



**SAPIENZA**  
UNIVERSITÀ DI ROMA

**Codifica della Linea Mentale dei Numeri  
in età evolutiva e nell'adulto**

**Dottoranda:** Francesca Rotondaro

**Relatore:** Fabrizio Doricchi

Dottorato in Neuroscienze Cognitive XXVI ciclo

# Indice

<i>Introduzione</i>	5
<b>I Capitolo: La Mental Number Line: da Galton ai nostri giorni</b>	
1.1 Dati introspettivi iniziali e la sinestesia numero-colore	9
1.2 Dati psicofisici e neuropsicologici	11
1.2.1 L'effetto SNARC	11
1.2.2 Interazione tra attenzione spaziale e numeri negli adulti	15
1.2.2.1 Effetti numerici nel test di orientamento dell'attenzione spaziale di Posner	15
1.2.2.2 Compiti di bisezione con Flankers	18
1.3 Studi su pazienti con lesioni cerebrali circoscritte	20
1.3.1 Evidenze a favore di una dissociazione tra cognizione spaziale e numerica	23
1.4 La base neurale dell'elaborazione dell'informazione numerica	26
1.4.1 Ruolo dei moduli Parieto-Frontali nelle scimmie	27
1.5 La rappresentazione delle quantità numeriche nell'uomo	29
1.5.1 Modelli neurali della rappresentazione delle magnitudo numeriche	32
1.5.2 Codifica numerica nell'IPS	34
1.6 Evidenze comportamentali e neurali della compressione non-lineare	35
<b>II Capitolo: La Linea Mentale dei Numeri nel bambino e nell'adulto</b>	
2.1 Introduzione	40
2.2 Studi con il compito di Number to Position	42

<b>2.3</b>	<b>Le rappresentazioni numeriche nei bambini</b>	<b>48</b>
2.3.1	Rappresentazioni numeriche e non-numeriche	48
2.3.2	Influenza dell'apprendimento dell'aritmetica nelle rappresentazioni numeriche	50
2.3.3	Elaborazione olistica contro scomposizione di numeri a due cifre	54
2.3.4	Una spiegazione alternativa del passaggio da una rappresentazione logaritmica ad una lineare nei number line task	54

**III Capitolo: La linea mentale dei numeri non ha una organizzazione sinistra/destra intrinseca: evidenze dall'assenza di correlazione tra bisezione di linee visive e bisezione di intervalli numerici in soggetti adulti**

<b>3.1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>57</b>
<b>3.2</b>	<b>Esperimento</b>	<b>62</b>
3.2.1	Campione	62
3.2.2	Materiali e Metodo	63
3.2.3	Risultati	63
<b>3.3</b>	<b>Discussione dello studio</b>	<b>72</b>

**IV Capitolo: Lo sviluppo della stima numerica: evidenze sulle rappresentazioni multiple di quantità numeriche**

<b>4.1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>76</b>
<b>4.2</b>	<b>Studio sperimentale</b>	<b>78</b>
4.2.1	Number to Position nei bambini	78
4.2.2	Campione	79
4.2.3	Metodo	79
<b>4.3</b>	<b>Esperimento 1: Number to Position Task 0-100</b>	<b>81</b>
4.3.1	Materiale	81
4.3.2	Risultati	81

<b>4.4</b>	<b>Esperimento 2: Number to Position Task 0-10</b>	<b>90</b>
<b>4.4.1</b>	<b>Materiale</b>	<b>90</b>
<b>4.4.2</b>	<b>Risultati</b>	<b>91</b>
<b>4.5</b>	<b>Esperimento 3: Number to Position Task Discrete Quantities</b>	<b>93</b>
<b>4.5.1</b>	<b>Materiale</b>	<b>93</b>
<b>4.5.2</b>	<b>Risultati</b>	<b>93</b>
<b>4.6</b>	<b>Esperimento 4: Number to Position Task Continuous Quantities</b>	<b>96</b>
<b>4.6.1</b>	<b>Materiale</b>	<b>96</b>
<b>4.6.2</b>	<b>Risultati</b>	<b>96</b>
<b>4.7</b>	<b>Discussione dello studio</b>	<b>98</b>
<b>V Capitolo: Effetto della posizione dell'intervallo numerico all'interno della decina sul bias di bisezione mentale numerica (Number Interval Position Effect) NIPE. Uno studio in età evolutiva</b>		
<b>5.1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>102</b>
<b>5.2</b>	<b>Studio sperimentale</b>	<b>108</b>
<b>5.2.1</b>	<b>NIPE nei bambini</b>	<b>108</b>
<b>5.3</b>	<b>Esperimento</b>	<b>109</b>
<b>5.3.1</b>	<b>Campione</b>	<b>109</b>
<b>5.3.2</b>	<b>Materiale</b>	<b>109</b>
<b>5.3.3</b>	<b>Procedura</b>	<b>111</b>
<b>5.3.4</b>	<b>Risultati</b>	<b>111</b>
<b>5.4</b>	<b>Discussione dello studio</b>	<b>125</b>
	<i>Conclusioni generali</i>	<b>127</b>
	<i>Bibliografia</i>	<b>130</b>

## Introduzione

La presenza di attività cognitive relative alla analisi e l'utilizzo di quantità numeriche nella vita di ogni giorno è pervasiva e ben radicata nella storia culturale della specie umana. La necessità dell'uomo di utilizzare il computo numerico di stimoli od eventi è testimoniata anche da reperti archeologici: sono stati ad esempio ritrovati ossa di animale sulle quali erano stati incisi dei segni per tenere il conto delle fasi lunari (Ifrah et al. 1994).

Le situazioni durante le quali facciamo ricorso alla stima della numerosità di elementi ambientali sono diverse: a volte svolgiamo queste attività in modo volontario, utilizzando le tecniche di calcolo apprese culturalmente. Tuttavia, è questo da un punto dello studio delle basi funzionali della cognizione matematica è di grande interesse, gli studi più recenti hanno suggerito che il nostro sistema nervoso può svolgere una codifica molto più automatica della numerosità di stimoli ambientali. Tale codifica, sebbene permetta solamente delle stime più imprecise di quelle fornite dal calcolo matematica formale, ha grande valore adattivo in quanto, ad esempio, permette di stabilire rapidamente se la numerosità di un gruppo di stimoli (come quella di un gruppo di elementi commestibili per una specie animale) sia più o meno grande della numerosità di un gruppo di elementi alternativo.

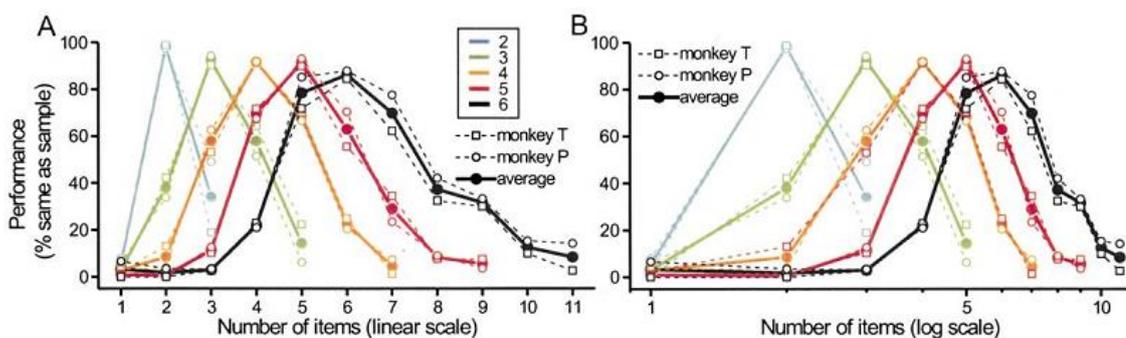
A seguito di una serie di osservazioni pionieristiche di Sir Francis Galton (Nature, 1880a; 1880b), varie evidenze sperimentali hanno più recentemente suggerito un forte legame tra rappresentazioni numeriche e la rappresentazione dello spazio. L'esempio più famoso di tale interazione sarebbe quello secondo il quale per eseguire semplici operazioni matematiche di uso quotidiano, come ad esempio paragonare od ordinare delle quantità numeriche, le persone ricorrono automaticamente all'uso di una linea mentale numerica (LMN) nella quale la serie crescente dei numeri naturali verrebbe ordinata secondo le abitudini di lettura culturalmente definite: nella nostra cultura occidentale che adotta uno stile di lettura "da sinistra a destra" le quantità numeriche più piccole verrebbero quindi poste alla sinistra di quelle più grandi (Seron et al., 1992; Dehaene et al., 1993).

Partendo da una rassegna di dati introspettivi, psicologici, neuropsicologici e neurofisiologici, in questo lavoro di tesi sono stati investigati alcuni aspetti, spaziali e non spaziali, della rappresentazione delle magnitudo numeriche nel bambino e nell'adulto. In

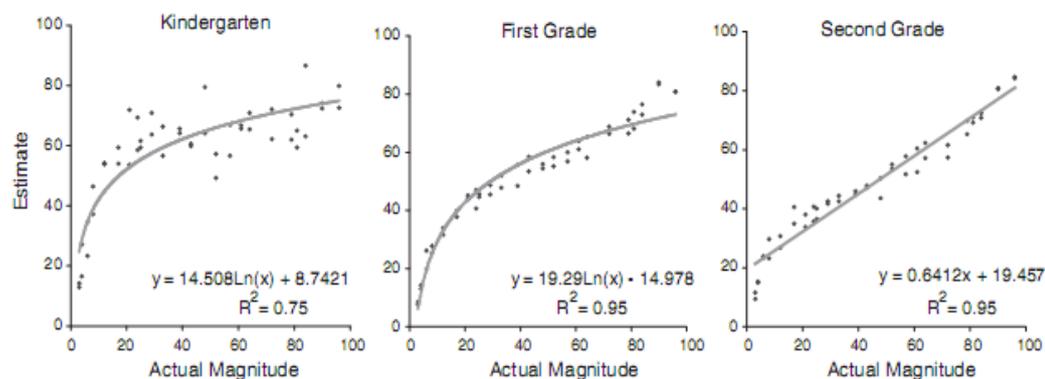
particolare, negli studi sui bambini abbiamo cercato di capire come la rappresentazione delle magnitudo numeriche si evolva tra l'età prescolare e le ultime fasi del ciclo educativo di scuola elementare.

Nel primo capitolo sperimentale, ci siamo proposti di verificare se, come proposto da alcuni autori (Longo e Lourenco, 2007), la LMN abbia veramente un orientamento intrinseco sinistra/destra oppure se tale tipo di orientamento venga elicitato da caratteristiche specifiche del compito da svolgere. Partendo dalle osservazioni riportate in uno studio di Longo e Lourenco (2007), nel quale era stata trovata una correlazione significativa tra il bias d'errore nella bisezione di linee visive ed il bias d'errore nella bisezione mentale di intervalli numerici (che però erano stati presentati con una chiara connotazione visuo-spaziale sinistra-destra), abbiamo indagato se la stessa correlazione è presente quando la bisezione mentale venga sulla base della presentazione verbale degli stessi intervalli numerici, presentazione che non ha quindi una esplicita connotazione visuo-spaziale sinistra-destra.

Nel secondo capitolo sperimentale abbiamo valutato l'affidabilità di un compito di posizionamento visuo-spaziale di magnitudo numeriche, nel riflettere le modalità funzionali di rappresentazione "cerebrale" della serie dei numeri naturali. Recenti dati neurofisiologici, hanno infatti mostrato che i neuroni che codificano grandi numerosità sono più imprecisi di quelli che codificano piccole numerosità: i primi infatti mostrano risposte anche per le numerosità adiacenti mentre i secondi sono più selettivamente sintonizzati sulla loro numerosità preferita. In altre parole, le curve gaussiane che descrivono tali modalità di scarica sono più larghe per i neuroni con preferenza per le numerosità grandi e più strette per quelle con preferenza per piccole numerosità (vedi figura qui sotto pannello A). Quando tali gaussiane vengono rappresentate su una scala logaritmica, quello che si osserva, di conseguenza, è una normalizzazione ed equivalenza tra tutte le gaussiane descritte (figura sotto pannello B) (Nieder e Miller, 2003).



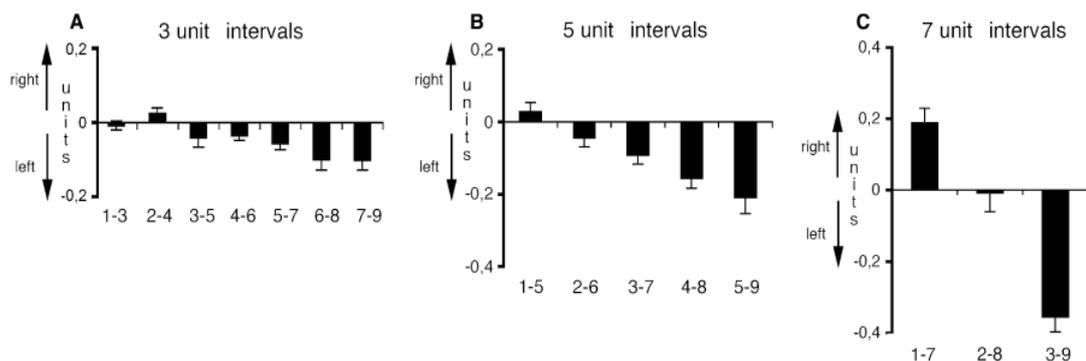
Tali dati neurofisiologici hanno confermato, e precisato, alcuni modelli cognitivi precedenti (Gallistel, 2000) che avevano ipotizzato l'esistenza di tale tipo di rappresentazione per spiegare gli effetti di "size" e "distance" osservati in compiti di paragone approssimativo di magnitudo numeriche. In una serie di studi più recedenti è stato utilizzato un compito consistente nell'indicare, su di una linea visiva orizzontale la cui estensione indicava un intervallo numerico (ad es. 0-100), la posizione di un numero compreso nell'intervallo stesso (compito di Number-to-Position; Siegler & Opfer, 2003; Siegler & Booth, 2004; Booth & Siegler, 2006/2008; Berteletti et al., 2010/2012; Barth & Palladino, 2011; Ashcraft & Moore, 2011). Utilizzando questo studio, diversi autori (Siegler & Opfer, 2003; Siegler & Booth, 2004; Booth & Siegler, 2006/2008; Berteletti et al., 2010/2012; Barth & Palladino, 2011; Ashcraft & Moore, 2011) hanno osservato che nei bambini in età prescolare il posizionamento dei numeri segue un andamento logaritmico: i numeri più piccoli vengono collocati più a destra della loro posizione ideale, mentre quelli più grandi verrebbero progressivamente compattati verso l'estremo destro della linea (vedi Figura qui sotto, da Siegler e Booth, 2004).



