



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

DOTTORATO DI RICERCA IN
ELETTROMAGNETISMO

XXVI CICLO

Tesi di Dottorato di Fabio Mangini

**Interazione elettromagnetica
da oggetti sepolti o immersi**

Docente guida

Prof. Fabrizio Frezza

Coordinatore

Prof. Paolo Lampariello

Ai miei genitori

Indice

1	Scattering da oggetti sepolti o immersi	13
1.1	Equazione delle onde vettoriale in coordinate curvilinee	13
1.2	Equazione di Helmholtz scalare in coordinate sferiche	18
1.3	Equazione di Helmholtz vettoriale in coordinate sferiche	23
1.4	Ortogonalità delle funzioni vettoriali sferiche	29
1.5	Sviluppo di un'onda piana in armoniche sferiche	33
1.6	Sviluppo in onde piane di un'onda sferica	46
2	Scattering EM da sfera	53
2.1	Diffrazione da una sfera PEC nello spazio libero	53
2.1.1	Validazione del modello sfera PEC	59
2.2	Diffrazione da sfera dielettrica nello spazio libero	60
2.2.1	Validazione del modello sfera dielettrica	64
2.3	Diffrazione da sfera concentrica nello spazio libero	66
2.3.1	Validazione del modello sfera concentrica	77
2.4	Diffrazione da una sfera concentrica con core PEC	77
2.4.1	Validazione del modello sfera concentrica con nucleo PEC	80
3	Scattering EM da un cilindro	83
3.1	Diffrazione da un cilindro nello spazio libero	83
3.1.1	Validazione del modello cilindro PEC	95

4	Diffrazione da una sfera sepolta	97
4.1	Trattazione analitica	97
4.1.1	Implementazione numerica	116
4.1.2	Validazione e risultati numerici	120
5	Diffrazione da una sfera sepolta in un mezzo stratificato	125
5.1	Analisi teorica	125
5.1.1	Validazione e risultati numerici	148
6	Tecniche di omogeneizzazione	153
6.1	Introduzione	153
6.2	Equazioni di Poisson e Laplace	153
6.3	Risoluzione dell'equazioni di Laplace	155
6.4	Modello di omogeneizzazione di una sfera	158
6.4.1	Validazione del modello omogeneizzato	164
6.5	Mixing Formula	165
6.6	Polarizzabilità di una sfera dielettrica	172
6.7	Polarizzabilità di due sfere concentriche	174
6.7.1	Validazione del modello di due sfere	178
6.8	Polarizzabilità di una sfera multiconcentrica	178
6.8.1	Validazione del modello di una sfera multistrato	182
6.9	Polarizzabilità di due sfere eccentriche	183
6.9.1	Validazione e risultati del modello di due sfere	189
6.10	Estensione al caso di 2 ed L sfere eccentriche	195
6.10.1	Validazione e risultati del modello di L sfere	200
6.11	Sfera RU vs sfera multiconcentrica	203
A	Determinazione degli integrali	215

Introduzione

Questa tesi è il frutto dell'attività di ricerca svolta nel triennio di dottorato che si è articolata intorno a temi riguardanti la diffrazione (scattering) elettromagnetica da oggetti sepolti o più genericamente immersi in mezzi con perdite e allo studio di tecniche di omogeneizzazione per la determinazione del campo in presenza di oggetti sferici e cilindrici, per la modellizzazione sia di metamateriali che di sistemi biologici. Il primo passo della ricerca è consistito in uno studio approfondito dell'analisi complessa (Cap. 1), sia nei suoi aspetti teorici che nelle sue applicazioni alle tematiche di interesse, come per esempio le caratteristiche di alcune funzioni speciali olomorfe quali le funzioni di Bessel, di Bessel sferiche e di Legendre, le tecniche per la valutazione di integrali nel piano complesso e lo studio del fenomeno della diffrazione da sfera nei suoi vari aspetti (Cap. 2, 3). Una volta acquisita una padronanza sufficiente degli strumenti analitici, ci si è concentrati sullo studio della diffrazione di un'onda piana da sfera sepolta (Cap. 4), in particolare nel caso in cui l'onda incida in direzione obliqua rispetto alla normale al piano di separazione. Dopo un'estesa ricerca bibliografica, si è riusciti ad individuare una metodologia per la risoluzione del problema. Tale metodologia prevede l'uso dello spettro di onde piane dell'onda scatterata dalla sfera e lo sviluppo dell'onda scatterata riflessa sul piano di separazione in serie di onde sferiche in modo da poter imporre in maniera sufficientemente semplice le condizioni al contorno sulla sfera stessa. Dall'applicazione di tali condizioni si perviene ad un sistema lineare la cui risoluzione porta alla determinazione del problema. Entrando più nel dettaglio, si è deciso di utilizzare come formalismo, utile per la risoluzione del problema, quello che prende in considerazione le armoniche sferiche vettoriali, e si è dimostrato che con tale formalismo l'imposizione delle condizioni al contorno, e di conseguenza l'applicazione delle proprietà di ortogonalità delle armoniche sferiche, rendeva il procedimento più leggero da un punto di vista esplicativo. Il primo passo che si è compiuto una volta scelto il formalismo è stato quello di trattare il problema dello scattering da sfera nello spazio libero: per far ciò si è sviluppata l'onda incidente, che nel caso di sfera sepolta coincide con il campo trasmesso dal piano di separazione aria-mezzo,

in armoniche sferiche ovvero si è rappresentato il campo come combinazione delle funzioni d'onda sferiche vettoriali di natura solenoidale. Fatto ciò si è passati alla determinazione dei coefficienti dello sviluppo in serie del campo incidente in direzione obliqua sulla sfera, eguagliando la forma dell'onda piana con tale sviluppo, si è quindi riusciti ad ottenere un'espressione completa del campo incidente nel modo più generale possibile con un formalismo sufficientemente leggibile. Si è passati successivamente all'imposizione delle condizioni al contorno sulla superficie della sfera, i campi in gioco risultavano essere il campo incidente, il campo scatterato, il campo interno alla sfera stessa ed il campo scatterato-riflesso sulla superficie di separazione tra l'aria e il mezzo in cui è immerso l'oggetto sferico. Per poter ottenere il campo riflesso di un'onda sferica espressa in serie di infinite armoniche vettoriali da una superficie piana, si è scelto di operare una trasformazione di ciascuna delle armoniche sferiche in uno sviluppo in onde piane: per far ciò è stata utilizzata la formula integrale di Weyl-Erdélyi. Una volta note tutte le espressioni dei campi sarebbe stato sicuramente possibile scrivere tale condizione in modo esplicito, ma nella trattazione ci si è trovati di fronte a seri problemi: infatti, l'applicazione delle condizioni al contorno ha posto un problema analogo a quello già affrontato dell'incidenza di onde sferiche su una superficie piana; in questo caso si ha invece un'onda espressa come sovrapposizione di onde piane, che deve interagire con una superficie sferica. E' apparso ovvio che le condizioni al contorno non avrebbero potuto assumere una forma semplice se prima non si fosse posto il campo diffratto-riflesso in un'opportuna forma, si è scelto quindi di sviluppare nuovamente ciascuna onda piana, moltiplicata per un opportuno coefficiente di riflessione, in una serie infinita di armoniche sferiche vettoriali. In conclusione si è ottenuto un sistema di $4N(N+2)$ incognite in $4N(N+2)$ equazioni avendo indicato con N l'ordine di troncamento dello sviluppo in serie. Le difficoltà che si sono incontrate durante l'implementazione numerica, oltre alla determinazione del sistema lineare, sono consistite nella risoluzione degli integrali nel piano complesso, che si ottenevano durante lo sviluppo delle armoniche sferiche in onde piane elementari. L'approccio è consistito nella suddivisione dell'integrale in due, di cui il primo su un percorso puramente reale ed il secondo su un percorso immaginario. Il primo integrale è stato facilmente de-

terminato tramite il metodo di quadratura di Gauss-Legendre, mentre per quanto concerne il secondo si è optato per un cambio di variabile in modo da ottenere un percorso d'integrazione reale, successivamente anch'esso è stato valutato attraverso un metodo di quadratura. In concomitanza sono stati risolti analiticamente altri problemi simili utilizzando sempre la stessa metodologia, in particolare una sfera interposta tra due piani ed una sfera multistrato immersa in un mezzo stratificato (Cap. 5). Durante il triennio di dottorato sono stati portati a termine dei lavori riguardante l'ambito biomedicale. In particolare, utilizzando modelli di omogeneizzazione presenti in letteratura si sono voluti mettere in evidenza delle correlazioni tra il campo elettrico scatterato e grandezze tipicamente fisiopatologiche o semplicemente biologiche per poter estrarre delle informazioni relative a cambiamenti morfologici o fisiologici. Ogni lavoro è stato svolto operando inizialmente un'approfondita ricerca analitica su modelli presenti in letteratura che più si avvicinavano alla descrizione del problema che si voleva risolvere, procedendo poi alla modifica o validazione di tale modello su fenomeni biologici ancora non presenti in letteratura e prendendo in esame i dati di campo ottenuti con, nel primo caso, la deformazione morfologica di una cellula durante le principali fasi mitotiche e, nel secondo caso, variazioni del lume di un'arteria durante il ciclo cardiaco, in modo da ricavare la correlazione tra campo elettrico scatterato e grandezze ematiche. Nell'ultimo anno del corso di dottorato si è svolto un lavoro di ricerca in collaborazione presso il dipartimento di Radio Science and Engineering della Aalto University, Espoo (Helsinki), Finlandia con il Prof. A. Sihvola. La ricerca in questione ha riguardato lo studio dell'interazione elettromagnetica con materiali sferici utilizzando modelli di omogeneizzazione, ovvero tramite l'utilizzazione di modelli in approssimazione quasi-statica per la determinazione del potenziale elettrostatico e quindi del campo elettrico riflesso (Cap.6). Si è iniziata l'attività cercando di verificare la possibilità della realizzazione pratica della cosiddetta Radial Uniaxial (RU) Sphere, una sfera uniassiale anisotropa, il cui tensore di permeabilità magnetica o permittività dielettrica risulta essere diagonale rispetto ad un sistema di riferimento sferico, quindi caratterizzato dall'aver l'asse ottico coincidente con la direzione radiale di tali coordinate. Ovviamente tali mezzi risulterebbero non uniassiali se si dovesse con-

siderare un sistema di riferimento cartesiano. Alcuni esempi di applicazioni di tali mezzi sono quelli relativi alla realizzazione del cloaking. Il metodo proposto risulta essere una continuazione di due lavori del gruppo di ricerca dell'Aalto University: tali ricerche cercavano di mettere in evidenza le analogie esistenti tra la sfera RU ed una sfera concentrica, mostrando come tali sistemi, da un punto di vista della polarizzabilità, avessero un comportamento quasi analogo. Estendendo tale approccio ad una sfera ad N strati, si è riusciti a dimostrare, applicando il modello delle linee di trasmissione per infiniti strati sferici, come le sfere RU potevano essere realizzate a partire da queste sfere, variando semplicemente le proprietà dielettriche ed il numero di strati. In particolare nel lavoro si è proceduto con l'individuazione del numero di strati necessari affinché la sfera RU potesse essere approssimata con una sfera multi-concentrica con valori alternati della costante dielettrica. Tali risultati hanno portato ad individuare un numero di qualche decina di strati necessari per ottenere una convergenza all'1% rispetto al valore teorico e quindi ad aver dimostrato la possibilità della loro realizzazione pratica. Il secondo argomento trattato in Finlandia riguardava lo studio della risposta elettromagnetica nel caso di un sistema di sfere eccentriche (Cap. 6), utilizzando il modello di omogeneizzazione: si è cioè considerata la sfera interna decentrata rispetto alla sfera ospitante. Il target della ricerca è stato quello di determinare la variazione della polarizzabilità di tale sistema al variare della posizione della sfera interna. Per far ciò si è considerato il potenziale elettrostatico di ogni dominio del problema; si sono imposte le condizioni al contorno sulle due superfici sferiche; si è applicato il teorema di addizione delle armoniche solide regolari ed irregolari ai potenziali in gioco, in modo da poter imporre le condizioni al contorno su entrambe le superfici sferiche, ognuna centrata nel proprio sistema di riferimento; si è risolto il sistema delle condizioni al contorno ed infine si è proceduto alla determinazione del potenziale elettrico e della polarizzabilità. Il modello studiato trova un vasto campo di applicazione nei sistemi biologici come ad esempio per la modellizzazione della risposta di una cellula biologica ad uno stimolo elettrico, nel determinare la risposta elettrica del cranio umano ed anche in contesti progettuali che prevedano l'utilizzo di nanosfere, la cui produzione, il più delle volte, fornisce una struttura concentrica che mai risulta essere perfetta-

mente centrata rispetto al nucleo. La naturale estensione di tale lavoro ha previsto lo studio di una sfera ospitante un numero variabile di sfere dielettriche: si è giunti alla determinazione di un nuovo modello che permette di descrivere il sistema in maniera molto elegante considerando il notevole numero di incognite presenti.

Capitolo 1

Scattering da oggetti sepolti o immersi

L'obiettivo del presente capitolo è quello di fornire una serie di strumenti matematici il cui scopo finale sarà quello di poter determinare il campo elettromagnetico, in ogni punto dello spazio, nel caso in cui sia presente uno scattatore di geometria sferica nel dominio considerato. Per far ciò, ovviamente, si dovrà passare necessariamente attraverso le equazioni delle onde che verranno risolte sia scalarmente che vettorialmente in coordinate sferiche, verranno forniti gli strumenti necessari a superare le diverse difficoltà che un problema di questo tipo può presentare, tra cui lo sviluppo di un'onda piana in onde vettoriali sferiche e lo sviluppo di quest'ultime onde come spettro di infinite onde piane elementari.

1.1 Equazione delle onde vettoriale in coordinate curvilinee

Prima di risolvere il problema della diffrazione di un'onda piana da una sfera, è bene definire il problema della soluzione dell'equazione delle onde vettoriale in un generico sistema di coordinate. In questo modo, infatti, si ricaverà un formalismo grazie al quale sarà possibile semplificare il problema elettromagnetico in modo considerevole. Quanto segue è stato tratto da [1].

Come è ben noto, un generico campo elettromagnetico in assenza di sorgenti $\mathbf{C} = \{\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{D}, \mathbf{B}\}$, in un mezzo lineare, stazionario, omogeneo, isotropo e non dispersivo, dovrà rispettare la generica equazione delle onde omogenea:

$$\nabla^2 \mathbf{C} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{C}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} = 0 \quad (1.1.1)$$

la quale può anche essere espressa nel dominio della frequenza, dove generalmente prende il nome di equazione di Helmholtz, supponendo una dipendenza dal tempo del tipo $e^{-i\omega t}$, la quale verrà omessa d'ora in poi, assumendo la seguente forma:

$$\nabla \nabla \cdot \mathbf{C} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{C} + k^2 \mathbf{C} = 0 \quad (1.1.2)$$

dove si è usata la ben nota identità:

$$\nabla^2 \mathbf{C} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{C} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{C} \quad (1.1.3)$$

e si è posto, come di consueto $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu + i\sigma \omega$. Questa equazione differenziale vettoriale può essere proiettata lungo i versori, \mathbf{q}_{0i} , $i = 1, 2, 3$, di un generico sistema di riferimento, diventando un sistema di tre equazioni differenziali scalari. Tale sistema però non è facilmente risolvibile nella maggior parte dei sistemi di coordinate. Può quindi essere molto utile entrare in possesso di una procedura generale che permetta di risolvere l'equazione vettoriale e che sia applicabile in ogni sistema di riferimento. Per fare ciò si consideri l'equivalente scalare dell'equazione 1.1.2:

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad (1.1.4)$$

Questa semplice equazione differenziale scalare ha soluzione nella maggior parte dei sistemi di coordinate canonici¹. Si definiscano ora i seguenti vettori:

$$\mathbf{L} = \nabla \psi; \quad \mathbf{M} = \nabla \times (\mathbf{a}_0 \psi); \quad \mathbf{N} = \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{M}; \quad (1.1.5)$$

dove \mathbf{a}_0 è un versore costante qualsiasi, a volte chiamato vettore pilota [4]. É pos-

¹I sistemi di coordinate nei quali è nota la soluzione dell'equazione di Helmholtz scalare sono 11 [2, 3]: cartesiane ortogonali, cilindriche circolari, cilindriche ellittiche, cilindriche paraboliche, sferiche, sferoidali prolate, sferoidali oblate, coniche, ellissoidali, paraboloidali, paraboliche di rotazione

sibile dimostrare facilmente che questi vettori soddisfano l'equazione di Helmholtz vettoriale.

Per quanto riguarda **L**:

$$\nabla\nabla \cdot (\nabla\psi) - \nabla \times \nabla \times (\nabla\psi) + k^2\nabla\psi = 0 \quad (1.1.6)$$

ricordando che $\nabla \times \nabla\psi = 0$ e che $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$, si ottiene:

$$\nabla\nabla^2\psi + k^2\nabla\psi = 0 \quad \rightarrow \quad -k^2\nabla\psi + k^2\nabla\psi = 0 \quad \text{c.v.d.} \quad (1.1.7)$$

Per quanto riguarda **M**:

$$\nabla\nabla \cdot [\nabla \times (\mathbf{a}_0\psi)] - \nabla \times \nabla \times [\nabla \times (\mathbf{a}_0\psi)] + k^2\nabla \times (\mathbf{a}_0\psi) = 0 \quad (1.1.8)$$

Ricordando che $\nabla \cdot [\nabla \times (\mathbf{A})] = 0$ ed usando l'identità vettoriale (1.1.3) sui rotori più interni del secondo termine, si ottiene:

$$-\nabla \times [\nabla\nabla \cdot (\mathbf{a}_0\psi) - \nabla^2(\mathbf{a}_0\psi)] + k^2\nabla \times (\mathbf{a}_0\psi) = 0 \quad (1.1.9)$$

Ricordando che $\nabla \times \nabla\varphi = 0$ e potendo portare fuori il versore \mathbf{a}_0 , essendo costante, dal Lapalciano, si potrà scrivere:

$$\begin{aligned} \nabla \times [\mathbf{a}_0\nabla^2\psi] + k^2\nabla \times (\mathbf{a}_0\psi) &= 0 & \rightarrow & \\ -k^2\nabla \times (\mathbf{a}_0\psi) + k^2\nabla \times (\mathbf{a}_0\psi) &= 0 & \text{c.v.d.} & \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

Per quanto riguarda **N**:

$$\frac{1}{k}\nabla\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{M}) - \frac{1}{k}\nabla \times \nabla \times (\nabla \times \mathbf{M}) + k(\nabla \times \mathbf{M}) = 0 \quad (1.1.11)$$

Essendo $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$ ed avendo dimostrato che $-\nabla \times \nabla \times \mathbf{M} + k^2\mathbf{M} = 0$, potremo scrivere:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{k}\nabla \times (k^2\mathbf{M}) + k\nabla \times \mathbf{M} &= 0 & \rightarrow & \\ -k\nabla \times \mathbf{M} + k\nabla \times \mathbf{M} &= 0 & \text{c.v.d.} & \end{aligned} \quad (1.1.12)$$

I vettori \mathbf{L} , \mathbf{M} e \mathbf{N} si prestano quindi ad essere usati per rappresentare il generico campo elettromagnetico in un dato sistema di coordinate. Tali vettori hanno altre preziose proprietà, come per esempio:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{N}; \quad \nabla \cdot \mathbf{L} = \nabla^2 \psi = -k^2 \psi \quad (1.1.13)$$

La prima di queste uguaglianze, associata alla terza uguaglianza in 1.1.5 ci dice che i vettori \mathbf{M} e \mathbf{N} sono l'uno il rotore dell'altro, a meno del fattore $1/k$. Infine si possono facilmente dimostrare le seguenti uguaglianze:

$$\nabla \times \mathbf{L} = 0; \quad \nabla \cdot \mathbf{M} = 0; \quad \nabla \cdot \mathbf{N} = 0; \quad (1.1.14)$$

ovvero si ha che il vettore \mathbf{L} è irrotazionale, mentre i vettori \mathbf{M} e \mathbf{N} sono solenoidali. Queste ultime equazioni sono molto importanti, infatti ci dicono che un campo in assenza di sorgenti potrà essere espresso dai soli vettori \mathbf{M} e \mathbf{N} , senza perdita di generalità, mentre il vettore \mathbf{L} dovrà necessariamente entrare in gioco nel caso in cui siano presenti delle sorgenti di campo.

Aggiungiamo, infine, che la generica soluzione $\psi(\mathbf{r})$ dell'equazione di Helmholtz sarà in realtà un set di soluzioni ψ_n (autovettori) che formeranno una base dello spazio vettoriale L^2 delle funzioni a quadrato sommabili (Spazio di Hilbert). Analogamente, a questo set di soluzioni scalari sarà associato un set di vettori \mathbf{L}_n , \mathbf{M}_n e \mathbf{N}_n . Se, per esempio, consideriamo un generico potenziale vettore \mathbf{A} , esso potrà in generale essere espresso come una combinazione lineare del set di vettori \mathbf{L}_n , \mathbf{M}_n e \mathbf{N}_n :

$$\mathbf{A} = \frac{1}{i\omega\mu} \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \mathbf{M}_n + b_n \mathbf{N}_n + c_n \mathbf{L}_n) \quad (1.1.15)$$

essendo $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$ e ricordando che, per le equazioni di Maxwell, si ha:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{i\omega\varepsilon} \nabla \times \mathbf{H} \quad \mathbf{H} = \frac{1}{i\omega\mu} \nabla \times \mathbf{E} \quad (1.1.16)$$

si potranno quindi scrivere, sfruttando le proprietà dei vettori \mathbf{L}_n , \mathbf{M}_n e \mathbf{N}_n , le

seguenti espressioni per il campo elettrico e magnetico:

$$\mathbf{E} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \mathbf{M}_n + b_n \mathbf{N}_n) \quad (1.1.17)$$

$$\mathbf{H} = \frac{k}{i\omega\mu} \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \mathbf{N}_n + b_n \mathbf{M}_n) \quad (1.1.18)$$

Si vede che le proprietà dei vettori \mathbf{L}_n , \mathbf{M}_n e \mathbf{N}_n rendono estremamente semplice il calcolo dei campi.

Infine, si vuole mostrare un'altra importante proprietà di questo formalismo. In coordinate rettangolari, come è ben noto, la soluzione dell'equazione di Helmholtz scalare può essere scritta, considerando un'ampiezza unitaria, come segue:

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (1.1.19)$$

quindi i vettori \mathbf{L} , \mathbf{M} e \mathbf{N} potranno essere scritti come segue:

$$\mathbf{L} = i\psi\mathbf{k}; \quad \mathbf{M} = i\psi\mathbf{k} \times \mathbf{a}_0; \quad \mathbf{N} = \frac{1}{k}\psi(\mathbf{k} \times \mathbf{a}_0) \times \mathbf{k} \quad (1.1.20)$$

Supponiamo ora che ψ non sia un'onda piana, ma sia una generica soluzione dell'equazione di Helmholtz in un generico sistema di coordinate; come è ben noto potremo sempre sviluppare la funzione ψ in onde piane come segue:

$$\psi(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k_x, k_y) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} dk_x dk_y = \int \int g(\alpha, \beta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\alpha d\beta \quad (1.1.21)$$

dove α e β sono gli angoli in coordinate sferiche che il generico vettore \mathbf{k} forma con gli assi coordinate e $g(\alpha, \beta)$ è lo spettro, i.e. la trasformata di Fourier bidimensionale, della funzione ψ . Per sviluppare i vettori \mathbf{L} , \mathbf{M} e \mathbf{N} in onde piane sarà sufficiente

applicare le definizioni di tali vettori all'espressione (1.1.21), ottenendo:

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= i \int \int g(\alpha, \beta) \mathbf{k}(\alpha, \beta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\beta d\alpha \\ \mathbf{M} &= i \int \int g(\alpha, \beta) \mathbf{k}(\alpha, \beta) \times \mathbf{a}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\beta d\alpha \\ \mathbf{N} &= \frac{1}{k} \int \int g(\alpha, \beta) [\mathbf{k}(\alpha, \beta) \times \mathbf{a}_0] \times \mathbf{k}(\alpha, \beta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\beta d\alpha\end{aligned}\tag{1.1.22}$$

si deve notare che gli integrali in (1.1.21) ed in (1.1.22) non hanno gli estremi di integrazione perché questi variano a seconda dell'onda che si deve rappresentare, in particolare dipendono dal tipo di onde che si stanno rappresentando. Per approfondire l'argomento si veda [1, 5]. Può essere interessante notare che gli argomenti degli integrali hanno la medesima forma delle espressioni in (1.1.20), il che significa semplicemente che il generico campo, rappresentato da tali vettori, si scrive come sovrapposizione integrale dei vettori rappresentanti le singole onde piane dello spettro.

In conclusione, i vettori \mathbf{L} , \mathbf{M} e \mathbf{N} sono uno strumento molto potente che permette, una volta nota la soluzione dell'equazione di Helmholtz scalare, di ottenere la soluzione dell'equazione di Helmholtz vettoriale. Inoltre, noto lo spettro di onde piane della funzione scalare, è automaticamente noto lo spettro di onde piane di tali vettori, ovvero di tutto il campo.

1.2 Equazione di Helmholtz scalare in coordinate sferiche

Cerchiamo una funzione $\psi(\mathbf{r}) = \psi(r, \vartheta, \varphi)$ che sia soluzione dell'equazione di Helmholtz scalare, la quale in coordinate sferiche assume la seguente espressione:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + k^2 \psi = 0\tag{1.2.1}$$

Per risolvere questa equazione usiamo il metodo della separazione delle variabili. Poniamo quindi $\psi(r, \vartheta, \varphi) = R(r)\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi)$. Andando a sostituire questa espres-

sione in (1.2.1), dividendo tutto per ψ e moltiplicando per r^2 , si ottiene

$$\left[\frac{1}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + r^2 k^2 \right] + \frac{1}{\Theta(\vartheta) \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} \right) + \quad (1.2.2)$$

$$+ \frac{1}{\Phi(\varphi) \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (1.2.3)$$

derivando ed integrando rispetto a r e φ si ottengono le seguenti equazioni:

$$\frac{1}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + r^2 k^2 = p^2 \quad (1.2.4)$$

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -m^2 \quad (1.2.5)$$

sostituendo queste espressioni in (1.2.2) e riordinando tutto siamo in grado di scrivere tre equazioni differenziali in cui siano separate le tre variabili indipendenti:

$$r^2 \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial R(r)}{\partial r} + (r^2 k^2 - p^2) R(r) = 0 \quad (1.2.6)$$

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \Theta(\vartheta)}{\partial \vartheta} \right) + \left(p^2 - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \right) \Theta(\vartheta) = 0 \quad (1.2.7)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} + m^2 \Phi(\varphi) = 0 \quad (1.2.8)$$

Risolviamo per prima l'equazione più semplice, ovvero la (1.2.8), come è ben noto la soluzione di questa equazione sarà:

$$\Phi(\varphi) = A e^{im\varphi} \quad (1.2.9)$$

Sviluppiamo ora la derivata in (1.2.7) e riscriviamo l'equazione:

$$\frac{\partial^2 \Theta(\vartheta)}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial \Theta(\vartheta)}{\partial \vartheta} + \left(p^2 - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \right) \Theta(\vartheta) = 0 \quad (1.2.10)$$

facciamo ora la sostituzione $\eta = \cos \vartheta$, ricordando che:

$$\frac{\partial f}{\partial \vartheta} = \frac{\partial f}{\partial \cos \vartheta} \frac{\partial \cos \vartheta}{\partial \vartheta} = -\sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial \cos \vartheta} \quad (1.2.11)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2} = \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(-\sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial \cos \vartheta} \right) = -\cos \vartheta \frac{\partial f}{\partial \cos \vartheta} + \sin^2 \vartheta \frac{\partial^2 f}{\partial \cos^2 \vartheta} \quad (1.2.12)$$

si ottiene:

$$(1 - \eta^2) \frac{\partial^2 \Theta(\eta)}{\partial \eta^2} - 2\eta \frac{\partial \Theta(\eta)}{\partial \eta} + \left(p^2 - \frac{m^2}{1 - \eta^2} \right) \Theta(\eta) = 0 \quad (1.2.13)$$

Rinominando ora l'indice p , ponendo $p^2 = n(n + 1)$, si può scrivere:

$$(1 - \eta^2) \frac{\partial^2 \Theta(\eta)}{\partial \eta^2} - 2\eta \frac{\partial \Theta(\eta)}{\partial \eta} + \left(n(n + 1) - \frac{m^2}{1 - \eta^2} \right) \Theta(\eta) = 0 \quad (1.2.14)$$

In questa equazione si riconosce l'equazione differenziale associata di Legendre, le cui soluzioni sono i multipli della funzione associata di Legendre $P_n^m(\eta)$ [1, 6]. Di conseguenza la funzione $\Theta(\vartheta)$ può essere scritta come segue:

$$\Theta(\vartheta) = BP_n^m(\cos \vartheta) \quad (1.2.15)$$

Ricordiamo che la funzione associata di Legendre è una funzione regolare avente due singolarità polari in $\cos \vartheta = \pm 1$. In fine consideriamo l'espressione (1.2.6) e poniamo $R(r) = (kr)^{-\frac{1}{2}} f(r)$, notando che:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[(kr)^{-\frac{1}{2}} f(r) \right] = k^{-\frac{1}{2}} \left[r^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial f(r)}{\partial r} - \frac{1}{2} r^{-\frac{3}{2}} f(r) \right] \quad (1.2.16)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[(kr)^{-\frac{1}{2}} f(r) \right] = k^{-\frac{1}{2}} \left[r^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} - r^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial f(r)}{\partial r} + \frac{3}{4} r^{-\frac{5}{2}} f(r) \right] \quad (1.2.17)$$

potremo riscrivere la (1.2.6) come segue:

$$\begin{aligned} (kr)^{-\frac{1}{2}} r^2 \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} - (kr)^{-\frac{1}{2}} r \frac{\partial f(r)}{\partial r} + \frac{3}{4} (kr)^{-\frac{1}{2}} f(r) + 2(kr)^{-\frac{1}{2}} r \frac{\partial f(r)}{\partial r} + \\ - (kr)^{-\frac{1}{2}} f(r) + (r^2 k^2 - p^2) (kr)^{-\frac{1}{2}} f(r) = 0 \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

moltiplicando tutto per $(kr)^{-\frac{1}{2}}$ e riordinando si trova:

$$r^2 \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} + r \frac{\partial f(r)}{\partial r} + (r^2 k^2 - p^2 - \frac{1}{4}) f(r) = 0 \quad (1.2.19)$$

ricordando che si era posto $p^2 = n(n+1) = n^2 + n$, si può scrivere:

$$r^2 \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} + r \frac{\partial f(r)}{\partial r} + \left[r^2 k^2 - \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \right] f(r) = 0 \quad (1.2.20)$$

In questa equazione riconosciamo l'equazione differenziale di Bessel di ordine $n + \frac{1}{2}$, potremo quindi porre [1, 6, 7]:

$$f(r) = CZ_{n+\frac{1}{2}}(kr) \quad (1.2.21)$$

dove con la lettera Z stiamo indicando la generica funzione di Bessel $Z_n(\rho) = \{J_n(\rho), Y_n(\rho), H_n^{(1)}(\rho), H_n^{(2)}(\rho)\}$, di prima, seconda, terza o quarta specie, rispettivamente. La dipendenza radiale della nostra funzione incognita potrà quindi essere posta uguale a:

$$R(r) = C \frac{1}{\sqrt{kr}} Z_{n+\frac{1}{2}}(kr) = C' z_n(kr) \quad (1.2.22)$$

dove si definisce la funzione di Bessel sferica di ordine n come segue [1, 6, 7]:

$$z_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} Z_{n+\frac{1}{2}}(kr) \quad (1.2.23)$$

Siamo ora in grado di esprimere la soluzione dell'equazione di Helmholtz scalare in coordinate sferiche come il prodotto delle espressioni (1.2.9), (1.2.15) e (1.2.22):

$$\psi_{mn}(\mathbf{r}) = Dz_n(kr) P_n^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi} \quad (1.2.24)$$

Si descriveranno ora le principali caratteristiche di questa funzione. Il comportamento radiale della funzione (3.1.13) è governato dalle funzioni di Bessel sferiche, esattamente come le funzione di Bessel canoniche, anche per quelle sferiche è possibile ricavare dei comportamenti asintotici molto semplici, si trova infatti

[1, 6, 7]:

$$\begin{aligned} j_n(\rho) &\approx \frac{1}{\rho} \cos\left(\rho - \frac{n+1}{2}\pi\right); & y_n(\rho) &\approx \frac{1}{\rho} \sin\left(\rho - \frac{n+1}{2}\pi\right); \\ h_n^{(1)}(\rho) &\approx \frac{(-i)^{n+1}}{\rho} e^{i\rho}; & h_n^{(2)}(\rho) &\approx \frac{(-i)^{n+1}}{\rho} e^{-i\rho}; \end{aligned}$$

Vediamo quindi che le funzioni di Bessel sferiche hanno tutte la tipica attenuazione da onda sferica, ovvero $1/\rho$, ed un andamento di fase del tutto analogo a quello delle Bessel classiche, ovvero le funzioni $j_n(\rho)$ e $y_n(\rho)$ un andamento tipo onda stazionaria, la $h_n^{(1)}$ un andamento di tipo onda progressiva uscente e la $h_n^{(2)}$ del tipo onda progressiva entrante.

Il comportamento angolare della funzione (3.1.13) è descritto dalla così detta armonica tesserale di grado n ed ordine m , ovvero:

$$Y_{mn}(\vartheta, \varphi) = P_n^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi} \quad (1.2.25)$$

Le parte reale ed immaginaria di questa funzione hanno un caratteristico comportamento tesserale, ovvero per $m = 0$ sono indipendenti dall'angolo equatoriale φ , se si ha anche $n = 0$ allora saranno costanti su tutta la superficie della generica sfera. Se $n = 1$ si ha un singolo snodo in $\vartheta = \pi/2$, lungo la circonferenza relativa a quest'angolo la funzione sarà nulla, nella semisfera superiore la funzione sarà positiva e sulla semisfera inferiore sarà negativa. Per $n = 2$ si avranno due snodi in $\vartheta \approx 55$ e $\vartheta \approx 125$ dove la funzione sarà nulla, si avranno così tre zone, sui due poli la funzione sarà positiva e sulla parte equatoriale (centrale) sarà negativa. Proseguendo così ci saranno sempre n snodi in cui la funzione sarà nulla e $n + 1$ zone alternativamente positive o negative. Per questo motivo il polinomio di Legendre $P_n(\cos \vartheta)$ viene anche detto armonica zonale. Se ora consideriamo il caso $m \neq 0$ si potrà osservare che la funzione sarà sempre nulla ai poli, ovvero in $\vartheta = 0, \pi$ e che il numero di snodi sarà $n - m$ (osserviamo che la funzione di Legendre $P_n^m(\eta)$ è nulla se $m > n$). Possiamo dire che ci saranno quindi $n - m + 1$ zone orizzontali sulle quali la funzione di Legendre sarà alternativamente positiva e negativa. Inoltre ci sarà la funzione $\cos(m\varphi)$ (o $\sin(m\varphi)$) che formerà un numero di snodi verticali pari al

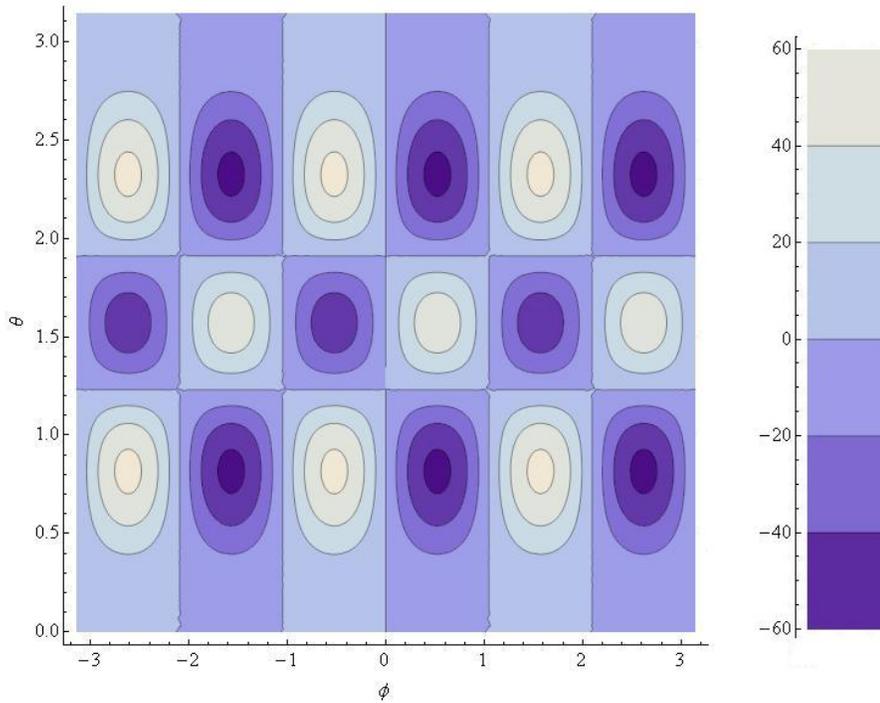


Figura 1.1: Rappresentazione della funzione $\text{Im}[Y_{3,5}(\vartheta, \varphi)]$. Si riconoscono le $(n - m) + 1$ zone lungo la direzione azimutale e le $m + 1$ zone lungo la direzione equatoriale.

numero di radici contenute in $\varphi \in [0, 2\pi]$ (Parte reale ed immaginaria dell'armonica tesserale saranno sfasate di $\pi/2$, la parte immaginaria avrà sempre $m + 1$ zone, visto il tipico comportamento della funzione $\sin(m\varphi)$). Come esempio si è rappresentata, in Figura 1.1, la parte immaginaria della funzione $Y_{3,5}(\vartheta, \varphi)$.

1.3 Equazione di Helmholtz vettoriale in coordinate sferiche

In questo paragrafo si ricaverà l'espressione assunta da una generica soluzione dell'equazione di Helmholtz vettoriale. Come si è visto nei paragrafi precedenti una qualsiasi soluzione di questa equazione può essere scritta come combinazione lineare dei tre vettori \mathbf{L} , \mathbf{M} e \mathbf{N} , una volta nota la soluzione dell'equazione differenziale scalare. Dato che si è interessati alla soluzione dell'equazione omogenea, ovvero in

assenza di sorgenti, per risolvere il problema sarà sufficiente ricavare i vettori \mathbf{M} e \mathbf{N} , andando ad inserire l'espressione (3.1.13) in (1.1.5). Prima di iniziare però è bene ricordare l'espressione che assume il rotore in coordinate sferiche, si ha [8]:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{A} = & \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta A_\varphi) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \varphi} \right] \mathbf{r}_0 + \\ & + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} \right] \boldsymbol{\vartheta}_0 + \\ & + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rA_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right] \boldsymbol{\varphi}_0\end{aligned}\quad (1.3.1)$$

Si deve ora scegliere il vettore pilota; come detto questo deve essere un versore costante. In coordinate sferiche sarebbe molto bello poter usare come vettore pilota il versore \mathbf{r}_0 , in questo modo, infatti, i vettori \mathbf{M} e \mathbf{N} sarebbero entrambi tangenti alla generica sfera centrata nell'origine. Sfortunatamente, il versore \mathbf{r}_0 non è un versore costante e non può essere usato come versore pilota come definito in (1.1.5). Ci chiediamo quindi se esiste una funzione ψ' che permetta di usare il versore radiale come vettore pilota nella definizione di \mathbf{M} e \mathbf{N} . Possiamo supporre che la nuova funzione si possa scrivere come segue:

$$\psi'(r, \vartheta, \varphi) = u(r)\psi(r, \vartheta, \varphi) \quad (1.3.2)$$

dove $u(r)$ è una funzione incognita. Potremo quindi porre:

$$\mathbf{M}(r, \vartheta, \varphi) = \nabla \times [\mathbf{r}_0 u(r)\psi(r, \vartheta, \varphi)] = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial(u\psi)}{\partial \varphi} \boldsymbol{\vartheta}_0 - \frac{1}{r} \frac{\partial(u\psi)}{\partial \vartheta} \boldsymbol{\varphi}_0 \quad (1.3.3)$$

ovvero:

$$\mathbf{M}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{u(r)}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \boldsymbol{\vartheta}_0 - \frac{u(r)}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \boldsymbol{\varphi}_0 \quad (1.3.4)$$

Dobbiamo quindi trovare la funzione $u(r)$ per la quale il vettore \mathbf{M} rispetti l'equazione di Helmholtz; grazie al fatto che la divergenza del vettore è nulla l'e-

quazione potrà scriversi come segue:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{M} - k^2 \mathbf{M} = 0 \quad (1.3.5)$$

Separiamo questa equazione nelle sue tre componenti. Ricordando che [1, 8]:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_2 h_3} \mathbf{u}_{01} & \frac{1}{h_1 h_3} \mathbf{u}_{02} & \frac{1}{h_1 h_2} \mathbf{u}_{03} \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ \frac{h_1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial(h_3 A_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial(h_2 A_2)}{\partial u_3} \right] & \frac{h_2}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial(h_1 A_1)}{\partial u_3} - \frac{\partial(h_3 A_3)}{\partial u_1} \right] & \frac{h_3}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 A_2)}{\partial u_1} - \frac{\partial(h_1 A_1)}{\partial u_2} \right] \end{bmatrix}$$

dove u_i , \mathbf{u}_{0i} e h_i per $i = 1, 2, 3$, sono rispettivamente le coordinate, i versori ed i fattori metrici del generico sistema di coordinate curvilinee. Nel caso del sistema di riferimento sferico sappiamo di avere:

$$\begin{aligned} u_1 &= r, & u_2 &= \vartheta, & u_3 &= \varphi, \\ \mathbf{u}_{01} &= \mathbf{r}_0, & \mathbf{u}_{02} &= \boldsymbol{\vartheta}_0, & \mathbf{u}_{03} &= \boldsymbol{\varphi}_0, \\ h_1 &= 1, & h_2 &= r, & h_3 &= r \sin \vartheta, \end{aligned}$$

Quindi il rotore del rotore di un generico vettore potrà scriversi come segue:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \mathbf{r}_0 & \frac{1}{r \sin \vartheta} \boldsymbol{\vartheta}_0 & \frac{1}{r} \boldsymbol{\varphi}_0 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \vartheta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left[\frac{\partial(r \sin \vartheta A_\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial(r A_\vartheta)}{\partial \varphi} \right] & \frac{1}{\sin \vartheta} \left[\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r \sin \vartheta A_\varphi)}{\partial r} \right] & \sin \vartheta \left[\frac{\partial(r A_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right] \end{bmatrix}$$

Calcoliamo ora le tre componenti dell'equazione (1.3.5), facendo uso delle espressioni (1.3.4).

La componente lungo \mathbf{r}_0 sarà:

$$\frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{u(r)}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial r} \left(-r \sin \vartheta \frac{u(r)}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right) \right] \right\} = 0 \quad (1.3.6)$$

la quale semplificando, riordinando e facendo uso del teorema di Schwarz diventa:

$$\frac{\partial^3(u\psi)}{\partial r \partial \vartheta \partial \varphi} - \frac{\partial^3(u\psi)}{\partial r \partial \vartheta \partial \varphi} = 0 \quad (1.3.7)$$

la quale è sempre vera a prescindere dai valori assunti da $u(r)$.

Passiamo alla componente lungo $\boldsymbol{\vartheta}_0$:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{r \sin \vartheta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{u(r)}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right) \right] + \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(-\sin \vartheta \frac{u(r)}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{u(r)}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right) \right] \right\} \right\} - \frac{k^2 u(r)}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = 0 \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

Con un po' di algebra e portando in evidenza la derivata rispetto a φ , sempre grazie al teorema di Schwarz, potremo scrivere:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left[u(r) \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{u(r)}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{u(r)}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + k^2 u(r) \psi \right] = 0 \quad (1.3.9)$$

Confrontando questa equazione con l'equazione (1.2.1), si vede subito che questa equazione è soddisfatta per $u(r) = r$; in questo caso, infatti, l'equazione torna ad essere l'equazione di Helmholtz scalare per la funzione ψ .

Per quanto riguarda la componente lungo $\boldsymbol{\varphi}_0$, si può dimostrare che essa assume un'espressione uguale alla (1.3.9), fornendo quindi la stessa informazione. Abbiamo così dimostrato che i vettori \mathbf{M} e \mathbf{N} possono essere generati con il vettore pilota \mathbf{r}_0 usando la funzione $r\psi(r, \vartheta, \varphi)$. Si avrà quindi:

$$\mathbf{M} = \nabla \times (\mathbf{r}\psi); \quad \mathbf{N} = \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{M} \quad (1.3.10)$$

da cui, con l'ausilio della (1.3.1), si può calcolare facilmente che:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \boldsymbol{\vartheta}_0 - \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \boldsymbol{\varphi}_0 \quad (1.3.11)$$

ovvero, usando la (3.1.13), si può scrivere:

$$\mathbf{M}_{mn} = \frac{im}{\sin \vartheta} z_n(kr) P_n^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi} \boldsymbol{\vartheta}_0 - z_n(kr) \frac{\partial P_n^m(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta} e^{im\varphi} \boldsymbol{\varphi}_0 \quad (1.3.12)$$

Applicando ora l'operatore rotore a quest'ultima espressione, si ottiene:

$$\mathbf{N}_{mn} = \frac{1}{k} \left\{ \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta M_\varphi) - \frac{\partial M_\vartheta}{\partial \varphi} \right] \mathbf{r}_0 - \frac{1}{r} \frac{\partial (r M_\varphi)}{\partial r} \boldsymbol{\vartheta}_0 + \frac{1}{r} \frac{\partial (r M_\vartheta)}{\partial r} \boldsymbol{\varphi}_0 \right\} \quad (1.3.13)$$

La quale, svolgendo le operazioni di derivazione, diventa:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{mn} = & \frac{z_n(kr) e^{im\varphi}}{kr} \left[-\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial P_n^m}{\partial \vartheta} \right) + \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} P_n^m \right] \mathbf{r}_0 + \\ & + \frac{1}{kr} \frac{\partial [r z_n(kr)]}{\partial r} \frac{\partial P_n^m}{\partial \vartheta} e^{im\varphi} \boldsymbol{\vartheta}_0 + \frac{1}{kr} \frac{\partial [r z_n(kr)]}{\partial r} \frac{im}{\sin \vartheta} P_n^m e^{im\varphi} \boldsymbol{\varphi}_0 \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

cerchiamo di porre la componente lungo r in una forma più compatta; osservando l'equazione (1.2.7), e ricordando che si aveva $\Theta(\vartheta) = P_n^m(\cos \vartheta)$ e che $p^2 = n(n+1)$, si può scrivere:

$$-\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial P_n^m}{\partial \vartheta} \right) + \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} P_n^m = n(n+1) P_n^m(\cos \vartheta) \quad (1.3.15)$$

possiamo quindi scrivere:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{mn} = & \frac{z_n(kr)}{kr} n(n+1) P_n^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi} \mathbf{r}_0 + \frac{1}{kr} \frac{\partial [r z_n(kr)]}{\partial r} \frac{\partial P_n^m}{\partial \vartheta} e^{im\varphi} \boldsymbol{\vartheta}_0 \\ & + \frac{1}{kr} \frac{\partial [r z_n(kr)]}{\partial r} \frac{im}{\sin \vartheta} P_n^m e^{im\varphi} \boldsymbol{\varphi}_0 \end{aligned} \quad (1.3.16)$$

Abbiamo così ricavato delle espressioni esplicite per i vettori \mathbf{M}_{mn} e \mathbf{N}_{mn} . Per porre queste espressioni in una forma più elegante andiamo a definire due funzioni,

legate alla funzione associata di Legendre, molto diffuse in letteratura [1, 4, 9, 10]:

$$\pi_{mn}(\vartheta) = m \frac{P_n^m(\cos \vartheta)}{\sin \vartheta} \quad (1.3.17)$$

$$\tau_{mn}(\vartheta) = \frac{dP_n^m(\cos \vartheta)}{d\vartheta} \quad (1.3.18)$$

grazie a queste funzioni, si possono riscrivere i vettori nella seguente forma:

$$\mathbf{M}_{mn} = z_n(\rho) [i\pi_{mn}(\vartheta)\boldsymbol{\vartheta}_0 - \tau_{mn}(\vartheta)\boldsymbol{\varphi}_0] e^{im\varphi} \quad (1.3.19)$$

$$\mathbf{N}_{mn} = \left\{ n(n+1) \frac{z_n(\rho)}{\rho} P_n^m(\cos \vartheta) \mathbf{r}_0 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial[\rho z_n(\rho)]}{\partial \rho} [\tau_{mn}(\vartheta)\boldsymbol{\vartheta}_0 + i\pi_{mn}(\vartheta)\boldsymbol{\varphi}_0] \right\} e^{im\varphi} \quad (1.3.20)$$

Trovate le generiche soluzioni dell'equazione di Helmholtz vettoriale, siamo ora in grado di scrivere il generico campo elettrico, espresso in coordinate sferiche, come segue:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n [a_{mn}\mathbf{M}_{mn}(\mathbf{r}) + b_{mn}\mathbf{N}_{mn}(\mathbf{r})] \quad (1.3.21)$$

I coefficienti a_{mn} e b_{mn} sono delle incognite legate al tipo di campo elettrico che si vuole rappresentare. Essi possono essere ricavati o con l'applicazione delle condizioni al contorno, oppure a partire da un'espressione alternativa del campo elettrico che sia già nota. In quest'ultimo caso il procedimento per il calcolo dei coefficienti risulta particolarmente semplice grazie alle particolari proprietà di ortogonalità dei vettori \mathbf{M} e \mathbf{N} . A questo proposito separiamo la dipendenza da r dalla dipendenza dalle variabili ϑ e φ , scrivendo i vettori come segue:

$$\mathbf{M}_{mn}(r, \vartheta, \varphi) = z_n(\rho) \mathbf{m}_{mn}(\vartheta, \varphi) \quad (1.3.22)$$

$$\mathbf{N}_{mn}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{z_n(\rho)}{\rho} \mathbf{p}_{mn}(\vartheta, \varphi) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial[\rho z_n(\rho)]}{\partial \rho} \mathbf{n}_{mn}(\vartheta, \varphi) \quad (1.3.23)$$

con:

$$\mathbf{m}_{mn}(\vartheta, \varphi) = e^{im\varphi} [i\pi_{mn}(\vartheta)\boldsymbol{\vartheta}_0 - \tau_{mn}(\vartheta)\boldsymbol{\varphi}_0] \quad (1.3.24)$$

$$\mathbf{n}_{mn}(\vartheta, \varphi) = e^{im\varphi} [\tau_{mn}(\vartheta)\boldsymbol{\vartheta}_0 + i\pi_{mn}(\vartheta)\boldsymbol{\varphi}_0] \quad (1.3.25)$$

$$\mathbf{p}_{mn}(\vartheta, \varphi) = e^{im\varphi} n(n+1)P_n^m(\cos \vartheta)\mathbf{r}_0 \quad (1.3.26)$$

In questo modo vediamo che i vettori \mathbf{m} , \mathbf{n} e \mathbf{p} sono indipendenti dal tipo di onda, stazionaria o progressiva. Si può dimostrare che questi vettori sono tra loro ortogonali.

1.4 Ortogonalità delle funzioni vettoriali sferiche

Si procederà ora nel dimostrare l'ortogonalità delle funzioni contenute nei vettori $\mathbf{m}_{mn}(\vartheta, \varphi)$ e $\mathbf{n}_{mn}(\vartheta, \varphi)$ precedentemente definite. L'ortogonalità rispetto alla variabile φ è evidente, infatti tutti e due i vettori hanno una dipendenza del tipo $e^{im\varphi}$, quindi un'integrazione su φ varrà a sopprimere l'ordine m , grazie alla ben nota proprietà:

$$\int_0^{2\pi} e^{im\varphi} e^{-im'\varphi} d\varphi = 2\pi\delta_{mm'} \quad (1.4.1)$$

Rispetto alla variabile ϑ la cosa è meno evidente. Ricordando la seguente regola di ortogonalità della funzione associata di Legendre [1, 6]:

$$\int_0^\pi P_n^m(\cos \vartheta) P_{n'}^m(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{nn'} \quad (1.4.2)$$

e ricordando inoltre che vale [1, 6]:

$$P_n^m(\eta) = (1-\eta^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(\eta)}{d\eta^m} \quad (1.4.3)$$

dove $P_n(\eta)$ è il polinomio di Legendre di ordine n . Possiamo trovare le relazioni di ortogonalità per $\pi_{mn}(\vartheta)$ e $\tau_{mn}(\vartheta)$. Possiamo vedere infatti che:

$$\begin{aligned}\pi_{mn}(\vartheta)\tau_{mn'}(\vartheta) + \tau_{mn}(\vartheta)\pi_{mn'}(\vartheta) &= \frac{m}{\sin \vartheta} \left(P_n^m \frac{dP_{n'}^m}{d\vartheta} + P_{n'}^m \frac{dP_n^m}{d\vartheta} \right) = \\ &= \frac{m}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} (P_n^m P_{n'}^m)\end{aligned}\quad (1.4.4)$$

da cui si vede facilmente che:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi [\pi_{mn}(\vartheta)\tau_{mn'}(\vartheta) + \tau_{mn}(\vartheta)\pi_{mn'}(\vartheta)] \sin \vartheta d\vartheta &= \\ = m P_n^m P_{n'}^m \Big|_0^\pi &= m P_n^m \sin^2 \vartheta \frac{dP_{n'}^m}{d \cos \vartheta} \Big|_0^\pi = 0\end{aligned}\quad (1.4.5)$$

questa è la prima relazione di ortogonalità per le funzioni $\pi_{mn}(\vartheta)$ e $\tau_{mn}(\vartheta)$ che riscriviamo per comodità:

$$\boxed{\int_0^\pi [\pi_{mn}(\vartheta)\tau_{mn'}(\vartheta) + \tau_{mn}(\vartheta)\pi_{mn'}(\vartheta)] \sin \vartheta d\vartheta = 0}\quad (1.4.6)$$

Consideriamo ora la seguente espressione:

$$\pi_{mn}(\vartheta)\pi_{mn'}(\vartheta) + \tau_{mn}(\vartheta)\tau_{mn'}(\vartheta) = \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} P_n^m P_{n'}^m + \frac{dP_n^m}{d\vartheta} \frac{dP_{n'}^m}{d\vartheta}\quad (1.4.7)$$

Per trovare un senso in questa espressione riscriviamo l'equazione differenziale (1.2.7) per P_n^m e per $P_{n'}^m$:

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{dP_n^m}{d\vartheta} \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \right] P_n^m = 0\quad (1.4.8)$$

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{dP_{n'}^m}{d\vartheta} \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \right] P_{n'}^m = 0\quad (1.4.9)$$

ora si moltiplichino la prima equazione per $P_{n'}^m$ e la seconda per P_n^m e si sommi membro a membro:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{dP_n^m}{d\vartheta} \right) P_{n'}^m + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{dP_{n'}^m}{d\vartheta} \right) P_n^m + \\ + 2 \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \right] P_n^m P_{n'}^m = 0 \end{aligned} \quad (1.4.10)$$

moltiplicando ambo i membri per $\sin \vartheta$ e notando che:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{dP_n^m}{d\vartheta} P_{n'}^m + \sin \vartheta \frac{dP_{n'}^m}{d\vartheta} P_n^m \right) = \\ = \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{dP_n^m}{d\vartheta} \right) P_{n'}^m + \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{dP_{n'}^m}{d\vartheta} \right) P_n^m + 2 \sin \vartheta \frac{dP_n^m}{d\vartheta} \frac{dP_{n'}^m}{d\vartheta} \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

si potrà scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{dP_n^m}{d\vartheta} P_{n'}^m + \sin \vartheta \frac{dP_{n'}^m}{d\vartheta} P_n^m \right) - 2 \sin \vartheta \frac{dP_n^m}{d\vartheta} \frac{dP_{n'}^m}{d\vartheta} + \\ + 2 \sin \vartheta \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \right] P_n^m P_{n'}^m = 0 \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

la quale, riordinando, fornisce:

$$\begin{aligned} \sin \vartheta \left(\frac{dP_n^m}{d\vartheta} \frac{dP_{n'}^m}{d\vartheta} + m^2 \frac{P_n^m P_{n'}^m}{\sin^2 \vartheta} \right) = \\ = \frac{1}{2} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{dP_n^m}{d\vartheta} P_{n'}^m + \sin \vartheta \frac{dP_{n'}^m}{d\vartheta} P_n^m \right) + n(n+1) \sin \vartheta P_n^m P_{n'}^m \end{aligned} \quad (1.4.13)$$

Andiamo ora a moltiplicare l'espressione (1.4.7) per $\sin \vartheta$ ad ambo i membri ed ad integrarla su ϑ , si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi [\pi_{mn}(\vartheta)\pi_{mn'}(\vartheta) + \tau_{mn}(\vartheta)\tau_{mn'}(\vartheta)] \sin \vartheta d\vartheta = \\ = \int_0^\pi \left(\frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} P_n^m P_{n'}^m + \frac{dP_n^m}{d\vartheta} \frac{dP_{n'}^m}{d\vartheta} \right) \sin \vartheta d\vartheta \end{aligned} \quad (1.4.14)$$

inserendo l'espressione (6.3.5) in (1.4.14), si ha:

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi [\pi_{mn}(\vartheta)\pi_{m'n'}(\vartheta) + \tau_{mn}(\vartheta)\tau_{m'n'}(\vartheta)] \sin \vartheta d\vartheta = \\ & = \int_0^\pi n(n+1)P_n^m P_{n'}^m \sin \vartheta d\vartheta + \frac{1}{2} \left[\sin \vartheta \frac{dP_n^m}{d\vartheta} P_{n'}^m + \sin \vartheta \frac{dP_{n'}^m}{d\vartheta} P_n^m \right]_0^\pi \end{aligned} \quad (1.4.15)$$

si vede facilmente che la parentesi quadra a secondo membro si annulla, mentre l'integrale di destra può facilmente essere calcolato con l'ausilio della (1.4.2), ottenendo la seconda relazione di ortogonalità per le funzioni $\pi_{mn}(\vartheta)$ e $\tau_{mn}(\vartheta)$:

$$\boxed{\int_0^\pi [\pi_{mn}(\vartheta)\pi_{m'n'}(\vartheta) + \tau_{mn}(\vartheta)\tau_{m'n'}(\vartheta)] \sin \vartheta d\vartheta = \frac{2n(n+1)}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{nn'}} \quad (1.4.16)$$

A questo punto è sufficiente notare che il prodotto scalare tra il vettore $\mathbf{m}_{mn}(\vartheta)$ per il vettore $\mathbf{n}_{m'n'}^*(\vartheta)$ risulta uguale a:

$$\mathbf{m}_{mn} \cdot \mathbf{n}_{m'n'}^* = -ie^{i(m-m')\varphi} [\pi_{mn}(\vartheta)\tau_{m'n'}(\vartheta) + \tau_{mn}(\vartheta)\pi_{m'n'}(\vartheta)] \quad (1.4.17)$$

essendo $\pi_{mn}(\vartheta)$ e $\tau_{mn}(\vartheta)$ funzioni a valori reali. Moltiplicando ambo i membri per $\sin \vartheta$, integrando su ϑ e su φ e facendo uso della relazione (1.4.6), si ottiene:

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{m}_{mn} \cdot \mathbf{n}_{m'n'}^* \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 0} \quad (1.4.18)$$

la quale, ovviamente, continua a valere scambiando l'operazione di coniugazione.

