell'assetto delle altre piattaforme. L'andamento delle coppie agenti sui satelliti è rappresentato in Fig.7.5 e come si può notare il vincolo di coppia massima è mantenuto. Data la proporzionalità del controllo rispetto all'errore di puntamento dei satelliti, il massimo delle coppie di controllo è raggiunto negli istanti iniziali della manovra. Successivamente il sistema tende all'assetto

⁸Tale valore è indicato in letteratura come il massimo ammissibile per attuatori basati su scambio di momento angolare [98].

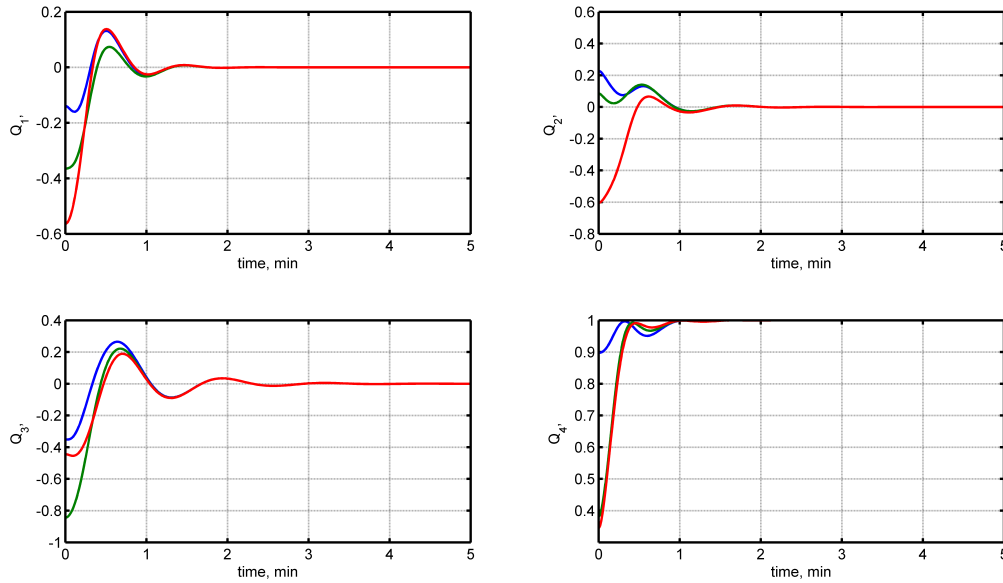


Figura 7.6: Assetto nel caso di controllo coordinato PD target fisso

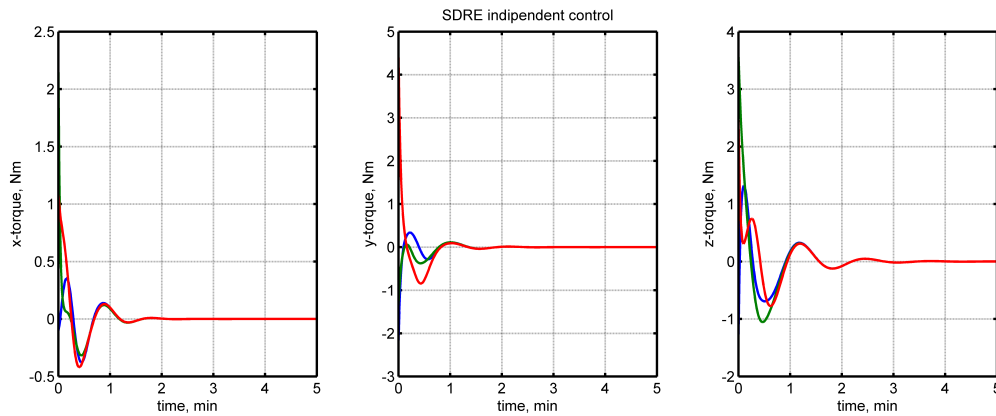


Figura 7.7: Controllo nel caso di coordinazione PD target fisso

target con uno sforzo di controllo via via decrescente.

Si può confrontare l'andamento delle componenti del quaternione del caso precedente, con l'andamento nel caso di satelliti che cercano di coordinarsi per poi convergere insieme a puntare il target fisso nello spazio inerziale. Tale caso è rappresentato in Fig.7.6, dove si può notare l'andamento dell'assetto della piattaforme risulta essere molto più omogeneo per tutte e 4 le componenti de quaternione ed i vistosi overshoot presenti nel primo caso risultano essere sensibilmente ridotti. I guadagni scelti per la coordinazione sono $k_p^{iT} = 2.02$ e $k_d^{iT} = 18.77$ (anch'essi normalizzati) e producono le coppie di controllo rappresentate in Fig.7.7. Tali coppie risultano essere sensibilmente più grandi rispetto al caso precedente, ma ciò è dovuto al fatto che nell'Eq.7.13 agiscono contemporaneamente le coppie di coordinazione e di targetting dell'assetto. Comunque l'obbiettivo di raggiungere l'assetto voluto risulta essere soddisfatto nei 3 minuti richiesti, ma già dalle ultime fasi della manovra i satelliti risultano essere allineati tra di loro.

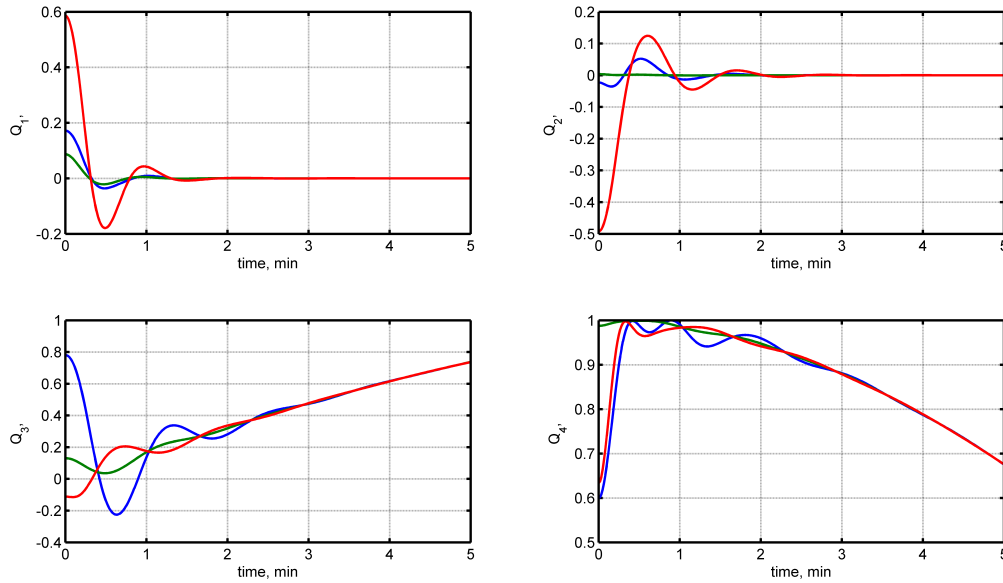


Figura 7.8: Assetto non coordinato target in movimento

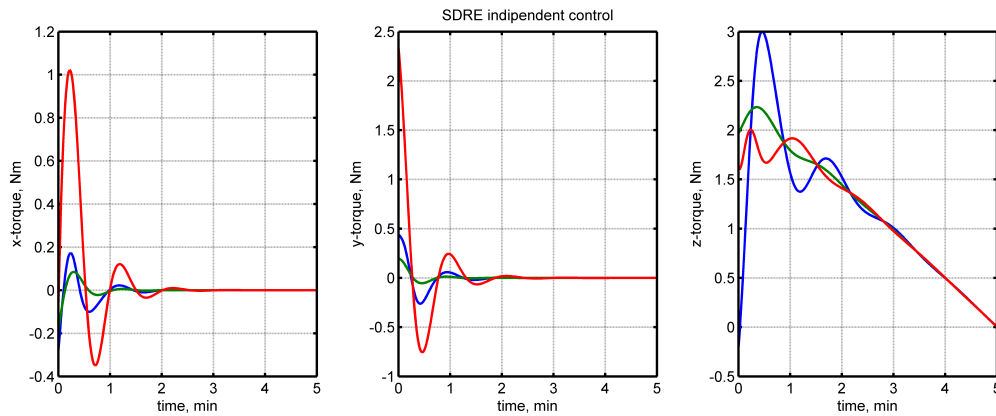


Figura 7.9: Controllo non coordinato target in movimento

Si è inoltre andati ad analizzare il caso in cui il target risulti essere in movimento:

$$\mathcal{Q}_{T=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad {}^I \vec{\omega}_{TI} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5.53e-3 \end{bmatrix} \text{ rad/s}$$

Anche in questo caso si è effettuato il confronto tra il caso di tracking indipendente del target e tracking coordinato. L'andamento delle componenti del quaternion nel primo caso è rappresentato nella Fig.7.8, mentre per il caso coordinato l'assetto è rappresentato in Fig.7.10: dal confronto tra le due evoluzioni possiamo notare che anche in questo caso il target risulta essere trackato dalle piattaforme prima dei 3 minuti e, nel caso di assetto coordinato, nelle fasi finali della manovra di fatto il movimento delle piattaforme risulta essere lo stesso. Se si guarda invece agli andamenti delle coppie in entrambi

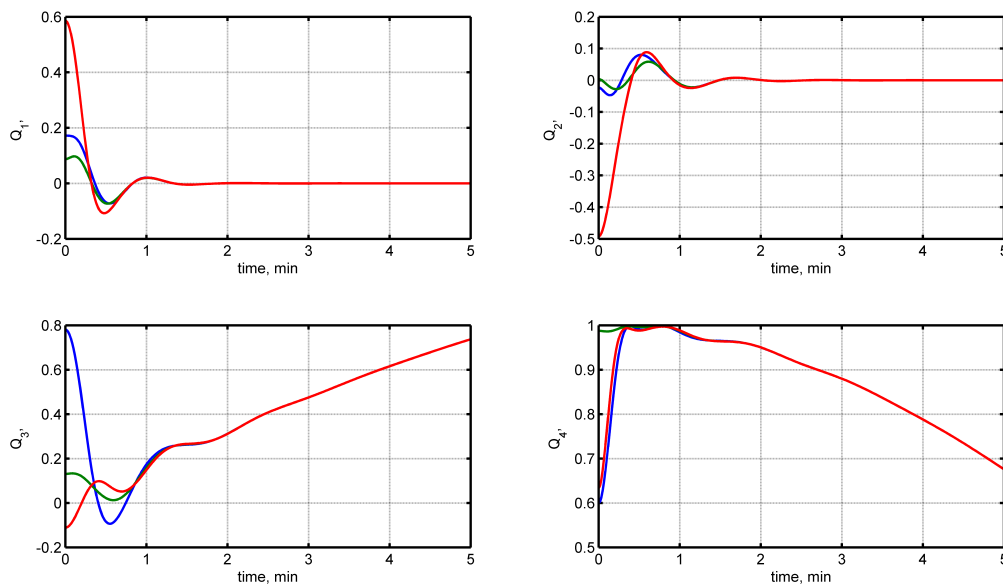


Figura 7.10: Assetto coordinato target in movimento

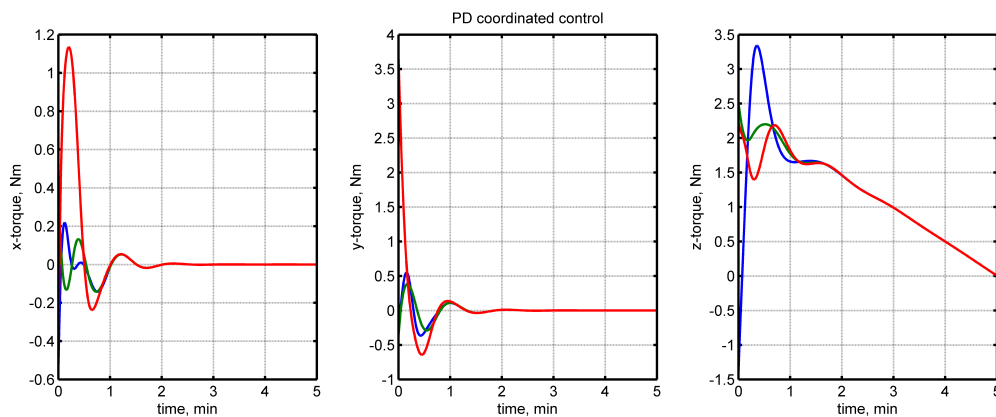


Figura 7.11: Controllo coordinato target in movimento

i casi, rappresentati rispettivamente in Fig.7.9 ed in Fig.7.11, si può notare come siano presenti grandi overshoots negli andamenti delle coppie prima di raggiungere una situazione stazionaria.

7.6 Ottimizzazione del controllo

La metodologia di controllo proporzionale derivativa esplicitata dall'Eq.7.13 non fornisce alcuna indicazione sulla scelta ottimale dei coefficienti di proporzionalità necessari a garantire sforzi di controllo accettabili ed una rapida convergenza al target della missione. In generale quindi è necessario definire un indice di costo per le manovre di acquisizione del target e della coordinazione della formazione, al fine di poterlo poi minimizzare andando a rispettare i vincoli imposti dal sistema. Questo può esser fatto attraverso i classici metodi di ottimizzazione basati sull'analisi dei sistemi lineari, tuttavia i sistemi

rappresentati dalle Eq.7.4 con l'Eq.7.5 e dell'Eq.7.10 con l'Eq.7.11 sono non lineari, per cui è necessario effettuare una linearizzazione delle suddette equazioni, come fatto nella sezione 7.7, oppure applicare tecniche di controllo non lineare come vedremo in seguito.

Si supponga di avere un sistema lineare tempo variante rappresentato dall'equazione:

$$\dot{X}(t) = \mathbf{A}(t)X(t) + \mathbf{B}(t)U(t) \quad (7.27)$$

con condizioni iniziali assegnate:

$$X(t_0) = X_0$$

si vuole trovare una legge di controllo $U(t)$ che minimizzi l'indice di costo quadratico:

$$J = X(t_f)^T \mathbf{S}_f X(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [X(t)^T \mathbf{Q}(t)X(t) + U(t)^T \mathbf{R}(t)U(t)] dt \quad (7.28)$$

in cui \mathbf{S}_f rappresenta la matrice dei guadagni sullo stato finale che deve essere scelta in modo da risultare simmetrica semi-definita positiva ($\mathbf{S}_f \geq 0$), $\mathbf{Q}(t)$ rappresenta la matrice dei guadagni sullo stato durante la manovra, anch'essa deve risultare simmetrica semi-definita positiva ($\mathbf{Q}(t) \geq 0$) ed $\mathbf{R}(t)$ è la matrice dei guadagni sui controlli che deve risultare sempre simmetrica strettamente definita positiva durante la manovra $\mathbf{R}(t) > 0^9$.

Per un problema così definito la soluzione esiste ed è nota la funzione Hamiltoniana[12]:

$$\mathcal{H}(X(t), U(t), t) = X(t)^T \mathbf{Q}(t)X(t) + U(t)^T \mathbf{R}(t)U(t) + \Lambda(t)^T [\mathbf{A}(t)X(t) + \mathbf{B}(t)U(t)] \quad (7.29)$$

dove si è indicato con $\Lambda(t)$ il vettore contenente tanti moltiplicatori di Lagrange quanti sono le componenti dello stato $X(t)$ e prende il nome di costato del sistema. Applicando le condizioni necessarie per trovare la soluzione ottima [12], si ottiene un sistema differenziale alle condizioni finali del tipo:

$$\dot{\Lambda}(t) = -\mathcal{H}_{,X}^T = -2\mathbf{Q}(t)X(t) - \mathbf{A}(t)^T \Lambda(t) \quad (7.30)$$

a cui si associano le condizioni finali:

$$\Lambda(t_f) = J_{,X_f} = 2\mathbf{S}_f X(t_f)$$

e una legge di controllo per lo stato¹⁰:

⁹Una prima, seppur indicativa, scelta dei guadagni può esser fatta attraverso la regola di Bryson [12], che indica:

1. $\frac{1}{S_{f-ii}}$ = massimo valore accettabile per $[x_i(t_f)]^2$;
2. $\frac{1}{Q_{ii}}$ = $(t_f - t_0)x_i^2$, dove x_i^2 è il massimo valore accettabile per $[x_i(t)]^2$;
3. $\frac{1}{R_{ii}}$ = $(t_f - t_0)u_i^2$, dove u_i^2 è il massimo valore accettabile per $[u_i(t)]^2$;

¹⁰Ottenuta andando a risolvere:

$$U(t) = -\frac{1}{2}\mathbf{R}(t)^{-1}\mathbf{B}(t)\Lambda(t) \quad (7.31)$$

La soluzione del sistema riguardante il costato può essere trovata ipotizzando che questa sia descritta da una relazione del tipo:

$$\Lambda(t) = 2\mathbf{S}(t)X(t) \quad (7.32)$$

con la condizione finale:

$$\mathbf{S}(t_f) = \mathbf{S}_f$$

Per cui la legge di controllo ottimo espressa dall'Eq.7.31 prende la forma:

$$U(t) = -\mathbf{R}(t)^{-1}\mathbf{B}(t)\mathbf{S}(t)X(t) \quad (7.33)$$

che chiude in feedback il sistema dinamico rappresentato dall'Eq.7.27.