E' stato proposto che tale andamento nel posizionamento spaziale dei numeri rifletta l'andamento logaritmico centrale delle rappresentazioni (i.e. gaussiane) numeriche documentato da Nieder e Miller (2003). Tuttavia, sulla base di una attenta analisi degli studi sino ad ora eseguiti, ci siamo accorti che in tutti i casi la frequenza di campionamento sperimentale dei numeri più piccoli era costantemente molto più alta di quella riguardante i numeri grandi. Inoltre la compressione logaritmica veniva osservata per range di grandi numeri (0-100 o 0-1000) ma era molto meno evidente, se non del tutto assente, in quei pochi studi che hanno testato range più piccoli (0-10). A partire da queste premesse, abbiamo eseguito uno studio nel quale abbiamo sistematicamente manipolato il bilanciamento delle frequenze di campionamento tra numeri piccoli e grandi ed utilizzato, sia range comprendenti numeri piccoli (0-10), che grandi (0-100). Come si vedrà, i risultati

di questo studio hanno portato ad un forte ridimensionamento dell'affidabilità del compito di NtoP nel rivelare la rappresentazione centrale logaritmica delle magnitudo numeriche, indicata dai lavori di neurofisiologia sulle scimmie.

Nel terzo studio abbiamo cercato di verificare se un effetto comportamentale, recentemente descritto nella performance degli adulti (Number Interval Position Effect, NIPE, Doricchi et al. 2009), sia osservabile anche in età prescolare e scolare. Il NIPE consiste nella variazione sistematica del bias d'errore, in un compito di bisezione mentale di intervalli numerici. Tale effetto dimostra che, a parità di lunghezze dell'intervallo numerico, il bias d'errore di bisezione cambia in funzione della posizione dell'intervallo nella decina. Ad esempio, nel caso di intervalli da 7 unità è positivo per gli intervalli all'inizio della decina (1-7) ed è negativo per gli intervalli alla fine della decina (3-9). Gli intervalli di ampiezze più piccole presentano un NIPE con andamento leggermente diverso (vedi Figura qui sotto).



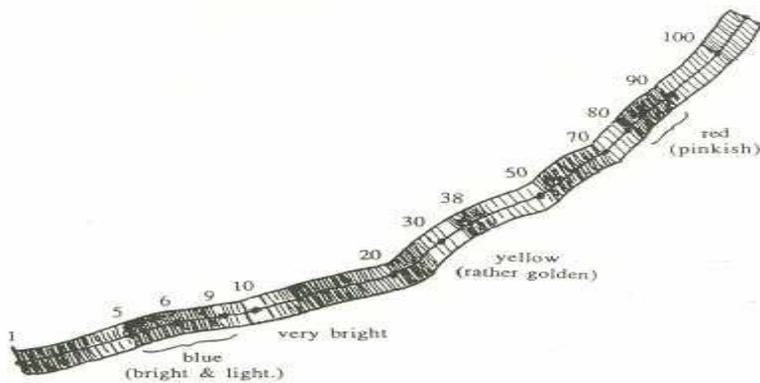
Nel terzo studio abbiamo voluto indagare se il NIPE sia già presente in età prescolare e si mantenga sostanzialmente inalterato lungo il ciclo educativo di scuola elementare fino all'età adulta. Come vedremo, i risultati di quest'ultimo studio ci hanno portato ad ipotizzare che il NIPE possa essere un riflesso diretto della rappresentazione "logaritmica" centrale delle magnitudo numeriche, rappresentazione che precede l'educazione al calcolo formale e che la specie umana condivide con altre specie animali. Verrà infine abbozzata una proposta di ricerca di modellistica computazionale tesa a verificare questa ipotesi che, qualora confermata, indicherebbe che il NIPE può essere utilizzato come indicatore delle proprietà funzionali della rappresentazione delle magnitudo numeriche e della loro codifica secondo una scala logaritmica.

# I capitolo

## ***La Mental Number Line: da Galton ai giorni nostri***

### ***1.1 Dati introspettivi iniziali e la sinestesia numero-colore***

Nel 1880 Galton pubblicò due articoli (Galton 1880a, 1880b) nei quali, sulla base di un'intervista eseguita su un congruo numero di soggetti adulti, venivano descritte le vivide rappresentazioni introspettive visuo-spaziali che in tali persone venivano automaticamente indotte dalla percezione di stimoli visivi o uditivi indicanti quantità numeriche. Ad esempio, alcuni soggetti sostenevano di visualizzare mentalmente i numeri in un colore specifico. Altri invece sostenevano di visualizzare mentalmente ciascun numero collocato in una struttura mentale spaziale stabile, che Galton definì “forma del numero” ma che attualmente viene più comunemente definita Linea Mentale Numerica (LMN) (Figura 1.1). Galton (1880b) riferiva anche che in alcuni soggetti tali forme mentali della serie dei numeri si muovevano solidalmente con i movimenti degli occhi o della testa, mentre in altri soggetti tali forme mantenevano fissa la loro posizione nello spazio mentale indipendentemente dal movimento degli occhi o della testa.



***Figura 1.1. La linea numerica mentale (Galton 1880).***

Sia negli studi di Galton che di Bertillon (1880,1881) veniva riportato che la struttura spaziale della linea mentale numerica era variabile: i numeri potevano essere mentalmente collocati su linee rette continue orientate orizzontalmente o verticalmente, oppure su linee nelle quali segmenti rettilinei si alternavano a segmenti curvi. Inoltre, in alcuni settori, per lo più corrispondenti ai confini tra decine consecutive (vedi Doricchi et al. 2009), le linee potevano mostrare dei cambiamenti di colore o di luminosità. Galton (1880), però, aveva anche sottolineato delle caratteristiche funzionali comuni alle diverse “forme del numero”. La prima era una chiara costanza rappresentativa all’interno di ciascun soggetto: per il soggetto la forma intera del numero aveva sempre la stessa struttura, ciascun numero occupava sempre la stessa posizione e le grandezze numeriche avevano sempre le stesse caratteristiche di forma. Un’altra caratteristica era l’insorgenza della forma del numero durante l’infanzia, senza nessun tipo di relazione con i metodi di calcolo matematici insegnati a scuola. La terza caratteristica era l’attivazione del tutto automatica delle forme del numero: i soggetti indicavano che le forme dei numeri erano attivate automaticamente da ogni singolo numero, sia che venisse udito sia che venisse visto o semplicemente immaginato.

Seron e colleghi (1992) e Sagiv e colleghi (2006) hanno più recentemente confermato le osservazioni pionieristiche di Galton (1880a, 1880b) e Bertillon (1880, 1881). Sulla base di campioni numerosi, tali autori riportano che i partecipanti allo studio esperivano introspektivamente diverse forme non solo per la linea mentale dei numeri ma anche per la serie dei giorni della settimana, dei mesi dell’anno, per le lettere dell’alfabeto e per le ore.

Un’altra delle osservazioni importanti di Galton è il fatto che spesso lungo la linea mentale dei numeri apparivano dei cambiamenti di colore o di luminosità come riportato nella figura 1.1 estratta dall’articolo originale di Galton (1880a). In questa figura si può notare, ad esempio, che i numeri dal 5 al 9 sono stati associati al colore blu, e che i numeri dal 80 al 90 sono stati associati al rosso. Questa associazione non è inadeguata, se si pensa che la gamma di colori visibili all’occhio umano è racchiusa in uno spettro cromatico che può essere rappresentato più semplicemente come un continuum, come accade per la linea numerica mentale. Molti autori hanno recentemente investigato in modo sistematico l’associazione mentale automatica tra colore e numeri, fenomeno che viene definito “sinestesia per i numeri”. La sinestesia per i numeri è la attitudine ad associare spontaneamente dei colori specifici ai numeri visualizzati mentalmente (Cytowic, 2002; Sagiv, Simner, Collins, Butterworth, & Ward, 2006). In questo ambito una importante linea di indagine riguarda la bi-direzionalità della relazione sinestesica tra numero e colore

(Cohen Kadosh e Henik 2007). Le ricerche di tale linea di indagine vogliono chiarire se la relazione sinestesica numero-colore sia sostanzialmente bi-direzionale o meno: cioè se la percezione di un numero possa evocare mentalmente un colore specifico con la stessa facilità con la quale la percezione di un colore possa evocare la rappresentazione mentale di uno specifico numero.

## ***1.2 Dati psicofisici e neuropsicologici***

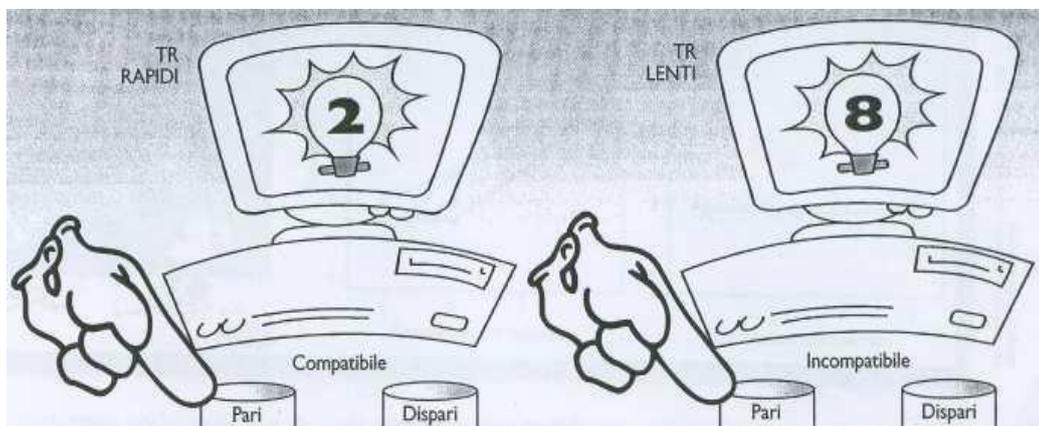
Le evidenze comportamentali più recenti che sembrano suggerire un orientamento direzionale intrinseco nella rappresentazione mentale dei numeri naturali, orientamento che sarebbe conforme alla direzione dello stile di lettura (da sinistra a destra nelle culture occidentali), provengono da tre linee di ricerca principali: a) gli studi sugli effetti di compatibilità spaziale tra elaborazione dei numeri e risposte motorie; b) gli studi su soggetti normali riguardanti l'eventuale deviazione dell'attenzione visuo-spaziale indotta dalla presentazione di stimoli numerici; c) l'associazione o dissociazione tra deficit delle rappresentazioni dello spazio e della rappresentazione delle magnitudo numeriche in pazienti con lesioni cerebrali circoscritte.

### ***1.2.1 L'effetto SNARC***

Una delle prove sperimentali più famose a favore dell'esistenza di una linea numerica mentale spazialmente organizzata da sinistra a destra è data dall'effetto SNARC (Spatial-Numerical Association of Response Codec). Dehaene, Dupox & Mehler (1990) chiesero ad un gruppo di soggetti di classificare dei numeri, presentati su uno schermo, come "più grandi" o "più piccoli" di 65 premendo un tasto di risposta a sinistra o a destra. I risultati evidenziarono un effetto distanza: i tempi di classificazione degli stimoli erano tanto più rapidi quanto più la magnitudo dello stimolo si discostava da quella del target di riferimento. In altre parole, la risposta era più veloce per classificare un numero target molto lontano da 65, come ad esempio il 19, rispetto a un numero molto vicino come il 55. Nel secondo esperimento di questo studio Dehaene e colleghi divisero i partecipanti in due gruppi: i partecipanti del primo gruppo dovevano premere un tasto posto alla loro sinistra se il numero era più piccolo del target di riferimento ed un tasto posto sulla destra se il numero era più grande. Quelli del secondo gruppo ricevevano indicazioni opposte. Tale

procedura consentì agli autori di notare che i partecipanti del primo gruppo, cioè i soggetti ai quali era stato assegnato il tasto “sinistro” per i numeri piccoli ed il “destro” per i numeri grandi, avevano tempi di risposta più rapidi rispetto al secondo gruppo. Alla luce di questi risultati e di quelli ottenuti in uno studio pilota, gli autori ipotizzano che tale vantaggio possa essere imputabile a: 1) lo stile culturale di lettura sinistra/destra; 2) al livello di scolarizzazione; 3) ad una associazione innata tra grandezze numeriche piccole/grandi e codici spaziali sinistra/destra.

Tre anni dopo, nel 1993, Dehaene, Bossini e Giraux, in una serie di 9 esperimenti investigarono in modo più approfondito le evidenze sperimentali riscontrate nel secondo esperimento dello studio del 1990. I risultati salienti di questo studio vengono ottenuti tramite un compito consistente nel decidere se i numeri presentati appartenessero alla categoria pari o dispari (Parity Judgement). Anche in questo caso i partecipanti avevano due tasti a disposizione, uno alla loro sinistra ed uno alla loro destra. In ogni trial un numero compreso tra 0 e 9 oppure tra 10-99, era presentato in fissazione centrale. Utilizzando un disegno within-subjects, ogni partecipante, in blocchi diversi, svolgeva il compito secondo due istruzioni: spingi il tasto sinistro per i numeri dispari – il destro per i numeri pari oppure viceversa. In questo modo la velocità nella risposta poteva essere valutata in base alla grandezza numerica (Figura 1.2).



**Figura 1.2.** Rappresentazione dell'effetto SNARC in un compito di parità: in questo compito il tasto sinistro deve essere premuto quando un numero è pari. Il numero 2 associato in modo congruente con lo spazio sinistro viene giudicato più velocemente rispetto al numero 8 associato con lo spazio destro (Fonte: Umiltà & Zorzi, 2003).

Le analisi statistiche dei tempi di risposta rivelavano che, indipendentemente dalla parità o disparità, i tempi di reazione erano minori per i numeri piccoli (es. 1, 2, 3, 4)

quando veniva utilizzato il tasto di sinistra mentre i tempi di reazione erano minori per i numeri grandi (es. 6, 7, 8, 9) quando la risposta era fornita con il tasto di destra. Dehaene e colleghi hanno definito tale effetto di compatibilità-associazione spaziale tra lato del tasto di risposta e grandezza dei numeri SNARC (Spatial-Numerical Association of Response Codes). Gli autori spiegano tale effetto sostenendo che la comparsa del numero al centro dello schermo sia in grado di attivare in maniera automatica la rappresentazione spaziale del numero sulla linea numerica mentale, generando così una condizione di congruenza od incongruenza tra posizione della risposta motoria e posizione del numero sulla linea mentale numerica. Questo risultato sembra quindi confermare a livello sperimentale le iniziali osservazioni introspettive di Galton (1880).