Vediamo invece cosa si ottiene moltiplicando $\mathbf{m}_{mn}(\vartheta, \varphi)$ per il vettore $\mathbf{m}_{m'n'}^*(\vartheta, \varphi)$:

$$\mathbf{m}_{mn} \cdot \mathbf{m}_{m'n'}^* = e^{i(m-m')\varphi} [\pi_{mn}(\vartheta)\pi_{m'n'}(\vartheta) + \tau_{mn}(\vartheta)\tau_{m'n'}(\vartheta)] \quad (1.4.19)$$

analogamente moltiplicando $\mathbf{n}_{mn}(\vartheta, \varphi)$ per il vettore $\mathbf{n}_{m'n'}^*(\vartheta, \varphi)$, si ottiene:

$$\mathbf{n}_{mn} \cdot \mathbf{n}_{m'n'}^* = e^{i(m-m')\varphi} [\pi_{mn}(\vartheta)\pi_{m'n'}(\vartheta) + \tau_{mn}(\vartheta)\tau_{m'n'}(\vartheta)] \quad (1.4.20)$$

quindi moltiplicando queste due ultime espressioni per $\sin \vartheta$, integrandole su ϑ e φ ed utilizzando le espressioni (1.4.1) e (1.4.16), si ottiene:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{m}_{mn} \cdot \mathbf{m}_{m'n'}^* \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 4\pi \frac{n(n+1)}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{mm'} \delta_{nn'} \quad (1.4.21)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{n}_{mn} \cdot \mathbf{n}_{m'n'}^* \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 4\pi \frac{n(n+1)}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{mm'} \delta_{nn'} \quad (1.4.22)$$

Per terminare il paragrafo si vuole mostrare anche l'ortogonalità del vettore $\mathbf{p}_{mn}(\vartheta, \varphi)$. L'ortogonalità di tale vettore con i vettori $\mathbf{m}_{mn}(\vartheta, \varphi)$ e $\mathbf{n}_{m'n'}(\vartheta, \varphi)$ è manifesta per il fatto che questi ultimi sono puramente tangenziali, mentre il vettore $\mathbf{p}_{mn}(\vartheta, \varphi)$ è puramente radiale, sfruttando inoltre le relazioni (1.4.1) e (1.4.2) si può facilmente vedere che risulta:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{p}_{mn} \cdot \mathbf{m}_{m'n'}^* \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 0 \quad (1.4.23)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{p}_{mn} \cdot \mathbf{n}_{m'n'}^* \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 0 \quad (1.4.24)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{p}_{mn} \cdot \mathbf{p}_{m'n'}^* \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 4\pi \frac{[n(n+1)]^2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{mm'} \delta_{nn'} \quad (1.4.25)$$

1.5 Sviluppo di un'onda piana in armoniche sferiche

Si procederà ora al calcolo dei coefficienti coinvolti nello sviluppo di un'onda piana in armoniche sferiche. Potremo scrivere il campo elettrico della generica onda piana polarizzata linearmente, come segue:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{e}_0 \quad (1.5.1)$$

supponiamo dapprima che il generico versore \mathbf{e}_0 coincida con il versore \mathbf{x}_0 , si avrà allora [11]:

$$\mathbf{x}_0 = \sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{r}_0 + \cos \vartheta \cos \varphi \boldsymbol{\vartheta}_0 - \sin \varphi \boldsymbol{\varphi}_0 \quad (1.5.2)$$

Inoltre in questo caso sarà sempre possibile considerare come direzione di propagazione la direzione z e quindi avere:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kz = \rho \cos \vartheta \quad (1.5.3)$$

La soluzione che stiamo cercando sarà della seguente forma:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n [a_{mn} \mathbf{M}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r}) + b_{mn} \mathbf{N}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r})] \quad (1.5.4)$$

dove, con l'apice (1), si è indicato che stiamo considerando le funzioni di Bessel sferiche di prima specie. Moltiplicando scalarmente ambo i membri per $\mathbf{m}_{pq}^*(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta$, integrando su ϑ e φ ed utilizzando le relazioni di ortogonalità precedentemente ricavate, si ottiene:

$$a_{pq} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{E} \cdot \mathbf{m}_{pq}^* \sin \vartheta d\vartheta d\varphi}{E_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{M}_{pq} \cdot \mathbf{m}_{pq}^* \sin \vartheta d\vartheta d\varphi} = \frac{N_{pq}^a}{D_{pq}^a} \quad (1.5.5)$$

ed analogamente, moltiplicando scalarmente per la funzione vettoriale $\mathbf{n}_{pq}^*(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta$, si ottiene:

$$b_{pq} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_{pq}^* \sin \vartheta d\vartheta d\varphi}{E_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{N}_{pq} \cdot \mathbf{n}_{pq}^* \sin \vartheta d\vartheta d\varphi} = \frac{N_{pq}^b}{D_{pq}^b} \quad (1.5.6)$$

Per il calcolo dei coefficienti vanno ora risolti gli integrali. Consideriamo per primo l'integrale a denominatore di (1.5.5), si potrà scrivere:

$$\begin{aligned} D_{pq}^a &= E_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{M}_{pq} \cdot \mathbf{m}_{pq}^* \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \\ &= E_0 j_n(\rho) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{m}_{pq} \cdot \mathbf{m}_{pq}^* \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \end{aligned} \quad (1.5.7)$$

la quale, facendo uso della (1.4.21) diventa:

$$D_{pq}^a = E_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{M}_{pq} \cdot \mathbf{m}_{pq}^* \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = E_0 j_n(\rho) 4\pi \frac{q(q+1)}{2q+1} \frac{(q+p)!}{(q-p)!} \quad (1.5.8)$$

analogamente per il denominatore della (1.5.6), si ottiene:

$$D_{pq}^b = E_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{N}_{pq} \cdot \mathbf{n}_{pq}^* \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{E_0}{\rho} \frac{d[\rho j_n(\rho)]}{d\rho} 4\pi \frac{q(q+1)}{2q+1} \frac{(q+p)!}{(q-p)!} \quad (1.5.9)$$

Rimane ora da studiare i numeratori delle espressioni (1.5.5) e (1.5.6). Date le ipotesi fatte sull'onda piana, si potrà scrivere:

$$N_{pq}^a = -E_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{i\rho \cos \vartheta} (\cos \vartheta \cos \varphi \boldsymbol{\vartheta}_0 - \sin \varphi \boldsymbol{\varphi}_0) \cdot [i\pi_{pq} \boldsymbol{\vartheta}_0 + \tau_{pq} \boldsymbol{\varphi}_0] e^{-ip\varphi} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \quad (1.5.10)$$

dove si è evitato di scrivere la componente radiale del campo essendo questa ortogonale al vettore \mathbf{m}_{mn}^* ; svolgendo il prodotto scalare, si avrà:

$$N_{pq}^a = -E_0 \left\{ i \int_0^\pi e^{i\rho \cos \vartheta} \pi_{pq} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} \cos \varphi e^{-ip\varphi} d\varphi + \int_0^\pi e^{i\rho \cos \vartheta} \tau_{pq} \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} \sin \varphi e^{-ip\varphi} d\varphi \right\} \quad (1.5.11)$$

in questo integrale si può notare un caso di ortogonalità molto simile a quello mostrato in (1.4.1), si può facilmente vedere infatti che:

$$\int_0^{2\pi} \cos m\varphi e^{-in\varphi} d\varphi = \pi \delta_{mn} \quad (1.5.12)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin m\varphi e^{-in\varphi} d\varphi = -i\pi \delta_{mn} \quad (1.5.13)$$

la quale, scritta per $m = 1$, diventa:

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi e^{-in\varphi} d\varphi = \pi \delta_{1|n|} \quad (1.5.14)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \varphi e^{-in\varphi} d\varphi = -\text{sign}(n) i\pi \delta_{1|n|} \quad (1.5.15)$$

si avrà così che $p = \pm 1$. Rimarrà quindi:

$$N_{pq}^a = -i\pi\delta_{1|p|}E_0 \left[\int_0^\pi e^{i\rho\cos\vartheta} \pi_{1q}(\vartheta) \cos\vartheta \sin\vartheta d\vartheta + \text{sign}(p) \int_0^\pi e^{i\rho\cos\vartheta} \tau_{1q}(\vartheta) \sin\vartheta d\vartheta \right] \quad (1.5.16)$$

unendo i due integrali ed esplicitando le espressioni di $\pi_{1q}(\vartheta)$ e $\tau_{1q}(\vartheta)$ ed il valore dell'indice p , si ottiene:

$$N_{1q}^a = -i\pi E_0 \int_0^\pi e^{i\rho\cos\vartheta} \left[P_q^1(\cos\vartheta) \cos\vartheta + \frac{dP_q^1(\cos\vartheta)}{d\vartheta} \sin\vartheta \right] d\vartheta \quad (1.5.17)$$

e:

$$N_{-1q}^a = i\pi E_0 \int_0^\pi e^{i\rho\cos\vartheta} \left[P_q^{-1}(\cos\vartheta) \cos\vartheta + \frac{dP_q^{-1}(\cos\vartheta)}{d\vartheta} \sin\vartheta \right] d\vartheta \quad (1.5.18)$$

Ricordando ora la seguente relazione sulle funzioni associate di Legendre:

$$P_n^{-m}(z) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(z) \quad (1.5.19)$$

possiamo riscrivere le espressioni (1.5.17) e (1.5.18) come segue:

$$N_{pq}^a = -i\pi E_0 \left(\delta_{1p} + \delta_{-1p} \frac{1}{q(q+1)} \right) \cdot \int_0^\pi e^{i\rho\cos\vartheta} \left[P_q^1(\cos\vartheta) \cos\vartheta + \frac{dP_q^1(\cos\vartheta)}{d\vartheta} \sin\vartheta \right] d\vartheta \quad (1.5.20)$$

la quale, chiamando il termine moltiplicativo esterno E'_0 , può essere scritta come segue:

$$N_{pq}^a = E'_0 \int_0^\pi e^{i\rho\cos\vartheta} \frac{d}{d\vartheta} [P_q^1(\cos\vartheta) \sin\vartheta] d\vartheta \quad (1.5.21)$$

sfruttando la (1.4.3) si vede che:

$$P_n^1(\cos \vartheta) = \sin \vartheta \frac{dP_n}{d \cos \vartheta} = -\frac{dP_n}{d\vartheta} \quad (1.5.22)$$

potremo quindi scrivere:

$$N_{pq}^a = -E'_0 \int_0^\pi e^{i\rho \cos \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left[\sin \vartheta \frac{dP_q(\cos \vartheta)}{d\vartheta} \right] d\vartheta \quad (1.5.23)$$

Ricordando che il polinomio di Legendre è sostanzialmente la funzione associata di Legendre di grado $m = 0$, essa soddisferà l'equazione differenziale (1.2.7), che potrà essere scritta nella semplice forma seguente:

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left[\sin \vartheta \frac{dP_n(\cos \vartheta)}{d\vartheta} \right] + n(n+1)P_n(\cos \vartheta) = 0 \quad (1.5.24)$$

si potrà quindi scrivere la (1.5.23) come segue:

$$N_{pq}^a = q(q+1)E'_0 \int_0^\pi e^{i\rho \cos \vartheta} P_q(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \quad (1.5.25)$$

ricordando ora la generalizzazione di Gegenbauer dell'integrale di Poisson [4, 6, 7]:

$$j_n(\rho) = \frac{i^{-n}}{2} \int_0^\pi e^{i\rho \cos \vartheta} P_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \quad (1.5.26)$$

si può risolvere l'integrale in forma chiusa, scrivendo:

$$N_{pq}^a = 2\pi E_0 i^{q-1} j_n(\rho) [q(q+1)\delta_{1p} + \delta_{-1p}] \quad (1.5.27)$$

potremo quindi scrivere il coefficiente $a_{1q} = a_q$, come segue:

$$a_{pq} = \frac{N_{pq}^a}{D_{pq}^a} = \frac{2\pi E_0 i^{q-1}}{E_0 j_n(\rho) 4\pi} \frac{2q+1}{q(q+1)} \frac{(q-1)!}{(q+1)!} [q(q+1)\delta_{1p} + \delta_{-1p}] \quad (1.5.28)$$

la quale, con le dovute semplificazioni, diventa:

$$\boxed{a_{pq} = i^{(q-1)} \frac{2q+1}{2q(q+1)} [\delta_{1p} + q(q+1)\delta_{-1p}]} \quad (1.5.29)$$

Si andrà ora, con passaggi analoghi, a trattare il numeratore in (1.5.6), si potrà scrivere:

$$N_{pq}^b = E_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{i\rho \cos \vartheta} (\cos \vartheta \cos \varphi \boldsymbol{\vartheta}_0 - \sin \varphi \boldsymbol{\varphi}_0) \cdot [\tau_{pq} \boldsymbol{\vartheta}_0 - i\pi_{pq} \boldsymbol{\varphi}_0] e^{-ip\varphi} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \quad (1.5.30)$$

anche in questo caso si può arrivare ad avere $p = \pm 1$ risolvendo l'integrale rispetto a φ , potremo quindi scrivere:

$$N_{pq}^b = E_0 \pi \delta_{1|p|} \int_0^\pi e^{i\rho \cos \vartheta} [\tau_{1q}(\vartheta) \cos \vartheta + \text{sign}(p) \pi_{1q}(\vartheta)] \sin \vartheta d\vartheta \quad (1.5.31)$$

andando ad esplicitare le espressioni di $\pi_{1q}(\vartheta)$ e $\tau_{1q}(\vartheta)$ e i valori di p , si può scrivere:

$$N_{1q}^b = E_0 \pi \int_0^\pi e^{i\rho \cos \vartheta} \left[\frac{dP_q^1}{d\vartheta} \cos \vartheta + \frac{P_q^1}{\sin \vartheta} \right] \sin \vartheta d\vartheta \quad (1.5.32)$$

e:

$$N_{-1q}^b = E_0 \pi \int_0^\pi e^{i\rho \cos \vartheta} \left[\frac{dP_q^{-1}}{d\vartheta} \cos \vartheta + \frac{P_q^{-1}}{\sin \vartheta} \right] \sin \vartheta d\vartheta \quad (1.5.33)$$

Sfruttando l'espressione (1.5.19) e scrivendo tutto in funzione del solo polinomio di Legendre, per mezzo della (1.5.22), si ha:

$$N_{pq}^b = -E_0 \left[\delta_{1|p|} - \frac{\delta_{-1q}}{q(q+1)} \right] \pi \int_0^\pi e^{i\rho \cos \vartheta} \left[\frac{d^2 P_q}{d\vartheta^2} \cos \vartheta + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{dP_q}{d\vartheta} \right] \sin \vartheta d\vartheta \quad (1.5.34)$$

Chiamando il coefficiente moltiplicativo E'_0 , ed andando poi ad esplicitare la derivata

seconda del polinomio di Legendre in (1.5.24), si ha:

$$\frac{d^2 P_n(\cos \vartheta)}{d\vartheta^2} = -\frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{dP_n(\cos \vartheta)}{d\vartheta} - n(n+1)P_n(\cos \vartheta) \quad (1.5.35)$$

ed andando a sostituire in (1.5.34), si ottiene:

$$N_{pq}^b = E_0' \int_0^\pi e^{i\rho \cos \vartheta} \left[-\frac{\cos^2 \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{dP_q}{d\vartheta} - q(q+1)P_q \cos \vartheta + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{dP_q}{d\vartheta} \right] \sin \vartheta d\vartheta \quad (1.5.36)$$

sviluppando il $\cos^2 \vartheta$ in $1 - \sin^2 \vartheta$ e separando in due integrali, si può scrivere:

$$N_{pq}^b = -E_0' \left\{ q(q+1) \int_0^\pi e^{i\rho \cos \vartheta} P_q \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta - \int_0^\pi e^{i\rho \cos \vartheta} \frac{dP_q}{d\vartheta} \sin^2 \vartheta d\vartheta \right\} \quad (1.5.37)$$

consideriamo ora il secondo integrale nelle parentesi graffe e sviluppiamolo per parti come segue:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^{i\rho \cos \vartheta} \frac{dP_q}{d\vartheta} \sin^2 \vartheta d\vartheta &= \frac{i}{\rho} \int_0^\pi (-i\rho \sin \vartheta e^{i\rho \cos \vartheta}) \left(\frac{dP_q}{d\vartheta} \sin \vartheta \right) d\vartheta = \\ &= \frac{i}{\rho} \left[\left(e^{i\rho \cos \vartheta} \sin \vartheta \frac{dP_q}{d\vartheta} \right)_0^\pi - \int_0^\pi e^{i\rho \cos \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{dP_q}{d\vartheta} \right) d\vartheta \right] = \\ &= \frac{iq(q+1)}{\rho} \int_0^\pi e^{i\rho \cos \vartheta} P_q \sin \vartheta d\vartheta \end{aligned} \quad (1.5.38)$$

dove nell'ultimo passaggio si è considerato che la prima parentesi tonda si annulla grazie alla funzione seno e si è fatto uso dell'equazione (1.5.24) per riscrivere l'integrale. Andando ora a sostituire in (1.5.37), si ha:

$$N_{pq}^b = E_0' \frac{iq(q+1)}{\rho} \int_0^\pi e^{i\rho \cos \vartheta} P_q \sin \vartheta (1 + i\rho \cos \vartheta) d\vartheta \quad (1.5.39)$$

a questo punto moltiplichiamo ambo i membri della (1.5.26) per ρ e differenziamola rispetto a tale variabile, ottenendo:

$$\frac{d[\rho j_n(\rho)]}{d\rho} = \frac{i^{-n}}{2} \int_0^\pi e^{i\rho \cos \vartheta} P_n \sin \vartheta (1 + i\rho \cos \vartheta) d\vartheta \quad (1.5.40)$$

sfruttando questa espressione potremo finalmente scrivere il numeratore della (1.5.6) in forma chiusa come segue:

$$N_{pq}^b = E_0 2i^{q-1} q(q+1) \pi \frac{1}{\rho} \frac{d[\rho j_q(\rho)]}{\rho} \quad (1.5.41)$$

potremo quindi scrivere il coefficiente b_q come segue:

$$b_{pq} = \frac{E_0 2i^{q-1} q(q+1) \pi \frac{1}{\rho} \frac{d[\rho j_q(\rho)]}{\rho}}{4\pi \frac{E_0}{\rho} \frac{d[\rho j_n(\rho)]}{d\rho}} \frac{2q+1}{q(q+1)} \frac{(q-1)!}{(q+1)!} \left[\delta_{1|p|} - \frac{\delta_{-1q}}{q(q+1)} \right] \quad (1.5.42)$$

la quale, con le dovute semplificazioni, diventa:

$$\boxed{b_{pq} = i^{(q-1)} \frac{2q+1}{2q(q+1)} [\delta_{1p} - q(q+1)\delta_{-1p}]} \quad (1.5.43)$$

tali coefficienti coincidono con quelli trovati in [12], sebbene in quest'ultimo le espressioni differiscano leggermente a causa dell'ortonormalizzazione ivi effettuata sui vettori \mathbf{m}_{mn} e \mathbf{n}_{mn} . È bene notare che in [1, 4] in tali coefficienti scompare l'indice p in quanto, in tali riferimenti, si è scelta la formulazione in cui si dividono modi pari e dispari dei vettori \mathbf{M}_{mn} e \mathbf{N}_{mn} . Con questo formalismo si può vedere che sopravvivono solo i modi dispari ($\sin \varphi$) del vettore \mathbf{M}_{mn} e solo i modi pari ($\cos \varphi$) del vettore \mathbf{N}_{mn} , ed i coefficienti a_n e b_n sono legati dalla seguente relazione: $a_n = ib_n$. Tale differenza in ogni caso è legata alla differente definizione delle funzioni nelle quali viene sviluppata l'onda piana. Il risultato presentato in [1, 4] assume sicuramente una forma più semplice, tuttavia esso è meno generale, infatti il formalismo qui scelto risulta vincente quando si vogliono studiare onde piane più complesse, e.g., a polarizzazione ellittica o per vettori di propagazione formanti un angolo diverso da zero con gli assi coordinati.

L'onda piana polarizzata linearmente lungo x , propagantesi lungo z , si potrà

scrivere in armoniche sferiche come segue:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_0 \sum_{n=0}^{+\infty} i^{(n-1)} \frac{2n+1}{2n(n+1)} \left\{ \mathbf{M}_{1n}^{(1)}(\mathbf{r}) + \mathbf{N}_{1n}^{(1)}(\mathbf{r}) + \right. \\ \left. + n(n+1) \left[\mathbf{M}_{-1n}^{(1)}(\mathbf{r}) - \mathbf{N}_{-1n}^{(1)}(\mathbf{r}) \right] \right\} \quad (1.5.44)$$

Tale espressione è stata ricavata non senza difficoltà. Tale difficoltà nell'esprimere un'onda piana in armoniche sferiche è legata alla differente natura di questi tipi d'onda ed dei rispettivi sistemi di coordinate. Si può infatti immaginare che la difficoltà di esprimere un'onda con fronti piani mediante onde con fronti sferici sia un po' come quella che si incontrerebbe se si volesse costringere un oggetto quadrato all'interno di un incavo circolare [4].

Nella soluzione del problema di diffrazione di un'onda piana da parte di una sfera sepolta o vicina ad un'interfaccia non ci troveremo ad avere a che fare solo con onde piane polarizzate linearmente e propagantesi lungo uno degli assi coordinati, bensì si avrà a che fare con onde più complesse, come, per esempio, onde piane polarizzate linearmente propagantesi in una direzione qualsiasi o, più in generale, con onde piane polarizzate ellitticamente; questo avviene perché la sfera, data la sua natura tridimensionale e l'assenza di indefinitezze in tutte le direzioni coordinate, non conserverà la polarizzazione dell'onda incidente. Visto questo problema si dovrà disporre di uno strumento più completo rispetto a quello fin qui ricavato, in particolare è bene conoscere lo sviluppo in armoniche sferiche di una generica onda piana polarizzata ellitticamente e propagantesi in una generica direzione dello spazio. Vedremo ora come sia conveniente scrivere tale onda in coordinate cartesiane per poterne poi ricavare lo sviluppo in armoniche sferiche. L'onda piana generica potrà scriversi come segue [9, 12]:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_{pol} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = (E_{\vartheta i} \boldsymbol{\vartheta}_{0i} + E_{\varphi i} \boldsymbol{\varphi}_{0i}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (1.5.45)$$

dove \mathbf{e}_{pol} è il vettore di polarizzazione dell'onda piana. I versori $\boldsymbol{\vartheta}_{0i}$ e $\boldsymbol{\varphi}_{0i}$ sono i versori del sistema di riferimento sferico locale sull'onda, in cui si avrà la coordinata

radiale $r_k = k$ e $\mathbf{r}_{0i} = \mathbf{k}_0$, quindi si potrà scrivere:

$$\mathbf{k} = k (\sin \vartheta_i \cos \varphi_i \mathbf{x}_0 + \sin \vartheta_i \sin \varphi_i \mathbf{y}_0 + \cos \vartheta_i \mathbf{z}_0) \quad (1.5.46)$$

$$\vartheta_{0i} = \cos \vartheta_i \cos \varphi_i \mathbf{x}_0 + \cos \vartheta_i \sin \varphi_i \mathbf{y}_0 - \sin \vartheta_i \mathbf{z}_0 \quad (1.5.47)$$

$$\varphi_{0i} = -\sin \varphi_i \mathbf{x}_0 + \cos \varphi_i \mathbf{y}_0 \quad (1.5.48)$$

gli angoli ϑ_i e φ_i sono, ovviamente, gli angoli che il vettore di propagazione dell'onda incidente forma con gli assi cartesiani. Tale onda piana potrà essere sviluppata in armoniche sferiche come segue:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n [a_{mn} \mathbf{M}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r}) + b_{mn} \mathbf{N}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r})] \quad (1.5.49)$$

con [12]:

$$a_{mn} = (-1)^m i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \mathbf{e}_{pol} \cdot \mathbf{m}_{mn}^*(\vartheta_i, \varphi_i) \quad (1.5.50)$$

$$b_{mn} = (-1)^m i^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \mathbf{e}_{pol} \cdot \mathbf{n}_{mn}^*(\vartheta_i, \varphi_i) \quad (1.5.51)$$

Si può facilmente controllare che tali coefficienti si riducano ai coefficienti in (1.5.29) e (1.5.43), nel caso in cui l'onda si riduca ad un'onda piana polarizzata linearmente lungo x e propagantesi lungo z . È sufficiente porre, infatti, $m = \pm 1$, $\vartheta_i = 0$, $\varphi_i = 0$, $E_{\vartheta_i} = E_0$ e $E_{\varphi_i} = 0$ e risolvere i seguenti limiti:

$$\lim_{\vartheta_i \rightarrow 0} \mathbf{e}_{pol} \cdot \mathbf{m}_{1n}^*(\vartheta_i, 0) = E_0 \lim_{\vartheta_i \rightarrow 0} \frac{P_n^1(\cos \vartheta_i)}{\sin \vartheta_i} \quad (1.5.52)$$

$$\lim_{\vartheta_i \rightarrow 0} \mathbf{e}_{pol} \cdot \mathbf{n}_{1n}^*(\vartheta_i, 0) = E_0 \lim_{\vartheta_i \rightarrow 0} \frac{dP_n^1(\cos \vartheta_i)}{d\vartheta_i} \quad (1.5.53)$$

dove si è considerato il solo caso $m = 1$, dato che da questo è facile ricavare la soluzione anche per $m = -1$, sfruttando la relazione (1.5.19).

Si tratterà prima il limite (1.5.52). Sfruttando la (1.4.3), si può scrivere:

$$\lim_{\vartheta_i \rightarrow 0} \mathbf{e}_{pol} \cdot \mathbf{m}_{1n}^*(\vartheta_i, 0) = E_0 \lim_{\vartheta_i \rightarrow 0} \frac{dP_n(\cos \vartheta_i)}{d \cos \vartheta_i} = E_0 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{dP_n(x)}{dx} \quad (1.5.54)$$

dove si è fatta la sostituzione $\cos \vartheta_i = x$. A questo punto si deve richiamare una formula che lega le derivate del polinomio di Legendre al polinomio ultrasferico (o polinomio di Gegenbauer) [6, p. 779]:

$$\frac{d^p P_n(x)}{dx^p} = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2p-1) C_{n-p}^{(p+\frac{1}{2})}(x) \quad (1.5.55)$$

dove $C_n^{(\alpha)}(x)$ è appunto il polinomio ultrasferico. Richiamiamo inoltre la seguente proprietà del polinomio di Gegenbauer [6, p. 774]:

$$C_n^{(\alpha)}(1) = \binom{n+2\alpha-1}{n}$$

Si può allora vedere che:

$$\lim_{\vartheta_i \rightarrow 0} \mathbf{e}_{pol} \cdot \mathbf{m}_{1n}^*(\vartheta_i, 0) = E_0 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{dP_n(x)}{dx} = E_0 C_{n-1}^{(\frac{3}{2})}(1) = E_0 \frac{n(n+1)}{2} \quad (1.5.56)$$

Si consideri ora il limite (1.5.53). Sfruttando la (1.4.3), si può scrivere:

$$\begin{aligned} \lim_{\vartheta_i \rightarrow 0} \mathbf{e}_{pol} \cdot \mathbf{n}_{1n}^*(\vartheta_i, 0) &= E_0 \lim_{\vartheta_i \rightarrow 0} \frac{d}{d\vartheta_i} \left[\sin \vartheta_i \frac{dP_n(\cos \vartheta_i)}{d \cos \vartheta} \right] = \\ &= -E_0 \lim_{\vartheta_i \rightarrow 0} \frac{d^2 P_n(\cos \vartheta_i)}{d\vartheta_i^2} \end{aligned} \quad (1.5.57)$$

Si consideri ora l'espressione (1.5.35) e si riscriva il limite come segue:

$$\begin{aligned} E_0 \lim_{\vartheta_i \rightarrow 0} \left[\frac{\cos \vartheta_i}{\sin \vartheta_i} \frac{dP_n}{d\vartheta_i} + n(n+1)P_n \right] &= \\ = E_0 \lim_{\vartheta_i \rightarrow 0} \left[-\cos \vartheta_i \frac{dP_n}{d \cos \vartheta_i} + n(n+1)P_n \right] \end{aligned} \quad (1.5.58)$$

da cui, sfruttando la (1.5.56) ed il fatto che $P_n(1) = 1$ [6, p. 777], si può scrivere:

$$\lim_{\vartheta_i \rightarrow 0} \mathbf{e}_{pol} \cdot \mathbf{n}_{1n}^*(\vartheta_i, 0) = E_0 \frac{n(n+1)}{2} \quad (1.5.59)$$

Sfruttando queste informazioni si può vedere facilmente che i coefficienti (1.5.50)

e (1.5.51) vanno a coincidere con i coefficienti (1.5.29) e (1.5.43) nel caso di un'onda piana polarizzata linearmente lungo x e propagantesi lungo z . Analogamente, partendo dalle espressioni (1.5.50) e (1.5.51), è possibile ottenere i coefficienti dello sviluppo nel caso di una qualsiasi onda piana. Un altro esempio interessante può essere quello di un'onda piana polarizzata linearmente lungo y , con il vettore di propagazione sul piano (x, z) , formante un angolo ϑ_0 con l'asse z . Questo potrebbe rappresentare il caso di un'onda che incida su una sfera posta al di sotto di un'interfaccia piana coincidente con il piano (x, y) . Per ottenere i coefficienti dello sviluppo in questo caso si dovrà considerare $\vartheta_i = \vartheta_0$, $\varphi_i = 0$, $E_{\vartheta_i} = 0$ e $E_{\varphi_i} = E_0$, si ottiene così:

$$a_{mn} = -E_0(-1)^m i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \tau_{mn}(\vartheta_0) \quad (1.5.60)$$

$$b_{mn} = -E_0(-1)^m i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \pi_{mn}(\vartheta_0) \quad (1.5.61)$$

Si può controllare la correttezza di tali espressioni in [13], con la sola differenza che, per la scelta del sistema di riferimento, lì si ha $\vartheta_i = -\vartheta_0$ e $\varphi_i = \pi$, conseguentemente il fattore $(-1)^m$ presente nei coefficienti (1.5.60) e (1.5.61), scompare in quelli lì presentati.

Si è visto come, nota la forma di un'onda piana generica, sia possibile svilupparla in armoniche sferiche. Quando però si vuole andare a risolvere un problema di diffrazione da una sfera si ha la necessità di sviluppare in armoniche sferiche anche l'onda diffratta. Si potrà quindi scrivere:

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n [e_{mn} \mathbf{M}_{mn}^{(3)}(\mathbf{r}) + f_{mn} \mathbf{N}_{mn}^{(3)}(\mathbf{r})] \quad (1.5.62)$$

dove $\mathbf{M}_{mn}^{(3)}(\mathbf{r})$ e $\mathbf{N}_{mn}^{(3)}(\mathbf{r})$ sono i vettori definiti in (1.3.19) e (1.3.20), dove la funzione radiale sia la funzione di Hankel di prima specie, nota anche come funzione di Bessel di terza specie, da cui l'apice (3). In questo caso il calcolo dei coefficienti viene fatto mediante l'applicazione delle condizioni al contorno. Come si vede, al contrario del caso dei cilindri, per ogni ordine n sarà necessario calcolare due coefficienti, uno per

ogni vettore. Questo fatto è legato alla natura vettoriale del problema, se prendiamo l'esempio dell'imposizione delle condizioni al contorno su una sfera PEC, si dovrà annullare il campo tangenziale sulla sfera, quindi si dovranno proiettare i vettori sulle due direzioni angolari $\boldsymbol{\vartheta}_0$ e $\boldsymbol{\varphi}_0$, ed una volta usate le proprietà di ortogonalità si disporrà, per ogni indice, di due equazioni scalari che forniranno il valore dei coefficienti. In effetti, nel caso dei cilindri, si aveva un solo coefficiente grazie al fatto che il problema poteva essere espresso in forma puramente scalare, questo però era a sua volta conseguenza del fatto che si considerava un'onda incidente avente il campo elettrico o il campo magnetico polarizzato linearmente lungo l'asse del cilindro (o, il che è equivalente, il vettore di propagazione che giaceva sul piano perpendicolare a tale asse). Successivamente si vedrà che nel caso di incidenza obliqua, nel senso che il vettore dell'onda incidente non giace nel piano ortogonale all'asse del cilindro, si potrà anche in questo caso ricorrere al formalismo dei vettori $\mathbf{M}_{mn}(\mathbf{r})$ e $\mathbf{N}_{mn}(\mathbf{r})$, ed anche in questo caso per ottenere il campo tangenziale al cilindro si dovrà proiettare l'equazione sulle due direzioni $\boldsymbol{\varphi}_0$ e \mathbf{z}_0 [14].

Infine, è bene notare che in tutte le sommatorie fin qui usate si hanno due indici, m e n . Tali indici però non sono tra loro indipendenti, infatti per ogni indice n , l'indice m varia tra $-n$ ed n . È possibile ridurre questi due indici ad un unico indice i , in modo da scrivere il generico campo come segue:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left[a_i \mathbf{M}_i^{(1,3)}(\mathbf{r}) + b_i \mathbf{N}_i^{(1,3)}(\mathbf{r}) \right] \quad (1.5.63)$$

avendo posto [12]:

$$i = n(n + 1) + m \quad (1.5.64)$$

Per avere una precisa idea di come si espanda la serie (1.5.63) ci si riferisca alla tabella 1.1.

Tabella 1.1: Esempio di come enumerare gli indici m e n , al variare dell'indice i , come definito in (1.5.64)

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
n	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	...
m	-1	0	1	-2	-1	0	1	2	-3	-2	-1	0	1	2	3	...

1.6 Sviluppo in onde piane di un'onda sferica

Ci si propone, in quanto segue, di derivare lo sviluppo in onde piane di un'onda sferica. Il processo storico che ha portato a tale determinazione non viene spesso descritto in letteratura, quindi se ne daranno alcuni cenni.

Il punto, che può essere definito di partenza, da cui si vuole iniziare è un articolo di Whittaker del 1902, in cui si parla della generica soluzione dell'equazione di Laplace e dell'equazione delle onde [15, 16]. In tale articolo viene fornito lo sviluppo in onde piane della soluzione dell'equazione di Helmholtz scalare:

$$\begin{aligned}
 j_n(kr)P_n^m(\cos \vartheta)e^{im\varphi} &= j_n(kr)Y_{mn}(\vartheta, \varphi) = \\
 &= \frac{i^{-n}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{mn}(\alpha, \beta) \sin \alpha e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\alpha d\beta
 \end{aligned} \tag{1.6.1}$$

notiamo che, esattamente come nell'integrale (1.1.21), α e β rappresentano gli angoli che il vettore di propagazione della generica onda piana dello sviluppo forma con gli assi cartesiani, in particolare α rappresenta l'angolo che tale vettore forma con l'asse z e β è l'angolo che la proiezione del vettore sul piano (x, y) forma con l'asse x . Si potrà quindi scrivere:

$$\mathbf{k} = \sin \alpha \cos \beta \mathbf{x}_0 + \sin \alpha \sin \beta \mathbf{y}_0 + \cos \alpha \mathbf{z}_0 \tag{1.6.2}$$

Come notato da Stratton [1], una volta noto lo sviluppo in onde piane della soluzione scalare dell'equazione di Helmholtz si ha anche lo sviluppo della soluzione vettoriale tramite il formalismo dei vettori \mathbf{L} , \mathbf{M} e \mathbf{N} . Il problema è che questa espansione riguarda l'onda sferica stazionaria; non sappiamo invece come si possa esprimere

lo sviluppo per l'onda progressiva, nella quale, in luogo della funzione di Bessel sferica di prima specie, si ha la funzione di Hankel sferica del primo tipo. In questo senso il primo contributo a cui siamo giunti risale a Weyl e risale al 1919. Weyl fornisce lo sviluppo in onde piane della funzione di Hankel sferica di ordine 0, la quale coincide con la soluzione dell'equazione di Helmholtz scalare di ordine 00. La rappresentazione di Weyl è la seguente [5, 17]:

$$h_0^{(1)}(kr) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2-i\infty} \sin \alpha e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\alpha d\beta \quad (1.6.3)$$

Si riconosce subito una somiglianza tra la (1.6.1) e la (1.6.3), infatti si può facilmente verificare che l'espressione (1.6.1) coincide con la (1.6.3) se si pongono $m = 0$ e $n = 0$, l'unica differenza che rimane è il percorso di integrazione che nel caso dell'onda stazionaria è sull'asse reale, mentre nel caso dell'onda progressiva diventa un percorso sul piano complesso. Questo fatto non dovrebbe stupire, infatti in [7] spesso si trovano espressioni legate alle funzioni di Bessel e di Hankel assolutamente coincidenti tranne che per il percorso di integrazione. Si deve però attendere il 1937, in un articolo di Erdélyi, per avere lo sviluppo in onde piane di un'onda sferica progressiva di ordine generico, in tale articolo, seguendo un approccio del tutto analogo a quello seguito da Whittaker, viene fornita la seguente espressione [18]:

$$h_n^{(1)}(kr)Y_{mn}(\vartheta, \varphi) = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2-i\infty} Y_{mn}(\alpha, \beta) \sin \alpha e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\alpha d\beta \quad (1.6.4)$$

la quale è poi sostanzialmente identica alla (1.6.1) eccezion fatta per il percorso di integrazione. Una buona raccolta di alcune delle informazioni fin qui fornite si trovano in un articolo di Devaney e Wolf [19] dove l'espressione (1.6.4) viene generalizzata al caso vettoriale sfruttando il procedimento elegantemente spiegato da Stratton nel caso di onde generiche. Prima di proseguire è bene notare che in [20], l'espressione (1.6.4) viene presentata senza ulteriori riferimenti, sostenendo che sia banalmente ricavabile a partire dall'espressione di Weyl (1.6.3) sfruttando le proprietà ricorsive della funzione $h_n^{(1)}(kr)Y_{mn}(\vartheta, \varphi)$. Per quanto non si hanno dubbi sul fatto che tale approccio sia possibile, non si è altrettanto d'accordo sul fatto che

esso sia banale!

La derivazione della (1.6.4), per quanto non eccessivamente complessa, esula dai nostri scopi, quindi si procederà prendendo tale espressione come punto di partenza della trattazione. Si procederà quindi alla derivazione dello sviluppo in onde piane delle funzioni vettoriali \mathbf{M} e \mathbf{N} a partire dall'espressione (1.6.4). Si consideri l'espressione (1.3.19) e se ne esplicitino le espressioni di π_{mn} e τ_{mn} :

$$\mathbf{M}_{mn}^{(3)} = h_n^{(1)}(kr) \left[\frac{im}{\sin \vartheta} P_m^n(\cos \vartheta) e^{im\varphi} \boldsymbol{\vartheta}_0 - \frac{dP_n^m}{d\vartheta} e^{im\varphi} \boldsymbol{\varphi}_0 \right] \quad (1.6.5)$$

si ricordino ora le seguenti relazioni ricorsive delle funzioni di Legendre [1]:

$$\frac{m \cos \vartheta}{\sin \vartheta} P_m^n = \frac{1}{2} [P_n^{m+1} + (n - m + 1)(n + m)P_n^{m-1}] \quad (1.6.6)$$

$$\frac{dP_n^m(\cos \vartheta)}{d\vartheta} = \frac{1}{2} [(n - m + 1)(n + m)P_n^{m-1} - P_n^{m+1}] \quad (1.6.7)$$

Si consideri poi la sola dipendenza angolare di (1.6.5) e si esplicitino le rappresentazioni in riferimento cartesiano dei versori:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{mn} = & \frac{im}{\sin \vartheta} P_m^n e^{im\varphi} (\cos \vartheta \cos \varphi \mathbf{x}_0 + \cos \vartheta \sin \varphi \mathbf{y}_0 - \sin \vartheta \mathbf{z}_0) + \\ & - \frac{dP_n^m}{d\vartheta} e^{im\varphi} (-\sin \varphi \mathbf{x}_0 + \cos \varphi \mathbf{y}_0) \end{aligned} \quad (1.6.8)$$

Si applichi poi la relazione (1.6.7) al secondo fattore a secondo membro, ottenendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{mn} = & -im P_m^n e^{im\varphi} \mathbf{z}_0 + \frac{im}{\sin \vartheta} P_m^n e^{im\varphi} (\cos \vartheta \cos \varphi \mathbf{x}_0 + \cos \vartheta \sin \varphi \mathbf{y}_0) + \\ & - \frac{1}{2} [(n - m + 1)(n + m)P_n^{m-1} - P_n^{m+1}] e^{im\varphi} (-\sin \varphi \mathbf{x}_0 + \cos \varphi \mathbf{y}_0) \end{aligned} \quad (1.6.9)$$

si porti ora in evidenza il $\cos \vartheta$ nella prima parentesi tonda e si faccia uso della

relazione (1.6.6):

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}_{mn} = & -imP_m^n e^{im\varphi} \mathbf{z}_0 + \\
& + i\frac{1}{2} [P_n^{m+1} + (n-m+1)(n+m)P_n^{m-1}] e^{im\varphi} (\cos \varphi \mathbf{x}_0 + \sin \varphi \mathbf{y}_0) + \\
& - \frac{1}{2} [(n-m+1)(n+m)P_n^{m-1} - P_n^{m+1}] e^{im\varphi} (-\sin \varphi \mathbf{x}_0 + \cos \varphi \mathbf{y}_0)
\end{aligned} \tag{1.6.10}$$

si mettano ora in evidenza i termini $P_n^{m+1}e^{im\varphi}$ e $P_n^{m-1}e^{im\varphi}$, ottenendo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}_{mn} = & -imP_m^n e^{im\varphi} \mathbf{z}_0 + \\
& \frac{1}{2} P_n^{m+1} e^{im\varphi} [i(\cos \varphi \mathbf{x}_0 + \sin \varphi \mathbf{y}_0) - \sin \varphi \mathbf{x}_0 + \cos \varphi \mathbf{y}_0] + \\
& \frac{(n-m+1)(n+m)}{2} P_n^{m-1} e^{im\varphi} [i(\cos \varphi \mathbf{x}_0 + \sin \varphi \mathbf{y}_0) + \sin \varphi \mathbf{x}_0 - \cos \varphi \mathbf{y}_0]
\end{aligned} \tag{1.6.11}$$

si moltiplichino ora il secondo ed il terzo fattore a secondo membro per $e^{i\varphi}e^{-i\varphi}$ e si proceda con un po' d'algebra, in questo modo si può ottenere:

$$\mathbf{m}_{mn} = -imY_{mn}\mathbf{z}_0 + \frac{1}{2}Y_{(m+1)n} + \frac{(n-m+1)(n+m)}{2}Y_{(m-1)n} \tag{1.6.12}$$

ovvero, riprendendo in considerazione la parte radiale, si può scrivere:

$$\mathbf{M}_{mn}^{(3)} = h_n^{(1)} \left[-imY_{mn}\mathbf{z}_0 + \frac{1}{2}Y_{(m+1)n}(i\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}_0) + \frac{1}{2}(n-m+1)(n+m)Y_{(m-1)n}(i\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0) \right] \tag{1.6.13}$$

sfruttando l'espressione (1.6.4) è ora possibile sviluppare in onde piane la funzione

vettoriale $\mathbf{M}_{mn}^{(3)}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{mn}^{(3)} = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} \sin \alpha \left[-imY_{mn}(\alpha, \beta)\mathbf{z}_0 + \frac{1}{2}Y_{(m+1)n}(\alpha, \beta)(i\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}_0) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}(n-m+1)(n+m)Y_{(m-1)n}(\alpha, \beta)(i\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0) \right] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (1.6.14)$$

dove si sono messi in evidenza i simboli di integrazione e gli altri elementi comuni ai tre fattori. Confrontando l'argomento dell'integrale con l'espressione (1.6.12) si può facilmente vedere che si può scrivere:

$$\boxed{\mathbf{M}_{mn}^{(3)} = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} \mathbf{m}_{mn}(\alpha, \beta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \sin \alpha d\alpha d\beta} \quad (1.6.15)$$

si può facilmente controllare come tale espressione coincida con l'espressione presentata in [9]. É bene notare che la funzione \mathbf{m}_{mn} all'interno dell'integrale è una funzione vettoriale nel sistema di riferimento della generica onda piana, quindi le sue componenti vettoriali saranno dirette secondo le coordinate del sistema di riferimento locale i cui versori angolari saranno α_0 e β_0 indicanti rispettivamente le direzioni di variazione degli angoli α e β . Il versore radiale del sistema di riferimento locale coinciderà, ovviamente, con la direzione di propagazione della generica onda piana e sarà quindi parallelo al relativo vettore di propagazione.

Per ottenere lo sviluppo in onde piane della funzione vettoriale \mathbf{N}_{mn} è ora sufficiente ricordare la relazione che la lega alla funzione \mathbf{M}_{mn} , si ha infatti:

$$\mathbf{N}_{mn}^{(3)} = \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{M}_{mn}^{(3)} = \frac{i^{-n}}{2\pi k} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} \nabla \times [\mathbf{m}_{mn}(\alpha, \beta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}] \sin \alpha d\alpha d\beta \quad (1.6.16)$$

da cui si può scrivere:

$$\mathbf{N}_{mn}^{(3)} = \frac{i^{-n}}{2\pi k} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} i\mathbf{k} \times \mathbf{m}_{mn}(\alpha, \beta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \sin \alpha d\alpha d\beta \quad (1.6.17)$$

la quale rappresenta ancora uno sviluppo in onde piane. Tale espressione può essere posta in forma più elegante ricordando che il vettore \mathbf{k} nel sistema di riferimento

della generica onda piana coincide con la coordinata radiale del sistema di riferimento locale $(\mathbf{k}_0, \alpha_0, \beta_0)$, quindi il prodotto vettoriale all'interno dell'integrale può essere facilmente svolto:

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \times \mathbf{m}_{mn} &= k\mathbf{k}_0 \times (i\pi_{mn}\alpha_0 - \tau_{mn}\beta_0) = \\ &= k(i\pi_{mn}\beta_0 + \tau_{mn}\alpha_0) = k\mathbf{n}_{mn}(\alpha, \beta) \end{aligned} \quad (1.6.18)$$

si potrà quindi scrivere:

$$\mathbf{N}_{mn}^{(3)} = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} i\mathbf{n}_{mn}(\alpha, \beta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \sin \alpha d\alpha d\beta \quad (1.6.19)$$

anche in questo caso l'espressione è identica a quella presentata in [9].

Capitolo 2

Scattering EM da sfera

2.1 Diffrazione da una sfera PEC nello spazio libero

In questo paragrafo si vuole studiare il caso più semplice di diffrazione elettromagnetica di un'onda piana da una sfera, in particolare si considererà, inizialmente, una sfera costituita da materiale conduttore elettrico perfetto (PEC), immerso in un mezzo omogeneo come ad esempio l'aria. Si consideri lo spazio come mezzo lineare, omogeneo, stazionario, isotropo, generalmente dispersivo e dissipativo. Si definiscano le proprietà del mezzo tramite le costanti elettromagnetiche ε e $\mu = 1$ e σ . Si consideri un'onda piana ed uniforme polarizzata ellitticamente che si propaghi in una direzione tale da essere concorde con tutti e tre i versori del sistema di coordinate cartesiano ortogonale, ovvero tale che le componenti cartesiane del vettore di propagazione siano tutte positive. Si consideri la presenza di questa sfera PEC centrata nell'origine di un sistema di riferimento cartesiano e di raggio a (Fig. 2.1). Supponiamo quindi che tale onda possa essere scritta come visto precedentemente in:

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_{pol} e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} = (E_{\vartheta_i} \boldsymbol{\vartheta}_{0i} + E_{\varphi_i} \boldsymbol{\varphi}_{0i}) e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} \quad (2.1.1)$$

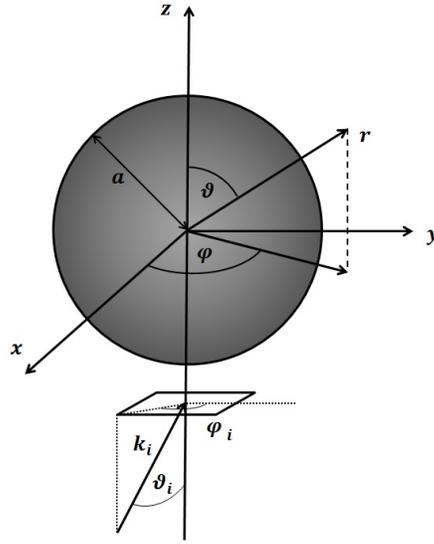


Figura 2.1: Rappresentazione di un'onda piana che incide su una sfera PEC

con:

$$\mathbf{k}_i = k_1 (\sin \vartheta_i \cos \varphi_i \mathbf{x}_0 + \sin \vartheta_i \sin \varphi_i \mathbf{y}_0 + \cos \vartheta_i \mathbf{z}_0) \quad (2.1.2)$$

$$\vartheta_{0i} = \cos \vartheta_i \cos \varphi_i \mathbf{x}_0 + \cos \vartheta_i \sin \varphi_i \mathbf{y}_0 - \sin \vartheta_i \mathbf{z}_0 \quad (2.1.3)$$

$$\varphi_{0i} = -\sin \varphi_i \mathbf{x}_0 + \cos \varphi_i \mathbf{y}_0 \quad (2.1.4)$$

A questo punto si dovrà trattare il problema della diffrazione di quest'onda da parte della sfera. Per fare questo, si sviluppi l'onda incidente in armoniche sferiche. Si avrà [1]:

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n [a_{mn} \mathbf{M}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r}) + b_{mn} \mathbf{N}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r})] \quad (2.1.5)$$

Avendo indicato con $\mathbf{M}_{mn}^{(1)}$ e $\mathbf{N}_{mn}^{(1)}$ le armoniche sferiche vettoriali di prima specie:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{mn}^{(1)} &= e^{im\varphi} j_n(kr) \left[i \frac{m}{\sin \vartheta} P_n^m(\cos \vartheta) \boldsymbol{\vartheta}_0 - \frac{\partial P_n^m(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta} \boldsymbol{\varphi}_0 \right] \\ \mathbf{N}_{mn}^{(1)} &= \frac{j_n(kr)}{kr} n(n+1) P_n^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi} \mathbf{r}_0 \\ &+ e^{im\varphi} \frac{1}{kr} \frac{\partial [r j_n(kr)]}{\partial r} \left(\frac{\partial P_n^m}{\partial \vartheta} \boldsymbol{\vartheta}_0 + i \frac{m}{\sin \vartheta} P_n^m \boldsymbol{\varphi}_0 \right)\end{aligned}$$

che ponendo:

$$\begin{aligned}\pi_n^m(\cos \vartheta) &= m \frac{P_n^m(\cos \vartheta)}{\sin \vartheta} \\ \tau_n^m(\cos \vartheta) &= \frac{\partial P_n^m}{\partial \vartheta}\end{aligned}$$

possono essere espresse come:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{mn}^{(1)} &= e^{im\varphi} j_n(kr) [i\pi_n^m(\cos \vartheta) \boldsymbol{\vartheta}_0 - \tau_n^m(\cos \vartheta) \boldsymbol{\varphi}_0] \\ \mathbf{N}_{mn}^{(1)} &= \frac{j_n(kr)}{kr} n(n+1) P_n^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi} \mathbf{r}_0 \\ &+ e^{im\varphi} \frac{1}{kr} \frac{\partial [r j_n(kr)]}{\partial r} [\tau_n^m(\cos \vartheta) \boldsymbol{\vartheta}_0 + i\pi_n^m(\cos \vartheta) \boldsymbol{\varphi}_0]\end{aligned}$$

oppure introducendo due funzioni vettoriali sferiche caratterizzate dalla sola dipendenza dagli angoli e l'indipendenza da \mathbf{r} , le precedentemente descritte funzioni tesserali:

$$\mathbf{m}_{mn} = e^{im\varphi} [i\pi_n^m(\cos \vartheta) \boldsymbol{\vartheta}_0 - \tau_n^m(\cos \vartheta) \boldsymbol{\varphi}_0] \quad (2.1.6)$$

$$\mathbf{n}_{mn} = e^{im\varphi} [\tau_n^m(\cos \vartheta) \boldsymbol{\vartheta}_0 + i\pi_n^m(\cos \vartheta) \boldsymbol{\varphi}_0] \quad (2.1.7)$$

$$\mathbf{p}_{mn} = e^{im\varphi} n(n+1) P_n^m(\cos \vartheta) \mathbf{r}_0 \quad (2.1.8)$$

come

$$\mathbf{M}_{mn}^{(1)} = j_n(kr) \mathbf{m}_{mn} \quad (2.1.9)$$

$$\mathbf{N}_{mn}^{(1)} = \frac{j_n(kr)}{kr} \mathbf{p}_{mn} + \frac{1}{kr} \frac{\partial [r j_n(kr)]}{\partial r} \mathbf{n}_{mn} \quad (2.1.10)$$

L'ortogonalità delle armoniche sferiche vettoriali implica che i coefficienti dello sviluppo possono assumere la seguente forma [12]:

$$\begin{aligned} a_{mn} &= (-1)^m i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \mathbf{e}_{pol} \cdot \mathbf{m}_{mn}^*(\vartheta_t, \varphi_t) \\ b_{mn} &= (-1)^m i^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \mathbf{e}_{pol} \cdot \mathbf{n}_{mn}^*(\vartheta_t, \varphi_t) \end{aligned}$$

Alla luce di quanto visto il campo incidente polarizzato ellitticamente che andrà ad incidere sulla sfera potrà essere scritto come:

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n [a_{mn} \mathbf{M}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r}) + b_{mn} \mathbf{N}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r})] \quad (2.1.11)$$

con

$$a_{mn} = (-1)^m i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} e^{-im\varphi_i} [-iE_{\vartheta_i} \pi_n^m(\cos \vartheta_i) - E_{\varphi_i} \tau_n^m(\cos \vartheta_i)] \quad (2.1.12)$$

$$b_{mn} = (-1)^m i^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} e^{-im\varphi_i} [E_{\vartheta_i} \tau_n^m(\cos \vartheta_i) - iE_{\varphi_i} \pi_n^m(\cos \vartheta_i)] \quad (2.1.13)$$

I coefficienti (4.1.8) e (4.1.9) assumono una forma piuttosto complessa, ma tutte le quantità in essi contenute sono considerate conosciute a priori nel nostro problema. In secondo luogo si deve ricordare che questa è l'espressione dei coefficienti nel caso di un'onda incidente della massima complessità, ferme restando le ipotesi fatte sui mezzi in cui queste si propagano. Quindi l'espressione di tali coefficienti subirà notevoli semplificazioni quando si considereranno onde incidenti più semplici.

Si deve ora andare ad esprimere il campo scatterato dalla sfera, ricordando che, l'espressione del campo tramite sviluppi di infinite armoniche sferiche vettoriali, è una generica soluzione dell'equazione di Helmholtz, allora possiamo ipotizzare che anche il campo scatterato possa essere descritto come sovrapposizione dei vettori \mathbf{M}_{mn} e \mathbf{N}_{mn} considerando una dipendenza radiale rappresentata dalle funzioni di Bessel di terza specie, ovvero le funzioni di Hankel di primo tipo, in quanto si vuole

mettere in evidenza la natura esplosiva dell'onda da descrivere:

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n [e_{mn} \mathbf{M}_{mn}^{(3)}(\mathbf{r}) + f_{mn} \mathbf{N}_{mn}^{(3)}(\mathbf{r})] \quad (2.1.14)$$

i coefficienti e_{mn} e f_{mn} diventano così le incognite del nostro problema e verranno determinate tramite l'applicazione delle condizioni al contorno.

La condizione da imporre è quella della continuità della componente tangenziale del campo sulla superficie sferica dello scatteratore, pertanto:

$$(\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s) \times \mathbf{r}_0 = 0 \quad \text{per } r = a \quad (2.1.15)$$

Ricordiamo che i campi elettrici, date le (2.1.6), (2.1.9), possono essere espressi come:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n \left[a_{mn} \mathbf{m}_{mn}(\vartheta, \varphi) j_n(kr) + b_{mn} \mathbf{n}_{mn}(\vartheta, \varphi) \dot{j}_n(kr) + \right. \\ \left. + b_{mn} \mathbf{p}_{mn}(\vartheta, \varphi) \frac{j_n(kr)}{kr} \right] \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n \left[e_{mn} \mathbf{m}_{mn}(\vartheta, \varphi) h_n^{(1)}(kr) + f_{mn} \mathbf{n}_{mn}(\vartheta, \varphi) \dot{h}_n^{(1)}(kr) + \right. \\ \left. + f_{mn} \mathbf{p}_{mn}(\vartheta, \varphi) \frac{h_n^{(1)}(kr)}{kr} \right] \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

avendo posto con:

$$\dot{z}_n(kr) = \frac{1}{kr} \frac{d[rz_n(kr)]}{dr} \quad (2.1.18)$$

Ora ricordando le seguenti proprietà:

$$\mathbf{m}_{mn}(\vartheta, \varphi) \times \mathbf{r}_0 = -\mathbf{n}_{mn}(\vartheta, \varphi)$$

$$\mathbf{n}_{mn}(\vartheta, \varphi) \times \mathbf{r}_0 = \mathbf{m}_{mn}(\vartheta, \varphi)$$

si ottiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_i(k\mathbf{r}) \times \mathbf{r}_0 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n \left[-a_{mn} \mathbf{n}_{mn}(\vartheta, \varphi) j_n(kr) + b_{mn} \mathbf{m}_{mn}(\vartheta, \varphi) \dot{j}_n(kr) \right] \\ \mathbf{E}_s(k\mathbf{r}) \times \mathbf{r}_0 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n \left[-e_{mn} \mathbf{n}_{mn}(\vartheta, \varphi) h_n^{(1)}(kr) + f_{mn} \mathbf{m}_{mn}(\vartheta, \varphi) \dot{h}_n^{(1)}(kr) \right]\end{aligned}\quad (2.1.19)$$

Sostituendo queste equazioni all'interno delle condizioni al contorno ottengo:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ - [a_{mn} j_n(ka) + e_{mn} h_n^{(1)}(ka)] \mathbf{n}_{mn}(\vartheta, \varphi) + \right. \\ \left. + [b_{mn} \dot{j}_n(ka) + f_{mn} \dot{h}_n^{(1)}(ka)] \mathbf{m}_{mn}(\vartheta, \varphi) \right\} = 0\end{aligned}\quad (2.1.20)$$

Osservando con attenzione quest'ultima equazione si nota che è possibile applicare le condizioni di ortogonalità a tutti i termini dell'equazione stessa

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{m}_{mn}(\vartheta, \varphi) \cdot \mathbf{n}_{m'n'}^*(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi &= 0 \\ \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{n}_{mn}(\vartheta, \varphi) \cdot \mathbf{m}_{m'n'}^*(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi &= 0 \\ \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{m}_{mn}(\vartheta, \varphi) \cdot \mathbf{m}_{m'n'}^*(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi &= 4\pi \frac{n(n+1)}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{mm'} \delta_{nn'} \\ \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{n}_{mn}(\vartheta, \varphi) \cdot \mathbf{n}_{m'n'}^*(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi &= 4\pi \frac{n(n+1)}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{mm'} \delta_{nn'}\end{aligned}$$

Alla luce di tali proprietà possiamo moltiplicare scalarmente l'equazione prima per $\mathbf{m}_{m'n'}^* \sin \vartheta$ ed integrare in ϑ e φ tra $0, \pi$ e $0, 2\pi$ e successivamente si potrà moltiplicare per $\mathbf{n}_{m'n'}^* \sin \vartheta$ ed integrare ancora una volta in ϑ e φ , alla fine si ottiene il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} a_{mn} j_n(ka) + e_{mn} h_n^{(1)}(ka) = 0 \\ b_{mn} \dot{j}_n(ka) + f_{mn} \dot{h}_n^{(1)}(ka) = 0 \end{cases}\quad (2.1.21)$$

risolvendo banalmente il sistema si ottengono i valori delle incognite, che mi vanno a descrivere univocamente il campo scatterato:

$$\begin{cases} e_{mn} = -a_{mn} \frac{j_n(ka)}{h_n^{(1)}(ka)} \\ f_{mn} = -b_{mn} \frac{j_n(ka)}{h_n^{(1)}(ka)} \end{cases} \quad (2.1.22)$$

Questi coefficienti sono noti come coefficienti di scattering di Mie.

2.1.1 Validazione del modello sfera PEC

Per la validazione del modello si confronteranno i risultati ottenuti con un software commerciale che implementa il Metodo degli Elementi Finiti (FEM), COMSOL Multiphysics, con i risultati ottenuti dal modello implementato su Matlab. In particolare verranno confrontati la parte reale ed immaginaria di ogni componente del campo elettrico preso su un determinato segmento. Naturalmente essendo il probe di forma lineare risulterà più semplice confrontare le tre componenti cartesiane del campo. Per far ciò si può utilizzare la seguente matrice di cambiamento di coordinate da sferiche a cartesiane, rispetto alla figura (2.1):

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & \cos \vartheta \cos \varphi & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta \sin \varphi & \cos \vartheta \sin \varphi & \cos \vartheta \\ \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r \\ E_\vartheta \\ E_\varphi \end{pmatrix} \quad (2.1.23)$$

Nel nostro caso particolare, in riferimento alla figura 2.1, si considera una sfera PEC di raggio $a = 0.25$ m, immersa nell'aria. Il campo di eccitazione è un'onda piana uniforme polarizzata circolarmente di ampiezza unitaria con $E_{\vartheta_i} = 1$ V/m e $E_{\varphi_i} = 1$ V/m ed incidente in modo obliquo con $\vartheta_i = \varphi_i = \pi/6$ ad una frequenza pari a 300 MHz. Il probe sul cui è stato misurato il campo scatterato è un segmento di lunghezza pari a due volte il raggio della sfera, parallelo all'asse positivo delle x e posto ad una quota pari a $z = -2a$.

Si nota dai risultati rappresentati in figura 2.2 ottenuti con le due diverse metodologie risultano completamente concordanti, sia per quanto riguarda la parte reale sia per la parte immaginaria.

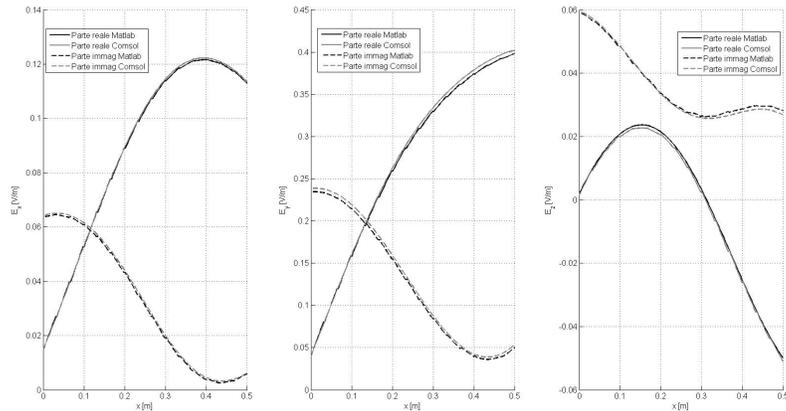


Figura 2.2: Parte reale e parte immaginaria delle componenti cartesiane del campo elettrico scatterato da una sfera PEC. In particolare le linee continue si riferiscono alla parte reale e le linee tratteggiate alla parte immaginaria, inoltre le linee nere si riferiscono ai risultati ottenuti con Matlab e le linee grigie quelli ottenuti con Comsol.

2.2 Diffrazione da sfera dielettrica nello spazio libero

Passiamo ora alla determinazione dei cosiddetti coefficienti di Mie relativi al caso di una sfera dielettrica. La geometria da prendere in considerazione risulta essere del tutto analoga al caso precedente (Fig. 2.1), l'unica modifica risulta essere il valore della costante dielettrica della sfera che in questo caso assume un valore finito, che porremo pari a ε_{sp} , il campo esterno che eccita il sistema verrà preso come nel caso precedente ovvero in polarizzazione ellittica e in incidenza obliqua, in modo da poter considerare la più completa configurazione di onda piana. Diversamente dal caso precedente essendo la sfera caratterizzata da un valore finito della permittività dielettrica, dovremo considerare il campo che si propaga internamente allo scatteratore, come detto in precedenza si può utilizzare l'espressione tramite lo sviluppo in armoniche sferiche, ottenuto come soluzione dell'equazione di Helmholtz omogenea

in coordinate sferiche, cioè:

$$\mathbf{E}_{sp}(k_{sp}\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n [r_{mn}\mathbf{M}_{mn}^{(1)}(k_{sp}\mathbf{r}) + s_{mn}\mathbf{N}_{mn}^{(1)}(k_{sp}\mathbf{r})] \quad (2.2.1)$$

che ha un'espressione del tutto analoga al campo incidente, infatti il verso di propagazione è rivolto verso origine degli assi ovvero verso il centro della sfera, ma si differenzia per la dipendenza delle varie funzioni vettoriali alle caratteristiche elettromagnetiche del materiale di cui è costituita la sfera stessa, ovvero da k_{sp} . Avendo un nuovo campo da prendere in considerazione, bisognerà applicare nuovamente le condizioni di continuità delle componenti tangenziali dei campi lungo la superficie della sfera dielettrica, pertanto:

$$(\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s - \mathbf{E}_{sp}) \times \mathbf{r}_0 = 0 \quad \text{per } r = a \quad (2.2.2)$$

$$(\mathbf{H}_i + \mathbf{H}_s - \mathbf{E}_{sp}) \times \mathbf{r}_0 = 0 \quad \text{per } r = a \quad (2.2.3)$$

essendo valida la seguente asserzione:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_z \propto \mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{E}_z$$

le condizioni al contorno possono essere riscritte come:

$$(\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s - \mathbf{E}_{sp}) \times \mathbf{r}_0 = 0 \quad \text{per } r = a \quad (2.2.4)$$

$$[\nabla \times (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s - \mathbf{E}_{sp})] \times \mathbf{r}_0 = 0 \quad \text{per } r = a \quad (2.2.5)$$

analogamente a quanto fatto al caso precedente si passa alla determinazione del prodotto vettoriale tra il campo interno alla sfera e il versore radiale:

$$\mathbf{E}_{sp}(k_{sp}\mathbf{r}) \times \mathbf{r}_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n [-r_{mn}\mathbf{n}_{mn}(\vartheta, \varphi)j_n(k_{sp}r) + b_{mn}\mathbf{m}_{mn}(\vartheta, \varphi)\dot{j}_n(k_{sp}r)] \quad (2.2.6)$$

Ora dobbiamo determinare il rotore della componente radiale dei campi elettrici, per far ciò, dobbiamo considerare le seguenti proprietà delle armoniche sferiche

vettoriali:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{M}_{mn}(kr, \vartheta, \varphi) &= k\mathbf{N}_{mn}(kr, \vartheta, \varphi) \\ \nabla \times \mathbf{N}_{mn}(kr, \vartheta, \varphi) &= k\mathbf{M}_{mn}(kr, \vartheta, \varphi)\end{aligned}$$

queste proprietà possono essere dimostrate considerando la definizione di armonica sferica stessa:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{mn} &= \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{N}_{mn} \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{N}_{mn} &= -\nabla^2 \mathbf{N}_{mn} + \nabla \nabla \cdot \mathbf{N}_{mn} = \\ &= -\nabla^2 \mathbf{N}_{mn} = k^2 \mathbf{N}_{mn} = k \nabla \times \mathbf{M}_{mn}\end{aligned}\quad (2.2.7)$$

Prendo inizialmente in considerazione il solo campo incidente, sapendo che tutto ciò che segue è valido per gli altri campi. Riscrivo il campo e faccio le dovute sostituzioni:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n [a_{mn} \mathbf{M}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r}) + b_{mn} \mathbf{N}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r})] \\ \nabla \times \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n [a_{mn} \nabla \times \mathbf{M}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r}) + b_{mn} \nabla \times \mathbf{N}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r})] = \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n k [a_{mn} \mathbf{N}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r}) + b_{mn} \mathbf{M}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r})]\end{aligned}$$

quindi

$$\nabla \times \mathbf{E}_i(kr) \times \mathbf{r}_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n k \left[a_{mn} \mathbf{m}_{mn} \dot{j}_n(kr) - b_{mn} \mathbf{n}_{mn} j_n(kr) \right] \quad (2.2.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_s(kr) \times \mathbf{r}_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n k \left[e_{mn} \mathbf{m}_{mn} \dot{h}_n^{(1)}(kr) - f_{mn} \mathbf{n}_{mn} h_n^{(1)}(kr) \right] \quad (2.2.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_{sp}(k_{sp}r) \times \mathbf{r}_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n k_{sp} \left[r_{mn} \mathbf{m}_{mn} \dot{j}_n(k_{sp}r) + s_{mn} \mathbf{n}_{mn} j_n(k_{sp}r) \right] \quad (2.2.10)$$

Sostituendo all'interno delle condizioni al contorno si ottiene:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ - [a_{mn} j_n(ka) + e_{mn} h_n^{(1)}(ka) - r_{mn} j_n(k_{sp}a)] \mathbf{n}_{mn}(\vartheta, \varphi) + \right. \\ \left. + [b_{mn} \dot{j}_n(ka) + f_{mn} \dot{h}_n^{(1)}(ka) - s_{mn} \dot{j}_n(k_{sp}a)] \mathbf{m}_{mn}(\vartheta, \varphi) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ [ka_{mn} \dot{j}_n(ka) + ke_{mn} \dot{h}_n^{(1)}(ka) - k_{sp} r_{mn} \dot{j}_n(k_{sp}a)] \mathbf{m}_{mn}(\vartheta, \varphi) + \right. \\ \left. + [kb_{mn} j_n(ka) + kf_{mn} h_n^{(1)}(ka) - k_{sp} s_{mn} j_n(k_{sp}a)] \mathbf{n}_{mn}(\vartheta, \varphi) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Come fatto nel caso precedente moltiplico scalarmente le equazioni prima per $\mathbf{m}_{m'n'}^*$, sin ϑ ed integro in ϑ e φ tra $0, \pi$ e $0, 2\pi$ e successivamente per $\mathbf{n}_{m'n'}^*$, sin ϑ ed integro sempre in ϑ e φ . Quindi sfruttando le proprietà di ortogonalità delle armoniche sferiche, si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} a_{mn} j_n(ka) + e_{mn} h_n^{(1)}(ka) - r_{mn} j_n(k_{sp}a) = 0 \\ b_{mn} \dot{j}_n(ka) + f_{mn} \dot{h}_n^{(1)}(ka) - s_{mn} \dot{j}_n(k_{sp}a) = 0 \\ ka_{mn} \dot{j}_n(ka) + ke_{mn} \dot{h}_n^{(1)}(ka) - k_{sp} r_{mn} \dot{j}_n(k_{sp}a) = 0 \\ kb_{mn} j_n(ka) + kf_{mn} h_n^{(1)}(ka) - k_{sp} s_{mn} j_n(k_{sp}a) = 0 \end{cases} \quad (2.2.13)$$

introducendo il concetto di contrasto dielettrico $x = \frac{k_{sp}}{k_a}$, grandezza utilizzata soprattutto nei modelli di omogeneizzazione, come vedremo nei capitoli successivi, il

sistema può essere riscritto come:

$$\begin{cases} a_{mn}j_n(ka) + e_{mn}h_n^{(1)}(ka) - r_{mn}j_n(k_{sp}a) = 0 \\ a_{mn}\dot{j}_n(ka) + e_{mn}\dot{h}_n^{(1)}(ka) - xr_{mn}\dot{j}_n(k_{sp}a) = 0 \\ b_{mn}\dot{j}_n(ka) + f_{mn}\dot{h}_n^{(1)}(ka) - s_{mn}\dot{j}_n(k_{sp}a) = 0 \\ b_{mn}j_n(ka) + f_{mn}h_n^{(1)}(ka) - xs_{mn}j_n(k_{sp}a) = 0 \end{cases} \quad (2.2.14)$$

essendo in un primo momento interessati alla determinazione dei coefficienti del campo scatterato, ovvero interessati alle determinazioni di e_{mn} ed f_{mn} , per facilitare la risoluzione del sistema possiamo isolare a secondo membro, di tutte e quattro le equazioni, i coefficienti dei campi interni, ovvero di r_{mn} ed s_{mn} , quindi svolgendo il rapporto delle equazioni due a due si ottiene:

$$\frac{a_{mn}j_n(ka) + e_{mn}h_n^{(1)}(ka)}{a_{mn}\dot{j}_n(ka) + e_{mn}\dot{h}_n^{(1)}(ka)} = \frac{j_n(k_{sp}a)}{x\dot{j}_n(k_{sp}a)} \quad (2.2.15)$$

$$\frac{b_{mn}\dot{j}_n(ka) + f_{mn}\dot{h}_n^{(1)}(ka)}{b_{mn}j_n(ka) + f_{mn}h_n^{(1)}(ka)} = \frac{\dot{j}_n(k_{sp}a)}{xj_n(k_{sp}a)} \quad (2.2.16)$$

ovvero abbiamo ridotto il sistema a sole due equazioni in due incognite.

Risolviendo il sistema si ottiene:

$$e_{mn} = -a_{mn} \frac{\dot{j}_n(ka)j_n(k_{sp}a) - xj_n(ka)\dot{j}_n(k_{sp}a)}{\dot{h}_n^{(1)}(ka)j_n(k_{sp}a) - xh_n^{(1)}(ka)\dot{j}_n(k_{sp}a)} \quad (2.2.17)$$

$$f_{mn} = -b_{mn} \frac{j_n(ka)\dot{j}_n(k_{sp}a) - x\dot{j}_n(ka)j_n(k_{sp}a)}{h_n^{(1)}(ka)\dot{j}_n(k_{sp}a) - x\dot{h}_n^{(1)}(ka)j_n(k_{sp}a)} \quad (2.2.18)$$

ovvero sono stati ottenuti i coefficienti di Mie del campo scatterato.

2.2.1 Validazione del modello sfera dielettrica

Analogamente a quanto visto nel paragrafo precedente anche in questo caso si utilizzeranno per la validazione del modello i risultati ottenuti con COMSOL Multiphysics ed i risultati ottenuti da Matlab.

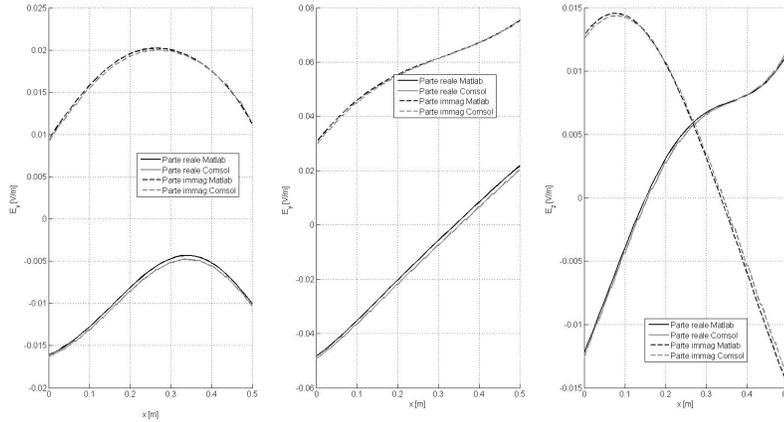


Figura 2.3: Parte reale e parte immaginaria delle componenti cartesiane del campo elettrico scattarato da una sfera dielettrica. In particolare le linee continue si riferiscono alla parte reale e le linee tratteggiate alla parte immaginaria, inoltre le linee nere ai risultati ottenuti con Matlab e le linee grigie quelle ottenute con Comsol.