Se si vuole soddisfare l'equazione della dinamica del costato, espressa dall'Eq.7.30, si può sostituire l'Eq.7.32 all'interno della suddetta equazione, per così trovare:

$$\dot{\Lambda}(t) = -2[\mathbf{Q}(t) + \mathbf{A}(t)^T\mathbf{S}(t)]X(t) \quad (7.34)$$

e se si deriva nel tempo l'Eq.7.32 si ottiene:

$$\dot{\Lambda}(t) = 2\left[\dot{\mathbf{S}}(t) + \mathbf{S}(t)\mathbf{A}(t) - \mathbf{S}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}(t)^{-1}\mathbf{B}(t)^T\mathbf{S}(t)\right]X(t) \quad (7.35)$$

per cui, uguagliando l'Eq.7.34 con l'Eq.7.35 si ottiene l'equazione differenziale di Riccati:

$$\dot{\mathbf{S}}(t) + \mathbf{S}(t)\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}(t)^T\mathbf{S}(t) - \mathbf{S}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}(t)^{-1}\mathbf{B}(t)^T\mathbf{S}(t) + \mathbf{Q}(t) = 0 \quad (7.36)$$

a cui corrisponde la condizione finale:

$$\mathbf{S}(t_f) = \mathbf{S}_f$$

Si è quindi in presenza di un sistema differenziale rappresentante un problema al valore finale che, se unito al sistema espresso dall'Eq.7.27, ci porta ad avere un problema agli estremi.

Fortunatamente le equazioni linearizzate della dinamica relativa dei satelliti della formazione, espresse dall'Eq.7.39 e dall'Eq.7.40, sono a coefficienti costanti, per cui il problema si riduce a trovare la soluzione dell'*equazione algebrica di Riccati*:

$$\mathcal{H}_U = 0$$

$$\mathbf{S}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{S} - \mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S} + \mathbf{Q} = 0 \quad (7.37)$$

che esiste ed è unica e garantisce il raggiungimento delle condizioni finali per t_f tendente all'infinito, cioè si sta facendo un'ottimizzazione ad orizzonte infinito. In genere si utilizza questa equazione per trovare una legge di regolazione ottima, e tale controllo prende il nome di *Linear Quadratic Regulator*, quando lo stato finale risulta essere coincidente con l'origine dello spazio di stato, per cui l'Eq.7.28 risulta essere priva del costo quadratico sullo stato finale.

7.7 Linearizzazione delle equazioni

La linearizzazione delle equazioni della dinamica del moto d'assetto del satellite è un problema ben noto e può essere affrontato diversamente in base alle ipotesi ed il moto di riferimento adottato. Nel caso di manovre di acquisizione di un assetto target, ovviamente si dovrà avere come riferimento proprio l'assetto target, mentre nel caso di coordinazione dell'assetto rispetto ad altre piattaforme l'assetto relativo sarà quello relativo alle piattaforme a cui ci si deve coordinare. In generale si assume che l'assetto del target possa ruotare con una velocità angolare nota (il caso di target fisso si otterrà ponendo le equazioni di tali velocità angolare pari a 0), e che l' i -esima piattaforma si trovi in un'assetto "vicino" a quello del target¹¹. Quindi si potrà dire che l'assetto e la velocità angolare del satellite i -esimo siano essenzialmente composti da due contributi [99]:

$$\vec{\omega}_{iI} = \vec{\omega}_{TI} + \delta\vec{\omega}_{iT} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ {}^i\Omega_{TI} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta^i\omega_{x-iT} \\ \delta^i\omega_{y-iT} \\ \delta^i\omega_{z-iT} \end{bmatrix} \quad (7.38)$$

$$\mathcal{Q}_{iT} = \mathcal{Q}_{TI} \otimes \delta\mathcal{Q}_{iT}$$

in cui δ preposto alle variabili significa che lo spostamento rispetto al valore di riferimento è infinitesimo. Sotto queste ipotesi il sistema composto dall'Eq.7.4 e dall'Eq.7.5, si riduce a[36]:

$$\dot{X}_{iT} = \mathbf{A}_{iT}(\Omega_{TI})X_{iT} + \mathbf{B}_{iT}U_{iT} \quad (7.39)$$

dove:

¹¹Si è preso come riferimento i modelli linearizzati dell'assetto presenti in [99].

$$X_{iT} = \begin{bmatrix} \delta\omega_{x-iT} \\ \delta\omega_{y-iT} \\ \delta\omega_{z-iT} \\ \delta q_{1-iT} \\ \delta q_{2-iT} \\ \delta q_{3-iT} \end{bmatrix} \quad U_{iT} = \begin{bmatrix} u_{x-i} \\ u_{y-i} \\ u_{z-i} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{iT} = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_z} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{iT}(\Omega_{TI}) = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{TI}(1-k_x) & 0 & -k_x\Omega_{TI}^2 & 0 & 0 \\ -\Omega_{TI}(1-k_y) & 0 & 0 & 0 & -k_y\Omega_{TI}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove $k_x = \frac{I_z - I_y}{I_x}$, $k_y = \frac{I_z - I_x}{I_y}$ e I_x , I_y , I_z sono gli assi principali del sistema. Nel ricavare l'Eq.7.39 si sono eliminati tutti i termini di ordine superiore al primo, per cui tale sistema sarà valido solo se la piattaforma si trova vicino all'assetto target.

Nel caso invece di coordinazione dell'assetto rispetto ad un'altra piattaforma j-esima, il sistema si semplifica notevolmente in quanto si fa l'ipotesi che i due stati cinematici tra le due piattaforme sono pressoché identici, per cui si ottiene:

$$\dot{X}_{ij} = \mathbf{A}_{ij}X_{ij} + \mathbf{B}_{ij}U_{ij} \quad (7.40)$$

dove in questo caso si ha:

$$X_{ij} = \begin{bmatrix} \delta\omega_{x-ij} \\ \delta\omega_{y-ij} \\ \delta\omega_{z-ij} \\ \delta q_{1-ij} \\ \delta q_{2-ij} \\ \delta q_{3-ij} \end{bmatrix} \quad U_{ij} = \begin{bmatrix} {}^iU_i \\ {}^iU_j \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{ij} = \begin{bmatrix} {}^i\mathbf{J}_i^{-1} & -{}^i\mathbf{J}_j^{-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7.8 Applicazione del Linear Quadratic Regulator

Ogni piattaforma della formazione avrà come obiettivo quello di trackare l'assetto target ma simultaneamente coordinarsi con le altre piattaforme: entrambe le esigenze potranno essere soddisfatte mediante la sintesi di un controllore ottimo come visto nella sezione 7.6 ed utilizzando la linearizzazione delle equazioni della dinamica relativa trovate nella sezione 7.7.

Ipotizzando una strategia di tipo *behavior based*, nel processo di sintesi del un controllo si dovrà trovare degli opportuni guadagni delle matrici che costituiscono gli indici di costo relativi sia al problema di coordinazione che a quelli di raggiungimento dell'assetto target. In particolare ogni i -esima piattaforma dovrà ottimizzare un indice di costo del tipo:

$$J_i = J_{iT} + \sum_{j=1}^N J_{ij} \quad (7.41)$$

dove:

$$J_{iT} = \int_{t_0}^{\infty} [X_{iT}^T \mathbf{Q}_{iT} X_{iT} + U_{iT}^T \mathbf{R}_{iT} U_{iT}] dt \quad (7.42)$$

$$J_{ij} = \int_{t_0}^{\infty} [X_{ij}^T \mathbf{Q}_{ij} X_{ij} + U_{ij}^T \mathbf{R}_{ij} U_{ij}] dt \quad (7.43)$$

in cui \mathbf{Q}_{iT} e \mathbf{R}_{iT} sono le matrici dei guadagni rispettivamente relativi allo stato ed al controllo per il puntamento del target, mentre \mathbf{Q}_{ij} e \mathbf{R}_{ij} rappresentano le matrici dei guadagni relative alla coordinazione dell'assetto con la j -esima piattaforma. Se si suppone che il controllo venga calcolato in modo locale [42, 45], cioè in modo tale che ogni piattaforma decida autonomamente le azioni da intraprendere al fine di garantire i requisiti di missione, il problema di ottimizzazione potrà essere risolto andando a risolvere l'Eq.7.37, in cui le equazioni della dinamica sono espresse nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{X}_{iT} \\ \dot{X}_{i1} \\ \dot{X}_{i2} \\ \vdots \\ \dot{X}_{iN} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{iT} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{i1} & & & \vdots \\ \vdots & & \mathbf{A}_{i2} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mathbf{A}_{iN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{iT} \\ X_{i1} \\ X_{i2} \\ \vdots \\ X_{iN} \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} {}^i\mathbf{J}_i^{-1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ {}^i\mathbf{J}_i^{-1} & -{}^i\mathbf{J}_1^{-1} & & & \vdots \\ {}^i\mathbf{J}_i^{-1} & & -{}^i\mathbf{J}_2^{-1} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ {}^i\mathbf{J}_i^{-1} & 0 & \cdots & 0 & -{}^i\mathbf{J}_N^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_N \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.44)$$

in cui le matrici sono quelle trovate nella sezione 7.7. D'altra parte se si ipotizza la

presenza di un agente di controllo globale [93, 96, 94, 95], allora il sistema dinamico da controllare potrà essere espresso nella forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_{1T} \\ \vdots \\ \dot{X}_{NT} \\ \dot{X}_{12} \\ \vdots \\ \dot{X}_{1N} \\ \vdots \\ \dot{X}_{N,N-2} \\ \dot{X}_{N,N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1T} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & & & 0 \\ \vdots & & \mathbf{A}_{NT} & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & \mathbf{A}_{12} & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \mathbf{A}_{1N} & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & & & & \mathbf{A}_{N,N-2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{A}_{N,N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1T} \\ \vdots \\ X_{NT} \\ X_{12} \\ \vdots \\ X_{1N} \\ \vdots \\ X_{N,N-2} \\ X_{N,N-1} \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1^{-1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mathbf{J}_N^{-1} \\ \mathbf{J}_1^{-1} & -\mathbf{J}_2^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \mathbf{J}_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & -\mathbf{J}_N^{-1} \\ 0 & \mathbf{J}_2^{-1} & -\mathbf{J}_3^{-1} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{J}_{N-1}^{-1} & -\mathbf{J}_{,N}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_N \end{bmatrix} \quad (7.45)$$

Riprendendo quindi il test case esposto nella sezione 7.5, si può applicare il controllo ottimo sopra illustrato al fine di valutarne i benefici rispetto agli esempi fatti in precedenza. Partendo dalle stesse condizioni iniziali i 3 satelliti della formazione si dovranno coordinare andando ad effettuare manovre ottimizzate, al fine minimizzare l'indice di costo espresso dall'Eq.7.41. Anche in questo caso l'obiettivo di missione è raggiungere l'assetto target con l'intera formazione in meno di 5 minuti e con una massima coppia ammissibile di $3Nm$. Per le simulazioni si sono utilizzate le stesse caratteristiche della formazione esposte nella sezione 7.5.

In Fig.7.12 ed in Fig.7.13 è rappresentato l'assetto delle piattaforme mediante le componenti del quaternion e gli angoli di Eulero 123, nel caso queste debbano puntare autonomamente senza coordinarsi un target fisso nello spazio inerziale. Come è possibile evincere da tali figure, anche in questo caso l'evoluzione dell'assetto tra le piattaforme è totalmente non coordinato: le piattaforme cercano di ottimizzare indipendentemente la propria manovra utilizzando come dinamica di riferimento quella espressa dall'Eq.7.39. Ciò è ancora più evidente se si considerano gli andamenti tra le velocità angolari dei satelliti, rappresentati in Fig.7.14.

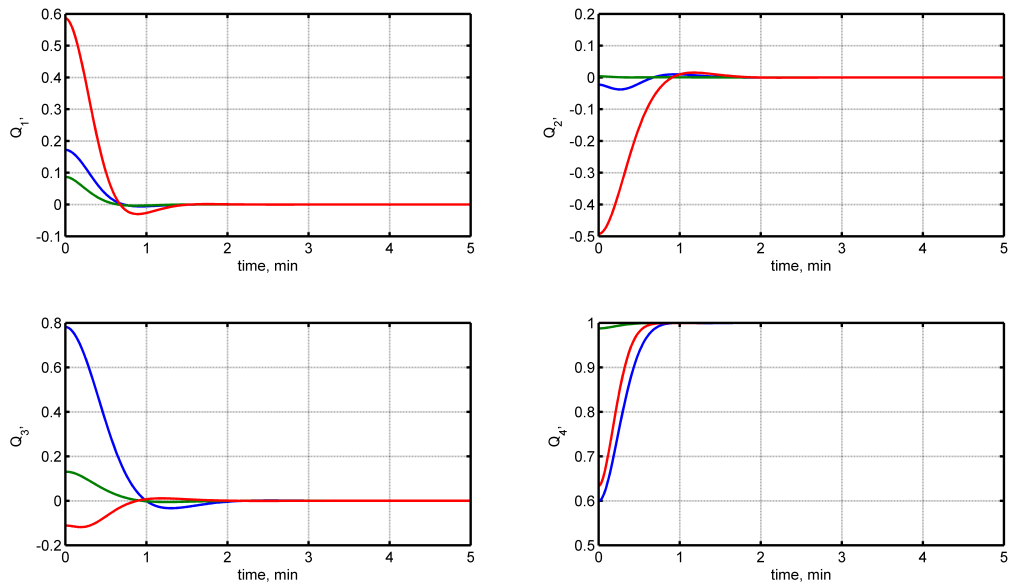


Figura 7.12: Acquisizione dell'assetto target fisso con controllo LQR senza coordinazione tra le piattaforme

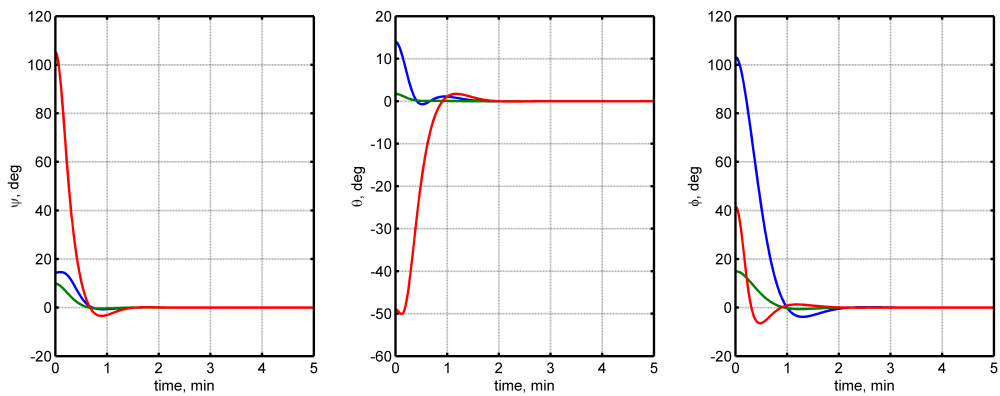


Figura 7.13: Assetto delle piattaforme espresso con angoli di Eulero 123

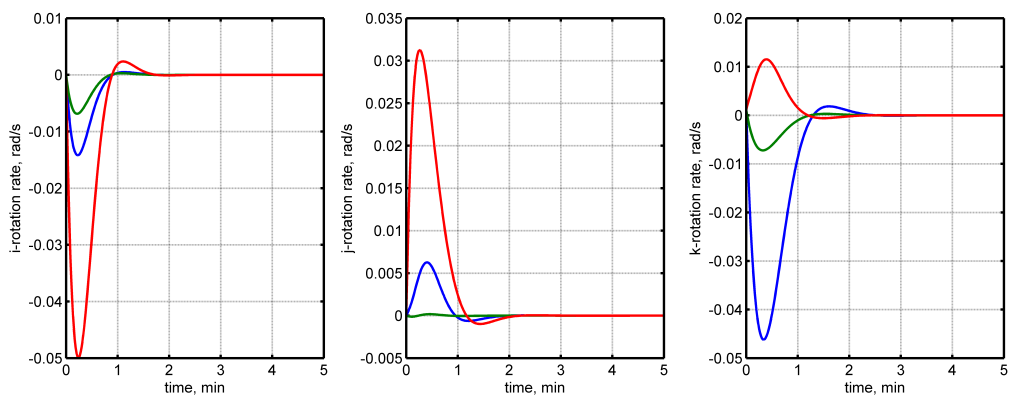


Figura 7.14: Velocità angolare delle piattaforme nel caso di controllo LQR senza coordinazione tra le piattaforme