Una peculiarità della linea numerica mentale è che essa è dinamica per natura: la sua estensione può infatti dipendere dal range di numeri che un soggetto deve utilizzare per svolgere il compito sperimentale assegnato. Prove a favore di tale proprietà della linea mentale numerica sono state fornite per la prima volta da Dehaene e colleghi sempre nello stesso studio del 1993 sempre nello stesso studio del 1993 (vedi anche Fias et al. 1996). In uno degli esperimenti, in un blocco di prove era chiesto di valutare la parità dei numeri compresi nell'intervallo da 0 a 5, mentre in un altro blocco veniva giudicata la parità dei numeri da 4 a 9. I risultati dimostrano che, manipolando l'intervallo numerico, cambia l'associazione tra grandezza numerica e mano di risposta. Più precisamente se erano presentati i numeri da 0 a 5, i numeri 4 e 5 erano associati allo spazio destro, essendo, all'interno dell'intervallo, i numeri più grandi. Al contrario, se gli stessi numeri erano presentati nell'intervallo 4-9, questi erano associati con lo spazio sinistro poiché in questo intervallo rappresentavano i numeri più piccoli. Questo dato mostra come l'associazione spaziale di un determinato numero, al codice di risposta, sia determinata dalla sua grandezza relativa alla posizione ricoperta all'interno dell'intervallo considerato. Sembrerebbe che il soggetto per eseguire il compito attivi una porzione ristretta della linea numerica mentale, in altre parole quella corrispondente ai numeri presenti in un dato intervallo. L'attivazione di questa specifica porzione della rappresentazione numerica, determinerebbe a sua volta le connotazioni spaziali delle associazioni tra grandezze numeriche e codici di risposta (Fias & Fisher, 2005).

Una domanda rilevante è se le associazioni spaziali siano presenti anche per i numeri a doppia cifra. A tal fine, nello studio precedentemente menzionato, Dehaene e colleghi (1993) hanno utilizzato i numeri da 0 a 19. Gli autori trovavano che l'effetto SNARC non si estendeva chiaramente verso i numeri a doppia cifra. Nonostante ciò, i dati dimostravano

che in un compito di confronto di grandezze, i numeri “inferiori” rispetto al target di riferimento determinavano un vantaggio nelle risposte con la mano sinistra e, viceversa, i numeri maggiori mostravano un vantaggio nelle risposte effettuate con la mano destra (Dehaene et al., 1990).

In un compito di decisione di giudizio di grandezze, dove bisognava dire quale fosse il numero più piccolo (o il più grande) tra due numeri presentati simultaneamente, Brysbaert (1995) trovava un effetto SNARC per numeri a doppia cifra quando il numero più piccolo si trovava a sinistra del numero più grande rispetto alla situazione opposta.

L'effetto SNARC non si osserva solamente nel compito di giudizio di parità. Può essere misurato sia quando l'informazione sulla grandezza numerica è rilevante sia quando non lo è poiché l'effetto è automatico. Questo è presente quando si somministra ai soggetti un compito di confronto di grandezze numeriche (Dehaene, Dupoux & Mehler, 1990), in un compito di monitoraggio dei fonemi (Fias, Brysbaert, Geypens e d'Ydewalle, 1996) ed anche quando i numeri sono utilizzati in background o sono totalmente irrilevanti per il compito (Fias, Lauwereyns e Lammertyn, 2001).

Un altro aspetto importante è capire quale sia lo stadio di elaborazione in cui avvengono le interazioni tra spazio e numeri. E' importante capire se avviene durante lo stadio di comprensione dello stimolo, della selezione della risposta o dell'esecuzione della risposta. Le evidenze sperimentali raccolte finora dimostrano che il conflitto tra informazione sulla grandezza numerica e mano di risposta sia risolto al livello della selezione della risposta. Evidenze sperimentali ottenute mediante l'analisi dei potenziali evento-relati (ERP) hanno evidenziato come le componenti elettrofisiologiche probabilmente associate all'effetto SNARC si caratterizzino per latenze tipiche degli stadi intermedi di elaborazione dell'informazione numerica. Infatti, l'effetto SNARC correlerebbe in particolare con gli ERPs associati alla selezione della risposta.

E' da notare inoltre che Caessens, Hommel, Reynvoet e Van der Goten (2004) hanno evidenziato una reciproca influenza tra la preparazione di una risposta manuale lateralizzata e la contemporanea selezione di una risposta verbale-numerica. Più precisamente Caessens e collaboratori (2004) hanno invitato i soggetti a eseguire due compiti di scelta veloce in stretta successione temporale. Nel primo compito (T1) i soggetti rispondevano alle lettere X o O sia con la mano sinistra che destra. Subito dopo la comparsa della lettera compariva un rettangolo colorato che serviva come stimolo per il secondo compito (T2). Nel secondo i soggetti erano addestrati a dire “uno” o “due” rispetto al colore del rettangolo. I risultati evidenziavano che le pressioni manuali del tasto nel

compito T1 erano più veloci quando seguite dalle risposte numeriche SNARC compatibili (“uno” successivo alla risposta a sinistra e “due” per la risposta a destra). Questo risultato indicava che il codice spaziale associato con la risposta numerica in T2 interferiva con la selezione della risposta in T1, suggerendo un’origine per l’effetto SNARC nello stadio di selezione della risposta.

In un lavoro del 2009, Van Dijck e colleghi hanno esaminato la natura delle associazioni numerico-spaziali alla base dell’effetto SNARC imponendo ai soggetti partecipanti un carico di memoria di lavoro verbale o spaziale, durante un compito di giudizio di parità e uno di confronto di grandezza. I risultati hanno evidenziato una doppia dissociazione tra il tipo di carico di memoria di lavoro e il tipo di compito. . I dati evidenziavano come l’effetto SNARC scomparisse nella condizione in cui veniva richiesto ai soggetti di ritenere in memoria di lavoro materiale verbale ma solo nel compito di giudizio di parità. Viceversa lo SNARC per compito di confronto di grandezze veniva abolito nella condizione di ritenzione in memoria di materiale spaziale. Questi risultati forniscono la prima evidenza empirica contraria alla concezione che tutte le caratteristiche del comportamento di associazione numero-spazio abbiano la loro origine in un codice spaziale comune. Essi, invece, hanno mostrato come i numeri siano associati a diversi codici spaziali che, a seconda del compito, hanno una natura visuo-spaziale o verbale.

## ***1.2.2 Interazione tra attenzione spaziale e numeri nei soggetti normali adulti.***

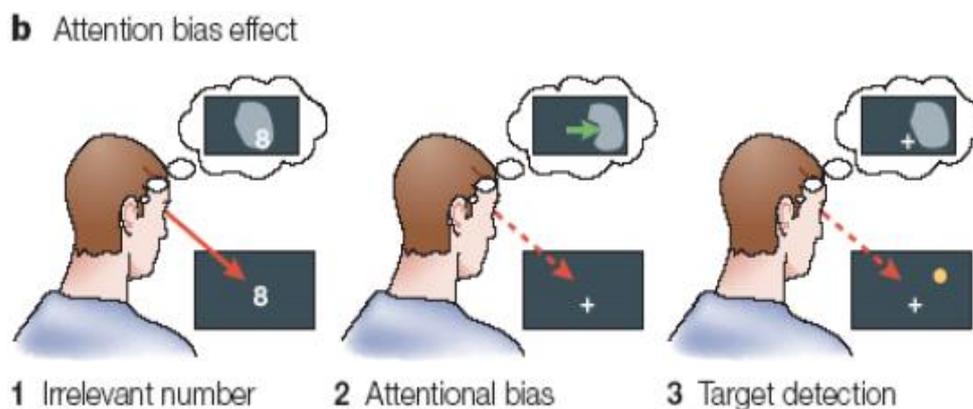
### ***1.2.2.1 Effetti numerici nel test di orientamento della attenzione spaziale di Posner***

Come è stato già riportato in precedenza, molti protocolli sperimentali hanno mostrato una stretta connessione tra i numeri e lo spazio, dove i numeri piccoli sono rappresentati nella parte sinistra dello spazio e i grandi nella parte destra. E’ stato osservato che la semplice presentazione di un numero sembra automaticamente spostare l’attenzione verso il campo visivo sinistro o destro in funzione della magnitudo numerica.

Fisher e coll. (2003) hanno condotto uno studio dove presentavano ai soggetti singoli numeri (1, 2, 8 o 9) in corrispondenza del punto di fissazione, seguiti da un target nella

parte destra o sinistra dello schermo e chiedendo poi di rispondere il più velocemente possibile alla comparsa dello stimolo target (compito di detezione) (Figura 1.3).

Hanno osservato che la presentazione del numero influenzava lo spostamento attentivo e quindi i tempi di detezione. Precisamente, la presentazione dei numeri 1 e 2 dirigeva automaticamente l'attenzione verso il lato sinistro dello spazio e facilitava la risposta a stimoli target apparsi nello stesso lato mentre il contrario era verificato per i numeri 8 e 9. Tali effetti erano rilevati sebbene il numero presentato non fosse informativo e irrilevante per il compito di detezione. Possiamo chiamare questo effetto "Posner numerico".



*Figura 1.3. Rappresentazione grafica del compito di Fisher.*

Studi successivi hanno fornito delle importanti informazioni riguardo alle condizioni comportamentali che possono indurre, o meno, l'effetto originariamente descritto da Fisher e coll. (2003).

Galfano et al. (2006), hanno evidenziato che l'effetto attenzionale indotto dai numeri si verifica quando un chiaro marker numerico-spaziale (il numero 5) viene presentato tra gli stimoli numerici in modo da indurre una chiara classificazione di tali stimoli come minori (i.e. 1 e 2) e maggiori (i.e. 8 e 9) di 5. Gli stessi autori hanno inoltre dimostrato che l'orientamento spaziale dell'attenzione indotto da cues numeriche presentate nel punto centrale di fissazione potrebbe non essere un fenomeno genuinamente automatico in quanto la direzione degli spostamenti dell'attenzione appariva completamente invertita quando i soggetti sperimentali venivano informati circa la predittività dei numeri grandi della comparsa del target nell'emispazio sinistro e, viceversa, che i numeri piccoli erano predittivi della comparsa di targets a destra. Tale effetto di inversione era inoltre presente nelle prove sperimentali anche nella condizione in cui la relazione effettiva tra cues

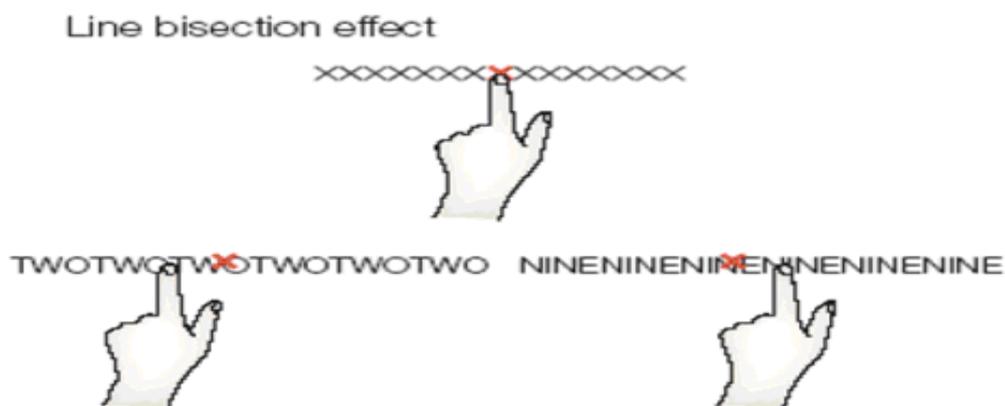
numeriche e posizione dei targets era casuale (i.e. predittività delle cues = 50%). Ristic et al. (2006) hanno descritto un fenomeno simile in una serie di 3 esperimenti. In tale studio hanno dimostrato che gli effetti attentivi indotti dalle cue numeriche erano rovesciati quando ai soggetti veniva richiesto di immaginare la serie crescente dei numeri naturali su una linea orientata da destra a sinistra piuttosto che da sinistra a destra. Tali autori concludono che la relazione tra funzioni attentive-spaziali e rappresentazioni numeriche sono molto flessibili e largamente determinate dal set cognitivo “top-down” adottato dall’osservatore. Anche Casarotti et al. (2007) hanno presentato sei esperimenti in cui il rapporto tra numeri ed attenzione spaziale è stato esaminato utilizzando un compito di giudizio di ordine temporale, al fine di misurare gli effetti dell’allocazione dell’attenzione indotta da cue numeriche centrali. Ai soggetti veniva chiesto di giudicare l’ordine di comparsa di due stimoli che potevano essere sincroni o asincroni. Tali stimoli venivano preceduti dalla comparsa di una cue numerica centrale (1,2,8 e 9). In una serie di sei esperimenti gli autori evidenziano un bias di giudizio a sinistra in concomitanza della presentazione di numeri piccoli e viceversa a destra per quelli grandi, solo negli esperimenti in cui veniva esplicitamente chiesto ai soggetti di prestare attenzione alla cue numerica. Secondo gli autori, tali risultati dimostrerebbero come la presentazione di cue numeriche induca automaticamente uno shift dell’attenzione in funzione della magnitudo numerica. L’assenza di bias di giudizio nella condizione in cui non veniva chiesto di prestare attenzione alla cue numerica, suggerirebbe che l’effetto attentivo indotto dai numeri sarebbe più probabilmente secondario a modulazioni strategiche di tipo top-down indotte dal processamento numerico. Dodd et al. (2008) utilizzando un compito simile a quello di Fisher, hanno esaminato se l’effetto SNARC attenzionale si generalizzi anche con altre serie ordinali (lettere, giorni e mesi). Anche se è stato replicato lo SNARC attenzionale, questi autori trovano che l’effetto è numero-specifico, a meno che ai partecipanti non veniva chiesto di considerare le cue in funzione della rilevanza inerente alla relativa posizione ordinale. La scoperta dell’effetto numero-specifico ha importanti implicazioni sia per la separazione funzionale tra l’effetto SNARC e lo SNARC attenzionale. In uno studio relativamente recente, Ranzini et al. (2009) hanno somministrato un test nel quale target laterali che potevano apparire alla sinistra o alla destra del punto di fissazione, erano preceduti in trial diversi dello stesso blocco di prove, da cue numeriche centrali (1,2,8,e 9) o da cue spaziali-endogene, delle frecce centrali che indicavano il lato alla sinistra o alla destra della fissazione centrale. Contemporaneamente, tali autori registravano i Potenziali Evocati correlati alla comparsa delle cue centrali o dei

targets laterali. Da un punto di vista comportamentale gli autori non hanno osservato un effetto di Posner numerico statisticamente significativo ( $p = 0.06$ , differenza tra TR ai target spazialmente congruenti alla magnitudo numerica e quelli spazialmente incongruenti = 2.5 ms). Da un punto di vista elettrofisiologico, sia le frecce che i numeri evocavano una negatività controlaterale rispetto alla direzione dello spostamento attentivo. Gli autori suggeriscono che tale componente negativa presente sia in una finestra precoce che in una finestra tardiva, possa essere identificata in un caso come EDAN e nel secondo come ADAN e che tali componenti sono solitamente associate allo spostamento dell'attenzione nello spazio. Questo, porta gli autori a suggerire che effettivamente i numeri possano provocare uno spostamento dell'attenzione nello spazio. Ad ogni modo, l'incongruenza tra i dati comportamentali e quelli elettrofisiologici renderebbe meno attendibile l'interpretazione funzionale delle componenti analizzate. Più recentemente, Goffaux et al. (2012), hanno voluto studiare i correlati BOLD-fMR dell'effetto di Posner numerico. Da un punto di vista comportamentale tale effetto non è stato osservato. È inoltre rilevante notare che a livello delle aree parietali implicate nell'orientamento della attenzione, le cue numeriche non inducevano delle attivazioni lateralizzate congruenti all'effetto comportamentale: la presentazione di numeri piccoli non determinava un aumento di attività nelle aree di sinistra ed un conseguente allocamento dell'attenzione verso sinistra e viceversa i numeri grandi non inducevano un aumento di attivazione delle aree parietali attenzionali sinistre ed un conseguente allocamento dell'attenzione verso destra. Attivazioni lateralizzate di questo tipo sono state solamente osservate in aree non attentive occipitali.