Le caratteristiche geometriche ed elettromagnetiche del modello di validazione non subisce modifiche rispetto al caso precedente, l'unica cosa che cambia è il valore della costante dielettrica della sfera che in questo caso deve assumere un valore finito e pari a $\varepsilon_s = 2.25$ (vetro). Per completezza di seguito si riportano i valori del modello; raggio della sfera $a = 0.25$ m, onda incidente piana uniforme e polarizzata circolarmente di ampiezza unitaria: $E_{\vartheta_i} = E_{\varphi_i} = 1$ V/m, angoli di incidenza pari a $\vartheta_i = \varphi_i = \pi/6$ e frequenza $f = 300$ MHz. Il probe sul cui è stato misurato il campo scattarato è un segmento di coordinate $\ell = ([0 : 2a], 0, -2a)$. Anche in questo caso si nota dalla figura 2.3 come i risultati ottenuti con le due diverse metodologie risultato completamente concordanti, la leggerissima discordanza dei dati è data dall'errore numerico di Comsol, precisamente tale errore è imputabile alla scelta della grandezza del dominio di simulazione e dal PML (Perfectly matched layer).

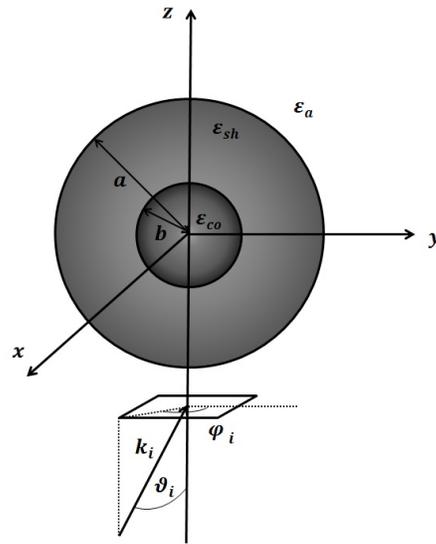


Figura 2.4: Rappresentazione di un'onda piana che incide su una sfera concentrica

2.3 Diffrazione da sfera concentrica nello spazio libero

Nel presente paragrafo si vuole studiare il problema della diffrazione di un'onda piana e uniforme da parte di una sfera concentrica nello spazio libero. In questo caso particolare si deve considerare la presenza di una sfera concentrica il cui nucleo (core) è caratterizzato da un raggio a ed un mantello (shell) di raggio b entrambi centrati nell'origine del sistema di riferimento, inoltre poniamo con ϵ_{sh} , μ_{sh} , σ_{sh} e ϵ_{co} , μ_{co} , σ_{co} , le caratteristiche elettromagnetiche della shell e del core, rispettivamente. La geometria del problema può essere visualizzata in figura 5.1. Per quanto riguardano le dimensioni geometriche e le caratteristiche del campo incidente, queste non subiscono variazioni rispetto ai casi precedenti. Anche in questo caso possiamo ipotizzare una forma del campo data dallo sviluppo delle armoniche

sferiche vettoriali in ogni dominio dello spazio preso in considerazione, cioè

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n [a_{mn} \mathbf{M}_{mn}^{(3)}(\mathbf{r}) + b_{mn} \mathbf{N}_{mn}^{(3)}(\mathbf{r})] \quad (2.3.1)$$

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n [e_{mn} \mathbf{M}_{mn}^{(3)}(\mathbf{r}) + f_{mn} \mathbf{N}_{mn}^{(3)}(\mathbf{r})] \quad (2.3.2)$$

$$(2.3.3)$$

per i campi esterni allo scatteratore. Mentre all'interno del sistema costituito da due sfere concentriche, saranno presenti altri due campi: uno all'interno del nucleo ed un altro all'interno del mantello, tali campi possono assumere rispettivamente la seguente forma:

$$\mathbf{E}_{co}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n [w_{mn} \mathbf{M}_{mn}^{(1)}(k_{co}\mathbf{r}) + z_{mn} \mathbf{N}_{mn}^{(1)}(k_{co}\mathbf{r})] \quad (2.3.4)$$

$$\mathbf{E}_{sh}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n \left[r_{mn} \mathbf{M}_{mn}^{(1)}(k_{sh}\mathbf{r}) + s_{mn} \mathbf{N}_{mn}^{(1)}(k_{sh}\mathbf{r}) + u_{mn} \mathbf{M}_{mn}^{(2)}(k_{sh}\mathbf{r}) + v_{mn} \mathbf{N}_{mn}^{(2)}(k_{sh}\mathbf{r}) \right] \quad (2.3.5)$$

si nota ancora come i coefficienti e_{mn} e f_{mn} sono ancora una volta le incognite del nostro problema e verranno determinate tramite l'applicazione delle condizioni al contorno. Inoltre si nota che il campo nello strato esterno è stato sviluppato come sovrapposizione dei vettori \mathbf{M}_{mn} e \mathbf{N}_{mn} considerando in questo caso le funzioni di Bessel di seconda specie y_n , in quanto il punto $r = 0$ risulta essere esterno al dominio del campo \mathbf{E}_{sh} .

Giunti a questo punto si sono rappresentati tutti i campi elettrici che entrano in gioco nel problema. L'unica cosa che rimane da fare è l'imposizione delle condizioni

al contorno sulle superficie delle due sfere.

$$\begin{aligned}
(\mathbf{E}_{sh} - \mathbf{E}_{co}) \times \mathbf{r}_0 &= 0 && \text{per } r = a \\
(\mathbf{H}_{sh} - \mathbf{H}_{co}) \times \mathbf{r}_0 &= 0 && \text{per } r = a \\
(\mathbf{E}_t + \mathbf{E}_s - \mathbf{E}_{sh}) \times \mathbf{r}_0 &= 0 && \text{per } r = b \\
(\mathbf{H}_t + \mathbf{H}_s - \mathbf{H}_{sh}) \times \mathbf{r}_0 &= 0 && \text{per } r = b
\end{aligned}$$

ricordando la validità della seguente asserzione:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_z \propto \mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{E}_z$$

le condizioni al contorno diventano:

$$(\mathbf{E}_{sh} - \mathbf{E}_{co}) \times \mathbf{r}_0 = 0 \quad \text{per } r = a \quad (2.3.6)$$

$$(\nabla \times \mathbf{E}_{sh} - \nabla \times \mathbf{E}_{co}) \times \mathbf{r}_0 = 0 \quad \text{per } r = a \quad (2.3.7)$$

$$(\mathbf{E}_t + \mathbf{E}_s - \mathbf{E}_{sh}) \times \mathbf{r}_0 = 0 \quad \text{per } r = b \quad (2.3.8)$$

$$(\nabla \times \mathbf{E}_t + \nabla \times \mathbf{E}_s - \nabla \times \mathbf{E}_{sh}) \times \mathbf{r}_0 = 0 \quad \text{per } r = b \quad (2.3.9)$$

valide nel caso in cui le permeabilità magnetiche dei mezzi siano uguali ad 1 o per lo meno abbiano lo stesso valore.

Ora devo andare a determinare i prodotti vettoriali dei campi con il versore radiale, per fare ciò riscrivo i campi nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n \left[a_{mn} \mathbf{m}_{mn}(\vartheta, \varphi) j_n(kr) + b_{mn} \mathbf{n}_{mn}(\vartheta, \varphi) \dot{j}_n(kr) + \right. \\
&\quad \left. + b_{mn} \mathbf{p}_{mn}(\vartheta, \varphi) \frac{j_n(kr)}{kr} \right] \\
\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n \left[e_{mn} \mathbf{m}_{mn}(\vartheta, \varphi) h_n^{(1)}(kr) + f_{mn} \mathbf{n}_{mn}(\vartheta, \varphi) \dot{h}_n^{(1)}(kr) + \right. \\
&\quad \left. + f_{mn} \mathbf{p}_{mn}(\vartheta, \varphi) \frac{h_n^{(1)}(kr)}{kr} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{sh}(k_{sh}\mathbf{r}) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n \left[r_{mn} \mathbf{m}_{mn}(\vartheta, \varphi) j_n(k_{sh}r) + s_{mn} \mathbf{n}_{mn}(\vartheta, \varphi) \dot{j}_n(k_{sh}r) + \right. \\
&\quad \left. + s_{mn} \mathbf{p}_{mn}(\vartheta, \varphi) \frac{j_n(k_{sh}r)}{k_{sh}r} + u_{mn} \mathbf{m}_{mn}(\vartheta, \varphi) y_n(k_{sh}r) + \right. \\
&\quad \left. + v_{mn} \mathbf{n}_{mn}(\vartheta, \varphi) \dot{y}_n(k_{sh}r) + v_{mn} \mathbf{p}_{mn}(\vartheta, \varphi) \frac{y_n(k_{sh}r)}{k_{sh}r} \right] \\
\mathbf{E}_{co}(k_{co}\mathbf{r}) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n \left[w_{mn} \mathbf{m}_{mn}(\vartheta, \varphi) j_n(k_{co}r) + z_{mn} \mathbf{n}_{mn}(\vartheta, \varphi) \dot{j}_n(k_{co}r) + \right. \\
&\quad \left. + z_{mn} \mathbf{p}_{mn}(\vartheta, \varphi) \frac{j_n(k_{co}r)}{k_{co}r} \right]
\end{aligned}$$

avendo posto con:

$$z_n(kr) = \frac{1}{kr} \frac{\partial [r z_n(kr)]}{\partial r} \quad (2.3.10)$$

Ora ricordando la seguente proprietà:

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}_{mn}(\vartheta, \varphi) \times \mathbf{r}_0 &= -\mathbf{n}_{mn}(\vartheta, \varphi) \\
\mathbf{n}_{mn}(\vartheta, \varphi) \times \mathbf{r}_0 &= \mathbf{m}_{mn}(\vartheta, \varphi)
\end{aligned}$$

si ottiene:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_i(k\mathbf{r}) \times \mathbf{r}_0 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n \left[-a_{mn} \mathbf{n}_{mn}(\vartheta, \varphi) j_n(kr) + b_{mn} \mathbf{m}_{mn}(\vartheta, \varphi) \dot{j}_n(kr) \right] \\
\mathbf{E}_s(k\mathbf{r}) \times \mathbf{r}_0 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n \left[-e_{mn} \mathbf{n}_{mn}(\vartheta, \varphi) h_n^{(1)}(kr) + f_{mn} \mathbf{m}_{mn}(\vartheta, \varphi) \dot{h}_n^{(1)}(kr) \right] \\
\mathbf{E}_{sh}(k_{sh}\mathbf{r}) \times \mathbf{r}_0 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n \left[-r_{mn} \mathbf{n}_{mn}(\vartheta, \varphi) j_n(k_{sh}r) + s_{mn} \mathbf{m}_{mn}(\vartheta, \varphi) \dot{j}_n(k_{sh}r) + \right. \\
&\quad \left. - u_{mn} \mathbf{n}_{mn}(\vartheta, \varphi) y_n(k_{sh}r) + v_{mn} \mathbf{m}_{mn}(\vartheta, \varphi) \dot{y}_n(k_{sh}r) \right] \\
\mathbf{E}_{co}(k_{co}\mathbf{r}) \times \mathbf{r}_0 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n \left[-w_{mn} \mathbf{n}_{mn}(\vartheta, \varphi) j_n(k_{co}r) + z_{mn} \mathbf{m}_{mn}(\vartheta, \varphi) \dot{j}_n(k_{co}r) \right]
\end{aligned}$$

queste equazioni andranno a sostituire i termini che compaiono nelle condizioni al contorno 6.9.5 e 6.9.18, per le altre due condizioni 6.9.10 e 6.9.19, dobbiamo inizialmente considerare le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{M}_{mn}(kr, \vartheta, \varphi) &= k\mathbf{N}_{mn}(kr, \vartheta, \varphi) \\ \nabla \times \mathbf{N}_{mn}(kr, \vartheta, \varphi) &= k\mathbf{M}_{mn}(kr, \vartheta, \varphi)\end{aligned}$$

Prendo inizialmente in considerazione il solo campo incidente, sapendo che tutto ciò che segue è valido per gli altri campi. Riscrivo il campo e faccio le dovute sostituzioni:

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n [a_{mn}\mathbf{M}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r}) + b_{mn}\mathbf{N}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r})]$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n [a_{mn}\nabla \times \mathbf{M}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r}) + b_{mn}\nabla \times \mathbf{N}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r})] = \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n k [a_{mn}\mathbf{N}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r}) + b_{mn}\mathbf{M}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r})]\end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E}_i(kr) \times \mathbf{r}_0 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n k [a_{mn}\mathbf{m}_{mn}\dot{j}_n(kr) - b_{mn}\mathbf{n}_{mn}j_n(kr)] \\ \nabla \times \mathbf{E}_s(kr) \times \mathbf{r}_0 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n k [e_{mn}\mathbf{m}_{mn}\dot{h}_n^{(1)}(kr) - f_{mn}\mathbf{n}_{mn}h_n^{(1)}(kr)] \\ \nabla \times \mathbf{E}_{sh}(k_{sh}r) \times \mathbf{r}_0 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n k_{sh} \left\{ [r_{mn}\dot{j}_n(k_{sh}r) + u_{mn}\dot{y}_n(k_{sh}r)]\mathbf{m}_{mn} - \right. \\ &\quad \left. [s_{mn}j_n(k_{sh}r) + v_{mn}y_n(k_{sh}r)]\mathbf{n}_{mn} \right\} \\ \nabla \times \mathbf{E}_{co}(k_{co}r) \times \mathbf{r}_0 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n k_{co} [w_{mn}\mathbf{m}_{mn}\dot{j}_n(k_{co}r) - z_{mn}\mathbf{n}_{mn}j_n(k_{co}r)]\end{aligned}$$

Ora che abbiamo determinato tutti i termini che compaiono nelle equazioni delle condizioni al contorno, sostituisco nella 6.9.5

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n - \left[r_{mn} \dot{j}_n(k_{sh}r) + u_{mn} \dot{y}_n(k_{sh}r) - w_{mn} \dot{j}_n(k_{co}r) \right] \mathbf{n}_{mn}(\vartheta, \varphi) + \\ \left[s_{mn} \dot{j}_n(k_{sh}r) + v_{mn} \dot{y}_n(k_{sh}r) - z_{mn} \dot{j}_n(k_{co}r) \right] \mathbf{m}_{mn}(\vartheta, \varphi) = 0 \\ \text{per } r = a \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

e sostituendo nella 6.9.10

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n \left[k_{sh} r_{mn} \dot{j}_n(k_{sh}r) + k_{sh} u_{mn} \dot{y}_n(k_{sh}r) - k_{co} w_{mn} \dot{j}_n(k_{co}r) \right] \mathbf{m}_{mn}(\vartheta, \varphi) + \\ - \left[k_{sh} s_{mn} \dot{j}_n(k_{sh}r) + k_{sh} v_{mn} \dot{y}_n(k_{sh}r) - k_{co} z_{mn} \dot{j}_n(k_{co}r) \right] \mathbf{n}_{mn}(\vartheta, \varphi) = 0 \\ \text{per } r = a \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

sostituendo nella 6.9.18

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n - \left[a_{mn} \dot{j}_n(kr) + e_{mn} h_n^{(1)}(kr) - r_{mn} \dot{j}_n(k_{sh}r) - u_{mn} \dot{y}_n(k_{sh}r) \right] \mathbf{n}_{mn} + \\ + \left[b_{mn} \dot{j}_n(kr) + f_{mn} h_n^{(1)}(kr) - s_{mn} \dot{j}_n(k_{sh}r) - v_{mn} \dot{y}_n(k_{sh}r) \right] \mathbf{m}_{mn} = 0 \\ \text{per } r = b \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

ed infine nella 6.9.19

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ k \left[a_{mn} \dot{j}_n(kr) + e_{mn} h_n^{(1)}(kr) \right] - k_{sh} \left[r_{mn} \dot{j}_n(k_{sh}r) - u_{mn} \dot{y}_n(k_{sh}r) \right] \right\} \mathbf{m}_{mn} + \\ - \left\{ k \left[b_{mn} \dot{j}_n(kr) + f_{mn} h_n^{(1)}(kr) \right] - k_{sh} \left[s_{mn} \dot{j}_n(k_{sh}r) - v_{mn} \dot{y}_n(k_{sh}r) \right] \right\} \mathbf{n}_{mn} = 0 \\ \text{per } r = b \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Ora, analogamente a quanto fatto in precedenza, multiplico scalarmente ciascuna delle quattro equazioni prima per $\mathbf{m}_{m'n'}^* \sin \vartheta$ ed integro in ϑ e φ tra $0, \pi$ e $0, 2\pi$, poi

successivamente moltiplico per $\mathbf{n}_{m'n'}^*$ sin ϑ ed integro sempre in ϑ e φ , ottenendo il seguente sistema lineare di ordine 8:

$$\begin{cases} r_{mn}j_n(k_{sh}a) + u_{mn}y_n(k_{sh}a) - w_{mn}j_n(k_{co}a) = 0 \\ s_{mn}\dot{j}_n(k_{sh}a) + v_{mn}y_n(k_{sh}a) - z_{mn}\dot{j}_n(k_{co}a) = 0 \\ \frac{k_{sh}}{k_{co}}[r_{mn}\dot{j}_n(k_{sh}a) + u_{mn}y_n(k_{sh}a)] - w_{mn}\dot{j}_n(k_{co}a) = 0 \\ \frac{k_{sh}}{k_{co}}[s_{mn}j_n(k_{sh}a) + v_{mn}y_n(k_{sh}a)] - z_{mn}j_n(k_{co}a) = 0 \\ a_{mn}j_n(kb) + e_{mn}h_n^{(1)}(kb) - r_{mn}j_n(k_{sh}b) - u_{mn}y_n(k_{sh}b) = 0 \\ b_{mn}\dot{j}_n(kb) + f_{mn}\dot{h}_n^{(1)}(kb) - s_{mn}\dot{j}_n(k_{sh}b) - v_{mn}y_n(k_{sh}b) = 0 \\ \frac{k}{k_{sh}}[a_{mn}\dot{j}_n(kb) + e_{mn}\dot{h}_n^{(1)}(kb)] - r_{mn}\dot{j}_n(k_{sh}b) - u_{mn}\dot{y}_n(k_{sh}b) = 0 \\ \frac{k}{k_{sh}}[b_{mn}j_n(kb) + f_{mn}h_n^{(1)}(kb)] - s_{mn}j_n(k_{sh}b) - v_{mn}y_n(k_{sh}b) = 0 \end{cases}$$

Tale sistema di equazioni lineari può essere rappresentato in forma matriciale ovvero come $Xb = a$, avendo indicato con:

$$a = \begin{pmatrix} -a_{mn}j_n(kb) \\ -\frac{k}{k_{sh}}a_{mn}\dot{j}_n(kb) \\ 0 \\ 0 \\ -b_{mn}\dot{j}_n(kb) \\ -\frac{k}{k_{sh}}b_{mn}j_n(kb) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.3.15)$$

$$b = \begin{pmatrix} e_{mn} \\ r_{mn} \\ u_{mn} \\ w_{mn} \\ f_{mn} \\ s_{mn} \\ v_{mn} \\ z_{mn} \end{pmatrix} \quad (2.3.16)$$

I coefficienti di nostro interesse sono e_{mn} ed f_{mn} che rappresentano proprio i coefficienti dello sviluppo in armoniche sferiche del campo elettrico scatterato. Per la loro determinazione si può far uso delle seguenti equazioni:

$$e_{mn} = \frac{\det(X_e)}{\det(X)}$$

$$f_{mn} = \frac{\det(X_f)}{\det(X)}$$

con X_e ed X_f rappresentate dalle 2.3.18, 2.3.19 ottenute sostituendo alle colonne corrispondenti, rispettivamente la e_{mn} e la f_{mn} con il termine noto. Per la risoluzione dei determinanti sopra citati si può far uso della formula per il calcolo del determinante di una matrice partizionata diagonale:

$$e_{mn} = \frac{\det(X_e)}{\det(X)} = \frac{\det(X_{e11})\det(X_{22})}{\det(X_{11})\det(X_{22})} = \frac{\det(X_{e11})}{\det(X_{11})}$$

$$f_{mn} = \frac{\det(X_f)}{\det(X)} = \frac{\det(X_{11})\det(X_{f22})}{\det(X_{11})\det(X_{22})} = \frac{\det(X_{f22})}{\det(X_{22})}$$

avendo indicato con i pedici 11 e 22 i sottoblocchi alla prima riga-prima colonna e alla seconda riga-seconda colonna, rispettivamente. Allora il problema si sposta nella determinazione dei determinanti delle seguenti matrici

$$X_{11} = X_1 = \left(\begin{array}{cc|cc} h_n^{(1)}(kb) & -j_n(k_{sh}b) & -y_n(k_{sh}b) & 0 \\ \frac{k}{k_{sh}} \dot{h}_n^{(1)}(kb) & -\dot{j}_n(k_{sh}b) & -\dot{y}_n(k_{sh}b) & 0 \\ \hline 0 & \dot{j}_n(k_{sh}a) & y_n(k_{sh}a) & -j_n(k_{co}a) \\ 0 & \frac{k_{sh}}{k_{co}} \dot{j}_n(k_{sh}a) & \frac{k_{sh}}{k_{co}} \dot{y}_n(k_{sh}a) & -\frac{k_{sh}}{k_{co}} \dot{j}_n(k_{co}a) \end{array} \right) \quad (2.3.20)$$

$$X_{22} = X_2 = \left(\begin{array}{cc|cc} \dot{h}_n^{(1)}(kb) & -\dot{j}_n(k_{sh}b) & -\dot{y}_n(k_{sh}b) & 0 \\ \frac{k}{k_{sh}} \dot{h}_n^{(1)}(kb) & -\dot{j}_n(k_{sh}b) & -\dot{y}_n(k_{sh}b) & 0 \\ \hline 0 & \dot{j}_n(k_{sh}a) & \dot{y}_n(k_{sh}a) & -\dot{j}_n(k_{co}a) \\ 0 & \frac{k_{sh}}{k_{co}} \dot{j}_n(k_{sh}a) & \frac{k_{sh}}{k_{co}} \dot{y}_n(k_{sh}a) & -\dot{j}_n(k_{co}a) \end{array} \right) \quad (2.3.21)$$

$$X_{e_{11}} = X_{e'} = \left(\begin{array}{cc|cc} -a_{mn}j_n(kb) & -j_n(k_{sh}b) & -y_n(k_{sh}b) & 0 \\ -\frac{k}{k_{sh}}a_{mn}\dot{j}_n(kb) & -\dot{j}_n(k_{sh}b) & -\dot{y}_n(k_{sh}b) & 0 \\ \hline 0 & j_n(k_{sh}a) & y_n(k_{sh}a) & -j_n(k_{co}a) \\ 0 & \frac{k_{sh}}{k_{co}}\dot{j}_n(k_{sh}a) & \frac{k_{sh}}{k_{co}}\dot{y}_n(k_{sh}a) & -\frac{k_{sh}}{k_{co}}\dot{j}_n(k_{co}a) \end{array} \right) \quad (2.3.22)$$

$$X_{f_{22}} = X_{f'} = \left(\begin{array}{cc|cc} -b_{mn}\dot{j}_n(kb) & -\dot{j}_n(k_{sh}b) & -\dot{y}_n(k_{sh}b) & 0 \\ -\frac{k}{k_{sh}}b_{mn}\dot{j}_n(kb) & -\dot{j}_n(k_{sh}b) & -\dot{y}_n(k_{sh}b) & 0 \\ \hline 0 & \dot{j}_n(k_{sh}a) & \dot{y}_n(k_{sh}a) & -\dot{j}_n(k_{co}a) \\ 0 & \frac{k_{sh}}{k_{co}}\dot{j}_n(k_{sh}a) & \frac{k_{sh}}{k_{co}}\dot{y}_n(k_{sh}a) & -\dot{j}_n(k_{co}a) \end{array} \right) \quad (2.3.23)$$

si nota che anch'esse possono essere considerate delle matrici partizionate, per cui il calcolo dei determinanti è:

$$\begin{aligned} e_{mn} &= \frac{\det(X_{e_{11}})}{\det(X_{11})} = \frac{\det(X_{e'_{11}})}{\det(X_{1_{11}})} \frac{\det(X_{1_{22}} - X_{1_{21}}X_{e'_{11}}^{-1}X_{1_{12}})}{\det(X_{1_{22}} - X_{1_{21}}X_{1_{11}}^{-1}X_{1_{12}})} = \\ &= \frac{\det(X_{e'_{11}} - X_{1_{12}}X_{1_{22}}^{-1}X_{1_{21}})}{\det(X_{1_{11}} - X_{1_{12}}X_{1_{22}}^{-1}X_{1_{21}})} \\ f_{mn} &= \frac{\det(X_{f_{22}})}{\det(X_{22})} = \frac{\det(X_{f'_{11}})}{\det(X_{2_{11}})} \frac{\det(X_{2_{22}} - X_{2_{21}}X_{f'_{11}}^{-1}X_{2_{12}})}{\det(X_{2_{22}} - X_{2_{21}}X_{2_{11}}^{-1}X_{2_{12}})} = \\ &= \frac{\det(X_{f'_{11}} - X_{2_{12}}X_{2_{22}}^{-1}X_{2_{21}})}{\det(X_{2_{11}} - X_{2_{12}}X_{2_{22}}^{-1}X_{2_{21}})} \end{aligned}$$

I coefficienti possono essere determinati con facilità come il rapporto dei determinanti di due matrici quadrate di secondo grado. Ovvero:

$$e_{mn} = \frac{\det \left(\begin{array}{cc} -a_{mn}j_n(kb) & -j_n(k_{sh}b) + y_n(k_{sh}b)A_n \\ -\frac{k}{k_{sh}}a_{mn}\dot{j}_n(kb) & -\dot{j}_n(k_{sh}b) + \dot{y}_n(k_{sh}b)A_n \end{array} \right)}{\det \left(\begin{array}{cc} h_n^{(1)}(kb) & -j_n(k_{sh}b) + y_n(k_{sh}b)A_n \\ \frac{k}{k_{sh}}\dot{h}_n^{(1)}(kb) & -\dot{j}_n(k_{sh}b) + \dot{y}_n(k_{sh}b)A_n \end{array} \right)} \quad (2.3.24)$$

$$f_{mn} = \frac{\det \begin{pmatrix} -b_{mn}\dot{j}_n(kb) & -\dot{j}_n(k_{sh}b) + y_n(k_{sh}b)B_n \\ -\frac{k}{k_{sh}}b_{mn}\dot{j}_n(kb) & -\dot{j}_n(k_{sh}b) + y_n(k_{sh}b)B_n \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \dot{h}_n^{(1)}(kb) & -\dot{j}_n(k_{sh}b) + y_n(k_{sh}b)B_n \\ \frac{k}{k_{sh}}h_n^{(1)}(kb) & -\dot{j}_n(k_{sh}b) + y_n(k_{sh}b)B_n \end{pmatrix}} \quad (2.3.25)$$

svolgendo i determinanti

$$e_{mn} = -a_{mn} \frac{j_n(kb) [\dot{j}_n(k_{sh}b) - y_n(k_{sh}b)A_n] - \frac{k}{k_{sh}}\dot{j}_n(kb) [j_n(k_{sh}b) - y_n(k_{sh}b)A_n]}{h_n^{(1)}(kb) [\dot{j}_n(k_{sh}b) - y_n(k_{sh}b)A_n] - \frac{k}{k_{sh}}\dot{h}_n^{(1)}(kb) [j_n(k_{sh}b) - y_n(k_{sh}b)A_n]} \quad (2.3.26)$$

$$f_{mn} = -b_{mn} \frac{\dot{j}_n(kb) [j_n(k_{sh}b) - y_n(k_{sh}b)B_n] - \frac{k}{k_{sh}}j_n(kb) [\dot{j}_n(k_{sh}b) - y_n(k_{sh}b)B_n]}{\dot{h}_n^{(1)}(kb) [j_n(k_{sh}b) - y_n(k_{sh}b)B_n] - \frac{k}{k_{sh}}h_n^{(1)}(kb) [\dot{j}_n(k_{sh}b) - y_n(k_{sh}b)B_n]} \quad (2.3.27)$$

con

$$A_n = \frac{j_n(k_{sh}a)\dot{j}_n(k_{co}a) - \frac{k_{sh}}{k_{co}}\dot{j}_n(k_{sh}a)j_n(k_{co}a)}{y_n(k_{sh}a)\dot{j}_n(k_{co}a) - \frac{k_{sh}}{k_{co}}\dot{y}_n(k_{sh}a)j_n(k_{co}a)} \quad (2.3.28)$$

$$B_n = \frac{\dot{j}_n(k_{sh}a)j_n(k_{co}a) - \frac{k_{sh}}{k_{co}}j_n(k_{sh}a)\dot{j}_n(k_{co}a)}{y_n(k_{sh}a)j_n(k_{co}a) - \frac{k_{sh}}{k_{co}}y_n(k_{sh}a)\dot{j}_n(k_{co}a)} \quad (2.3.29)$$

Confrontando tale risultato con quello fornito da C. F. Bohren e D. R. Huffman ([4] equaz. 8.2, pag. 183), si evince che:

$$e_{mn} = -a_{mn}e_{nBH}$$

$$f_{mn} = -b_{mn}f_{nBH}$$

Ovvero per ottenere i coefficienti dello sviluppo di un'onda scatterata da una sfera eccitata da un'onda incidente polarizzata ellitticamente, basta premoltiplicare i coefficienti dello scattering da onda piana polarizzata linearmente per a_{mn} e b_{mn} dove,

ricordiamo, assumono la seguente forma:

$$a_{mn} = (-1)^m i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} e^{-im\varphi_i} [-iE_{\vartheta_i} \pi_n^m(\cos \vartheta_i) - E_{\varphi_i} \tau_n^m(\cos \vartheta_i)]$$

$$b_{mn} = (-1)^m i^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} e^{-im\varphi_i} [E_{\vartheta_i} \tau_n^m(\cos \vartheta_i) - iE_{\varphi_i} \pi_n^m(\cos \vartheta_i)]$$

che ricordiamo essere i coefficienti dello sviluppo del campo elettrico incidente che incide obliquamente.

2.3.1 Validazione del modello sfera concentrica

La validazione in questo caso dovrà prendere in considerazione due materiali differenti uno per il core ed uno per la shell, in particolare si è scelto $\varepsilon_{co} = 4$ e $\varepsilon_{sh} = 2.25$. Le caratteristiche geometriche ed elettromagnetiche del modello di validazione non subiscono modifiche rispetto ai casi precedenti. Di seguito si riportano per completezza i valori del modello; raggio della sfera $a = 0.25$ m, onda incidente piana uniforme e polarizzata circolarmente di ampiezza unitaria: $E_{\vartheta_i} = E_{\varphi_i} = 1$ V/m, angoli di incidenza: $\vartheta_i = \varphi_i = \pi/6$ e frequenza pari a 300 MHz. Il probe su cui è stato misurato il campo scatterato è un segmento di coordinate $\ell = ([0 : 2a], 0, -2a)$. Anche in questo caso si nota dalla figura 2.6 come i risultati ottenuti con le due diverse metodologie risultato perfettamente concordanti. Si nota anche come l'errore numerico dovuto al PML per questa configurazione particolare sia molte minore rispetto al caso della sfera semplice.

2.4 Diffrazione da una sfera concentrica con core PEC

Passiamo al caso in cui il core della sfera concentrica sia costituita da materiale PEC, in questo caso il campo all'interno del core stesso è nullo, quindi basterà considerare il sistema in figura 5.1 e considerare $\varepsilon_{co} = \infty$.

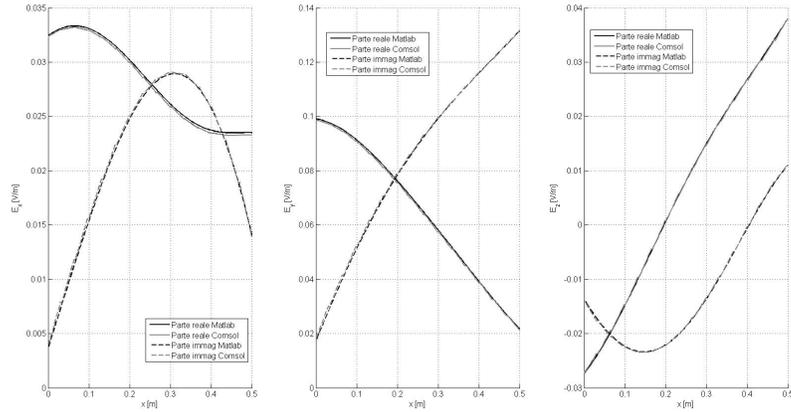


Figura 2.5: Parte reale e parte immaginaria delle componenti cartesiane del campo elettrico scattarato da una sfera concentrica. In particolare le linee continue si riferiscono alla parte reale e le linee tratteggiate alla parte immaginaria, inoltre le linee nere ai risultati ottenuti con Matlab e le linee grigie quelle ottenute con Consol.

In campi elettrici in gioco, quindi, in questo caso sono solo tre:

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n [a_{mn} \mathbf{M}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r}) + b_{mn} \mathbf{N}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r})] \quad (2.4.1)$$

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n [e_{mn} \mathbf{M}_{mn}^{(3)}(\mathbf{r}) + f_{mn} \mathbf{N}_{mn}^{(3)}(\mathbf{r})] \quad (2.4.2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{sh}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n \left[r_{mn} \mathbf{M}_{mn}^{(1)}(k_{sh}\mathbf{r}) + s_{mn} \mathbf{N}_{mn}^{(1)}(k_{sh}\mathbf{r}) + \right. \\ \left. + u_{mn} \mathbf{M}_{mn}^{(2)}(k_{sh}\mathbf{r}) + v_{mn} \mathbf{N}_{mn}^{(2)}(k_{sh}\mathbf{r}) \right] \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

In questa configurazione le condizioni al contorno che vengono applicate sulla superficie esterna della sfera, ovvero per $r = b$, ricalcano in modo del tutto analogo il caso precedente, mentre quelle applicate sulla superficie interna, ovvero per $r = a$,

si differenziano per la mancanza del campo elettrico nel nucleo PEC.

$$\mathbf{E}_{sh} \times \mathbf{r}_0 = 0 \quad \text{per } r = a \quad (2.4.4)$$

$$(\nabla \times \mathbf{E}_{sh}) \times \mathbf{r}_0 = 0 \quad \text{per } r = a \quad (2.4.5)$$

$$(\mathbf{E}_t + \mathbf{E}_s - \mathbf{E}_{sh}) \times \mathbf{r}_0 = 0 \quad \text{per } r = b \quad (2.4.6)$$

$$(\nabla \times \mathbf{E}_t + \nabla \times \mathbf{E}_s - \nabla \times \mathbf{E}_{sh}) \times \mathbf{r}_0 = 0 \quad \text{per } r = b \quad (2.4.7)$$

Analogamente al caso precedente, e quindi applicando le varie proprietà delle funzioni vettoriali $\mathbf{M}_{mn}(\mathbf{k}\mathbf{r})$ ed $\mathbf{N}_{mn}(\mathbf{k}\mathbf{r})$, nonché grazie alle proprietà di ortogonalità delle stesse, si perviene al seguente sistema lineare

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{mn}j_n(k_{sh}a) + u_{mn}y_n(k_{sh}a) = 0 \\ s_{mn}\dot{j}_n(k_{sh}a) + v_{mn}\dot{y}_n(k_{sh}a) = 0 \\ r_{mn}\dot{j}_n(k_{sh}a) + u_{mn}\dot{y}_n(k_{sh}a) = 0 \\ s_{mn}j_n(k_{sh}a) + v_{mn}y_n(k_{sh}a) = 0 \\ a_{mn}j_n(kb) + e_{mn}h_n^{(1)}(kb) - r_{mn}j_n(k_{sh}b) - u_{mn}y_n(k_{sh}b) = 0 \\ b_{mn}\dot{j}_n(kb) + f_{mn}\dot{h}_n^{(1)}(kb) - s_{mn}\dot{j}_n(k_{sh}b) - v_{mn}\dot{y}_n(k_{sh}b) = 0 \\ a_{mn}\dot{j}_n(kb) + e_{mn}\dot{h}_n^{(1)}(kb) - \frac{k_{sh}}{k} [r_{mn}\dot{j}_n(k_{sh}b) - u_{mn}\dot{y}_n(k_{sh}b)] = 0 \\ b_{mn}j_n(kb) + f_{mn}h_n^{(1)}(kb) - \frac{k_{sh}}{k} [s_{mn}j_n(k_{sh}b) - v_{mn}y_n(k_{sh}b)] = 0 \end{array} \right.$$

Si nota che le prime 4 equazioni risultano essere dipendenti due a due, pertanto per poter risolvere univocamente il sistema andremo a considerare solo 6 equazioni, le prime 2 e le ultime 4, infatti la condizione (2.4.5), risulta essere ridondante.

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{mn}j_n(k_{sh}a) + u_{mn}y_n(k_{sh}a) = 0 \\ s_{mn}\dot{j}_n(k_{sh}a) + v_{mn}\dot{y}_n(k_{sh}a) = 0 \\ a_{mn}j_n(kb) + e_{mn}h_n^{(1)}(kb) - r_{mn}j_n(k_{sh}b) - u_{mn}y_n(k_{sh}b) = 0 \\ b_{mn}\dot{j}_n(kb) + f_{mn}\dot{h}_n^{(1)}(kb) - s_{mn}\dot{j}_n(k_{sh}b) - v_{mn}\dot{y}_n(k_{sh}b) = 0 \\ a_{mn}\dot{j}_n(kb) + e_{mn}\dot{h}_n^{(1)}(kb) - \frac{k_{sh}}{k} [r_{mn}\dot{j}_n(k_{sh}b) - u_{mn}\dot{y}_n(k_{sh}b)] = 0 \\ b_{mn}j_n(kb) + f_{mn}h_n^{(1)}(kb) - \frac{k_{sh}}{k} [s_{mn}j_n(k_{sh}b) - v_{mn}y_n(k_{sh}b)] = 0 \end{array} \right.$$

possiamo aggiungere che nel caso in cui la sfera interna fosse stata PMC, cioè costituita da materiale conduttore magnetico perfetto la sola condizione da prendere

in considerazione sarebbe stata la seconda (2.4.5).

Risolviendo il sistema si ottengono i coefficienti dello sviluppo e_{mn} ed f_{mn} :

$$e_{mn} = -a_{mn} \frac{j_n(kb)A_{mn} - \frac{k}{k_{sh}} \dot{j}_n(kb)B_{mn}}{h_n^{(1)}(kb)A_{mn} - \frac{k}{k_{sh}} \dot{h}_n^{(1)}(kb)B_{mn}} \quad (2.4.8)$$

$$f_{mn} = -b_{mn} \frac{\dot{j}_n(kb)C_{mn} - \frac{k}{k_{sh}} j_n(kb)D_{mn}}{\dot{h}_n^{(1)}(kb)C_{mn} - \frac{k}{k_{sh}} h_n^{(1)}(kb)D_{mn}} \quad (2.4.9)$$

con

$$\begin{aligned} A_{mn} &= \dot{j}_n(k_{sh}b)y_n(k_{sh}a) - y_n(k_{sh}b)j_n(k_{sh}a) \\ B_{mn} &= j_n(k_{sh}b)y_n(k_{sh}a) - y_n(k_{sh}b)j_n(k_{sh}a) \\ C_{mn} &= j_n(k_{sh}b)\dot{y}_n(k_{sh}a) - y_n(k_{sh}b)\dot{j}_n(k_{sh}a) \\ D_{mn} &= \dot{j}_n(k_{sh}b)\dot{y}_n(k_{sh}a) - y_n(k_{sh}b)\dot{j}_n(k_{sh}a) \end{aligned}$$

2.4.1 Validazione del modello sfera concentrica con nucleo PEC

In questo caso la validazione del modello si otterrà operando il limite tendente ad infinito di k_{co} , ovvero si farà uso della definizione stessa di mezzo conduttore elettrico perfetto per cui risulta valida la $\varepsilon = \infty$, si imporrà tale limite nei coefficienti di Mie nel caso di sfere concentriche dielettriche (2.3.26) e (2.3.27) e si cercherà di dimostrare che con tale limite si ottengono i coefficienti di quest'ultimo caso (2.4.8) e (2.4.9). Quindi:

$$\lim_{k_{co} \rightarrow \infty} -a_{mn} \frac{j_n(kb) [\dot{j}_n(k_{sh}b) - y_n(k_{sh}b)A_n] - \frac{k}{k_{sh}} \dot{j}_n(kb) [j_n(k_{sh}b) - y_n(k_{sh}b)A_n]}{h_n^{(1)}(kb) [\dot{j}_n(k_{sh}b) - y_n(k_{sh}b)A_n] - \frac{k}{k_{sh}} \dot{h}_n^{(1)}(kb) [j_n(k_{sh}b) - y_n(k_{sh}b)A_n]} \quad (2.4.10)$$

$$\lim_{k_{co} \rightarrow \infty} -b_{mn} \frac{\dot{j}_n(kb) [j_n(k_{sh}b) - y_n(k_{sh}b)B_n] - \frac{k}{k_{sh}} j_n(kb) [\dot{j}_n(k_{sh}b) - y_n(k_{sh}b)B_n]}{\dot{h}_n^{(1)}(kb) [j_n(k_{sh}b) - y_n(k_{sh}b)B_n] - \frac{k}{k_{sh}} h_n^{(1)}(kb) [\dot{j}_n(k_{sh}b) - y_n(k_{sh}b)B_n]} \quad (2.4.11)$$

visto che k_{co} è contenuto nelle (2.3.28) e (2.3.29), basterà imporre i limiti a tali coefficienti:

$$-a_{mn} \frac{\left[j_n(kb) - \frac{k}{k_{sh}} \dot{j}_n(kb) \frac{j_n(k_{sh}b) - y_n(k_{sh}b) \lim_{k_{co} \rightarrow \infty} A_n}{\dot{j}_n(k_{sh}b) - \dot{y}_n(k_{sh}b) \lim_{k_{co} \rightarrow \infty} A_n} \right]}{\left[h_n^{(1)}(kb) - \frac{k}{k_{sh}} \dot{h}_n^{(1)}(kb) \frac{j_n(k_{sh}b) - y_n(k_{sh}b) \lim_{k_{co} \rightarrow \infty} A_n}{\dot{j}_n(k_{sh}b) - \dot{y}_n(k_{sh}b) \lim_{k_{co} \rightarrow \infty} A_n} \right]} \quad (2.4.12)$$

$$-b_{mn} \frac{\left[\dot{j}_n(kb) - \frac{k}{k_{sh}} j_n(kb) \frac{j_n(k_{sh}b) - y_n(k_{sh}b) \lim_{k_{co} \rightarrow \infty} B_n}{\dot{j}_n(k_{sh}b) - \dot{y}_n(k_{sh}b) \lim_{k_{co} \rightarrow \infty} B_n} \right]}{\left[\dot{h}_n^{(1)}(kb) - \frac{k}{k_{sh}} h_n^{(1)}(kb) \frac{j_n(k_{sh}b) - y_n(k_{sh}b) \lim_{k_{co} \rightarrow \infty} B_n}{\dot{j}_n(k_{sh}b) - \dot{y}_n(k_{sh}b) \lim_{k_{co} \rightarrow \infty} B_n} \right]} \quad (2.4.13)$$

quindi

$$\lim_{k_{co} \rightarrow \infty} A_n = \lim_{k_{co} \rightarrow \infty} \frac{j_n(k_{sh}a) \dot{j}_n(k_{co}a) - \frac{k_{sh}}{k_{co}} \dot{j}_n(k_{sh}a) j_n(k_{co}a)}{y_n(k_{sh}a) \dot{j}_n(k_{co}a) - \frac{k_{sh}}{k_{co}} y_n(k_{sh}a) j_n(k_{co}a)} = \frac{j_n(k_{sh}a)}{y_n(k_{sh}a)} \quad (2.4.14)$$

$$\lim_{k_{co} \rightarrow \infty} B_n = \lim_{k_{co} \rightarrow \infty} \frac{\dot{j}_n(k_{sh}a) j_n(k_{co}a) - \frac{k_{sh}}{k_{co}} j_n(k_{sh}a) \dot{j}_n(k_{co}a)}{\dot{y}_n(k_{sh}a) j_n(k_{co}a) - \frac{k_{sh}}{k_{co}} \dot{y}_n(k_{sh}a) \dot{j}_n(k_{co}a)} = \frac{\dot{j}_n(k_{sh}a)}{\dot{y}_n(k_{sh}a)} \quad (2.4.15)$$

in definitiva sostituendo quanto determinato, si ottiene che

$$\lim_{k_{co} \rightarrow \infty} e_{mn_{sh}} = e_{mn_{sh}PEC} \quad (2.4.16)$$

$$\lim_{k_{co} \rightarrow \infty} f_{mn_{sh}} = f_{mn_{sh}PEC} \quad (2.4.17)$$

cioè operando il limite sono stati ottenuti i coefficienti (2.4.8) e (2.4.9) che volevamo ottenere.

Per completezza si riporta l'andamento delle componenti del campo elettrico scatterato nel caso di sfere concentriche e con nucleo PEC, le grandezze prese in considerazione sono del tutto analoghe al caso precedente con l'unica differenza sulla sfera interna.

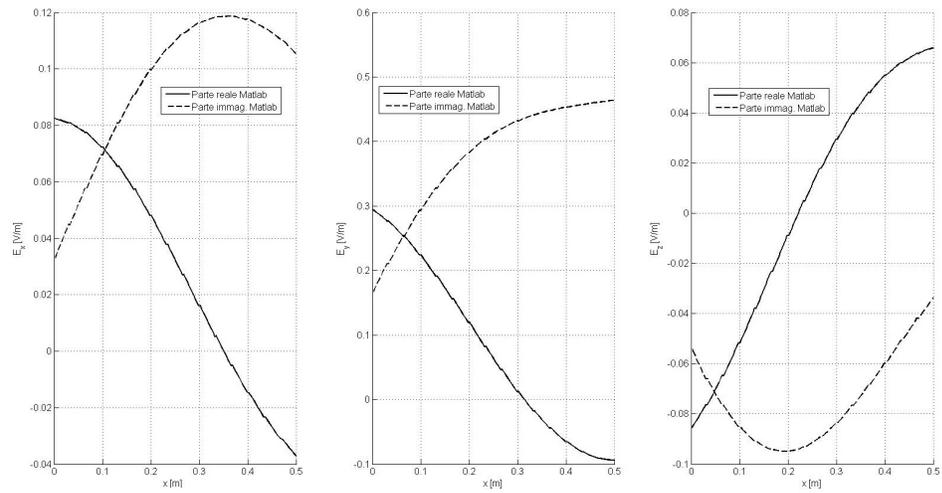


Figura 2.6: Parte reale e parte immaginaria delle componenti cartesiane del campo elettrico scattato da una sfera concentrica con il nucleo PEC. In particolare le linee continue si riferiscono alla parte reale e le linee tratteggiate alla parte immaginaria.

Capitolo 3

Scattering EM da un cilindro

Nel presente capitolo si cercherà di determinare il campo elettromagnetico scatterato da un cilindro sul quale incide un'onda piana uniforme polarizzata elletticamente e che incide in modo obliquo. Inizieremo quindi ad esprimere il campo elettromagnetico come sovrapposizione di infinite armoniche cilindriche vettoriali e per far ciò risolveremo l'equazione di Helmholtz in coordinate cilindriche e poi esprimeremo l'onda piana incidente come sviluppo di infinite onde cilindriche.

3.1 Diffrazione da un cilindro nello spazio libero

All'inizio del primo capitolo avevamo affermato la possibilità di poter risolvere l'equazione di Helmholtz su diversi sistemi di coordinate curvilinee, in questo caso, data la geometria dello scatteratore risulterà conveniente risolvere tale equazione in coordinate cilindriche.

Per la nostra trattazione analitica verrà preso in considerazione un cilindro di sezione circolare di raggio a che si estende per una lunghezza infinita. In particolare si vuole studiare il problema della diffrazione di un'onda piana ed uniforme polarizzata ellitticamente da parte di tale cilindro caratterizzato da una costante dielettrica pari a ε_2 e da una costante di propagazione definita da k_2 , immerso nello spazio libero caratterizzato da una permittività pari a ε_1 e da una costante di propagazione definita da k_1 (Fig. 3.1). Considero inizialmente il mezzo contenente

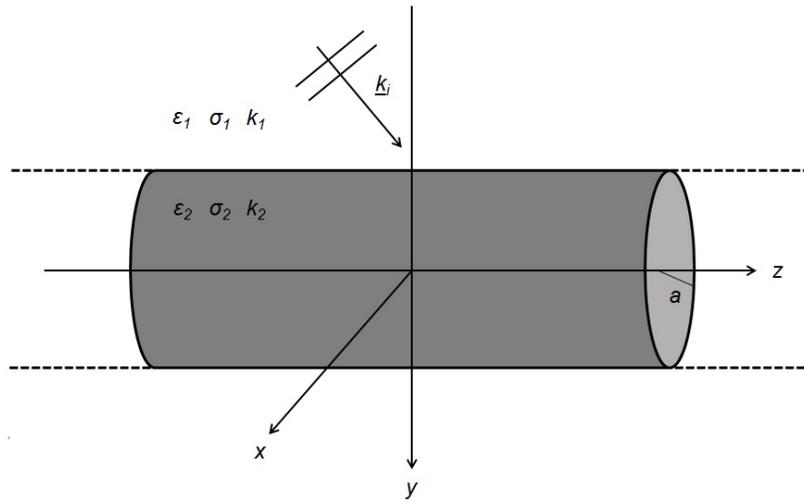


Figura 3.1: Rappresentazione di un'onda piana che incide su un cilindro indefinito

il cilindro come un mezzo omogeneo ed isotropo in un dominio chiuso nel quale siano state escluse le sorgenti. Il campo così descritto può essere rappresentato dall'equazione di Helmholtz vettoriale:

$$\nabla^2 \mathbf{C} + k_c^2 \mathbf{C} = 0 \quad (3.1.1)$$

con

$$\mathbf{C} = \mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{B}, \mathbf{A}, \mathbf{\Pi} \quad (3.1.2)$$

ovvero tale equazione può descrivere un qualsiasi campo contenuto nel dominio considerato (\mathbf{E} campo elettrico, \mathbf{D} induzione elettrica, \mathbf{H} campo magnetico, \mathbf{B} induzione magnetica, \mathbf{A} potenziale elettrico, $\mathbf{\Pi}$ potenziale di Debye). Ora data la linearità di questa equazione ogni campo, la cui legge di variazione temporale sia arbitraria, si può ottenere a partire da soluzioni di armoniche semplici e quindi si può supporre che \mathbf{C} contenga il tempo solo attraverso il fattore $e^{-i\omega t}$. Considero

come al solito tre vettori che soddisfano l'equazione di Helmholtz vettoriale:

$$\mathbf{L} = \nabla\psi \quad (3.1.3)$$

$$\mathbf{M} = \nabla \times \mathbf{a}\psi \quad (3.1.4)$$

$$\mathbf{N} = \frac{1}{k_c} \nabla \times \mathbf{M} \quad (3.1.5)$$

con le seguenti proprietà:

$$\nabla \times \mathbf{L} = 0 \quad (3.1.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = 0 \quad (3.1.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{N} = 0 \quad (3.1.8)$$

ovvero il primo vettore risulta essere irrotazionale e gli altri solenoidali, pertanto il primo vettore può essere, nel nostro caso, trascurato, in quanto risulta essere utile solo per la descrizione di campi prodotti da sorgenti incluse nel dominio di interesse.

Ricordiamo, come già visto, che qualsiasi funzione d'onda vettoriale può rappresentarsi come combinazione lineare delle funzioni caratteristiche:

$$\mathbf{E} = \sum_{m=1}^{+\infty} [a_m \mathbf{M}_m + b_m \mathbf{N}_m] \quad (3.1.9)$$

$$\mathbf{H} = \frac{ik}{\omega\mu} \sum_{m=1}^{+\infty} [a_m \mathbf{N}_m + b_m \mathbf{M}_m]. \quad (3.1.10)$$

Come nel caso nelle coordinate sferiche anche in questo caso la funzione scalare ψ va ricercata nella risoluzione dell'equazione di Helmholtz scalare nelle coordinate appropriate:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + (k^2 - k_z^2) \psi = 0 \quad (3.1.11)$$

utilizzato il metodo di separazione delle variabili e considerando la seguente con-

dizione di separabilità:

$$k_\rho^2 + k_z^2 = k^2 \quad (3.1.12)$$

avendo indicato con k_ρ^2 la componente trasversale della costante di propagazione e con k_z^2 la componente longitudinale (vedi Fig. 3.2), si ottiene come risultato:

$$\psi_m = e^{im\varphi} Z_m(k_\rho\rho) e^{ik_z z - i\omega t} \quad (3.1.13)$$

con $Z_m(k_\rho\rho) = J_m(k_\rho\rho), Y_m(k_\rho\rho), H_m^{(1)}(k_\rho\rho)$ e $H_m^{(2)}(k_\rho\rho)$ abbiamo rappresentato la generica funzione di Bessel, rispettivamente di prima, seconda, terza e quarta specie.

Sostituendo il valore di ψ nelle definizioni delle armoniche (3.1.3) si ha:

$$\mathbf{L}_m = \mathbf{l}_m e^{im\varphi} e^{ik_z z - i\omega t} \quad (3.1.14)$$

$$\mathbf{M}_m = \mathbf{m}_m e^{im\varphi} e^{ik_z z - i\omega t} \quad (3.1.15)$$

$$\mathbf{N}_m = \mathbf{n}_m e^{im\varphi} e^{ik_z z - i\omega t} \quad (3.1.16)$$

con

$$\mathbf{l}_m = \frac{\partial Z_m(k_\rho\rho)}{\partial \rho} \boldsymbol{\rho}_0 \mp \frac{m}{\rho} Z_m(k_\rho\rho) \boldsymbol{\varphi}_0 + ik_z Z_m(k_\rho\rho) \mathbf{z}_0 \quad (3.1.17)$$

$$\mathbf{m}_m = im \frac{Z_m(k_\rho\rho)}{\rho} \boldsymbol{\rho}_0 - k_\rho \frac{\partial Z_m(k_\rho\rho)}{\partial \rho} \boldsymbol{\varphi}_0 \quad (3.1.18)$$

$$\mathbf{n}_m = i \frac{k_z k_\rho}{k} \frac{\partial Z_m(k_\rho\rho)}{\partial \rho} \boldsymbol{\rho}_0 - \frac{mk_z}{k} \frac{Z_m(k_\rho\rho)}{\rho} \boldsymbol{\varphi}_0 + \frac{k_\rho^2}{k} Z_m(k_\rho\rho) \mathbf{z}_0 \quad (3.1.19)$$

Banalmente le armoniche cilindriche possono essere espresse nel seguente modo:

$$\mathbf{L}_m = L_\rho \boldsymbol{\rho}_0 + L_\varphi \boldsymbol{\varphi}_0 + L_z \mathbf{z}_0 \quad (3.1.20)$$

$$\mathbf{M}_m = M_\rho \boldsymbol{\rho}_0 + M_\varphi \boldsymbol{\varphi}_0 \quad (3.1.21)$$

$$\mathbf{N}_m = N_\rho \boldsymbol{\rho}_0 + N_\varphi \boldsymbol{\varphi}_0 + N_z \mathbf{z}_0 \quad (3.1.22)$$

ovvero come sovrapposizione delle tre componenti ortogonali.

Il passo successivo consiste nel voler determinare un comodo formalismo per poter rappresentare come sviluppo di armoniche cilindriche vettoriali un'onda piana

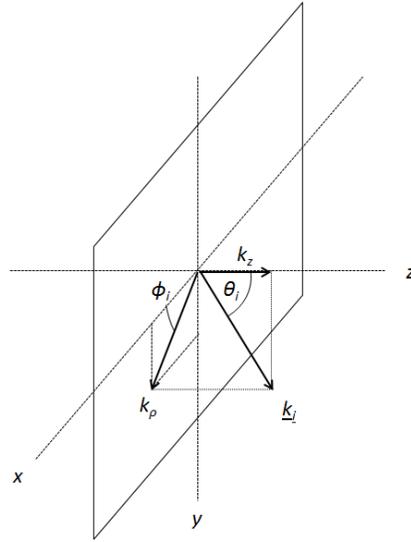


Figura 3.2: Rappresentazione di un'onda piana incidente

polarizzata ellitticamente (Fig. 3.2). Partiamo considerando il fatto che la costante di propagazione k può essere sempre espressa come:

$$k_\rho^2 + k_z^2 = k^2 \quad (3.1.23)$$

$$k_x^2 + k_y^2 = k_\rho^2 \quad (3.1.24)$$

con

$$k_x = k_\rho \cos \varphi_i \quad (3.1.25)$$

$$k_y = k_\rho \sin \varphi_i \quad (3.1.26)$$

ovvero abbiamo diviso la costante separazione in una parte parallela all'asse longitudinale ed una parte trasversa contenuta nel piano $z = 0$, inoltre sfruttando le

seguenti identità matematiche [1, 21]:

$$e^{i(k_x x + k_y y)} = e^{ik_\rho \rho \cos(\varphi - \varphi_i)} \quad (3.1.27)$$

$$e^{ik_\rho \rho \cos(\varphi - \varphi_i)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(k_\rho \rho) e^{im(\varphi - \varphi_i)} e^{im\frac{\pi}{2}} \quad (3.1.28)$$

si ottiene

$$e^{i(k_x x + k_y y)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(k_\rho \rho) e^{im(\varphi - \varphi_i)} e^{im\frac{\pi}{2}} \quad (3.1.29)$$

a questo punto, moltiplicando primo e secondo membro per il termine $e^{ik_z z}$ e considerando la (3.1.13), si ottiene:

$$e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \psi_m(k_\rho, k_z, \mathbf{r}) e^{-im\varphi_i} e^{im\frac{\pi}{2}} \quad (3.1.30)$$

Una volta determinato lo sviluppo di un'onda piana, posso passare alla determinazione delle armoniche cilindriche. Considerando la loro definizione (3.1.3), essendo:

$$\mathbf{M}(k, \mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{z}_0 \psi(k, \mathbf{r}) \quad (3.1.31)$$

si ha:

$$\nabla \times \mathbf{z}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathbf{M}(k_\rho, k_z, \mathbf{r}) e^{-im\varphi_i} e^{im\frac{\pi}{2}} \quad (3.1.32)$$

in particolare per quanto riguarda il primo termine, si nota che

$$\nabla \times \mathbf{z}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = i\mathbf{k} \times \mathbf{z}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = -ik_\rho \mathbf{h}_0(\vartheta_i, \varphi_i) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (3.1.33)$$

avendo indicato con \mathbf{h}_0 il versore orizzontale contenuto sul piano (x, y) . Quindi in

definitiva si ottiene:

$$\mathbf{h}_0(\vartheta_i, \varphi_i)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \frac{i}{k_\rho} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m \mathbf{M}(k_\rho, k_z, \mathbf{r})e^{-im\varphi_i} \quad (3.1.34)$$

Prendendo il rotore della componente orizzontale, posso determinare lo sviluppo della componente verticale di un'onda piana,

$$\nabla \times \mathbf{h}_0(\vartheta_i, \varphi_i)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \frac{i}{k_\rho} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m \nabla \times \mathbf{M}(k_\rho, k_z, \mathbf{r})e^{-im\varphi_i} \quad (3.1.35)$$

per la (3.1.3) il secondo membro diviene:

$$\nabla \times \mathbf{h}_0(\vartheta_i, \varphi_i)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = i \frac{k}{k_\rho} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m \mathbf{N}(k_\rho, k_z, \mathbf{r})e^{-im\varphi_i} \quad (3.1.36)$$

mentre il primo membro:

$$\nabla \times \mathbf{h}_0(\vartheta_i, \varphi_i)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = i\mathbf{k} \times \mathbf{h}_0(\vartheta_i, \varphi_i)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = ik\mathbf{v}_0(\vartheta_i, \varphi_i)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (3.1.37)$$

avendo indicato con \mathbf{v}_0 il versore verticale, ortogonale rispetto al piano (x, y) . Quindi in definitiva si ottiene:

$$\mathbf{v}_0(\vartheta_i, \varphi_i)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \frac{1}{k_\rho} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m \mathbf{N}(k_\rho, k_z, \mathbf{r})e^{-im\varphi_i}. \quad (3.1.38)$$

Per una esposizione esaustiva riporto la forma delle componenti verticale ed orizzontale su un sistema di riferimento cartesiano:

$$\mathbf{v}_{i0} = \cos \vartheta_i \cos \varphi_i \mathbf{x}_0 + \cos \vartheta_i \sin \varphi_i \mathbf{y}_0 - \sin \vartheta_i \mathbf{z}_0 \quad (3.1.39)$$

$$\mathbf{h}_{i0} = -\sin \varphi_i \mathbf{x}_0 + \cos \varphi_i \mathbf{y}_0 \quad (3.1.40)$$

In definitiva possiamo affermare che un qualsiasi campo polarizzato ellitticamente ed incidente in modo obliquo rispetto la superficie di un cilindro, può essere rappresentato come combinazione lineare delle due componenti una verticale ed una

orizzontale, ognuna moltiplicata per il suo coefficiente di polarizzazione:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= [E_{vi}\mathbf{v}_0(\vartheta_i, \varphi_i) + E_{hi}\mathbf{h}_0(\vartheta_i, \varphi_i)] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \\ &= \frac{1}{k_\rho} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m [iE_{hi}\mathbf{M}(k_\rho, k_z, \mathbf{r}) - E_{vi}\mathbf{N}(k_\rho, k_z, \mathbf{r})] e^{-im\varphi_i} \end{aligned} \quad (3.1.41)$$

Riscrivo tutto in forma più elegante, nonché in una forma analoga a quanto usata per la descrizione del campo incidente su uno scatteratore sferico:

$$\mathbf{E}_i(k_1, \mathbf{r}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [a_m\mathbf{M}^{(1)}(k_{1\rho}, k_{1z}, \mathbf{r}) + b_m\mathbf{N}^{(1)}(k_{1\rho}, k_{1z}, \mathbf{r})] \quad (3.1.42)$$

avendo indicato con:

$$a_m = \frac{E_{hi}}{k_{1\rho}} i^{m+1} e^{-im\varphi_i} \quad (3.1.43)$$

$$b_m = -\frac{E_{vi}}{k_{1\rho}} i^m e^{-im\varphi_i} \quad (3.1.44)$$

$$\mathbf{k}_i = k_1 (\sin \vartheta_i \cos \varphi_i \mathbf{x}_0 + \sin \vartheta_i \sin \varphi_i \mathbf{y}_0 + \cos \vartheta_i \mathbf{z}_0) \quad (3.1.45)$$

$$k_{iz} = k_1 \cos \vartheta_i \quad (3.1.46)$$

$$k_{i\rho} = k_1 \sin \vartheta_i \quad (3.1.47)$$

inoltre

$$\mathbf{k}_{i\rho} = k_{i\rho x} \mathbf{x}_0 + k_{i\rho y} \mathbf{y}_0 \quad (3.1.48)$$

$$k_{i\rho x} = k_{i\rho} \cos \varphi_i \quad (3.1.49)$$

$$k_{i\rho y} = k_{i\rho} \sin \varphi_i \quad (3.1.50)$$

Una volta noto il metodo per poter sviluppare un'onda piana in armoniche cilindriche e sapendo risolvere l'equazione di Helmholtz in coordinate cilindriche, posso ipotizzare che la forma del campo scatterato e del campo interno al cilindro sia

sempre descrivibile come sovrapposizione di infinite armoniche cilindriche vettoriali:

$$\mathbf{E}_{sc}(\mathbf{r}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [c_m \mathbf{M}_m^{(3)}(k_{1\rho}, k_{1z}, \mathbf{r}) + d_m \mathbf{N}_m^{(3)}(k_{1\rho}, k_{1z}, \mathbf{r})] \quad (3.1.51)$$

$$\mathbf{E}_{cy}(\mathbf{r}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [e_m \mathbf{M}_m^{(1)}(k_{2\rho}, k_{2z}, \mathbf{r}) + f_m \mathbf{N}_m^{(1)}(k_{2\rho}, k_{2z}, \mathbf{r})] \quad (3.1.52)$$

Ora non resta che imporre le condizioni al contorno sulla superficie del cilindro in modo da poter determinare le incognite del problema che consistono nei coefficienti dello sviluppo c_m , d_m , e_m ed f_m

La continuità delle componenti tangenziali dei campi sulla superficie del cilindro di raggio a è esprimibile nel seguente modo.

$$(\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_{sc} - \mathbf{E}_{cy}) \times \boldsymbol{\rho}_0 = 0 \quad \text{per } \rho = a \quad (3.1.53)$$

$$[\nabla \times (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_{sc} - \mathbf{E}_{cy})] \times \boldsymbol{\rho}_0 = 0 \quad \text{per } \rho = a \quad (3.1.54)$$

Sapendo che:

$$\mathbf{M}_m^{(1,3)}(k, \rho) \times \boldsymbol{\rho}_0 = -k_\rho \dot{Z}_m(k_\rho \rho) \mathbf{z}_0 \quad (3.1.55)$$

$$\mathbf{N}_m^{(1,3)}(k, \rho) \times \boldsymbol{\rho}_0 = -m \frac{k_z}{k_\rho} Z_m(k_\rho \rho) \mathbf{z}_0 - \frac{k_\rho^2}{k} Z_m(k_\rho \rho) \boldsymbol{\varphi}_0 \quad (3.1.56)$$

con $\dot{Z}_m(k_\rho \rho) = \frac{\partial Z_m(k_\rho \rho)}{\partial \rho}$, inoltre valendo le seguenti relazioni:

$$\nabla \times \mathbf{M}_m = \mathbf{N}_m \quad (3.1.57)$$

$$\nabla \times \mathbf{N}_m = \mathbf{M}_m \quad (3.1.58)$$

si ottiene

$$[\nabla \times \mathbf{M}_m^{(1,2,3)}(k, \rho)] \times \boldsymbol{\rho}_0 = -m \frac{k_z}{\rho} Z_m(k_\rho \rho) \mathbf{z}_0 - k_\rho^2 Z_m(k_\rho \rho) \boldsymbol{\varphi}_0 \quad (3.1.59)$$

$$[\nabla \times \mathbf{N}_m^{(1,2,3)}(k, \rho)] \times \boldsymbol{\rho}_0 = k k_\rho \dot{Z}_m(k_\rho \rho) \mathbf{z}_0 \quad (3.1.60)$$

Queste ultime relazioni considerando le (3.1.17)-(3.1.22), possono essere anche scritte

come:

$$\mathbf{M}_m^{(1,2,3)}(k, \rho) \times \boldsymbol{\rho}_0 = M_{\varphi_m}^{(1,2,3)}(k, \rho) \mathbf{z}_0 \quad (3.1.61)$$

$$\mathbf{N}_m^{(1,2,3)}(k, \rho) \times \boldsymbol{\rho}_0 = N_{\varphi_m}^{(1,2,3)}(k, \rho) \mathbf{z}_0 - N_{z_m}^{(1,2,3)}(k, \rho) \boldsymbol{\varphi}_0 \quad (3.1.62)$$

$$[\nabla \times \mathbf{M}_m^{(1,2,3)}(k, \rho)] \times \boldsymbol{\rho}_0 = k N_{\varphi_m}^{(1,2,3)}(k, \rho) \mathbf{z}_0 - k N_{z_m}^{(1,2,3)}(k, \rho) \boldsymbol{\varphi}_0 \quad (3.1.63)$$

$$[\nabla \times \mathbf{N}_m^{(1,2,3)}(k, \rho)] \times \boldsymbol{\rho}_0 = -k M_{\varphi_m}^{(1,2,3)}(k, \rho) \mathbf{z}_0 \quad (3.1.64)$$