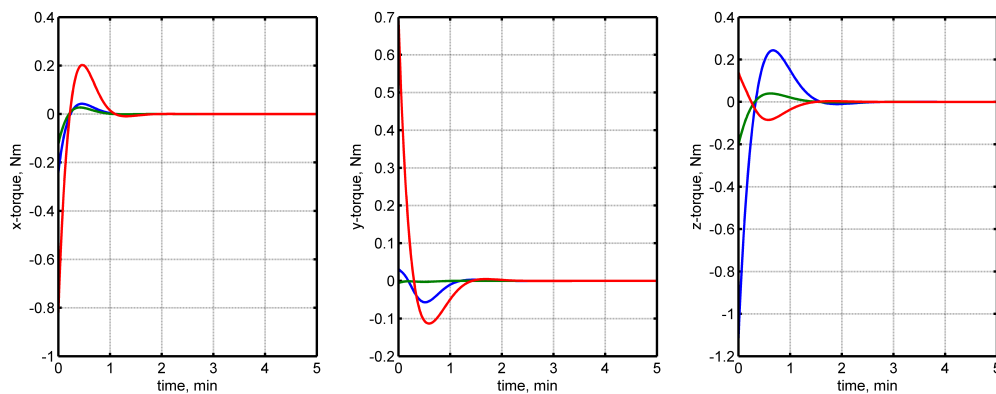


Figura 7.15: Coppie applicate alle piattaforme nel caso di controllo LQR senza coordinazione tra le piattaforme

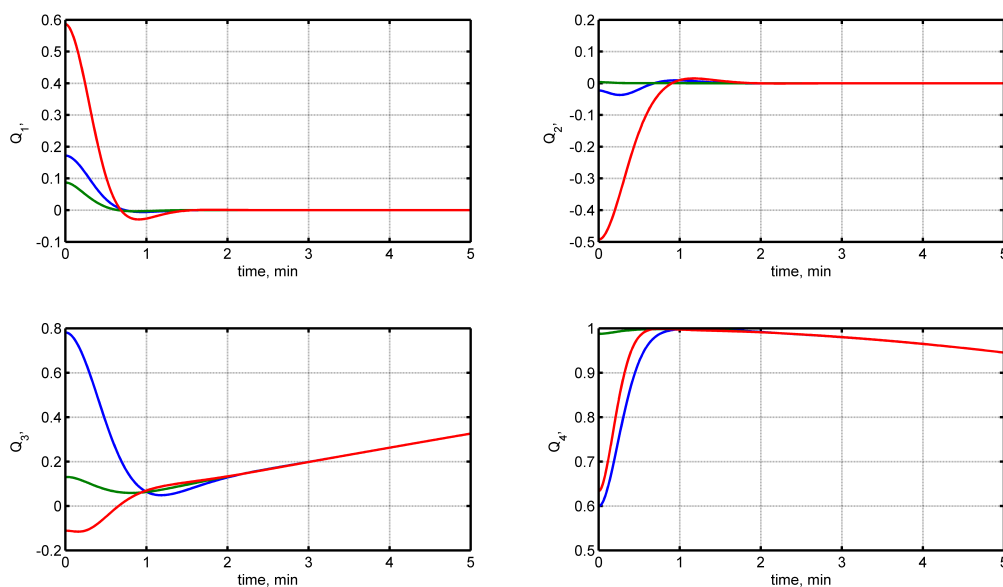


Figura 7.16: Assetto delle piattaforme nel caso di tracking di target in movimento con LQR non coordinato

L'andamento del controllo applicato alle piattaforme nel caso non coordinato è rappresentato in Fig.7.15, in cui si può notare come rispetto all'omologo caso visto nel caso PD, l'ottimizzazione permette di ridurre l'ampiezza delle azioni di controllo per tutta la durata della manovra.

Se si pone ora in movimento il target come già stato fatto nella sezione 7.5, l'avvenuto tracking del target da parte dei singoli satelliti della formazione è testimoniato dall'andamento degli assetti rappresentati nelle Fig.7.16 e Fig.7.17.

In Fig.7.18 sono rappresentate le componenti del controllo ottenute con la strategia ottimizzata nel caso in cui le piattaforme puntino autonomamente il target. Questi esempi sono utili per poter avere un termine di confronto con i reciproci casi coordinati.

In particolare l'andamento dell'assetto delle piattaforme nel caso di puntamento coordinato di un target fisso è rappresentato in Fig.7.19 e in Fig.7.20 dove è possibile notare

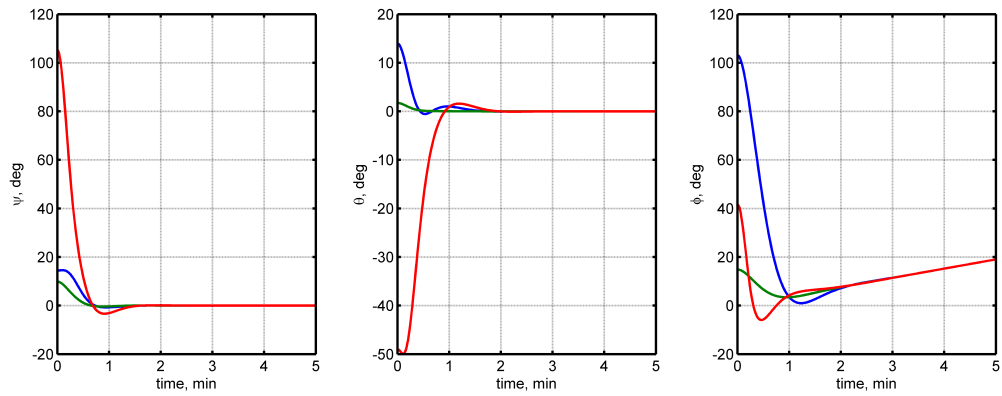


Figura 7.17: Angoli di Eulero 123 per il caso di tracking in movimento con LQR non coordinato

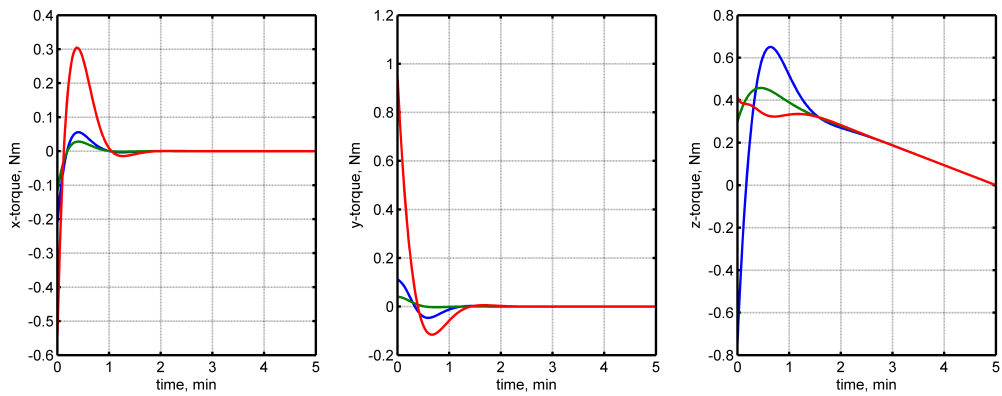


Figura 7.18: Azioni di controllo nel caso di tracking target in movimento con LQR non coordinato

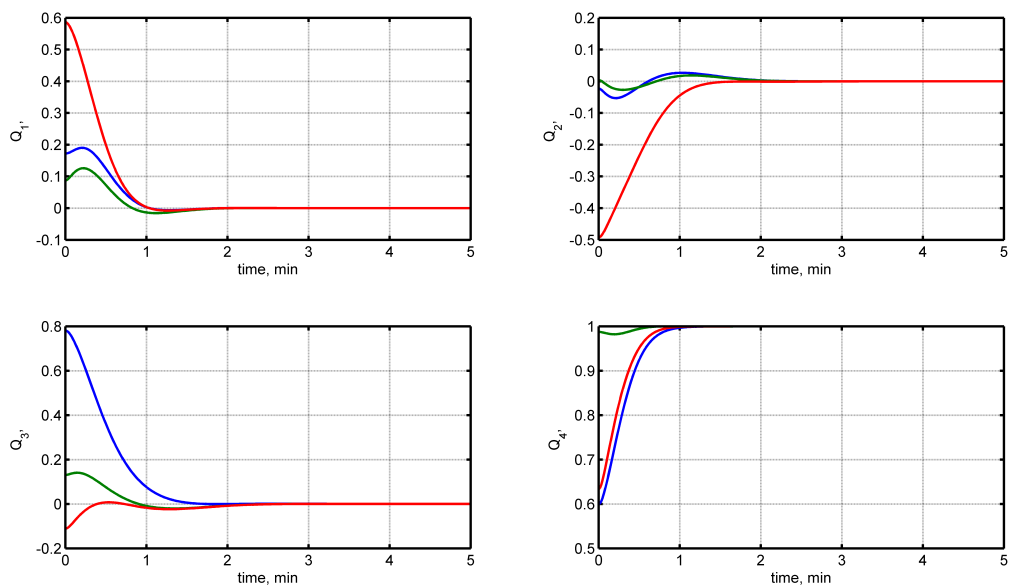


Figura 7.19: Puntamento coordinato di un target fisso mediante tecnica LQR

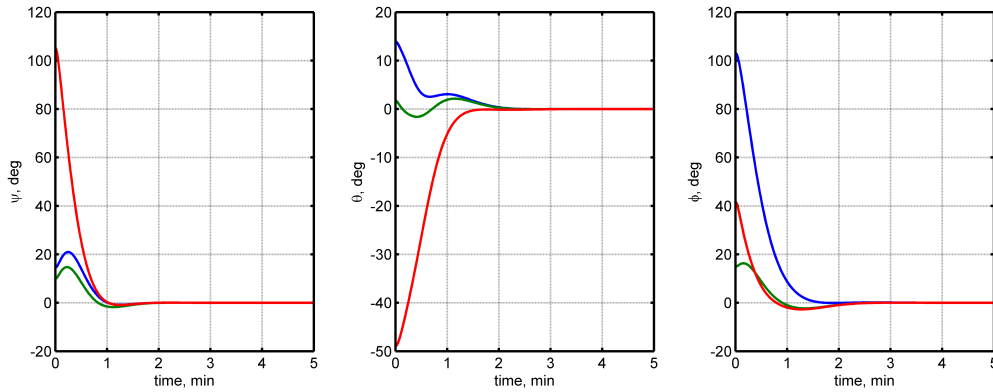


Figura 7.20: Angoli di Eulero 123 nel caso di puntamento coordinato a target fisso con controllo LQR

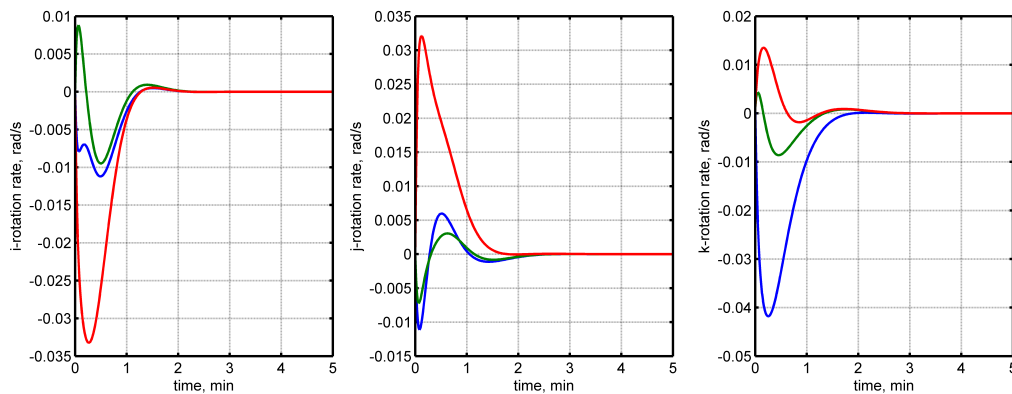


Figura 7.21: Velocità angolari delle piattaforme nel caso di puntamento coordinato con LQR

una sostanziale differenza rispetto al caso non coordinato: le singole piattaforme cercano di raggiungere prima un assetto comune e poi convergono a puntare il target in modo molto simile tra di loro.

In Fig.7.21 sono rappresentate le velocità angolari ed in Fig.7.22 le coppie applicate alle piattaforme affinché i requisiti di manovra risultino essere soddisfatti. I profili degli andamenti delle azioni di controllo sono sensibilmente diversi rispetto al caso visto per il semplice controllo PD nella sezione 7.5: in particolare l'applicazione delle coppie risulta essere più graduale rispetto a quelle che si vedono in Fig.7.7, cioè è dovuto proprio all'ottimizzazione effettuata mediante l'applicazione dell'Eq.7.37 al sistema linearizzato espresso dall'Eq.7.44.

Le Fig.7.23 e Fig.7.24 sono relative al caso di tracking di un target in movimento del tutto analogo a quello visto nella sezione 7.5. Anche in questo caso si può notare come le piattaforme cerchino di raggiungere prima un assetto comune e quindi di seguire l'assetto target nel suo movimento. In Fig.7.25 sono rappresentate le velocità angolari che ancor meglio evidenziano come complessivamente la formazione cerchi di coordinarsi. Ovviamente tale sforzo si paga in termini di azione di controllo necessaria a compiere tali manovre: in Fig.7.26 sono rappresentate le coppie applicate alla formazione ed è possibile

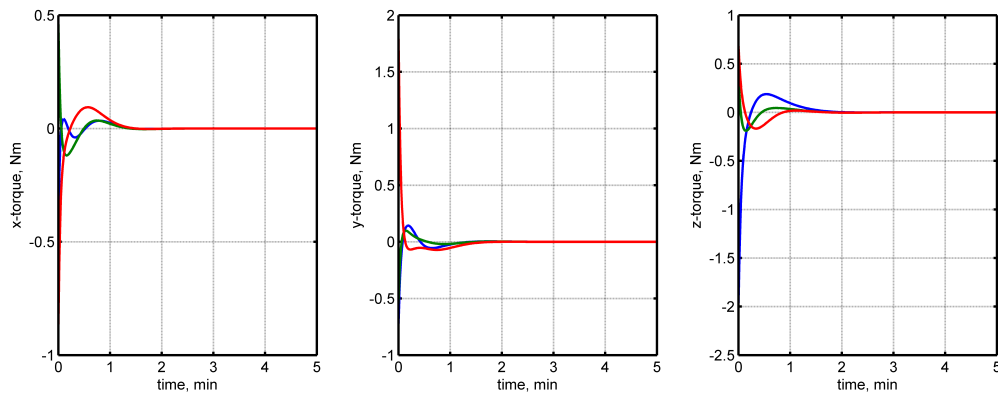


Figura 7.22: Azioni di controllo nel caso di puntamento coordinato target fisso con tecnica LQR