#### ***1.2.2.2 Compiti di bisezione con flankers***

Un'altra serie di evidenze che sembrano suggerire una relazione intrinseca tra grandezze numeriche ed orientamento dell'attenzione spaziale, proviene da manipolazioni sperimentali che hanno utilizzato delle varianti del compito di bisezione di linee orizzontali, che viene di solito utilizzato nello studio e nella diagnosi dell'eminegligenza unilaterale sinistra (Schenkemberg et al., 1980). Come è noto i pazienti cerebrolesi destri con eminegligenza attenzionale sinistra, tendono infatti a spostare il punto soggettivo centrale di linee orizzontali di lunghezza medio-grande, verso la destra del punto medio oggettivo.

In uno studio del 2001, Fisher (Fisher, 2001) sembra avere messo in luce che la bisezione di una linea orizzontale può essere significativamente modificata qualora la linea sia composta da una serie di numeri. Alla luce di questi risultati, Calabria e collaboratori (2005) si accorsero che quando ai soggetti veniva chiesto di eseguire la bisezione di una linea composta da "x", i soggetti avevano delle prestazioni medie accurate. Invece se era chiesto loro di compiere una bisezione di una linea composta dal numero "9" o dalla parola francese "neuf"(9) la loro bisezione deviava verso destra. Si riscontrarono risultati opposti invece con una linea composta dal numero "due" o dalla parola francese "deux" (2) dove la bisezione era verso sinistra (Calabria et al. 2005). L'ampiezza dell'errore era comunque modesta (Figura 1.4).



**Figura 1.4.** L'errore nella bisezione di lettere corrispondenti alle parole two (2) e nine (9).

Vallar et al. (2005), utilizzando dei compiti di bisezione di stringhe di numeri e bisezione di linee con flankers numerici, hanno riscontrato uno shift verso la cifra più grande legato all'elaborazione delle relative grandezze. Inoltre hanno somministrato compiti di bisezione di numeri separati da uno spazio vuoto e bisezione di linee con flankers/spazio vuoto tra flankers allo scopo di rilevare relazioni percettive, attentive e numeriche sul bias indotto dalla posizione della cifra più grande. Questo effetto viene interpretato come una illusione cognitiva della lunghezza, per cui il bias spaziale compensa la disparità numerica. Questo sembra funzionare in maniera categorica ("piccolo / grande"), ed essere congruente con il presupposto che un numero relativamente alto è associato alla rappresentazione nel lato destro dello spazio. De Hevia et al. (2009), utilizzando un

compito di bisezione di linee, per la rappresentazione della linea numerica hanno testato adulti, bambini in età scolare e bambini in età prescolare. È stata riscontrata una sistematica distorsione del punto medio in tutte le età quando venivano presentati stimoli numerici non simbolici. Gli autori concludono che le rappresentazioni numeriche e spaziali sono legate ad un pre-apprendimento formale e che quindi vi è una relazione tra cognizione spaziale e numerica. Tenendo conto però, che con linee di lunghezza equivalente, il cut-off per la diagnosi di una significativa e patologica deviazione dell'attenzione spaziale è di 6.7 mm (Azouvi et al. 2002) e che spesso gli effetti comportamentali riportati sono equivalenti o addirittura inferiori alla risoluzione di misura (i.e. 1 mm) utilizzata, è difficile giudicare la forza ed attendibilità dei risultati ottenuti in tali studi.

### ***1.3 Studi su pazienti con lesioni cerebrali circoscritte***

Studi psicofisici e neuropsicologici sembrano affermare che gli esseri umani rappresentano i numeri lungo una linea mentale continua orientata da sinistra a destra. Tuttavia, è stato recentemente affermato che questo tipo di rappresentazione non è esclusivamente per le sequenze di numeri perché una sequenza non numerica sarebbe spazialmente codificata allo stesso modo. Per verificare questa ipotesi Zorzi e colleghi (2005) hanno valutato gli effetti del neglect sinistro sulla bisezione di intervalli numerici e non numerici. È stato chiesto ad otto pazienti con neglect visivo sinistro di eseguire un compito di bisezione di linea e tre compiti di bisezione mentale di intervalli di numeri, lettere e mesi dell'anno. Il pattern d'errore nel compito di bisezione numerica, indicato dall'effetto di modulazione della lunghezza dell'intervallo, rispecchia il compito visivo e conferma l'orientamento spaziale da sinistra a destra della linea mentale numerica. Al contrario, la bisezione di intervalli non numerici ha mostrato un andamento molto diverso. I risultati suggeriscono che la disposizione spaziale che caratterizza le rappresentazioni numeriche, costituisce una proprietà specifica dei numeri piuttosto che una generale caratteristica delle sequenze ordinate (Zorzi, Priftis, Meneghello, Malenzi, Umiltà, 2005).

Un'altra prova che sembra sostenere la teoria dell'interazione tra numeri e spazio deriva dalle ricerche in cui i pazienti con neglect destro commettono errori nell'indicare il punto medio di un intervallo numerico (Zorzi, Priftis, Meneghello, Malenzi, & Umiltà, 2006; Zorzi, Priftis, & Umiltà, 2002). Per esempio al paziente era dato l'intervallo 2 e 6 e gli era stato chiesto di indicare il numero al centro di tale intervallo. Il paziente rispondeva 5,

quando la metà esatta era 4. Gli autori posero l'accento sulla correlazione tra la bisezione degli intervalli numerici con quella della linea fisica.

In generale il centro era spostato verso il lato destro dell'intervallo numerico e gli errori aumentavano con l'aumentare della dimensione dell'intervallo (Zorzi et al., 2002, 2006).

Una successiva ricerca ha dimostrato che questa distorta percezione delle relazioni tra numeri e spazio sia dovuta a una forma rappresentativa del neglect spaziale piuttosto che ad un accesso deficitario alle rappresentazioni numeriche (Vuilleumier, Ortigue, & Brugger, 2004). Infatti, i pazienti con neglect mostravano un aumento del tempo di elaborazione per i numeri piccoli che immediatamente precedevano il numero di riferimento nei compiti di confronto di grandezze in base alla loro posizione verso sinistra sulla linea numerica (Vuilleumier et al., 2004). Al contrario, quando ai pazienti veniva chiesto di elaborare, per esempio le ore dell'orologio, i pazienti avevano maggiori difficoltà per i numeri più grandi di 6, giacché i pazienti con neglect avevano un deficit nel rappresentare il lato sinistro dell'orologio.

Nello studio di Aiello e collaboratori (2012) nella codifica della risposta non è stato fatto richiamo a nessun riferimento spaziale (es destra /sinistra). Tramite questa procedura sperimentale gli autori sono riusciti a dimostrare che il deficit provocato dalla lesione cerebrale destra, non sarebbe di natura spazio-attenzione, in quanto non sarebbe legato alla codifica del lato sinistro della MNL o della sinistra del quadrante dell'orologio, ma piuttosto, all'elaborazione delle magnitudo numeriche piccole, indipendentemente dalla loro localizzazione spaziale. Dai risultati è emersa una tendenza verso destra nel compito di bisezione numerica ed una tendenza verso sinistra nell'O'Clock Test. Precedentemente, Doricchi e colleghi (2005) hanno dimostrato che, pazienti con danno cerebrale all'emisfero destro hanno un deficit nell'orientamento verso sinistra. Questi pazienti presentano una doppia dissociazione tra la performance nel compito di bisezione di intervalli numerici e quella nel compito di bisezione di linee visive. La deviazione nella bisezione di intervalli numerici è stata associata al danno prefrontale, riportato dai pazienti, e al deficit di *working memory*. In particolare nella bisezione d'intervalli numerici, a differenza di quanto avviene nella bisezione di linee, la presenza di un concomitante deficit di campo visivo non peggiora il bias verso destra.

I pazienti con neglect dimostrano un miglioramento nelle capacità ed abilità ad esplorare lo spazio sinistro attraverso il trattamento terapeutico dei prismi (Rossetti, Rode, Pisella, Farnè, Li, Boisson, & Perenni, 1998). In un compito di bisezione di intervalli numerici, i pazienti riducevano il bias verso lo spazio destro dopo un trattamento

terapeutico con i prismi (Rossetti, Jacquin-Courtois, Rode, Ota, Michel, & Boisson, 2004). L'efficacia dei prismi come tecnica terapeutica per ridurre gli errori spaziali commessi emergeva anche in uno studio sui soggetti normali (Loftus, Nicholls, Mattingley, & Bradshaw, 2008). Ai soggetti venivano presentati delle triplete di numeri (es. 16 36 55), e il compito prevedeva di giudicare se la distanza numerica fosse maggiore a destra o a sinistra del numero centrale. I soggetti sovrastimavano la lunghezza del numero posizionato a sinistra del numero centrale mostrando il fenomeno dello pseudoneglect<sup>1</sup> (Jewell & McCourt, 2000). In seguito a un addestramento con i prismi l'errore verso sinistra era progressivamente ridotto (Loftus et al., 2008).

Queste ricerche mostrano come la codifica spaziale della grandezza numerica influenzi la programmazione motoria. Inoltre, è possibile avanzare l'idea che l'interazione tra numero e spazio sia presente nel corso di trasformazioni visuo-motorie. In un recente esperimento pazienti con neglect unilaterale sinistro mostravano un forte errore spaziale verso destra e un lieve errore spaziale verso l'alto durante la bisezione mentale di intervalli numerici eseguita immaginando i numeri come se fossero i numeri civici di una strada indicanti case successive lungo una via (condizione orizzontale dell'esperimento) o come se indicassero i piani di un palazzo (condizione verticale). Questo risultato sembra indicare una potente spazializzazione delle magnitudo numeriche quando esse vengono trattate come riferimenti topografici spaziali, o in altre parole, quando esse vengono incastonate all'interno di piani spaziali di riferimento topografico (Cappelletti, Freeman, & Cipolotti, 2007).

Concludendo, la caratteristica rilevante della linea numerica mentale sembra essere che è automaticamente attivata dalla grandezza numerica presente in un compito sia in maniera esplicita (compito di confronto di grandezza), sia in maniera implicita (compito di giudizio di parità e bisezione d'intervallo numerico). In modo esplicito appaiono l'effetto distanza (Dehaene et al., 1990; Moyer & Landauer, 1967) e quello di grandezza (Restle, 1970).

La presenza di un efficace effetto SNARC pone in evidenza come la linea numerica sembra essere un modo privilegiato per rappresentare le grandezze, con l'influenza della sua natura spaziale. La natura spaziale della linea del numero è attivata automaticamente influenzando la performance spaziale dei soggetti.

---

<sup>1</sup> Il fenomeno dello pseudoneglect indica una tendenza generale dei soggetti normali di commettere un errore di bisezione verso lo spazio di sinistra dal centro esatto di una linea. In altre parole i soggetti commettono un bias verso sinistra nel compito di bisezione di una linea. Al diminuire della lunghezza dello stimolo linea i soggetti normali commettono un errore verso destra nell'indicare il punto medio di una linea (*cross-over*)

Fischer et al. (2001) riportava che la percezione del centro di lunghe stringhe composte di numeri piccoli o grandi era spostata a sinistra o a destra secondo la grandezza numerica costituente le stringhe. Queste due ricerche sono esempi che sembrano illustrare come compiti percettivi inducano una elaborazione semantica.

In uno studio di Fisher del 2003 il soggetto doveva riconoscere la comparsa di un target non numerico (quadrato) a destra o a sinistra del punto di fissazione. Era data l'istruzione di non prestare attenzione al numero che compariva al centro come punto di fissazione. I dati sembravano mostrare che la grandezza numerica e conseguentemente la posizione spaziale lungo la linea numerica mentale influenzavano il tempo impiegato nel riconoscimento della posizione spaziale del target. Questi dati suggerirebbero che l'elaborazione automatica della grandezza del numero e della sua associazione spaziale può facilitare o interferire la performance richiesta dal compito. La linea numerica mentale orientata da sinistra verso destra può riflettere una sovrapposizione tra le rappresentazioni cognitive del numero e dello spazio. Dal punto di vista neurale questa sovrapposizione è individuata dall'interazione tra numero e spazio nella corteccia parietale (Hubbard, Piazza, Pinel, & Dehaene, 2005). Nello specifico è la regione intraparietale laterale del solco parietale quella maggiormente coinvolta nel gestire l'interazione tra la rappresentazione del numero e quella dello spazio. È importante essere cauti nell'interpretazione di alcuni dei risultati ottenuti.

### ***1.3.1 Evidenze a favore di una dissociazione tra cognizione spaziale e Numerica***

Alcuni autori (Doricchi et al., 2005, 2009; Aiello et al., 2012; Van Dijck et al., 2011) hanno suggerito cautela nell'interpretazione di alcuni dei risultati ottenuti che hanno portato ad ipotizzare una stretta e profonda equivalenza fenomenologica, anatomica e funzionale tra l'orientamento dell'attenzione nello spazio fisico e l'orientamento dell'attenzione nello spazio rappresentazionale numerico. In particolare, questi propongono come fattori sensori-motori, concettuali e di working memory possano entrare in gioco e la loro considerazione potrebbe aiutare una più precisa comprensione della cognizione matematica e dei suoi rapporti con la cognizione spaziale.

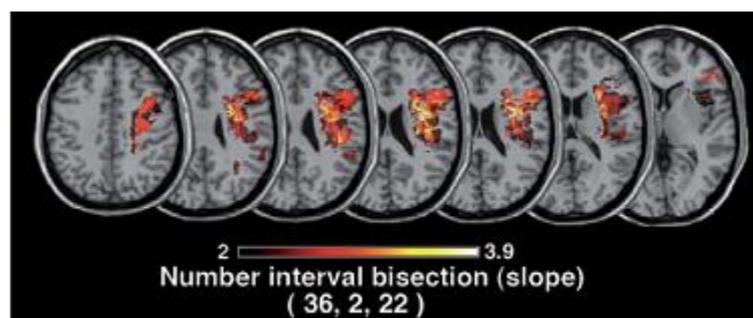
In primo luogo, le importanti evidenze sperimentali portate alla luce da Zorzi e colleghi (2002) relative all'esistenza di un "neglect numerico" hanno lasciato una serie di domande

senza risposta. Prima di tutto occorre domandarsi se il bias verso i numeri grandi osservato nei pazienti con neglect alla bisezione di intervalli numerici sia equivalente a quello osservato durante la bisezione di linee, in secondo luogo è necessario appurare se tale bias è correlato con la severità del neglect e in ultima istanza è opportuno investigare se il deficit descritto dipende da lesioni ad aree corticali e a fasci di sostanza bianca generalmente considerati i correlati neurali dell'emeinergia spaziale (Bartolomeo et al., 2007; Doricchi et al., 2008; Verdon et al., 2010).