Sostituendo nelle equazioni (6.9.5) e (6.9.10) e sfruttando le proprietà di ortogonalità della funzione esponenziale si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_m M_{\varphi_m}^{(3)}(k_a, a) + d_m N_{\varphi_m}^{(3)}(k_a, a) - e_m M_{\varphi_m}^{(1)}(k_c, a) - f_m - N_{\varphi_m}^{(1)}(k_c, a) = \\ = -a_m M_{\varphi_m}^{(1)}(k_a, a) - b_m N_{\varphi_m}^{(1)}(k_a, a) \\ c_m k_a N_{\varphi_m}^{(3)}(k_a, a) - d_m k_a M_{\varphi_m}^{(3)}(k_a, a) - k_c e_m N_{\varphi_m}^{(1)}(k_c, a) - k_c f_m - M_{\varphi_m}^{(1)}(k_c, a) = \\ = -a_m k_a N_{\varphi_m}^{(1)}(k_a, a) + b_m k_a M_{\varphi_m}^{(1)}(k_a, a) \\ d_m N_{z_m}^{(3)}(k_c, a) - f_m N_{z_m}^{(1)}(k_c, a) = -b_m N_{z_m}^{(1)}(k_a, a) \\ c_m k_a M_{z_m}^{(3)}(k_c, a) - e_m k_c M_{z_m}^{(1)}(k_c, a) = -a_m k_a M_{z_m}^{(1)}(k_a, a) \end{array} \right.$$

avendo separato le due equazioni di partenza in quattro, ovvero ognuna per le due componenti z_0 e φ_0 . Questo sistema può essere scritto in forma estesa:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_m k_{1\rho} \dot{H}_m^{(1)}(k_{1\rho} a) + d_m m \frac{k_{1z}}{k_{1a}} \dot{H}_m^{(1)}(k_{1\rho} a) - e_m k_{2\rho} \dot{J}_m(k_{2\rho} a) - f_m \frac{k_{2z}}{k_{2a}} J_m(k_{2\rho} a) = \\ = -a_m k_{1\rho} \dot{J}_m(k_{1\rho} a) - b_m m \frac{k_{1z}}{k_{1a}} J_m(k_{1\rho} a) \\ c_m \frac{k_{1z}}{a} H_m^{(1)}(k_{1\rho} a) + d_m k_1 k_{1\rho} \dot{H}_m^{(1)}(k_{1\rho} a) - e_m m \frac{k_{2z}}{a} J_m(k_{2\rho} a) - f_m k_2 k_{2\rho} \dot{J}_m(k_{2\rho} a) = \\ = a_m m \frac{k_{1z}}{a} J_m(k_{1\rho} a) - b_m k_1 k_{1\rho} \dot{J}_m(k_{1\rho} a) \\ c_m k_{1\rho}^2 H_m^{(1)}(k_{1\rho} a) - e_m k_{2\rho}^2 J_m(k_{2\rho} a) = -a_m k_{1\rho}^2 J_m(k_{1\rho} a) \\ d_m \frac{k_{1\rho}^2}{k_1} H_m^{(1)}(k_{1\rho} a) - f_m \frac{k_{2\rho}^2}{k_2} J_m(k_{2\rho} a) = -b_m \frac{k_{1\rho}^2}{k_1} J_m(k_{1\rho} a) \end{array} \right.$$

Prendiamo in considerazione per la risoluzione del sistema la forma più compatta ovvero quella espressa attraverso le componenti scalari delle armoniche cilindriche vettoriali. Risolvendo il sistema, ad esempio, invertendo la matrice dei coefficienti delle incognite, si ottengono i coefficienti dello sviluppo del campo scatterante:

$$\begin{aligned}
c_m = & am \frac{[\frac{1}{k_c} N_{z_a}^{(1)} M_{\varphi_c}^{(1)} - \frac{1}{k_a} M_{\varphi_a}^{(1)} N_{z_c}^{(1)}] [-k_a M_{\varphi_a}^{(3)} N_{z_c}^{(1)} + k_c N_{z_a}^{(3)} M_{\varphi_c}^{(1)}] - [N_{z_a}^{(1)} N_{\varphi_c}^{(1)} - N_{\varphi_a}^{(1)} N_{z_c}^{(1)}] [N_{\varphi_a}^{(3)} N_{z_c}^{(1)} - N_{z_a}^{(3)} N_{\varphi_c}^{(1)}] +}{[\frac{1}{k_c} N_{z_a}^{(3)} M_{\varphi_c}^{(1)} - \frac{1}{k_a} M_{\varphi_a}^{(3)} N_{z_c}^{(1)}] [-k_a M_{\varphi_a}^{(3)} N_{z_c}^{(1)} + k_c N_{z_a}^{(3)} M_{\varphi_c}^{(1)}] - [N_{z_a}^{(3)} N_{\varphi_c}^{(1)} - N_{\varphi_a}^{(3)} N_{z_c}^{(1)}] [N_{\varphi_a}^{(3)} N_{z_c}^{(1)} - N_{z_a}^{(3)} N_{\varphi_c}^{(1)}]} \\
& + bm \frac{[N_{z_a}^{(1)} N_{\varphi_c}^{(1)} - N_{\varphi_a}^{(1)} N_{z_c}^{(1)}] [-M_{\varphi_a}^{(3)} N_{z_c}^{(1)} + \frac{k_a}{k_c} N_{z_a}^{(3)} M_{\varphi_c}^{(1)}] + [\frac{k_c}{k_a} N_{z_a}^{(1)} M_{\varphi_c}^{(1)} - M_{\varphi_a}^{(1)} N_{z_c}^{(1)}] [N_{\varphi_a}^{(3)} N_{z_c}^{(1)} - N_{z_a}^{(3)} N_{\varphi_c}^{(1)}]}{[\frac{1}{k_c} N_{z_a}^{(3)} M_{\varphi_c}^{(1)} - \frac{1}{k_a} M_{\varphi_a}^{(3)} N_{z_c}^{(1)}] [-k_a M_{\varphi_a}^{(3)} N_{z_c}^{(1)} + k_c N_{z_a}^{(3)} M_{\varphi_c}^{(1)}] - [N_{z_a}^{(3)} N_{\varphi_c}^{(1)} - N_{\varphi_a}^{(3)} N_{z_c}^{(1)}] [N_{\varphi_a}^{(3)} N_{z_c}^{(1)} - N_{z_a}^{(3)} N_{\varphi_c}^{(1)}]} \quad (3.1.65)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_m = & am \frac{[N_{z_a}^{(1)} N_{\varphi_c}^{(1)} - N_{\varphi_a}^{(1)} N_{z_c}^{(1)}] [M_{\varphi_a}^{(3)} N_{z_c}^{(1)} - \frac{k_a}{k_c} N_{z_a}^{(3)} M_{\varphi_c}^{(1)}] - [\frac{k_c}{k_a} N_{z_a}^{(1)} M_{\varphi_c}^{(1)} - M_{\varphi_a}^{(1)} N_{z_c}^{(1)}] [N_{\varphi_a}^{(3)} N_{z_c}^{(1)} - N_{z_a}^{(3)} N_{\varphi_c}^{(1)}] +}{[\frac{1}{k_c} N_{z_a}^{(3)} M_{\varphi_c}^{(1)} - \frac{1}{k_a} M_{\varphi_a}^{(3)} N_{z_c}^{(1)}] [-k_a M_{\varphi_a}^{(3)} N_{z_c}^{(1)} + k_c N_{z_a}^{(3)} M_{\varphi_c}^{(1)}] - [N_{z_a}^{(3)} N_{\varphi_c}^{(1)} - N_{\varphi_a}^{(3)} N_{z_c}^{(1)}] [N_{\varphi_a}^{(3)} N_{z_c}^{(1)} - N_{z_a}^{(3)} N_{\varphi_c}^{(1)}]} \\
& + bm \frac{[-\frac{k_c}{k_a} N_{z_a}^{(1)} M_{\varphi_c}^{(1)} + M_{\varphi_a}^{(1)} N_{z_c}^{(1)}] [M_{\varphi_a}^{(3)} N_{z_c}^{(1)} + \frac{k_a}{k_c} N_{z_a}^{(3)} M_{\varphi_c}^{(1)}] - [N_{z_a}^{(1)} N_{\varphi_c}^{(1)} - N_{\varphi_a}^{(1)} N_{z_c}^{(1)}] [N_{\varphi_a}^{(3)} N_{z_c}^{(1)} - N_{z_a}^{(3)} N_{\varphi_c}^{(1)}]}{[\frac{1}{k_c} N_{z_a}^{(3)} M_{\varphi_c}^{(1)} - \frac{1}{k_a} M_{\varphi_a}^{(3)} N_{z_c}^{(1)}] [-k_a M_{\varphi_a}^{(3)} N_{z_c}^{(1)} + k_c N_{z_a}^{(3)} M_{\varphi_c}^{(1)}] - [N_{z_a}^{(3)} N_{\varphi_c}^{(1)} - N_{\varphi_a}^{(3)} N_{z_c}^{(1)}] [N_{\varphi_a}^{(3)} N_{z_c}^{(1)} - N_{z_a}^{(3)} N_{\varphi_c}^{(1)}]} \quad (3.1.66)
\end{aligned}$$

Analogamente a quanto visto per un cilindro dielettrico, il ragionamento può essere esteso al caso più semplice di cilindro PEC, in questo caso particolare il campo interno al cilindro risulta essere nullo, pertanto le condizioni al contorno si riducono a:

$$(\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_{sc}) \times \boldsymbol{\rho}_0 = 0 \quad \text{per } \rho = a \quad (3.1.67)$$

facendo gli stessi passaggi fatti per il caso precedente si ottiene il seguente sistema di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} c_m M_{\varphi_m}^{(3)}(k_\rho a) + d_m N_{\varphi_m}^{(3)}(k_\rho a) = -a_m M_{\varphi_m}^{(1)}(k_\rho a) - b_m N_{\varphi_m}^{(1)}(k_\rho a) \\ d_m N_{z_m}^{(3)}(k_\rho a) = -b_m N_{z_m}^{(1)}(k_\rho a) \end{cases}$$

risolvendo si ottiene:

$$\begin{cases} c_m = -a_m \frac{M_{\varphi_m}^{(1)}(k_\rho a)}{M_{\varphi_m}^{(3)}(k_\rho a)} \\ d_m = -b_m \frac{N_{z_m}^{(1)}(k_\rho a)}{N_{z_m}^{(3)}(k_\rho a)} \end{cases} \quad (3.1.68)$$

che scritta in forma estesa risulta:

$$\begin{cases} c_m = -a_m \frac{J_m(k_\rho a)}{H_m^{(1)}(k_\rho a)} \\ d_m = -b_m \frac{J_m(k_\rho a)}{H_m^{(1)}(k_\rho a)} \end{cases} \quad (3.1.69)$$

riconoscendo i coefficienti noti in letteratura [22], infatti se si considera un'onda lineare in polarizzazione H o TE , cioè nel caso in cui sto considerando un'onda di ampiezza unitaria con il campo magnetico diretto lungo l'asse longitudinale e quindi nel nostro caso con $b_m = 0$, lo sviluppo dello onda ci fornisce lo stesso risultato presente nella letteratura e viceversa se considerassi un'onda in polarizzazione E o TH cioè nel caso in cui il campo elettrico è diretto lungo l'asse del cilindro e quindi nel nostro caso con $a_m = 0$, lo sviluppo dello onda ci fornisce ancora una volta lo stesso risultato presente in letteratura.

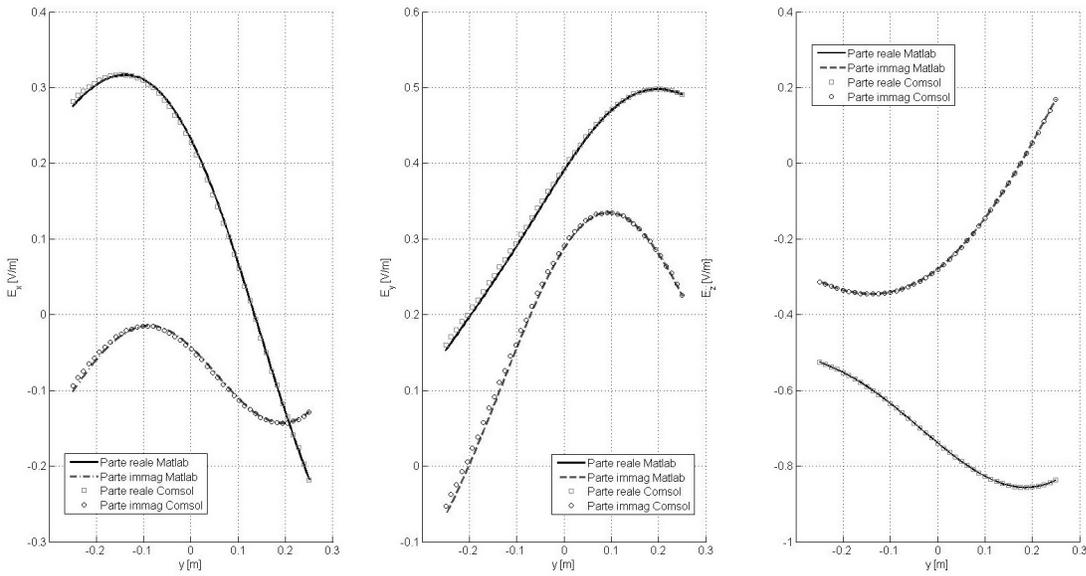


Figura 3.3: Componenti cartesiane del campo elettrico scattarato da un cilindro PEC di lunghezza indefinita. In particolare le linee continue si riferiscono alla parte reale, le linee tratteggiate alla parte immaginaria, dei risultati ottenuti con Matlab, le linee con i quadrati si riferiscono alla parte reale e le linee con i cerchi alla parte immaginaria, dei risultati ottenuti con Comsol.

3.1.1 Validazione del modello cilindro PEC

Per la validazione del modello presentato si confronteranno i risultati ottenuti con COMSOL Multiphysics, con i risultati ottenuti dal modello implementato su Matlab. In particolare verranno confrontati la parte reale ed immaginaria di ogni componente del campo elettrico preso su un determinato segmento. Nel nostro caso particolare, in riferimento alla figura 3.1, si considera un cilindro PEC di lunghezza infinita e di raggio $a = 0.25$ m, immersa nell'aria, il campo di eccitazione è un'onda piano uniforme polarizzata circolarmente di ampiezza unitaria con $E_{hi} = E_{vi} = 1$ V/m ed incidente in modo obliquo con $\vartheta_i = \pi/2$ e $\varphi_i = \pi/6$ ad una frequenza pari a 300 MHz. Il probe su cui è stato misurato il campo scatterato è un segmento di lunghezza pari a due volte il raggio della sfera, parallelo all'asse x e posto ad una quota pari a $z = -2a$. Si nota dalla figura 3.3 come i risultati ottenuti con le due diverse metodologie risultato completamente concordanti.

Capitolo 4

Diffrazione da una sfera sepolta

4.1 Trattazione analitica

Nel presente capitolo si vuole studiare il problema della diffrazione di un'onda piana ed uniforme da parte di una sfera sepolta in un substrato dielettrico. Si comincerà descrivendo la natura del problema. Si considerino due semispazi, si chiami semispazio 1 quello definito da $z < -h$, e semispazio 2 quello definito da $z > -h$. Si considerino i mezzi che riempiono i due spazi come mezzi lineari, omogenei, stazionari, isotropi, non dispersivi e non dissipativi. Si definiscano le proprietà del semispazio 1 tramite le costanti elettromagnetiche ε_1 e $\mu_1 = \mu_0$ e quelle del semispazio 2 tramite ε_2 e $\mu_2 = \mu_0$. Si consideri un'onda piana ed uniforme polarizzata ellitticamente che si propaghi nel semispazio 1 in una direzione tale da essere concorde con tutti e tre i versori del sistema di coordinate cartesiano ortogonale, ovvero tale che le componenti cartesiane del vettore di propagazione siano tutte positive. Nel semispazio 2 si consideri la presenza di una sfera di materiale conduttore elettrico perfetto (PEC), di raggio a e centrata nell'origine del sistema di riferimento. Sia h la distanza tra il centro della sfera e l'interfaccia tra i due semispazi, che sarà ovviamente il piano $z = -h$. Supponiamo quindi che tale onda possa essere scritta come (1.5.45), che qui riscriviamo per comodità:

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_{pol} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = (E_{\vartheta_i} \boldsymbol{\vartheta}_{0i} + E_{\varphi_i} \boldsymbol{\varphi}_{0i}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (4.1.1)$$

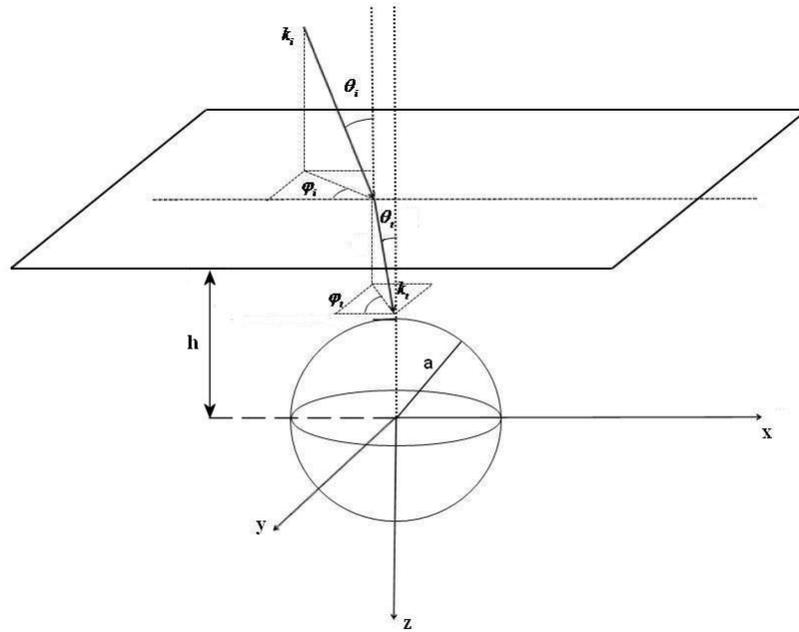


Figura 4.1: Rappresentazione di un'onda piana che incide all'interfaccia tra due mezzi e di una sfera sepolta nel mezzo 2

con:

$$\mathbf{k}_i = k_1 (\sin \vartheta_i \cos \varphi_i \mathbf{x}_0 + \sin \vartheta_i \sin \varphi_i \mathbf{y}_0 + \cos \vartheta_i \mathbf{z}_0) \quad (4.1.2)$$

$$\vartheta_{0i} = \cos \vartheta_i \cos \varphi_i \mathbf{x}_0 + \cos \vartheta_i \sin \varphi_i \mathbf{y}_0 - \sin \vartheta_i \mathbf{z}_0 \quad (4.1.3)$$

$$\varphi_{0i} = -\sin \varphi_i \mathbf{x}_0 + \cos \varphi_i \mathbf{y}_0 \quad (4.1.4)$$

si sceglie un'onda di questo genere perché, come si è visto nel capitolo 1, in questo modo ci si può ridurre facilmente a tutti i casi più semplici. La geometria del problema può essere visualizzata in Figura 4.1.

L'onda incidente verrà parzialmente trasmessa dall'interfaccia nel mezzo 2. I coefficienti di trasmissione che si dovranno utilizzare sono i coefficienti di Fresnel. Per utilizzare tali coefficienti sarà però necessario scrivere l'onda come sovrappo-

sizione di due onde polarizzate linearmente, una con polarizzazione orizzontale (o E), ovvero con la componente del vettore di campo elettrico puramente parallela al piano dell'interfaccia, e l'altra con polarizzazione verticale (o H), ovvero con la componente del vettore di campo elettrico giacente su un piano ortogonale all'interfaccia. Il formalismo del sistema di riferimento locale sull'onda, usato in (5.1.44), rende particolarmente semplice questo compito. Infatti, come si vede anche dalle espressioni (5.1.3) e (5.1.4), la componente di campo polarizzata lungo φ_{0i} sarà un'onda in polarizzazione E, essendo parallela al piano dell'interfaccia, mentre la componente lungo ϑ_{0i} sarà un'onda in polarizzazione H, essendo sempre all'interno di un piano ortogonale all'interfaccia. Ciò detto, l'espressione dell'onda trasmessa nel mezzo 2 assume una forma molto semplice, che si potrà scrivere come segue:

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{r}) = e^{ik_2h \cos \vartheta_t} (T_H^{12} E_{\vartheta_i} \vartheta_{0t} + T_E^{12} E_{\varphi_i} \varphi_{0t}) e^{i\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}} \quad (4.1.5)$$

dove, con ϑ_{0t} e φ_{0t} , si intendono i versori relativi agli angoli che il vettore di propagazione dell'onda trasmessa forma con gli assi coordinati e dove si sono indicati con $T_{E/H}^{12}$ i coefficienti di trasmissione di Fresnel dal mezzo 1 al mezzo 2, per il campo elettrico, relativi alle polarizzazioni E e H. Inoltre il termine di fase davanti alle parentesi è stato inserito per rappresentare lo sfasamento dell'onda dovuto al fatto che il piano dell'interfaccia sia in $z = -h$ invece che in $z = 0$.

Gli angoli ϑ_{0t} e φ_{0t} , come è ben noto, si possono ottenere dall'applicazione della continuità della componente tangenziale all'interfaccia del vettore di propagazione, ovvero dalla legge di Snell, infatti, dovendo il vettore trasmesso rimanere nello stesso piano del vettore incidente, si vede che l'angolo $\varphi_{0t} = \varphi_{0i}$ e che invece l'angolo ϑ_{0t} dovrà rispettare la condizione di Snell:

$$k_1 \sin \vartheta_{0i} = k_2 \sin \vartheta_{0t} \quad (4.1.6)$$

A questo punto si dovrà trattare il problema della diffrazione di quest'onda da parte della sfera. Per fare questo, si sviluppi l'onda trasmessa in armoniche sferiche. Per

quanto detto nel capitolo 1, si avrà:

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n [a_{mn} \mathbf{M}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r}) + b_{mn} \mathbf{N}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r})] \quad (4.1.7)$$

dove i coefficienti dello sviluppo saranno dati dalle espressioni in (1.5.50) e (1.5.51), ovvero nel caso in considerazione da:

$$a_{mn} = (-1)^m i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} e^{ik_2 h \cos \vartheta_t} (T_H^{12} E_{\vartheta_i} \boldsymbol{\vartheta}_{0t} + T_E^{12} E_{\varphi_i} \boldsymbol{\varphi}_{0t}) \cdot \mathbf{m}_{mn}^*(\vartheta_t, \varphi_t) \quad (4.1.8)$$

$$b_{mn} = (-1)^m i^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} e^{ik_2 h \cos \vartheta_t} (T_H^{12} E_{\vartheta_i} \boldsymbol{\vartheta}_{0t} + T_E^{12} E_{\varphi_i} \boldsymbol{\varphi}_{0t}) \cdot \mathbf{n}_{mn}^*(\vartheta_t, \varphi_t) \quad (4.1.9)$$

Si deve ora scrivere l'onda diffratta dalla sfera. Come si è già avuto modo di dire, tale onda potrà essere scritta come sovrapposizione dei vettori \mathbf{M}_{mn} e \mathbf{N}_{mn} considerando una dipendenza radiale rappresentata dalle funzioni di Bessel di terza specie, ovvero le funzioni di Hankel di primo tipo, si ha:

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n [e_{mn} \mathbf{M}_{mn}^{(3)}(\mathbf{r}) + f_{mn} \mathbf{N}_{mn}^{(3)}(\mathbf{r})] \quad (4.1.10)$$

i coefficienti e_{mn} e f_{mn} diventano così le incognite del nostro problema e verranno determinate tramite l'applicazione delle condizioni al contorno.

Si deve ora considerare l'incidenza dell'onda diffratta sull'interfaccia piana. Essendo la geometria dell'onda diffratta tipicamente sferica non sarà possibile utilizzare dei semplici coefficienti moltiplicativi, ma risulterà conveniente esprimere l'onda come uno sviluppo di onde piane ed utilizzare i coefficienti di Fresnel sulle singole onde piane elementari. Sfruttando le espressioni (1.6.15) e (1.6.19), si potrà

scrivere:

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{i^{-n}}{2\pi} \left[e_{mn} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} \mathbf{m}_{mn}(\alpha, \beta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \sin \alpha d\alpha d\beta + f_{mn} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} i\mathbf{n}_{mn}(\alpha, \beta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \sin \alpha d\alpha d\beta \right] \quad (4.1.11)$$

Si è così espresso il campo diffratto come uno spettro di onde piane. Per ricavare un'espressione del campo diffratto-riflesso (o trasmesso) sarà ora necessario scrivere ogni onda elementare come una sovrapposizione di due onde in polarizzazione lineare, una E e l'altra H. Anche in questo caso il compito risulta semplificato dall'espressione delle onde piane nel riferimento locale, infatti, come già si è visto con l'onda incidente, le singole onde piane elementari sono scritte secondo i versori $\boldsymbol{\alpha}_0$ e $\boldsymbol{\beta}_0$, omologhi dei versori $\boldsymbol{\vartheta}_{0i}$ e $\boldsymbol{\varphi}_{0i}$ in (5.1.44). Esplicitiamo infatti la generica onda piana elementare in (5.1.52):

$$dE_s^{mn} = \sin \alpha [e_{mn} \mathbf{m}_{mn}(\alpha, \beta) + i f_{mn} \mathbf{n}_{mn}(\alpha, \beta)] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (4.1.12)$$

la quale, esplicitando le forme dei vettori nella parentesi quadra, si può scrivere come segue:

$$dE_s^{mn} = \{e_{mn} [i\pi_{mn}(\alpha) \boldsymbol{\alpha}_0 - \tau_{mn}(\alpha) \boldsymbol{\beta}_0] + i f_{mn} [\tau_{mn}(\alpha) \boldsymbol{\alpha}_0 + i\pi_{mn}(\alpha) \boldsymbol{\beta}_0]\} \cdot e^{im\beta} \sin \alpha e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (4.1.13)$$

come si è già avuto modo di dire nel capitolo 1, e come si vede dall'espressione (4.1.13), i versori locali $\boldsymbol{\alpha}_0$ e $\boldsymbol{\beta}_0$, sono gli angoli che il vettore di propagazione della generica onda piana elementare forma con gli assi cartesiani, si potranno quindi scrivere, in analogia con le (5.1.2), (5.1.3) e (5.1.4), le seguenti relazioni:

$$\mathbf{k} = k_2 (\sin \alpha \cos \beta \mathbf{x}_0 + \sin \alpha \sin \beta \mathbf{y}_0 + \cos \alpha \mathbf{z}_0) \quad (4.1.14)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_0 = \cos \alpha \cos \beta \mathbf{x}_0 + \cos \alpha \sin \beta \mathbf{y}_0 - \sin \alpha \mathbf{z}_0 \quad (4.1.15)$$

$$\boldsymbol{\beta}_0 = -\sin \beta \mathbf{x}_0 + \cos \beta \mathbf{y}_0 \quad (4.1.16)$$

In questo modo si può subito riconoscere che le onde piane dirette secondo β_0 sono onde piane in polarizzazione E, mentre le onde dirette secondo α_0 sono in polarizzazione H. Potremo quindi scrivere l'onda piana elementare diffratta-riflessa come segue:

$$dE_{sr}^{mn} = e^{im\beta_r} \sin \alpha_r \left\{ e_{mn} \left[iR_H^{21} \pi_{mn}(\alpha_r) \alpha_{0r} - R_E^{21} \tau_{mn}(\alpha_r) \beta_{0r} \right] + f_{mn} \left[R_H^{21} \tau_{mn}(\alpha_r) \alpha_{0r} + iR_E^{21} \pi_{mn}(\alpha_r) \beta_{0r} \right] \right\} e^{-ik_2 h \cos \alpha} e^{ik_2 h \cos \alpha_r} e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}} \quad (4.1.17)$$

dove i due fattori di fase fuori dalle parentesi graffe stanno ad indicare lo sfasamento dell'onda incidente da 0 a $-h$ e quello dell'onda riflessa da $-h$ a 0. Si ha inoltre:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_r &= k_2 (\sin \alpha_r \cos \beta_r \mathbf{x}_0 + \sin \alpha_r \sin \beta_r \mathbf{y}_0 + \cos \alpha_r \mathbf{z}_0) \\ \alpha_{0r} &= \cos \alpha_r \cos \beta_r \mathbf{x}_0 + \cos \alpha_r \sin \beta_r \mathbf{y}_0 - \sin \alpha_r \mathbf{z}_0 \\ \beta_{0r} &= -\sin \beta_r \mathbf{x}_0 + \cos \beta_r \mathbf{y}_0 \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

Il legame che sussiste tra gli angoli α_r e β_r e gli angoli α e β è il seguente:

$$\alpha_r = \pi - \alpha \quad (4.1.19)$$

$$\beta_r = \beta \quad (4.1.20)$$

per comprendere tale legame è sufficiente pensare che il piano a cui appartiene il vettore incidente (caratterizzato da α e β), dovrà contenere anche il vettore riflesso, sappiamo infatti che il vettore viene riflesso rimanendo nello stesso piano ortogonale al piano di incidenza. Questo vuol dire che le componenti del vettore parallele al piano di incidenza non dovranno cambiare a causa della riflessione, si invertirà di segno invece la componente del vettore di propagazione ortogonale all'interfaccia, ovvero la componente lungo z . Potremo quindi sostituire l'angolo α in (4.1.17) ed

ottenere il seguente integrale per il campo diffratto-riflesso:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{sr}(\mathbf{r}) = & \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} e^{im\beta} \{ e_{mn} [iR_H^{21}\pi_{mn}(\alpha)\boldsymbol{\alpha}_{0r} - R_E^{21}\tau_{mn}(\alpha)\boldsymbol{\beta}_{0r}] + \\ & + f_{mn} [R_H^{21}\tau_{mn}(\alpha)\boldsymbol{\alpha}_{0r} + iR_E^{21}\pi_{mn}(\alpha)\boldsymbol{\beta}_{0r}] \} e^{2ik_2h\cos\alpha} e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}} \sin\alpha d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (4.1.21)$$

dove $R_{E/H}^{21}$ sono i coefficienti di riflessione di Fresnel dal mezzo 2 al mezzo 1, per i due casi di polarizzazione E e H. Notiamo che la variabile di integrazione α , sarebbe quella che nelle espressioni (4.1.17) e (4.1.18) era chiamata α_r , tale sostituzione è possibile dato che questa è una variabile di integrazione ed è stata fatta per alleggerire la notazione. Esattamente come il campo diffratto, anche il campo diffratto-riflesso è così rappresentato come sovrapposizione di onde piane in polarizzazione ellittica. Per rendere più evidente tale natura delle onde e per rimettere in evidenza i coefficienti dello sviluppo, si possono definire le seguenti ampiezze di campo:

$$\mathbf{E}_{Re}^{mn} = e^{im\beta} \sin\alpha [iR_H^{21}\pi_{mn}(\alpha)\boldsymbol{\alpha}_{0r} - R_E^{21}\tau_{mn}(\alpha)\boldsymbol{\beta}_{0r}] e^{2ik_2h\cos\alpha} \quad (4.1.22)$$

$$\mathbf{E}_{Rf}^{mn} = e^{im\beta} \sin\alpha [R_H^{21}\tau_{mn}(\alpha)\boldsymbol{\alpha}_{0r} + iR_E^{21}\pi_{mn}(\alpha)\boldsymbol{\beta}_{0r}] e^{2ik_2h\cos\alpha} \quad (4.1.23)$$

Il campo diffratto-riflesso può essere così scritto come segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{sr}(\mathbf{r}) = & \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{i^{-n}}{2\pi} \left(e_{mn} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} \mathbf{E}_{Re}^{mn} e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}} d\alpha d\beta + \right. \\ & \left. f_{mn} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} \mathbf{E}_{Rf}^{mn} e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}} d\alpha d\beta \right) \end{aligned} \quad (4.1.24)$$

Si è deciso di tenere distinti i due integrali per mantenere in evidenza i coefficienti incogniti. Per quanto riguarda il campo diffratto-trasmesso, esso avrà un'espressione del tutto analoga alla (5.1.58), con l'unica differenza che in luogo dei coefficienti di riflessione vi saranno gli analoghi coefficienti di trasmissione. L'espressione assunta

dal campo diffratto-trasmesso sarà quindi la seguente:

$$\mathbf{E}_{st}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{i^{-n}}{2\pi} \left(e_{mn} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} \mathbf{E}_{Te}^{mn} e^{i\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}} d\alpha d\beta + \right. \\ \left. + f_{mn} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} \mathbf{E}_{Tf}^{mn} e^{i\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}} d\alpha d\beta \right) \quad (4.1.25)$$

dove:

$$\mathbf{E}_{Te}^{mn} = e^{im\beta} \sin \alpha_t \left[iT_H^{21} \pi_{mn}(\alpha_t) \boldsymbol{\alpha}_{0t} - T_E^{21} \tau_{mn}(\alpha_t) \boldsymbol{\beta}_{0t} \right] e^{-ik_2 h \cos \alpha} e^{-ik_1 h \cos \alpha_t} \quad (4.1.26)$$

$$\mathbf{E}_{Tf}^{mn} = e^{im\beta} \sin \alpha_t \left[T_H^{21} \tau_{mn}(\alpha_t) \boldsymbol{\alpha}_{0t} + iT_E^{21} \pi_{mn}(\alpha_t) \boldsymbol{\beta}_{0t} \right] e^{-ik_2 h \cos \alpha} e^{-ik_1 h \cos \alpha_t} \quad (4.1.27)$$

e:

$$\mathbf{k}_t = k_1 (\sin \alpha_t \cos \beta \mathbf{x}_0 + \sin \alpha_t \sin \beta \mathbf{y}_0 + \cos \alpha_t \mathbf{z}_0) \quad (4.1.28)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{0t} = \cos \alpha_t \cos \beta \mathbf{x}_0 + \cos \alpha_t \sin \beta \mathbf{y}_0 - \sin \alpha_t \mathbf{z}_0 \quad (4.1.29)$$

$$\boldsymbol{\beta}_{0t} = -\sin \beta \mathbf{x}_0 + \cos \beta \mathbf{y}_0 \quad (4.1.30)$$

dove si è sfruttato il fatto che il vettore trasmesso giace sullo stesso piano del vettore di incidenza e quindi ha il medesimo angolo β . Per quanto riguarda l'angolo α_t , esso è fornito dalla ben nota condizione di Snell; la quale, nel nostro caso di incidenza dal mezzo 2 al mezzo 1, si può scrivere come segue:

$$k_2 \sin \alpha_i = k_1 \sin \alpha_t \quad (4.1.31)$$

Si vuole inoltre sottolineare che in (5.1.58) le polarizzazioni E e H rimangono mescolate, nel senso che non si è tentato un ordinamento dell'espressione del campo che separasse le due polarizzazioni. Questa scelta, oltre ad essere legata alla messa in evidenza dei coefficienti incogniti, è dovuta anche al fatto che fisicamente le onde che stiamo trattando sono intrinsecamente a polarizzazione ellittica, come si è già avuto modo di dire, infatti, la diffrazione da parte della sfera mescola inevitabilmente le singole polarizzazioni lineari.

Giunti a questo punto si sono rappresentati tutti i campi elettrici che entrano

in gioco nel problema che si sta affrontando. L'unica cosa che rimane da fare è l'imposizione delle condizioni al contorno sulla superficie della sfera. Dato che si è ipotizzato di avere una sfera di materiale conduttore elettrico perfetto si dovrà imporre l'annullamento delle componenti tangenziali del campo, ovvero si dovrà imporre che:

$$(\mathbf{E}_t + \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_{sr}) \times \mathbf{r}_0 = 0 \quad \text{per } r = a \quad (4.1.32)$$

Essendo note le espressioni dei diversi campi sarà sicuramente possibile scrivere tale condizione esplicitamente, ma nella trattazione di tale equazione ci troveremo di fronte a dei gravi problemi. Infatti, l'applicazione delle condizioni al contorno ci pone un problema analogo a quello, da noi già affrontato, dell'incidenza di onde sferiche su un'interfaccia piana. In quel caso, si aveva il problema di far interagire onde di natura sferica con un piano, in questo caso si ha invece un'onda espressa come sovrapposizione di onde piane, l'onda diffratta-riflessa, che deve interagire con una sfera. Appare ovvio che le condizioni al contorno non potranno assumere una forma semplice se prima non poniamo il campo diffratto-rifleso in una forma opportuna. Si dovrà quindi, seguendo il filo fin qui visto, sviluppare ogni singola onda piana che compone il campo in onde sferiche, sfruttando lo sviluppo in armoniche sferiche di un'onda piana in polarizzazione ellittica visto nel capitolo 1. La singola onda piana elementare in (5.1.58) si potrà sviluppare, secondo la formula (1.5.49), come segue:

$$\mathbf{E}_{Re}^{mn} e^{\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}} = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=-q}^q [c_{pq}^{mn}(\alpha_r, \beta_r) \mathbf{M}_{pq}^{(1)}(\mathbf{r}) + d_{pq}^{mn}(\alpha_r, \beta_r) \mathbf{N}_{pq}^{(1)}(\mathbf{r})] \quad (4.1.33)$$

$$\mathbf{E}_{Rf}^{mn} e^{\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}} = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=-q}^q [g_{pq}^{mn}(\alpha_r, \beta_r) \mathbf{M}_{pq}^{(1)}(\mathbf{r}) + h_{pq}^{mn}(\alpha_r, \beta_r) \mathbf{N}_{pq}^{(1)}(\mathbf{r})] \quad (4.1.34)$$

dove i coefficienti assumono le seguenti espressioni:

$$c_{pq}^{mn}(\alpha_r, \beta_r) = (-1)^{p;q} \frac{2q+1}{q(q+1)} \frac{(q-p)!}{(q+p)!} \mathbf{E}_{Re}^{mn} \cdot \mathbf{m}_{pq}^*(\alpha_r, \beta_r) \quad (4.1.35)$$

$$d_{pq}^{mn}(\alpha_r, \beta_r) = (-1)^{p;q-1} \frac{2q+1}{q(q+1)} \frac{(q-p)!}{(q+p)!} \mathbf{E}_{Re}^{mn} \cdot \mathbf{n}_{pq}^*(\alpha_r, \beta_r) \quad (4.1.36)$$

$$g_{pq}^{mn}(\alpha_r, \beta_r) = (-1)^{p;q} \frac{2q+1}{q(q+1)} \frac{(q-p)!}{(q+p)!} \mathbf{E}_{Rf}^{mn} \cdot \mathbf{m}_{pq}^*(\alpha_r, \beta_r) \quad (4.1.37)$$

$$h_{pq}^{mn}(\alpha_r, \beta_r) = (-1)^{p;q-1} \frac{2q+1}{q(q+1)} \frac{(q-p)!}{(q+p)!} \mathbf{E}_{Rf}^{mn} \cdot \mathbf{n}_{pq}^*(\alpha_r, \beta_r) \quad (4.1.38)$$

È bene notare che questi coefficienti risultano completamente noti. Svolgendo il prodotto scalare e ponendo $k_{pq} = (-1)^{p;q} \frac{2q+1}{q(q+1)} \frac{(q-p)!}{(q+p)!}$ si ottiene:

$$c_{pq}^{mn}(\alpha_r, \beta_r) = k_{pq} \left[R_H(\alpha_i) \pi_n^m(\cos \alpha_i) \pi_q^p(\cos \alpha_r) + R_E(\alpha_i) \tau_n^m(\cos \alpha_i) \tau_q^p(\cos \alpha_r) \right] \quad (4.1.39)$$

$$d_{pq}^{mn}(\alpha_r, \beta_r) = -ik_{pq} \left[R_H(\alpha_i) \pi_n^m(\cos \alpha_i) \tau_q^p(\cos \alpha_r) + R_E(\alpha_i) \tau_n^m(\cos \alpha_i) \pi_q^p(\cos \alpha_r) \right] \quad (4.1.40)$$

$$g_{pq}^{mn}(\alpha_r, \beta_r) = k_{pq} \left[R_H(\alpha_i) \tau_n^m(\cos \alpha_i) \pi_q^p(\cos \alpha_r) + R_E(\alpha_i) \pi_n^m(\cos \alpha_i) \tau_q^p(\cos \alpha_r) \right] \quad (4.1.41)$$

$$h_{pq}^{mn}(\alpha_r, \beta_r) = -ik_{pq} \left[R_H(\alpha_i) \tau_n^m(\cos \alpha_i) \tau_q^p(\cos \alpha_r) + R_E(\alpha_i) \pi_n^m(\cos \alpha_i) \pi_q^p(\cos \alpha_r) \right] \quad (4.1.42)$$

Si nota che compaiono sia variabili relative agli angoli d'incidenza che di riflessione. Avevamo precedentemente detto che l'integrazione la prevedevamo di svolgere in funzione degli angoli d'incidenza. Ricordando che [13]:

$$P_n^m[\cos(\pi - \alpha)] = (-1)^{n-m} P_n^m(\cos \alpha)$$

$$\alpha_r = \pi - \alpha_i$$

$$\beta_r = \beta_i$$

si ha:

$$\begin{aligned}
\pi_q^p(\cos \alpha_r) &= \frac{P_q^p(\cos \alpha_r)}{\sin \alpha_r} = \frac{P_q^p[\cos(\pi - \alpha_i)]}{\sin(\pi - \alpha_i)} = (-1)^{q-p} \pi_q^p(\cos \alpha_i) \\
\tau_q^p(\cos \alpha_r) &= \frac{n}{\tan \alpha_r} P_q^p(\cos \alpha_r) - \frac{q-p}{\sin \alpha_r} P_{q-1}^p(\cos \alpha_r) = \\
&= \frac{n}{\tan(\pi - \alpha_i)} P_q^p[\cos(\pi - \alpha_i)] - \frac{q-p}{\sin(\pi - \alpha_i)} P_{q-1}^p[\cos(\pi - \alpha_i)] = \\
&= -(-1)^{q-p} \frac{n}{\tan \alpha_i} P_q^p(\cos \alpha_i) - (-1)^{q-p-1} \frac{q-p}{\sin \alpha_i} P_{q-1}^p(\cos \alpha_i) = \\
&= (-1)^{q-p+1} \tau_q^p(\cos \alpha_i)
\end{aligned}$$

In definitiva

$$\pi_q^p(\cos \alpha_r) = \pi_q^p[\cos(\pi - \alpha_i)] = (-1)^{q-p} \pi_q^p(\cos \alpha_i) \quad (4.1.43)$$

$$\tau_q^p(\cos \alpha_r) = \tau_q^p[\cos(\pi - \alpha_i)] = (-1)^{q-p+1} \tau_q^p(\cos \alpha_i) \quad (4.1.44)$$

sostituendo le (4.1.43), (4.1.44) nell'equazioni dei coefficienti dello sviluppo (5.1.66-5.1.69), si ha:

$$\begin{aligned}
c_{pq}^{mn}(\alpha_r, \beta_r) &= (-1)^{-q_i q} \frac{2q+1}{q(q+1)} \frac{(q-p)!}{(q+p)!} e^{i(m-p)\beta_i} \sin \alpha_i \\
&\left[R_H(\alpha_i) \pi_n^m(\cos \alpha_i) \pi_q^p(\cos \alpha_i) - R_E(\alpha_i) \tau_n^m(\cos \alpha_i) \tau_q^p(\cos \alpha_i) \right] \quad (4.1.45)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{pq}^{mn}(\alpha_r, \beta_r) &= (-1)^{-q_i q} \frac{2q+1}{q(q+1)} \frac{(q-p)!}{(q+p)!} e^{i(m-p)\beta_i} \sin \alpha_i \\
&\left[-R_H(\alpha_i) \pi_n^m(\cos \alpha_i) \tau_q^p(\cos \alpha_i) + R_E(\alpha_i) \tau_n^m(\cos \alpha_i) \pi_q^p(\cos \alpha_i) \right] \quad (4.1.46)
\end{aligned}$$

$$g_{pq}^{mn}(\alpha_r, \beta_r) = (-1)^{-q} i^q \frac{2q+1}{q(q+1)} \frac{(q-p)!}{(q+p)!} e^{i(m-p)\beta_i} \sin \alpha_i$$

$$\left[R_H(\alpha_i) \tau_n^m(\cos \alpha_i) \pi_q^p(\cos \alpha_i) - R_E(\alpha_i) \pi_n^m(\cos \alpha_i) \tau_q^p(\cos \alpha_i) \right] \quad (4.1.47)$$

$$h_{pq}^{mn}(\alpha_r, \beta_r) = (-1)^{-q} i^q \frac{2q+1}{q(q+1)} \frac{(q-p)!}{(q+p)!} e^{i(m-p)\beta_i} \sin \alpha_i$$

$$\left[-R_H(\alpha_i) \tau_n^m(\cos \alpha_i) \tau_q^p(\cos \alpha_i) + R_E(\alpha_i) \pi_n^m(\cos \alpha_i) \pi_q^p(\cos \alpha_i) \right] \quad (4.1.48)$$

Dunque l'onda diffratta-riflessa potrà essere espressa in armoniche sferiche nella seguente forma:

$$\mathbf{E}_{sr}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{i^{-n}}{2\pi} \left\{ e_{mn} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=-q}^q [c_{pq}^{mn} \mathbf{M}_{pq}^{(1)}(\mathbf{r}) + d_{pq}^{mn} \mathbf{N}_{pq}^{(1)}(\mathbf{r})] d\alpha d\beta + \right.$$

$$\left. + f_{mn} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=-q}^q [g_{pq}^{mn} \mathbf{M}_{pq}^{(1)}(\mathbf{r}) + h_{pq}^{mn} \mathbf{N}_{pq}^{(1)}(\mathbf{r})] d\alpha d\beta \right\} \quad (4.1.49)$$

Ora, si porti la sommatoria su p e q fuori dal segno di integrale e dalla sommatoria su m e n e si portino fuori dagli integrali anche le funzioni \mathbf{M}_{pq} e \mathbf{N}_{pq} , ottenendo:

$$\mathbf{E}_{sr}(\mathbf{r}) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=-q}^q \left[\mathbf{M}_{pq}^{(1)}(\mathbf{r}) \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n (e_{mn} C_{pq}^{mn} + f_{mn} G_{pq}^{mn}) + \right.$$

$$\left. + \mathbf{N}_{pq}^{(1)}(\mathbf{r}) \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n (e_{mn} D_{pq}^{mn} + f_{mn} H_{pq}^{mn}) \right] \quad (4.1.50)$$

dove si sono definiti i seguenti coefficienti:

$$C_{pq}^{mn} = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} c_{pq}^{mn}(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \quad (4.1.51)$$

$$D_{pq}^{mn} = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} d_{pq}^{mn}(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \quad (4.1.52)$$

$$G_{pq}^{mn} = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} g_{pq}^{mn}(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \quad (4.1.53)$$

$$H_{pq}^{mn} = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} h_{pq}^{mn}(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \quad (4.1.54)$$

Ora integrando per β_i e ponendo

$$k_{pq} = (-1)^{-q} i^q \frac{2q+1}{q(q+1)} \frac{(q-p)!}{(q+p)!}$$

si ottiene

$$C_{pq}^{mn} = i^{-n} \delta_{mp} k_{pq} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} \sin \alpha_i \left[R_H(\alpha_i) \pi_n^m(\cos \alpha_i) \pi_q^p(\cos \alpha_i) + \right. \\ \left. - R_E(\alpha_i) \tau_n^m(\cos \alpha_i) \tau_q^p(\cos \alpha_i) \right] d\alpha_i \quad (4.1.55)$$

$$D_{pq}^{mn} = i^{-n} \delta_{mp} k_{pq} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} \sin \alpha_i \left[- R_H(\alpha_i) \pi_n^m(\cos \alpha_i) \tau_q^p(\cos \alpha_i) + \right. \\ \left. R_E(\alpha_i) \tau_n^m(\cos \alpha_i) \pi_q^p(\cos \alpha_i) \right] d\alpha_i \quad (4.1.56)$$

$$G_{pq}^{mn} = i^{-n} \delta_{mp} k_{pq} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} \sin \alpha_i \left[R_H(\alpha_i) \tau_n^m(\cos \alpha_i) \pi_q^p(\cos \alpha_i) + \right. \\ \left. - R_E(\alpha_i) \pi_n^m(\cos \alpha_i) \tau_q^p(\cos \alpha_i) \right] d\alpha_i \quad (4.1.57)$$

$$H_{pq}^{mn} = i^{-n} \delta_{mp} k_{pq} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} \sin \alpha_i \left[- R_H(\alpha_i) \tau_n^m(\cos \alpha_i) \tau_q^p(\cos \alpha_i) + \right. \\ \left. R_E(\alpha_i) \pi_n^m(\cos \alpha_i) \pi_q^p(\cos \alpha_i) \right] d\alpha_i \quad (4.1.58)$$

L'espressione (5.1.74) rappresenta l'onda diffratta-riflessa sviluppata in armoniche

sferiche. Grazie a tale espressione possiamo ora scrivere le condizioni al contorno in una forma particolarmente semplice. Andiamo ad inserire le espressioni (5.1.50), (5.1.51) e (5.1.74) in (6.9.5):

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=-q}^q [a_{pq} \mathbf{M}_{pq}^{(1)}(\mathbf{r}) + b_{pq} \mathbf{N}_{pq}^{(1)}(\mathbf{r})] + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n [e_{mn} \mathbf{M}_{mn}^{(3)}(\mathbf{r}) + f_{mn} \mathbf{N}_{mn}^{(3)}(\mathbf{r})] + \right. \\ & + \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=-q}^q \left[\mathbf{M}_{pq}^{(1)}(\mathbf{r}) \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n (e_{mn} C_{pq}^{mn} + f_{mn} G_{pq}^{mn}) + \right. \\ & \left. \left. + \mathbf{N}_{pq}^{(1)}(\mathbf{r}) \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n (e_{mn} D_{pq}^{mn} + f_{mn} H_{pq}^{mn}) \right] \right\} \times \mathbf{r}_0 = 0 \quad \text{per } r = a \quad (4.1.59) \end{aligned}$$

si raccolgano ora i termini in $\mathbf{M}_{pq}^{(1)}$ e $\mathbf{N}_{pq}^{(1)}$:

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n [e_{mn} \mathbf{M}_{mn}^{(3)}(\mathbf{r}) + f_{mn} \mathbf{N}_{mn}^{(3)}(\mathbf{r})] + \right. \\ & + \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=-q}^q \left[\mathbf{M}_{pq}^{(1)}(\mathbf{r}) \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n (a_{pq} + e_{mn} C_{pq}^{mn} + f_{mn} G_{pq}^{mn}) + \right. \\ & \left. \left. + \mathbf{N}_{pq}^{(1)}(\mathbf{r}) \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n (b_{pq} + e_{mn} D_{pq}^{mn} + f_{mn} H_{pq}^{mn}) \right] \right\} \times \mathbf{r}_0 = 0 \quad \text{per } r = a \quad (4.1.60) \end{aligned}$$

andiamo ora ad esplicitare la dipendenza radiale ed angolare nelle funzioni $\mathbf{M}_{pq}^{(1)}$ e $\mathbf{N}_{pq}^{(1)}$ e a distribuire il prodotto vettoriale:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n \left[e_{mn} h_n^{(1)}(kr) \mathbf{m}_{mn} \times \mathbf{r}_0 + f_{mn} \frac{1}{r} \frac{\partial (r h_n^{(1)}(kr))}{\partial r} \mathbf{n}_{mn} \times \mathbf{r}_0 \right] + \\ & + \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=-q}^q \left[j_q(kr) \mathbf{m}_{pq} \times \mathbf{r}_0 \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n (a_{pq} + e_{mn} C_{pq}^{mn} + f_{mn} G_{pq}^{mn}) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial (r j_q(kr))}{\partial r} \mathbf{n}_{pq} \times \mathbf{r}_0 \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n (b_{pq} + e_{mn} D_{pq}^{mn} + f_{mn} H_{pq}^{mn}) \right] = 0 \quad \text{per } r = a \quad (4.1.61) \end{aligned}$$

moltiplichiamo vettorialmente a sinistra ambo i membri per \mathbf{r}_0 , ricordando che sia \mathbf{m}_{mn} che \mathbf{n}_{mn} hanno componenti solo lungo $\boldsymbol{\vartheta}_0$ e $\boldsymbol{\varphi}_0$ e notando che:

$$\mathbf{r}_0 \times (A_\vartheta \boldsymbol{\vartheta}_0 + A_\varphi \boldsymbol{\varphi}_0) \times \mathbf{r}_0 = (A_\vartheta \boldsymbol{\vartheta}_0 + A_\varphi \boldsymbol{\varphi}_0) \quad (4.1.62)$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n \left[e_{mn} h_n^{(1)}(ka) \mathbf{m}_{mn} + f_{mn} \frac{1}{a} \frac{\partial (r h_n^{(1)}(kr))}{\partial r} \Big|_{r=a} \mathbf{n}_{mn} \right] + \\ & + \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=-q}^q \left[j_q(ka) \mathbf{m}_{pq} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n (a_{pq} + e_{mn} C_{pq}^{mn} + f_{mn} G_{pq}^{mn}) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{a} \frac{\partial (r j_q(kr))}{\partial r} \Big|_{r=a} \mathbf{n}_{pq} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n (b_{pq} + e_{mn} D_{pq}^{mn} + f_{mn} H_{pq}^{mn}) \right] = 0 \quad (4.1.63) \end{aligned}$$

A questo punto ogni termine delle sommatorie è moltiplicato o per \mathbf{m}_{mn} o per \mathbf{n}_{mn} , quindi si possono usare le condizioni di ortogonalità sviluppate nel capitolo 2 per eliminare due delle quattro sommatorie. Prima però raccogliamo secondo i coefficienti incogniti e_{mn} e f_{mn} :

$$\begin{aligned} & \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=-q}^q \left[a_{pq} j_q(ka) \mathbf{m}_{pq} + b_{pq} \frac{1}{a} \frac{\partial (r j_q(kr))}{\partial r} \Big|_{r=a} \mathbf{n}_{pq} \right] + \\ & + \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=-q}^q \left[h_q^{(1)}(ka) \mathbf{m}_{pq} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n (e_{pq} + e_{mn} I_q(ka) C_{pq}^{mn} + f_{mn} I_q(ka) G_{pq}^{mn}) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{a} \frac{\partial (r h_q^{(1)}(kr))}{\partial r} \Big|_{r=a} \mathbf{n}_{pq} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n (f_{pq} + e_{mn} L_q(ka) D_{pq}^{mn} + f_{mn} L_q(ka) H_{pq}^{mn}) \right] = 0 \quad (4.1.64) \end{aligned}$$

dove si sono introdotte le quantità:

$$I_n(z) = \frac{j_n(z)}{h_n^{(1)}(z)} \quad (4.1.65)$$

$$L_n(z) = \frac{\partial [z j_n(z)]}{\partial z} \left\{ \frac{\partial [z h_n^{(1)}(z)]}{\partial z} \right\}^{-1} \quad (4.1.66)$$

Si possono ora moltiplicare scalarmente per $\mathbf{m}_{st}^* \sin \vartheta$ ambo i membri dell'equazione (4.1.64) ed integrare rispetto a ϑ e φ ; utilizzando le relazioni (1.4.18), (1.4.21) e (1.4.22), si ottiene:

$$\begin{aligned} & \gamma_{st} a_{st} j_t(ka) + \\ & + \gamma_{st} h_t^{(1)}(ka) \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n [e_{mn} \delta_{ms} \delta_{nt} + e_{mn} I_t(ka) C_{st}^{mn} + f_{mn} I_t(ka) G_{st}^{mn}] = 0 \end{aligned} \quad (4.1.67)$$

dove:

$$\gamma_{mn} = 4\pi \frac{n(n+1)(n+m)!}{2n+1(n-m)!} \quad (4.1.68)$$

semplificando γ_{st} e dividendo ambo i membri per $h_t^{(1)}(ka)$ in (4.1.67), si ottiene:

$$a_{st} I_t(ka) + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n [e_{mn} \delta_{ms} \delta_{nt} + e_{mn} I_t(ka) C_{st}^{mn} + f_{mn} I_t(ka) G_{st}^{mn}] = 0 \quad (4.1.69)$$

riordinando si può arrivare a scrivere:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n (e_{mn} \Gamma_{st}^{mn} + f_{mn} \Delta_{st}^{mn}) = Z_{st}} \quad \text{per: } \begin{cases} t = 1, \dots, +\infty \\ s = -t, \dots, t \end{cases}$$

con:

$$\Gamma_{st}^{mn} = \delta_{ms}\delta_{nt} + I_t(ka)C_{st}^{mn} \quad (4.1.70)$$

$$\Delta_{st}^{mn} = I_t(ka)G_{st}^{mn} \quad (4.1.71)$$

$$Z_{st} = a_{st}I_t(ka) \quad (4.1.72)$$

Analogamente, moltiplicando scalarmente per $\mathbf{n}_{st}^* \sin \vartheta$ ambo i membri della (4.1.64) ed integrando su ϑ e φ , si può ottenere il seguente sistema:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n (e_{mn}\Theta_{st}^{mn} + f_{mn}K_{st}^{mn}) = \Lambda_{st}} \quad \text{per: } \begin{cases} t = 1, \dots + \infty \\ s = -t, \dots t \end{cases}$$

con:

$$\Theta_{st}^{mn} = L_t(ka)D_{st}^{mn} \quad (4.1.73)$$

$$K_{st}^{mn} = \delta_{ms}\delta_{nt} + L_t(ka)H_{st}^{mn} \quad (4.1.74)$$

$$\Lambda_{st} = b_{st}L_t(ka) \quad (4.1.75)$$

La soluzione di questi sistemi lineari di dimensione infinita consente la determinazione dei coefficienti incogniti e_{mn} e f_{mn} . Tali sistemi possono essere uniti e scritti in una forma più compatta. Ricordando il metodo di indicizzazione presentato nel capitolo 1 possiamo infatti scrivere:

$$j = n(n+1) + m \quad (4.1.76)$$

$$i = t(t+1) + s \quad (4.1.77)$$

quindi i due sistemi possono essere riscritti come segue:

$$\sum_{j=1}^{+\infty} (e_j\Gamma_{ij} + f_j\Delta_{ij}) = Z_i \quad \text{per } i = 1, \dots + \infty \quad (4.1.78)$$

$$\sum_{j=1}^{+\infty} (e_j\Theta_{ij} + f_jK_{ij}) = \Lambda_i \quad \text{per } i = 1, \dots + \infty \quad (4.1.79)$$

La soluzione di questi sistemi lineari richiederà, nella pratica, di arrestare le sommatorie ad un certo indice N , nel seguito verrà presentato un metodo di troncamento per il caso di sfera sepolta. Una volta che si ha a che fare con sistemi di dimensione finita è possibile trovare un'espressione ulteriormente semplificata per essi. Infatti, definendo i seguenti vettori colonna di lunghezza $2N$:

$$\text{vettore delle incognite } \mathbf{c} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_N \\ f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} \quad (4.1.80)$$

$$\text{vettore dei termini noti } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_N \\ \Lambda_1 \\ \vdots \\ \Lambda_N \end{pmatrix} \quad (4.1.81)$$

e la seguente matrice dei coefficienti di dimensione $2N \times 2N$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \cdots & \Gamma_{1N} & \Delta_{11} & \cdots & \Delta_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{N1} & \cdots & \Gamma_{NN} & \Delta_{N1} & \cdots & \Delta_{NN} \\ \Theta_{11} & \cdots & \Theta_{1N} & K_{11} & \cdots & K_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Theta_{N1} & \cdots & \Theta_{NN} & K_{N1} & \cdots & K_{NN} \end{pmatrix} \quad (4.1.82)$$

si potranno scrivere i due sistemi lineari sotto forma di un'unica uguaglianza matriciale come segue:

$$\mathbf{Ac} = \mathbf{b} \quad (4.1.83)$$

In questo formalismo, la determinazione del vettore \mathbf{c} risolve l'interno problema elettromagnetico da noi posto.

Fino a questo punto abbiamo considerato il caso più semplice, ovvero di sfera PEC. Se considerassimo una sfera dielettrica il procedimento non subirebbe grandi modifiche nel suo complesso, se non nel fatto delle imposizioni al contorno, dove in tal caso va considerato anche il campo interno alla sfera stessa, come già visto nel capitolo 3. Quindi le condizioni al contorno si modificano in:

$$(\mathbf{E}_t + \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_{sr} - \mathbf{E}_{sf}) \times \mathbf{r}_0 = 0 \quad \text{per } r = a \quad (4.1.84)$$

$$[\nabla \times (\mathbf{E}_t + \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_{sr} - \mathbf{E}_{sf})] \times \mathbf{r}_0 = 0 \quad \text{per } r = a \quad (4.1.85)$$

avendo indicato con

$$\mathbf{E}_{sf}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n [v_{mn} \mathbf{M}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r}) + w_{mn} \mathbf{N}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r})] \quad (4.1.86)$$

il campo elettrico all'interno della sfera dielettrica. Sostituendo all'interno delle condizioni al contorno ed utilizzando un altro formalismo, ovvero sfruttando le proprietà accennate nei capitoli precedenti, e che riporto per semplicità

$$\mathbf{m}_{mn}(\vartheta, \varphi) \times \mathbf{r}_0 = -\mathbf{n}_{mn}(\vartheta, \varphi) \quad (4.1.87)$$

$$\mathbf{n}_{mn}(\vartheta, \varphi) \times \mathbf{r}_0 = \mathbf{m}_{mn}(\vartheta, \varphi) \quad (4.1.88)$$

$$\nabla \times [\mathbf{M}_{mn}^{(1,3)}(\vartheta, \varphi)] \times \mathbf{r}_0 = k \mathbf{m}_{mn}(\vartheta, \varphi) \dot{z}_n(kr) \quad (4.1.89)$$

$$\nabla \times [\mathbf{N}_{mn}^{(1,3)}(\vartheta, \varphi)] \times \mathbf{r}_0 = -k \mathbf{n}_{mn}(\vartheta, \varphi) z_n(kr) \quad (4.1.90)$$

si ottiene il seguente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n e_{mn} \left[\delta_{mp} \delta_{nq} \frac{h_n^{(1)}(k_2 a)}{j_n(k_2 a)} + C_{mn}^{pq} \right] + f_{mn} G_{mn}^{pq} - v_{mn} \delta_{mp} \delta_{nq} \frac{j_n(k_3 a)}{j_p(k_2 a)} = -a_{pq} \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n e_{mn} \left[\delta_{mp} \delta_{nq} \frac{\dot{h}_n^{(1)}(k_2 a)}{\dot{j}_n(k_2 a)} + C_{mn}^{pq} \right] + f_{mn} G_{mn}^{pq} - v_{mn} \delta_{mp} \delta_{nq} \frac{j_n(k_3 a)}{\dot{j}_p(k_2 a)} = -a_{pq} \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n e_{mn} D_{mn}^{pq} + f_{mn} \left[\delta_{mp} \delta_{nq} \frac{\dot{h}_n^{(1)}(k_2 a)}{\dot{j}_n(k_2 a)} + H_{mn}^{pq} \right] - w_{mn} \delta_{mp} \delta_{nq} \frac{j_n(k_3 a)}{\dot{j}_p(k_2 a)} = -b_{pq} \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n e_{mn} D_{mn}^{pq} + f_{mn} \left[\delta_{mp} \delta_{nq} \frac{h_n^{(1)}(k_2 a)}{j_n(k_2 a)} + H_{mn}^{pq} \right] - w_{mn} \delta_{mp} \delta_{nq} \frac{j_n(k_3 a)}{j_p(k_2 a)} = -b_{pq} \end{array} \right. \quad (4.1.91)$$

che in forma matriciale può essere espresso, come:

$$\begin{bmatrix} e_{mn} \\ f_{mn} \\ v_{mn} \\ w_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{mp} \delta_{nq} \frac{h_n^{(1)}(k_2 a)}{j_n(k_2 a)} & G_{mn}^{pq} & \delta_{mp} \delta_{nq} \frac{j_n(k_3 a)}{j_p(k_2 a)} & 0 \\ \delta_{mp} \delta_{nq} \frac{\dot{h}_n^{(1)}(k_2 a)}{\dot{j}_n(k_2 a)} & G_{mn}^{pq} & \delta_{mp} \delta_{nq} \frac{j_n(k_3 a)}{\dot{j}_p(k_2 a)} & 0 \\ D_{mn}^{pq} & \delta_{mp} \delta_{nq} \frac{\dot{h}_n^{(1)}(k_2 a)}{\dot{j}_n(k_2 a)} & 0 & \delta_{mp} \delta_{nq} \frac{j_n(k_3 a)}{j_p(k_2 a)} \\ D_{mn}^{pq} & \delta_{mp} \delta_{nq} \frac{h_n^{(1)}(k_2 a)}{j_n(k_2 a)} & 0 & \delta_{mp} \delta_{nq} \frac{j_n(k_3 a)}{\dot{j}_p(k_2 a)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -a_{pq} \\ -a_{pq} \\ -b_{pq} \\ -b_{pq} \end{bmatrix} \quad (4.1.92)$$

posso anche esprimere il caso di sfera PEC sepolta con quest'ultimo formalismo matriciale, ottenendo:

$$\begin{bmatrix} e_{mn} \\ f_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{mp} \delta_{nq} \frac{h_n^{(1)}(k_2 a)}{j_n(k_2 a)} & G_{mn}^{pq} \\ D_{mn}^{pq} & \delta_{mp} \delta_{nq} \frac{\dot{h}_n^{(1)}(k_2 a)}{\dot{j}_n(k_2 a)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -a_{pq} \\ -b_{pq} \end{bmatrix} \quad (4.1.93)$$

4.1.1 Implementazione numerica

La risoluzione del sistema dei coefficienti delle incognite ha presentato numerosi ostacoli. Prima di tutto si è dovuto implementare in modo numerico la risoluzione degli integrali (4.1.55)-(4.1.58). Ricordiamo che questi integrali di funzioni complesse vanno valutate lungo un percorso di integrazione complesso della variabile α .

Il generico integrale che vogliamo trattare può essere riscritto come:

$$I(q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} f(\cos \alpha) e^{i2q \cos \alpha} \sin \alpha d\alpha \quad (4.1.94)$$

dove $f(\cos \alpha)$ è una funzione che varia lentamente rispetto alla funzione esponenziale complessa. Un efficiente approccio è quello di scegliere due percorsi di integrazione, uno sull'asse reale e l'altro su una linea parallela all'asse immaginaria del piano complesso:

$$I(q) = I_{\mathbb{R}} + I_{\mathbb{I}} \quad (4.1.95)$$

dove:

$$I_{\mathbb{R}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos \alpha) \sin \alpha e^{i2q \cos \alpha} d\alpha \quad (4.1.96)$$

$$I_{\mathbb{I}} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-i\infty} f(\cos \alpha) \sin \alpha e^{i2q \cos \alpha} d\alpha \quad (4.1.97)$$

Si nota una volta suddiviso l'integrale che (4.1.96) rappresenta la parte omogenea dello spettro di onde piane, mentre l'integrale (4.1.97) rappresenta il contributo evanescente delle onde. Il primo integrale, che a questo punto è su percorso puramente reale, può essere determinato attraverso il metodo di quadratura di Gauss-Legendre [40]. Per quanto riguarda l'altro integrale (4.1.97), si vede facilmente che effettuando un cambio di variabile $\cos \alpha = iu$, esso diventa un integrale su percorso reale:

$$I_{\mathbb{I}} = i^{-1} \int_0^{\infty} f(iu) e^{-2qu} du. \quad (4.1.98)$$

La funzione argomento decresce rapidamente a zero al variare della variabile d'integrazione pertanto anche questo secondo integrale una volta effettuato il cambiamento di variabile può essere risolto numericamente attraverso la formula di quadratura di Gauss-Laguerre. Una volta che tutti gli integrali (4.1.55) complessi sono stati determinati, la soluzione del sistema (4.1.92) e (4.1.93) può essere ottenuta con un ordinario strumento di risoluzione dei sistemi lineari, come ad esempio il metodo

di decomposizione LU [41] nota anche come decomposizione di Doolittle, essa consiste in una fattorizzazione della matrice in una matrice triangolare inferiore L, una matrice triangolare superiore U e una matrice di permutazione P.