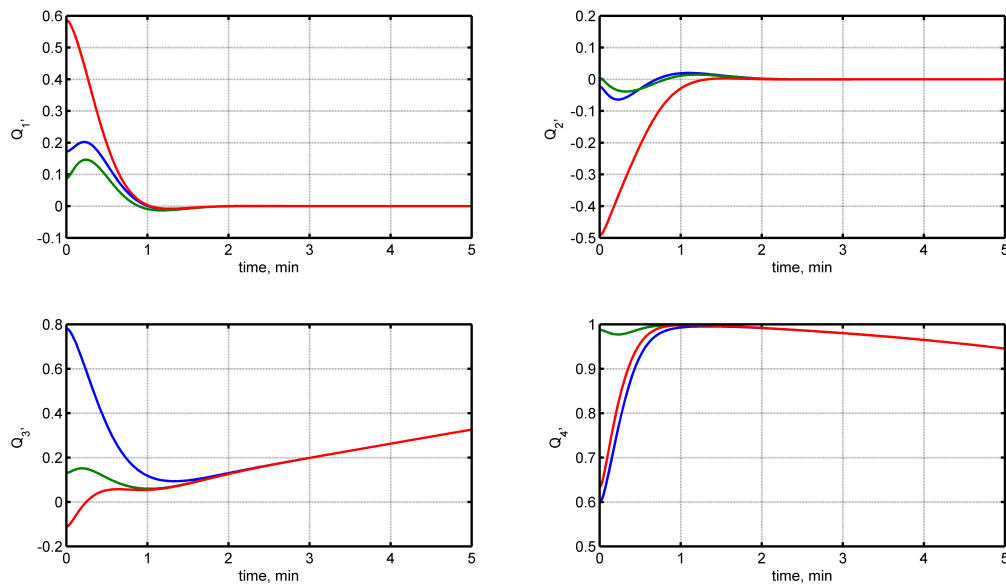


Figura 7.23: Assetto nel caso di controllo coordinato per il tracking di un target in movimento

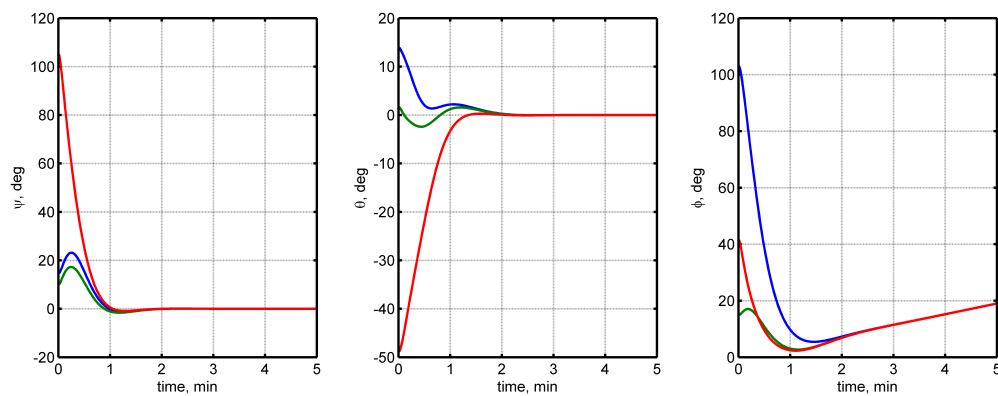


Figura 7.24: Angoli di Eulero 123 nel caso di controllo coordinato per il tracking di un target in movimento

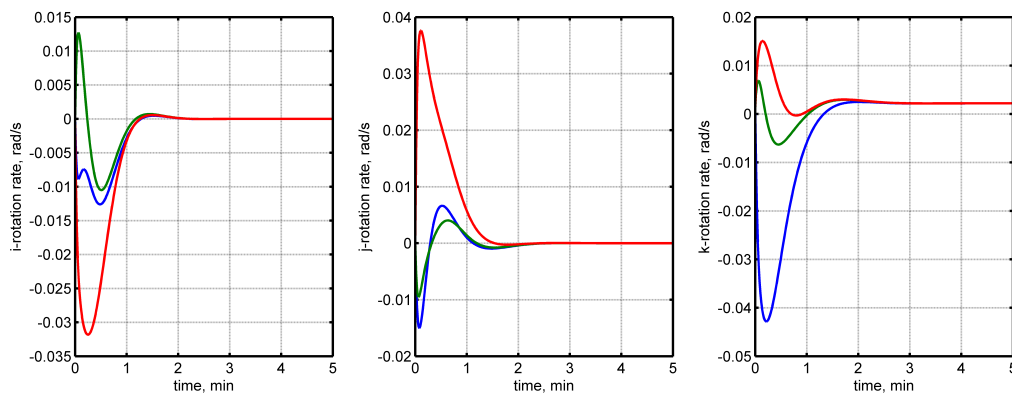


Figura 7.25: Velocità angolare nel caso di controllo coordinato per il tracking di target in movimento

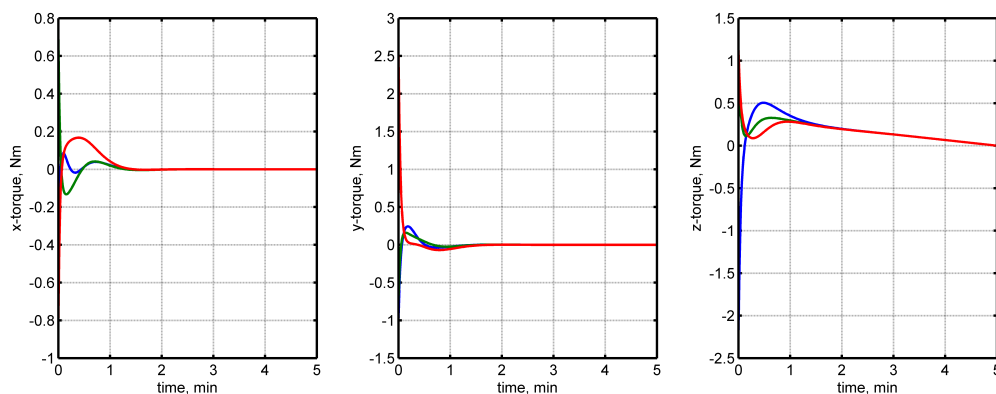


Figura 7.26: Azioni di controllo ottenute con strategia LQR coordinata per il caso di puntamento target in movimento

notare come queste siano, almeno nelle fasi iniziali della manovra, sostanzialmente elevate.

7.9 State Dependent Riccati Equation Method

Le tecniche derivate dal controllo lineare sono applicabili se le non linearità presenti non deviano troppo dalle equazioni della dinamica linearizzate ed in alcuni casi questo può portare alla non convergenza della soluzione. Oltretutto spesso la linearizzazione del sistema cancella effetti non trascurabili se si vuole progettare un sistema di controllo ottimo. Per questo motivo si sono sviluppate altre tecniche di controllo che tengono conto anche delle non linearità che caratterizzano il sistema.

Come abbiamo ricavato nelle sezioni precedenti il problema del tracking di un assetto voluto, da parte di una formazione di satelliti che oltretutto deve coordinarsi, è un tipico problema non lineare. Ciò implica che il controllo in controreazione dello stato, progettato su un modello linearizzato del sistema, potrebbe non funzionare se, ad esempio la formazione punta in una direzione molto distante da quella del target o il l'assetto voluto sia in movimento tanto quanto basta da creare effetti giroscopici sul sistema dei satelliti, tali da far decadere l'ipotesi di velocità angolari relative rispetto al target piccole.

La tecnica della risoluzione dell'equazione di Riccati dipendente dallo stato, di fatto è molto simile a quella presentata nella sezione 7.6, anche se l'ottimizzazione è fatta su un sistema non lineare [16, 50, 21, 18, 77, 51]. Seguendo [16] il problema può essere generalizzato nel seguente modo:

$$\dot{X}(t) = F[X(t)] + G[X(t), U(X(t))] \quad (7.46)$$

a cui si associa una condizione iniziale:

$$X(t_0) = X_0$$

L'ottimizzazione è ad orizzonte temporale infinito ($t \rightarrow \infty$) e il funzionamento è quello di regolatore ottimo, per cui il funzionale da minimizzare risulta essere:

$$J = \int_{t_0}^{\infty} \left[X(t)^T \mathbf{Q}[X(t)] X(t) + U(X(t))^T \mathbf{R}[X(t)] U(X(t)) \right] dt \quad (7.47)$$

dove in questo caso, le matrici dei guadagni $\mathbf{Q}[X(t)]$ ed $\mathbf{R}[X(t)]$ dipendono dallo stato. Ci si ritrova perciò a risolvere un problema di ottimizzazione vincolata in cui però adesso c'è una dipendenza non lineare delle equazioni dallo stato. Per un problema così definito è possibile definire l'Hamiltoniana:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(X(t), U(t), t) = & \frac{1}{2} X(t)^T \mathbf{Q}[X(t)] X(t) + \frac{1}{2} U(t)^T \mathbf{R}[X(t)] U(t) + \\ & + \Lambda(t)^T \{F[X(t)] + G[X(t), U(t)]\} \end{aligned} \quad (7.48)$$

in cui $\Lambda(t)$ è il vettore contenente i moltiplicatori di Lagrange. L'applicazione delle condizioni necessarie per avere l'ottimalità portano alla definizione di una relazione che identifica la legge di controllo della forma¹²:

$$U = -\mathbf{R}^{-1} G_{,U}^T \Lambda \quad (7.49)$$

dove per snellezza nella trattazione si sono omesse le dipendenze. Inoltre è possibile definire un'equazione differenziale per il costato¹³:

$$\dot{\Lambda} = -F_{,X}^T \Lambda - G_{,X}^T \Lambda - \mathbf{Q}X - \frac{1}{2} X^T \mathbf{Q}_{,X} X - \frac{1}{2} U^T \mathbf{R}_{,X} U \quad (7.50)$$

in cui in questo caso compaiono anche le derivate parziali delle matrici dei guadagni \mathbf{Q} ed \mathbf{R} perché dipendenti anch'esse dallo stato.

¹²Si derivi l'Eq.7.48 rispetto al controllo U :

$$\mathcal{H}_{,U} = \mathbf{R}U + G_{,U}^T \Lambda = 0$$

e si espliciti la forma della legge di controllo.

¹³In questo caso si ricordi che vale:

$$\dot{\Lambda}(t) = -\mathcal{H}_{,X}^T$$

Dal momento che il problema è non lineare, non è detto che si possa trovare una soluzione del sistema di equazioni differenziali formato dall'Eq.7.46 e dall'Eq.7.50 con le relative condizioni al contorno, per minimizzare l'indice di costo della manovra espresso dall'Eq.7.47. Tuttavia è possibile trovare una soluzione del problema, seppur sub-ottima, qualora si riesca ad esprimere l'Eq.7.46 in una forma quasi lineare detta anche *forma parametrizzata con coefficienti dipendenti dallo stato* (*State Dependent Coefficient Parameterisation*), in cui le equazioni della dinamica di un sistema, che risultino essere regolari¹⁴ in un intorno dell'origine dello spazio di stato (che è anche set point del problema di ottimizzazione del feedback e risulti $F(X = 0) = 0$), possono essere scritte estraendo da esse il vettore di stato X e quindi dando vita ad un sistema differenziale non lineare della forma:

$$\dot{X} = \mathbf{A}(X)X + \mathbf{B}(X)U \quad (7.51)$$

con le stesse condizioni iniziali del sistema di partenza. Se tale parametrizzazione esiste, allora si può pensare di applicare la stessa metodologia di ottimizzazione usata nel caso lineare. Il controllo che deriva da tale procedura sarà detto sub-ottimo, perché di fatto è strettamente dipendente dalla parametrizzazione SDC che si effettua sul sistema. Cloutier [54] dimostra che, se con tale parametrizzazione il sistema presenta caratteristiche di controllabilità e di osservabilità nell'intorno del set point, allora il sistema non lineare rappresentato dall'Eq.7.46 può essere controreazionato da un regolatore sub-ottimo.

In particolare sotto le suddette ipotesi, l'Eq.7.49 può risciversi nel modo seguente:

$$U = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\Lambda \quad (7.52)$$

dove anche \mathbf{B} è dipendente dallo stato. Inoltre l'Eq.7.50 diventa:

$$\dot{\Lambda} = -\mathbf{A}^T\Lambda - X^T\mathbf{A}_{,X}^T\Lambda - U^T\mathbf{B}_{,X}^T\Lambda - \mathbf{Q}X - \frac{1}{2}X^T\mathbf{Q}_{,X}X - \frac{1}{2}U^T\mathbf{R}_{,X}U \quad (7.53)$$

ed allora una possibile soluzione dell'Eq.7.53 può essere:

$$\Lambda = \mathbf{S}X \quad (7.54)$$

dove anche \mathbf{S} dipende dallo stato. Andando a derivare nel tempo l'Eq.7.54¹⁵, sostituendo all'interno dell'Eq.7.53 e riordinando i termini¹⁶ si ottiene:

¹⁴In questo caso la regolarità deve essere almeno fino alla derivata seconda.

¹⁵Quindi si ha:

$$\dot{\Lambda} = \dot{\mathbf{S}}X + \mathbf{S}\dot{X} = \dot{\mathbf{S}}X + \mathbf{S}\mathbf{A}X + \mathbf{S}\mathbf{B}U = \dot{\mathbf{S}}X + \mathbf{S}\mathbf{A}X + -\mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S}X$$

dove si sono sostituite rispettivamente l'Eq.7.51, l'Eq.7.49 e 7.54.

¹⁶La sostituzione porta ad avere:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{S}}X + \frac{1}{2}X^T \mathbf{Q}_{,X} X + \frac{1}{2}X^T \mathbf{S}^T \mathbf{R}^{-T} \mathbf{R}_{,X} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{S} X + X^T \mathbf{A}_{,X}^T \mathbf{S} X - X^T \mathbf{S}^T \mathbf{R}^{-T} \mathbf{B}_{,X}^T \mathbf{S} X + \\ + [\mathbf{S} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{S} - \mathbf{S} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{S} + \mathbf{Q}] X = 0 \end{aligned} \quad (7.55)$$

dove è facilmente evidenziabile un termine rappresentante l'equazione algebrica di Riccati in questo caso però dipendente dallo stato. Se quindi si applica uno dei tanti metodi numerici che risolvono l'equazione algebrica di Riccati al sistema espresso dall'Eq.7.51 per un fissato stato X , di fatto si annulla il termine tra le parentesi quadre dell'Eq.7.55, ma non la restante parte dell'equazione:

$$\dot{\mathbf{S}}X + \frac{1}{2}X^T \mathbf{Q}_{,X} X + \frac{1}{2}X^T \mathbf{S}^T \mathbf{R}^{-T} \mathbf{R}_{,X} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{S} X + X^T \mathbf{A}_{,X}^T \mathbf{S} X - X^T \mathbf{S}^T \mathbf{R}^{-T} \mathbf{B}_{,X}^T \mathbf{S} X = 0 \quad (7.56)$$

Tale parte deve comunque essere verificata per garantire l'ottimalità della soluzione trovata e prende proprio il nome di condizione necessaria per l'ottimalità del metodo SDRE.

Come detto, il controllo ottenuto con la soluzione diretta dell'equazione algebrica di Riccati \mathbf{S}_0 risulta essere sub-ottimo. Tuttavia il sistema è forzato da una legge di controreazione e l'equazione della sua dinamica risulta essere:

$$\dot{X} = [\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{S}_0] X = \mathbf{A}_1 X \quad (7.57)$$

e risulterà quindi annullato il termine dentro le parentesi quadre dell'Eq.7.55: tale equazione quindi si riduce all'Eq.7.56. Allora si può pensare di convergere ad una soluzione ottima andando ad espandere il termine $\dot{\mathbf{S}}X$ dell'equazione 7.56 in questo modo:

$$\dot{\mathbf{S}}X = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \mathbf{S}(X)}{\partial x_i} \dot{x}_i \right] X = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{S}(X)}{\partial x_i} [A_1^i X] X \quad (7.58)$$

dove n rappresenta la dimensione dello spazio di stato. L'Eq.7.58 ha un importante significato geometrico: la derivata temporale viene risolta andando a "muoversi" seguendo il gradiente della $\mathbf{S}(X)$ con la "velocità" data dalle singole derivate dello spazio di stato del sistema forzato, cioè dal prodotto dell' i -esima riga della matrice \mathbf{A}_1 per lo spazio di stato X . L'Eq.7.58 si può quindi scrivere come¹⁷:

$$\dot{\mathbf{S}}X = \sum_{i=1}^n X^T A_1^{i-T} \frac{\partial \mathbf{S}(X)}{\partial x_i} X = \sum_{i=1}^n X^T N_i X \quad (7.59)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{S}}X + \mathbf{S} \mathbf{A} X + -\mathbf{S} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{S} X = \\ = -\mathbf{A}^T \mathbf{S} X - X^T \mathbf{A}_{,X}^T \Lambda - X^T \mathbf{B}_{,X}^T \Lambda - \mathbf{Q} X - \frac{1}{2} X^T \mathbf{Q}_{,X} X - \frac{1}{2} X^T \mathbf{S}^T \mathbf{R}^{-T} \mathbf{R}_{,X} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{S} X \end{aligned}$$

¹⁷Dove il prodotto avviene ora con la riga dello spazio di stato trasposto e la colonna data dalla trasposizione della riga i -esima di \mathbf{A}_1

che può essere sostituita all'interno dell'Eq.7.56 in modo da ottenere¹⁸:

$$\sum_{i=1}^n X^T M_i X = 0 \quad (7.60)$$

dove $M_i = N_i + \frac{1}{2} \mathbf{Q}_{,X} + \frac{1}{2} \mathbf{S}_i^T \mathbf{R}^{-T} \mathbf{R}_{,X} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{S}_i + \mathbf{A}_{,X}^T \mathbf{S}_i - \mathbf{S}_i^T \mathbf{R}^{-T} \mathbf{B}_{,X}^T \mathbf{S}_i$. Date le ipotesi di regolarità della parametrizzazione nell'intorno dell'origine e di nullità della $F(X=0) = 0$ nell'origine dello spazio di stato, allora l'intorni dell'origine sarà regione di attrazione per le forme quadratiche espresse dall'Eq.7.60 e quindi la soluzione convergerà asintoticamente all'ottimalità [16, 54].