Con questo obiettivo, Doricchi et al. (2003) hanno valutato un gruppo di pazienti cerebrolesi destri affetti da neglect e un gruppo di cerebrolesi destri senza neglect. A tutti i partecipanti veniva chiesto di bisecare delle linee lunghe 20 cm e di eseguire un compito di "bisezione numerica". I risultati sono molto chiari: i pazienti con neglect presentavano una evidente doppia dissociazione.

Nello specifico, alcuni pazienti mostravano un neglect severo alla bisezione delle linee fisiche ma una prestazione assolutamente normale alla bisezione di intervalli numerici e, di converso, alcuni pazienti senza neglect potevano mostrare un forte bias alle bisezioni numeriche pur non evidenziando nessun deficit di esplorazione spaziale. Un'analisi di correlazione ha confermato la mancanza di relazione tra il bias nel compito numerico e la severità del neglect.

In aggiunta, i correlati anatomici di tale bias vedevano un coinvolgimento cortico-sottocorticale prefrontale piuttosto che parietale (fig. 1.5). Questi risultati hanno indotto gli autori ad approfondire meglio l'eventuale presenza di deficit di working memory nei pazienti esaminati. Effettivamente, i pazienti che mostravano la maggiore deviazione verso i numeri grandi erano quelli con un deficit più severo di working memory. Questi risultati sembrano suggerire che il bias riscontrato dipende dalla incapacità dei pazienti con deficit di working memory di mantenere in memoria il primo numero dell'intervallo numerico provocando l'emergere dello sbilanciamento verso l'ultimo numero ascoltato.



*Figura 1.5. Da Aiello et al., 2012a*

Studi successivi di Doricchi e collaboratori (2009) hanno confermato un coinvolgimento delle aree frontali-prefrontali nel compito di bisezione numerica e delle connessioni fronto-parietali nei compiti eminentemente visuo-spaziali.

Nonostante questi lavori non abbiano rilevato la presenza di una correlazione tra neglect spaziale e neglect numerico, rimane, comunque, aperta la possibilità che il fenomeno descritto sia un caso speciale di neglect immaginativo. Infatti, il neglect visivo può risultare dissociato dal neglect che investe la sfera rappresentazionale ed immaginativa (Guariglia et al., 1993) e, dunque, il bias osservato nei compiti di bisezione numerica verso i numeri grandi dell'intervallo potrebbe riflettere una difficoltà a spostare l'attenzione lungo la linea mentale numerica.

Recentemente, Van Dijck e colleghi (2011) hanno studiato il caso di un paziente cerebroleso sinistro con neglect per lo spazio extra-personale e rappresentazionale destro e un neglect numerico sinistro. Questo caso clinico dimostra chiaramente una dissociazione tra un bias attentivo verso l'emispazio sinistro e una deviazione al compito di bisezione di intervalli numerici verso destra (i.e. deviazione verso i numeri grandi dell'intervallo).

Un approfondimento diagnostico ha dimostrato che l'apparente neglect mostrato alla bisezione di intervalli numerici era di origine non spaziale: esso risultava correlato ad una scarsa performance a compiti mnestici di apprendimento di sequenze. Nello specifico, il paziente mostrava difficoltà a ricordare gli elementi iniziali di una sequenza.

Questi risultati sembrano confermare un ruolo della working memory nella esecuzione di questo tipo di compiti generalmente considerati puramente spaziali.

Aiello e collaboratori (2012) hanno cercato di chiarire il rapporto che lega il neglect immaginativo ed il neglect numerico. Uno dei test maggiormente utilizzati per la valutazione del neglect immaginativo è l' "o'clock task" (Grossi et al., 1989). In questo compito, viene chiesto ai pazienti di valutare mentalmente l'ampiezza di due angoli formati dalle lancette di un orologio in determinati orari. Appare evidente che un deficit attentivo nell'esplorare la parte sinistra dell'immagine mentale di un orologio, rende questo compito difficoltoso quando si fa necessario immaginare le lancette nel lato sinistro del quadrante.

La correlazione tra neglect alla bisezione di intervalli numerici e neglect immaginativo è stata valutata in 16 cerebrolesi destri affetti da neglect e 21 cerebrolesi destri che non mostravano segni di neglect. Questa correlazione ha fatto emergere che la deviazione verso destra risultava unicamente correlata con una migliore prestazione nell' "o'clock task"

quando gli angoli da considerare coinvolgevano i numeri grandi e riguardavano la parte sinistra nell'orologio. Per semplificare potremmo dire che la prestazione di questi pazienti risultava deficitaria quando il compito richiedeva una manipolazione delle piccole numerosità, indipendentemente dalla posizione che esse occupavano nello spazio immaginativo.

I correlati neurali di questi due compiti immaginativi sono stati investigati tramite la tecnica VSLM o voxel lesion symptom mapping (Bates et al., 2003). Il bias verso i numeri grandi osservato alle bisezioni numeriche correlava con una lesione prefrontale-frontale cortico-sottocorticale, mentre la prestazione patologica precedentemente descritta all' "o'clock task" è risultata correlata ad una lesione alle aree temporali ventrali che sono implicate nella codifica inerente del lato spaziale degli oggetti visivi (i.e. coordinate centrate sull'oggetto) (Medina et al., 2009, Committeri et al., 2004).

La principale conclusione che è possibile trarre da questo studio è che l'emisfero destro sembra codificare le quantità numeriche piccole indipendentemente dalla posizione che possono occupare nell'immagine mentale. A sostegno di tale interpretazione, un recentissimo lavoro di fMRI ad altissima risoluzione di Harvey e collaboratori (2013), ha dimostrato la presenza di regioni corticali localizzate nella corteccia parietale dell'emisfero di destra contenenti rappresentazioni topograficamente organizzate delle numerosità piccole, (small dots, da 1 a 7 elementi). Pertanto, alla luce di queste evidenze, è possibile concludere che il neglect immaginativo e l'ipotetico "neglect numerico" non risultano correlati.

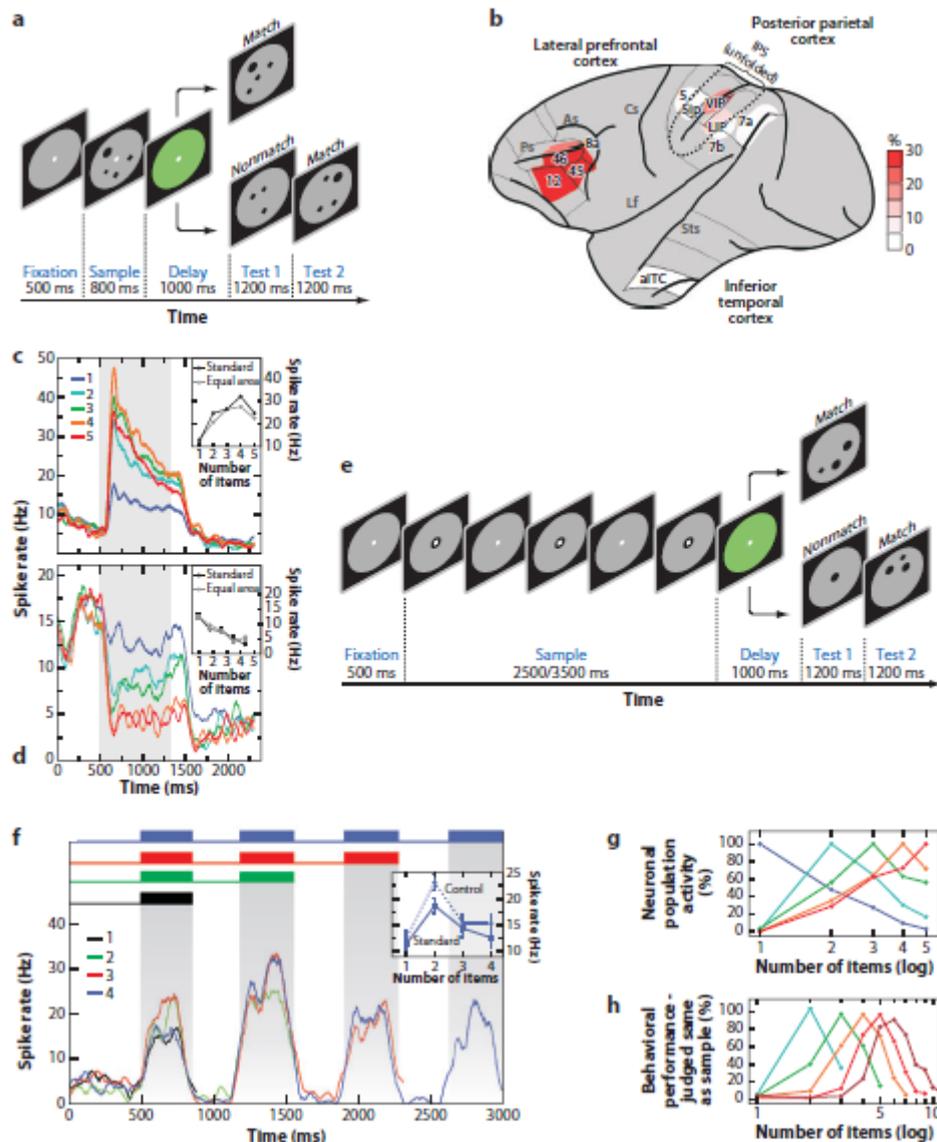
#### ***1.4 Le basi neurali dell'elaborazione dell'informazione numerica***

I vari studi sulla base neurale dell'elaborazione dell'informazione numerica forniscono un punto di vista di come le rappresentazioni e le competenze di base evolutiva interagiscono con lo sviluppo, l'apprendimento e la cultura, consentendo l'utilizzo di strumenti mentali culturalmente prodotti, come ad esempio i simboli numerici astratti (Ansari 2008). Gli attuali punti di vista teorici (Piazza e coll. 2007; Deheane, 2007) suggeriscono, inoltre, che l'acquisizione delle rappresentazioni simboliche numeriche si fonderebbe sulle rappresentazioni non simboliche. Un punto di vista alternativo suggerisce come le rappresentazioni simboliche e quelle non simboliche potrebbero essere mappate su

diverse rappresentazioni interne, sequenzialmente ordinate, che provocherebbero schemi di attivazione simili nel solco intraparietale (IPS) (Fias e coll. 2007; Ischebeck e coll. 2007).

### ***1.4.1 Ruolo dei moduli parieto-prefrontali nelle scimmie***

Rilevazioni nelle scimmie, addestrare a discriminare le numerosità, hanno dimostrato la capacità di singoli neuroni di codificare il numero di elementi presenti in compiti motori e visivi. Nei compiti visivi venivano mostrati alle scimmie sequenze di due presentazioni, separate da un certo periodo di tempo (*memory delay*), e veniva chiesto loro di giudicare se le due presentazioni avessero lo stesso numero di item (*Figura 1.6 a*). Per garantire se le scimmie giudicassero il numero in sé, piuttosto che memorizzare semplicemente le sequenze osservate o sfruttare le caratteristiche di “basso livello” che correlavano con il numero, i compiti sono stati considerevolmente diversificati tenendo sotto controllo le variabili sensoriali specifiche (posizione, forma, densità). I neuroni selettivi per le numerosità (*numerosity-selective neurons*) erano sintonizzati sul numero di elementi visualizzati, mostrando una massima attivazione in risposta a quelle precise quantità (*Figura 1.6 c, d*), risultando invece progressivamente inattivati in presenza di numeri più remoti rispetto a quelli preferiti. Cambiamenti fisici nelle presentazioni non hanno avuto effetti sull'attività di questi neuroni. Questi sono presenti sia nella corteccia prefrontale laterale (PFC) sia in prossimità di un'area associativa definita area ventrale intraparietale (VIP) (*Figura 1.6 b*). L'interessamento della corteccia parietale, in particolare dell'IPS, conferma una particolare attivazione dei neuroni di quest'area nell'estrazione delle informazioni numeriche visive rispetto ai neuroni della PFC (*Figura 1.6 e, f*). Le interconnessioni funzionali tra corteccia parietale posteriore (PPC) e corteccia prefrontale (PFC) e il passaggio delle informazioni da un'area all'altra, le rende ideali per una codifica astratta delle quantità. Entrambe, inoltre, sono anche siti di trasformazione fondamentali per le funzioni esecutive (categorizzazione, memoria di lavoro, processi decisionali, ecc.). Molti studi suggeriscono che la codifica neuronale intraparietale, per le numerosità nella scimmia, possa essere un precursore evolutivo sulla base del quale l'uomo ha costruito il concetto stesso di matematica. Tali studi confermano inoltre, una parziale omologia tra le regioni parietali dell'uomo e della scimmia.



**Figura 1.6:** Rappresentazione della capacità di elaborazione delle numerosità visive nelle scimmie Rhesus. (a) il compito iniziava quando le scimmie afferravano una leva e fissavano il target centrale; dopo 500 ms di fissazione semplice, lo stimolo campione (800 ms) apparso, doveva essere ricordato per 1000 ms durante il periodo di “delay”; veniva poi mostrato un primo test stimolo che nel 50% dei casi presentava lo stesso numero di punti (match) dello stimolo iniziale, e nel restante 50% un numero di punti diverso dal display iniziale (non-match). Successivamente veniva sempre presentato un secondo test stimolo (test2). Per ricevere la ricompensa, le scimmie dovevano lasciare la leva non appena appariva il test match. (b) Visione laterale del cervello delle scimmie, che mostra i siti di registrazione nella corteccia prefrontale laterale (LPFC), nella corteccia parietale posteriore (PPC) e nella corteccia temporale inferiore anteriormente (aITC). Il colore rosso indica la proporzione di numerosity-selective neurons in ogni area. (c),(d) Risposte di singoli neuroni, registrate nella PFC (c) e nel IPS (d). Entrambi i neuroni mostrano una scarica graduata durante la presentazione del campione (intervallo in grigio, 500-1300 ms), in funzione delle numerosità da 1 a 5. Il picco delle curve mostra la sintonizzazione dei neuroni e le risposte a differenti stimoli: la numerosità preferita del neurone in PFC è risultata essere 4 (c), e 1 quella per il neurone in IPS (d). (e),(f) I numerosity-selective neurons mostrano un picco di scarica in funzione della numerosità preferita anche quando gli stimoli sono presentati in sequenza. (g),(h) L'attività di tutti i numerosity-selective neurons forma una serie di filtri sovrapposti per le diverse numerosità, che si osserva anche nella performance comportamentale degli animali (Nieder e Dehaene, 2009).