Come detto in precedenza, per la risoluzione del sistema si dovrà decidere il valore di N ovvero l'ordine di troncamento dello sviluppo delle onde, per pervenire ad un sistema di ordine finito. Un possibile criterio di troncamento proposto in letteratura relativamente al caso di una sfera nello spazio libero è quello proposto da Wiscombe [4, 42]: secondo il seguente criterio la serie (5.1.51) può essere troncata dopo $n = N$ termini, con:

$$N = k_2 a + 4(k_2 a)^{1/3} + 2 \quad (4.1.99)$$

Comunque, nel caso di una sfera sepolta, il numero di armoniche che dovrebbe essere preso in considerazione, per ottenere uno scarto analogo al criterio di Wiscombe, dipende dalla direzione del campo di incidenza, infatti utilizzando quest'ultimo criterio nel caso di incidenza obliqua, fornisce soluzioni con errori sempre maggiori all'aumentare dell'angolo di incidenza. Quindi per prendere in considerazione la dipendenza dell'angolo di incidenza, si è proposto di modificare il criterio di troncamento di Wiscombe, sostituendo al parametro adimensionale $k_2 a$ la funzione $k_2 a(\sin \vartheta_i + 1)$ nella (4.1.99).

In Fig. 4.2, si riporta l'andamento del coefficiente e_{mn} in funzione dell'angolo di incidenza ϑ_i e dell'indice ℓ , dove $\ell = n(n+1) + m$ [12]. In particolare come esempio è stato preso in considerazione una sfera di aria di raggio 15 cm immerso nel vetro, $\varepsilon_2 = 2.25$, ad una profondità di 2 volte il raggio della sfera, come eccitazione esterna è stata presa in considerazione un campo elettrico polarizzato circolarmente con $E_{\vartheta_i} = E_{\varphi_i} = 1$ V/m ed incidente in modo obliquo rispetto all'interfaccia di separazione tra vetro ed aria, ma con $\varphi_i = 0$, alla frequenza di 300 MHz. Nella figura è stato messo in evidenza tramite la linea retta tratteggiata il valore di ℓ determinato con il criterio di Wiscombe, mentre la curva continua rappresenta il metodo proposto che varia al variare dell'angolo ϑ_i , notando che riesce a prendere in considerazione termini che con il vecchio metodo sarebbero stati trascurati.

Per meglio apprezzare l'andamento del coefficiente viene anche mostrata la sua

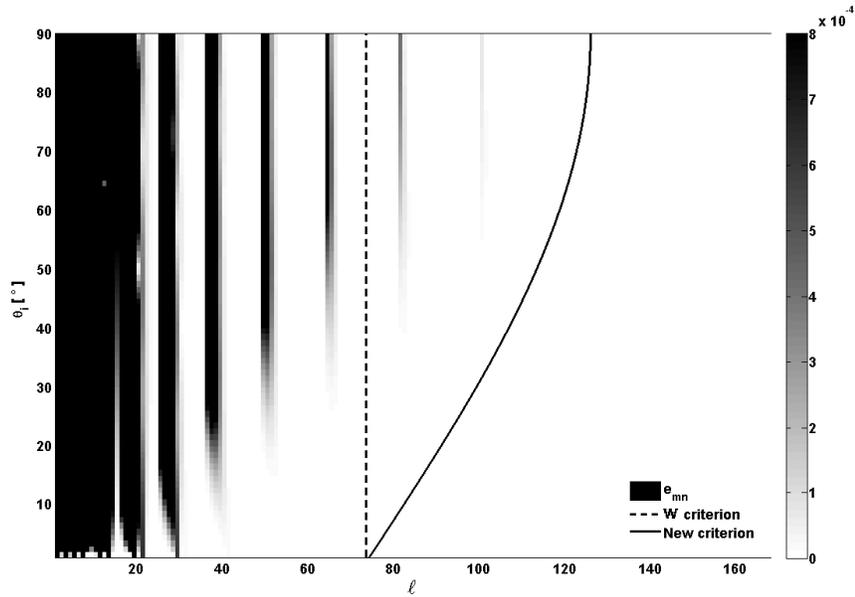


Figura 4.2: Andamento del coefficiente e_{mn} in funzione dell'angolo di incidenza ϑ_i e dell'indice ℓ , nel caso di una sfera di aria immersa nel vetro ad una profondità di 2 volte il raggio della sfera.

ampiezza in scala logaritmica sempre in funzione dell'angolo di incidenza ϑ_i , e del parametro ℓ , (Fig. 4.3). Si nota da tale figura che tramite il criterio di Wiscombe si sarebbe dovuto scegliere un $N = 8$ ovvero $\ell = 72$, mentre dal nostro criterio notiamo che per un angolo di $\theta_i = \pi/4$ il giusto valore sarebbe stato $N = 10$ e per l'angolo limite di $\theta_i = \pi/2$ addirittura $N = 11$

Lo stesso identico discorso poteva essere fatto per l'altro coefficiente dello sviluppo del campo scatterato ovvero per f_{mn} , inoltre si nota che non è mai stato accennato nulla riguardo l'angolo equatoriale φ_i , infatti sono stati studiate diverse configurazioni di sfere sepolte al variare di quest'angolo, senza però apprezzare una variazione significativa del risultato, si è potuto quindi concludere che il criterio di troncamento risulta indipendente dall'angolo φ o per lo meno che tale dipendenza, ai nostri fini, può essere tranquillamente trascurata.

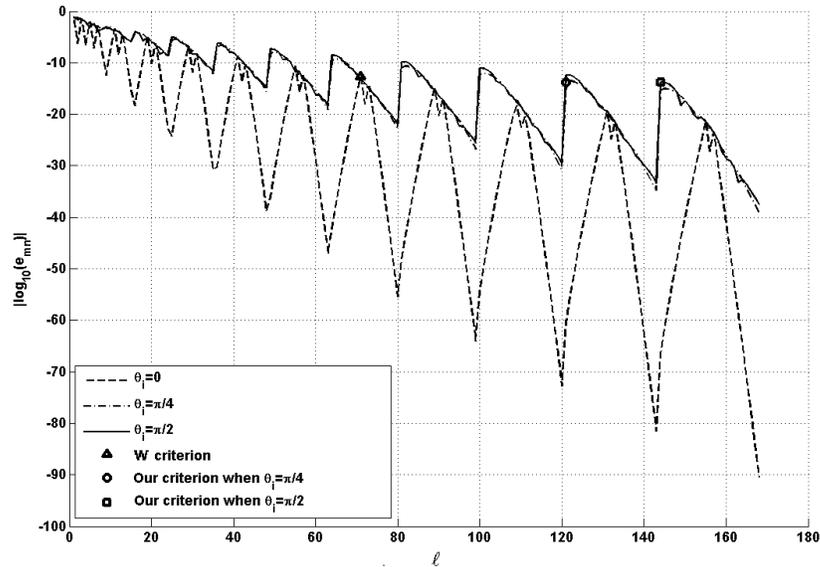


Figura 4.3: Ampiezza del coefficiente e_{mn} nello stesso scenario di Fig. 4.2, in funzione dell'indice ℓ e per tre differenti angoli di incidenza: $\vartheta_i = 0$ (linea tratteggiata), $\vartheta_i = \pi/4$ (linea continua) and $\vartheta_i = \pi/2$ (linea tratteggiata e puntinata).

4.1.2 Validazione e risultati numerici

Per validare il metodo proposto, vogliamo comparare i risultati ottenuti implementando il modello su Matlab con i dati presenti in letteratura e con i risultati ottenuti attraverso l'utilizzo del software commerciale Comsol Multiphysics che si basa sul Metodo degli Elementi Finiti (FEM). Per far ciò prendo in considerazione il caso di una sfera PEC di raggio di 15 cm, sepolta nell'argilla ad una profondità di 30 cm. Le caratteristiche del campo incidente e del terreno dove la sfera è sepolta sono mostrate in Fig. 4.4, estrapolate dall'articolo di Vitebskiy et al [44].

Il campo incidente, come mostrato in figura 4.4 è un impulso centrato alla frequenza di 300 MHz [44]. Tale onda è stata ottenuta nel nostro caso come sovrapposizione in un numero finito di onde monocromatiche in funzione della frequenza e di intensità pari a quelle dell'impulso per quella determinata frequenza. L'intensità del campo è stata misurata in un punto appartenente all'interfaccia di separazione

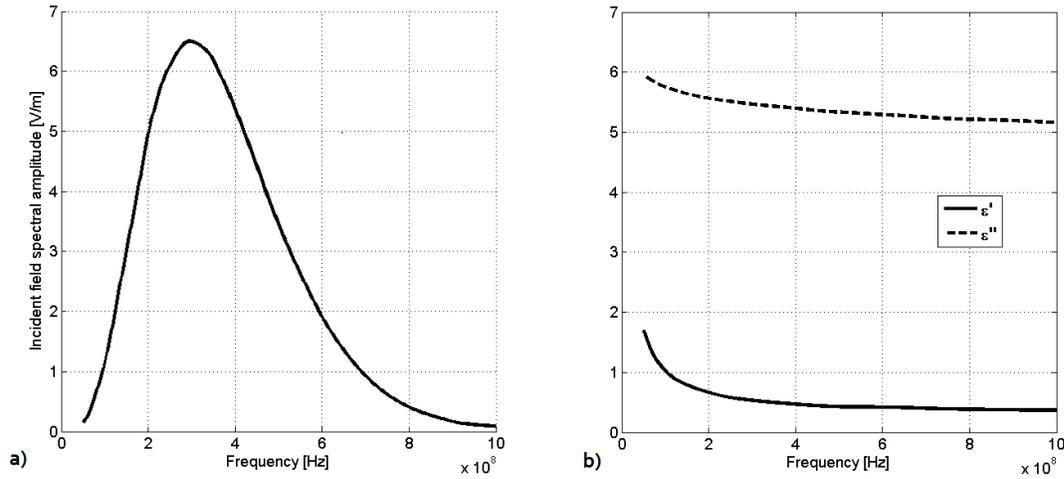


Figura 4.4: Caratteristiche dal campo incidente e della permittività complessa dell'argilla al 10% del contenuto in acqua [43, 44].

aria-argilla direttamente sopra il centro della sfera. La comparazione dei risultati con quelli ottenuti da Comsol e da quelli estrapoli dai lavori [43, 44] sono mostrati in figura 4.5.

In figura 4.6 è riportato l'andamento della componente y della sovrapposizione del campo scatterato e del campo scatterato-riflesso in funzione di x , determinato alla profondità $z = \lambda_0$, nel caso di una sfera di aria immersa nel vetro ($\epsilon_2 = 2.1054$). Il campo incidente si propaga in direzione normale rispetto il piano di separazione aria-vetro, con il campo elettrico polarizzato linearmente e parallelamente lungo l'asse y , in particolare con $E_{\theta i} = 0$ V/m e $E_{\phi i} = 1$ V/m con una lunghezza d'onda pari a $\lambda_0 = 1 \mu m$. Il raggio della sfera risulta essere pari a $a = 200$ nm e seppellito ad una profondità pari a $h = 5a$, il campo è determinato su una linea tra la sfera e l'interfaccia parallela all'asse x a ad una distanza di $3a$ dal centro della sfera. Nella figura sono riportati gli andamenti dei risultati ottenuti sia con il modello implementato su Matlab che i risultati ottenuti da Comsol.

Nell'ultima figura 4.7 si vuole riportare per completezza l'andamento del campo scatterato nel caso di eccitazione di un campo polarizzato ellitticamente, per far ciò

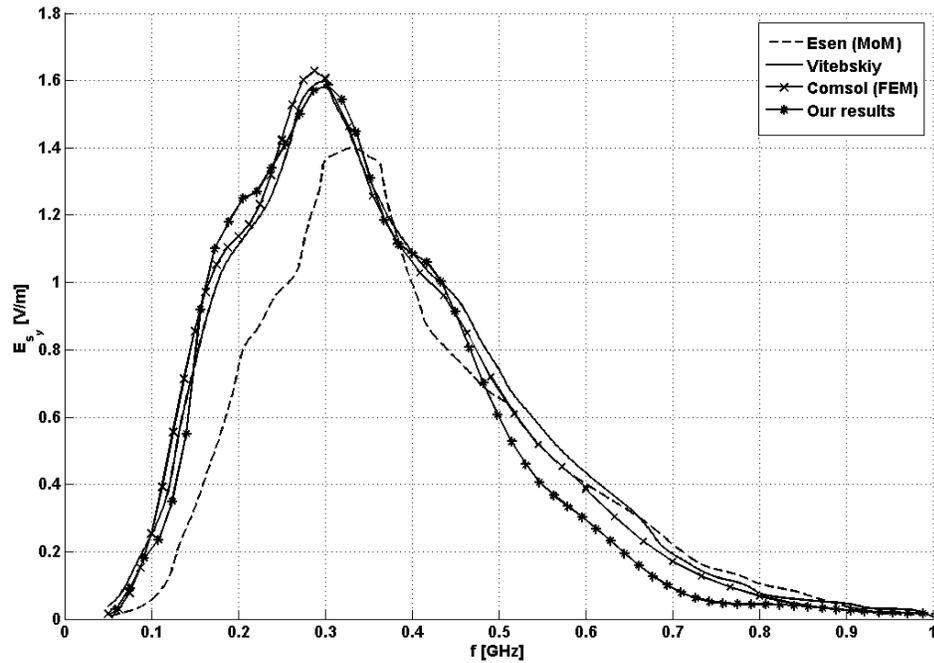


Figura 4.5: Comparazione dei risultati numerici ottenuti dal modello proposto, da un modello costruito su Comsol e dai risultati estrapolati da [43, 44]. Nel caso di una sfera PEC di raggio 15 cm sepolta ad una profondità di 30 cm nell'argilla.

viene considerata una configurazione geometrica del tutto analoga al caso precedente, ma con $E_{\vartheta_i} = 0.5$ V/m e $E_{\varphi_i} = 0.75$ V/m con gli angoli di incidenza pari a: $\vartheta_i = \varphi_i = \pi/8$ ed una sfera di NaCl ($\varepsilon_3 = 2.347$), l'utilizzazione di tale composto è ben noto nella produzione di vetrate, infatti il sale viene aggiunto durante la cottura del vetro per opacizzarlo.

Possiamo notare che tutte le comparazioni mostrano un ottimo accordo tra i risultati implementati e quelli ottenuti dalle simulazioni. Pertanto è stato presentato un nuovo metodo rigoroso che si basa sullo sviluppo in spettro di onde piane.

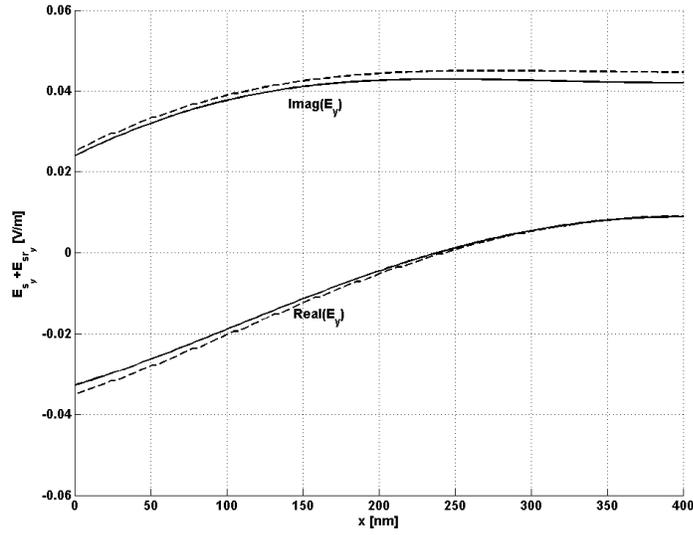


Figura 4.6: Comparazione numerica tra i risultati ottenuti con Matlab (linea continua) con i risultati ottenuti da Comsol (linea tratteggiata).

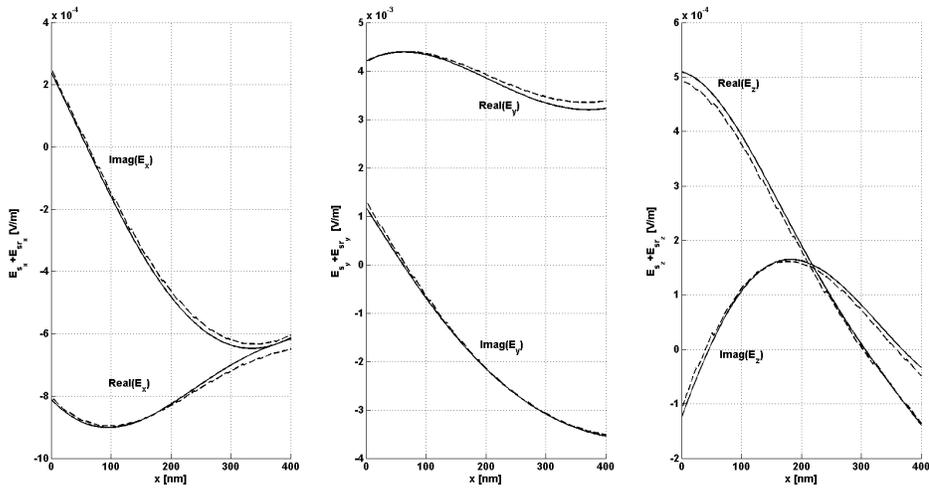


Figura 4.7: Comparazione numerica tra i risultati ottenuti con Matlab (linea continua) con i risultati ottenuti da Comsol (linea tratteggiata). In questo caso lo scatteratore è una sfera di sale ($\epsilon_{NaCl} = 2.347$). Tutti gli altri parametri sono del tutto analoghi al caso precedente Fig. 4.6.

Capitolo 5

Diffrazione da una sfera sepolta in un mezzo stratificato

5.1 Analisi teorica

Nel presente capitolo si vuole studiare il problema della diffrazione di un'onda piana ed uniforme polarizzata ellitticamente da parte di una sfera concentrica sepolta in un mezzo stratificato. Si comincerà descrivendo la natura del problema. Analogamente a quanto visto per i casi precedenti si consideri lo spazio come mezzo lineare, omogeneo, stazionario, isotropo, generalmente dispersivo e dissipativo. Si definiscano le proprietà del mezzo tramite le costanti elettromagnetiche ϵ e $\mu = 1$ e σ . Si consideri un'onda piana ed uniforme polarizzata ellitticamente che si propaghi in una direzione tale da essere concorde con tutti e tre i versori del sistema di coordinate cartesiano ortogonale, ovvero tale che le componenti cartesiane del vettore di propagazione siano tutte positive. Si consideri la presenza di due sfere concentriche il cui nucleo (core) è caratterizzato da un raggio a ed un mantello (shell) di raggio b entrambi centrati nell'origine del sistema di riferimento. Supponiamo quindi che tale onda possa essere scritta come:

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{pol} e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} = (E_{\vartheta i} \boldsymbol{\vartheta}_{0i} + E_{\varphi i} \boldsymbol{\varphi}_{0i}) e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} \quad (5.1.1)$$

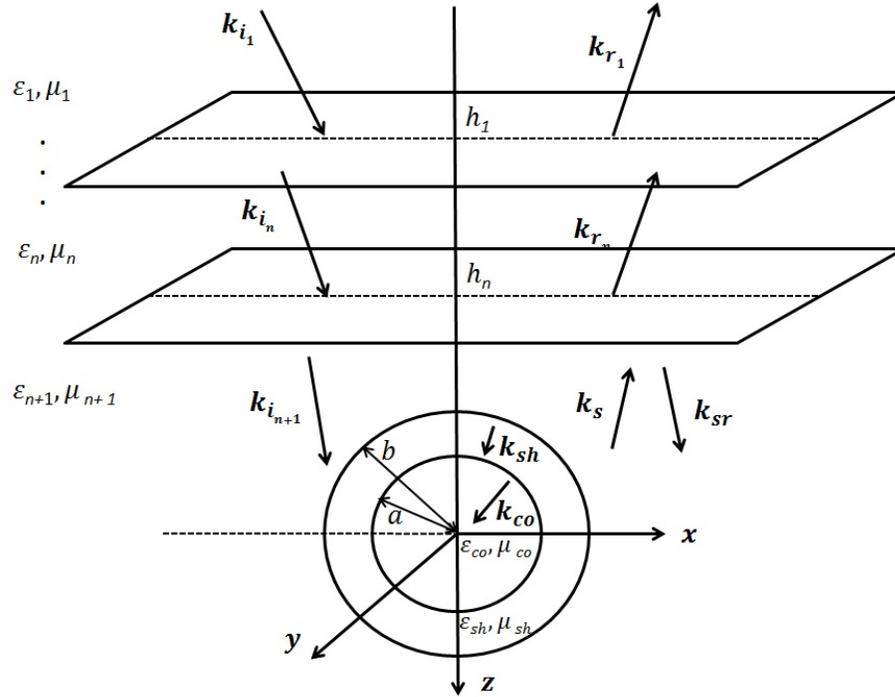


Figura 5.1: Rappresentazione del problema

con:

$$\mathbf{k}_i = k_i (\sin \vartheta_i \cos \varphi_i \mathbf{x}_0 + \sin \vartheta_i \sin \varphi_i \mathbf{y}_0 + \cos \vartheta_i \mathbf{z}_0) \quad (5.1.2)$$

$$\vartheta_{0i} = \cos \vartheta_i \cos \varphi_i \mathbf{x}_0 + \cos \vartheta_i \sin \varphi_i \mathbf{y}_0 - \sin \vartheta_i \mathbf{z}_0 \quad (5.1.3)$$

$$\varphi_{0i} = -\sin \varphi_i \mathbf{x}_0 + \cos \varphi_i \mathbf{y}_0 \quad (5.1.4)$$

La geometria del problema può essere visualizzata in Figura 5.1.

A questo punto prima di passare allo sviluppo dei campi elettrici in gioco in armoniche sferiche vettoriali, si dovrà modellizzare il problema della trasmissione del campo nel mezzo stratificato. Facendo riferimento alla Figura 5.2 i diversi strati sono individuati dall'indice j con $j = 1, 2, \dots, N, N + 1$ essendo N il numero delle interfacce di separazione tra i diversi mezzi, indicheremo quindi con n_j l'indice di

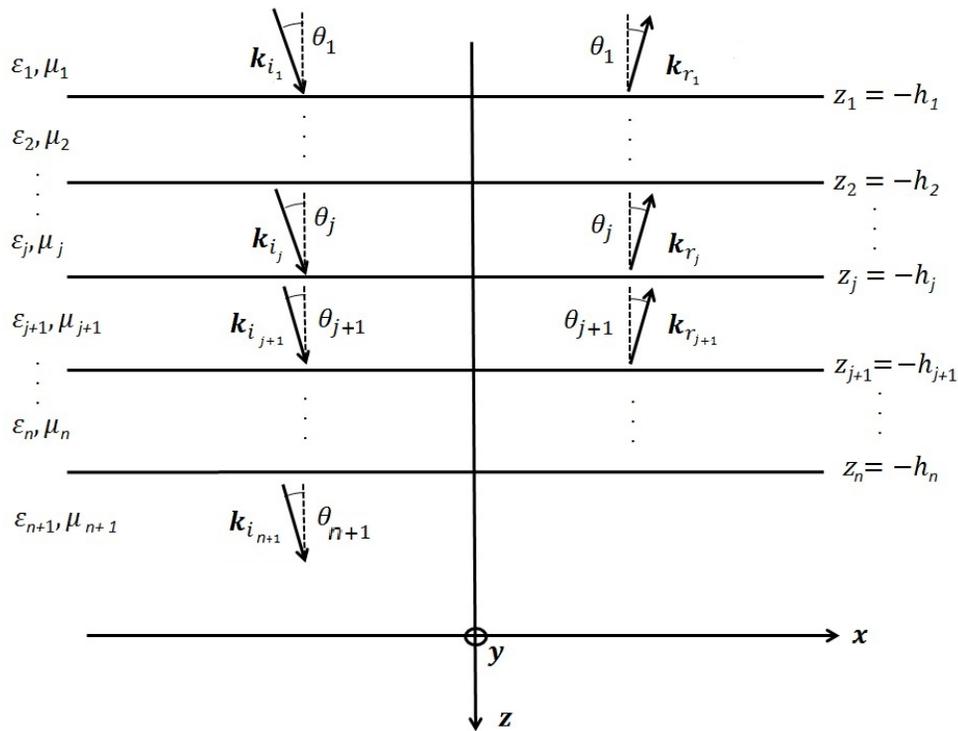


Figura 5.2: Riflessione e trasmissione di un'onda piana da un mezzo stratificato

rifrazione del j -esimo strato e con $z = z_j$ il piano di separazione tra lo strato j e lo strato $j + 1$. Supponiamo inizialmente che il campo elettrico dell'onda piana incidente sia diretto lungo y , quindi la nostra onda sia in polarizzazione E, (successivamente studieremo il caso in cui l'onda sia polarizzata H ovvero con il campo magnetico lungo y), e che incida con un angolo ϑ_j rispetto all'asse negativo delle z , sullo strato j -esimo, e con un angolo $\varphi_j = 0$, considerando il fatto che lo studio di riflessione-trasmissione risulta il medesimo per qualsiasi angolo φ , possiamo in questa prima fase tralasciare lo studio di tale angolo. Il nostro obiettivo è quello di determinare, in via del tutto generale, il coefficiente di riflessione R_E e di

trasmissione T_E , come:

$$R_E = \frac{E_{r_1}^E}{E_{i_1}^E} \quad (5.1.5)$$

$$T_E = \frac{E_{i_{n+1}}^E}{E_{i_1}^E} \quad (5.1.6)$$

Analizzando il fenomeno dal punto di vista delle riflessioni multiple sulle superfici di separazione tra due dielettrici, ci aspettiamo che, a seguito dell'incidenza di un'onda proveniente dallo strato $j - 1$, all'interno dello strato j si formi un'insieme di onde piane, aventi tutte vettore d'onda \mathbf{k}_{i_j} . Tali onde, interferendo, daranno origine ad un'unica onda piana, avente lo stesso vettore d'onda \mathbf{k}_{i_j} ed ampiezza incognita E_{i_j} , che dipenderà dalle ampiezze delle onde interferenti e dalle loro mutue relazioni di fase. Un altro insieme di onde piane, dovute alla riflessione sulla superficie $z = z_j$, darà invece luogo ad un'onda piana con vettore d'onda \mathbf{k}_{r_j} ed ampiezza E_{r_j} . Tale fenomeno si presenta identico in qualsiasi strato (eccetto per l'assenza dell'onda riflessa nell'ultimo strato). Mentre le ampiezze delle onde propagantisi in ciascuno strato nelle due direzioni sono, per ora, incognite, i corrispondenti vettori d'onda sono determinabili a partire dalle leggi di Snell. Infatti, analogamente alla trasmissione da una singola interfaccia dielettrica, le seguenti relazioni devono valere tra i numeri d'onda in due mezzi contigui:

$$k_{ix_j} = k_{rx_j} = k_{ix_{j+1}} = k_{rx_{j+1}} \quad (5.1.7)$$

cioè, le componenti x di tutti i vettori d'onda sono uguali tra loro, che pongo come $k_{x_j} = k_j \sin \vartheta_j$, avendo indicato con k_{ix_j} la componente lungo x del vettore d'onda del campo incidente sulla j -esima interfaccia e con k_j la costante di propagazione relativo al j -esimo strato. Applicata a due onde che si propagano nello stesso mezzo, l'Eq. 5.1.7 stabilisce la legge della riflessione; applicata ad onde che si propagano in mezzi diversi, essa costituisce la legge di Snell per la rifrazione, cioè

$$n_j \sin \vartheta_j = n_{j+1} \sin \vartheta_{j+1} \quad (5.1.8)$$

Per quanto riguarda le componenti z dei vettori d'onda in un medesimo strato

si ha, evidentemente,

$$k_{iz_j} = -k_{rz_j} \quad (5.1.9)$$

che pongo come $k_{z_j} = k_j \cos \vartheta_j$.

A questo punto devo imporre le condizioni di continuità della componente tangenziale all'interfaccia dei campi:

$$(\mathbf{E}_{i_j} + \mathbf{E}_{r_j} - \mathbf{E}_{i_{j+1}} - \mathbf{E}_{r_{j+1}}) \times \mathbf{z}_0 = 0 \quad \text{per } z = z_j \quad (5.1.10)$$

$$(\mathbf{H}_{i_j} + \mathbf{H}_{r_j} - \mathbf{H}_{i_{j+1}} - \mathbf{H}_{r_{j+1}}) \times \mathbf{z}_0 = 0 \quad \text{per } z = z_j \quad (5.1.11)$$

I campi elettrici in gioco intorno al j-esimo strato sono:

$$\mathbf{E}_{i_j} = E_{0i_j} e^{i(k_{x_j} x + k_{z_j} z)} \mathbf{y}_0 \quad (5.1.12)$$

$$\mathbf{E}_{r_j} = E_{0r_j} e^{i(k_{x_j} x - k_{z_j} z)} \mathbf{y}_0 \quad (5.1.13)$$

$$\mathbf{E}_{i_{j+1}} = E_{0i_{j+1}} e^{i(k_{x_{j+1}} x + k_{z_{j+1}} z)} \mathbf{y}_0 \quad (5.1.14)$$

$$\mathbf{E}_{r_{j+1}} = E_{0r_{j+1}} e^{i(k_{x_{j+1}} x - k_{z_{j+1}} z)} \mathbf{y}_0 \quad (5.1.15)$$

Per quanto riguarda i campi magnetici:

$$\mathbf{H}_{i_j} = \frac{E_{0i_j}}{Z_j} (\sin \vartheta_j \mathbf{z}_0 - \cos \vartheta_j \mathbf{x}_0) e^{i(k_{x_j} x + k_{z_j} z)} \quad (5.1.16)$$

$$\mathbf{H}_{r_j} = \frac{E_{0r_j}}{Z_j} (\sin \vartheta_j \mathbf{z}_0 + \cos \vartheta_j \mathbf{x}_0) e^{i(k_{x_j} x - k_{z_j} z)} \quad (5.1.17)$$

$$\mathbf{H}_{i_{j+1}} = \frac{E_{0i_{j+1}}}{Z_{j+1}} (\sin \vartheta_{j+1} \mathbf{z}_0 - \cos \vartheta_{j+1} \mathbf{x}_0) e^{i(k_{x_{j+1}} x + k_{z_{j+1}} z)} \quad (5.1.18)$$

$$\mathbf{H}_{r_{j+1}} = \frac{E_{0r_{j+1}}}{Z_{j+1}} (\sin \vartheta_{j+1} \mathbf{z}_0 + \cos \vartheta_{j+1} \mathbf{x}_0) e^{i(k_{x_{j+1}} x - k_{z_{j+1}} z)} \quad (5.1.19)$$

con $Z_j = \sqrt{\frac{\mu_j}{\epsilon_j}}$, impedenza caratteristica del j-esimo strato. Inserendo le espressioni

di tali campi all'interno delle condizioni al contorno, si ottiene:

$$\begin{cases} E_{0i_j} e^{ik_{z_j} z_j} + E_{0r_{j+1}} e^{-ik_{z_j} z_j} = E_{0i_{j+1}} e^{ik_{z_{j+1}} z_j} + E_{0r_{j+1}} e^{-ik_{z_{j+1}} z_j} \\ E_{0i_j} e^{ik_{z_j} z_j} + E_{0r_{j+1}} e^{-ik_{z_j} z_j} = \frac{Z_j}{Z_{j+1}} (E_{0i_{j+1}} e^{ik_{z_{j+1}} z_j} + E_{0r_{j+1}} e^{-ik_{z_{j+1}} z_j}) \end{cases} \quad (5.1.20)$$

ponendo $\xi_{j,j+1} = \frac{z_j \cos \vartheta_{j+1}}{z_{j+1} \cos \vartheta_j}$, si ottiene:

$$\begin{cases} E_{0i_j} e^{ik_{z_j} z_j} + E_{0r_{j+1}} e^{-ik_{z_j} z_j} = E_{0i_{j+1}} e^{ik_{z_{j+1}} z_j} + E_{0r_{j+1}} e^{-ik_{z_{j+1}} z_j} \\ E_{0i_j} e^{ik_{z_j} z_j} + E_{0r_{j+1}} e^{-ik_{z_j} z_j} = \xi_{j,j+1} (E_{0i_{j+1}} e^{ik_{z_{j+1}} z_j} + E_{0r_{j+1}} e^{-ik_{z_{j+1}} z_j}) \end{cases} \quad (5.1.21)$$

Il nostro obiettivo ora è quello di esprimere i campi presenti nel $j+1$ -esimo strato in funzione lineare dei campi presenti nel j -esimo strato, per far ciò sommo e sottraggo tra loro le due equazioni:

$$\begin{cases} E_{0i_j} = \frac{1}{2} e^{-ik_{z_j} z_j} [(1 + \xi_{j,j+1}) e^{ik_{z_j} z_j} E_{0i_{j+1}} + (1 - \xi_{j,j+1}) e^{-ik_{z_j} z_j} E_{0r_{j+1}}] \\ E_{0r_j} = \frac{1}{2} e^{ik_{z_j} z_j} [(1 - \xi_{j,j+1}) e^{ik_{z_j} z_j} E_{0i_{j+1}} + (1 + \xi_{j,j+1}) e^{-ik_{z_j} z_j} E_{0r_{j+1}}] \end{cases} \quad (5.1.22)$$

Riscrivo tutto in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} E_{0i_j} \\ E_{0r_j} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1 + \xi_{j,j+1}) e^{i(k_{z_{j+1}} - k_{z_j}) z_j} & (1 - \xi_{j,j+1}) e^{-i(k_{z_{j+1}} + k_{z_j}) z_j} \\ (1 - \xi_{j,j+1}) e^{i(k_{z_{j+1}} + k_{z_j}) z_j} & (1 + \xi_{j,j+1}) e^{-i(k_{z_{j+1}} - k_{z_j}) z_j} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_{0i_{j+1}} \\ E_{0r_{j+1}} \end{pmatrix} \quad (5.1.23)$$

invertendo la matrice dei coefficienti

$$\begin{pmatrix} E_{0i_{j+1}} \\ E_{0r_{j+1}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\xi_{j,j+1}} \begin{bmatrix} (1 + \xi_{j,j+1}) e^{-i(k_{z_{j+1}} - k_{z_j}) z_j} & -(1 - \xi_{j,j+1}) e^{-i(k_{z_{j+1}} + k_{z_j}) z_j} \\ -(1 - \xi_{j,j+1}) e^{i(k_{z_{j+1}} + k_{z_j}) z_j} & (1 + \xi_{j,j+1}) e^{i(k_{z_{j+1}} - k_{z_j}) z_j} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_{0i_j} \\ E_{0r_j} \end{pmatrix} \quad (5.1.24)$$

per semplicità espositiva riscrivo il sistema lineare come segue:

$$\begin{pmatrix} E_{0i_{j+1}} \\ E_{0r_{j+1}} \end{pmatrix} = [M_j] \begin{pmatrix} E_{0i_j} \\ E_{0r_j} \end{pmatrix} \quad (5.1.25)$$

Quando si è in presenza di una struttura costituita da N interfacce dielettriche,

sarà possibile descrivere il comportamento della struttura complessiva mediante un'unica matrice $[M]$, ottenuta come il prodotto delle N matrici corrispondenti a ciascuna interfaccia. Infatti, ricordando che nell'ultimo mezzo non c'è alcuna onda riflessa, si ha

$$\begin{pmatrix} E_{0i_{n+1}} \\ 0 \end{pmatrix} = [M_n] \begin{pmatrix} E_{0i_n} \\ E_{0r_n} \end{pmatrix} = [M_n][M_{n-1}] \begin{pmatrix} E_{0i_{n-1}} \\ E_{0r_{n-1}} \end{pmatrix} = [M_n][M_{n-1}] \dots [M_1] \begin{pmatrix} E_{0i_1} \\ E_{0r_1} \end{pmatrix} \quad (5.1.26)$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} E_{0i_{n+1}} \\ 0 \end{pmatrix} = \prod_{\ell=1}^N [M_\ell] \begin{pmatrix} E_{0i_1} \\ E_{0r_1} \end{pmatrix} = [M] \begin{pmatrix} E_{0i_1} \\ E_{0r_1} \end{pmatrix} \quad (5.1.27)$$

Una volta ottenuta la matrice complessiva $[M]$, i coefficienti di riflessione e di trasmissione della struttura possono essere calcolati facilmente, a partire dai valori dei suoi elementi. Infatti, ponendo:

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad (5.1.28)$$

si ha

$$\begin{cases} M_{11}E_{0i_1} + M_{12}E_{0r_1} = E_{0i_{n+1}} \\ M_{21}E_{0i_1} + M_{22}E_{0r_1} = 0 \end{cases}$$

per cui

$$R_E^E = \frac{E_{r_1}^E}{E_{i_1}^E} = -\frac{M_{21}}{M_{22}} \quad (5.1.29)$$

$$T_E^E = \frac{E_{i_{n+1}}^E}{E_{i_1}^E} = -\frac{M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21}}{M_{22}} = -\frac{\det[M]}{M_{22}} \quad (5.1.30)$$

Analoghe considerazioni possono essere fatte se si considera il caso di polarizzazione H, in tal caso il campo magnetico risulterà essere diretto lungo l'asse y . In

questo caso la matrice dei coefficienti risulta essere:

$$\begin{pmatrix} H_{0i_{j+1}} \\ H_{0r_{j+1}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\chi_{j,j+1}} \begin{bmatrix} (1 + \chi_{j,j+1})e^{-i(k_{z_{j+1}} - k_{z_j})z_j} & -(1 - \chi_{j,j+1})e^{-i(k_{z_{j+1}} + k_{z_j})z_j} \\ -(1 - \chi_{j,j+1})e^{i(k_{z_{j+1}} + k_{z_j})z_j} & (1 + \chi_{j,j+1})e^{i(k_{z_{j+1}} - k_{z_j})z_j} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} H_{0i_j} \\ H_{0r_j} \end{pmatrix} \quad (5.1.31)$$

con $\chi_{j,j+1} = \frac{z_{j+1} \cos \vartheta_{j+1}}{z_j \cos \vartheta_j}$. Il sistema lineare può essere scritto come

$$\begin{pmatrix} H_{0i_{j+1}} \\ H_{0r_{j+1}} \end{pmatrix} = [N_j] \begin{pmatrix} H_{0i_j} \\ H_{0r_j} \end{pmatrix} \quad (5.1.32)$$

Anche in questo caso, quando si è in presenza di una struttura costituita da n interfacce dielettriche, sarà possibile descrivere il comportamento della struttura complessiva mediante un'unica matrice $[N]$, ottenuta come il prodotto delle N matrici corrispondenti a ciascuna interfaccia. Per cui ripercorrendo i passi fatti per la polarizzazione E, e considerando che la matrice $[N]$ può essere definita come:

$$[N] = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \quad (5.1.33)$$

$$R_H^H = \frac{H_{r_1}^H}{H_{i_1}^H} = -\frac{N_{21}}{N_{22}} \quad (5.1.34)$$

$$T_H^H = \frac{H_{i_{n+1}}^H}{H_{i_1}^H} = -\frac{N_{11}N_{22} - N_{12}N_{21}}{N_{22}} = -\frac{\det [N]}{N_{22}} \quad (5.1.35)$$

inoltre

$$R_E^H = \frac{E_{r_1}^H}{E_{i_1}^H} = \frac{Z_1 H_{r_1}^H}{Z_1 H_{i_1}^H} = R_H^H \quad (5.1.36)$$

$$T_E^H = \frac{E_{i_{n+1}}^H}{E_{i_1}^H} = \frac{Z_{n+1} H_{r_1}^H}{Z_1 H_{i_1}^H} = \frac{Z_{n+1}}{Z_1} T_H^H \quad (5.1.37)$$

Durante la trattazione del problema di scattering da sfera sepolta in un mezzo stratificato si incontrerà il problema della riflessione e trasmissione di un'onda piana

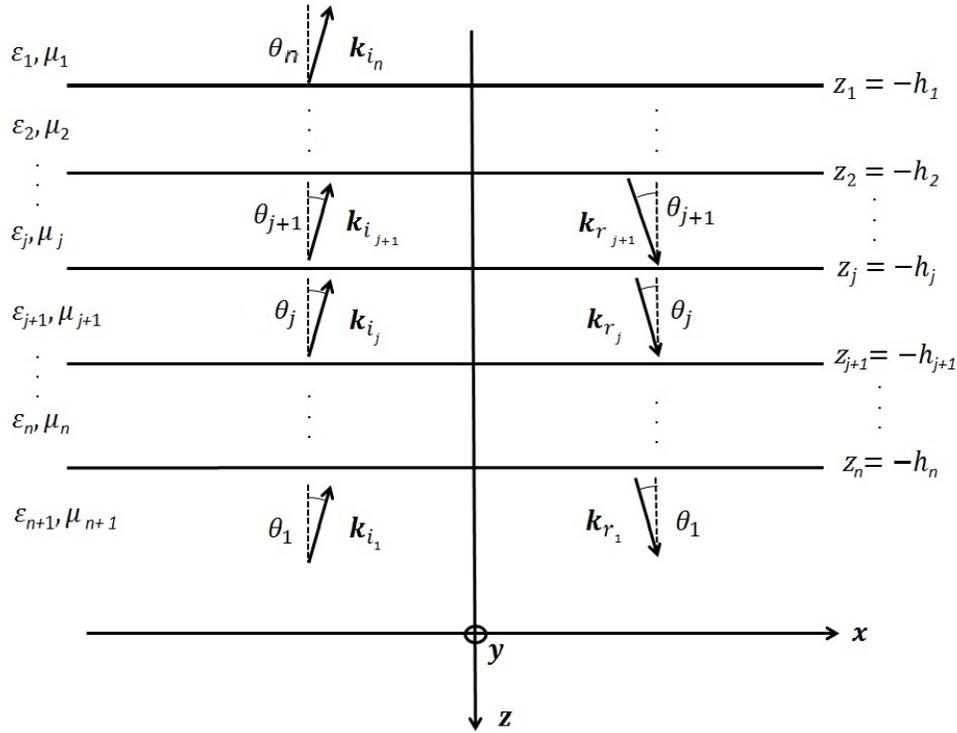


Figura 5.3: Rappresentazione del problema

che si propaga in senso negativo (Fig. 5.3), tali onde piane verranno prese in considerazione in quanto il campo scatterato dalla sfera concentrica e che andrà a interagire con il mezzo stratificato sarà sviluppato in spettro di onde piane.

Analogamente a quanto fatto in precedenza si perviene ad una formulazione per il campo riflesso e trasmesso dal mezzo, per entrambe le polarizzazioni, in particolare per la polarizzazione E, si ha:

$$M_j^- = \frac{1}{2\chi_{j,j+1}} \begin{bmatrix} (1 + \chi_{j,j+1})e^{-i(k_{z_{j+1}} - k_{z_j})z_j} & -(1 - \chi_{j,j+1})e^{i(k_{z_{j+1}} + k_{z_j})z_j} \\ -(1 - \chi_{j,j+1})e^{-i(k_{z_{j+1}} + k_{z_j})z_j} & (1 + \chi_{j,j+1})e^{i(k_{z_{j+1}} - k_{z_j})z_j} \end{bmatrix} \quad (5.1.38)$$

mentre per la polarizzazione H,

$$N_j^- = \frac{1}{2\xi_{j,j+1}} \begin{bmatrix} (1 + \xi_{j,j+1})e^{-i(k_{z_{j+1}} - k_{z_j})z_j} & -(1 - \xi_{j,j+1})e^{i(k_{z_{j+1}} + k_{z_j})z_j} \\ -(1 - \xi_{j,j+1})e^{-i(k_{z_{j+1}} + k_{z_j})z_j} & (1 + \xi_{j,j+1})e^{i(k_{z_{j+1}} - k_{z_j})z_j} \end{bmatrix} \quad (5.1.39)$$

Per utilizzare tali coefficienti sarà però necessario scrivere l'onda come sovrapposizione di due onde polarizzate linearmente, proprio come fatto vedere all'inizio dell'articolo, una in polarizzazione orizzontale (o E), ovvero con la componente del vettore di campo elettrico parallela al piano dell'interfaccia, e l'altra in polarizzazione verticale (o H), ovvero con la componente del vettore di campo elettrico giacente su un piano ortogonale all'interfaccia. Come si nota dalle espressioni (5.1.3) e (5.1.4), la componente di campo polarizzata lungo $\boldsymbol{\varphi}_{0i}$ sarà un'onda in polarizzazione E, essendo parallela al piano dell'interfaccia, mentre la componente lungo $\boldsymbol{\vartheta}_{0i}$ sarà un'onda in polarizzazione H, essendo sempre all'interno di un piano ortogonale all'interfaccia. Ciò detto, l'espressione dell'onda trasmessa nel mezzo 2 assume una forma molto semplice, che si potrà scrivere come segue:

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{r}) = (T_H E_{\vartheta i} \boldsymbol{\vartheta}_{0t} + T_E E_{\varphi i} \boldsymbol{\varphi}_{0t}) e^{i\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}} \quad (5.1.40)$$

dove, con $\boldsymbol{\vartheta}_{0t}$ e $\boldsymbol{\varphi}_{0t}$, si intendono i versori relativi agli angoli che il vettore di propagazione dell'onda trasmessa forma con gli assi coordinati,

$$\mathbf{k}_t = k_{n+1} (\sin \vartheta_t \cos \varphi_t \mathbf{x}_0 + \sin \vartheta_t \sin \varphi_t \mathbf{y}_0 + \cos \vartheta_t \mathbf{z}_0) \quad (5.1.41)$$

$$\boldsymbol{\vartheta}_{0t} = \cos \vartheta_t \cos \varphi_t \mathbf{x}_0 + \cos \vartheta_t \sin \varphi_t \mathbf{y}_0 - \sin \vartheta_t \mathbf{z}_0 \quad (5.1.42)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{0t} = -\sin \varphi_t \mathbf{x}_0 + \cos \varphi_t \mathbf{y}_0 \quad (5.1.43)$$

e dove si sono indicati con $T_{E/H}$ i coefficienti di trasmissione di Fresnel dal mezzo 1 al mezzo $n + 1$, per il campo elettrico, relativi alle polarizzazioni E (orizzontale) e H (verticale). Gli angoli ϑ_t e φ_t , come è ben noto, si possono ottenere dall'applicazione della continuità della componente tangenziale all'interfaccia del vettore di propagazione, ovvero dalla legge di Snell: infatti, dovendo il vettore trasmesso rimanere nello stesso piano del vettore incidente, si vede che l'angolo $\varphi_t = \varphi$ e che

invece l'angolo ϑ_t dovrà rispettare la condizione di Snell:

$$k_1 \sin \vartheta = k_{n+1} \sin \vartheta_t.$$

Analogamente a quanto visto per il campo trasmesso, può essere visto per il campo riflesso:

$$\mathbf{E}_r(\mathbf{r}) = (R_H E_{\vartheta_i} \boldsymbol{\vartheta}_{0r} + R_E E_{\varphi_i} \boldsymbol{\varphi}_{0r}) e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}} \quad (5.1.44)$$

con $\boldsymbol{\vartheta}_{0r}$ e $\boldsymbol{\varphi}_{0r}$, si intendono i versori relativi agli angoli che il vettore di propagazione dell'onda riflessa forma con gli assi coordinati,

$$\mathbf{k}_r = k_1 (\sin \vartheta_r \cos \varphi_r \mathbf{x}_0 + \sin \vartheta_r \sin \varphi_r \mathbf{y}_0 + \cos \vartheta_r \mathbf{z}_0) \quad (5.1.45)$$

$$\boldsymbol{\vartheta}_{0r} = \cos \vartheta_r \cos \varphi_r \mathbf{x}_0 + \cos \vartheta_r \sin \varphi_r \mathbf{y}_0 - \sin \vartheta_r \mathbf{z}_0 \quad (5.1.46)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{0r} = -\sin \varphi_r \mathbf{x}_0 + \cos \varphi_r \mathbf{y}_0 \quad (5.1.47)$$

$$\varphi_r = \varphi_i \quad (5.1.48)$$

$$\vartheta_r = \pi - \vartheta_i \quad (5.1.49)$$

A questo punto si dovrà trattare il problema della diffrazione di quest'onda da parte della sfera. Per fare questo ricalcheremo i passi fatti nel capitolo precedente utilizzando però un formalismo che risulti più pratico nel caso particolare di presenza di $N + 1$ strati sopra lo scatteratore. Il primo passo consiste nello sviluppare l'onda trasmessa dalle N interfacce in armoniche sferiche [1]:

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [a_{mn} \mathbf{M}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r}) + b_{mn} \mathbf{N}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r})] \quad (5.1.50)$$

dove i coefficienti dello sviluppo saranno dati nel caso in considerazione da [13, 40]:

$$a_{mn} = (-1)^m i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (T_H E_{\vartheta_i} \boldsymbol{\vartheta}_{0t} + T_E E_{\varphi_i} \boldsymbol{\varphi}_{0t}) \cdot \mathbf{m}_{mn}^*(\vartheta_t, \varphi_t)$$

$$b_{mn} = (-1)^m i^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (T_H E_{\vartheta_i} \boldsymbol{\vartheta}_{0t} + T_E E_{\varphi_i} \boldsymbol{\varphi}_{0t}) \cdot \mathbf{n}_{mn}^*(\vartheta_t, \varphi_t)$$

ed avendo indicato con $\mathbf{M}_{mn}^{(1)}$ e $\mathbf{N}_{mn}^{(1)}$ le armoniche sferiche vettoriali di prima specie definite nei capitoli precedenti, inoltre si ricordi che i coefficienti T_E e T_H contengono tutta la complessità del modello a N -strati. Si deve ora scrivere l'onda diffratta dalla sfera. Tale onda potrà essere scritta come sovrapposizione dei vettori \mathbf{M}_{mn} e \mathbf{N}_{mn} considerando una dipendenza radiale rappresentata dalle funzioni di Bessel di terza specie, ovvero le funzioni di Hankel di primo tipo [12]:

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [e_{mn} \mathbf{M}_{mn}^{(3)}(\mathbf{r}) + f_{mn} \mathbf{N}_{mn}^{(3)}(\mathbf{r})] \quad (5.1.51)$$

i coefficienti e_{mn} e f_{mn} diventano così le incognite del nostro problema e verranno determinate tramite l'applicazione delle condizioni al contorno.

Si deve ora considerare l'incidenza dell'onda diffratta sull'interfaccia piana. Come fatto per il caso di sfera dielettrica sepolta utilizzando le espressioni di Weyls [17], si potrà scrivere:

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{i^{-n}}{2\pi} \left[e_{mn} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} \mathbf{m}_{mn}(\alpha_i, \beta_i) e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} \sin \alpha_i d\alpha_i d\beta_i + f_{mn} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} i\mathbf{n}_{mn}(\alpha_i, \beta_i) e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} \sin \alpha_i d\alpha_i d\beta_i \right]$$

con

$$\mathbf{k}_i = k_{N+1} (\sin \alpha_i \cos \beta_i \mathbf{x}_0 + \sin \alpha_i \sin \beta_i \mathbf{y}_0 + \cos \alpha_i \mathbf{z}_0)$$

con il pedice i si è voluto sottolineare il fatto che l'onda che stiamo considerando andrà ad incidere sull' N -esimo piano di separazione.

Per ricavare un'espressione del campo diffratto-riflesso (o trasmesso) sarà ora necessario scrivere ogni onda elementare come una sovrapposizione di due onde in polarizzazione lineare, una E e l'altra H. Anche in questo caso il compito risulta semplificato dall'espressione delle onde piane nel riferimento locale, infatti, come già si è visto, le singole onde piane elementari sono scritte secondo i versori $\boldsymbol{\alpha}_{0i}$ e $\boldsymbol{\beta}_{0i}$,

omologhi dei versori $\boldsymbol{\vartheta}_{0r}$ e φ_{0r} in (5.1.45)-(5.1.49). Esplicitiamo infatti la generica onda piana elementare ricordando l'espressione delle funzioni tesserali \mathbf{m}_{mn} ed \mathbf{n}_{mn} :

$$d\mathbf{E}_{s_i}^{mn} = \sin \alpha_i [e_{mn} \mathbf{m}_{mn}(\alpha_i, \beta_i) + i f_{mn} \mathbf{n}_{mn}(\alpha_i, \beta_i)] e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}$$

quindi:

$$d\mathbf{E}_{s_i}^{mn} = \sin \alpha_i e^{im\beta_i} \left\{ e_{mn} \left[i\pi_n^m(\cos \alpha_i) \boldsymbol{\alpha}_{0i} - \tau_n^m(\cos \alpha_i) \boldsymbol{\beta}_{0i} \right] + i f_{mn} \left[\tau_n^m(\cos \alpha_i) \boldsymbol{\alpha}_{0i} + i\pi_n^m(\cos \alpha_i) \boldsymbol{\beta}_{0i} \right] \right\} e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}$$

$$d\mathbf{E}_{s_i}^{mn} = \sin \alpha_i e^{im\beta_i} \left\{ i \left[e_{mn} \pi_n^m(\cos \alpha_i) + f_{mn} \tau_n^m(\cos \alpha_i) \right] \boldsymbol{\alpha}_{0i} - \left[e_{mn} \tau_n^m(\cos \alpha_i) + f_{mn} \pi_n^m(\cos \alpha_i) \right] \boldsymbol{\beta}_{0i} \right\} e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}$$

quindi

$$d\mathbf{E}_{s_i}^{mn} = (dE_{s\alpha_i}^{mn} \boldsymbol{\alpha}_{0i} + dE_{s\beta_i}^{mn} \boldsymbol{\beta}_{0i}) e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}$$

che risulta essere del tutto analoga alla 5.1.44. Quindi il campo scatterato riflesso può essere ottenuto moltiplicando ciascun onda piana elementare per il relativo coefficiente di riflessione del modello a N -strati:

$$d\mathbf{E}_{s_r}^{mn} = (dE_{s\alpha_i}^{mn} \boldsymbol{\alpha}_{0r} + dE_{s\beta_i}^{mn} \boldsymbol{\beta}_{0r}) e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}}$$

con \mathbf{k}_r , $\boldsymbol{\alpha}_{0r}$, $\boldsymbol{\beta}_{0r}$, α_r e β_r espressi come 5.1.45-5.1.49.

Posso così esprimere il campo scatterato riflesso come sviluppo di infinite onde

piane, prendendo come variabili d'integrazione α_i e β_i [40, 17]

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{sr}(\mathbf{r}) = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} e^{im\beta_i} \sin \alpha_i e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}} \\ & \left\{ e_{mn} \left[iR_H^-(\alpha_i) \pi_n^m(\cos \alpha_i) \boldsymbol{\alpha}_{0r} - R_E^-(\alpha_i) \tau_n^m(\cos \alpha_i) \boldsymbol{\beta}_{0r} \right] + \right. \\ & \left. + f_{mn} \left[iR_H^-(\alpha_i) \tau_n^m(\cos \alpha_i) \boldsymbol{\alpha}_{0r} - R_E^-(\alpha_i) \pi_n^m(\cos \alpha_i) \boldsymbol{\beta}_{0r} \right] d\alpha_i d\beta_i \right. \end{aligned} \quad (5.1.52)$$

con

$$\mathbf{k}_r = k_{n+1} (\sin \alpha_i \cos \beta_i \mathbf{x}_0 + \sin \alpha_i \sin \beta_i \mathbf{y}_0 - \cos \alpha_i \mathbf{z}_0) \quad (5.1.53)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{0r} = -\cos \alpha_i \cos \beta_i \mathbf{x}_0 - \cos \alpha_i \sin \beta_i \mathbf{y}_0 - \sin \alpha_i \mathbf{z}_0 \quad (5.1.54)$$

$$\boldsymbol{\beta}_{0r} = -\sin \beta_i \mathbf{x}_0 + \cos \beta_i \mathbf{y}_0 \quad (5.1.55)$$

avendo indicato con R_H^- e con R_E^- il coefficiente di riflessione del campo elettrico in polarizzazione H ed in polarizzazione E, rispettivamente, ed entrambi i campi in propagazione negativa nel caso del modello ad N -strati. Si nota che la componente z del vettore d'onda ha cambiato di segno, rispetto al sistema di riferimento generale $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0$: infatti l'onda riflessa è caratterizzata proprio da una propagazione nella direzione opposta rispetto all'incidente, così come non ha subito variazioni la componente $\boldsymbol{\beta}_0$, ovvero la componente orizzontale (o parallela).

Esattamente come il campo diffratto, anche il campo diffratto-riflesso è così rappresentato come sovrapposizione di onde piane in polarizzazione ellittica. Per rendere più evidente tale natura delle onde e per rimettere in evidenza i coefficienti dello sviluppo, si possono definire le seguenti ampiezze di campo:

$$\mathbf{E}_{Re}^{mn} = e^{im\beta_i} \sin \alpha_i \left[iR_H^- \pi_n^m(\cos \alpha_i) \boldsymbol{\alpha}_{0r} - R_E^- \tau_{mn}(\cos \alpha_i) \boldsymbol{\beta}_{0r} \right] \quad (5.1.56)$$

$$\mathbf{E}_{Rf}^{mn} = e^{im\beta_i} \sin \alpha_i \left[iR_H^- \tau_n^m(\cos \alpha_i) \boldsymbol{\alpha}_{0r} - R_E^- \pi_{mn}(\cos \alpha_i) \boldsymbol{\beta}_{0r} \right] \quad (5.1.57)$$

Il campo diffratto-riflesso può essere così scritto:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{sr}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{i^{-n}}{2\pi} \left(e_{mn} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} \mathbf{E}_{Re}^{mn} e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}} d\alpha d\beta + \right. \\ \left. + f_{mn} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} \mathbf{E}_{Rf}^{mn} e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}} d\alpha d\beta \right) \end{aligned} \quad (5.1.58)$$

Si è deciso di tenere distinti i due integrali per mantenere in evidenza i coefficienti incogniti.

Per quanto riguarda il campo diffratto-trasmesso, esso avrà un'espressione del tutto analoga alla (5.1.58), con l'unica differenza che in luogo dei coefficienti di riflessione vi saranno gli analoghi coefficienti di trasmissione. L'espressione assunta dal campo diffratto-trasmesso sarà quindi la seguente:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{st}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{i^{-n}}{2\pi} \left(e_{mn} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} \mathbf{E}_{Te}^{mn} e^{i\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}} d\alpha d\beta + \right. \\ \left. + f_{mn} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} \mathbf{E}_{Tf}^{mn} e^{i\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}} d\alpha d\beta \right) \end{aligned} \quad (5.1.59)$$

dove:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{Te}^{mn} &= e^{im\beta_i} \sin \alpha_i \left[iT_H^- \pi_n^m(\cos \alpha_i) \boldsymbol{\alpha}_{0t} - T_E^- \tau_n^m(\cos \alpha_i) \boldsymbol{\beta}_{0t} \right] \\ \mathbf{E}_{Tf}^{mn} &= e^{im\beta_i} \sin \alpha_i \left[iT_H^- \tau_n^m(\cos \alpha_i) \boldsymbol{\alpha}_{0t} - T_E^- \pi_n^m(\cos \alpha_i) \boldsymbol{\beta}_{0t} \right] \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_t &= k_1 (\sin \alpha_t \cos \beta_t \mathbf{x}_0 + \sin \alpha_t \sin \beta_t \mathbf{y}_0 + \cos \alpha_t \mathbf{z}_0) \\ \boldsymbol{\alpha}_{0t} &= \cos \alpha_t \cos \beta_t \mathbf{x}_0 + \cos \alpha_t \sin \beta_t \mathbf{y}_0 - \sin \alpha_t \mathbf{z}_0 \\ \boldsymbol{\beta}_{0t} &= -\sin \beta_t \mathbf{x}_0 + \cos \beta_t \mathbf{y}_0 \end{aligned}$$

dove si è sfruttato il fatto che il vettore trasmesso giace sullo stesso piano del vettore di incidenza e quindi ha il medesimo angolo β . Per quanto riguarda l'angolo α_t , esso è fornito dalla ben nota condizione di Snell, la quale, nel nostro caso di incidenza

dal mezzo 2 al mezzo 1, si può scrivere come segue:

$$\begin{aligned}\beta_t &= \beta_i \\ k_1 \sin \alpha_t &= k_- \sin \alpha_i\end{aligned}$$

Passiamo a definire i campi interni alla sfera, in particolare saranno presenti un campo interno al guscio ed uno nella sfera interna, per cui si avrà [1, 4]:

$$\mathbf{E}_{sh}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [r_{mn} \mathbf{M}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r}) + s_{mn} \mathbf{N}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r}) + u_{mn} \mathbf{M}_{mn}^{(2)}(\mathbf{r}) + v_{mn} \mathbf{N}_{mn}^{(2)}(\mathbf{r})] \quad (5.1.60)$$

$$\mathbf{E}_{co}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [w_{mn} \mathbf{M}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r}) + z_{mn} \mathbf{N}_{mn}^{(1)}(\mathbf{r})] \quad (5.1.61)$$

Si nota come in questo caso per il campo interno al guscio sferico sono stata prese in considerazione anche le armoniche sferiche vettoriali di seconda specie, ciò è stato possibile grazie al fatto che il centro della sfera, dove l'armonica di questo tipo assume un valore infinito, non è parte del dominio spaziale di esistenza del campo elettrico in considerazione.

Giunti a questo punto sono stati rappresentati tutti i campi elettrici che entrano in gioco nel problema che si sta affrontando. L'unica cosa che rimane da fare è l'imposizione delle condizioni al contorno sulle superfici delle sfere:

$$(\mathbf{E}_t + \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_{sr} - \mathbf{E}_{sh}) \times \mathbf{r}_0 = 0 \quad \text{per } r = b \quad (5.1.62)$$

$$[\nabla \times (\mathbf{E}_t + \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_{sr} - \mathbf{E}_{sh})] \times \mathbf{r}_0 = 0 \quad \text{per } r = b \quad (5.1.63)$$

$$(\mathbf{E}_{sh} - \mathbf{E}_{co}) = 0 \quad \text{per } r = a \quad (5.1.64)$$

$$[\nabla \times (\mathbf{E}_{sh} - \mathbf{E}_{co})] \times \mathbf{r}_0 = 0 \quad \text{per } r = a \quad (5.1.65)$$

Essendo note le espressioni dei diversi campi sarà sicuramente possibile scrivere tale condizione esplicitamente, ma nella trattazione di tale equazione ci troveremmo di fronte a dei gravi problemi, come abbiamo già visto tale problema può essere aggirato sviluppando ogni singola onda piana che compone il campo in onde sferiche.