Un metodo per convergere all'ottimalità è stato proposto da [97, 9, 6] in cui si definisce una variabile temporanea ϵ atta a separare la parte costante e la parte dipendente dallo stato nelle matrici della dinamica parametrizzata (Eq.7.51), nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(X) &= \mathbf{A}_0 + \epsilon \mathbf{A}_\epsilon(X) \\ \mathbf{B}(X, U) &= \mathbf{B}_0 + \epsilon \mathbf{B}_\epsilon(X, U) \end{aligned} \quad (7.61)$$

e quindi trovare una soluzione $\mathbf{S}(X)$ in termini di potenze della variabile temporanea ϵ :

$$\mathbf{S}(X, U, \epsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j L_j(X, U) \quad (7.62)$$

e sostituendo entrambe le imposizioni all'interno dell'Eq.7.55 e separando gli ordini di grandezza della variabili ϵ si ottiene il seguente algoritmo di risoluzione:

$$\mathbf{L}_0 \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_0^T \mathbf{L}_0 - \mathbf{L}_0 \mathbf{B}_0 \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_0^T \mathbf{L}_0 + \mathbf{Q} = 0 \quad (7.63)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1 (\mathbf{A}_0 - \mathbf{B}_0 \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_0^T \mathbf{L}_0) + (\mathbf{A}_0 - \mathbf{B}_0 \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_0^T \mathbf{L}_0)^T \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_0 \mathbf{A}_\epsilon + \mathbf{A}_\epsilon^T \mathbf{L}_0 + \\ - \mathbf{L}_0 (\mathbf{B}_0 \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_\epsilon^T + \mathbf{B}_\epsilon \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_0^T) \mathbf{L}_0 = 0 \end{aligned} \quad (7.64)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_j (\mathbf{A}_0 - \mathbf{B}_0 \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_0^T \mathbf{L}_0) + (\mathbf{A}_0 - \mathbf{B}_0 \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_0^T \mathbf{L}_0)^T \mathbf{L}_j + \mathbf{L}_{j-1} \mathbf{A}_\epsilon + \mathbf{A}_\epsilon^T \mathbf{L}_{j-1} + \\ - \sum_{i=1}^{j-1} \mathbf{L}_i (\mathbf{B}_0 \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_\epsilon^T) \mathbf{L}_{j-i} - \sum_{i=0}^{j-1} \mathbf{L}_i (\mathbf{B}_0 \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_\epsilon^T + \mathbf{B}_\epsilon \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_0^T) \mathbf{L}_{j-1-i} + \\ - \sum_{i=0}^{j-2} \mathbf{L}_i (\mathbf{B}_\epsilon \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_\epsilon^T) \mathbf{L}_{j-2-i} = 0 \end{aligned} \quad (7.65)$$

¹⁸Sostituendo si ottiene:

$$\sum_{i=1}^n (X^T N_i X) + \frac{1}{2} X^T \mathbf{Q}_{,X} X + \frac{1}{2} X^T \mathbf{S}^T \mathbf{R}^{-T} \mathbf{R}_{,X} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{S} X + X^T \mathbf{A}_{,X}^T \mathbf{S} X - X^T \mathbf{S}^T \mathbf{R}^{-T} \mathbf{B}_{,X}^T \mathbf{S} X = 0$$

da cui si possono ricavare le \mathbf{L}_j necessarie a trovare una legge di controllo che si avvicina a quella ottima:

$$U(X) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{L}_j X \quad (7.66)$$

Si noti che l'algoritmo di risoluzione espresso dalle Eq.7.63, Eq.7.64 ed Eq.7.65 è costituito da un'equazione algebrica di Riccati ed $N_p - 1$ equazioni algebriche di Lyapunov (dove N_p rappresenta il numero di ordine a cui ci si vuole arrestare nell'approssimazione): ciò significa che non occorre eseguire operazioni di integrazione a tempo inverso o utilizzare codici di ottimizzazione pseudo spettrali, ma il computo del controllo ottimo risulta essere molto più agevole in quanto ci sono solo operazioni algebriche da effettuare, peraltro presenti in moltissime librerie scientifiche.

7.10 Parametrizzazione SDC delle Equazioni

Sia l'Eq.7.4 con l'Eq.7.5 che l'Eq.7.10 con l'Eq.7.11 possono essere messe nella forma State Dependent Coefficient, cioè esplicitando le equazioni in modo da estrarre il relativo vettore di stato.

In particolare il set di equazioni formato dalle Eq.7.4 e l'Eq.7.5 può essere riscritto nel seguente modo [2, 14]:

$$\dot{X}_{iT} = \mathbf{A}_{iT}(X_{iT})X_{iT} + \mathbf{B}_{iT}(X_{iT})U_i \quad (7.67)$$

dove si considera come vettore di stato:

$$X_{iT} = \begin{bmatrix} \vec{\omega}_{iT} \\ \vec{q}_{iT} \end{bmatrix} \quad (7.68)$$

e la matrice della dinamica dipendente dallo stato $\mathbf{A}_{iT}(X_{iT})$ è partizionabile nel seguente modo:

$$\mathbf{A}_{iT}(X_{iT}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{iT}^{11}(X_{iT}) & \mathbf{A}_{iT}^{12}(X_{iT}) \\ \mathbf{A}_{iT}^{21}(X_{iT}) & \mathbf{A}_{iT}^{22}(X_{iT}) \end{bmatrix} \quad (7.69)$$

dove:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{iT}^{11}(X_{iT}) &= -{}^i\mathbf{J}_i^{-1} \cdot \left[\tilde{\mathbf{C}}(\vec{\omega}_{TI})^i \mathbf{J}_i - \tilde{\mathbf{C}}({}^i\mathbf{J}_i \cdot \vec{\omega}_{TI}) + \tilde{\mathbf{C}}(\vec{\omega}_{iT})^i \mathbf{J}_i \right] \\ \mathbf{A}_{iT}^{12}(X_{iT}) &= -\tilde{\mathbf{D}}(\vec{\omega}_{TI}, \mathbf{Q}_{iT}) - {}^i\mathbf{J}_i^{-1} \cdot \left[\tilde{\mathbf{C}}(\vec{\omega}_{TI})^i \mathbf{J}_i \right] \tilde{\mathbf{D}}(\vec{\omega}_{TI}, \mathbf{Q}_{iT}) \\ \mathbf{A}_{iT}^{21}(X_{iT}) &= \frac{1}{2} q_{iT-4} \underline{\underline{u}} \\ \mathbf{A}_{iT}^{22}(X_{iT}) &= \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{C}}(\vec{\omega}_{iT}) \end{aligned} \quad (7.70)$$

Nella precedente rappresentazione SDC precedente si sono definite due funzioni $\tilde{\mathbf{C}}(\vec{\omega})$ e $\tilde{\mathbf{D}}(\vec{\omega}, \mathcal{Q})$ che restituiscono matrici di dimensioni 3x3 i cui elementi sono dati da:

$$\tilde{\mathbf{C}}(\vec{\omega}) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.71)$$

$$\tilde{\mathbf{D}}(\vec{\omega}, \mathcal{Q}) = \begin{bmatrix} \omega_2 q_2 + \omega_3 q_3 + \omega_1 d & -\omega_1 q_2 - \omega_3 q_4 + \omega_1 d & -\omega_1 q_3 - \omega_2 q_4 + \omega_1 d \\ -\omega_2 q_1 + \omega_3 q_4 + \omega_2 d & \omega_1 q_1 + \omega_3 q_3 + \omega_2 d & -\omega_1 q_4 + \omega_2 q_3 + \omega_2 d \\ -\omega_2 q_4 - \omega_3 q_1 + \omega_3 d & \omega_1 q_4 - \omega_3 q_2 + \omega_3 d_1 & \omega_1 q_1 + \omega_2 q_2 + \omega_3 d \end{bmatrix} \quad (7.72)$$

dove $d = 1/(1 - q_4)$. La matrice di distribuzione del controllo $\mathbf{B}_{iT}(X_{iT})$ è dipendente dal tipo di attuatori utilizzati per il controllo e il vettore U_i è il controllo applicato al satellite per poter effettuare la manovra.

Analogamente le Eq.7.10 e Eq.7.11 possono essere messe nello spazio di stato come segue:

$$\dot{X}_{ij} = \mathbf{A}_{ij}(X_{ij})X_{ij} + \mathbf{B}_{ij}(X_{ij})U_{ij} \quad (7.73)$$

dove la matrice della dinamica $\mathbf{A}_{ij}(X_{ij})$ risulta essere partizionata:

$$\mathbf{A}_{ij}(X_{ij}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{ij}^{11}(X_{ij}) & \mathbf{A}_{ij}^{12}(X_{ij}) \\ \mathbf{A}_{ij}^{21}(X_{ij}) & \mathbf{A}_{ij}^{22}(X_{ij}) \end{bmatrix} \quad (7.74)$$

dove:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{ij}^{11}(X_{ij}) &= -{}^i\mathbf{J}_i^{-1} \cdot \left[\tilde{\mathbf{C}}(\vec{\omega}_{jI})^i \mathbf{J}_i - \tilde{\mathbf{C}}({}^i\mathbf{J}_i \cdot \vec{\omega}_{jI}) + \tilde{\mathbf{C}}(\vec{\omega}_{ij})^i \mathbf{J}_i \right] \\ \mathbf{A}_{ij}^{12}(X_{ij}) &= -\tilde{\mathbf{D}}(-{}^i\mathbf{J}_j^{-1} \cdot [{}^i\vec{\omega}_{jI} \times ({}^i\mathbf{J}_j \cdot {}^i\vec{\omega}_{jI})], \mathcal{Q}_{ij}) - {}^i\mathbf{J}_i^{-1} \cdot \left[\tilde{\mathbf{C}}(\vec{\omega}_{jI})^i \mathbf{J}_i \right] \tilde{\mathbf{D}}(\vec{\omega}_{jI}, \mathcal{Q}_{ij}) \\ \mathbf{A}_{ij}^{21}(X_{ij}) &= \frac{1}{2} q_{ij-4} \underline{\underline{u}} \\ \mathbf{A}_{ij}^{22}(X_{ij}) &= \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{C}}(\vec{\omega}_{ij}) \end{aligned} \quad (7.75)$$

dove le funzioni $\tilde{\mathbf{C}}(\vec{\omega})$ e $\tilde{\mathbf{D}}(\vec{\omega}, \mathcal{Q})$ sono espresse rispettivamente dall'Eq.7.71 e dall'Eq.7.72. Il controllo U_{ij} in questo caso si distribuisce sulla dinamica relativa di entrambe le piattaforme mediante la matrice di distribuzione $\mathbf{B}_{ij}(X_{ij})$.

Entrambe le rappresentazioni SDC sono utili, non tanto per la modellazione della dinamica del sistema, ma sono una forma molto comoda per la progettazione di sistemi di controllo non lineari come il caso del controllo SDRE. Infatti in questo modo per entrambi i problemi le rappresentazioni fornite dall'Eq.7.68 o dall'Eq.7.73 presentano l'origine dello spazio di stato come punto in cui i requisiti di tracking e puntamento sono soddisfatti, e nell'intorno di tale punto i requisiti di regolarità della parametrizzazione SDC sono

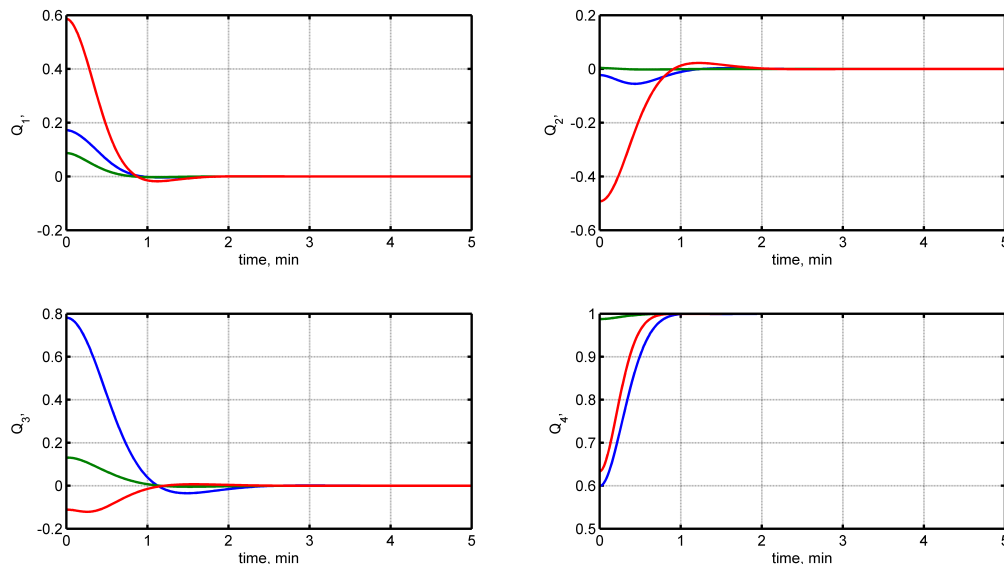


Figura 7.27: Quaternione rappresentante l'assetto nel caso di formazione non coordinata, target fisso, controllo SDRE

soddisfatti.

7.11 Applicazione del SDRE all'assetto coordinato

L'analisi delle performance del metodo SDRE è stata condotta mediante l'utilizzo degli stessi esempi mostrati nelle sezioni 7.5 e 7.8. Analogamente a quanto fatto per il caso di applicazione delle tecniche di controllo basate su modelli lineari, anche in questo caso si sono formulate separatamente le equazioni che risolvono il problema di coordinazione e puntamento dei satelliti verso una direzione definita come target.

In particolare per la risoluzione del problema di coordinazione si possono usare come plant su cui progettare il controllo non lineare il sistema rappresentato dall'Eq.7.44, qualora si adotti uno schema di controllo decentralizzato, o l'Eq.7.45 nel caso si voglia ipotizzare l'esistenza di un agente di controllo globale[38], con l'accortezza di sostituire alle matrici della dinamica lineare le rispettive matrici della dinamica non lineare espresse nella forma SDC trovate nella sezione 7.10. In questo modo sarà possibile applicare la procedura di risoluzione esposta nella sezione 7.9.