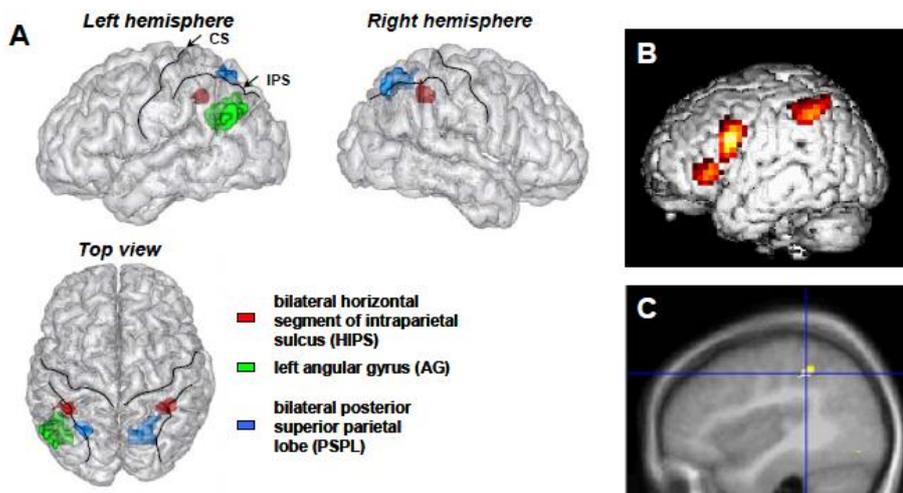
L'attività di tutti i neuroni selettivi per le numerosità, ciascuno sintonizzato su una determinata numerosità preferita, costituiscono un insieme di filtri di sovrapposizione per le numerosità, che rispecchiano le prestazioni comportamentali degli animali (*Figura 1.6 g, h*). Un ulteriore elemento, a prova del contributo di questi neuroni nelle prestazioni comportamentali, viene dall'esame delle prove di errore. Infatti, se i neuroni non codificano correttamente le numerosità, vi è una tendenza maggiore all'errore (Nieder e Dehaene, 2009).

### ***1.5 La rappresentazione delle quantità numeriche nell'uomo***

E' stata proposta una teoria secondo cui uomini e animali condividano un comune meccanismo di rappresentazione delle quantità numeriche che rappresenta il cuore delle conoscenze numeriche. Questa rappresentazione "analogica" permetterebbe di dare, sia una stima della grandezza e della relazione esistente tra i numeri, sia di risolvere complessi problemi aritmetici. A supporto di questa teoria sui sistemi "interni" per le quantità numeriche, recenti studi di neuroimmagine hanno mostrato un'attivazione sistematica di una specifica area cerebrale: il *segmento orizzontale del solco intraparietale nel lobo parietale* (hIPS)<sup>2</sup>. I primi studi sui correlati neurali per le abilità numeriche, sia nei soggetti sani che nei pazienti, mostravano genericamente un elevato aumento dell'attività metabolica nelle zone parietali e frontali durante l'esecuzione di calcoli complessi. Grazie però ad attuali e sofisticate tecniche come la PET o la fMRI, è stato possibile individuare una specifica attivazione del lobo parietale, correlata con i numeri, in specifici distretti deputati a specifici processi: il lobulo parietale posteriore - superiore per i processi visuo-spaziali, il giro angolare dell'emisfero sinistro per i processi "verbali" dei numeri e il segmento orizzontale del solco intraparietale per la rappresentazione delle quantità numeriche (*Figura 1.7*).

---

<sup>2</sup> *Horizontal segment of the Intra-Parietal Sulcus*

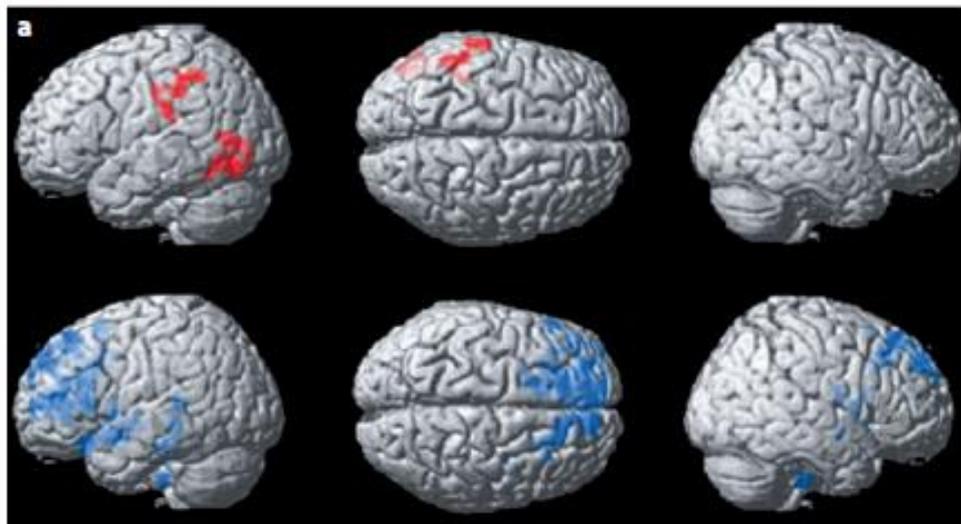


**Figura 1.7:** (a) Rappresentazione (fMRI) dei siti parietali maggiormente attivati nell'elaborazione numerica: solco centrale (CS), solco intraparietale (IPS). (b) Aree specifiche dell'emisfero sinistro: segmento orizzontale del solco intraparietale (hIPS) (la cui attivazione aumenta con la grandezza numerica durante il calcolo) area premotoria e aree prefrontali inferiori. (c) Regioni con riduzione di materia grigia in una popolazione di soggetti con discalculia evolutiva (la localizzazione del danno coincide con l'hIPS) (Piazza e Dehaene, 2004).

Proprio quest'ultimo sito neurale sembrerebbe essere quello maggiormente coinvolto, non solo nella codifica delle rappresentazioni analogiche delle magnitudo numeriche, ma anche nella relazione esistente tra i numeri. L'hIPS (Figura 1.7 a) sembra maggiormente attivato nella stima di calcoli approssimativi piuttosto che di calcoli esatti e in presenza di operazioni comparative che necessitano di scale numeriche (per esempio la comparazione tra due grandezze numeriche). La maggior attivazione per i compiti comparativi è specifica per i numeri piuttosto che per la comparazione tra oggetti o concetti (per esempio il confronto tra lettere dell'alfabeto). Inoltre, il solco intraparietale sembra attivarsi indipendentemente dalla modalità di presentazione dello stimolo elaborando, ad esempio, punti e suoni con il loro corrispettivo numerico. Questo è vero anche quando il soggetto non è a conoscenza di aver visto un simbolo numerico, rivelando quindi un coinvolgimento di questa regione nel processamento dei numeri anche in forma subliminale. Infine, evidenze sul ruolo cruciale dell'hIPS nelle quantità numeriche è rappresentato da studi neuropsicologici su pazienti, che rivelano la doppia dissociazione tra danni al sistema numerico e danni ad altre categorie di livello semantico. In entrambi i casi vi era un coinvolgimento delle regioni parietali, in particolare dell'emisfero sinistro (Figura 1.7 c). Questi dati suggeriscono il coinvolgimento dell'hIPS per le abilità numeriche anche se risulta chiaro che questo non è il solo sistema coinvolto nei processi numerici. I concetti matematici mentali poggiano spesso su processi non direttamente specifici per i domini

numerici, come ad esempio il linguaggio. Infatti, sono state descritte aree come il giro angolare dell'emisfero sinistro per i processi "verbali" dei numeri e il lobulo parietale posteriore - superiore per i processi visuo-spaziali. Studi sull'attivazione del giro angolare hanno dimostrato un coinvolgimento di quest'area non solo nei calcoli esatti ma anche in operazioni che richiedono l'accesso alla memoria verbale. Studi sulla regione parietale superiore - posteriore hanno rivelato un coinvolgimento di quest'area nei processi attentivi e in compiti non specifici come il processamento dei numeri o esercizi di approssimazione numerica. Ciò spiegherebbe le componenti "spaziali" dei numeri rappresentati internamente su una "linea numerica". Se tali regioni neurali sono effettivamente coinvolte nei compiti appena descritti, ci si aspetta che lesioni in queste regioni provochino danni specifici. Studi sui pazienti, ad esempio con Neglect unilaterale, confermano tali aspettative. Per quanto riguarda il ruolo dell'emisfero destro nel processamento dei numeri, studi neuropsicologici vedrebbero coinvolta soprattutto la regione parietale, in compiti non simbolici di stima numerica, contrariamente all'emisfero sinistro "polarizzato" per la manipolazione simbolica dei numeri (Piazza e Dehaene, 2004). Fin dai primi studi sui deficit relativi alle competenze numeriche (es: acalculia), furono evidenziati corrispondenti danni neuronali. Studi di *imaging* funzionale sull'aritmetica mentale, hanno sottolineato un'attivazione parietale bilaterale e prefrontale. Più specificamente il banco anteriore del solco intraparietale (IPS) mostrava una consistente attivazione, negli adulti sottoposti a compiti di semplice comparazione, addizione, sottrazione e moltiplicazione di numeri e anche quando il compito si limitava ad una semplice discriminazione numerica tra colori e lettere. La regione intraparietale è stata spesso associata a un'"astratta e amodale rappresentazione dei numeri" in quanto, può essere attivata anche in presenza di numeri enunciati o parlati. Questo ruolo nella rappresentazione numerica semantica è stato indagato in studi di neuroimmagine che hanno puntato su presentazioni non-simboliche dei numeri come insiemi di punti o serie di toni. La presentazione di compiti di questo tipo, induce una forte attivazione bilaterale della IPS tanto che, anche in compiti di presentazione "passiva", vi è un'attivazione, necessaria per la codifica delle numerosità. Studi fMRI ed ERP (potenziali evento-relati), inoltre, hanno dimostrato un coinvolgimento anche dell'area prefrontale (PFC) che ha confermato una convergenza tra presentazioni simboliche e non-simboliche dei numeri verso una rappresentazione comune delle quantità. I risultati hanno confermato che un'attivazione parietale correlata ai numeri è presente anche in bambini di quattro anni, in compiti di discriminazione delle numerosità (insiemi

di punti). Nello specifico la corteccia parietale di destra risponde per i numeri nuovi mentre quella occipito-temporale di sinistra si oppone a tale novità (*Figura 1.8 a*).



*Figura 1.8: Aree di attivazione corticale durante compiti numerici (Ansari, 2008).*

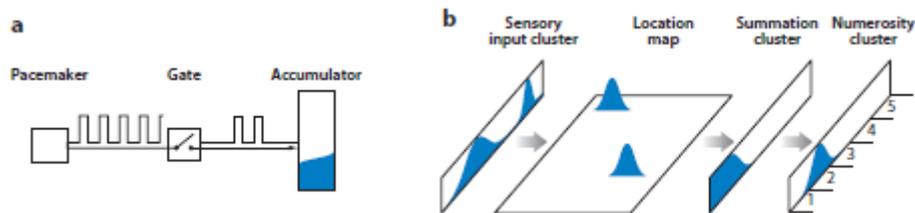
Questa doppia dissociazione ventro-dorsale è similmente osservata negli adulti. Il giro fusiforme reagisce al cambiamento degli oggetti ma non al numero, contrariamente le regioni parietali sono sensibili al cambiamento numerico ma non all'identità degli oggetti. Ciò suggerisce un meccanismo parietale di estrazione delle numerosità già attivo prima dell'educazione simbolica nell'uomo a supporto dell'idea di una capacità di quantificazione, indipendente dal sistema linguistico (Nieder e Dehaene, 2009).

### ***1.5.1 Modelli neurali della rappresentazione delle magnitudo numeriche***

Diverse proprietà sensoriali sono precocemente codificate su percorsi sensoriali. I numeri, tuttavia, sono una categoria astratta priva di caratteristiche sensoriali specifiche: due oggetti potrebbero non avere nulla in comune, tranne il fatto di essere “due”. Il modo in cui i *numerosity-selective neurons* sono sintonizzati su numerosità preferite e come vengono attivati nel corso di elaborazioni corticali è spiegato da due modelli (*Figura 1.9 a, b*), proposti per stimare l'estrazione delle informazioni quantitative dagli input sensoriali. Il modello “modalità- controllo” (o *monotonic coding*) di Meck & Church (1983), suggerisce che ogni item è codificato dall'impulso di un pacemaker, che viene aggiunto a un accumulatore (*Figura 1.9 a*). La magnitudo nell'accumulatore, al termine del conteggio, viene poi mantenuta in memoria, fino a costituire una rappresentazione numerica astratta in

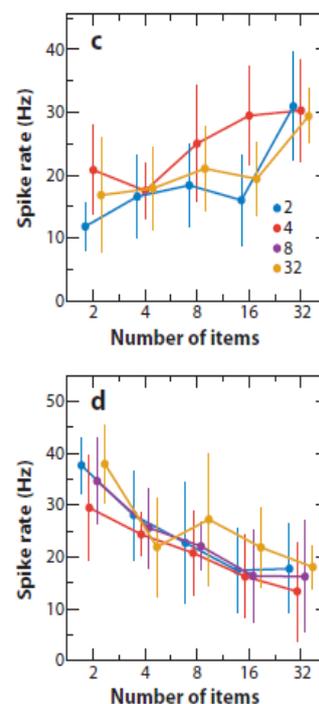
un insieme di item. La quantità viene, quindi, codificata attraverso risposte neurali che aumentano o diminuiscono monotonicamente.

Un altro modello, quello “rivelatore delle numerosità” (o *labeled-line code*) di Dehaene e Changeux (1993), implementa numerosità in parallelo (*Figura 1.9 b*). Ogni stimolo (visivo) è codificato come una distribuzione gaussiana di attivazione, topograficamente organizzata in input d’ingresso. Successivamente item, di diverse forme o dimensioni, sono normalizzati attraverso una codifica indipendente dalle caratteristiche fisiche. I cluster, nella *location map*, proiettano a tutte le unità nella *summation cluster*, la cui soglia di attivazione aumenta con l’aumentare del numero di item, che riunisce insieme l’attività totale dello stadio precedente. Questa attività sommata viene, infine, proiettata verso i cluster della numerosità (*numerosity-selective neurons*) che risponderanno quindi solamente a numerosità specifiche.



**Figura 1.9:** (a) modello “modalità- controllo” (o *monotonic coding*) di Meck & Church (1983). (b) modello “rivelatore delle numerosità” (o *labeled-line code*) di Dehaene e Changeux (1993). (c) I Neuroni nel LIP scaricano monotonicamente in funzione della dimensione impostata, durante compiti di numerosità implicita. Due singole cellule mostrano rispettivamente un aumento (c) o una diminuzione (d) del tasso di scarico, con l’aumentare della numerosità (Nieder e Dehaene, 2009).