La singola onda piana elementare in (5.1.58) si potrà sviluppare, secondo la formula (5.1.50), come segue:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{Re}^{mn} e^{\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}} &= \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=-q}^q [c_{pq}^{mn}(\alpha_r, \beta_r) \mathbf{M}_{pq}^{(1)}(\mathbf{r}) + d_{pq}^{mn}(\alpha_r, \beta_r) \mathbf{N}_{pq}^{(1)}(\mathbf{r})] \\ \mathbf{E}_{Rf}^{mn} e^{\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}} &= \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=-q}^q [g_{pq}^{mn}(\alpha_r, \beta_r) \mathbf{M}_{pq}^{(1)}(\mathbf{r}) + h_{pq}^{mn}(\alpha_r, \beta_r) \mathbf{N}_{pq}^{(1)}(\mathbf{r})]\end{aligned}$$

dove i coefficienti assumono le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned}c_{pq}^{mn}(\alpha_r, \beta_r) &= (-1)^{p;q} \frac{2q+1}{q(q+1)} \frac{(q-p)!}{(q+p)!} \mathbf{E}_{Re}^{mn} \cdot \mathbf{m}_{pq}^*(\alpha_r, \beta_r) \\ d_{pq}^{mn}(\alpha_r, \beta_r) &= (-1)^{p;q-1} \frac{2q+1}{q(q+1)} \frac{(q-p)!}{(q+p)!} \mathbf{E}_{Re}^{mn} \cdot \mathbf{n}_{pq}^*(\alpha_r, \beta_r) \\ g_{pq}^{mn}(\alpha_r, \beta_r) &= (-1)^{p;q} \frac{2q+1}{q(q+1)} \frac{(q-p)!}{(q+p)!} \mathbf{E}_{Rf}^{mn} \cdot \mathbf{m}_{pq}^*(\alpha_r, \beta_r) \\ h_{pq}^{mn}(\alpha_r, \beta_r) &= (-1)^{p;q-1} \frac{2q+1}{q(q+1)} \frac{(q-p)!}{(q+p)!} \mathbf{E}_{Rf}^{mn} \cdot \mathbf{n}_{pq}^*(\alpha_r, \beta_r)\end{aligned}$$

Svolgendo il prodotto scalare e ponendo $k_{pq} = (-1)^{p;q} \frac{2q+1}{q(q+1)} \frac{(q-p)!}{(q+p)!}$ si ottiene:

$$c_{pq}^{mn}(\alpha_r, \beta_r) = k_{pq} \left[R_H^-(\alpha_i) \pi_n^m(\cos \alpha_i) \pi_q^p(\cos \alpha_r) + R_E^-(\alpha_i) \tau_n^m(\cos \alpha_i) \tau_q^p(\cos \alpha_r) \right] \quad (5.1.66)$$

$$d_{pq}^{mn}(\alpha_r, \beta_r) = -ik_{pq} \left[R_H^-(\alpha_i) \pi_n^m(\cos \alpha_i) \tau_q^p(\cos \alpha_r) + R_E^-(\alpha_i) \tau_n^m(\cos \alpha_i) \pi_q^p(\cos \alpha_r) \right] \quad (5.1.67)$$

$$g_{pq}^{mn}(\alpha_r, \beta_r) = k_{pq} \left[R_H^-(\alpha_i) \tau_n^m(\cos \alpha_i) \pi_q^p(\cos \alpha_r) + R_E^-(\alpha_i) \pi_n^m(\cos \alpha_i) \tau_q^p(\cos \alpha_r) \right] \quad (5.1.68)$$

$$h_{pq}^{mn}(\alpha_r, \beta_r) = -ik_{pq} \left[R_H^-(\alpha_i) \tau_n^m(\cos \alpha_i) \tau_q^p(\cos \alpha_r) + R_E^-(\alpha_i) \pi_n^m(\cos \alpha_i) \pi_q^p(\cos \alpha_r) \right] \quad (5.1.69)$$

manipolando opportunamente le espressioni, come fatto nel capitolo precedente, si perviene alle seguenti formule:

$$c_{pq}^{mn}(\alpha_r, \beta_r) = (-1)^{-q} i^q \frac{2q+1}{q(q+1)} \frac{(q-p)!}{(q+p)!} e^{i(m-p)\beta_i} \sin \alpha_i \left[R_H^-(\alpha_i) \pi_n^m(\cos \alpha_i) \pi_q^p(\cos \alpha_i) - R_E^-(\alpha_i) \tau_n^m(\cos \alpha_i) \tau_q^p(\cos \alpha_i) \right] \quad (5.1.70)$$

$$d_{pq}^{mn}(\alpha_r, \beta_r) = (-1)^{-q} i^q \frac{2q+1}{q(q+1)} \frac{(q-p)!}{(q+p)!} e^{i(m-p)\beta_i} \sin \alpha_i \left[-R_H^-(\alpha_i) \pi_n^m(\cos \alpha_i) \tau_q^p(\cos \alpha_i) + R_E^-(\alpha_i) \tau_n^m(\cos \alpha_i) \pi_q^p(\cos \alpha_i) \right] \quad (5.1.71)$$

$$g_{pq}^{mn}(\alpha_r, \beta_r) = (-1)^{-q} i^q \frac{2q+1}{q(q+1)} \frac{(q-p)!}{(q+p)!} e^{i(m-p)\beta_i} \sin \alpha_i \left[R_H^-(\alpha_i) \tau_n^m(\cos \alpha_i) \pi_q^p(\cos \alpha_i) - R_E^-(\alpha_i) \pi_n^m(\cos \alpha_i) \tau_q^p(\cos \alpha_i) \right] \quad (5.1.72)$$

$$h_{pq}^{mn}(\alpha_r, \beta_r) = (-1)^{-q} i^q \frac{2q+1}{q(q+1)} \frac{(q-p)!}{(q+p)!} e^{i(m-p)\beta_i} \sin \alpha_i \left[-R_H^-(\alpha_i) \tau_n^m(\cos \alpha_i) \tau_q^p(\cos \alpha_i) + R_E^-(\alpha_i) \pi_n^m(\cos \alpha_i) \pi_q^p(\cos \alpha_i) \right] \quad (5.1.73)$$

È bene notare che questi coefficienti risultano completamente noti. Dunque l'onda diffratta-riflessa potrà essere espressa in armoniche sferiche nella seguente forma:

$$\mathbf{E}_{sr}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{i^{-n}}{2\pi} \left\{ e_{mn} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=-q}^q [c_{pq}^{mn} \mathbf{M}_{pq}^{(1)}(\mathbf{r}) + d_{pq}^{mn} \mathbf{N}_{pq}^{(1)}(\mathbf{r})] d\alpha_i d\beta_i + \right. \\ \left. + f_{mn} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=-q}^q [g_{pq}^{mn} \mathbf{M}_{pq}^{(1)}(\mathbf{r}) + h_{pq}^{mn} \mathbf{N}_{pq}^{(1)}(\mathbf{r})] d\alpha_i d\beta_i \right\}$$

Ora, si porti la sommatoria su p e q fuori dal segno di integrale e dalla sommatoria su m e n e si portino fuori dagli integrali anche le funzioni \mathbf{M}_{pq} e \mathbf{N}_{pq} , ottenendo:

$$\mathbf{E}_{sr}(\mathbf{r}) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=-q}^q \left[\mathbf{M}_{pq}^{(1)}(\mathbf{r}) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (e_{mn} C_{pq}^{mn} + f_{mn} G_{pq}^{mn}) + \right. \\ \left. + \mathbf{N}_{pq}^{(1)}(\mathbf{r}) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (e_{mn} D_{pq}^{mn} + f_{mn} H_{pq}^{mn}) \right] \quad (5.1.74)$$

dove si sono definiti i seguenti coefficienti:

$$C_{pq}^{mn} = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} c_{pq}^{mn}(\alpha_i, \beta_i) d\alpha_i d\beta_i \quad (5.1.75)$$

$$D_{pq}^{mn} = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} d_{pq}^{mn}(\alpha_i, \beta_i) d\alpha_i d\beta_i \quad (5.1.76)$$

$$G_{pq}^{mn} = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} g_{pq}^{mn}(\alpha_i, \beta_i) d\alpha_i d\beta_i \quad (5.1.77)$$

$$H_{pq}^{mn} = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} h_{pq}^{mn}(\alpha_i, \beta_i) d\alpha_i d\beta_i \quad (5.1.78)$$

Ora integrando per β_i e ponendo

$$k_{pq} = (-1)^{-q} i^q \frac{2q+1}{q(q+1)} \frac{(q-p)!}{(q+p)!}$$

si ottiene

$$C_{pq}^{mn} = i^{-n} \delta_{mp} k_{pq} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} \sin \alpha_i \left[R_H^-(\alpha_i) \pi_n^m(\cos \alpha_i) \pi_q^p(\cos \alpha_i) + \right. \\ \left. - R_E^-(\alpha_i) \tau_n^m(\cos \alpha_i) \tau_q^p(\cos \alpha_i) \right] d\alpha_i \quad (5.1.79)$$

$$D_{pq}^{mn} = i^{-n} \delta_{mp} k_{pq} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} \sin \alpha_i \left[- R_H^-(\alpha_i) \pi_n^m(\cos \alpha_i) \tau_q^p(\cos \alpha_i) + \right. \\ \left. R_E^-(\alpha_i) \tau_n^m(\cos \alpha_i) \pi_q^p(\cos \alpha_i) \right] d\alpha_i \quad (5.1.80)$$

$$G_{pq}^{mn} = i^{-n} \delta_{mp} k_{pq} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} \sin \alpha_i \left[R_H^-(\alpha_i) \tau_n^m(\cos \alpha_i) \pi_q^p(\cos \alpha_i) + \right. \\ \left. - R_E^-(\alpha_i) \pi_n^m(\cos \alpha_i) \tau_q^p(\cos \alpha_i) \right] d\alpha_i \quad (5.1.81)$$

$$H_{pq}^{mn} = i^{-n} \delta_{mp} k_{pq} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} \sin \alpha_i \left[- R_H^-(\alpha_i) \tau_n^m(\cos \alpha_i) \tau_q^p(\cos \alpha_i) + \right. \\ \left. R_E^-(\alpha_i) \pi_n^m(\cos \alpha_i) \pi_q^p(\cos \alpha_i) \right] d\alpha_i \quad (5.1.82)$$

Avendo ridotto il nostro integrale superficiale in un integrale singolo. Il problema della risoluzione degli integrali verrà trattato in Appendice A.

Ritorniamo all'imposizione delle condizioni al contorno sulla superficie esterna della sfera. Ricordiamo le formule dei campi in gioco:

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{r}) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=-q}^q [a_{pq} \mathbf{M}_{pq}^{(1)}(k_{n+1}\mathbf{r}) + b_{pq} \mathbf{N}_{pq}^{(1)}(k_{n+1}\mathbf{r})] \quad (5.1.83)$$

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [e_{mn} \mathbf{M}_{mn}^{(3)}(k_{n+1}\mathbf{r}) + f_{mn} \mathbf{N}_{mn}^{(3)}(k_{n+1}\mathbf{r})] \quad (5.1.84)$$

$$\mathbf{E}_{sr}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [g_{mn}^{pq} \mathbf{M}_{pq}^{(1)}(k_{n+1}\mathbf{r}) + h_{mn}^{pq} \mathbf{N}_{pq}^{(1)}(k_{n+1}\mathbf{r})] \quad (5.1.85)$$

$$\mathbf{E}_{sh}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [r_{mn} \mathbf{M}_{mn}^{(1)}(k_{sh}\mathbf{r}) + s_{mn} \mathbf{N}_{mn}^{(1)}(k_{sh}\mathbf{r}) + \\ u_{mn} \mathbf{M}_{mn}^{(2)}(k_{sh}\mathbf{r}) + v_{mn} \mathbf{N}_{mn}^{(2)}(k_{sh}\mathbf{r})] \quad (5.1.86)$$

$$\mathbf{E}_{co}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [w_{mn} \mathbf{M}_{mn}^{(1)}(k_{co}\mathbf{r}) + z_{mn} \mathbf{N}_{mn}^{(1)}(k_{co}\mathbf{r})] \quad (5.1.87)$$

avendo posto

$$g_{mn}^{pq} = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=-p}^n (e_{mn} C_{pq}^{mn} + f_{mn} G_{pq}^{mn}) \quad (5.1.88)$$

$$h_{mn}^{pq} = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=-p}^n (e_{mn} D_{pq}^{mn} + f_{mn} H_{pq}^{mn}) \quad (5.1.89)$$

e notando che per il campo trasmesso si è deciso di far variare gli indici da mn a pq : ciò è stato possibile data l'indipendenza dell'equazione rispetto agli altri campi, che contrariamente al primo hanno dovuto mantenere il formalismo adottato fino a questo punto.

Ricordando che $\mathbf{M}_{mn} = \mathbf{m}_{mn}(\vartheta, \varphi) z_n(k\mathbf{r})$ e $\mathbf{N}_{mn} = \mathbf{n}_{mn}(\vartheta, \varphi) z'_q(k\mathbf{r})$, i cinque campi a meno della componente radiale, che comunque verrà annullata dal prodotto vettoriale con \mathbf{r}_0 , possono essere riscritti come:

$$\mathbf{E}_{t(\vartheta, \varphi)}(\mathbf{r}) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=-q}^q [a_{pq} \mathbf{m}_{pq}(\vartheta, \varphi) j_q(k_{n+1}\mathbf{r}) + b_{pq} \mathbf{n}_{pq}(\vartheta, \varphi) j'_q(k_{n+1}\mathbf{r})] \quad (5.1.90)$$

$$\mathbf{E}_{s(\vartheta, \varphi)}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [e_{mn} \mathbf{m}_{mn}(\vartheta, \varphi) h_n^{(1)}(k_{n+1}\mathbf{r}) + f_{mn} \mathbf{n}_{mn}(\vartheta, \varphi) h_n'^{(1)}(k_{n+1}\mathbf{r})] \quad (5.1.91)$$

$$\mathbf{E}_{sr(\vartheta, \varphi)}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [g_{mn}^{pq} \mathbf{m}_{pq}(\vartheta, \varphi) j_q(k_{n+1}\mathbf{r}) + h_{mn}^{pq} \mathbf{n}_{pq}(\vartheta, \varphi) j'_q(k_{n+1}\mathbf{r})] \quad (5.1.92)$$

$$\mathbf{E}_{sh(\vartheta, \varphi)}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [r_{mn} \mathbf{m}_{mn}(\vartheta, \varphi) j'_q(k_{sh}\mathbf{r}) + s_{mn} \mathbf{n}_{mn}(\vartheta, \varphi) j_q(k_{sh}\mathbf{r}) + u_{mn} \mathbf{m}_{mn}(\vartheta, \varphi) y'_q(k_{sh}\mathbf{r}) + v_{mn} \mathbf{n}_{mn}(\vartheta, \varphi) y_q(k_{sh}\mathbf{r})] \quad (5.1.93)$$

$$\mathbf{E}_{co(\vartheta, \varphi)}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [w_{mn} \mathbf{m}_{mn}(\vartheta, \varphi) j'_q(k_{co}\mathbf{r}) + z_{mn} \mathbf{n}_{mn}(\vartheta, \varphi) j_q(k_{co}\mathbf{r})] \quad (5.1.94)$$

avendo indicato con

$$z'_n(k_2\mathbf{r}) = \frac{1}{kr} \frac{d[rz_n(kr)]}{dr}$$

Dovendo imporre le condizioni al contorno e dovendo quindi moltiplicare vettorialmente ciascun campo per \mathbf{r}_0 , e ricordando che:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{mn}(\vartheta, \varphi) \times \mathbf{r}_0 &= -\mathbf{n}_{mn}(\vartheta, \varphi) \\ \mathbf{n}_{mn}(\vartheta, \varphi) \times \mathbf{r}_0 &= \mathbf{m}_{mn}(\vartheta, \varphi) \\ [\nabla \times \mathbf{M}_{mn}(k\mathbf{r})] \times \mathbf{r}_0 &= k\mathbf{N}_{mn}(k\mathbf{r}) \\ [\nabla \times \mathbf{N}_{mn}(k\mathbf{r})] \times \mathbf{r}_0 &= k\mathbf{M}_{mn}(k\mathbf{r}) \end{aligned}$$

e applicando le relazioni di ortogonalità delle funzioni \mathbf{m}_{mn} e \mathbf{n}_{mn} , possiamo eliminare la dipendenza dagli angoli ϑ e φ . Alla fine si ottiene il seguente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{mn} + u_{mn} \frac{y_n(k_{sh}a)}{j_n(k_{sh}a)} - w_{mn} \frac{j_n(k_{co}a)}{j_n(k_{sh}a)} = 0 \\ s_{mn} + v_{mn} \frac{y'_n(k_{sh}a)}{j'_n(k_{sh}a)} - z_{mn} \frac{j'_n(k_{co}a)}{j'_n(k_{sh}a)} = 0 \\ r_{mn} + u_{mn} \frac{y'_n(k_{sh}a)}{j'_n(k_{sh}a)} - w_{mn} \frac{j_n(k_{co}a)}{j_n(k_{sh}a)} \frac{k_{co}}{k_{sh}} = 0 \\ s_{mn} + v_{mn} \frac{y_n(k_{sh}a)}{j_n(k_{sh}a)} - z_{mn} \frac{j_n(k_{co}a)}{j_n(k_{sh}a)} \frac{k_{co}}{k_{sh}} = 0 \\ a_{pq} + e_{mn} \frac{h_n^{(1)}(k_{n+1}b)}{j_n(k_{n+1}b)} + g_{mn}^{pq} - r_{mn} \frac{j_n(k_{sh}b)}{j_n(k_{n+1}b)} - u_{mn} \frac{y_n(k_{sh}b)}{j_n(k_{n+1}b)} = 0 \\ b_{pq} + f_{mn} \frac{h_n^{(1)}(k_{n+1}b)}{j'_n(k_{n+1}b)} + h_{mn}^{pq} - s_{mn} \frac{j'_n(k_{sh}b)}{j'_n(k_{n+1}b)} - v_{mn} \frac{y'_n(k_{sh}b)}{j'_n(k_{n+1}b)} = 0 \\ a_{pq} + e_{mn} \frac{h_n^{(1)}(k_{n+1}b)}{j'_n(k_{n+1}b)} + g_{mn}^{pq} - \frac{k_{sh}}{k_{n+1}} r_{mn} \frac{j'_n(k_{sh}b)}{j'_n(k_{n+1}b)} - \frac{k_{sh}}{k_{n+1}} u_{mn} \frac{y'_n(k_{sh}b)}{j'_n(k_{n+1}b)} = 0 \\ b_{pq} + f_{mn} \frac{h_n^{(1)}(k_{n+1}b)}{j_n(k_{n+1}b)} + h_{mn}^{pq} - \frac{k_{sh}}{k_{n+1}} s_{mn} \frac{j_n(k_{sh}b)}{j_n(k_{n+1}b)} - \frac{k_{sh}}{k_{n+1}} v_{mn} \frac{y_n(k_{sh}b)}{j_n(k_{n+1}b)} = 0 \end{array} \right.$$

Si tratta di un sistema di 8 incognite in 8 equazioni, che può essere riscritto come:

$$\left. \begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ e_{mn} \left[\frac{h_n^{(1)}(k_2 a)}{j_q(k_2 a)} \delta_{mp} \delta_{nq} + C_{pq}^{mn} \right] + f_{mn} G_{pq}^{mn} - \delta_{mp} \delta_{nq} \frac{k_{sh}}{k_{n+1}} \left[r_{mn} \frac{j'_n(k_{sh} b)}{j'_n(k_{n+1} b)} + u_{mn} \frac{y'_n(k_{sh} b)}{j'_n(k_{n+1} b)} \right] \right\} = -a_{pq} \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ e_{mn} \left[\frac{h_n^{(1)}(k_2 a)}{j_q(k_2 a)} \delta_{mp} \delta_{nq} + C_{pq}^{mn} \right] + f_{mn} G_{pq}^{mn} - \delta_{mp} \delta_{nq} \left[r_{mn} \frac{j_n(k_{sh} b)}{j_n(k_{n+1} b)} + u_{mn} \frac{y_n(k_{sh} b)}{j_n(k_{n+1} b)} \right] \right\} = -a_{pq} \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ e_{mn} D_{pq}^{mn} + \left[f_{mn} \frac{h_n^{(1)}(k_2 a)}{j_q(k_2 a)} \delta_{mp} \delta_{nq} H_{pq}^{mn} \right] - \delta_{mp} \delta_{nq} \left[s_{mn} \frac{j'_n(k_{sh} b)}{j'_n(k_{n+1} b)} + v_{mn} \frac{y'_n(k_{sh} b)}{j'_n(k_{n+1} b)} \right] \right\} = -b_{pq} \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ e_{mn} D_{pq}^{mn} + \left[f_{mn} \frac{h_n^{(1)}(k_2 a)}{j_q(k_2 a)} \delta_{mp} \delta_{nq} H_{pq}^{mn} \right] - \delta_{mp} \delta_{nq} \frac{k_{sh}}{k_{n+1}} \left[s_{mn} \frac{j_n(k_{sh} b)}{j_n(k_{n+1} b)} + u_{mn} \frac{y_n(k_{sh} b)}{j_n(k_{n+1} b)} \right] \right\} = -b_{pq} \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[\delta_{mp} \delta_{nq} \left(r_{mn} + u_{mn} \frac{y'_n(k_{sh} b)}{j'_n(k_{n+1} b)} - w_{mn} \frac{j'_n(k_{co} a)}{j'_n(k_{sh} a)} \frac{k_{co}}{k_{sh}} \right) \right] = 0 \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[\delta_{mp} \delta_{nq} \left(r_{mn} + u_{mn} \frac{y_n(k_{sh} b)}{j_n(k_{n+1} b)} - w_{mn} \frac{j_n(k_{co} a)}{j_n(k_{sh} a)} \right) \right] = 0 \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[\delta_{mp} \delta_{nq} \left(s_{mn} + v_{mn} \frac{y'_n(k_{sh} b)}{j'_n(k_{n+1} b)} - z_{mn} \frac{j'_n(k_{co} a)}{j'_n(k_{sh} a)} \right) \right] = 0 \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[\delta_{mp} \delta_{nq} \left(s_{mn} + v_{mn} \frac{y_n(k_{sh} b)}{j_n(k_{n+1} b)} - z_{mn} \frac{j_n(k_{co} a)}{j_n(k_{sh} a)} \frac{k_{co}}{k_{sh}} \right) \right] = 0
\end{aligned} \right\}$$

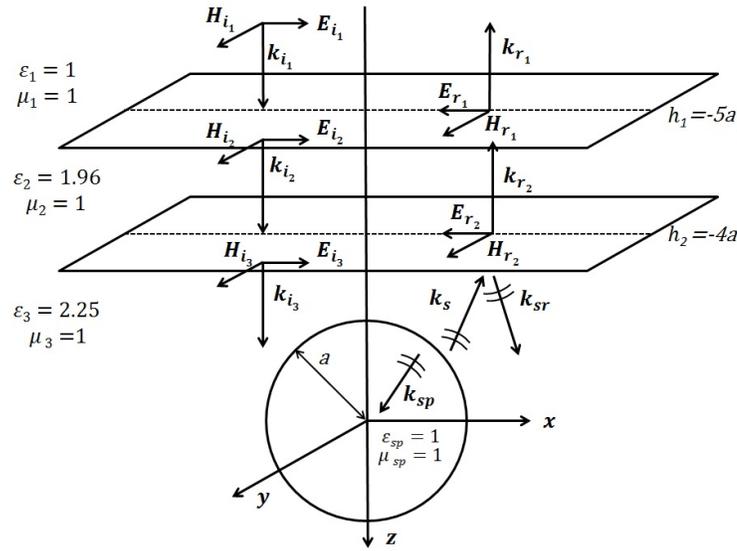


Figura 5.4: Geometria usata per la validazione

Il sistema ottenuto di ordine $[8N(N + 2) \times 8N(N + 2)]$ ammette $8N(N + 2)$ soluzioni, avendo indicato con N l'ordine dello sviluppo dei campi. Per la scelta del criterio di troncamento della serie anche in questo caso può essere utilizzato il criterio enunciato nel capitolo precedente.

5.1.1 Validazione e risultati numerici

Per la validazione del modello si è utilizzato come campo incidente un'onda polarizzata H, ovvero polarizzata linearmente con il campo elettrico diretto lungo l'asse x e il campo magnetico diretto lungo l'asse y entrambi di ampiezza unitaria e propagantesi nel verso positivo delle z ed incidente normalmente rispetto all'interfaccia di separazione aria-mezzo stratificato. Il mezzo stratificato per semplicità è stato considerato costituito da soli due mezzi, nel secondo dei quali era presente una sfera dielettrica. Le proprietà dei mezzi presi in considerazione sono riportate in figura 5.4.

In una configurazione così pensata i coefficienti di riflessione e trasmissione risultano essere:

$$R_H = \frac{(1 - \xi_{12})(1 + \xi_{23})e^{iz_1(k_2+k_1)}e^{iz_2(k_3-k_2)} + (1 + \xi_{12})(1 - \xi_{23})e^{-iz_1(k_2-k_1)}e^{iz_2(k_3+k_2)}}{(1 + \xi_{12})(1 + \xi_{23})e^{iz_1(k_2-k_1)}e^{iz_2(k_3-k_2)} + (1 - \xi_{12})(1 - \xi_{23})e^{-iz_1(k_2+k_1)}e^{iz_2(k_3+k_2)}} \quad (5.1.95)$$

$$T_H = \frac{4}{(1 + \xi_{12})(1 + \xi_{23})e^{iz_1(k_2-k_1)}e^{iz_2(k_3-k_2)} + (1 - \xi_{12})(1 - \xi_{23})e^{-iz_1(k_2+k_1)}e^{iz_2(k_3+k_2)}} \quad (5.1.96)$$

con

$$\xi_{12} = \frac{Z_2 \cos \vartheta_2}{Z_1 \cos \vartheta_1} \quad \xi_{23} = \frac{Z_3 \cos \vartheta_3}{Z_2 \cos \vartheta_2} \quad (5.1.97)$$

$$\vartheta_2 = \arcsin \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \vartheta_1 \right) \quad \vartheta_3 = \arcsin \left(\frac{n_1}{n_3} \sin \vartheta_1 \right) \quad (5.1.98)$$

I coefficienti di riflessione del campo elettrico risulteranno essere pari a:

$$R_E = \frac{Z_1 H_{0r1}}{Z_1 H_{0i1}} = R_H \quad (5.1.99)$$

$$T_E = \frac{Z_3 H_{0i3}}{Z_1 H_{0i1}} = \frac{Z_3}{Z_1} T_H \quad (5.1.100)$$

Per la validazione del modello sviluppato, si sono comparati i risultati ottenuti dal codice Matlab ed il modello costruito con COMSOL; i dati comparati riguardano il campo presente nel mezzo contenente la sfera, ossia la combinazione del campo scatterato con il campo scatterato riflesso. Il campo è stato misurato per diverse frequenze comprese tra 100 MHz e 600 MHz su un punto che si trova sull'asse z ad una quota pari a $z = -2a$, ovvero due volte il raggio della sfera dielettrica, gli altri parametri sono riportati nella figura stessa (Fig. 5.5), in particolare nella prima figura viene riportato l'andamento della parte reale della componente x , mentre nella seconda la parte immaginaria della stessa componente.

Le altre comparazioni sono state fatte per delle determinate frequenze (100, 200, 300 e 400 MHz) misurando il campo lungo una retta parallela all'asse x , posta alla quota $z = -2a$, compresa tra 0 e $2a$; i parametri utilizzati sono riportati nelle figure.

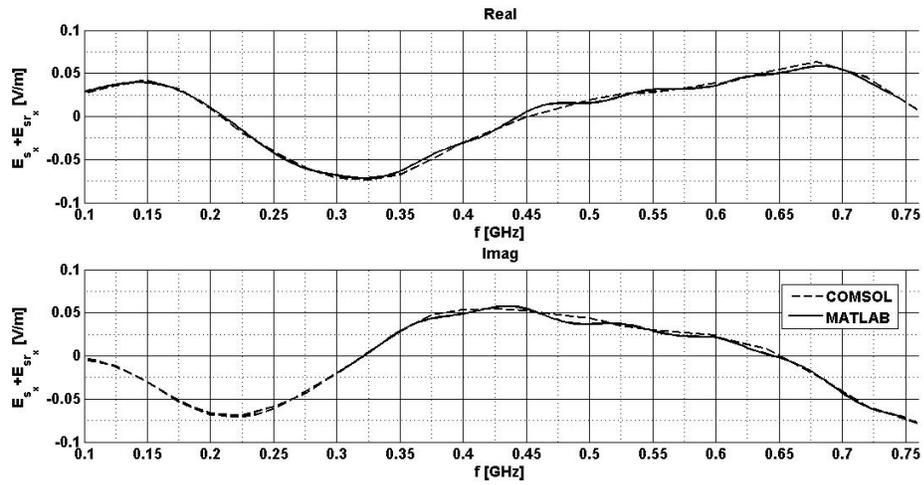


Figura 5.5: Validazione in frequenza

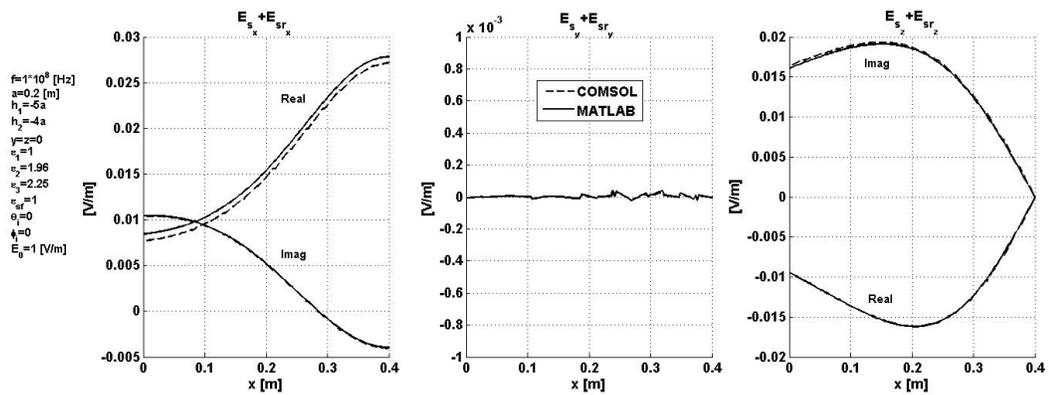


Figura 5.6: Frequenza 100 MHz, costante dielettrica relativa della sfera.

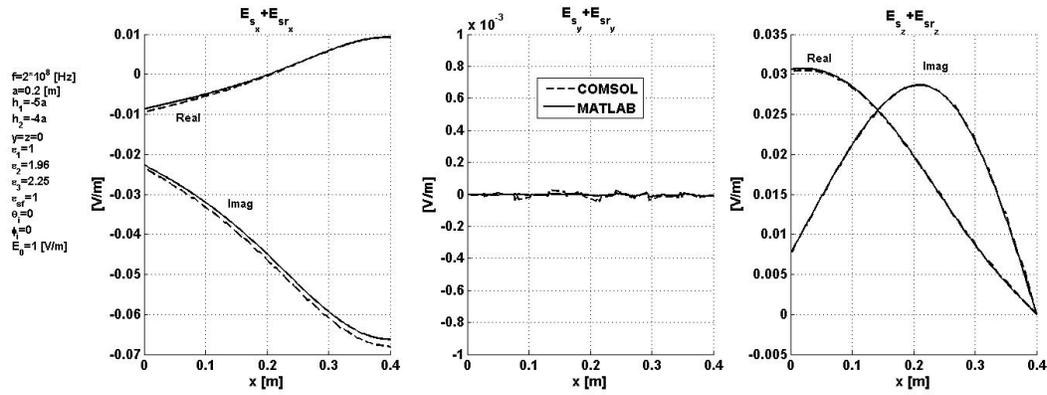


Figura 5.7: Frequenza 200 MHz, costante dielettrica relativa della sfera.

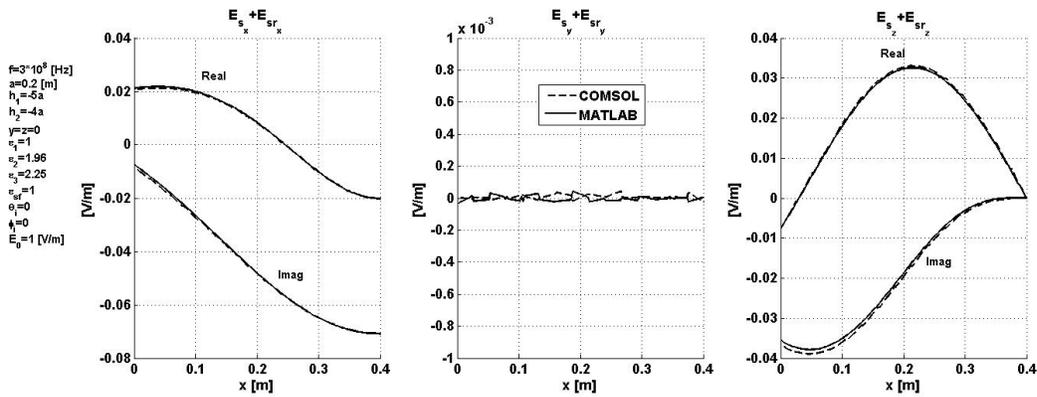


Figura 5.8: Frequenza 300 MHz, costante dielettrica relativa della sfera.

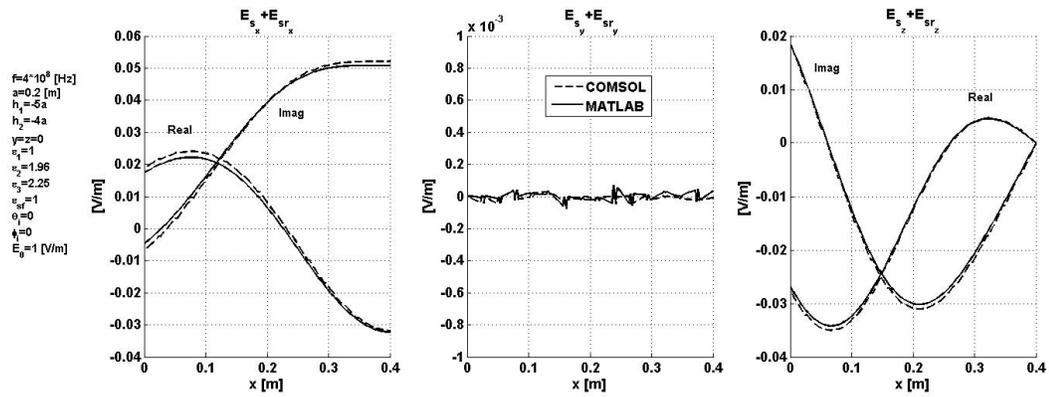


Figura 5.9: Frequenza 400 MHz, costante dielettrica relativa della sfera.

Ciò che possiamo notare da tutte le prove effettuate è che il modello fornisce risultati in ottimo accordo con quanto previsto dal simulatore, per tutte le frequenze prese in considerazione. In definitiva siamo riusciti a sviluppare un nuovo modello per descrivere il caso di una sfera multiconcentrica sepolta in un mezzo stratificato, fondendo il modello a N -strati del tutto analogo a quello delle linee di trasmissione con il metodo dello sviluppo in spettro di onde piane per la sfera sepolta.

Capitolo 6

Tecniche di omogeneizzazione

6.1 Introduzione

In elettromagnetismo, così come in generale, un mezzo può essere definito omogeneo se le proprietà del mezzo presentano lo stesso comportamento in ogni punto dello spazio. Le tecniche di omogeneizzazione si prefissano come scopo principale proprio quello di voler ottenere modelli equivalenti di un mezzo eterogeneo, approssimando il suo comportamento con un materiale omogeneo. Tutte le tecniche di omogeneizzazione si basano sulle equazione del campo elettromagnetico in condizioni di staticità ovvero per la loro determinazione si deve necessariamente passare attraverso le equazioni di Poisson o Laplace, che descrivono rispettivamente il campo elettrico in presenza o in assenza di cariche libere a frequenza nulla. Si vedrà come il concetto di staticità, nell'utilizzazione pratica di tali modelli, potrà essere esteso al concetto di quasi-staticità, infatti si vedrà in quali condizioni tali modelli, nati dalle equazioni del campo statico, risultano validi per frequenze diverse da zero.

6.2 Equazioni di Poisson e Laplace

In questo paragrafo ci prefiggiamo l'obiettivo di ricavare proprio le equazioni di Poisson e di Laplace.

Partiamo col considerare una carica puntiforme q posta al centro di un volume V , racchiuso da una superficie S (chiusa), la legge di Gauss afferma che: *Il flusso totale del campo elettrico che attraversa una superficie S chiusa, che non contiene alcuna carica, è nullo, o nel caso in cui la carica sia presente, il flusso risulterà ad essa proporzionale* [46]. In formule si ha:

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} q/\varepsilon_0, & \text{se } q \text{ interna ad } S \\ 0, & \text{se } q \text{ esterna ad } S \end{cases} \quad (6.2.1)$$

Questo risultato fu dimostrato dal fisico tedesco Karl Friedirch Gauss nel 1835 nell'ambito di uno studio di carattere generale relativo alle forze agenti in modo inversamente proporzionale al quadrato della distanza; per tale motivo prende nome di legge di Gauss, solo successivamente ne è stata data una dimostrazione analitica.

La legge di Gauss può essere fornita anche in modo puntuale, per far ciò bisogna considerare la carica totale contenuta all'interno del volume V .

$$q = \int_V \rho dV \quad (6.2.2)$$

sostituendo quest'ultima relazione nella legge di Gauss si ottiene:

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV \quad (6.2.3)$$

applicando il teorema della divergenza relativamente al primo membro della (6.2.3), si ottiene:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV \quad (6.2.4)$$

portando tutto a primo membro

$$\int_V \left(\nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) dV = 0 \quad (6.2.5)$$

inoltre, dovendo valere per qualsiasi dominio d'integrazione, possiamo imporre l'uguaglianza solo argomento dell'integrale, ottenendo:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (6.2.6)$$

si nota come, laddove $\rho = 0$, ovvero il dominio sia privo di cariche, si ha un campo cosiddetto solenoidale. Ritornando al caso generale in condizioni di staticità l'equazione di Maxwell ci dice che $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, cioè che il campo elettrico è irrotazionale, ciò implica l'esistenza di una funzione potenziale Φ , che si lega con il campo elettrico attraverso la seguente relazione $E = -\nabla\Phi$:

$$\nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (6.2.7)$$

Questa relazione è nota come equazione di Poisson e fu dimostrata la prima volta da Siméon-Denis Poisson nel 1813.

Ora se prendessimo in considerazione il caso in cui fossero assenti tutte le cariche, cioè $\rho = 0$, si ottiene:

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad (6.2.8)$$

tale relazione è nota come equazione di Laplace che la riscoprì nel 1796 (Pierre Simon Laplace) dopo che Leonhard Euler la scoprì per la prima volta nel 1756.

6.3 Risoluzione dell'equazioni di Laplace

Cerchiamo ora di risolvere l'equazione di Laplace in coordinate sferiche (Fig. 6.1), visto che il nostro obiettivo sarà quello di andare a determinare la risposta di una mistura le cui inclusioni verranno considerate inizialmente di geometria sferica.

Riscriviamo quindi l'equazione di Laplace in coordinate sferiche:

$$\nabla^2\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (6.3.1)$$

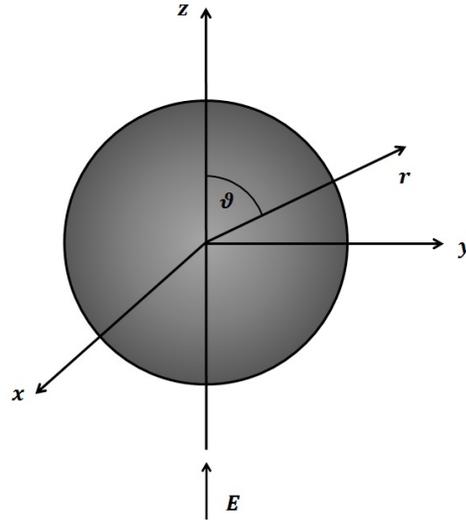


Figura 6.1: Sistema di coordinate polari.

Cerchiamo una soluzione del problema applicando il metodo di separazione delle variabili: $\Phi(\mathbf{r}) = R(r)\vartheta(\vartheta)$ avendo trascurato la dipendenza da φ , data la simmetria del problema. Sostituendo quest'ultima equazione nell'equazione di Laplace in coordinate sferiche si ottengono le seguenti equazioni differenziali [47]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - kR &= 0 \\ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d\vartheta}{d\vartheta} \right) + k\vartheta &= 0 \end{aligned} \quad (6.3.2)$$

con $k = n(n+1)$ costante di separazione ed $n \in \mathbb{N}^0$.

La prima equazione è nota come equazione differenziale di Euler-Cauchy (o equazione equidimensionale), la cui soluzione va cercata nella forma: $R(r) = r^m$. Nel nostro caso la soluzione sarà:

$$R(r) = C_1 r^n + C_2 r^{-(n+1)} \quad (6.3.3)$$

La seconda equazione è nota come equazione differenziale di Legendre ed am-

mette come soluzione il cosiddetto polinomio di Legendre di grado n :

$$P_n(\cos \vartheta) = \frac{2^n}{n!} \frac{d^n}{d \cos \vartheta^n} (\cos^2 \vartheta - 1)^n \quad (6.3.4)$$

riporto per semplicità i primi tre sviluppi del polinomio di Legendre:

$$\begin{aligned} P_0(\cos \vartheta) &= 1 \\ P_1(\cos \vartheta) &= \cos \vartheta \\ P_2(\cos \vartheta) &= \frac{1}{2}(3 \cos^2 \vartheta - 1) \\ &\dots \end{aligned} \quad (6.3.5)$$

Pertanto la funzione differenziale ammette due classi di soluzioni fisicamente accettabili ed indipendenti:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= r^n P_n(\cos \vartheta) \\ \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{P_n(\cos \vartheta)}{r^{n+1}} \end{aligned} \quad (6.3.6)$$

queste due funzioni sono note anche come armoniche zonali, in quanto mettono in evidenza le variazioni del campo in funzione della latitudine in condizione di simmetria rispetto all'asse polare.

Considerando il set completo di soluzioni dell'equazione di Laplace, si ha:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}} \right] P_n(\cos \vartheta) \quad (6.3.7)$$

Viceversa in tutti quei casi in cui tale simmetria non è rispettata il potenziale dovrà necessariamente prendere in considerazione anche la dipendenza dalla variabile φ , quindi in questo caso l'equazione di Laplace fornirà tre equazioni differenziali, il particolare la funzione dipendente solo da φ , ci darà:

$$\frac{d^2 \Psi}{d\varphi^2} + m^2 \Psi = 0 \quad (6.3.8)$$

si nota che la nuova equazione è semplicemente una equazione differenziale omoge-

nea del secondo grado la cui soluzione sarà:

$$\Psi(\varphi) = C_3 \cos(m\varphi) + iC_4 \sin(m\varphi) = Ce^{im\varphi} \quad (6.3.9)$$

mettendo insieme tutte le soluzioni trovati si ottiene:

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[a_{mn} r^n + \frac{b_{mn}}{r^{n+1}} \right] P_n^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi} \quad (6.3.10)$$

Pertanto la funzione differenziale in generale ammette due classi di soluzioni fisicamente accettabili ed indipendenti:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= r^n P_n(\cos \vartheta) e^{im\varphi} \\ \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{P_n(\cos \vartheta)}{r^{n+1}} e^{im\varphi} \end{aligned} \quad (6.3.11)$$

note anche come armoniche solide regolari ed irregolari, rispettivamente, che vanno a descrivere il potenziale sia in direzione entrante, cioè verso l'origine degli assi, che in direzione uscente ovvero verso $r \rightarrow \infty$.

6.4 Modello di omogeneizzazione di una sfera

Si consideri una sfera dielettrica caratterizzata da una costante dielettrica ε_s di raggio a centrato rispetto un sistema di riferimento cartesiano ed immerso in un mezzo caratterizzato da una costante dielettrica pari ad ε_a (Fig. 6.2). Si consideri inoltre un campo elettrico uniforme la cui direzione coincide con l'asse z del predetto sistema di riferimento. Data la simmetria azimutale del problema, come detto precedentemente, la funzione potenziale risulta essere indipendente dalla direzione φ , si sceglie pertanto per semplicità di lavorare sul piano $\varphi = 0$.

Come visto in precedenza in ogni dominio spaziale il potenziale elettrostatico in

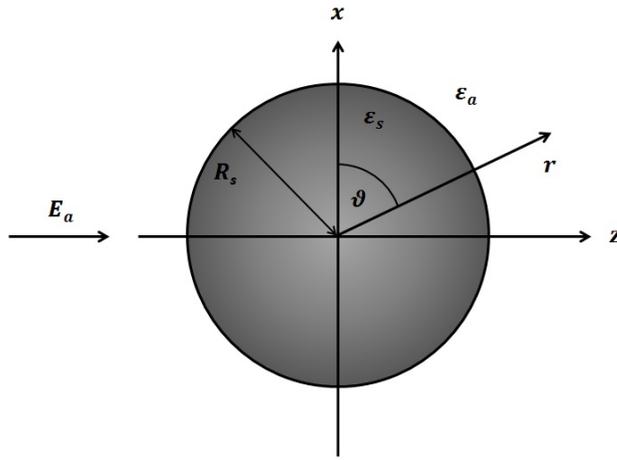


Figura 6.2: Sfera dielettrica nello spazio libero.

esso presente può essere espresso attraverso la (6.3.7), e quindi:

$$\Phi_a(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_{a_n} r + \frac{b_{a_n}}{r^2} \right) \cos \vartheta \quad (6.4.1)$$

$$\Phi_s(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_{s_n} r + \frac{b_{s_n}}{r^2} \right) \cos \vartheta \quad (6.4.2)$$

A questo punto per poter determinare le incognite del problema bisogna imporre le condizioni al contorno sulla superficie della sfera e a distanza infinita dalla stessa, cioè bisogna calcolare i valori da attribuire alle costanti in modo che sulla superficie sferica siano verificate le condizioni di equipotenzialità e a grande distanza che il campo elettrico sia uguale a quello imperturbato ovvero al campo costante esistente prima dell'introduzione della sfera nel dominio di interesse:

$$\Phi_a(\mathbf{r}) = \Phi_s(\mathbf{r}) \text{ per } r = a \quad (6.4.3)$$

$$\varepsilon_a \frac{\partial \Phi_a(\mathbf{r})}{\partial r} = \varepsilon_s \frac{\partial \Phi_s(\mathbf{r})}{\partial r} \text{ per } r = a \quad (6.4.4)$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \mathbf{E}_a(\mathbf{r}) = E_a \mathbf{z} \quad (6.4.5)$$

Dalla condizione all'infinito, considerando il potenziale elettrostatico, si ha:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \Phi_a(\mathbf{r}) = -E_a r \cos \vartheta \quad (6.4.6)$$

dalla quale si ottiene $a_{a_1} = -E_a$. Per quanto riguarda il potenziale nella sfera si nota come esso debba assumere valori finiti in $r = 0$, in quanto avevamo inizialmente considerato l'assenza di cariche in quel punto ed in generale in tutta la sfera, quindi possiamo imporre $b_s = 0$. Pertanto i potenziali nei mezzi possono essere espressi come segue:

$$\Phi_a(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-E_{a_n} \delta_{n1} r^n + \frac{b_{a_n}}{r^2} \right) P_n(\cos \vartheta) \quad (6.4.7)$$

$$\Phi_s(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{s_n} r P_n(\cos \vartheta) \quad (6.4.8)$$

avendo indicato con δ_{n1} il delta di Kronecker ($\delta_{nm} = 1$ per $n = m$ e $\delta_{nm} = 0$ negli altri casi). Passo adesso al calcolo delle derivate rispetto la direzione radiale dei due potenziali per inserire le espressioni nelle (6.4.3) e (6.4.4),

$$\frac{\partial \Phi_a(\mathbf{r})}{\partial r} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-n E_{a_n} \delta_{n1} r^{n-1} - (n+1) \frac{b_{a_n}}{r^{n+2}} \right] P_n(\cos \vartheta) \quad (6.4.9)$$

$$\frac{\partial \Phi_s(\mathbf{r})}{\partial r} = \sum_{n=0}^{\infty} n a_{s_n} r^{n-1} P_n(\cos \vartheta) \quad (6.4.10)$$

sostituisco le espressioni trovate nelle condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \sum_n \frac{b_{a_n}}{R^3} - a_{s_n} - E_a \delta_{n1} = 0 \\ \sum_n -2 \frac{b_{a_n}}{R^3} - a_{s_n} \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_a} - E_a \delta_{n1} = 0 \end{cases} \quad (6.4.11)$$

noto sin da subito, data la presenza del delta di Kronecker in entrambe le equazioni che avrò risultati diversi da zero solo per $n = 1$, quindi nel nostro caso particolare (Fig. 6.1) di simmetria azimutale, il potenziale elettrostatico assumerà una forma molto più semplice. Riscrivo quindi le condizioni al contorno alla luce di quanto

detto:

$$\begin{cases} \frac{b_a}{R^3} - a_s = E_a \\ -2\frac{b_a}{R^3} - a_s x = E_a \end{cases} \quad (6.4.12)$$

avendo indicato con x il rapporto tra le costanti dielettriche $x = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_a}$, tale grandezza prende nome di *contrasto dielettrico* e risulterà un parametro molto importante in quanto permetterà di caratterizzare una mistura tramite la conoscenza di solo tale parametro, come vedremo successivamente. Risolvendo il sistema, ad esempio effettuando il rapporto tra le due equazioni e portando a primo membro l'incognita b_s , che è proprio quella che ci interessa in quanto caratterizza il campo esterno, si ha:

$$b_a = E_a R^3 \frac{x-1}{x+2} = E_a R^3 \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_a}{\varepsilon_s + 2\varepsilon_a} \quad (6.4.13)$$

successivamente il secondo coefficiente darà come risultato

$$a_s = -E_a \frac{3\varepsilon_a}{x+2} = -E_a \frac{3\varepsilon_a}{\varepsilon_s + 2\varepsilon_a} \quad (6.4.14)$$

Come verrà mostrato successivamente il parametro b_a potrà essere utilizzato per la determinazione della polarizzabilità α del sistema e di conseguenza la costante dielettrica efficace ε_{eff} ottenendo pertanto il parametro che ci permette di caratterizzare il sistema costituito da una sfera ed il mezzo in cui è immerso come un unico mezzo omogeneo.

Per completezza si riporta la forma del potenziale elettrostatico presente esternamente ed internamente alla sfera:

$$\Phi_a(\mathbf{r}) = -E_a \left(r - \frac{R^3}{r^2} \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_a}{\varepsilon_s + 2\varepsilon_a} \right) \cos \vartheta \quad (6.4.15)$$

$$\Phi_s(\mathbf{r}) = -E_a \frac{3\varepsilon_a}{\varepsilon_s + 2\varepsilon_a} r \cos \vartheta. \quad (6.4.16)$$

Prima di passare oltre vogliamo determinare i coefficienti dello sviluppo del potenziale elettrostatico nel caso di sfera PEC (Perfect Electric Conductor), in questo paragrafo si determineranno tali coefficienti, semplicemente imponendo il limite

tendente all'infinito della costante dielettrica della sfera, infatti sappiamo che per un conduttore perfetto si ha $\varepsilon_c = \infty$. Nei paragrafi successivi, comunque ricaveremo tali coefficienti imponendo le condizioni al contorno verificando che effettivamente i coefficienti determinati nelle due diverse metodologie coincidano.

Quindi considerando il caso dielettrico si avrà sicuramente $a_s = 0$ essendo un conduttore non si ha un campo interno alla sfera stessa, mentre per la componente del potenziale uscente si ha:

$$\lim_{\varepsilon_c \rightarrow \infty} b_a = \lim_{\varepsilon_c \rightarrow \infty} E_a R^3 \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_a}{\varepsilon_s + 2\varepsilon_a} = E_a R^3 \quad (6.4.17)$$

Ricapitolando i potenziali trovati sono:

$$\Phi_a(\mathbf{r}) = -E_a \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \vartheta \quad (6.4.18)$$

$$\Phi_s(\mathbf{r}) = 0. \quad (6.4.19)$$

Abbiamo già accennato al fatto che i modelli statici che finora abbiamo determinato, ma comunque qualsiasi altro modello che si basa su approssimazioni di quasi-staticità, possono essere estesi al concetto di quasi-staticità, ovvero si estende il dominio di validità di tale modello per frequenze maggiori di zero. Infatti si vedrà come per ogni modello potrà essere effettuato uno studio in frequenza per poter determinare o in modo empirico o in maniera analitica le condizioni di quasi-staticità.

Avendo studiato il caso di sfera dielettrica nello spazio libero si vuole determinare empiricamente la condizione di validità del modello quasi-statico, che in via del tutto generale può essere sempre espresso come:

$$R_{max} \ll \lambda_0 \quad (6.4.20)$$

tale condizione afferma che: la dimensione geometrica massima dello scatteratore che si sta considerando deve essere necessariamente molto più piccolo della lunghezza del campo esterno. Prendiamo in considerazione il caso di una sfera dielettrica

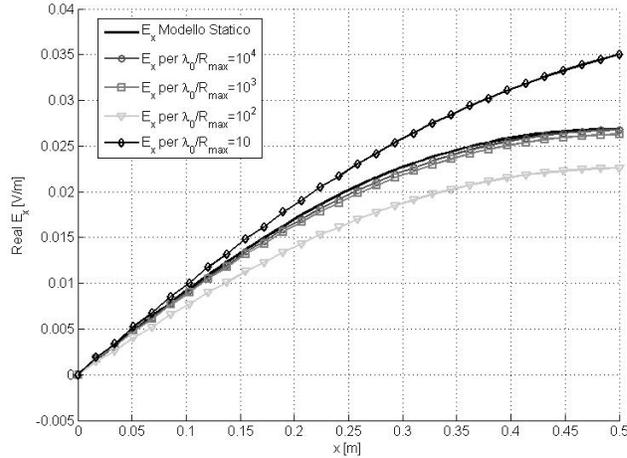


Figura 6.3: Componenti cartesiane del campo elettrico scatterato dalla sfera dielettrica. In particolare con le linee continue si sono rappresentati le componenti x (in grigio) ed z (in nero) del campo elettrico ottenuti da Matlab e le linee discontinue le componenti x (quadrati) e z (cerchi) ottenuti con le simulazioni Comsol

di permittività pari a $\varepsilon_s = 2$ immersa in aria e di raggio $r = 0.5$ m, cosicché la dimensione massima del modello risulta essere pari ad 1 m.

Prendendo in considerazione il campo elettrico scatterato su un segmento al variare della frequenza e quindi della lunghezza d'onda, si vuole determinare quella frequenza per cui il modello in approssimazione statica risulta sufficientemente adeguato a rappresentare il modello dinamico. Il segmento su cui verrà determinato il campo elettrico è un segmento di lunghezza pari al raggio della sfera, posto ad una quota pari a $z = -2r$ e diretto parallelamente all'asse positivo delle x . Sono stati studiati 4 casi al variare del rapporto λ_0/R_{max} e confrontati con i risultati forniti dal modello statico (Fig. 6.3). Si può notare dalla figura come già per $\lambda_0/R_{max} < 1000$ i risultati risultano perfettamente concordanti, possiamo quindi affermare, che per una sfera di diametro unitario ($R = 0.5$ m), il modello risulta valido se la geometria è eccitata con un campo elettrico esterno caratterizzata da una frequenza minore di circa 0.3 MHz, che ovviamente è diverso dal caso statico ($f = 0$ Hz). Pertanto i modelli statici si possono essere notevolmente estesi, se per

ogni caso particolare si riesce ad individuare la condizione di quasi-staticità.

6.4.1 Validazione del modello omogeneizzato

Per validare il modello, come fatto nei capitoli precedenti, si procederà tramite il confronto numerico tra i risultati ottenuti con Comsol e ciò che si ottiene con Matlab. In particolare confronteremo le componenti del campo elettrico esterno alla sfera, che come abbiamo visto, è legato con il potenziale elettrostatico attraverso l'operatore di gradiente:

$$\mathbf{E}_0 = -\nabla\Phi \quad (6.4.21)$$

che espresso in coordinate sferiche a meno della dipendenza dalla variabile φ a causa della assialsimmetria del problema, si ha:

$$\mathbf{E}_0(r, \vartheta, \varphi) = -\frac{\partial\Phi_0}{\partial r}\mathbf{r}_0 + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_0}{\partial\vartheta}\boldsymbol{\vartheta}_0 \quad (6.4.22)$$

con

$$\Phi_0 = \left(-E_a r + \frac{b^0}{r^2}\right) \cos\vartheta \quad (6.4.23)$$

si ottiene il campo espresso come combinazione delle due componenti ortogonali:

$$\mathbf{E}_0(r, \vartheta, \varphi) = \left(E_a r + 2\frac{b^0}{r^3}\right) \cos\vartheta\mathbf{r}_0 + \left(-E_a r + \frac{b^0}{r^3}\right) \sin\vartheta\boldsymbol{\vartheta}_0 \quad (6.4.24)$$

Prendiamo come caso di studio inizialmente una sfera di vetro ($\varepsilon_s = 2.25$) e successivamente una sfera PEC di raggio $R = 0.1$ m ed immersa in aria. Il campo esterno è un campo elettrico diretto lungo z con valore unitario $E_a = 1V/m$, la risposta del sistema è misurata su una linea parallela all'asse x di coordinate $([0; R], 0, 2R)$. Si vede dal confronto dei risultati (Figg. 6.4 e 6.5) che gli andamenti ottenuti sono del tutto coincidenti tra loro. Con questo confronto non solo siamo riusciti a validare il modello, ma anche a validare la bontà dei risultati ottenuti dal simulatore, infatti per lavorare in approssimazione quasi-statica è necessario

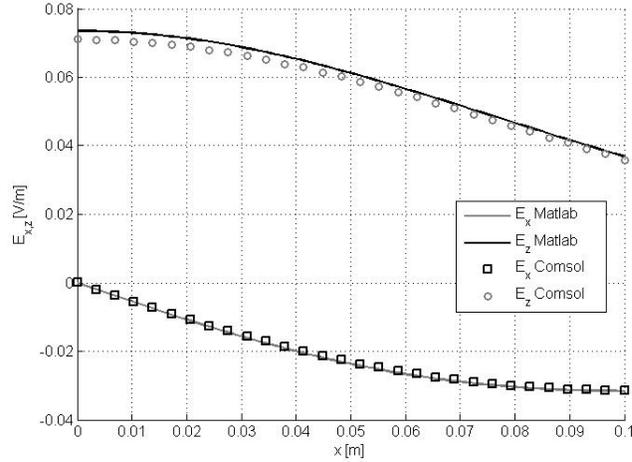


Figura 6.4: Componenti cartesiane del campo elettrico scatterato dalla sfera dielettrica. In particolare con le linee continue si sono rappresentati le componenti x (in grigio) ed z (in nero) del campo elettrico ottenuti da Matlab e le linee discontinue le componenti x (quadrati) e z (cerchi) ottenuti con le simulazioni Comsol

lavorare a frequenze molto basse, mettendo a dura prova il solver implementato su Comsol.

6.5 Mixing Formula

Abbiamo già accennato alla possibilità di poter omogeneizzare la materia a partire dalla conoscenza della polarizzabilità del sistema. Si deve pertanto iniziare la trattazione con la determinazione di tale quantità. Esistono essenzialmente due metodologie per quantificare la polarizzabilità di un'inclusione con permittività $\varepsilon(\mathbf{r})$ immerso in un mezzo nel quale è presente un campo statico o quasi-statico.

Il primo metodo si basa sulla conoscenza che si ha del campo interno all'inclusione ed in particolare parte dalla definizione stessa di momento di dipolo [48]:

$$\mathbf{p} = \int_V [\varepsilon(\mathbf{r}) - \varepsilon_a] \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV \quad (6.5.1)$$

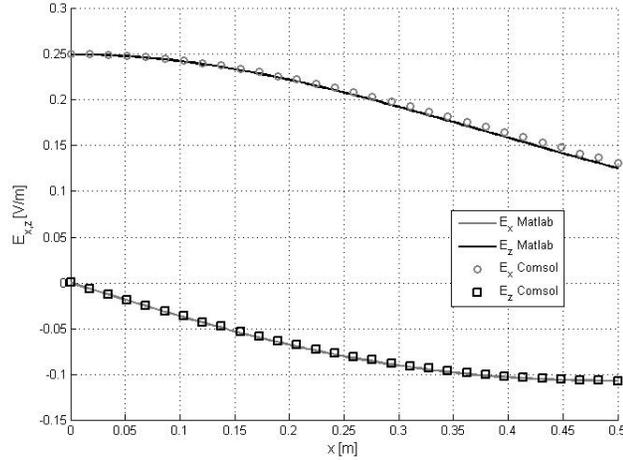


Figura 6.5: Componenti cartesiane del campo elettrico scatterato dalla sfera PEC. In particolare con le linee continue si sono rappresentati le componenti x (in grigio) ed z (in nero) del campo elettrico ottenuti da Matlab e le linee discontinue le componenti x (quadrati) e z (cerchi) ottenuti con le simulazioni Cmsol

avendo indicato con \mathbf{E} il campo elettrico interno al volume V e con ε_a la permittività dielettrica del mezzo contenente l'inclusione di permittività $\varepsilon(\mathbf{r})$.

Il secondo metodo è quello di considerare il campo esterno, cioè fuori dall'inclusione. Infatti in presenza dell'oggetto scatterante immerso nel campo costante, si genera una perturbazione del campo con una dipendenza pari all'inverso del cubo della distanza. Questa perturbazione è il campo statico del dipolo localizzato nel centro dell'inclusione e dall'ampiezza di questa perturbazione esterna può essere dedotta l'intensità del dipolo equivalente orientata come il campo uniforme, infatti ricordando che la componente dipolare della soluzione per il potenziale esterno è della forma $\frac{b_a}{r^2} \cos \vartheta$, il coefficiente dello sviluppo determina il momento di dipolo come [49]:

$$\mathbf{p} = 4\pi\varepsilon_a b_a \mathbf{z}_0. \quad (6.5.2)$$

dove b_a è proprio il coefficiente del termine del potenziale (esterno) uscente (irregolare) dall'inclusione precedentemente determinato (6.4.13). Una volta noto il

momento di dipolo la polarizzabilità potrà essere determinata come:

$$\alpha = \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{E}_a} \quad (6.5.3)$$

ricordando che \mathbf{E}_a , rispetto alla figura 6.2, era definita come $\mathbf{E}_a = E_a \mathbf{z}_0$, si ha:

$$\alpha = 4\pi\epsilon_a \frac{b_a}{E_a}. \quad (6.5.4)$$

Se si considera il caso particolare di sfera dielettrica nello spazio libero ed utilizzando il valore di b_a determinato dalla relazione (6.4.13), si ottiene che la polarizzabilità del sistema è:

$$\alpha = \frac{4}{3}\pi R^3 3\epsilon_a \frac{\epsilon_s - \epsilon_a}{\epsilon_s + 2\epsilon_a} = 3V\epsilon_a \frac{\epsilon_s - \epsilon_a}{\epsilon_s + 2\epsilon_a}. \quad (6.5.5)$$

avendo indicato con V il volume della sfera di raggio R .

Passiamo adesso al concetto di permittività dielettrica efficace di una miscela. Tale grandezza può essere determinata a partire dalla conoscenza della polarizzabilità e del momento di dipolo dovuti dalla presenza degli scatteratori costituenti proprio il mezzo eterogeneo. Consideriamo inizialmente una miscela (Fig. 6.6), costituita da un mezzo ϵ_a ospitante n inclusioni nell'unità di volume ($[m^{-3}]$) ognuna caratterizzata da una propria polarizzabilità α_i . Considerando il sistema da un punto di vista macroscopico la relazione del mezzo (omogeneizzato) è:

$$\langle \mathbf{D} \rangle = \epsilon_{eff} \langle \mathbf{E} \rangle \quad (6.5.6)$$

denotando con $\langle \mathbf{F} \rangle = \frac{1}{V_{mix}} \int_{V_{mix}} f(\mathbf{r}) dV$, inoltre considerando che l'induzione elettrica è definita come la sovrapposizione dei fenomeni del campo elettrico con il materiale considerato e la polarizzazione elettrica:

$$\langle \mathbf{D} \rangle = \epsilon_a \langle \mathbf{E} \rangle + \langle \mathbf{P} \rangle \quad (6.5.7)$$

quindi

$$\epsilon_{eff} \langle \mathbf{E} \rangle = \epsilon_a \langle \mathbf{E} \rangle + \langle \mathbf{P} \rangle \quad (6.5.8)$$

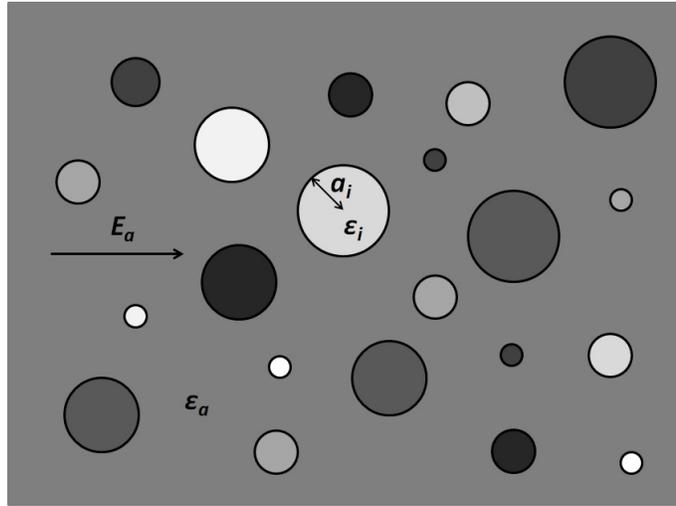


Figura 6.6: Sistema eterogeneo costituito da un materiale di background ε_a ed n inclusioni ciascuna caratterizzata da un proprio raggio a_i ed una propria costante dielettrica ε_i .

ovvero

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon_a + \frac{\langle \mathbf{P} \rangle}{\langle \mathbf{E} \rangle} \quad (6.5.9)$$

Oltre a ciò sappiamo che la polarizzazione media può essere calcolata a partire dai momenti di dipoli \mathbf{p} delle singole inclusioni

$$\langle \mathbf{P} \rangle = n \mathbf{p}_{mix} \quad (6.5.10)$$

inoltre il momento di dipolo di una singola inclusione dipende dalla sua polarizzabilità e dal campo esterno:

$$\mathbf{p}_{mix} = \alpha \mathbf{E}_a \quad (6.5.11)$$

quindi

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon_a + \frac{n \alpha \mathbf{E}_a}{\langle \mathbf{E} \rangle} \quad (6.5.12)$$

ora se il mezzo fosse costituita da inclusioni di densità molto diluita, si ha che

Tabella 6.1: Tabella dei Diadici di Sorgente per diverse geometrie.

<i>Geometria</i>	<i>Diadica di sorgente</i>	<i>Note</i>
Ellissoide	$\frac{\mathbf{L}}{\varepsilon_0} = L_1 \mathbf{u}_x \mathbf{u}_x + L_2 \mathbf{u}_y \mathbf{u}_y + L_3 \mathbf{u}_z \mathbf{u}_z$	scalare
Sfera	$\frac{\mathbf{I}}{3}$	vettoriale
Cilindro	$(1 - \cos \vartheta_0) \mathbf{u}_z \mathbf{u}_z + \frac{1}{2} \cos \vartheta_0 \mathbf{I}_t$	scalare
Cubo	$\frac{\mathbf{I}}{3}$	scalare

$\mathbf{E}_a = \langle \mathbf{E} \rangle$, quindi

$$\varepsilon_{eff} \approx \varepsilon_a + n\alpha \quad (6.5.13)$$

ovvero in una soluzione diluita la permittività efficace del sistema dipende essenzialmente solo dalla permittività del mezzo di background e dalle singole polarizzazione, trascurando quindi le varie interazione tra le inclusioni. In generale però la relazione prima fornita non risulta valida e la relazione che lega il campo elettrico con il campo medio è stato fornita da Yaghjian [50]:

$$\mathbf{E}_a = \langle \mathbf{E} \rangle + \frac{1}{\varepsilon_a} \mathbf{L} \cdot \langle \mathbf{P} \rangle \quad (6.5.14)$$

dove \mathbf{L} è nota come diadica di depolarizzazione o di sorgente che dipende dalla forma delle inclusioni, in letteratura sono presenti le forme di tale diadica per tutte le principali forme geometriche (Tab. 6.1), tali modelli nati da equazioni di campo statico possono essere estese nel caso di frequenza diverse da zero basta rispettare la condizione di quasi-staticità proposta sempre da Yaghjian, che impone che la dimensione geometrica massima del sistema preso in considerazione sia minore di circa un sesto della lunghezza dell'onda incidente:

$$d_{max} < \frac{\lambda_a}{2\pi}. \quad (6.5.15)$$

In particolare nel caso di forma sferica il diadico si riduce ad uno scalare:

$$\mathbf{L} = \frac{\mathbf{I}}{N} = \frac{\mathbf{I}}{3} \quad (6.5.16)$$

con \mathbf{I} matrice identità ed il fattore $N = 1/3$ è noto come fattore di depolarizzazione che nel caso di una sfera assume proprio il valore di un terzo.

Un altro caso di notevole importanza è quello delle inclusioni di forma ellittica, in questo caso particolare si ha:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^3 N_i \mathbf{u}_{0i} \otimes \mathbf{u}_{0i} \quad (6.5.17)$$

con \mathbf{u}_{0i} i versori nelle 3 direzioni cartesiane ed con N_i fattori di depolarizzazione per ciascuno dei tre semiassi dell'ellissoide [48]:

$$\begin{aligned} N_a &= \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{(s+a^2)[(s+a^2)(s+b^2)(s+c^2)]^{1/2}} \\ N_b &= \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{(s+b^2)[(s+a^2)(s+b^2)(s+c^2)]^{1/2}} \\ N_c &= \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{(s+c^2)[(s+a^2)(s+b^2)(s+c^2)]^{1/2}} \end{aligned} \quad (6.5.18)$$

con $N_a + N_b + N_c = 1$.

Riprendendo in considerazione il caso di inclusione sferica e considerando le equazioni (6.5.10), (6.5.11), (6.5.15) e (6.5.16), si ha:

$$\frac{\mathbf{E}_a}{\langle \mathbf{E} \rangle} = \frac{3\varepsilon_a}{3\varepsilon_a - n\alpha} \quad (6.5.19)$$

Sostituendo quest'ultima equazione nella (6.5.12) si ottiene la formula per la determinazione della permittività efficace nel caso di una mistura costituita da una singola sfera:

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon_a + 3\varepsilon_a \frac{n\alpha}{3\varepsilon_a - n\alpha} \quad (6.5.20)$$

Questa equazione può essere riscritta nella forma di Lorentz-Lorenz:

$$\frac{\varepsilon_{eff} - \varepsilon_a}{\varepsilon_{eff} + 2\varepsilon_a} = \frac{n\alpha}{3\varepsilon_a} \quad (6.5.21)$$

nota anche come formula delle misture di Clausius-Mosotti.