Anche in questo caso si parte con l'analizzare i casi di controllo d'assetto non coordinato. La formazione di 3 satelliti dovrà quindi orientare il proprio assetto verso una direzione fissa definita come target. La Fig.7.27 e la Fig. 7.28 mostrano l'assetto delle piattaforme nel caso di controllo non lineare scoordinato verso il target. L'azione di controllo mostrata in Fig.7.29, calcolata mediante la risoluzione del SDRE parallelamente agli step necessari per l'integrazione delle equazioni del moto, evidenzia come le non linearità influenzino solo in parte il controllo: di fatti effettuando un confronto con il caso mostrato

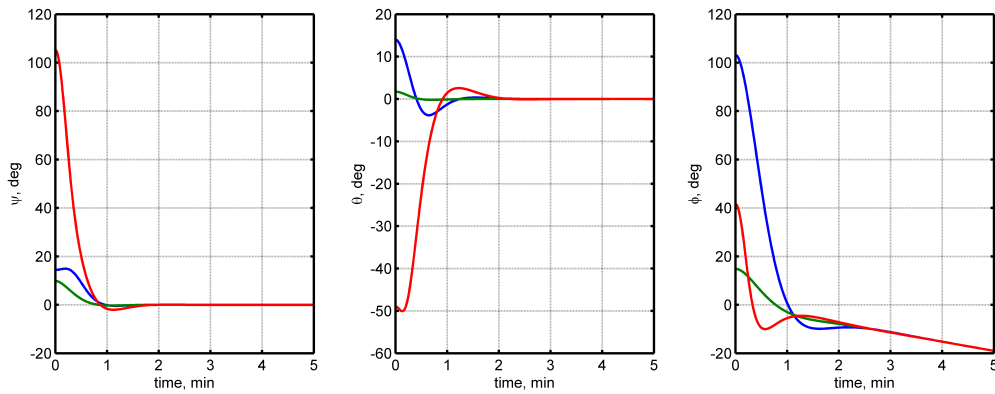


Figura 7.28: Angoli di Eulero 123 dell'assetto delle piattaforme rispetto al riferimento LVLH

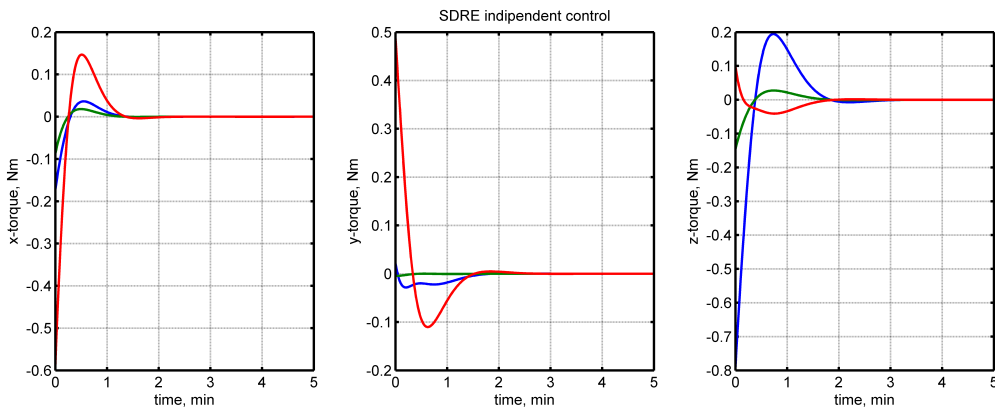


Figura 7.29: Controllo nel caso di formazione non coordinata, target fisso e controllo SDRE

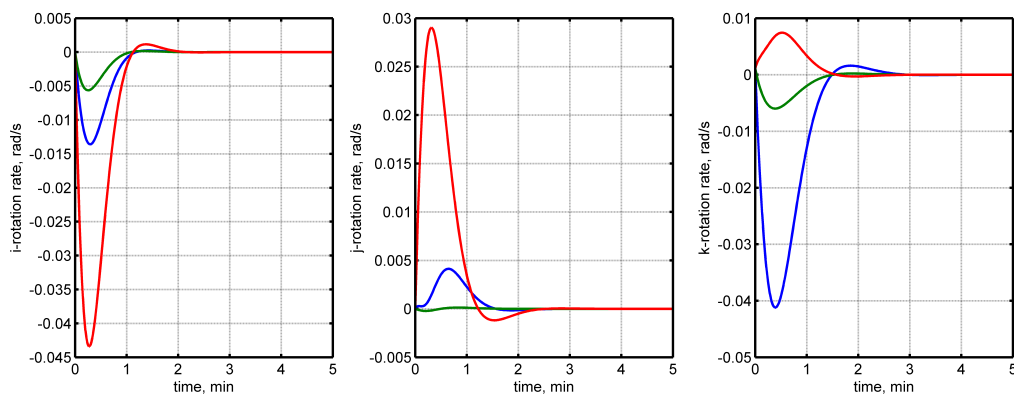


Figura 7.30: Velocità angolare formazione non coordinata, target fisso, controllo SDRE

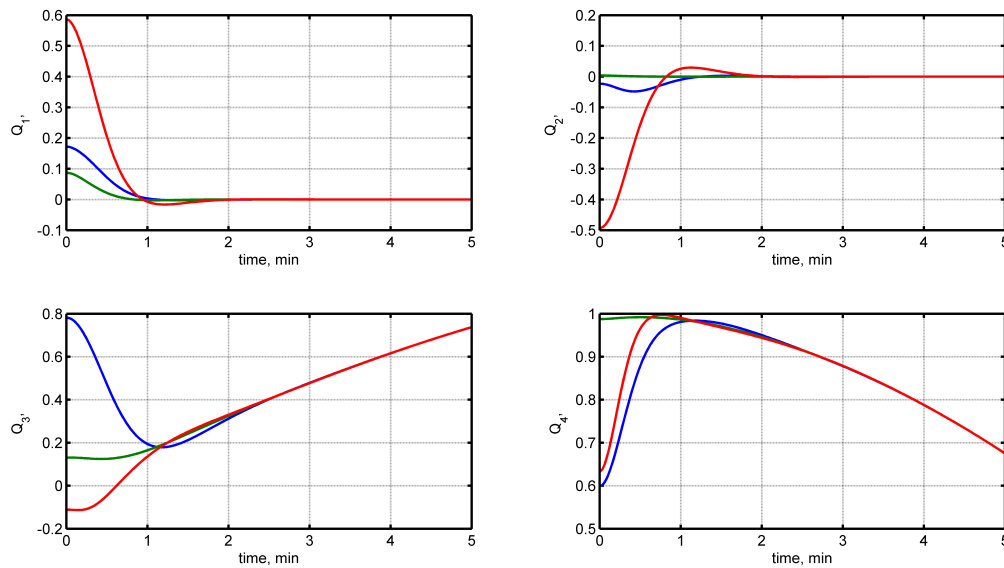


Figura 7.31: Quaternione rappresentante l'assetto nel caso di formazione non coordinata, target in movimento, controllo SDRE

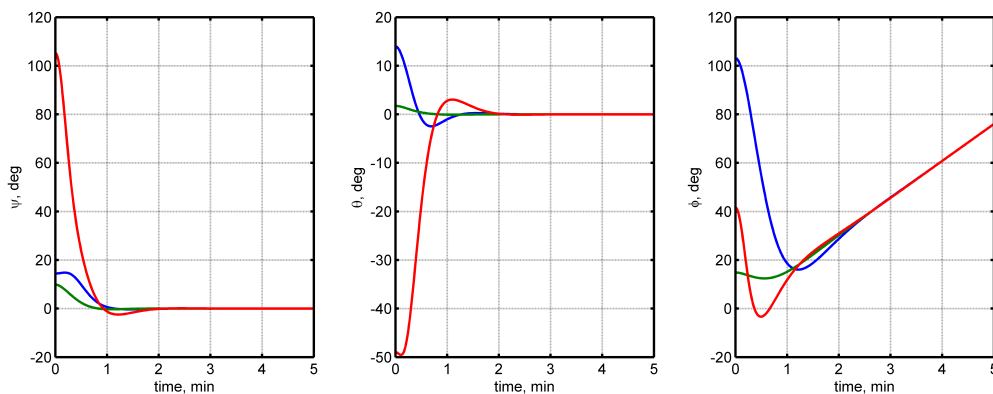


Figura 7.32: Angoli di Eulero 123 dell'assetto delle piattaforme rispetto al riferimento LVLH

nella Fig.7.15, queste risultano essere sostanzialmente simili. L'andamento delle velocità angolari delle piattaforme è mostrato nella Fig.7.30.

Se la direzione target viene posta in rotazione, l'intera formazione seguirà l'assetto target: le Fig.7.31 e Fig.7.32 mostrano come, dopo un periodo iniziale di raggiungimento indipendente dell'assetto target, tutte le piattaforme seguiranno il suo stesso moto di rotazione. L'azione di controllo è rappresentata in Fig.7.34 e mostra come una delle componenti della coppia applicata alle piattaforme non potrà annullarsi perché è atta a controllare il corretto tracking del target. La velocità angolare è mostrata in Fig.7.33.

L'evoluzione della dinamica della formazione nel caso di coordinazione ottimizzata tra le piattaforme è mostrata in Fig.7.35 e in Fig.7.36. Come si evince da tali figure, le non linearità presenti nel sistema con cui è stato progettato il controllore, influenzano non poco l'evoluzione della dinamica di tutte le piattaforme: le curve risultano essere non regolari come nei casi precedenti e ciò in ragione del fatto che ogni singola correzione

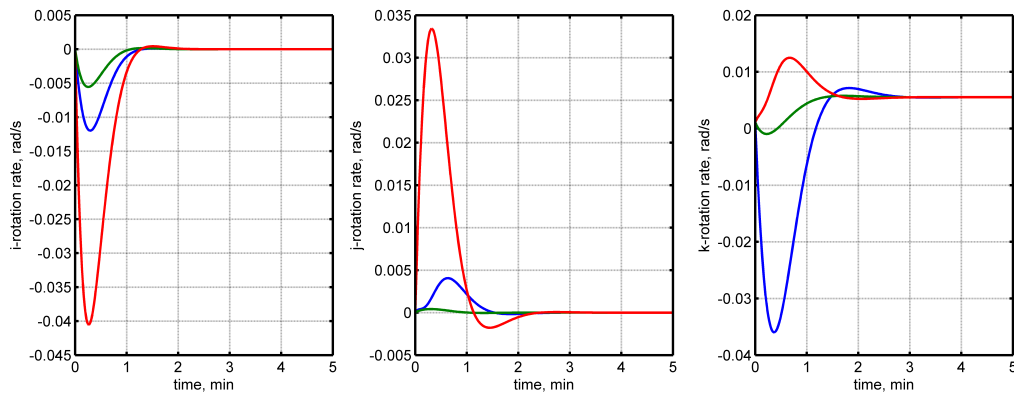


Figura 7.33: Velocità angolare formazione non coordinata, target in movimento, controllo SDRE

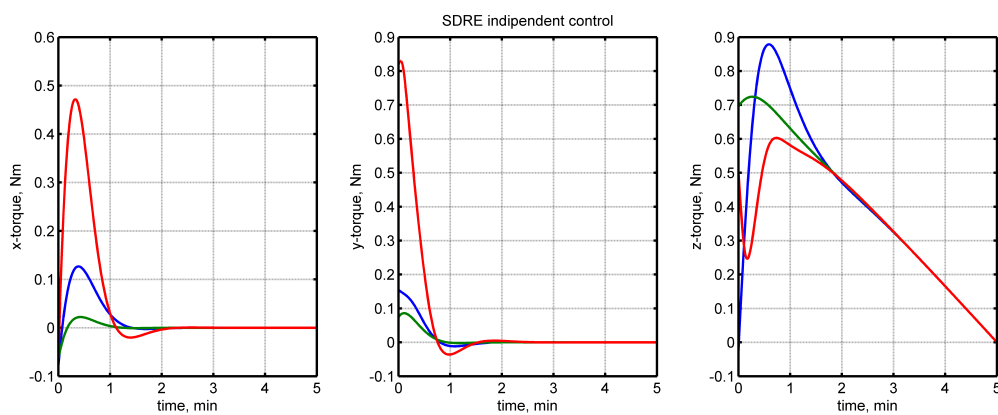


Figura 7.34: Controllo nel caso di formazione non coordinata, target in movimento e controllo SDRE

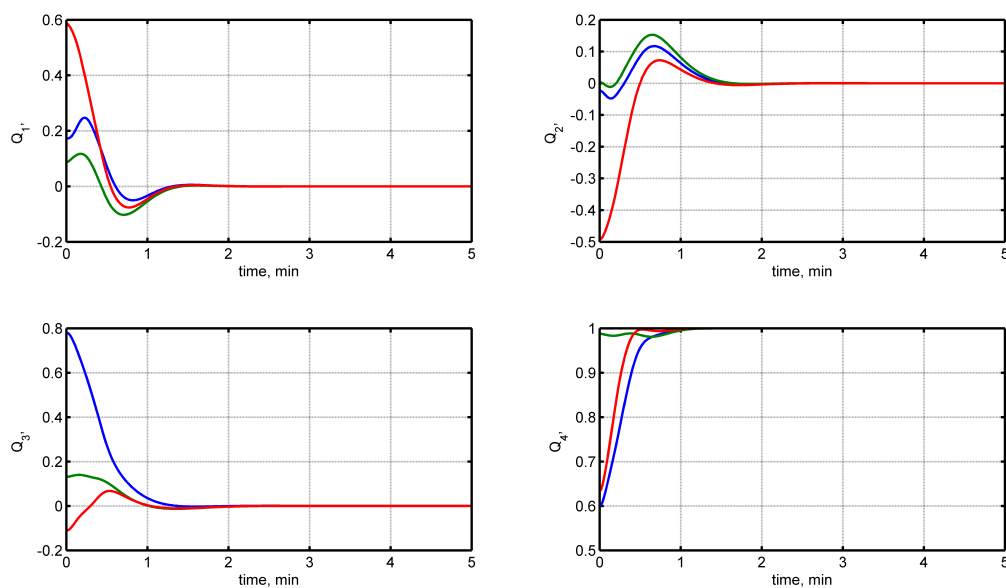


Figura 7.35: Quaternione dell'assetto delle piattaforme nel caso di controllo SDRE coordinato e target fisso

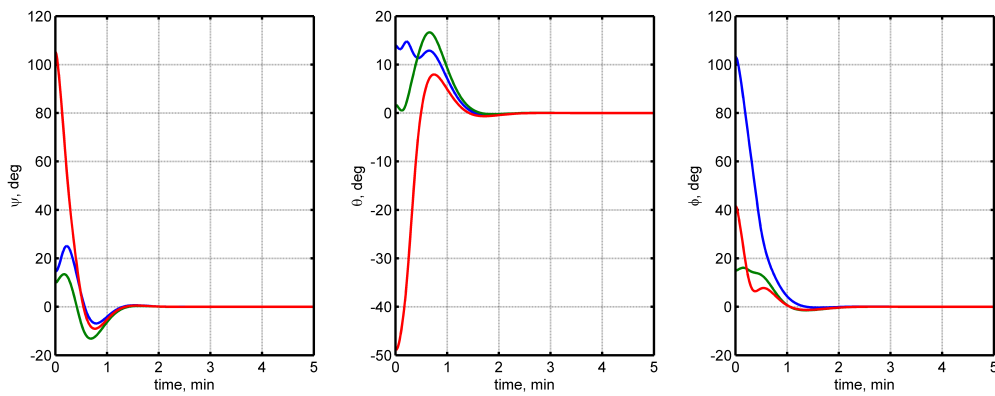


Figura 7.36: Angoli di Eulero 123 nel caso di controllo coordinato SDRE e target fisso

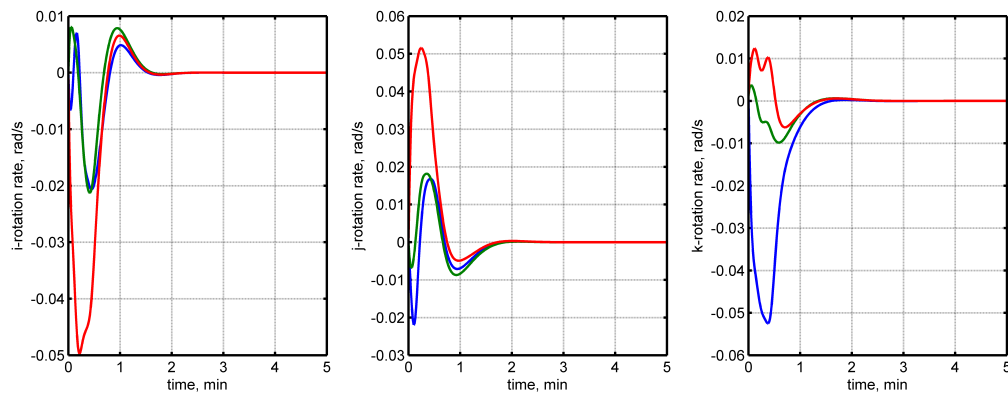


Figura 7.37: Velocità angolare delle piattaforme nel caso di controllo coordinato SDRE e target fisso

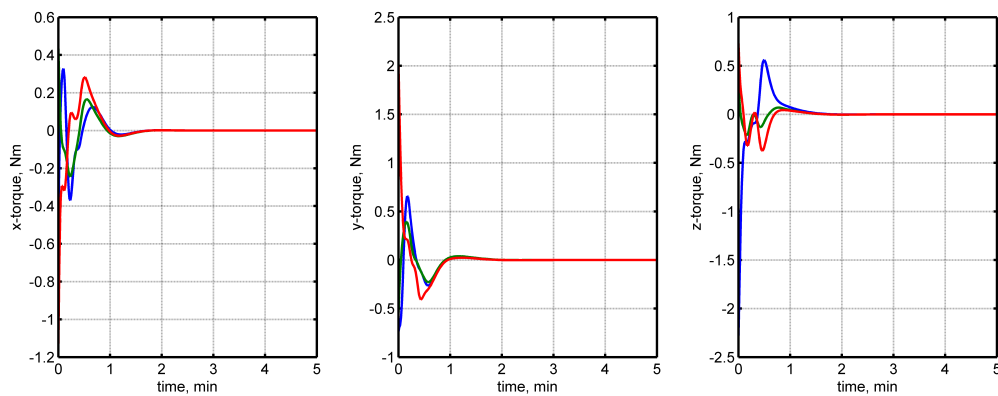


Figura 7.38: Azioni di controllo nel caso di regolatore e coordinazione basata su SDRE e target fisso