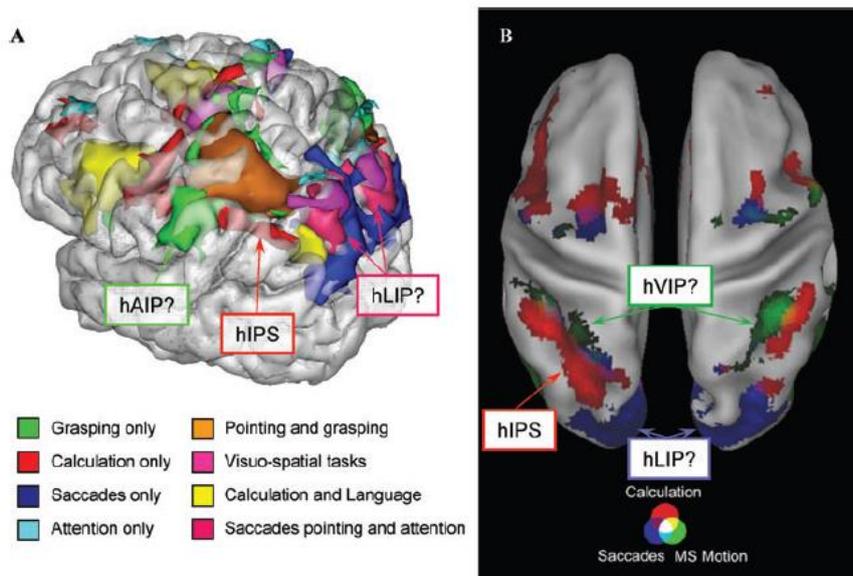
I due modelli differiscono in aspetti importanti: il modello da Meck e Church (1983) opera in modo seriale e assume rappresentazioni di cardinalità su scala lineare, mentre il modello da Dehaene e Changeux (1993) codifica numerosità in parallelo e le rappresenta su scala logaritmica. Entrambi i modelli, tuttavia, richiedono una somma delle unità, che si accumulano in numeri, in uno stile graduato, prima di alimentare i rivelatori di numerosità in output. Roitman e collaboratori (2007), recentemente, hanno registrato neuroni nella corteccia intraparietale laterale (LIP) le cui risposte assomigliavano a questi modelli.



Il loro livello di scarica aumentava sistematicamente o diminuiva monotonicamente, con l'aumentare della numerosità dell'insieme di stimoli presentati nel loro campo ricettivo (*Figura 1.9 c, d*). Tuttavia, i neuroni registrati da Roitman e collaboratori (2007) non possono essere considerati lo stadio finale della codifica numerica, in quanto questa è strettamente connessa all'elaborazione che avviene attraverso i campi recettivi spaziali. L'estrazione di informazioni numeriche astratte richiede un'integrazione che va oltre la rappresentazione visuo-spaziale degli item. In conclusione, l'area ventrale intraparietale (VIP) e la corteccia prefrontale (PFC) hanno la capacità di integrare input multimodali e i  *numerosity-selective neurons*  mostrano una globale elaborazione cognitiva indipendente dall'informazione spaziale (Nieder e Dehaene, 2009).

### ***1.5.2 Codifica numerica nell'IPS***

L'IPS ospita circuiti neurali necessari per le rappresentazioni numeriche. Rispetto a ciò che conosciamo, l'IPS contiene un sottosistema specializzato per i numeri tale che la sua attivazione, durante il calcolo, non può essere ridotta a una semplice funzione sensorimotoria come l'attenzione o la pianificazione della risposta. Tuttavia, non sembra essere presente una sola zona della corteccia che risponde esclusivamente per i numeri; i parametri di dimensione e posizione dell'oggetto sembrano essere codificati da circuiti neuronali distribuiti all'interno della stessa area IPS. L'attivazione parietale, specificamente associata con il sistema di quantificazione semantico, occupa una posizione stabilita rispetto ad altre aree parietali coinvolte nelle funzioni sensoriali, motorie e attenzionali. Dehaene e collaboratori utilizzando l'fMRI, per studiare l'organizzazione cerebrale di sei diverse funzioni precedentemente associate con i sistemi parietali (puntare il dito, prensione manuale, orientamento visuo-attentivo, movimenti oculari, elaborazione di parole scritte e calcolo), hanno dimostrato che tutti i soggetti mostravano una disposizione di attivazione, geometricamente riproducibile, associata con queste funzioni (*Figura 1.10 a*).



**Figura 1.10:** Organizzazione anatomica e funzionale delle aree dei lobi parietali umani in sei funzioni associate a queste aree. **(b)** studio dettagliato del rapporto tra calcolo, movimenti saccadici e movimento multisensoriale negli esseri umani (Dehaene, 2009).

La sistematicità di questa organizzazione è stata confermata da ricerche successive che hanno analizzato la relazione tra calcolo, movimenti saccadici e movimenti multisensoriali (*Figura 1.10 b*).

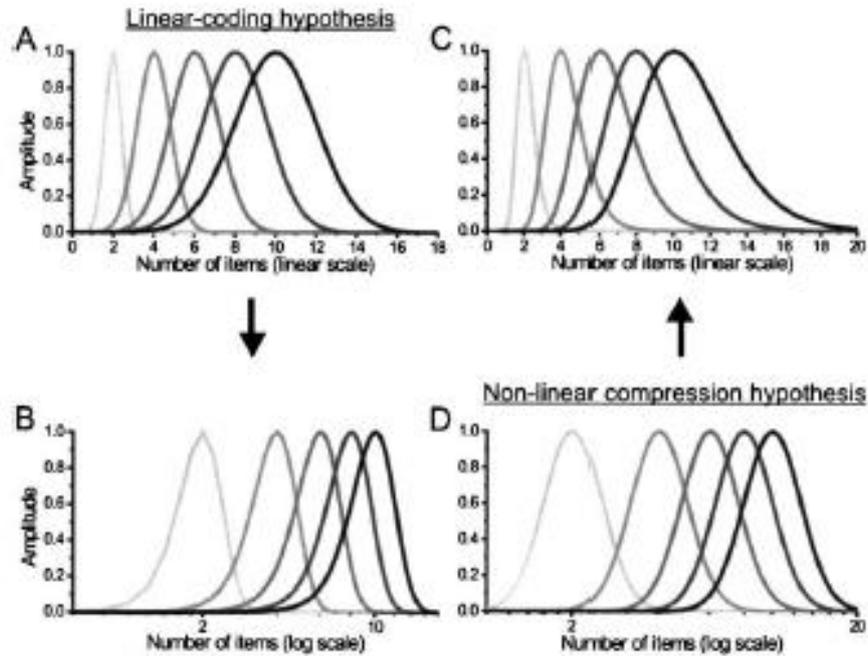
Molti studi hanno contrastato l'attivazione intraparietale, durante i giudizi numerici, rispetto ad altri tipi di caratteristiche come la dimensione fisica, la posizione o la luminosità. I risultati hanno indicato che le attivazioni dell'IPS non sono raggruppate ordinatamente in regioni specifiche per un determinato parametro quantitativo ma mostrano, invece, una notevole sovrapposizione particolarmente forte per *numero e dimensione* e *numero e posizione*.

Pinel e collaboratori (2004) hanno quindi proposto che le popolazioni di neuroni, che codificano per i numeri, sono altamente distribuite nell'IPS e si intrecciano e sovrappongono con le rappresentazioni di altri parametri quantitativi (Nieder e Dehaene, 2009).

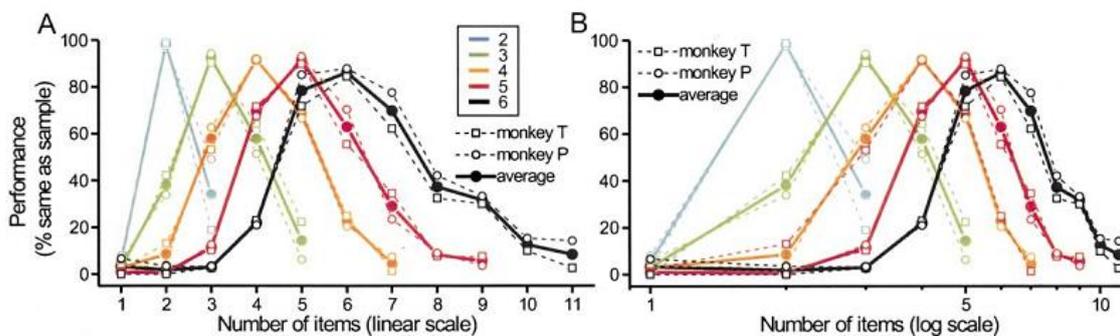
### ***1.6 Evidenze comportamentali e neurali della compressione non-lineare***

Gli studi precedentemente analizzati, sugli schemi di codifica delle rappresentazioni numeriche nella corteccia prefrontale (PFC) delle scimmie, sono stati condotti per determinare se i dati neurali e comportamentali sono consistenti con le leggi psicofisiche predittive di uno *scaling* compresso delle informazioni numeriche. Dal punto di vista

comportamentale, in compiti d'identificazione ritardata delle numerosità, le scimmie hanno dimostrato di far affidamento su informazioni quantitative astratte anziché sull'aspetto esatto della presentazione o su caratteristiche visive di livello inferiore. Inoltre in altri compiti di non-identificazione delle numerosità, le scimmie commettono più errori quando le numerosità sono adiacenti, migliorando progressivamente le loro performance all'aumentare della distanza tra due presentazioni (*distance effect*). Per le quantità più grandi, le due numerosità dovevano essere numericamente più distanti per raggiungere livelli di performance ottenuti con le quantità più piccole e con una distanza numerica più vicina (*size effect*). Le performance in questi compiti erano asimmetriche quando plottate su scale lineari mentre diventavano simmetriche se plottate su scale logaritmiche, suggerendo che uno schema di codifica non-lineare potesse essere più appropriato per spiegare questi dati. Inoltre, per valutare la simmetria del comportamento e delle funzioni filtro nelle scimmie, i dati sono stati adattati su una distribuzione normale (Gaussiana). I dati neurofisiologici, sull'analisi dell'attività dei neuroni della corteccia prefrontale, hanno mostrato che l'attività neuronale dei  *numerosity-selective neurons*  decresce progressivamente con l'aumentare della distanza numerica dal numero preferito. Come per i dati comportamentali, anche le funzioni neuronali sono asimmetriche su scala lineare ma simmetriche se plottate su scala logaritmica. Il fatto che, sia i dati comportamentali sia quelli neurali, quando plottati su scala logaritmica siano meglio spiegati da funzioni gaussiane, suggerisce una relazione diretta tra i due tipi di rappresentazione. Dopo compressioni non-lineari, utilizzando funzioni di potenza o scale logaritmiche, i dati psicofisici e neuronali mostrano distribuzioni simmetriche e variabilità costante almeno all'interno del range di numerosità analizzato. Queste ricerche sono predittive di un modello di codifica non-lineare delle numerosità. Inoltre entrambi seguono la legge di Weber-Fechner, suggerendo che una rappresentazione cognitiva non-verbale (per esempio quella per le numerosità) rispetta le stesse leggi e gli stessi schemi neurali. La compressione delle magnitudo, nei domini sensoriali, è generalmente causata da un processo di trasduzione a livello dell'epitelio sensoriale. Gli studi psicofisici sostengono che tale compressione, nella rappresentazione numerica, ingrandisce lo spazio di codifica aumentando così il range dinamico di percezione e attivazione neuronale (*Figura 1.12*).



**Figura 1.12(1):** (a),(b) Confronto tra l'ipotesi di codifica lineare e l'ipotesi di compressione logaritmica. (a) Ipotesi di codifica lineare: le rappresentazioni interne sono costituite da distribuzioni simmetriche normali su scala lineare che sono centrate su ogni numero e diventano progressivamente più ampie proporzionalmente all'aumento della grandezza ("variabilità scalare"). Il rapporto della deviazione standard rispetto alla media (cioè il coefficiente di variazione) è costante attraverso l'intervallo. (b) Le distribuzioni plottate su scala logaritmica diventano asimmetriche con una pendenza meno marcata verso i numeri più piccoli. (c),(d) Ipotesi di compressione non-lineare (logaritmica). (d) Le quantità sono rappresentate su una funzione di potenza o su una scala logaritmicamente compressa con una variabilità costante attraverso numeri diversi. Rappresentazioni sottostanti saranno Gaussiane su scala logaritmica. L'accuratezza delle rappresentazioni, rimane invariata all'aumentare delle dimensioni della quantità. Così, la deviazione standard ma non il coefficiente di variazione, che è costante attraverso le quantità. (c) Quando trasformate su scala lineare, le distribuzioni sono asimmetriche, ma ora con una pendenza meno marcata verso i numeri più grandi rispetto alla media. Entrambi i modelli possono spiegare il "numerical magnitude" e il "distance effect" (Nieder e Miller, 2003).



**Fig. 1.12(2):** La performance comportamentale in entrambe le scimmie indica se loro giudicavano il primo stimolo test (dopo il delay) come contenente lo stesso numero di item del campione presentato ("% come il campione"). I colori rappresentano le curve di performance per un dato campione di numerosità. Le funzioni di filtro comportamentale sono rappresentate su scala lineare (A) e logaritmica (B). le funzioni sono asimmetriche quando plottate su una scala lineare (notare le slope che si appiattiscono verso i numeri più grandi) (A), ma sono simmetriche se plottate su scala logaritmica non lineare (B).