Quest'ultima relazione può essere tranquillamente estesa al caso di N inclusioni ciascuna caratterizzata dalla propria polarizzabilità α_i ,

$$\frac{\varepsilon_{eff} - \varepsilon_a}{\varepsilon_{eff} + 2\varepsilon_a} = \sum_{i=1}^N \frac{n_i \alpha_i}{3\varepsilon_a} \quad (6.5.22)$$

l'unica restrizione imposta dall'utilizzo di tale formula è quella che la mistura sia distribuita omogeneamente nel dominio preso in considerazione e che ogni inclusione sferica rispetti la condizione di quasi-staticità.

Utilizzando la formula (6.5.22) di Clausius-Mosotti per la determinazione della costante dielettrica efficace e considerando il caso di una sfera dielettrica nello spazio libero la cui polarizzabilità è espressa attraverso l'equazione (6.5.5), si ha:

$$\frac{\varepsilon_{eff} - \varepsilon_a}{\varepsilon_{eff} + 2\varepsilon_a} = f \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_a}{\varepsilon_s + 2\varepsilon_a} \quad (6.5.23)$$

avendo indicato con f la frazione volumetrica della fase scatterante della mistura e definita come: $f = nV = n\frac{4}{3}\pi R^3$. Tale equazione è nota come equazione delle misture di Rayleigh e che può essere scritta nella forma più conosciuta e nota come formula delle misture di Maxwell-Garnett:

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon_a + 3\varepsilon_a \frac{f \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_a}{\varepsilon_s + 2\varepsilon_a}}{1 - f \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_a}{\varepsilon_s + 2\varepsilon_a}} \quad (6.5.24)$$

Questa equazione analogamente al caso precedente (6.5.22), può essere estesa al caso di un numero N di sfere ciascuna caratterizzata dalla propria costante dielettrica e dal proprio raggio (Fig. 6.6):

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon_a + 3\varepsilon_a \frac{\sum_{i=1}^N f_i \frac{\varepsilon_{s_i} - \varepsilon_a}{\varepsilon_{s_i} + 2\varepsilon_a}}{1 - \sum_{i=1}^N f_i \frac{\varepsilon_{s_i} - \varepsilon_a}{\varepsilon_{s_i} + 2\varepsilon_a}} \quad (6.5.25)$$

inoltre non avendo fatto nessuna ipotesi sulle costanti dielettriche dei mezzi in gioco, queste possono essere considerate complesse.

Passiamo adesso a fare delle considerazioni sull'equazione di Maxwell-Garnett,

in particolare si nota che per soluzioni molto diluite, ovvero per $f \ll 1$ la mixing formula si semplifica in:

$$\varepsilon_{eff} \approx \varepsilon_a + 3\varepsilon_a f \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_a}{\varepsilon_s + 2\varepsilon_a} \quad (6.5.26)$$

inoltre nei casi limite di $f = 0$, si ha $\varepsilon_{eff} = \varepsilon_a$ e per $f = 1$, si ha $\varepsilon_{eff} = \varepsilon_s$, proprio come ci si aspettava.

6.6 Polarizzabilità di una sfera dielettrica

Abbiamo già visto la relazione della polarizzabilità di una sfera dielettrica (6.5.5), un'altra grandezza molto importante da prendere in considerazione nello studio di sistemi omogeneizzati è la cosiddetta polarizzabilità normalizzata, essa è definita nel seguente modo:

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha}{V\varepsilon_s} = 3 \frac{x - 1}{x + 2} \quad (6.6.1)$$

avendo utilizzato il concetto di contrasto dielettrico che ricordiamo essere definito come il rapporto tra la costante dielettriche della sfera e la costante dielettrica dell'ambiente in cui è immersa, cioè $x = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_a}$. La relazione (6.6.1) è una relazione molto importante poiché permette di caratterizzare un oggetto tridimensionale per mezzo del solo parametro x .

Andando a graficare l'andamento di $\bar{\alpha}(x)$ si ottiene la figura 6.7. Analizzando il suo andamento si nota che essa per x tendente a più/meno infinito, assume un valore pari a 3, che per $x = 0$, assume un valore pari a $\bar{\alpha} = -\frac{3}{2}$ e che presenta un asintoto per $x = -2$, questa singolarità è molto importante ed è dovuta alla risonanza elettrostatica dell'inclusione ed è nota come plasmone superficiale o plasmone di Fröhlich.

Un'altra considerazione che può essere fatta è determinare il valore di x per cui la polarizzabilità assume valore nullo e ciò si ottiene per $x = 1$, ovvero proprio come ci aspettavamo quando i mezzi che costituiscono le inclusioni ed il mezzo di background assumono banalmente un valore uguale.

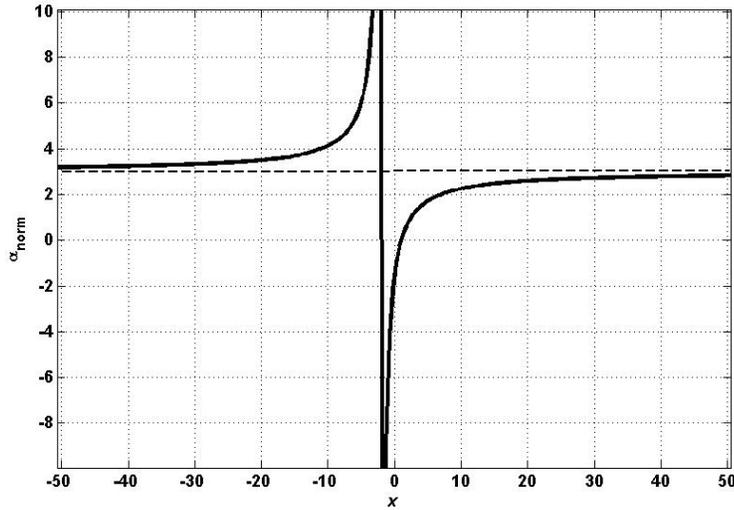


Figura 6.7: Andamento della polarizzabilità normalizzata di una sfera dielettrica in funzione del contrasto dielettrico.

Vogliamo vedere cosa succede se si prendesse in considerazione una sfera costituita da materiale conduttore elettrico perfetto (PEC) invece che una sfera dielettrica. Tutti i concetti finora espressi possono essere applicati a questo caso particolare. In questo caso il potenziale interno alla sfera si riduce a zero, e la condizione al contorno si riduce ad una singola equazione, ovvero si impone che il potenziale esterno alla sfera sia uguale al potenziale superficiale U_0 che aveva la sfera PEC prima della perturbazione:

$$\Phi_0(\mathbf{r}) = U_0 \quad \text{per } r = R \quad (6.6.2)$$

con $\Phi_0(\mathbf{r}) = (-E_a r + \frac{b_a}{r^2}) \cos \vartheta$. Il cui risultato nel caso in cui $U_0 = 0$, ovvero nel caso in cui la sfera si trovi a potenziale di terra, è:

$$b_a = E_a R^3 \quad (6.6.3)$$

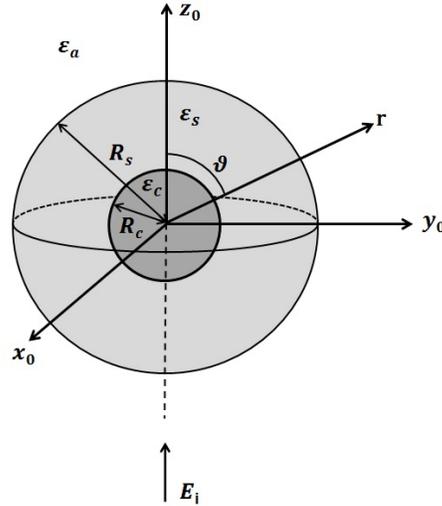


Figura 6.8: Sfere concentriche dielettriche.

la polarizzabilità può essere determinata applicando la (6.5.4), quindi:

$$b_a = 4\pi\epsilon_a R^3 = 3V\epsilon_a \quad (6.6.4)$$

che normalizzata assume il valore di $\bar{\alpha} = 3$, ovvero proprio come ci aspettavamo la polarizzabilità normalizzata risulta indipendente dalle caratteristiche elettriche della sfera, assumendo un valore pari a quello del modello di sfera dielettrica per $x \rightarrow \infty$, ovvero nel caso di $\epsilon_s \rightarrow \infty$, come da definizione di materiale PEC.

6.7 Polarizzabilità di due sfere concentriche

In questa sezione andiamo a determinare la polarizzabilità di due sfere dielettriche concentriche poste nello spazio libero, tale modello è noto anche come modello di Miles-Robertson.

Consideriamo due sfere dielettriche concentriche di raggio R_s e R_c , rispettivamente la sfera esterna e quella interna, caratterizzate da costanti dielettriche pari a ϵ_s e ϵ_c immerse in un mezzo di background di permittività dielettrica pari ad ϵ_a . Si

consideri il sistema immerso in un campo elettrico uniforme E_a , la cui direzione è coincidente con l'asse z di un sistema di riferimento cartesiano centrato su entrambe le sfere. In questo caso i potenziali elettrici in gioco possono essere così espressi:

$$\Phi_a(\mathbf{r}) = \left(-E_a r - \frac{b_a}{r^2} \right) \cos \vartheta \quad (6.7.1)$$

$$\Phi_s(\mathbf{r}) = \left(a_s r - \frac{b_s}{r^2} \right) \cos \vartheta \quad (6.7.2)$$

$$\Phi_c(\mathbf{r}) = a_c r \cos \vartheta \quad (6.7.3)$$

le condizioni da imporre sulle due superfici sferiche sono:

$$\Phi_a(\mathbf{r}) = \Phi_s(\mathbf{r}) \text{ per } r = R_s \quad (6.7.4)$$

$$\varepsilon_a \frac{\partial \Phi_a(\mathbf{r})}{\partial r} = \varepsilon_s \frac{\partial \Phi_s(\mathbf{r})}{\partial r} \text{ per } r = R_s \quad (6.7.5)$$

$$\Phi_s(\mathbf{r}) = \Phi_c(\mathbf{r}) \text{ per } r = R_c \quad (6.7.6)$$

$$\varepsilon_s \frac{\partial \Phi_s(\mathbf{r})}{\partial r} = \varepsilon_c \frac{\partial \Phi_c(\mathbf{r})}{\partial r} \text{ per } r = R_c \quad (6.7.7)$$

$$(6.7.8)$$

calcolando le derivate dei potenziali ed inserendo le relazioni dei potenziali all'interno delle condizioni al contorno si ottiene:

$$\frac{b_a}{R_s^3} - a_s - \frac{b_s}{R_s^3} = E_a$$

$$2 \frac{b_a}{R_s^3} - x_1 a_s - 2x_1 \frac{b_s}{R_s^3} = -E_a$$

$$a_s + \frac{b_s}{R_c^3} = a_c$$

$$a_s - 2 \frac{b_s}{R_c^3} = x_2 a_c \quad (6.7.9)$$

avendo indicato con $x_1 = \varepsilon_s/\varepsilon_a$ e con $x_2 = \varepsilon_c/\varepsilon_m$ i contrasti dielettrici tra l'ambiente e la sfera esterna e tra la sfera esterna e quella interna, rispettivamente. Risolvendo il sistema, in particolare effettuando il rapporto tra le ultime due equazioni, risolvendo

per a_s , sostituendo ciò che si ottiene nelle prime due equazioni e effettuando il rapporto tra le prime due equazioni si ottiene:

$$b^0 = -E_a R_s^3 \frac{(x_2 + 2)(1 - x_1) + (x_2 - 1)(2x_1 + 1)\nu}{(x_2 + 2)(2 + x_1) - 2(x_2 - 1)(x_1 - 1)\nu} \quad (6.7.10)$$

che può essere riscritta come:

$$b^0 = -E_a R_s^3 \frac{(\varepsilon_c + 2\varepsilon_s)(\varepsilon_s - \varepsilon_a) + (\varepsilon_c - \varepsilon_s)(\varepsilon_a + 2\varepsilon_s)\nu}{(\varepsilon_c + 2\varepsilon_s)(\varepsilon_s + 2\varepsilon_a) - 2(\varepsilon_c - \varepsilon_s)(\varepsilon_a - \varepsilon_s)\nu} \quad (6.7.11)$$

avendo indicato con $\nu = (1 - \frac{d}{R})^3$ e con $d = R_s - R_c$ ovvero lo spessore della membrana. Come visto in precedenza anche in questo caso può essere determinata la costante dielettrica efficace come:

$$\frac{\varepsilon_{eff} - \varepsilon_a}{\varepsilon_{eff} + 2\varepsilon_a} = f \frac{(\varepsilon_c + 2\varepsilon_s)(\varepsilon_s - \varepsilon_a) + (\varepsilon_c - \varepsilon_s)(\varepsilon_a + 2\varepsilon_s)\nu}{(\varepsilon_c + 2\varepsilon_s)(\varepsilon_s + 2\varepsilon_a) - 2(\varepsilon_c - \varepsilon_s)(\varepsilon_a - \varepsilon_s)\nu} \quad (6.7.12)$$

tale equazione è impropriamente nota come equazione di Pauly-Schwan, in quanto a loro si devono le condizioni di validità di tale modello in approssimazione quasi-statica e nel caso di costanti dielettriche complesse, tali condizioni affermano che, considerando la permittività rappresentata come $\varepsilon^* = \varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}$, si deve necessariamente avere:

$$\frac{\sigma_s}{\sigma_a}, \frac{\sigma_s}{\sigma_c}, \frac{d}{R} \ll 1 \quad (6.7.13)$$

tale equazione viene utilizzata in letteratura per la più semplice modellizzazione della cellula biologica immersa in una soluzione acquosa, dove la sfera esterna costituisce la membrana cellulare e la sfera interna il citoplasma cellulare, avendo quindi trascurato il nucleo, la membrana nucleare e tutti gli altri organuli di cui la cellula stessa è costituita, tale modello è anche noto come modello a singola membrana o single-shell model (Fig. 6.9).

Ovviamente per considerare le altre membrane citate basterà considerare una sfera multiconcentrica ed imporre su ciascuna superficie le condizioni al contorno del potenziale elettrostatico. In particolare se verranno considerate 3 superfici rispettivamente membrana esterna, membrana cellulare interna e nucleo, si par-

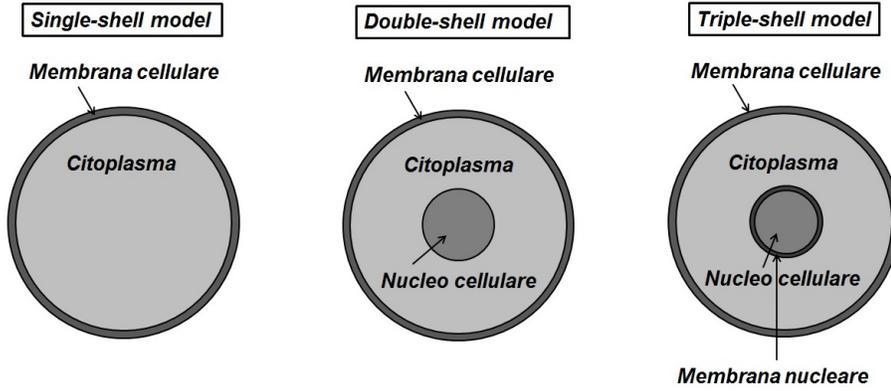


Figura 6.9: Modelli elettromagnetici omogeneizzati di una cellula biologica, a) single-shell model, b) double-shell model, c) triple-shell model.

lerà di double-shell model se inoltre si considera la membrana nucleare si parlerà di triple-shell model.

Ritornando al caso di due sfere concentriche possiamo determinare la polarizzabilità del sistema utilizzando l'equazione

$$\alpha = 4\pi\epsilon_a \frac{b_a}{E_a} = 3V\epsilon_a \frac{(\epsilon_c + 2\epsilon_s)(\epsilon_s - \epsilon_a) + (\epsilon_c - \epsilon_s)(\epsilon_a + 2\epsilon_s)\nu}{(\epsilon_c + 2\epsilon_s)(\epsilon_s + 2\epsilon_a) - 2(\epsilon_c - \epsilon_s)(\epsilon_a - \epsilon_s)\nu} \quad (6.7.14)$$

Da quest'ultima equazione possiamo notare 4 casi particolari:

- 1) $\nu \rightarrow 0$ ciò ci porta ad avere lo stesso risultato di una sfera omogenea di valore ϵ_s ;
- 2) $\nu \rightarrow 1$ ciò ci porta ad avere lo stesso risultato di una sfera omogenea di valore ϵ_c ;
- 3) $\frac{\epsilon_c}{\epsilon_s} \rightarrow 0$ ciò ci porta ad avere lo stesso risultato di una sfera omogenea di valore $\epsilon_s = \epsilon_c$ ed infine
- 4) $\frac{\epsilon_s}{\epsilon_a} \rightarrow 0$ ciò ci porta ad avere lo stesso risultato di una sfera omogenea di valore ϵ_c e di raggio R_c .

Si vuole ora studiare il caso particolare di sfere concentriche considerando il nucleo costituito di materiale conduttore elettrico perfetto, come sappiamo per poter determinare i coefficienti dello sviluppo b_0 e di conseguenza il potenziale esterno alla sfera, possiamo sia applicare la condizione al contorno sulle superfici sferiche e con-

siderare il potenziale interno al nucleo pari a zero, oppure semplicemente riprendere la formula dei coefficienti (6.7.10) al caso generale ed imporre il limite tendente a infinito:

$$\lim_{\varepsilon_c \rightarrow \infty} b^0 = \lim_{x_2 \rightarrow \infty} b^0 = -E_a R_s^3 \frac{(1 - x_1) + \nu(2x_1 - 1)}{(2 + x_1) - 2\nu(x_1 - 1)} \quad (6.7.15)$$

ricordando che con $x_1 = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_0}$ e $x_2 = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_s}$ (i due contrasti dielettrici) e con ν la frazione di volume. Una volta noto il coefficiente b^0 la polarizzabilità può essere determinata come:

$$\alpha = 4\pi\varepsilon_a \frac{b^0}{E_a} = 3V\varepsilon_a \frac{(1 - x_1) + \nu(2x_1 - 1)}{(2 + x_1) - 2\nu(x_1 - 1)} \quad (6.7.16)$$

6.7.1 Validazione del modello di due sfere

Per validare il modello si procederà con il confronto numerico tra i risultati ottenuti con Comsol ed i risultati ottenuti con Matlab. In particolare confronteremo le componenti del campo elettrico esterno alla sfera.

Prendiamo come caso di studio inizialmente oggetto costituito da due sfere concentriche, l'esterna di costante dielettrica pari a ($\varepsilon_s = 2.25$) e sfera interna PEC e successivamente lo stesso sistema, però con nucleo di materia pari a ($\varepsilon_c = 4$) i raggi per entrambi i casi sono di raggio $R_s = 0.5$ m ed $R_c = R_s/2$ entrambe immerse in aria. Il campo esterno è un campo elettrico diretto lungo z con valore unitario $E_a = 1V/m$, la risposta del sistema è misurata su una linea parallela all'asse x di coordinate $([0 : 2R_s], 0, -2R_s)$.

Si può notare dal confronto dei risultati (Figg. 6.10 e 6.11) che gli andamenti ottenuti sono del tutto coincidenti tra loro.

6.8 Polarizzabilità di una sfera multiconcentrica

Passiamo adesso al calcolo della polarizzabilità e della permittività dielettrica efficace di una sfera multistrato caratterizzata da un raggio esterno pari a a_1 ogni strato, costituente la sfera non omogenea, è costituita da una propria costante dielettrica

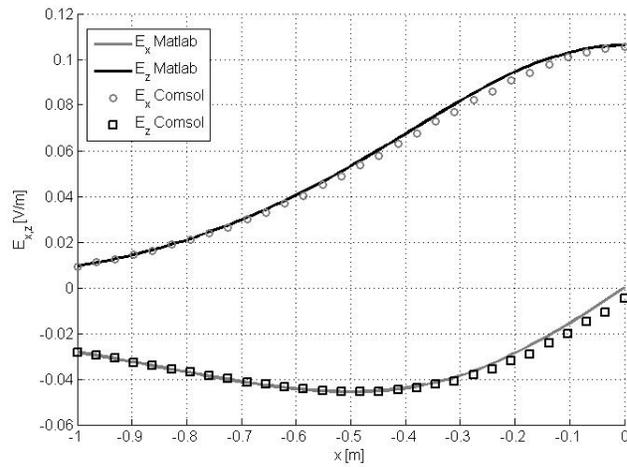


Figura 6.10: Componenti cartesiane del campo elettrico scatterato dalla sfera concentrica con core PEC. In particolare con le linee continue si sono rappresentati le componenti x (in grigio) ed z (in nero) del campo elettrico ottenuti da Matlab e le linee discontinue le componenti x (quadrati) e z (cerchi) ottenuti con le simulazioni Cmsol.

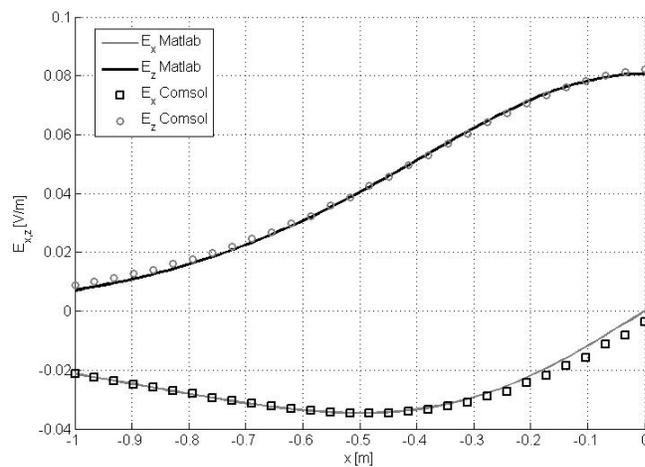


Figura 6.11: Componenti cartesiane del campo elettrico scatterato dalla sfera concentrica con core dielettrico. In particolare con le linee continue si sono rappresentati le componenti x (in grigio) ed z (in nero) del campo elettrico ottenuti da Matlab e le linee discontinue le componenti x (quadrati) e z (cerchi) ottenuti con le simulazioni Cmsol.

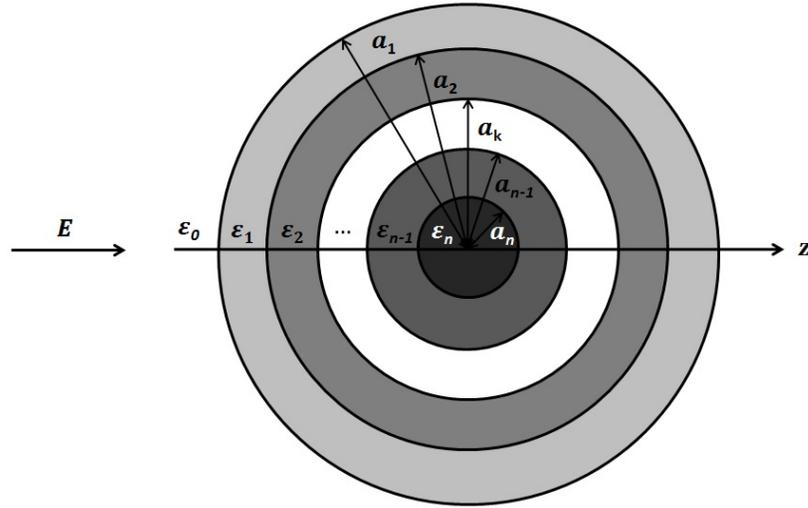


Figura 6.12: Sfera multistrato.

omogenea pari a ε_k e di spessore pari a $a_k - a_{k-1}$, il numero di strati può assumere un qualsiasi valore intero N . Da quanto visto in precedenza possiamo affermare che in ciascuno strato sarà presente un potenziale elettrico pari a:

$$\Phi_k = \left(-A_k r + \frac{B_k}{r^2} \right) \cos \vartheta \quad (6.8.1)$$

Considerando sempre che il campo elettrico uniforme E_a sia diretto lungo la direzione z possiamo affermare che il potenziale elettrico esterno alla sfera sia:

$$\Phi_0 = \left(-E_a r + \frac{B_0}{r^2} \right) \cos \vartheta \quad (6.8.2)$$

inoltre il campo nella sfera più interna assumerà un valore pari a:

$$\Phi_N = -A_N r \cos \vartheta \quad (6.8.3)$$

ovvero il termine B_N dovrà necessariamente annullarsi in quanto il potenziale per $r = 0$ dovrà assumere valori finiti. Andando ad applicare le condizioni al contorno

su ciascuna superficie sferica ed in particolare considerando la k-esima superficie, si ha [51]:

$$\begin{cases} -A_k + \frac{B_k}{a_{k+1}^3} = -A_{k+1} + \frac{B_{k+1}}{a_{k+1}^3} \\ \varepsilon_k A_k + 2\varepsilon_k \frac{B_k}{a_{k+1}^3} = \varepsilon_{k+1} A_{k+1} + 2\varepsilon_{k+1} \frac{B_{k+1}}{a_{k+1}^3} \end{cases} \quad (6.8.4)$$

analogamente a quanto può essere ottenuto con il metodo delle linee di trasmissione o della matrice di transizione il sistema può essere riscritto in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} A_k \\ B_k \end{bmatrix} = \frac{1}{3\varepsilon_k} \begin{bmatrix} \varepsilon_{k+1} + 2\varepsilon_k & 2(\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k)a_{k+1}^{-3} \\ (\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k)a_{k+1}^3 & 2\varepsilon_{k+1} + \varepsilon_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{k+1} \\ B_{k+1} \end{bmatrix} \quad (6.8.5)$$

In generale per tutti gli strati avremo

$$\begin{pmatrix} E_a \\ B_0 \end{pmatrix} = [M_0][M_1] \dots [M_k] \dots [M_N] \begin{pmatrix} A_N \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.8.6)$$

notando come per l'ultimo campo abbiamo posto $B_N = 0$ e per il primo $A_0 = E_a$ per i motivi prima accennati:

$$\begin{pmatrix} E_a \\ B_0 \end{pmatrix} = \prod_{i=0}^{N-1} [M_i] \begin{pmatrix} A_N \\ 0 \end{pmatrix} = [M] \begin{pmatrix} A_N \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.8.7)$$

con

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad (6.8.8)$$

Il sistema che si ottiene è

$$\begin{cases} E_a = M_{11}A_N \\ B_0 = M_{21}A_N \end{cases}$$

Dal sistema posso determinare il coefficiente B_0 , che è quello che mi serve per la determinazione della polarizzabilità del sistema, semplicemente andando a fare il

rapporto tra la seconda e la prima equazione:

$$\frac{B_0}{E_a} = \frac{M_{21}}{M_{11}} \quad (6.8.9)$$

utilizzando l'equazione (6.5.4), si ottiene per la polarizzabilità

$$\alpha = \frac{3\varepsilon_0 V}{a_1^3} \frac{M_{21}}{M_{11}} \quad (6.8.10)$$

dalla quale si può ottenere come visto in precedenza la permittività efficace del sistema omogeneizzato come:

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon_0 + \frac{\frac{\alpha}{V}}{1 - \frac{\alpha}{3\varepsilon_0 V}} \quad (6.8.11)$$

Ciò che siamo riusciti ad ottenere è stato quello di modellizzare tutti gli strati sferici come un'unica sfera e successivamente utilizzando la tecnica di omogeneizzazione, ovvero passando per lo studio della polarizzabilità del sistema, si è arrivati alla determinazione della costante dielettrica efficace.

6.8.1 Validazione del modello di una sfera multistrato

Per validare il modello si prenderà in considerazione una sfera immersa in aria $\varepsilon_0 = 1$ caratterizzata da 3 strati differenti ognuno caratterizzato da un proprio spessore. In particolare la permittività dei vari strati a partire da quello esterno sono: $\varepsilon_1 = 2$, $\varepsilon_2 = 4.5$ e $\varepsilon_3 = 5.5$, rispettivamente di raggio $R_1 = 1$ m, $R_2 = 0.5$ m e $R_3 = 0.25$ m si procederà con il confronto numerico tra i risultati ottenuti con Comsol ed i risultati ottenuti con Matlab. Confronteremo le componenti del campo elettrico esternamente alla sfera. Il campo esterno è un campo elettrico uniforme diretto lungo z con valore unitario $E_a = 1V/m$, la risposta del sistema è misurata su una linea parallela all'asse x di coordinate $([0 : 2R_1], 0, -2R_1)$.

Si vede dal confronto dei risultati (Fig. 6.13) che gli andamenti ottenuti sono del tutto coincidenti tra loro.

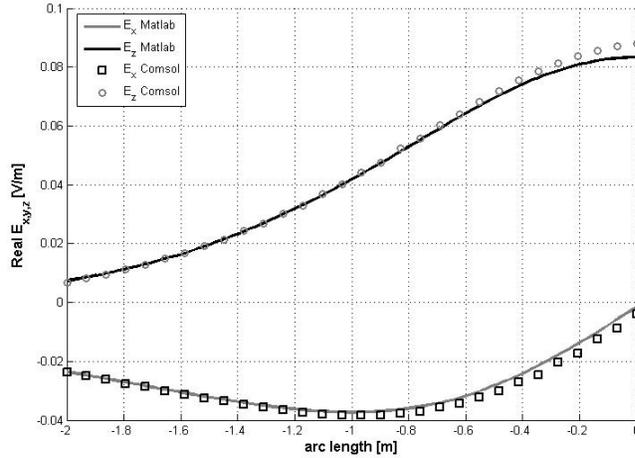


Figura 6.13: Componenti cartesiane del campo elettrico scatterato dalla sfera caratterizzata da tre strati. In particolare con le linee continue si sono rappresentati le componenti x (in grigio) ed z (in nero) del campo elettrico ottenuti da Matlab e le linee discontinue le componenti x (quadrati) e z (cerchi) ottenuti con le simulazioni Comsol

6.9 Polarizzabilità di due sfere eccentriche

Cercheremo ora di determinare un modello di omogeneizzazione di un sistema costituita da due sfere dielettriche eccentriche, questo modello risulterà particolarmente utile, infatti il concetto di perfetta eccentricità precedentemente studiato non può essere applicato ai sistemi reali, ad esempio prendendo in considerazione proprio la cellula biologica, essa sarà costituita da un nucleo cellulare che mai si troverà in una posizione perfettamente centrata rispetto alla membrana cellulare, inoltre anche nei casi realizzativi di meta-materiali, questi non riescono mai ad essere ottenuti con una perfetta concentricità.

Si prenderà in considerazione il problema della diffrazione di un'onda piana ed uniforme polarizzata linearmente lungo z che incide su due sfere non concentriche (Fig. 6.14). Si consideri lo spazio come mezzo lineare, omogeneo, stazionario, isotropo, generalmente dispersivo e dissipativo. Si definiscano le proprietà del mezzo tramite le costanti elettromagnetiche ε e $\mu = 1$ e σ . Si consideri la presenza di una sfera centrata nel sistema di riferimento principale con un raggio pari ad R_s e

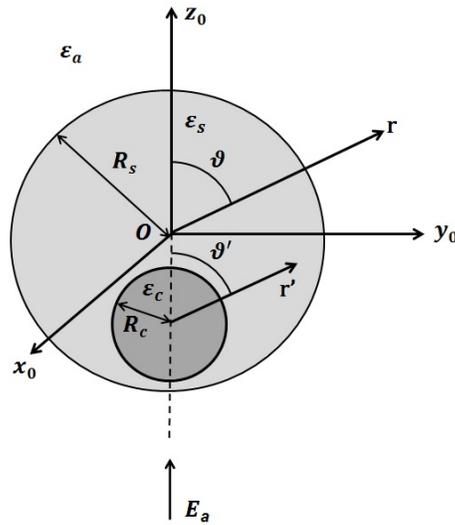


Figura 6.14: Sistema costituito da due sfere eccentriche.

caratterizzato dalle seguenti costanti elettromagnetiche ε_s e $\mu_s = 1$ e σ_s e da una sfera contenuta nella prima di posizione $(0, 0, d)$ e di raggio R_c caratterizzata dalle seguenti costanti elettromagnetiche ε_c , $\mu_c = 1$ e σ_c . In generale si dovrà sempre avere $R_1 < R_c - d$ cosicché la sfera interna risulti sempre non tangente a quella esterna. A grande distanza dalla sfera dielettrica, in modo da poter trascurare gli effetti della polarizzazione sulla superficie della sfera stessa, si ha che il potenziale coincide con quello del campo uniforme:

$$\Phi_\infty = -E_a z = -E_a \cos \vartheta r \quad (6.9.1)$$

Per poter calcolare il potenziale elettrostatico all'interno e all'esterno delle due sfere è sufficiente risolvere l'equazione di Laplace e le condizioni al contorno su tali superfici.

Risolvendo l'equazione differenziale in coordinate sferiche e utilizzando il metodo

di separazione della variabili si ottiene la seguente espressione per il potenziale [1]:

$$\Phi_0(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[a_{mn} r^n + \frac{b_{mn}}{r^{n+1}} \right] P_n^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi} \quad (6.9.2)$$

introducendo il concetto di funzione tesserale $Y_m^n(\vartheta, \varphi) = P_n^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$, il potenziale può assumere la seguente forma:

$$\Phi_0(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[a_{mn} r^n + \frac{b_{mn}}{r^{n+1}} \right] Y_m^n(\vartheta, \varphi) \quad (6.9.3)$$

Ora data la nostra particolare configurazione, ovvero notando che la geometria del problema è assialsimmetrico, cioè è simmetrico lungo la direzione azimutale, si ha che il potenziale risulterà indipendente dalla variabile φ , pertanto, mettendoci per semplicità sul piano $\varphi = 0$ e risolvendo nuovamente l'equazione di Laplace e non considerando le variazioni parziali lungo φ , si ottiene [52]:

$$\Phi_0(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}} \right] P_n(\cos \vartheta) \quad (6.9.4)$$

In particolare questo campo dovrà soddisfare la seguente condizione al contorno:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_0(\mathbf{r}) = \Phi_{\infty} \quad (6.9.5)$$

dalla quale si ottiene: $a_n = -E_a$, che sostituita nella 6.9.4, si ha:

$$\Phi_0(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-E_a r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}} \right] P_n(\cos \vartheta) \quad (6.9.6)$$

Ora dobbiamo andare ad ipotizzare una forma del campo anche per le regioni interne

sia alla sfera di raggio R_s che a quella più piccola di raggio R_c [53]:

$$\Phi_s(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n^s r^n + \frac{b_n^s}{r^{n+1}} \right] P_n(\cos \vartheta) \quad (6.9.7)$$

$$\Phi_c(\mathbf{r}') = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n^c r'^n + \frac{b_n^c}{r'^{n+1}} \right] P_n(\cos \vartheta') \quad (6.9.8)$$

si nota come il campo interno alla sfera minore sia riferita al proprio sistema di riferimento.

Un'altra condizione che il campo all'interno della sfera più piccola dovrà sicuramente soddisfare rispetto al proprio sistema di riferimento è $r'^{n+1} \neq 0$ per qualsiasi n , pertanto risulterà certamente $b_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}^0$, quindi

$$\Phi_c(\mathbf{r}') = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^s r'^n P_n(\cos \vartheta') \quad (6.9.9)$$

Data l'ipotesi di assenza di cariche libere sulla superficie delle sfere, si dovrà garantire la continuità del potenziale e la continuità della componente normale della corrente sulle superfici sferiche, si avranno le seguenti condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} \Phi_0(\mathbf{r}) \Big|_{r=R_s} &= \Phi_s(\mathbf{r}) \Big|_{r=R_s} \\ \Phi_0(\mathbf{r}) \Big|_{r=R_c} &= \Phi_s(\mathbf{r}) \Big|_{r=R_c} \\ \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_0(\mathbf{r})}{\partial r} \Big|_{r=R_s} &= \varepsilon_s \frac{\partial \Phi_s(\mathbf{r})}{\partial r} \Big|_{r=R_s} \\ \varepsilon_s \frac{\partial \Phi_s(\mathbf{r}')}{\partial r'} \Big|_{r'=R_c} &= \varepsilon_c \frac{\partial \Phi_1(\mathbf{r}')}{\partial r'} \Big|_{r'=R_c} \end{aligned} \quad (6.9.10)$$

Nella quarta equazione delle 6.9.10 si nota subito che si dovrà applicare una traslazione del potenziale scalare in s , per fare ciò utilizzo le formule di traslazione proposte da Morse-Feshbach [54]. Esse affermano che per una traslazione lungo z da $(0, 0, d)$ a

$(0, 0, 0)$, si ha:

$$\begin{aligned} r'^m P_n^m(\cos \vartheta') e^{im\varphi} &= d^n \sum_{\nu=m}^n \frac{(-1)^{n-\nu} (n+m)!}{(n-\nu)! (m+\nu)!} \left(\frac{r}{d}\right)^\nu Y_{m\nu}(\vartheta, \varphi) \\ \frac{1}{r'^m} P_n^m(\cos \vartheta') e^{im\varphi} &= \frac{1}{d^{n+1}} \sum_{\nu=m}^n \frac{(\nu-m)!}{(n-m)! (\nu-n)!} \left(\frac{d}{r}\right)^{\nu+1} Y_{m\nu}(\vartheta, \varphi) \end{aligned} \quad (6.9.11)$$

nel nostro caso di geometria assialsimmetrica, ovviamente il nostro potenziale risulta essere indipendente dalla variabile φ pertanto si ha $m = 0$ [55]:

$$\begin{aligned} r'^n P_n(\cos \vartheta') &= d^n \sum_{\nu=0}^n \frac{(-1)^{n-\nu} n!}{(n-\nu)! \nu!} \left(\frac{r}{d}\right)^\nu P_\nu(\cos \vartheta) \\ \frac{1}{r'^n} P_n(\cos \vartheta') &= \frac{1}{d^{n+1}} \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{\nu!}{n! (\nu-n)!} \left(\frac{d}{r}\right)^{\nu+1} P_\nu(\cos \vartheta) \end{aligned} \quad (6.9.12)$$

Notiamo ancora che per imporre le condizioni al contorno dobbiamo traslare lungo z il potenziale nel guscio dal centro del sistema di riferimento principale a quello locale posizionato in $(0, 0, d)$ per far ciò Morse-Feshbach [54] affermano che tale passaggio è possibile utilizzando sempre le 6.9.13 ma sostituendo a d , $-d$, pertanto:

$$\begin{aligned} r^n P_n(\cos \vartheta) &= (-d)^n \sum_{\nu=0}^n \frac{(-1)^{n-\nu} n!}{(n-\nu)! \nu!} \left(-\frac{r'}{d}\right)^\nu P_\nu(\cos \vartheta') \\ \frac{1}{r^n} P_n(\cos \vartheta) &= \frac{1}{(-d)^{n+1}} \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{\nu!}{n! (\nu-n)!} \left(-\frac{d}{r'}\right)^{\nu+1} P_\nu(\cos \vartheta') \end{aligned} \quad (6.9.13)$$

Sostituendo quanto ricavato nella 6.9.8 e invertendo l'ordine delle sommatorie si ottiene [53, 55]:

$$\Phi_s(\mathbf{r}') = \sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(\cos \vartheta') \left[\left(-\frac{r'}{d}\right)^\nu \frac{1}{\nu!} \sum_{n=\nu}^{\infty} a_n^s \frac{(-1)^{n-\nu} n!}{(n-\nu)!} + \right. \quad (6.9.14)$$

$$\left. \left(-\frac{d}{r'}\right)^{\nu+1} \nu! \sum_{n=0}^{\nu} b_n^s \frac{1}{n! (\nu-n)!} \right] \quad (6.9.15)$$

Interscambiando gli indici delle sommatorie, si ha

$$\Phi_s(\mathbf{r}') = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \vartheta') \left[\left(-\frac{r'}{d} \right)^n \frac{1}{n!} \sum_{\nu=n}^{\infty} a_{\nu}^s \frac{(-1)^{\nu-n} \nu!}{(\nu-n)!} + \right. \quad (6.9.16)$$

$$\left. \left(-\frac{d}{r'} \right)^{n+1} n! \sum_{\nu=0}^n b_{\nu}^s \frac{1}{\nu!(n-\nu)!} \right] \quad (6.9.17)$$

Ora non resta che sostituire tutti i potenziali trovati all'interno delle condizioni al contorno

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left[-E_a R_s^n + \frac{b_n}{R_s^{n+1}} \right] &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n^s R_s^n + \frac{b_n^s}{R_s^{n+1}} \right] \\ \varepsilon_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left[-n E_a R_s^{n-1} - (n+1) \frac{b_n}{R_s^{n+2}} \right] &= \varepsilon_s \sum_{n=0}^{\infty} \left[n a_n^s R_s^{n-1} - (n+1) \frac{b_n^s}{R_s^{n+2}} \right] \\ \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \vartheta') \left[\frac{R_c^n}{(-d)^n n!} \sum_{\nu=n}^{\infty} a_{\nu}^s \frac{(-1)^{\nu-n} \nu!}{(\nu-n)!} + \frac{(-d)^{n+1} n!}{R_c^{n+1}} \sum_{\nu=0}^n b_{\nu}^s \frac{1}{\nu!(n-\nu)!} \right] &= \\ = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^c R_c^n P_n(\cos \vartheta') & \\ \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \vartheta') \left[\frac{n R_c^{n-1}}{(-d)^n n!} \sum_{\nu=n}^{\infty} a_{\nu}^s \frac{(-1)^{\nu-n} \nu!}{(\nu-n)!} + \frac{(-d)^{n+1} (n+1) n!}{R_c^{n+2}} \sum_{\nu=0}^n b_{\nu}^s \frac{1}{\nu!(n-\nu)!} \right] &= \\ = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_s} \sum_{n=0}^{\infty} n a_n^c R_c^{n-1} P_n(\cos \vartheta') & \quad (6.9.18) \end{aligned}$$

Grazie alla seguente proprietà di ortogonalità dei polinomi di Legendre:

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_m(\cos \vartheta) P_n(\cos \vartheta) d\vartheta = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}$$

Moltiplicando tutti i membri delle ultime due equazioni delle 6.9.18 per il $P_n(\cos \vartheta)$

ed integrando tra $-\pi$ e π si ottengono le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
 -E_a R_s^n + \frac{b_n}{R_s^{n+1}} &= a_n^s R_s^n + \frac{b_n^s}{R_s^{n+1}} & (6.9.19) \\
 -nE_a R_s^{n-1} - (n+1) \frac{b_n}{R_s^{n+2}} &= \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_0} \left[n a_n^s R_s^{n-1} - (n+1) \frac{b_n^s}{R_s^{n+2}} \right] \\
 \frac{R_c^n}{(-d)^n} \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu^s \gamma_{\nu m} + \frac{(-d)^{n+1}}{R_c^{n+1}} \sum_{\nu=0}^n b_\nu^s \lambda_{\nu m} &= a_n^c R_c^n \\
 \frac{R_c^{n-1}}{(-d)^n} \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu^s \gamma_{\nu m} - \frac{(-d)^{n+1} (n+1)}{n R_c^{n+2}} \sum_{\nu=0}^n b_\nu^s \lambda_{\nu m} &= \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_s} a_n^c R_c^{n-1}
 \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
 \gamma_{\nu m} &= \frac{(-1)^{\nu-n} \nu!}{(\nu-n)! n!} \\
 \lambda_{\nu m} &= \frac{n!}{\nu! (n-\nu)!}
 \end{aligned} \tag{6.9.20}$$

Per la determinazione della polarizzabilità si può far uso della (6.5.4) utilizzando al posto della b_a il valore della b_n per $n = 1$ che otteniamo risolvendo il sistema ottenuto dalle condizioni al contorno, ovvero

$$\alpha = 3V \varepsilon_a \frac{b_1}{E_a} \tag{6.9.21}$$

6.9.1 Validazione e risultati del modello di due sfere

Passiamo adesso alla validazione del modello, confronteremo il valore che assume il campo elettrico lungo una linea nel caso in cui tale campo sia ottenuto dal modello proposto ed implementato in Matlab con i risultati che si ottengono tramite simulazione elettromagnetica ottenuta tramite il software commerciale Comsol Multiphysics (Figg. 6.15 e 6.16). Dalle figure si può notare un ottimo accordo tra i risultati ottenuti con i due diversi metodi, quindi una volta validato il modello proposto, possiamo passare allo studio della polarizzabilità al variare sia dei parametri geometrici che dei parametri elettromagnetici.

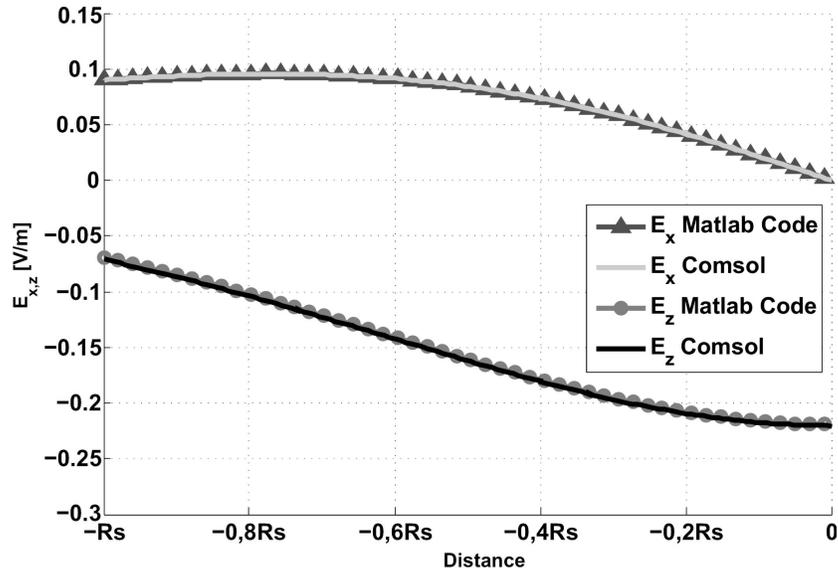


Figura 6.15: Confronto tra le parti reali delle componenti del campo elettrico scatterato determinato lungo una linea di coordinate $(x, y) = ([-R_s : 0], -1.5R_s)$ nel caso si una sfera PEC eccentrica di raggio $R_c = R_s/2$ all'interno di una sfera dielettrica ($\epsilon_s = 2.25$) di raggio $R_s = 1$ m.

Una volta validato il modello si vuole vedere come varia il valore della polarizzabilità e di conseguenza della permittività dielettrica efficace al variare delle grandezze geometriche in gioco, in particolare si varierà la posizione della sfera interna rispetto al sistema di riferimento principale e successivamente se ne farà variare il suo raggio. Iniziamo col variare la posizione della sfera interna d spostandola da un punto estremo che coincide con il caso in cui le due sfere risultano internamente tangenti d_{min} fino al caso in cui le due sfere risultano concentriche per poi arrivare al caso opposto di tangenza interna d_{max} (Fig. 6.17). Anche in questo caso si sta considerando la sfera dielettrica con $\epsilon_s = 2.25$ e raggio unitario, la sfera interna è caratterizzata da una costante dielettrica pari a $\epsilon_c = 5$ ed un raggio pari a $R_c = R_s/2$, il campo di eccitazione esterno è pari a $1V/m$. Si riporta in figura 6.18 il campo elettrico misurato nel punto $P = (0, 0, -1.5R_s)$ in funzione della distanza d tra i centri delle due sfere. Inoltre nella figura successiva (Fig. 6.19) l'analogo andamento della polarizzabilità normalizzata.

Si nota come in entrambi i casi la variazione risulta essere piuttosto contenuta,

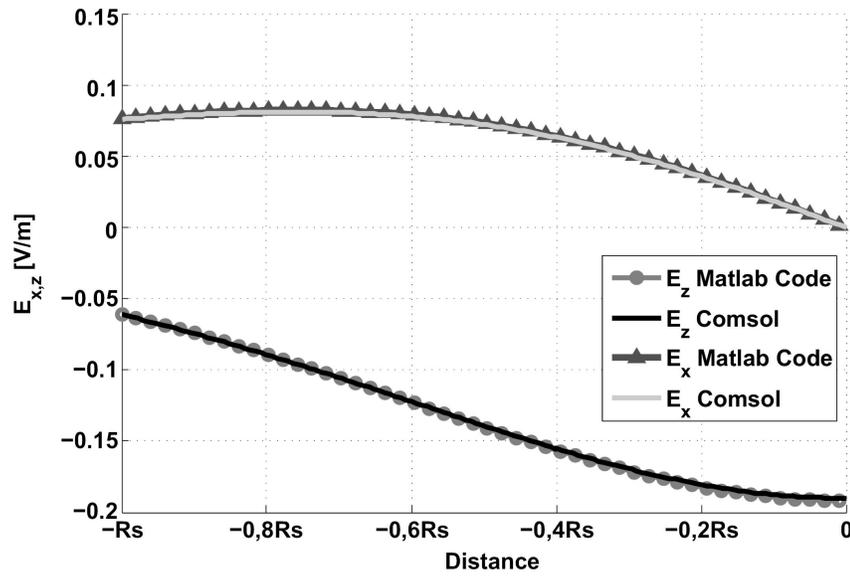


Figura 6.16: Confronto tra le parti reali delle componenti del campo elettrico scatterato determinato lungo una linea di coordinate $(x, y) = ([-R_s : 0], -1.5R_s)$ nel caso si una sfera dielettrica ($\epsilon_c = 5$) eccentrica di raggio $R_c = R_s/2$ all'interno di una sfera dielettrica ($\epsilon_s = 2.25$) di raggio $R_s = 1$ m.

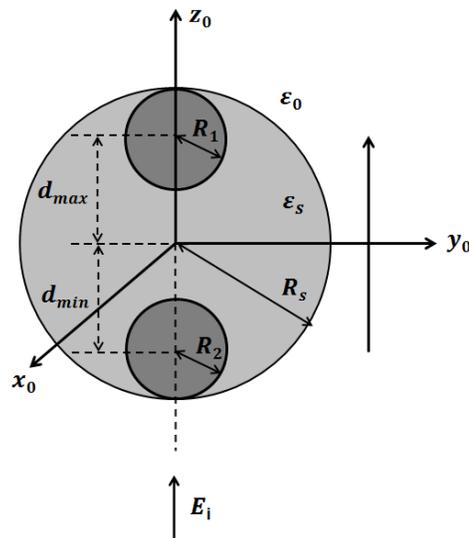


Figura 6.17: Geometria del problema, la sfera dielettrica interna si sposta dalla posizione iniziale d_{min} fino ad arrivare alla posizione opposta pari a d_{max} .

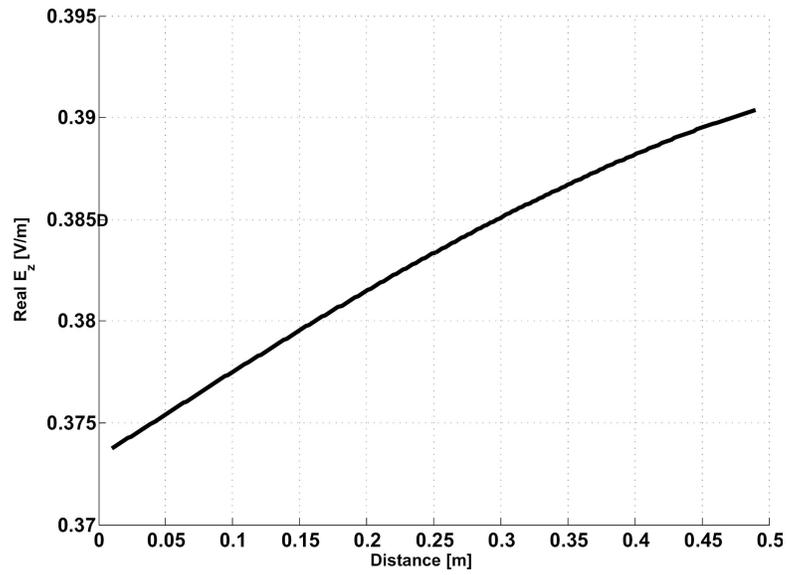


Figura 6.18: Andamento del campo elettrico in funzione dello spostamento della sfera interna rispetto a quella esterna fissata.

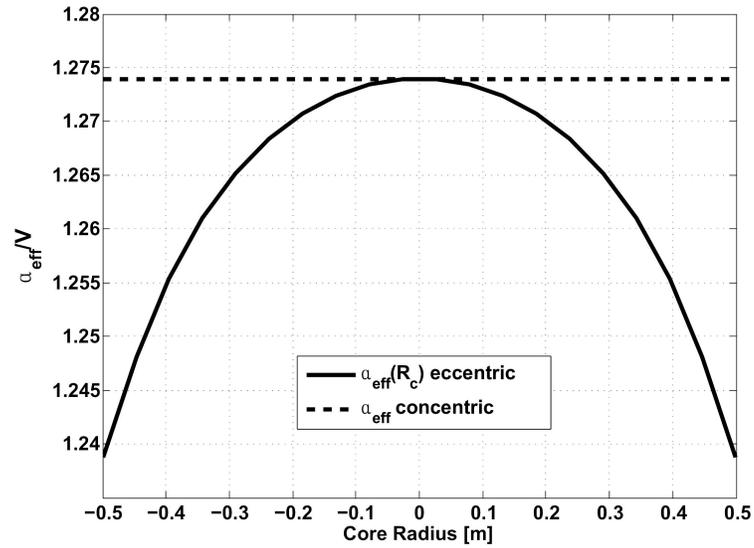


Figura 6.19: Andamento della polarizzabilità normalizzata in funzione dello spostamento della sfera interna rispetto a quella esterna fissata.

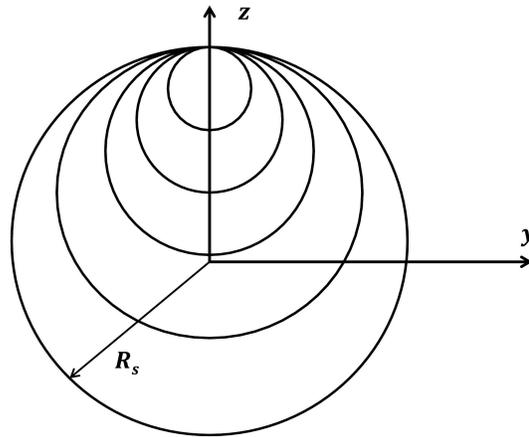


Figura 6.20: Variazione del raggio della sfera interna posta ad una distanza dal centro pari a $d = R_s - R_c$.

secondo i parametri scelti, quindi si può affermare che nella realizzazione pratica un'eccentricità delle sfere non inficerebbe troppo sui risultati finali. Si può pensare allora a far variare il raggio della sfera interna per poter ottenere una maggiore variazione della polarizzabilità in quanto sicuramente avremo nei due casi limite rappresentati da $R_c = 0$, ovvero solo sfera esterna e $R_c = R_s$, ovvero solo sfera interna, i valori della polarizzabilità di una sfera o solo con ε_s o solo ε_c , rispettivamente. A questo punto scegliamo una sfera tangente internamente alla sfera ospitante di materiale PEC e facciamo crescere il raggio finché R_c coincide con R_s , come in figura 6.20. Ciò che si ottiene è rappresentato in figura 6.21, si nota come ci aspettavamo nel caso iniziale il valore del sistema assume il valore della sfera nello spazio libero omogeneizzato, così come nel caso finale in cui otteniamo una costante dielettrica efficace pari a quella di una sfera PEC nello spazio libero, tra i casi limiti otteniamo un andamento che assume una vasta gamma di valori e quindi tale metodologia può essere adottata per far variare le proprietà elettromagnetiche di un sistema in modo sensibile.

Riportiamo l'andamento della polarizzabilità normalizzata nel caso di due sfere eccentriche per vedere cosa cambia rispetto al caso precedentemente studiato ovvero nel caso di due sfere concentriche (Fig. 6.22). Si nota subito come, anche in questo

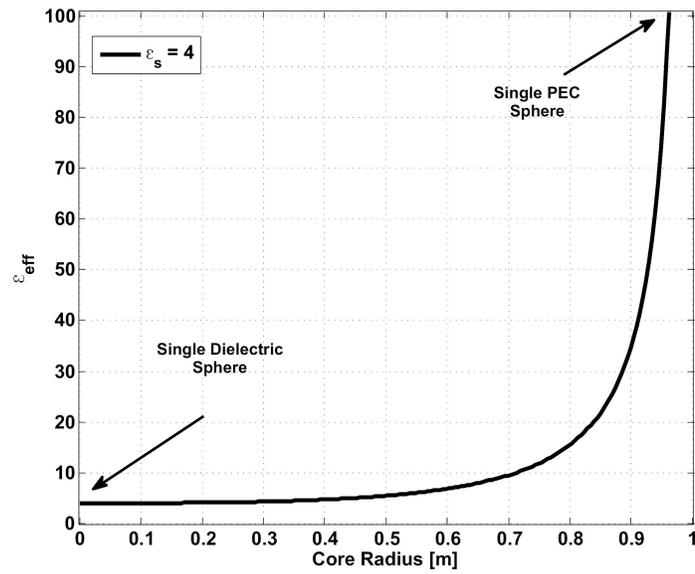


Figura 6.21: Andamento della costante dielettrica efficace in funzione della variazione del raggio della sfera interna posta ad una distanza dal centro pari a $d = R_s - R_c$.

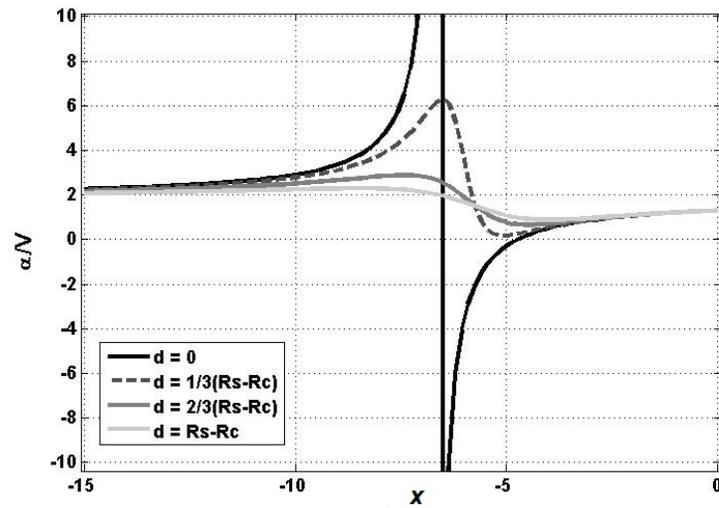


Figura 6.22: Polarizzabilità normalizzata in funzione del contrasto dielettrico.

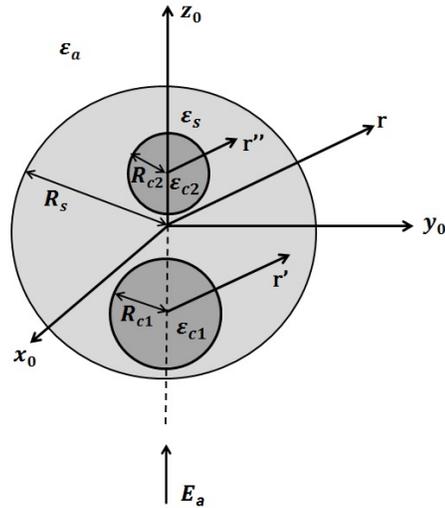


Figura 6.23: Sistema costituito da due sfere PEC non compenstrate contenute in una sfera dielettrica.

caso, per x tendente a $\pm\infty$ la polarizzabilità tenda allo stesso valore, inoltre si nota una particolarità che è relativa al fenomeno della risonanza di Frölich, in particolare si nota come decentrando in modo sempre più marcato la sfera interna, la risonanza elettrostatica tenda a diminuire fino a quasi scomparire nel caso di sfere internamente tangenti tra loro.

6.10 Estensione al caso di 2 ed L sfere eccentriche

Estenderemo in questo paragrafo lo studio effettuato per una sola sfera eccentrica contenuta in una sfera dielettrica al caso di 2 sfere PEC eccentriche e successivamente di L sfere conduttrici. Analogamente ai casi precedenti andremo a definire i

potenziali in gioco:

$$\Phi_0(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-E_a r^n \delta_{n1} + \frac{b_n^0}{r^{n+1}} \right] P_n(\cos \vartheta) \quad (6.10.1)$$

$$\Phi_s(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^s r^n P_n(\cos \vartheta') \quad (6.10.2)$$

$$\Phi_{c_1}(\mathbf{r}_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^{c_1}}{r_1^{n+1}} P_n(\cos \vartheta_1) \quad (6.10.3)$$

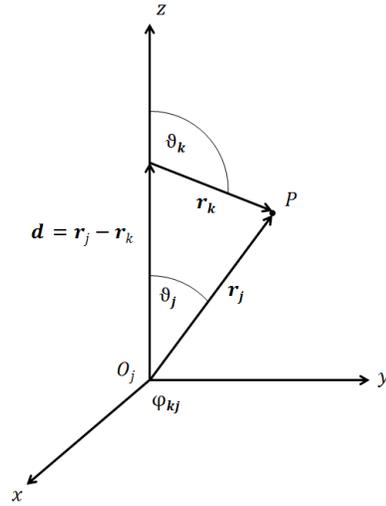
$$\Phi_{c_2}(\mathbf{r}_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^{c_2}}{r_2^{n+1}} P_n(\cos \vartheta_2) \quad (6.10.4)$$

si nota che per la descrizione dei potenziali abbiamo scelto in questo caso particolare di suddividere il potenziale interno alla sfera ospitante in 3 parti: uno descritto attraverso l'armonica solida regolare centrata nell'origine del sistema di riferimento principale, uno descritto attraverso l'armonica solida irregolare centrata nel sistema di riferimento della prima sfera e quindi uscente rispetto a tale punto ed infine un potenziale descritto attraverso l'armonica solida irregolare centrata nel sistema di riferimento locale della seconda sfera. I campi interni alle due sfere ovviamente non sono stati presi in considerazione in quanto abbiamo considerato delle sfere perfettamente conduttrici.

Per la determinazione dei coefficienti dello sviluppo bisogna imporre le condizioni al contorno su tutte le superficie sferiche presenti nel problema:

$$\begin{aligned} \Phi_0(\mathbf{r})|_{r=R} &= \Phi_s(\mathbf{r})|_{r=R} + \Phi_{c_1}(\mathbf{r})|_{r=R} + \Phi_{c_2}(\mathbf{r})|_{r=R} \\ \epsilon_0 \nabla \Phi_0(\mathbf{r})|_{r=R} &= \epsilon_s \nabla \Phi_s(\mathbf{r})|_{r=R} + \epsilon_s \nabla \Phi_{c_1}(\mathbf{r})|_{r=R} + \epsilon_s \nabla \Phi_{c_2}(\mathbf{r})|_{r=R} \\ \Phi_s(\mathbf{r}_1)|_{r_1=R_1} + \Phi_{c_1}(\mathbf{r}_1)|_{r_1=R_1} + \Phi_{c_2}(\mathbf{r}_1)|_{r_1=R_1} &= U_{01} \\ \Phi_s(\mathbf{r}_2)|_{r_2=R_2} + \Phi_{c_1}(\mathbf{r}_2)|_{r_2=R_2} + \Phi_{c_2}(\mathbf{r}_2)|_{r_2=R_2} &= U_{02} \end{aligned} \quad (6.10.5)$$

avendo indicato con U_{01} ed U_{02} i potenziali a cui si trovano le sfere prima dell'eccitazione esterna E_a . Possiamo notare che per poter imporre le condizioni al contorno su ciascuna sfera in modo agevole risulta conveniente applicare le formule

Figura 6.24: Traslazione lungo l'asse z .

di Nozawa [54, 56] per la traslazione delle armoniche solide regolari ed irregolari. Queste formule sono relative ad una traslazione lungo l'asse z , come in figura 6.24. Il teorema di addizione per le armoniche solide afferma che per una traslazione da O a O' , si ha:

$$R_n(\mathbf{r}) = \sum_{\nu=|m|}^n \binom{n+m}{n-\nu} d^{n-\nu} R_n(\mathbf{r}') \quad \text{per } d \in \mathfrak{R} \quad (6.10.6)$$

$$I_n(\mathbf{r}) = \sum_{\nu=n}^{\infty} (-1)^{\nu-n} \binom{\nu-m}{\nu-n} d^{\nu-n} I_n(\mathbf{r}') \quad \text{per } d < r' \quad (6.10.7)$$

$$I_n(\mathbf{r}) = \sum_{\nu=|m|}^{\infty} (-1)^{\nu+m} \binom{\nu+n}{\nu+m} d^{-(\nu+n+1)} R_n(\mathbf{r}') \quad \text{per } d > r' \quad (6.10.8)$$

$$(6.10.9)$$

viceversa per una traslazione da O' a O :

$$R_n(\mathbf{r}') = \sum_{\nu=|m|}^n (-1)^{n-\nu} \binom{n+m}{n-\nu} d^{n-\nu} R_n(\mathbf{r}) \quad \text{per } d \in \mathfrak{R} \quad (6.10.10)$$

$$I_n(\mathbf{r}') = \sum_{\nu=n}^{\infty} \binom{\nu-m}{\nu-n} d^{\nu-n} I_n(\mathbf{r}) \quad \text{per } d < r \quad (6.10.11)$$

$$I_n(\mathbf{r}') = (-1)^{n+m} \sum_{\nu=|m|}^{\infty} \binom{\nu+n}{\nu+m} d^{-(\nu+n+1)} R_n(\mathbf{r}) \quad \text{per } d > r \quad (6.10.12)$$

$$(6.10.13)$$

avendo indicato

$$R_n(\mathbf{r}) = r^n P_n^m(\cos \vartheta) \quad (6.10.14)$$

$$I_n(\mathbf{r}) = \frac{P_n^m(\cos \vartheta)}{r^{n+1}} \quad (6.10.15)$$

rispettivamente l'armonica regolare ed irregolare e con $\binom{n}{k}$ il coefficiente binomiale di Newton, definito come:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (6.10.16)$$

Nel nostro caso particolare di assialsimmetria rispetto l'asse z , si ha $m = 0$, quindi applicando il teorema di addizione per i seguenti potenziali,

$$\begin{aligned} \Phi_s(\mathbf{r}) &\rightarrow \Phi_s(\mathbf{r}_1), & \Phi_s(\mathbf{r}) &\rightarrow \Phi_s(\mathbf{r}_2), \\ \Phi_{c1}(\mathbf{r}_1) &\rightarrow \Phi_{c1}(\mathbf{r}), & \Phi_{c1}(\mathbf{r}_1) &\rightarrow \Phi_{c1}(\mathbf{r}_2) \\ \Phi_{c2}(\mathbf{r}_2) &\rightarrow \Phi_{c2}(\mathbf{r}), & \Phi_{c2}(\mathbf{r}_2) &\rightarrow \Phi_{c2}(\mathbf{r}_1) \end{aligned}$$

Scegliendo per lo sviluppo una $n = N$, applicando il teorema di addizione, scambiando l'ordine della sommatoria ed intercambiando n con ν , si ottiene per una

traslazione da O ad O' :

$$\Phi_s(\mathbf{r}_1) = \sum_{n=1}^N \sum_{\nu=n}^N a_\nu^s \binom{\nu}{\nu-n} d_1^{\nu-n} R_n(\mathbf{r}_1) \quad (6.10.17)$$

$$\Phi_s(\mathbf{r}_2) = \sum_{n=1}^N \sum_{\nu=n}^N a_\nu^s (-1)^{\nu-n} \binom{\nu}{\nu-n} d_2^{\nu-n} R_n(\mathbf{r}_2) \quad (6.10.18)$$

$$\Phi_{c1}(\mathbf{r}_2) = \sum_{n=1}^N \sum_{\nu=1}^N b_\nu^{c1} (-1)^\nu \binom{n+\nu}{n} d_1^{-(n+\nu+1)} I_n(\mathbf{r}_2) \quad (6.10.19)$$

e da O' ad O

$$\Phi_{c1}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N \sum_{\nu=1}^n b_\nu^{c1} \binom{n}{n-\nu} d_1^{n-\nu} I_n(\mathbf{r}) \quad (6.10.20)$$

$$\Phi_{c2}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N \sum_{\nu=1}^n b_\nu^{c2} (-1)^{n-\nu} \binom{n}{n-\nu} d_2^{n-\nu} I_n(\mathbf{r}) \quad (6.10.21)$$

$$\Phi_{c2}(\mathbf{r}_1) = \sum_{n=1}^N \sum_{\nu=1}^N b_\nu^{c2} (-1)^n \binom{n}{n-\nu} d_2^{-(n+\nu+1)} I_n(\mathbf{r}_1) \quad (6.10.22)$$

sostituendo tutto ciò che abbiamo trovato all'interno delle condizioni al contorno e considerando per semplicità espositiva $U_{01} = U_{02} = 0$ si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{b_n^0}{R_s^{2n+1}} - a_n^s - \sum_{\nu=1}^n b_\nu^{c1} \binom{n}{n-\nu} \frac{d_1^{n-\nu}}{R_s^{2n+1}} - \sum_{\nu=1}^n b_\nu^{c2} (-1)^{n-\nu} \binom{n}{n-\nu} \frac{d_2^{n-\nu}}{R_s^{2n+1}} = -E_n \delta_{n1} \\ -\varepsilon \frac{b_n^0}{R_s^{2n+1}} - N_n a_n^s + \sum_{\nu=1}^n b_\nu^{c1} \binom{n}{n-\nu} \frac{d_1^{n-\nu}}{R_s^{2n+1}} + \sum_{\nu=1}^n b_\nu^{c2} (-1)^{n-\nu} \binom{n}{n-\nu} \frac{d_2^{n-\nu}}{R_s^{2n+1}} = -E_n \varepsilon \frac{N_n}{\varepsilon} \delta_{n1} \\ \sum_{\nu=n}^N a_\nu^s \binom{\nu}{\nu-n} d_1^{\nu-n} + \frac{b_n^{c1}}{R_{c1}^{2n+1}} + \sum_{\nu=1}^n b_\nu^{c2} (-1)^\nu \binom{n}{n-\nu} \frac{d_2^{-(n+\nu+1)}}{R_{c1}^{2n+1}} = 0 \\ \sum_{\nu=n}^N a_\nu^s \binom{\nu}{\nu-n} (-d_2)^{\nu-n} + \sum_{\nu=1}^n b_\nu^{c2} (-1)^n \binom{n}{n-\nu} \frac{d_2^{-(n+\nu+1)}}{R_{c2}^{2n+1}} + \frac{b_n^{c2}}{R_{c2}^{2n+1}} = 0 \end{cases} \quad (6.10.23)$$

con $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_s}$, $N_n = \frac{n}{n+1}$ ed $E_1 = -E_a$. Notiamo che il sistema può essere riscritto in modo più compatto introducendo una sommatoria che consideri le due inclusioni,

ottenendo:

$$\begin{cases} b_n^0 - a_n^s R_s^{2n+1} - \sum_{l=1}^2 \sum_{\nu=1}^n b_\nu^{cl} \binom{n}{n-\nu} z_l^{n-\nu} = -E_n R_s^{2n+1} \delta_{n1} \\ -b_n^0 - \frac{N_n}{\varepsilon} a_n^s R_s^{2n+1} + \sum_{l=1}^2 \sum_{\nu=1}^n b_\nu^{cl} \binom{n}{n-\nu} z_l^{n-\nu} = -E_n R_s^{2n+1} N_n \delta_{n1} \\ \sum_{\nu=n}^N a_\nu^s \binom{\nu}{\nu-n} z_j^{\nu-n} R_{cj}^{2n+1} + b_n^{ej} + \sum_{l=1 \neq j}^2 \sum_{\nu=1}^N b_\nu^{cl} (-1)^\nu \binom{n}{n-\nu} z_l^{-(n+\nu+1)} = 0 \end{cases} \quad (6.10.24)$$

per $j=1,2$. Risolvendo il sistema si riescono a determinare tutti i coefficienti degli sviluppi dei potenziali elettrostatici in gioco.