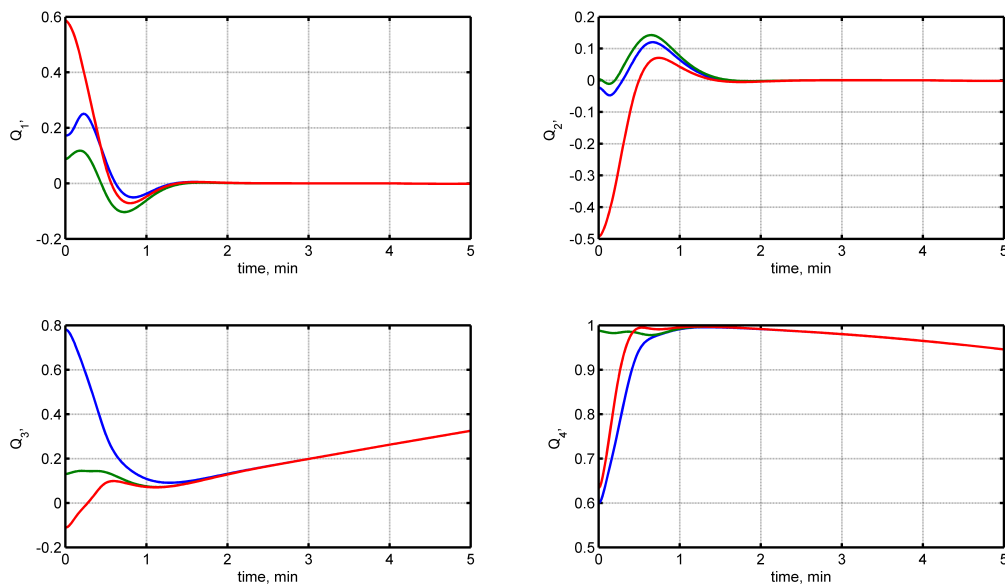


Figura 7.39: Quaternione dell'assetto delle piattaforme nel caso di coordinazione SDRE e puntamento di un target in movimento

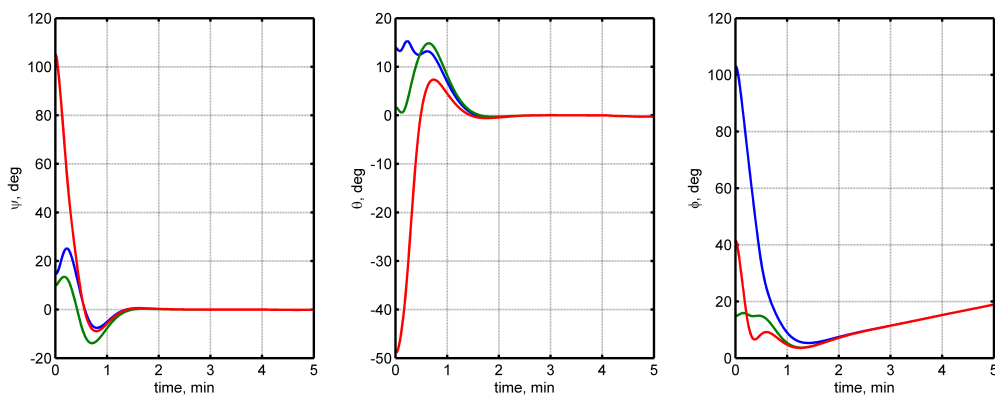


Figura 7.40: Angoli di Eulero 123 nel caso di coordinazione SDRE e puntamento di un target in movimento

d'assetto di una delle piattaforme si ripercuote sulle altre in modo diretto. Ciò è altresì evidente se si analizzano i grafici relativi alla velocità angolare, mostrata in Fig. 7.37, e le azioni di controllo che si ottengono andando a risolvere l'equazione di Riccati associata alle dinamiche relative tra le piattaforme, mostrate in Fig.7.38.

Analogamente al caso precedente, le stesse non linearità determinano un andamento non regolare dell'assetto anche nel caso di target in movimento, come mostrato dalle Fig.7.39 e Fig.7.40. Le velocità angolari sono mostrate in Fig.7.41 e le azioni di controllo sono rappresentate in Fig.7.42.

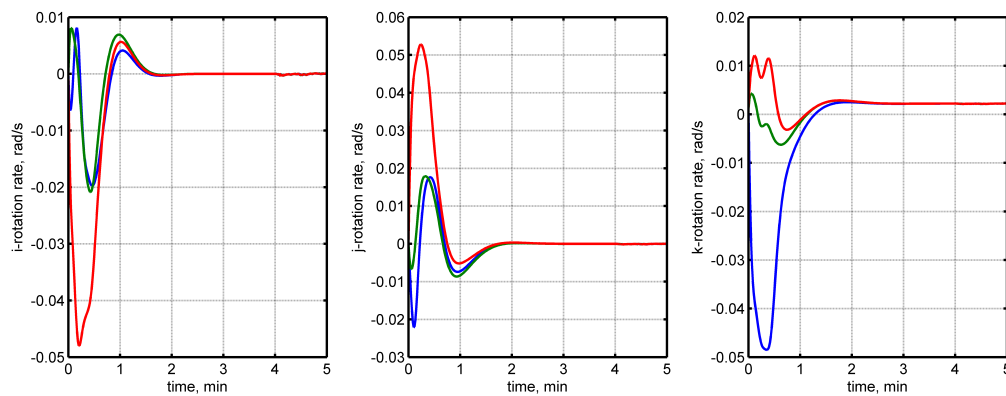


Figura 7.41: Velocità angolare delle piattaforme nel caso di coordinazione SDRE e target in movimento

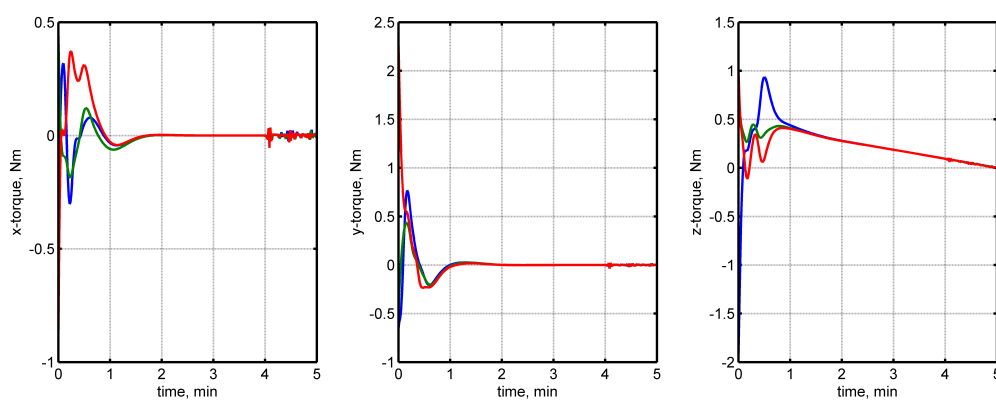


Figura 7.42: Controllo SDRE nel caso di coordinazione della formazione e puntamento del target in movimento

Conclusione

La tesi affronta la dinamica e il controllo di sistemi spaziali formati da più corpi: si tratta di un problema che, con il progresso della tecnologia, vede sempre più realizzazioni pratiche. Sono state studiate, implementate e simulate in base al tipo di problema affrontato, permettendo di acquisire una sensibilità nell'utilizzo di tali tecniche al fine di poter meglio rappresentare, simulare e controllare sistemi di natura non lineare e complessa spaziale. Il problema dei vincoli tra i vari corpi delle possibili piattaforme spaziali è analizzato in tutte le sue applicazioni, siano esse manipolatori robotici montati su piattaforme, strutture elastiche come le space web o leggi di guida trovate per mezzo di imposizioni di vincoli tipo quelli imposti nei classici modelli multibody.

. In particolare nella prima parte del lavoro si è esteso al campo spaziale la metodologia di analisi di sistemi robotici industriali basata sull'utilizzo di matrici omogenee, iterativa e valida per qualunque numero di corpi, finora utilizzata solo per applicazioni terrestri. Tale tecnica è stata implementata in maniera originale e con successo al caso spaziale, consentendo la preparazione di un codice che sarà utilizzato nell'ambito di futuri studi su grandi sistemi robotici. Nella seconda parte ci si è concentrati sui sistemi di più corpi collegati da elementi non più rigidi (come nei manipolatori precedentemente trattati) ma flessibili: è lo schema da adottare per l'analisi del comportamento di progetti forse futuribili ma di sicuro interesse come le space webs, utili per la costruzione di grandi osservatori o di collettori solari orbitanti. Si è prestata particolare attenzione alla modellazione dei cavi attraverso una formulazione agli elementi finiti, non comune nello studio di queste strutture. Inoltre la stabilizzazione e il controllo d'assetto di tali strutture è argomento attuale di interesse e l'ipotesi di utilizzare a tal fine scambiatori di momento angolare è stata discussa e simulata.

La formulazione di nuove leggi di guida per il moto in formazione dei satelliti con l'ausilio di metodi e modelli multibody ha portato alla verifica dell'equivalenza tra le due formulazioni per via teorica e per via numerica. Per quanto non possa sembrare banale controllare la formazione per mezzo di questo metodo, il risvolto applicativo potrebbe essere interessante dal momento che il computo delle spinte necessarie ad effettuare manovre "evidenziate dal movimento dei link virtuali" risulta essere completamente risolto utilizzando funzioni di inversione dinamica validate e sviluppate in ambito terrestre. Sempre per il caso dei sistemi costituiti da più corpi rappresentati dalle formazioni, è stata poi condotta una analisi comparativa tra diverse metodologie di controllo coordinato, con-

siderando modelli linearizzati mediante controreazione dello stato, mediante controllori ottimi basati su dinamiche linearizzate dell'assetto o mediante l'applicazione della tecnica State Dependent Riccati Equation. In particolare si sono progettati agenti di controllo di tipo locale e globale al fine di compiere manovre di acquisizione coordinata del target: una tipologia di manovra che solo ora trova un'applicazione reale a causa delle recenti missioni che vedono coinvolte piattaforme satellitari in formazione.

Al di là dei pur validi risultati ottenuti con le simulazioni, si ritiene che i contributi principali del lavoro di tesi siano rappresentati da (i) la codifica di un procedimento iterativo per l'analisi di sistemi multicorpo spaziali; (ii) l'aver evidenziato alcuni possibili vantaggi nell'affrontare lo studio di sistemi spaziali di diversa tipologia con i medesimi approcci dell'analisi di sistemi multibody.

Bibliografia

- [1] Aamo, O.M., Fossen, T.I., “*Finite element modelling of mooring lines*”, Mathematics and Computers in Simulations, Vol.53, pp.415-422, 2000.
- [2] Abdelrahman M., Chang I., Park S.Y., “*Magnetic torque attitude control of a satellite using the state-dependent Riccati equation technique*”, International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol.46, 2011, pp. 758–771
- [3] Alfriend, K., Vadali, R.S., Gurfil, P., How, J., Breger, L., *Spacecraft Formation Flying: Dynamics, Control and Navigation*, Butterworth-Heinemann, 2009.
- [4] Arnold V.I., “*Metodi Matematici della Meccanica Classica*”, Editori Riuniti, 2004.
- [5] Aslanov, V., Kruglov, G., Yudintsev, V., “*Newton Euler equations of multibody systems with changing structures for space applications*”, Acta Astronautica, Vol.68, pp.2080-2087, 2011
- [6] Banks H.T., Lewis B.M., Tran H.T., “*Nonlinear feedback controllers and compensators: a state-dependent Riccati equation approach*”, Computational Optimization and Applications, Vol. 37, Issue 2, 2007, pp.177-218.
- [7] Baumgarte J. , “*Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems*”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 1, 1972.
- [8] Beard, R.W., Lawton, J., Hadaegh, F.Y., , “*A coordination architecture for spacecraft formation control*”, IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol.9, No.6, Nov 2001, pp.777-790
- [9] Beeler, S. C., “*State Dependent Riccati Equation Regulation of Systems with State and Control Nonlinearities*”, NASA/CR-2004-213245, NIA Report No. 2008-08. July 2004.
- [10] Beletsky, V.V., Levin, E.M., “*Dynamics of Space Tether Systems*”, Univelt Inc., 1993.
- [11] Betsch, P., Steinmann, P., “*A DAE Approach to Flexible Multibody Dynamics*”, Multibody System Dynamics, Vol.8, pp. 367-391, 2002.

- [12] Bryson, A.E., Ho, Y.C., *“Applied Optimal Control”*, Hemisphere Publishing Co., 1975.
- [13] Canon.,H., Modi, V.J., Misra, A.K., *“Order N Formulation and Dynamics of Multi Unit Flexible Space Manipulatoros”*, Multibody Systema Dynamics, Vol.17, pp. 347-368, 1998.
- [14] Chang I., Park S. Y., Choi K.H., *“Decentralized coordinated attitude control for satellite formation flying via the state-dependent Riccati equation technique”*, International Journal of Non-Linear Mechanics, Volume 44, Issue 8, October 2009, Pages 891-904.
- [15] Cheli, F., Pennestrì, E., *“Cinematica e Dinamica dei Sistemi Multibody”*, Casa Editrice Ambrosiana, 2006.
- [16] Cimen, T., *“State Dependent Riccati Equation (SDRE) Control: A Survey”*, Proceedings of the 17th IFAC World Congress, Seoul, Korea, July 6-11, 2008.
- [17] Clohessy, W.H., Wiltshire, R.S., *“Terminal Guidance for a Satellite Rendez-vous”*, Journal of Aerospace Sciences, vol.27, (1960).
- [18] D. T., Cloutier J. R., *“Position and Attitude Control of a Spacecraft Using the State-Dependent Riccati Equation Technique”*, Proceedings of the American Control Conference, 2000, Chicago
- [19] Denavit, J., Hartenberg, R.S., Razi, R., Uicker,J.J, *“Velocity, Acceleration and Static Forces Analyses of Spatial Linkages”*, Journal of Applied Mechanics, Transactions of ASME, pp. 903-910, 1965
- [20] Denavit, J., Hartenberg, R.S., *“A Kinematics Notation for Lower Pair Mechanisms based on Matrices”*, Transactions ASME Journal Applied Mechanics, Vol.22, pp. 215-221, 1955.
- [21] Di Mauro, G., Di Lizia, P., Armellin, R., Lavagna, M., *“Non Linear Control of Leader-Follower Formation Flying”*, 1st IAA/AAS Dynamics and Control of Space Systems Conference, Porto, Portugal, 19-21 Mar., IAA-AAS-DyCoSS1-03-03
- [22] De Queiroz M. S., Kapila V., and Yan, Q., *“Adaptive nonlinear control of multiple spacecraft formation flying”*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 23, no. 3, pp. 385–390, 2000.
- [23] Dooley, J. A. and Lawson, P.R. *“Technology Plan for the Terrestrial Planet Finder Interferometer”*, JPL Publication 05-5, 2005
- [24] Ellery, A., *“An engeneering approach to the dynamic control of space robotic on orbit servicers”*, Journal of Aerospace Engineering, Proc. Instr.Mech.Engrs. Vol.218 Part. G, 2004.