Da quest'ultima espressione si può facilmente ricavare l'estensione al caso di L sfere PEC tutte poste lungo l'asse z .

$$\begin{cases} b_n^0 - a_n^s R_s^{2n+1} - \sum_{l=1}^L \sum_{\nu=1}^n b_\nu^{cl} \binom{n}{n-\nu} z_l^{n-\nu} = -E_n R_s^{2n+1} \delta_{n1} \\ -b_n^0 - \frac{N_n}{\varepsilon} a_n^s R_s^{2n+1} + \sum_{l=1}^L \sum_{\nu=1}^n b_\nu^{cl} \binom{n}{n-\nu} z_l^{n-\nu} = -E_n R_s^{2n+1} N_n \delta_{n1} \\ \sum_{\nu=n}^N a_\nu^s \binom{\nu}{\nu-n} z_j^{\nu-n} R_{cj}^{2n+1} + b_n^{ej} + \sum_{l=1 \neq j}^L \sum_{\nu=1}^N b_\nu^{cl} (-1)^\nu \binom{n}{n-\nu} z_l^{-(n+\nu+1)} = 0 \end{cases} \quad (6.10.25)$$

for $j=1, \dots, L$.

Il risultato risulta piuttosto elegante considerando il fatto che sono presenti un numero di incognite pari a $L + 2$ con L al limite tendente ad infinito.

A questo la polarizzabilità del sistema può essere determinato come:

$$\alpha = 4\pi\varepsilon_0 \frac{b_1^0}{E_a} \quad (6.10.26)$$

per tutte le considerazioni fatte nei paragrafi precedenti.

6.10.1 Validazione e risultati del modello di L sfere

Passiamo ora alla validazione del modello determinato. In particolare si confronterà il campo elettrico esterno alla sfera ospitante lungo una linea di riferimento posta parallelamente all'asse x e ad una certa quota z . Ovviamente il campo elettrico

esterno può essere determinato attraverso la seguente relazione

$$\mathbf{E}_0 = -\nabla\Phi_0 \quad (6.10.27)$$

cioè nel nostro caso:

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = -\frac{\partial\Phi_0}{\partial r}\mathbf{r}_0 + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_0}{\partial\vartheta}\boldsymbol{\vartheta}_0 \quad (6.10.28)$$

con

$$\Phi_0(r, \vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-E_a r^n \delta_{n1} + \frac{b^0}{r^{n+1}} \right] P_n(\cos \vartheta) \quad (6.10.29)$$

otteniamo:

$$\mathbf{E}_{0r}(r, \vartheta) = -\sum_{n=1}^{\infty} \left[-nE_a r^{n-1} \delta_{n1} - (n+1) \frac{b^0}{r^{n+2}} \right] P_n(\cos \vartheta) \quad (6.10.30)$$

$$\mathbf{E}_{0\vartheta}(r, \vartheta) = -\sum_{n=1}^{\infty} \left[-E_a r^{n-1} \delta_{n1} + \frac{b^0}{r^{n+2}} \right] \frac{dP_n(\cos \vartheta)}{d\vartheta} \quad (6.10.31)$$

Confrontando i risultati delle componenti del campo elettrico lungo una linea di coordinate $x = [-R_s : 0]$, $y = 0$ e $z = -1.2R_s$ per una sfera di raggio $R_s = 0.9$, $R_{c1} = R_{c2} = R_s/3$, $d_1 = 0.4$, $d_2 = -0.4$ e con $\varepsilon_s = 2.25$ (vetro), $\varepsilon_0 = 1$ (aria), il campo esterno è stato considerato di valore unitario cioè $E_a = 1V/m$. Come si può notare dalla figura (6.25), l'accordo tra i risultati è ottimo. Nella figura successiva (Fig. 6.26) si valida il modello di un sistema costituito da 4 sfere PEC contenute in una sfera di vetro immersa nell'aria, calcolando le componenti del campo elettrico lungo una linea delle stesse caratteristiche del caso precedente, ma poste ad una quota $z = -1.5R_s$. In questo caso le dimensioni geometriche risultano $R_s = 2$, $R_{c_i} = R_s/8$ e le distanze dei centri delle sfere rispetto l'origine del sistema di riferimento principale pari a: $d_1 = 0.15$, $d_2 = 0.05$, $d_3 = -0.05$ e $d_4 = -0.15$.

Anche in questo caso si nota un ottimo accordo tra i risultati ottenuti con quelli attesi.

Come nel caso precedente vogliamo vedere se spostando le sfere all'interno della

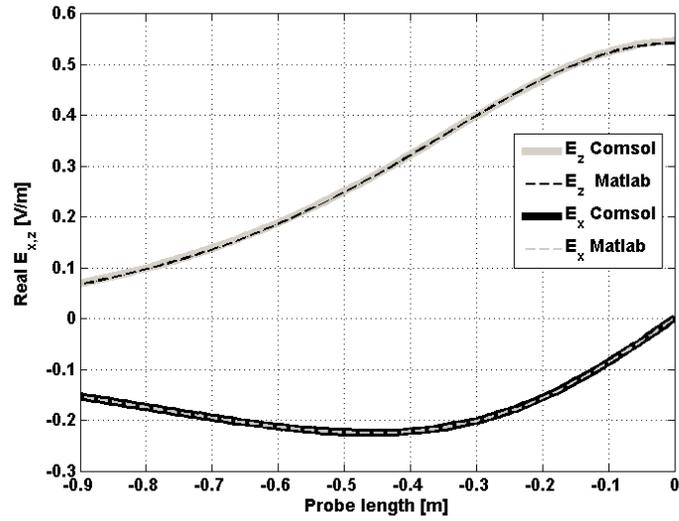


Figura 6.25: Confronto delle componenti del campo elettrico esterno alla sfera ospitante nel caso di 2 sfere PEC.

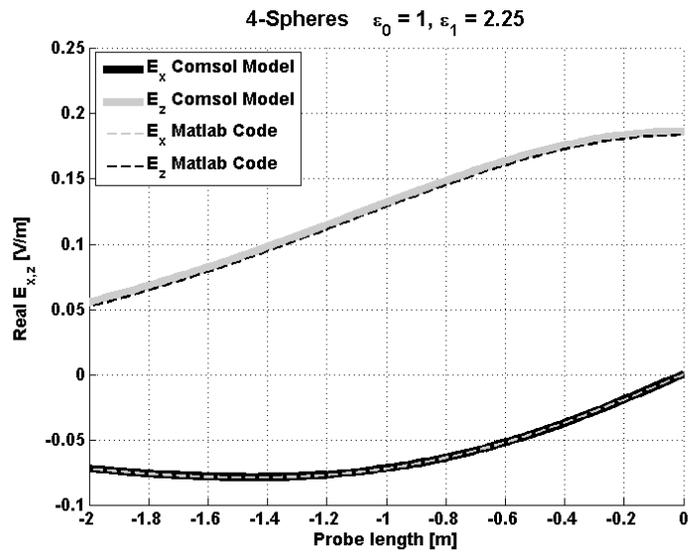


Figura 6.26: Confronto delle componenti del campo elettrico esterno alla sfera ospitante nel caso di 4 sfere PEC.

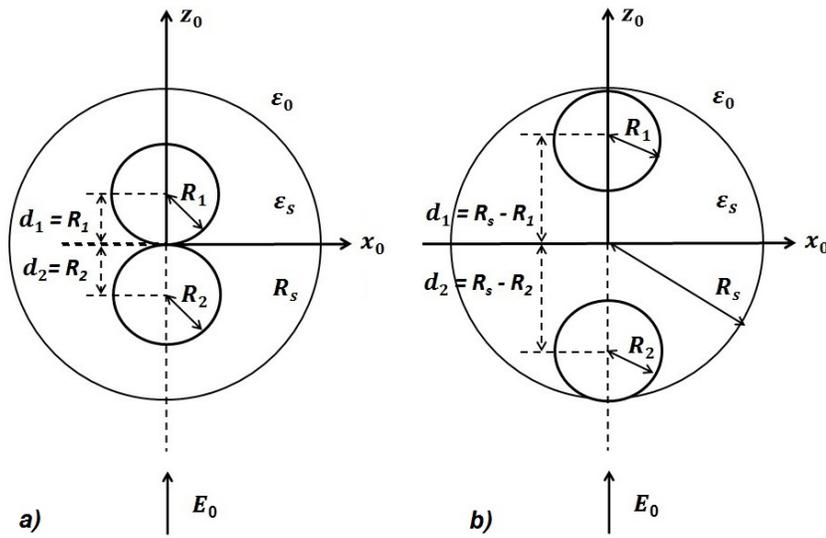


Figura 6.27: Geometria del problema: a) stato iniziale, b) stato finale.

sfera ospitante i valori del campo elettrico esterno subiscono variazioni consistenti oppure trascurabili. Si vuole pertanto studiare il caso in cui le sfere interne di raggio uguale e costante vanno fatte variare da una posizione centrale fino ad una posizione di interna tangenzialità come mostrato in figura 6.27.

Ciò che si ottiene è una variazione apprezzabile del campo elettrico contrariamente a quanto si era ottenuto nel caso di una sola sfera ospitata. I parametri geometrici presi in considerazione sono raggio della sfera esterna di valore unitario, raggio delle sfere interne uguali tra loro e pari a $R_{c1} = R_{c2} = R_s/4$ posizione del probe $P = (0, 0, -1.2R_s)$, mentre per quanto riguarda i parametri elettromagnetici: $\epsilon_s = 4$, sfere interne PEC e campo esterno pari a $1V/m$.

6.11 Sfera RU vs sfera multiconcentrica

In questo paragrafo si vuole dimostrare come sia possibile approssimare il comportamento di un nuovo tipo di metamateriale noto come sfera anisotropa radiale uniassiale (sfera RU) con un numero finito di sfere concentriche dielettriche ed omo-

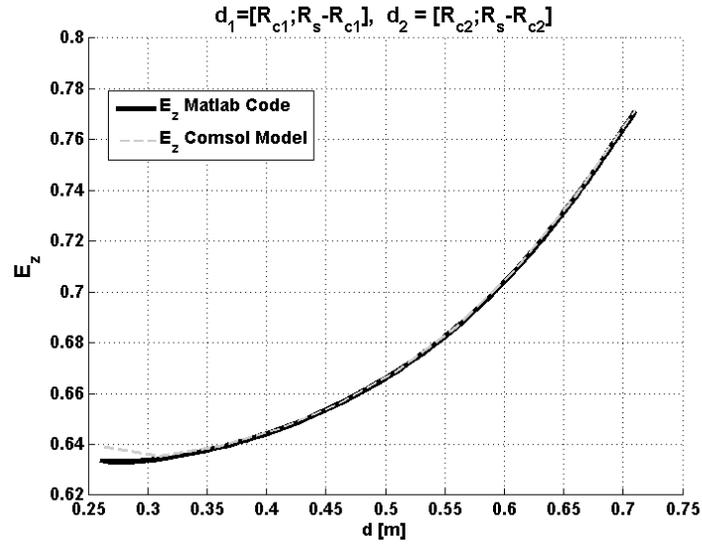


Figura 6.28: Andamento del campo elettrico in funzione della distanza delle due sfere interne.

genee, utilizzando il modello multisfera proposto nei paragrafi precedenti. Facciamo una piccola parentesi per fornire una definizione di sfera RU [57], in particolare tale mezzo non è altro che una sfera caratterizzata da un materiale anisotropo, la cui permittività dielettrica risulta essere descritta attraverso un tensore, in particolare tale tensore essendo uniassiale è di tipo diagonale rispetto ad un sistema di riferimento sferico con una costante dielettrica radiale ε_r e una costante tangenziale ε_t cioè caratterizzata solo da due valori della permittività elettrica:

$$\varepsilon_s = \varepsilon_0 [\varepsilon_r \mathbf{r}_0 \mathbf{r}_0 + \varepsilon_t (\boldsymbol{\vartheta}_0 \boldsymbol{\vartheta}_0 + \boldsymbol{\varphi}_0 \boldsymbol{\varphi}_0)] = \begin{pmatrix} \varepsilon_r & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_t & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_t \end{pmatrix} \quad (6.11.1)$$

avendo indicato con ε_r e ε_t la costante dielettrica radiale e tangenziale. Ovvero un tale mezzo è caratterizzato dall'aver l'asse ottico lungo la direzione radiale, perciò per ogni valore di r si avrà una permittività dielettrica costante su tutta la superficie sferica di raggio r . La permittività efficace e la relativa polarizzabilità di

una sfera così costituita sono:

$$\varepsilon_{RU} = \frac{\varepsilon_r}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + 8 \frac{\varepsilon_\tau}{\varepsilon_r}} \right) \quad (6.11.2)$$

$$\alpha_{RU} = 3 \frac{\varepsilon_{RU} - 1}{\varepsilon_{RU} + 2} \quad (6.11.3)$$

Per la determinazione delle costanti dielettriche per un materiale stratificato si è utilizzato il modello proposto da Gouglu et al. [58], in tale modello veniva preso in considerazione una struttura stratificata in modo planare costituita da due soli materiali alternati ε_1 e ε_2 , sfruttando tale modello ed adattandolo al modello di struttura stratificata sferica si è ottenuto:

$$\varepsilon_r = \frac{2}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}} \quad (6.11.4)$$

$$\varepsilon_\tau = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \quad (6.11.5)$$

Si vogliono quindi studiare quali sono i limiti per il quale una sfera RU può essere approssimata da una sfera multiconcentrica modellizzata dalle formule (6.8.10) e (6.8.11). Utilizzando le (6.8.7), (6.8.10) ed ipotizzando inizialmente che lo spessore di ciascuno strato sia uguale (vedi Fig. 6.29), quindi con i raggi di ogni sfera descritti attraverso la seguente legge:

$$a_k = \frac{N - (k - 1)}{N} a_1 \quad (6.11.6)$$

e sostituendola nella (6.8.5) e considerando due sole tipologie di materiali come previsto dal modello di [58], otteniamo il modello cercato. A questo punto si passa alla validazione del modello e ai risultati, in particolare si vuole graficare l'andamento della polarizzabilità normalizzata al variare del numero di strati mantenendo il raggio esterno sempre fissato, ovvero cercando di infittire il numero di strati all'interno di una sfera di raggio costante.

Sono state considerate due sfere; la prima caratterizzata da coppie di strati con $\varepsilon_1 = 2$, $\varepsilon_2 = 4$ e la seconda sfera caratterizzata da $\varepsilon_1 = 4$, $\varepsilon_2 = 2$, entrambe poste in aria e di raggio esterno unitario, così come il valore del campo esterno, cioè pari

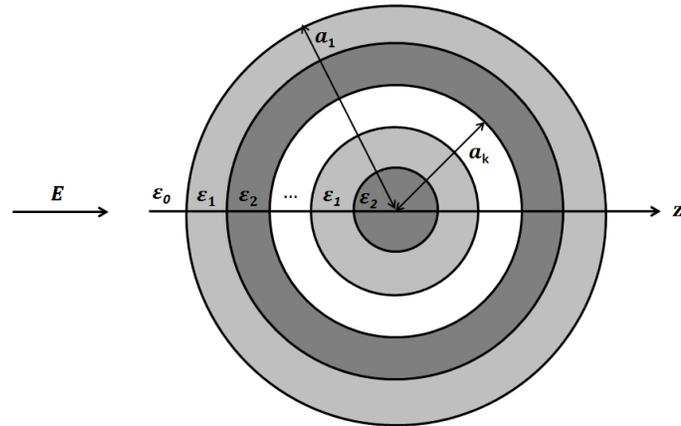


Figura 6.29: Geometria del problema.

a $1V/m$.

Nella figura 6.30 sono stati riportati gli andamenti di 4 modelli, partendo dal basso verso l'alto abbiamo: la polarizzabilità di una sfera costituita da soli due strati di cui quello esterno caratterizzato da $\epsilon_1 = 2$ e quello interno $\epsilon_2 = 4$; l'andamento della polarizzabilità di una sfera i cui strati sono caratterizzati da coppie di materiali caratterizzate da valori analoghi al caso precedente; il modello di sfera RU caratterizzato da ϵ_r e ϵ_τ determinabili dalle (6.11.4), (6.11.5); ed infine due andamenti analoghi ai primi due modelli ma con i valori delle ϵ invertite.

Si nota subito come i modelli di due sfere concentriche e multiconcentriche implementate con metodologie differenti assumono un valore analogo, per poi divergere e diventare convergenti verso il modello a RU all'aumentare del numero di strati, possiamo quindi affermare che una sfera multiconcentrica, proprio come ci aspettavamo, si comporta come una sfera RU per un numero di strati tendenti all'infinito. Riportando l'andamento della differenza tra i valori delle costanti dielettriche attesa (RU) e quella efficace del sistema multisferico all'aumentare del numero di sfere di ottiene 6.31, da questa figura si può determinare in numero necessario per approssi-

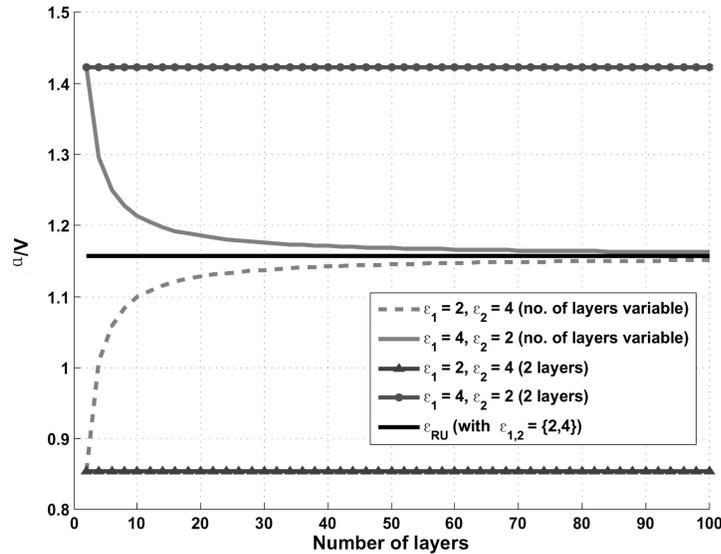


Figura 6.30: Polarizzabilità normalizzata in funzione del numero di strati e caratterizzati dai seguenti valori delle costanti dielettriche $\epsilon = \{2; 4\}$.

mare con un certo errore la sfera RU. Riportando proprio quest'ultimo andamento, ovvero il numero di layer necessari per avere l'1% di errore tra il valore ottenuto ed il valore atteso in funzione del rapporto tra le costanti dielettriche degli strati, si ottiene il seguente grafico 6.32. Nella stessa figura viene riportato l'andamento della funzione:

$$N = 4 \ln \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right)^2 \quad (6.11.7)$$

Quest'ultima formula empirica può essere proprio utilizzata per la determinazione del numero di strati necessario per poter approssimare una sfera RU con una sfera multistrato con un errore inferiore all'1%.

Si poteva ovviamente pensare di costruire la sfera multistrato utilizzando una diversa legge che lega i diversi spessori, ad esempio si potrebbe pensare di utilizzare una legge che imponga che la differenza tra la superficie esterna di una sfera e quella successiva, risulti costante tra tutte le coppie di sfere, oppure che il volume di ogni

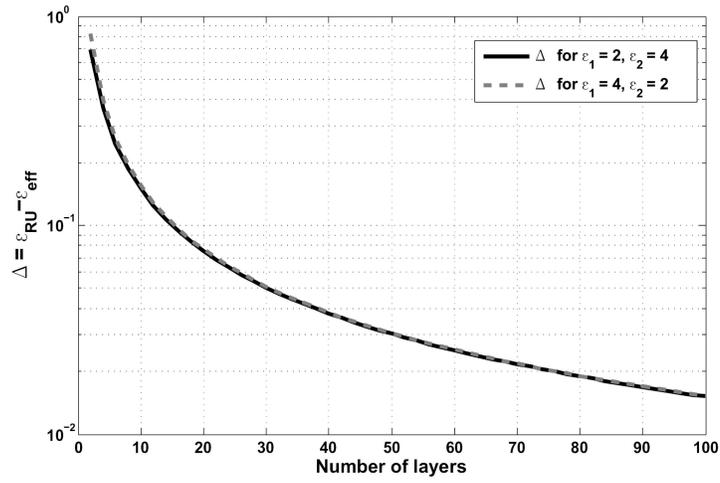


Figura 6.31: Differenza tra la permittività efficace di una sfera RU con quella di una sfera multistrato all'aumentare del numero di strati stessi, $\varepsilon = \{2; 4\}$.

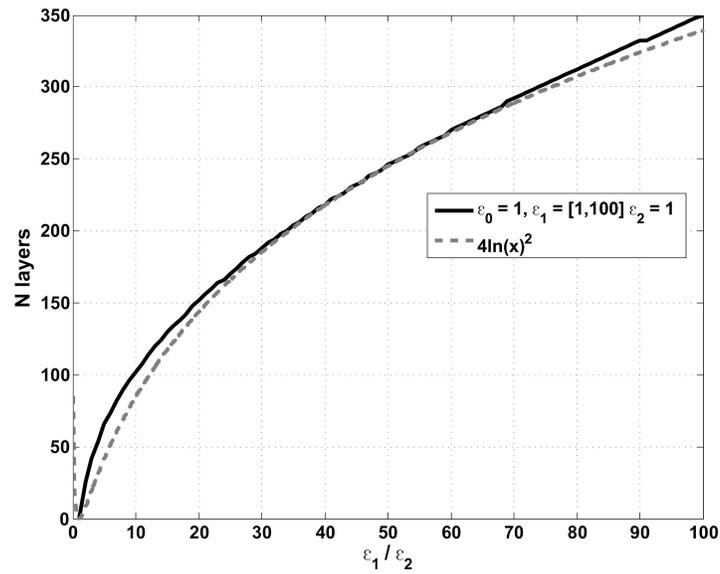


Figura 6.32: Numero di layer necessario per avere una differenza tra la polarizzabilità di una sfera RU e multiconcentrica pari all'1%.

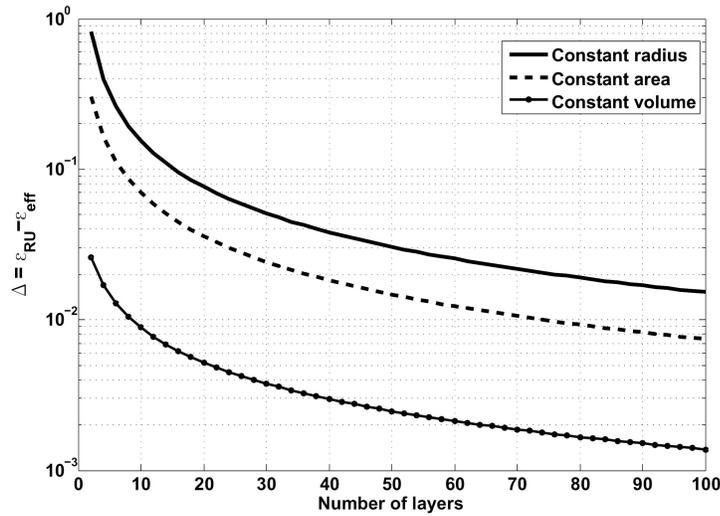


Figura 6.33: Differenza tra la permittività efficace di una sfera RU con quella di una sfera multistrato all'aumentare del numero di strati stessi, $\varepsilon = \{2; 4\}$, nei casi di spessore costante, differenza di superficie costante e volume dello strato costante.

strato resti invariato, tutto ciò può essere tradotto matematicamente come:

$$a_k = \left[\frac{N - (k - 1)}{N} a_1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.11.8)$$

$$a_k = \left[\frac{N - (k - 1)}{N} a_1 \right]^{\frac{1}{3}} \quad (6.11.9)$$

rispettivamente. A questo punto riportando l'andamento della differenza tra i valori delle costanti dielettriche di sfera RU e sfera multiconcentrica al variare del numero di strati per i tre casi diversi ovvero spessore costante, differenza di area costante e volume dello strato costante. Si nota dalla figura 6.33 come con il modello a volume costante si ottiene una differenza di circa 10^{-2} solo per 5 coppie di materiale, e quindi è pensabile di utilizzare proprio come tecnica realizzativa di questo metamateriale il metodo a volume costante, ricordiamo infatti che tra le numerose applicazioni proposte in letteratura di una sfera RU vi è il cloaking [59, 60, 61].

Passando allo studio dello stesso modello utilizzando mezzi plasmonici, che in

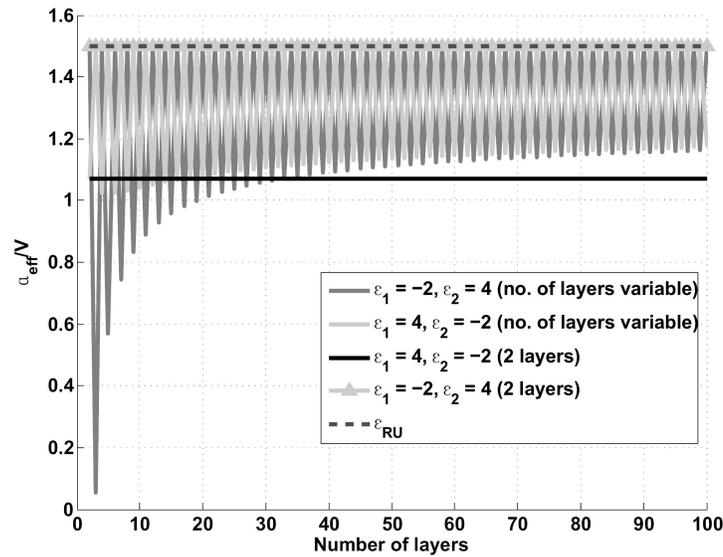


Figura 6.34: Polarizzabilità normalizzata in funzione del numero di strati e caratterizzati dai seguenti valori delle costanti dielettriche $\varepsilon = \{2; 4\}$.

questa prima approssimazione possiamo considerare come quei materiali caratterizzati da una componente reale della costante dielettrica negativa e la parte immaginaria nulla, proprio come succede ad esempio all'argento nelle frequenze ottiche, otteniamo: una conferma del modello nel caso in cui entrambi i mezzi sono plasmonici, ma comportamenti inaspettati nel caso in cui un mezzo è plasmonico e l'altro è dielettrico (Figg. 6.34-6.36). Si nota come il comportamento della polarizzabilità risulti fortemente variabile se il numero di strati considerati è pari o dispari, dalla figura 6.34 sembrerebbe che la convergenza possa avvenire per valori molto elevati del numero di strati, ma se si va a considerare un numero dispari di strati (Fig. 6.35) si nota, nel caso in cui lo strato esterno non è plasmonico, si ha che il modello è sempre convergente indipendentemente dal numero di strati stessi, così come nel caso di figura 6.36 in cui lo strato plasmonico è esterno e si prendono un numero sempre pari di strati il modello risulta sempre convergente a quello di sfera RU plasmonica.

Analogamente a quanto fatto nei paragrafi successivi anche in questo caso si vuole

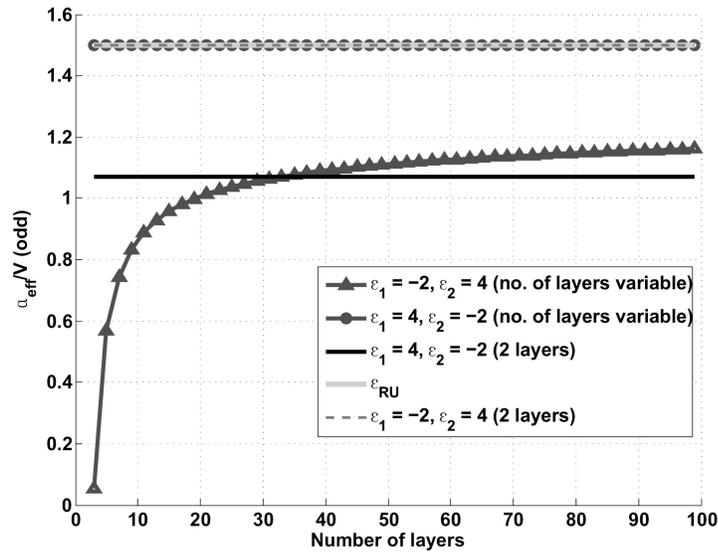


Figura 6.35: Polarizzabilità normalizzata in funzione del numero di strati e caratterizzati dai seguenti valori delle costanti dielettriche $\epsilon = \{2; 4\}$, riportante l'involuppo di un numero dispari di strati.

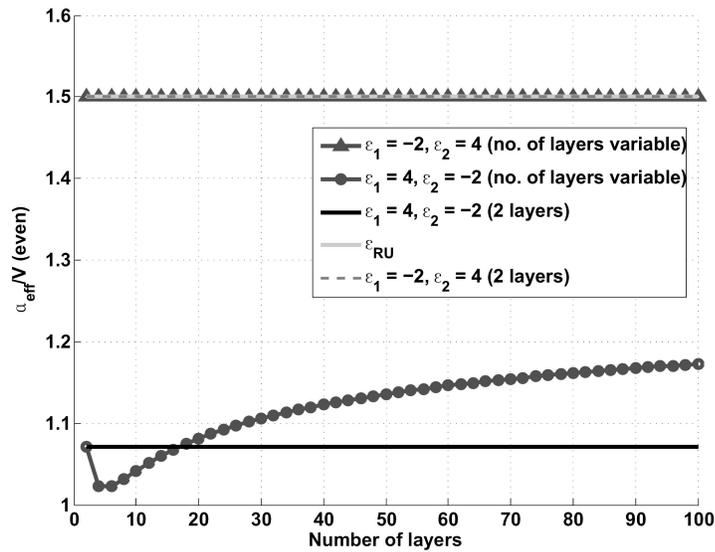


Figura 6.36: Polarizzabilità normalizzata in funzione del numero di strati e caratterizzati dai seguenti valori delle costanti dielettriche $\epsilon = \{2; 4\}$, riportante l'involuppo di un numero pari di strati.

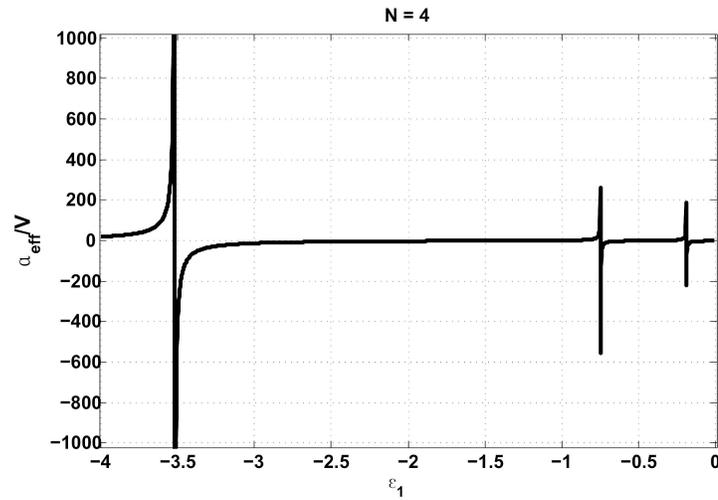


Figura 6.37: Polarizzabilità normalizzata in funzione del contrasto dielettrico avendo fissato $\varepsilon_2 = 2$ e avendo considerato una sfera caratterizzata da 4 strati.

andare a studiare il comportamento delle risonanze plasmoniche o elettrostatiche in funzione del contrasto dielettrico definito in questo caso come:

$$x = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \quad (6.11.10)$$

e fissando un valore della seconda costante dielettrica, che in questo caso prendiamo per semplicità pari a 2. Quindi riportando l'andamento della polarizzabilità normalizzata in funzione del contrasto si ottengono le figure 6.37 e 6.38. Si nota come il numero di poli è aumentato rispetto al caso di singola sfera studiato nei paragrafi precedenti, inoltre riportando l'andamento nei diversi casi, cioè al variare del numero di strati stessi, si è notato un aumento del numero di poli che rispetta la seguente legge:

$$n_p = 1 + \left[\frac{N}{2} \right] \quad (6.11.11)$$

avendo indicato con $[x]$ una grandezza il cui valore è arrotondato per eccesso all'intero più vicino [62].

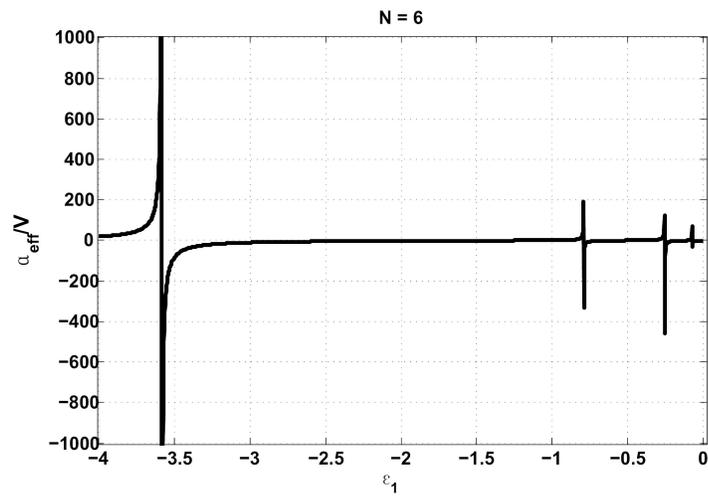


Figura 6.38: Polarizzabilità normalizzata in funzione del contrasto dielettrico avendo fissato $\epsilon_2 = 2$ e avendo considerato una sfera di 6 strati.

Appendice A

Determinazione degli integrali

Le sottomatrici C_{pq}^{mn} , D_{pq}^{mn} , G_{pq}^{mn} e H_{pq}^{mn} presenti nella matrice delle incognite (6.8.5) per poter essere determinate numericamente devono essere convertite in un integrale su percorso reale, per fare ciò si può suddividere inizialmente l'integrale in due parti: uno su un percorso reale, l'altro su uno puramente immaginario (Fig. A.1).

Prendo in considerazione la sottomatrice C_{pq}^{mn} ricordando che analoghe considerazioni possono essere fatte per tutte le altre matrici:

$$\Re[C_{pq}^{mn}] = i^{-n} \delta_{mp} k_{pq} \int_0^{\pi/2} \sin \alpha_i \left[R_H^-(\alpha_i) \pi_n^m(\cos \alpha_i) \pi_q^p(\cos \alpha_i) - R_E^-(\alpha_i) \tau_n^m(\cos \alpha_i) \tau_q^p(\cos \alpha_i) \right] d\alpha_i \quad (\text{A.0.1})$$

$$\Im[C_{pq}^{mn}] = i^{-n} \delta_{mp} k_{pq} \int_{\pi/2}^{\pi/2-i\infty} \sin \alpha_i \left[R_H^-(\alpha_i) \pi_n^m(\cos \alpha_i) \pi_q^p(\cos \alpha_i) - R_E^-(\alpha_i) \tau_n^m(\cos \alpha_i) \tau_q^p(\cos \alpha_i) \right] d\alpha_i \quad (\text{A.0.2})$$

Per quanto riguarda il secondo integrale impongo le seguenti sostituzioni:

$$\begin{aligned} \cos \alpha_i &= iu \\ \sin \alpha_i &= \sqrt{1+u^2} \end{aligned}$$

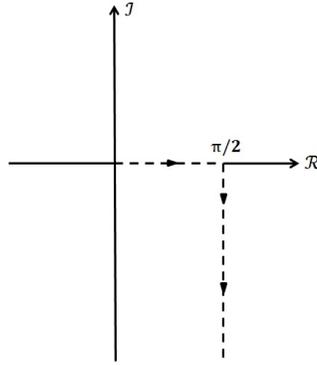


Figura A.1: Percorso di integrazione sul piano complesso.

quindi

$$d\alpha_i = -i \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$$

mentre per quanto riguarda il percorso d'integrazione pongo:

$$\begin{aligned} \alpha_i = \frac{\pi}{2} - i\infty & \rightarrow u = \infty \\ \alpha_i = \frac{\pi}{2} & \rightarrow u = 0 \end{aligned}$$

ottenendo:

$$\Im[C_{pq}^{mn}] = i^{-(n+1)} \delta_{mp} k_{pq} \int_0^\infty \left[R_H^-(u) \pi_n^m(iu) \pi_q^p(iu) - R_E^-(u) \tau_n^m(iu) \tau_q^p(iu) \right] du$$

È bene comunque ricordarsi, per agevolare l'implementazione numerica, le seguenti regole [12]:

$$\begin{aligned} \frac{dP_n^m(x)}{dx} &= \frac{1}{1-x^2} [(n+1)xP_n^m(x) - (n-m+1)P_{n+1}^m(x)] \\ P_n^{-m}(x) &= (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x) \\ P_{n+1}^{-m}(x) &= (-1)^m \frac{(n+1-m)!}{(n+1+m)!} P_{n+1}^m(x) \end{aligned}$$

In definitiva si ottiene

$$C_{pq}^{mn} = \Re[C_{pq}^{mn}] + \Im[C_{pq}^{mn}] = i^{-n} \delta_{mp} k_{pq} \cdot \left\{ \int_0^{\pi/2} \sin \alpha_i \left[R_H^-(\alpha) \pi_n^m(\cos \alpha) \pi_q^p(\cos \alpha) - R_E^-(\alpha) \tau_n^m(\cos \alpha) \tau_q^p(\cos \alpha) \right] d\alpha + \right. \\ \left. - i \int_0^\infty \left[R_H^-(u) \pi_n^m(iu) \pi_q^p(iu) - R_E^-(u) \tau_n^m(iu) \tau_q^p(iu) \right] du \right\}$$

$$D_{pq}^{mn} = \Re[D_{pq}^{mn}] + \Im[D_{pq}^{mn}] = i^{-n} \delta_{mp} k_{pq} \cdot \left\{ \int_0^{\pi/2} \sin \alpha \left[-R_H^-(\alpha) \pi_n^m(\cos \alpha) \tau_q^p(\cos \alpha) + R_E^-(\alpha) \tau_n^m(\cos \alpha) \pi_q^p(\cos \alpha) \right] d\alpha + \right. \\ \left. - i \int_0^\infty \left[-R_H^-(u) \pi_n^m(iu) \pi_q^p(iu) + R_E^-(u) \tau_n^m(iu) \tau_q^p(iu) \right] du \right\}$$

$$G_{pq}^{mn} = \Re[G_{pq}^{mn}] + \Im[G_{pq}^{mn}] = i^{-n} \delta_{mp} k_{pq} \cdot \left\{ \int_0^{\pi/2} \sin \alpha \left[R_H^-(\alpha) \tau_n^m(\cos \alpha) \pi_q^p(\cos \alpha) - R_E^-(\alpha) \pi_n^m(\cos \alpha) \tau_q^p(\cos \alpha) \right] d\alpha + \right. \\ \left. - i \int_0^\infty \left[R_H^-(u) \pi_n^m(iu) \pi_q^p(iu) - R_E^-(u) \tau_n^m(iu) \tau_q^p(iu) \right] du \right\}$$

$$H_{pq}^{mn} = \Re[H_{pq}^{mn}] + \Im[H_{pq}^{mn}] = i^{-n} \delta_{mp} k_{pq} \cdot \left\{ \int_0^{\pi/2} \sin \alpha \left[-R_H^-(\alpha) \tau_n^m(\cos \alpha) \tau_q^p(\cos \alpha) + R_E^-(\alpha) \pi_n^m(\cos \alpha) \pi_q^p(\cos \alpha) \right] d\alpha + \right. \\ \left. - i \int_0^\infty \left[-R_H^-(u) \pi_n^m(iu) \pi_q^p(iu) + R_E^-(u) \tau_n^m(iu) \tau_q^p(iu) \right] du \right\}$$

Passiamo ora ad esplicitare il campo scatterato-riflesso, che ricordiamo può essere

espresso come.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{sr}(\mathbf{r}) = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} e^{im\beta_i} \sin \alpha_i e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}} \\ & \left\{ e_{mn} \left[iR_H^-(\alpha_i) \pi_n^m(\cos \alpha_i) \boldsymbol{\alpha}_{0r} - R_E^-(\alpha_i) \tau_n^m(\cos \alpha_i) \boldsymbol{\beta}_{0r} \right] + \right. \\ & \left. + f_{mn} \left[iR_H^-(\alpha_i) \tau_n^m(\cos \alpha_i) \boldsymbol{\alpha}_{0r} - R_E^-(\alpha_i) \pi_n^m(\cos \alpha_i) \boldsymbol{\beta}_{0r} \right] \right\} d\alpha_i d\beta_i \quad (\text{A.0.3}) \end{aligned}$$

con

$$\mathbf{k}_r = k_{n+1} (\sin \alpha_i \cos \beta_i \mathbf{x}_0 + \sin \alpha_i \sin \beta_i \mathbf{y}_0 - \cos \alpha_i \mathbf{z}_0) \quad (\text{A.0.4})$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{0r} = -\cos \alpha_i \cos \beta_i \mathbf{x}_0 - \cos \alpha_i \sin \beta_i \mathbf{y}_0 - \sin \alpha_i \mathbf{z}_0 \quad (\text{A.0.5})$$

$$\boldsymbol{\beta}_{0r} = -\sin \beta_i \mathbf{x}_0 + \cos \beta_i \mathbf{y}_0 \quad (\text{A.0.6})$$

Sostituisco alla (A.0.3) le (A.0.4-A.0.6) ottenendo la rappresentazione del campo scatterato-riflesso in coordinate cartesiane:

$$\begin{aligned} E_{sr_x}(\mathbf{r}) = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} e^{im\beta_i} \sin \alpha_i e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}} \\ & \left\{ -iR_H^-(\alpha_i) \cos \alpha_i \cos \beta_i \left[e_{mn} \pi_n^m(\cos \alpha_i) + f_{mn} \tau_n^m(\cos \alpha_i) \right] + \right. \\ & \left. + R_E^-(\alpha_i) \sin \beta_i \left[e_{mn} \tau_n^m(\cos \alpha_i) + f_{mn} \pi_n^m(\cos \alpha_i) \right] \right\} d\alpha_i d\beta_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{sr_y}(\mathbf{r}) = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} e^{im\beta_i} \sin \alpha_i e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}} \\ & \left\{ -iR_H^-(\alpha_i) \cos \alpha_i \sin \beta_i \left[e_{mn} \pi_n^m(\cos \alpha_i) + f_{mn} \tau_n^m(\cos \alpha_i) \right] + \right. \\ & \left. - R_E^-(\alpha_i) \cos \beta_i \left[e_{mn} \tau_n^m(\cos \alpha_i) + f_{mn} \pi_n^m(\cos \alpha_i) \right] \right\} d\alpha_i d\beta_i \end{aligned}$$

$$E_{sr_z}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} e^{im\beta_i} \sin \alpha_i e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}} \\ - iR_H^-(\alpha_i) \sin \alpha_i \left[e_{mn}\pi_n^m(\cos \alpha_i) + f_{mn}\tau_n^m(\cos \alpha_i) \right] d\alpha_i d\beta_i$$

Anche in questo caso come in quello precedente l'integrale doppio può essere suddiviso in un integrale con il percorso sull'asse reale ed uno nel piano complesso. Prendo inizialmente in considerazioni la componente x , ricordando che tutte le considerazioni che verranno fatte valgono anche per le altre due componenti.

$$E_{sr_x}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{i^{-n}}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{im\beta_i} \sin \alpha_i e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}} \right. \\ \left. \left\{ -iR_H^-(\alpha_i) \cos \alpha_i \cos \beta_i \left[e_{mn}\pi_n^m(\cos \alpha_i) + f_{mn}\tau_n^m(\cos \alpha_i) \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + R_E^-(\alpha_i) \sin \beta_i \left[e_{mn}\tau_n^m(\cos \alpha_i) + f_{mn}\pi_n^m(\cos \alpha_i) \right] \right\} d\alpha_i d\beta_i + \right. \\ \left. + \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} e^{im\beta_i} \sin \alpha_i e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}} \right. \\ \left. \left\{ -iR_H^-(\alpha_i) \cos \alpha_i \cos \beta_i \left[e_{mn}\pi_n^m(\cos \alpha_i) + f_{mn}\tau_n^m(\cos \alpha_i) \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + R_E^-(\alpha_i) \sin \beta_i \left[e_{mn}\tau_n^m(\cos \alpha_i) + f_{mn}\pi_n^m(\cos \alpha_i) \right] \right\} d\alpha_i d\beta_i \right\} = \\ = \Re[E_{sr_x}(\mathbf{r})] + \Im[E_{sr_x}(\mathbf{r})] \quad (\text{A.0.7})$$

Per quanto riguarda $\Im[E_{sr_x}(\mathbf{r})]$ possiamo imporre le seguenti sostituzioni, come fatto precedentemente:

$$\cos \alpha_i = iu \\ \sin \alpha_i = \sqrt{1+u^2}$$

quindi ancora una volta:

$$d\alpha_i = -i \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$$

mentre per quanto riguarda il percorso d'integrazione:

$$\begin{aligned} \alpha_i = \frac{\pi}{2} - i\infty &\quad \rightarrow \quad u = \infty \\ \alpha_i = \frac{\pi}{2} &\quad \rightarrow \quad u = 0 \end{aligned}$$

ottenendo:

$$\begin{aligned} \Im[E_{sr_x}(\mathbf{r})] &= -i \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} e^{im\beta_i} e^{ik_2(\sqrt{1+u^2} \cos \beta_i x + \sqrt{1+u^2} \sin \beta_i y - iuz)} \right. \\ &\quad \left\{ -iR_H^{n+1}(u)iu \cos \beta_i [e_{mn}\pi_n^m(iu) + f_{mn}\tau_n^m(iu)] + \right. \\ &\quad \left. \left. + R_E^{n+1}(u) \sin \beta_i [e_{mn}\tau_n^m(iu) + f_{mn}\pi_n^m(iu)] \right\} dud\beta_i \right\}. \end{aligned}$$

Con analoghe considerazioni sulle altre componenti, si ha:

$$\begin{aligned} \Im[E_{sr_y}(\mathbf{r})] &= -i \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} e^{im\beta_i} e^{ik_2(\sqrt{1+u^2} \cos \beta_i x + \sqrt{1+u^2} \sin \beta_i y - iuz)} \right. \\ &\quad \left\{ -iR_H^{n+1}(u)iu \sin \beta_i [e_{mn}\pi_n^m(iu) + f_{mn}\tau_n^m(iu)] + \right. \\ &\quad \left. \left. + R_E^{n+1}(u) \cos \beta_i [e_{mn}\tau_n^m(iu) + f_{mn}\pi_n^m(iu)] \right\} dud\beta_i \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Im[E_{sr_z}(\mathbf{r})] &= -i \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} e^{im\beta_i} e^{ik_2(\sqrt{1+u^2} \cos \beta_i x + \sqrt{1+u^2} \sin \beta_i y - iuz)} \right. \\ &\quad \left. \left\{ -iR_H^{n+1}(u)iu\sqrt{1+u^2} [e_{mn}\pi_n^m(iu) + f_{mn}\tau_n^m(iu)] \right\} dud\beta_i \right\} \end{aligned}$$

Il campo scatterato-riflesso potrà essere scritto come:

$$\mathbf{E}_{sr}(\mathbf{r}) = \{\Re[E_{sr_x}] + \Im[E_{sr_x}]\} \mathbf{x}_0 + \{\Re[E_{sr_y}] + \Im[E_{sr_y}]\} \mathbf{y}_0 + \{\Re[E_{sr_z}] + \Im[E_{sr_z}]\} \mathbf{z}_0$$

Anche il campo scatterato-trasmesso può essere ottenuto nella medesima maniera. Riscrivo l'equazione del campo:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{st}(\mathbf{r}) = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} e^{im\beta_i} \sin \alpha_i e^{i\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}} \\ & \left\{ iT_H^{n+1}(\alpha_i) \left[e_{mn} \pi_n^m(\cos \alpha_i) + f_{mn} \tau_n^m(\cos \alpha_i) \boldsymbol{\alpha}_{0t} \right] + \right. \\ & \left. - T_E^{n+1}(\alpha_i) \left[e_{mn} \tau_n^m(\cos \alpha_i) + f_{mn} \pi_n^m(\cos \alpha_i) \boldsymbol{\beta}_{0t} \right] \right\} d\alpha_i d\beta_i \end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_t &= k_1 (\sin \alpha_t \cos \beta_t \mathbf{x}_0 + \sin \alpha_t \sin \beta_t \mathbf{y}_0 + \cos \alpha_t \mathbf{z}_0) \\ \boldsymbol{\alpha}_{0t} &= \cos \alpha_t \cos \beta_t \mathbf{x}_0 + \cos \alpha_t \sin \beta_t \mathbf{y}_0 - \sin \alpha_t \mathbf{z}_0 \\ \boldsymbol{\beta}_{0t} &= -\sin \beta_t \mathbf{x}_0 + \cos \beta_t \mathbf{y}_0 \\ \sin \alpha_t &= \frac{n_1}{n_2} \sin \alpha_i \\ \beta_t &= \beta_i \end{aligned}$$

Suddivido il campo nelle sue tre componenti cartesiane e successivamente in una parte a percorso reale ed un'altra a percorso immaginario, otteniamo in definitiva:

$$\begin{aligned} \Re[E_{tr_x}](\mathbf{r}) = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{im\beta_i} \sin \alpha_i e^{i\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}} \\ & \left\{ iT_H^{n+1}(\alpha_i) \cos \alpha_t \cos \beta_t \left[e_{mn} \pi_n^m(\cos \alpha_i) + f_{mn} \tau_n^m(\cos \alpha_i) \right] + \right. \\ & \left. + T_E^{n+1}(\alpha_i) \sin \beta_i \left[e_{mn} \tau_n^m(\cos \alpha_i) + f_{mn} \pi_n^m(\cos \alpha_i) \right] \right\} d\alpha_i d\beta_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Re[E_{tr_y}](\mathbf{r}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{im\beta_i} \sin \alpha_i e^{i\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}} \\
&\quad \left\{ iT_H^{n+1}(\alpha_i) \cos \alpha_t \sin \beta_t \left[e_{mn} \pi_n^m(\cos \alpha_i) + f_{mn} \tau_n^m(\cos \alpha_i) \right] + \right. \\
&\quad \left. - T_E^{n+1}(\alpha_i) \cos \beta_i \left[e_{mn} \tau_n^m(\cos \alpha_i) + f_{mn} \pi_n^m(\cos \alpha_i) \right] \right\} d\alpha_i d\beta_i \\
\Re[E_{tr_z}](\mathbf{r}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{im\beta_i} \sin \alpha_i e^{i\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}} \\
&\quad \left\{ -iT_H^{n+1}(\alpha_i) \sin \alpha_t \left[e_{mn} \pi_n^m(\cos \alpha_i) + f_{mn} \tau_n^m(\cos \alpha_i) \right] \right\} d\alpha_i d\beta_i
\end{aligned} \tag{A.0.8}$$

$$\begin{aligned}
\Im[E_{tr_x}](\mathbf{r}) &= i \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{im\beta_i} \frac{n_1}{n_2} \sqrt{1+u^2} e^{ih \left[k_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 (1+u^2)} - k_1 u \right]} e^{i\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}} \\
&\quad \left\{ iT_H^{n+1}(u) \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 (1+u^2)} \cos \beta_i \left[e_{mn} \pi_n^m(iu) + f_{mn} \tau_n^m(iu) \right] + \right. \\
&\quad \left. + T_E^{n+1}(u) \sin \beta_i \left[e_{mn} \tau_n^m(iu) + f_{mn} \pi_n^m(iu) \right] \right\} du d\beta_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Im[E_{tr_y}](\mathbf{r}) &= i \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{im\beta_i} \frac{n_1}{n_2} \sqrt{1+u^2} e^{ih \left[k_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 (1+u^2)} - k_1 u \right]} \\
&\quad \left\{ iT_H^{n+1}(u) \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 (1+u^2)} \sin \beta_i \left[e_{mn} \pi_n^m(iu) + f_{mn} \tau_n^m(iu) \right] + \right. \\
&\quad \left. - T_E^{n+1}(u) \cos \beta_i \left[e_{mn} \tau_n^m(iu) + f_{mn} \pi_n^m(iu) \right] \right\} du d\beta_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Im[E_{tr_z}](\mathbf{r}) = & -i \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{im\beta_i} \frac{n_1}{n_2} \sqrt{1+u^2} e^{ih \left[k_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 (1+u^2)} - k_1 u \right]} \\ & - iT_H^{n+1}(u) \frac{n_1}{n_2} (1+u^2) \left[e_{mn} \pi_n^m(iu) + f_{mn} \tau_n^m(iu) \right] dud\beta_i. \end{aligned} \quad (\text{A.0.9})$$

Analogamente al caso del campo scatterato-riflesso anche il campo scatterato-trasmesso potrà essere scritto come sovrapposizione dalla parte reale ed immaginaria delle diverse componenti cartesiane:

$$\mathbf{E}_{sr}(\mathbf{r}) = \{ \Re[E_{st_x}] + \Im[E_{st_x}] \} \mathbf{x}_0 + \{ \Re[E_{st_y}] + \Im[E_{st_y}] \} \mathbf{y}_0 + \{ \Re[E_{st_z}] + \Im[E_{st_z}] \} \mathbf{z}_0.$$

Bibliografia

- [1] J.A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York e Londra, 1941.
- [2] J.J. Bowman, T.B.A. Senior e P.L.E. Uslenghi, *Electromagnetic and Acoustic Scattering by Simple Shapes*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1969.
- [3] Z. Xue-Song, *Vector Wave Functions in Electromagnetic Theory*, Aracne, 1990.
- [4] C.F. Bohren e D.R. Huffman, *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*, Wiley, 1940.
- [5] A. Banõs, *Dipole Radiation in the Presence of a Conducting Half-Space*, Pergamon Press, Oxford, 1966.
- [6] M. Abramowitz e I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1972.
- [7] G.N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, II edizione, Cambridge, 1944.
- [8] G. Gerosa e P. Lampariello, *Lezioni di Campi elettromagnetici*, Ingegneria 2000, Roma, 1996.
- [9] A. Doicu, T. Wriedt e Y.A. Eremin, *Light Scattering by Systems of Particles*, Springer, New York, 2006.
- [10] T. Wriedt e A. Doicu, "Light Scattering from a Particle On or Near a Surface", *Opt. Comm.*, vol. 152, pp. 376-384, 1998.

- [11] H. Shima e T. Nakayama, *Higher Mathematics for Physics and Engineering*, Springer, New York, 2010.
- [12] T. Rother, *Electromagnetic Wave Scattering on Nonspherical Particles*, Springer, New York, 2009.
- [13] G. Videen, "Light scattering from a sphere on or near a surface", *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 8, n. 3, pp. 483-489, 1991.
- [14] E.I. Ivlev, "The Scattering of Inhomogeneous Electromagnetic Waves by a Cylinder", *J. Mod. Opt.*, vol. 39, n. 3, pp. 499-507, 1992.
- [15] E.T. Whittaker, "On the Partial Differential Equations of Mathematical Physics", *Math. Ann.*, vol. 57, pp. 333-355, 1902.
- [16] E.T. Whittaker e G.N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge U.P., 4° Ed., Cambridge, 1963.
- [17] H. Weyl, "Ausbreitung elektromagnetischer Wellen über einem ebenen Leiter", *Ann. Phys.*, vol. 60, n. 4, pp. 481, 1919.
- [18] A. Erdélyi, "Zur Theorie der Kugelwellen", *Physica (Haag)*, vol. 4, pp. 107-120, 1937.
- [19] A.J. Devaney e E. Wolf, "Multipole Expansion and Plane Wave Representation of the Electromagnetic Field", *J. Math. Phys.*, vol. 15, n. 2, pp. 234-244, 1974.
- [20] P.A. Bobbert e J. Vlieger, "Light Scattering by a Sphere on a Substrate", *Physica*, vol. 137A, pp. 209-242, 1986.
- [21] L. Tsang, J.A. Kong e K. H. Ding, *Scattering of Electromagnetic Waves 1*, Wiley, New York, 2000.
- [22] F. Frezza, *Lezione di Campi Elettromagnetici II*, IEEE Student Branch, Roma, Italia, marzo 2010.
- [23] E.I. Ivlev, "Structure and properties of inhomogeneous waves", *J. Mod. Opt.*, vol. 34, n. 12, pp. 1559-1569, 1987.

- [24] A. Ghizzetti, F. Mazzarella e A. Ossicini, *Lezioni di complementi di matematica*, Veschi, II edizione, Roma, 1981.
- [25] A.I. Markushevitz, *Theory of Functions of a Complex Variable*, vol. 1, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1965.
- [26] V.I. Smirnov, *Corso di matematica superiore*, vol. 3, parte II, Editori Riuniti, Roma, 1978.
- [27] G. Cincotti, F. Gori, F. Frezza, F. Furnò, M. Santarsiero e G. Schettini, "Plane-wave expansion of cylindrical functions", *Opt. Comm.*, vol. 95, pp. 192-198, 1993.
- [28] R. Borghi, F. Gori, F. Frezza, M. Santarsiero e G. Schettini, "Plane-wave scattering by a set of perfectly conducting circular cylinders in the presence of a plane surface", *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 13, n. 12, pp. 2441-2452, 1996.
- [29] M.J. Ablowitz e A.S. Fokas, *Complex Variables*, Cambridge University Press, II edizione, Cambridge, 2003.
- [30] S.I. Hayek, *Advanced Mathematical Methods in Science and Engineering*, Marcel Dekker, New York, 2001.
- [31] T.B. Hansen e A.D. Yaghjian, *Plane Wave Theory of Time Domain Field*, IEEE Press, New York, 1999.
- [32] G.A. Korn e T.M. Korn, *Mathematical Handbook for Scientist and Engineers*, Mc Graw-Hill, New York, 1961.
- [33] J.E. Roy, "New Results for the Effective Propagation Constants of Nonuniform Plane Waves at the Planar Interface of Two Lossy Media", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol 51, n. 6, pp. 1206-1215, 2003.
- [34] B.L. Van der Waerden, "On the Method of Saddle Point", *Appl. Sci. Res.*, vol. B2, pp. 33-45, 1952.
- [35] S. Maci e A. Neto, "Green's Function of an Infinite Slot Printed Between Two Homogeneous Dielectrics - Part II: Uniform Asymptotic Solution", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol 52, n. 3, pp. 666-676, 2004.

- [36] R. Borghi, F. Frezza, M. Santarsiero, C. Santini e G. Schettini, "Numerical Study of the Reflection of Cylindrical Waves of Arbitrary order by a Generic Planar Interface", *J. of Electromag. Wave and Appl.*, vol. 13, pp. 27-50, 1999.
- [37] R. Borghi, F. Frezza, M. Santarsiero, C. Santini e G. Schettini, "A Quadrature Algorithm for the Evaluation of a 2D Radiation Integral with a Highly Oscillating Kernel", *J. of Electromag. Wave and Appl.*, vol. 14, pp. 1353-1370, 2000.
- [38] F. Ciambra, F. Frezza, L. Pajewski e G. Schettini, "A Spectral-Domain Solution for the Scattering Problem of a Circular Cylinder Buried in a Dielectric Half-Space", *Progr. Electromag. Research*, vol. 38, pp. 223-252, 2002.
- [39] M. Di Vico, F. Frezza, L. Pajewski e G. Schettini, "Scattering by a Finite Set of Perfectly Conducting Cylinders Buried in a Dielectric Half-Space: A Spectral-Domain Solution", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 53, pp. 719-727, 2005.
- [40] A. Doicu, R. Schuh e T. Wriedt, "Scattering by particles on or near a plane surface", *Springer Praxis Books*, pp. 109-130, 2008.
- [41] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling e B.P. Flannery, *Numerical Recipes in C, The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, II edizione, Cambridge, New York, Port Chester, Melbourne, Sydney, 2002.
- [42] W.J. Wiscombe, "Improved Mie scattering algorithms", *Appl. Opt.*, vol. 19, pp.1505-1509, 1980.
- [43] B. Esen, I. Akkaya e A.Yapar, "Scattering of a Plane Wave from a Perfectly Conducting Sphere Buried in a Conducting Dielectric", *Electromagnetics*, vol. 24, pp. 607-621, maggio 2004.
- [44] S. Vitebskiy, K. Sturgess e L. Carin, "Short-Pulse Plane-Wave Scattering from Buried PEC bodies", *IEEE transactions on antennas and propagation*, vol. 44, n. 2, febbraio 1996.
- [45] G. Videen, "Light scattering from a sphere behind a surface", *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 10, n. 1, pp. 110-117, 1991.

- [46] C. Mencuccini e V. Silvestrini, *Fisica II elettromagnetismo ottica*, Liguori Editore, Napoli, Italia, 1988.
- [47] J.A. Edminister, *Elettromagnetismo*, The McGraw-Hill Companies (collana Schaum), Milano, Italia, 1981.
- [48] A. Sihvola, *Electromagnetic mixing formulas and applications*, The institution of Electrical Engineers, Londra, Regno Unito, 1999.
- [49] A. Sihvola e I.V. Lindell, "Polarizability and Effective Permittivity of Layered and Continuously Inhomogeneous Dielectric Spheres", *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 3, n. 3, pp. 37-60, 1989.
- [50] A.D. Yaghjian, "Electric dyadic Green's function in the source region", *Proceedings of the IEEE*, vol. 68, n. 2, 1980.
- [51] A. Sihvola e I.V. Lindell, "Transmission line analogy for calculating the effective permittivity of mixtures with spherical multilayer scatterers", *J. Electromag. Waves Appl.*, vol. 2, n. 8, pp. 741-756, 1988.
- [52] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics Third Edition*, Hamilton Printing Company, Stati Uniti d'America, 1998.
- [53] B.N. Cuffin, "Eccentric Spheres Models of the Head", *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 38, n. 9, pp. 871-878, settembre 1991.
- [54] P.M. Morse e H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics, Part II*, McGraw-Hill, New York, Toronto e Londra, 1953.
- [55] Y. Rudy e R. Plonsey, "The Eccentric Spheres Model as the Basis for a Study of the Role of Geometry and Inhomogeneities in Electrocardiography", *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 26, n. 7, pp. 392-399, luglio 1979.
- [56] R. Nozawa, "Bipolar Expansion of Screened Coulomb Potentials, Helmholtz' Solid Harmonics, and their Addition Theorems", *Journal of Mathematical Physics*, vol. 7, n. 10, pp. 1841-1860, ottobre 1966.

- [57] H. Wallén, H. Kettunen e A. Sihvola, “Singularities or emergent losses in radially uniaxial spheres”, *Journal of Mathematical Physics, Proceedings of the 2013 International Symposium on Electromagnetic Theory*, 2013.
- [58] C. Guclu, S. Campione e F. Capolino, “Hyperbolic metamaterial as super absorber for scattered fields generated at its surface”, *Phys. Rev. B*, vol. 86, 205130, 7 pp., 2012.
- [59] L. Gao, T.H. Fung, K.W. Yu e C.W. Qiu, “Electromagnetic transparency by coated spheres with radial anisotropy”, *Phys. Rev. E*, vol. 78, n. 4, 11 pp., 2008.
- [60] C.W. Qiu, L. Hu, X. Xu e Y. Feng, “Spherical cloaking with homogeneous isotropic multilayered structures”, *Phys. Rev. E*, vol. 79, n. 4, 4 pp., 2009.
- [61] H. Kettunen, H. Wallén e A. Sihvola, “Cloaking and magnifying using radial anisotropy”, *J. Appl. Phys.*, vol. 114, 044110, 10 pp., 2013.
- [62] J. Spanier e K.B. Oldham, “The Integer-Value $\text{Int}(x)$ and Fractional-Value $\text{frac}(x)$ Functions”, Cap. 9 in *An Atlas of Functions*, Washington DC, Hemisphere, pp. 71-78, 1987.