- [25] Felicetti L., Sabatini M., Palmerini G.B., “*Coordinated Attitude Control for Enhanced Stability of a Space Web*”, 62th International Conference of Astronautics, Cape Town, South Africa, 3-7 Oct, 2011, IAC-11,D4,4,5.
- [26] Felicetti L., Palmerini G.B., “*Modelling the Formationkeeping Control with Multibody Codes*”, IEEE/AESS 2012 Aerospace Conference, Big Sky, Montana, USA, 3-10 Mar., 2012, DOI: 10.1109/AERO.2012.6187070.
- [27] Felicetti L., Palmerini G.B., “*Formation Flying Dynamics Analysis by means of a Virtual Multibody Approach*”, 1st IAA/AAS Dynamics and Control of Space Systems Conference, Porto, Portugal, 19-21 Mar., IAA-AAS-DyCoSS1-06-08.
- [28] Felicetti L., Palmerini G.B., “*Coordinated Attitude Control for Heterogeneous Spacecraft Formation Missions*”, AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference, Minneapolis, Minnesota, USA, Aug. 13-16, 2012, IAA AIAA-2012-4514.
- [29] Felicetti L., Palmerini G.B., “*Space Web Dynamics and Configuration Control by means of Reaction Wheels*”, AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference, Minneapolis, Minnesota, USA, Aug. 13-16, 2012, IAA AIAA-2012-4659.
- [30] Felicetti, L., Sabatini, M., Palmerini, G.B., “*Coordinated Attitude Control for Enhanced Shape Stability of a Space Web*”, 62nd International Astronautical Congress, IAC 2011, 6, pp.8127-8134 (2011)
- [31] Fridlund, C.V.M., “*Darwin – the Infrared Space Interferometry Mission*”, ESA-Bulletin, Vol. 100, 2000, pp. 20-25.
- [32] Gärdback, M., Tibert, G., “*Deployment control of spinning space webs*”, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 32 (1), pp. 40-50, (2009)
- [33] Gärdback, M., Tibert, G., “*Optimal deployment control of spinning space webs and membranes*”, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 32 (5), pp. 1519-1530, (2009)
- [34] Gogu G., “*Chebyshev–Grübler–Kutzbach’s criterion for mobility calculation of multi-loop mechanisms revisited via theory of linear transformations*”, European Journal of Mechanics - A/Solids, Volume 24, Issue 3, May–June 2005, Pages 427-441.
- [35] Hall, C.D., Tsiotras, P., Shen, H., “*Tracking Rigid Body Motion Using Thrusters and Momentum Wheels*”, Journal of the Astronautical Sciences, Vol. 50, No.3, 2002, pp.311-323.
- [36] Hughes, P.C., “*Spacecraft Attitude Dynamics*”, Dover Publications, inc., 2004.
- [37] Kane, T.R., Levinson D.A., “*A Multibody Motion Stability Analysis*”, Multibody System Dynamics, Vol.3, pp. 287-299, 1999.

- [38] Kang, W., Sparks, A., Banda, S., “*Coordinated Control of Multisatellite Systems*”, Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol.24, No. 2, 2001, pp. 360-368.
- [39] Kaplan M.H., “*Modern Spacecraft Dynamics and Control*”, John Wiley & Sons., 1976.
- [40] Kaya, N., Iwashita, M., Nakasuka, S., Summerer, L., Mankins, J., “*Crawling Robots on Large Web in Rocket Experiment on Furoshiki Deployment*”, 55th International Astronautical Congress, paper IAC-04-R3, Vancouver (2004).
- [41] Krieger, G., Moreira, A., Fiedler, H., Hajnsek, I., Werner, M., Younis, M., Zink, M., “*TanDEM-X: A Satellite Formation for High-Resolution SAR Interferometry*”, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, vol.45, no.11, Nov. 2007, pp.3317-3341.
- [42] Krogstad, T.R., Gravdahl, J.T., “*Coordinated Attitude Control of Satellites in Formation*”, in Pettersen, K., Gravdahl, J., Nijmeijer, H., “Group Coordination and Cooperative Control”, Chap 9. Springer Berlin, 2006
- [43] Kunz, D., “*Implementation of a Generalized Multibody Approach for Analysis of Dynamic Systems*”, AIAA 2005-2348, 46th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference 18-21 April 2005 Austin, Texas
- [44] Kwon, Y.W., Bang, H., “*The finite element method using Matlab*”, second ed. CRC Press, 2000.
- [45] Lawton J., Beard R.W., Hadaegh F.Y., “*Elementary Attitude Formation Maneuvers Via Leader-Following and Behavior- Based Control*”, AIAA Paper 2000-4442, Aug. 2000
- [46] Legnani, G., *Robotica Industriale*, Casa Editrice Ambrosiana, 2003.
- [47] Legnani, G., Casolo, F., Righettini, P., Zappa, B., “*A Homogeneous matrix approach to 3D kinematics and dynamics: 1. Theory*”, Mech. Mach. Theory, Vol.31, No. 5, pp. 573-587, 1996.
- [48] Legnani, G., Casolo, F., Righettini, P., Zappa, B., “*A Homogeneous matrix approach to 3D kinematics and dynamics: 2. Applications to chains of rigid bodies and serial manipulators*”, Mech. Mach. Theory, Vol.31, No. 5, pp. 587-605, 1996.
- [49] Mankins, J., Feingold, H., Strancati, M., Friedlander, A., Jacobs M., Cornstock, D., Christensen C., Maryniak, G., Rix. S., “*Space solar power - a fresh look at the feasibility of generating solar power in space for use on Earth*”, Tech. Rep. SIAC-97/1005, NASA, SAIC, 1997

- [50] M.Massari, Bernelli-Zazzera F., Canavesi.S., "*Nonlinear Control of Formation Flying with State Constraints*", Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 35, No. 6 (2012), pp. 1919-1925. doi: 10.2514/1.55590
- [51] Massari M., Zamaro M., "*Application of SDRE Technique to Orbital and Attitude Control of Spacecraft Formation Flying*", 1st IAA/AAS Dynamics and Control of Space Systems Conference, Porto, Portugal, 19-21 Mar., IAA-AAS-DyCoSS1-12-03
- [52] Mckenzie, D.J., Cartmell, M.P., "*Modelling of tethered space-web structures*", Journal of the British Interplanetary Society, 61 (1), pp. 24-31 (2008).
- [53] Meirovitch L., "*Methods of Analytical Dynamics*", Dover Publications, inc., 1998.
- [54] Mracek, C.P., Cloutier, J.R., "*Control designs for the nonlinear benchmark problem via the state-dependent Riccati equation method*", International Journal of Robust and Nonlinear Control, Vol.8, 1998, pp. 401-433.
- [55] Nagata, T., Modi, V.J., Matsuo, H., "*Dynamics and control of flexible multibody systems - Part I: General formulation with order N forward dynamics*", Acta Astronautica, Vol.49, No. 11., pp.581-594, 2001.
- [56] Nagata, T., Modi, V.J., Matsuo, H., "*Dynamics and control of flexible multibody systems - Part II: Simulation Code and Parametric Studies with NonLinear Control*", Acta Astronautica, Vol.49, No. 11., pp.595-610, 2001.
- [57] Naudet, J., Lefeber, D., "*General Formulation of an efficient recursive algorithm based on canonical momenta for forward dynamics of closed-loop multibody systems*", Proceedings of the XI DINAME, 28th Feb.-4 Mar., 2005 - Ouro Preto- Brazil
- [58] Norman, M.C., Peck, M.A., "*Integrals of Motion for Planar Multibody Formations with Internal Forces*", Journal of Guidance Control and Dynamics, Vol. 34, No.6, November-December 2011
- [59] Palmerini G.B., Sabatini M. Gasbarri P., Monti R., Felicetti L., "*Design of debris removal missions performed by robotic graspers*", 63th International Astronautical Congress, Naples, Italy, 1-5 Oct., 2012, IAC-12,C2,2,11.
- [60] Palmerini, G.B., "*Guidance strategies for satellite formations*", Advances in Astronautical Sciences, vol.103,2000, pp.135- 145.
- [61] Palmerini, G.B., Sabatini, M., "*Dynamics and control of low-altitude formations*", Acta Astronautica, Vol. 61, No. 1-6, 2007, pp. 298-311
- [62] Palmerini, G. B., Sgubini, S., and Sabatini, M., "*Space Webs Based on Rotating Tethered Formations*", Acta Astronautica, Vol. 65, 2009, pp. 131-145.

- [63] Pelaez, J., “*On the dynamics of the deployment of a tether from an orbiter -I. Basic Equations*”, Acta Astronautica, Vol.36, No. 2, pp.113-122, 1995.
- [64] Pizarro-Chong, A., Misra, A.K., “*Dynamics of Multi-Tethered Satellite Formations*”, paper IAC-05-C1.4.01, 56th International Astronautical Congress, 2005.
- [65] Ren W., Beard R.W., “*Decentralized scheme for spacecraft formation flying via the virtual structure approach*”, Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol.27 (1), 2004, pp. 73–82.
- [66] Ren W., “*Formationkeeping and attitude alignment for multiple spacecraft through local iterations*”, Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol.30 (2), 2007, pp. 633–638.
- [67] Sabatini, M., Izzo, D., Palmerini, G. B., “*Analysis and control of convenient orbital configuration for formation flying missions*”, Advances in Astronautical Sciences, vol.124, pp.313-329.
- [68] Sabatini, M., Izzo, D., Palmerini, G.B., “*Minimum control for spacecraft formations in a J2 perturbed environment*”, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, vol.105, No.1-3, 2009, pp.141-157.
- [69] Sabatini, M., Palmerini, G.B., “*Dynamics of a 3D Rotating Tethered Formation Flying Facing the Earth*”, IEEE Aerospace Conference Proceedings, 2007, pp.2834-2845.
- [70] Santini, P., Gasbarri, P., “*General background and approach to multibody dynamics for space applications*”, Acta Astronautica, Vol. 64, pp.1224-1251, 2009.
- [71] Scharf, D.P., Hadeagh, F.Y., Ploen, S.R., “*A Survey of Spacecraft Formation Flying Guidance and Control (Part II): Control*”, Proceeding of the 2004 American Control Conference, 2004, pp. 2976-2985.
- [72] Schwerin, R., “*Multibody System Simulation, Numerical Methods, Algorithms, and Software*”, Springer, 1999.
- [73] Shabana, A.A., “*Flexible Multibody Dynamics: Review of Past and Recent Developments*”, Multibody System Dynamics, Vol.1, pp.189-222, 1997.
- [74] Shabana, A.A., “*Dynamics of Multibody Systems*”, third edition, Cambridge University Press, 2005.
- [75] Siciliano, B., Schiavico, L., Villani, L., Oriolo, G., “*Robotica: Modellistica, Pianificazione e Controllo*”, McGraw-Hill, 2008.
- [76] Sidi, M.J., “*Spacecraft Dynamics and Control: a practical engineering approach*”, Cambridge University Press, 1997

- [77] De Souza, L.C.G, Arena, M.R., *“Using the State Dependent Riccati Equation and Kalman Filter Techniques to Design a Satellite Attitude Control Simulator”*, 1st IAA/AAS Dynamics and Control of Space Systems Conference, Porto, Portugal, 19-21 Mar., IAA-AAS-DyCoSS1-07-09.
- [78] Steiner, W., Zemann, J., Steindl, A., Troger, H., *“Numerical Study of Large Amplitude Oscillations of a Two Satellite Continuous Tether System with Varying Length”*, Acta Astronautica, Vol. 35, No. 9-11, pp. 607-621, 1995.
- [79] Stone, N.H., Raitt, W.J., Wright K.H., *“The TSS-1R electrodynamic tether experiment: Scientific and technological results”*, Advances in Space Research, Volume 24, Issue 8, 1999, Pages 1037-1045
- [80] Summerer, L., Putz, B., Kopacek, P., Kaya, N., *“First Results of Robots Crawling on a Loose Net in Micro-Gravity during a Sounding Rocket Experiment”*, Proceedings of the 57th International Astronautical Congress, 2006, Valencia (Spain).
- [81] Summerer, L., Purcell, O., Vasile, M., Tibert, G., Kaya, N., *“Making the First Step Towards Solar Power from Space - Microgravity Experiments Testing the Deployment of Large Antennas”*, IAC-09.C3.4.4
- [82] Takeichi, N., Ueno, H., Oda, M., *“Feasibility study of a solar power satellite system configured by formation flying”*, Acta Astronautica, vol.57, pp.698-706, 2005.
- [83] Tang, J.L., Ren, G.X., Zhu, W.D., Ren H., *“Dynamics of variable length tethers with application to tethered satellite deployment”*, Communications on Nonlinear Science and Numerical Simulation, Vol.16, pp.3411-3424, 2011
- [84] Tragesser, S.G., Tuncay, A., *“Orbital Design of Earth-Oriented Tethered Satellite Formations”*, paper AIAA 2002-4641, AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference, Monterey (2002).
- [85] Uicker, J.J., Denavit, J., Hartenberg, R.S., *“An Iterative Method for the Displacement Analysis of Spatial Mechanisms”*, Journal of Applied Mechanics, Transactions of ASME, pp.309-314, 1964.
- [86] Vaddi, S.S., Vadali, S.R., *“Linear and Nonlinear Control Laws for Formation Flying”*, Proceedings of the AAS/AIAA Space Flight Mechanics Conference, February 2003.
- [87] Vafa, Z., Dubowsky, S., *“On the dynamics of Manipulators in Space Using the Virtual Manipulator Approach”*, Robotics and Automation. Proceedings. 1987 IEEE International Conference on, Volume: 4

- [88] Vafa, Z., Dubowsky, S., “*The kinematics and dynamics of space manipulators: the virtual manipulator approach*”, International Journal of Robotics Research, Vol. 9, Issue 4, 1990
- [89] Vallado D.A., “*Foundamentals of Astrodynamics and Applications*”, Second Edition, Kruwer Academic Publishers, 2001.
- [90] VanDyke, M.C., Hall, C.D., “*Decentralized Coordinated Attitude Control within a Formation of Spacecraft*”, Journal of Guidance Control and Dynamics, Vol. 29, No. 5, 2006.
- [91] Van Woerkom, P. Th. L. M., de Boer, A., “*Development and Validation of a Linear Recursive Order N Algorithm for the Simulation of Flexible Space Manipulator Dynamics*”, Acta Astronautica, Vol.35, No.2/3, pp.175-185, 1995.
- [92] Van Woerkom, P. Th. L. M., de Boer, A., Ellenbroek, M.H.M., Wijker, J.J., “*Developing Algorithms for Efficient Simulation of Flexible Space Manipulator Operations*”, Acta Astronautica, Vol.36, No.6, pp.297-312, 1995.
- [93] Wang P., Hadaegh F., Lau K., “*Synchronized Formation Rotation and Attitude Control of Multiple Free-Flying Spacecraft*”, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 22, No.1, 1999, pp. 28-35.
- [94] Wang, P.K., Hadaegh, F.Y., “*Coordination and Control of Multiple Microspacecraft Moving in Formation*”, Journal of Astronautical Sciences, Vol. 44, No. 3, 1996, pp.315-355.
- [95] Wang, P.K., Hadaegh, F.Y., Lau, K., “*Synchronized Formation Rotation and Attitude Control of Multi Free-Flying Spacecraft*”, Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 22, No. 1, 1999, pp. 28-35.
- [96] Wang P., Hadaegh F., “*Coordination and Control of Multiple Microspacecraft moving in Formation*”, Journal of Astronautical Sciences, Vol. 44, No. 3, 1996, pp. 315-355
- [97] Wernli, A. Cook, G., “*Suboptimal Control for the Nonlinear Quadratic Regulator Problem*”, Automatica, Vol.11, pp.75-84, 1975.
- [98] Wertz, J. R., Larson W.J., “*Space Mission Analysis and Design*”, 3rd edition, Microcosm, 1999.
- [99] Wie, B., “*Space Vehicle Dynamics and Control*”, AIAA Education Series, 2008.
- [100] Williams, P., “*Dynamic multibody modeling for tethered space elevators*”, Acta Astronautica, Vol.65, pp.399-422, 2009.

- [101] Xu, W., Liang, B., Xu, Y., “*Survey of modeling, planning, and ground verification of space robotic systems*”, *Acta Astronautica*, Vol. 68, pp.1629-1649.

Ringraziamenti

Gli argomenti presentati in questa tesi di dottorato sono stati sviluppati nell'ambito delle attività del laboratorio di Guida e Navigazione Aerospaziale dell'Università di Roma "La Sapienza".

In primo luogo ringrazio il mio relatore Prof. G.B. Palmerini, per avermi guidato, incoraggiato e spronato ad affrontare questi temi di ricerca. Ringrazio il Prof. P. Gasbarri che mi ha consigliato nelle tematiche relative allo studio della dinamica multibody. Un grazie va anche al Dott. M. Sabatini con cui ho trascorso gran parte del tempo e mi ha reso partecipe delle attività svolte nel laboratorio. Inoltre un ringraziamento va al Prof. F. Santoni, che mi ha seguito ed aiutato nel primo anno del dottorato. Infine ringrazio tutte le persone che ho avuto modo di conoscere durante questi tre anni trascorsi nel dipartimento e non solo.

Infine un grande ringraziamento va alla mia famiglia, che mi ha sostenuto, confortato ed aiutato ad affrontare le difficoltà incontrate in questo periodo.