Lo stesso potrebbe essere vero per rappresentazioni di “alto livello”, che mediano le abilità numeriche, come mostrato in studi condotti su umani e animali dove, rappresentazioni simboliche verbali condividono caratteristiche con le rappresentazioni verbali. Basandosi su questi risultati è possibile affermare che non-lineare non è solamente lo stadio di codifica iniziale delle informazioni numeriche ma che il mantenimento di tali informazioni (periodo di latenza) così come l’output comportamentale sono anch’essi non-linearmente compressi. Questo coincide con il modello di Dehaene e Changeux (1993), che postula che l’imprecisione all’aumentare della numerosità deriva dalla compressione non-lineare durante l’acquisizione delle informazioni numeriche, ma non con il modello “accumulatore”, per le stime numeriche non verbali. In conclusione, i dati evidenziano che alcune rappresentazioni cognitive mostrano attributi simili a quelli trovati per i processi percettivo - sensoriali. L’ipotesi di una codifica analogica delle informazioni cognitive è anche avvalorata da studi di neuroimmagine che mostrano come le rappresentazioni mentali attivino le medesime strutture coinvolte nella percezione (Nieder e Miller, 2003). Inoltre, gli studi elettrofisiologici hanno confermato l’esistenza di specifici neuroni “rilevatori di numerosità”. L’analisi di questi neuroni ha permesso di spiegare la natura delle rappresentazioni numeriche sottostanti al comportamento animale. Questi neuroni, a una prima analisi localizzati nella corteccia prefrontale dorso laterale, si trovano in realtà principalmente nel lobulo parietale superiore (banco anteriore del solco intraparietale) e rispondono selettivamente alle informazioni numeriche. Mentre un terzo di loro risponde specificamente a singoli numeri che variano tra 1 e 5 (la massima numerosità testata), altri rispondono progressivamente in base alla distanza numerica (un numero che codifica per il 3, codificherà meno per il 2 e quasi nulla per l’1). Diverse caratteristiche, della risposta di questi neuroni, hanno messo in luce i meccanismi di rappresentazione interna dei numeri. Una prima caratteristica è riferita al periodo di latenza di attivazione di questi neuroni che è indipendente dal numero rappresentato. Questo risultato non è compatibile con il “modello accumulatore” che prevede un aumento lineare con variabilità scalare di attivazione, in relazione all’aumento della numerosità. Una seconda caratteristica è relativa alle “curve di sintonia” la cui *ampiezza*, suggerisce una codifica approssimativa proporzionale al numero preferito dal neurone (a conferma della legge di Weber, osservabile a livello dei singoli neuroni) e la cui *asimmetria* su scala lineare assume, su scala logaritmica, un andamento Gaussiano. Ciò conferma i dati comportamentali che

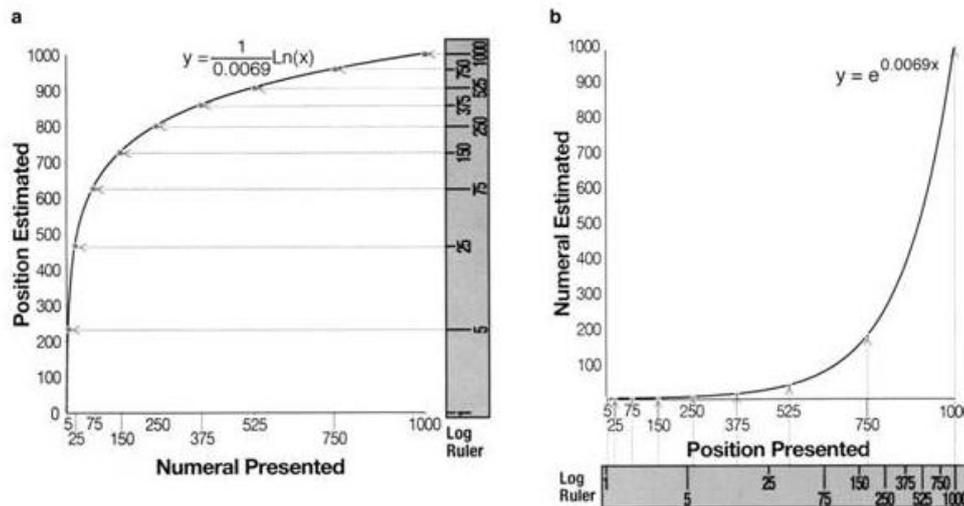
suggeriscono una compressione logaritmica per la codifica neurale delle quantità numeriche (Piazza e Dehaene, 2004).

## II Capitolo

### La linea mentale numerica nei bambini e negli adulti

#### 2.1 Introduzione

La stima numerica è un processo che fa parte della vita sia degli adulti che dei bambini. Le difficoltà incontrate dai bambini, in questo tipo di compito, sembrano essere ascritte a una mancanza del “senso del numero”, strettamente correlata con la comprensione dei concetti aritmetici e con una comprensione imperfetta che i bambini hanno del sistema numerico decimale che li porta a un uso inappropriato della rappresentazione numerica. Infatti, le rappresentazioni multiple delle magnitudo numeriche, possedute dai bambini, sono meglio spiegate da funzioni logaritmiche piuttosto che da funzioni lineari. Studi su come, la rappresentazione delle magnitudo numeriche influenzi la stima dei numeri, sono spiegati dalla “legge di Fechner” la quale afferma che la sensazione di grandezza di un numero è una funzione logaritmica dell’intensità oggettiva dello stimolo. Coerentemente con ciò la velocità e l’accuratezza, di adulti e bambini nella comparazione di magnitudo numeriche, decresce logaritmicamente in relazione alla distanza (*distance effect*) e alla posizione (*size effect*) tra i numeri presentati. Per meglio spiegare questa legge Dehaene (1997) propone un modello “logaritmico” in cui si afferma che ogni volta che ci troviamo di fronte ad un numero, il nostro cervello non può non considerarlo come una quantità analogica, rappresentando le quantità su una scala logaritmica (Siegler e Opfer, 2003). Egli ha suggerito che le persone di tutte le età, così come gli animali, fanno affidamento su questa rappresentazione che, rispetto a una lineare, esagera la distanza tra le grandezze numeriche all’inizio di un intervallo numerico minimizzando la distanza tra le grandezze alla metà e della fine dell’intervallo stesso. Così la distanza psicologica tra i numeri 1 e 75 risulta più ampia rispetto a quella reale che intercorre tra i numeri 75 e 1000. Questo andamento logaritmico si “verifica come un riflesso” impossibile da inibire (*Figura 3.1*).



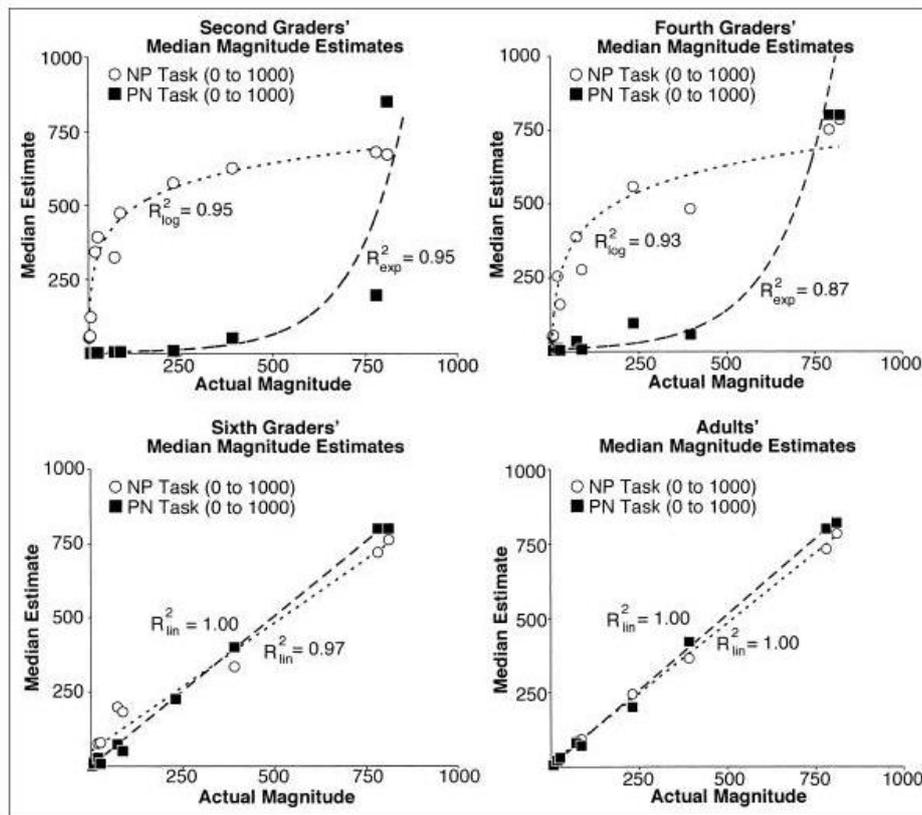
**Figura 2.1:** Stime previste dal modello “logaritmico” per i compiti di Number-to-Position (NP) e Position-to-Number (PN). Nel primo compito (a), la rappresentazione logaritmica delle magnitudo numeriche, aumenta logaritmicamente aumentando la stima della posizione corrispondente a ciascun numero (es: la distanza tra 1 e 75 risulta maggiore di quella tra 75 e 1.000). Nel secondo compito (b), la rappresentazione logaritmica delle magnitudo numeriche aumenta esponenzialmente, aumentando la stima del numero corrispondente a ciascuna posizione (Siegler e Opfer, 2003).

Contrariamente, Gibbon e Church (1981) propongono un modello alternativo chiamato “*accumulatore*” secondo il quale numeri e quantità sono rappresentati come delle grandezze equidistanti con variabilità scalare, che aumentano in relazione al numero che è stato presentato (Siegler e Booth, 2004). Se, infatti, la rappresentazione dei numeri comporta una più elevata variabilità scalare con l’aumentare della magnitudo numerica, una distanza numerica sarà meno accurata di fronte ad una magnitudo più grande. Malgrado ciò rappresentazioni di magnitudo più vicine, avendo una maggior sovrapposizione, saranno comunque più difficili da discriminare. Seppur i modelli vogliano dare una spiegazione di come le persone e gli animali rappresentino le quantità e di come riflettano il grado di sovrapposizione tra le rappresentazioni, si ritiene che nessun modello descriva realmente quale tipo di rappresentazione le persone utilizzino (Siegler e Opfer, 2003). Infatti, autori come Brannon e collaboratori (2001) sostengono la teoria di una co-presenza di entrambi i modelli mentre Case e Okamoto (1996) sostengono l’esistenza di una semplice rappresentazione “qualitativa” dei numeri (questo numero è più “piccolo” rispetto a quest’altro) in bambini di 4 e 5 anni, che diviene lineare intorno ai 6 anni. Questi modelli dimostrano come tutti possiedono una rappresentazione dei numeri e delle quantità, in generale, anche se sembra improbabile l’esistenza di un solo tipo di rappresentazione (Siegler e Booth, 2004). Si ritiene che da bambini l’utilizzo di rappresentazioni multiple di quantità numeriche avvenga solo con lo sviluppo di rappresentazioni formali appropriate (Siegler e Opfer, 2003) che variano in relazione al

contesto in cui vengono espresse e che cambiano col progredire dell'età e delle esperienze, influenzando le scelte rappresentative. Quindi, esperienze con il sistema formale dei numeri o dell'aritmetica, portano i bambini all'acquisizione di una rappresentazione lineare e insieme "categoriale" (pari - dispari, quadrato-non quadrato) sia dei numeri che delle quantità, permettendo al bambino di sfruttarle nella maniera più appropriata e in relazione al contesto (Siegler e Booth, 2004).

## ***2.2 Studi con il compito di Number-to-Position***

Per tali motivi nello studio di Siegler & Opfer (2003), sono state formulate tre ipotesi: le persone, possedendo rappresentazioni multiple delle quantità numeriche, genererebbero pattern di stime multipli; la correlazione tra età ed esperienza aumenterebbe le rappresentazioni lineari e, infine, alcuni tipi di compiti eliciterebbero pattern di stima lineare mentre altri pattern di stima logaritmica in relazione al contesto numerico. Il compito, svolto da adulti e bambini di seconda, quarta e sesta classe e suddiviso in due prove (*Number-to-Position* e *Position-to-Number*) prevedeva la somministrazione di linee di 25 cm le cui estremità erano delimitate da una parte dal numero 0 e dall'altra dal numero 100 o 1000. Nel *Number-to-Position* (NP) il numero da posizionare era posto 2 cm sopra il centro della linea, nel *Position-to-Number* (PN), la posizione da stimare era indicata con un segno grafico verticale che intersecava la linea. Per ogni scala sono stati creati due Set (A e B) di "numeri da posizionare" con distribuzione simile. Per lo 0-100 il *Set A* includeva i numeri 2, 4, 6, 18, 42, 71; il *Set B* i numeri 2, 3, 6, 25, 67, 86. Per lo 0-1000 il *Set A* includeva i numeri 4, 6, 18, 71, 230, 780; il *Set B* i numeri 2, 6, 25, 86, 390, 810. La scelta di questi numeri voleva da un lato massimizzare la discriminabilità delle funzioni logaritmiche e lineari e da un lato minimizzare l'influenza di conoscenze specifiche. Dai risultati è emerso che con l'età, la stima dei bambini cambia sostanzialmente, specialmente nei compiti 0-1000. Infatti, un adattamento logaritmico era interpretativo dei risultati della seconda classe rispetto a uno lineare, mentre le stime dei bambini della quarta classe sono ugualmente rappresentate da entrambi i modelli. Differentemente le stime dei bambini della sesta classe e degli adulti sono meglio spiegabili da un adattamento lineare piuttosto che da uno logaritmico o esponenziale (*Figura 2.2*). Ciò dimostrerebbe un cambiamento dall'adattamento logaritmico a quello lineare in base all'età (Siegler e Opfer, 2003).



**Figura 2.2:** Stime sui compiti di Number-to-Position e Position-to-Number nell'intervallo 0-1000: cambiamento dell'adattamento in base all'età (Siegler e Opfer, 2003).

Se quindi la stima numerica è importante nella vita di tutti i giorni, poco invece si conosce sullo sviluppo delle altre abilità quantitative di base come il *subitizing*, il conteggio o l'addizione. Questo perché alcuni compiti di stima, come per esempio la stima della distanza del tempo o del denaro, richiedono una conoscenza pregressa delle entità che si stanno andando a stimare. La variabilità dei compiti e i tanti prerequisiti indispensabili, hanno reso difficile identificare il processo alla base di tutti i tipi di stima e, quindi, formulare un paradigma sperimentale per indagare questo tipo di sviluppo. Lo studio di Siegler e Booth (2004), si basa sull'assunzione che la stima è un processo di traduzione tra vari tipi di rappresentazione quantitative. Queste, possono tradurre dal numerico al numerico (problema di moltiplicazione tradotto in prodotto), dal non-numerico al non-numerico (luminosità tradotta in lunghezza) e dal numerico al non-numerico, come nel caso del presente studio in cui viene fornito al bambino un numero e gli viene chiesto di posizionarlo su una linea numerica. Quest'ultimo tipo di compito non solo è una misura pura della stima numerica, poiché non richiede particolari conoscenze di entità di base, ma è anche ecologicamente valido in quanto già molti bambini a scuola utilizzano linee numeriche per l'apprendimento di concetti matematici. Molti autori tra cui Piaget,

Vygotskij, Werner, hanno proposto che i cambiamenti evolutivi avvengono nel corso del tempo. Ciò potrebbe spiegare se l'età e le esperienze acquisite possano, in qualche modo, influenzare lo sviluppo della stima numerica. La conclusione che i bambini non siano molto abili nei compiti di stima ha condotto a vari tipi di ricerche in cui sono state studiate varie proprietà di stima, dalla stima delle distanze, alla stima del numero di oggetti astratti, fino alla risoluzione di veri e propri problemi aritmetici. Questa inabilità da parte dei bambini è stata ricondotta a varie cause come un'incapacità nella manipolazione dei simboli o una mancanza interna del "senso del numero" e di concetti strutturali di base. Molti studi hanno ipotizzato che la stima numerica dei bambini riflette la loro rappresentazione interna dei numeri. Dai dati dello studio di Siegler e Opfer (2003), è emerso che nel compito di NP 0-1000, i bambini di seconda classe fanno affidamento sulla rappresentazione logaritmica, quelli di quarta a volte sulla logaritmica a volte sulla lineare, mentre quelli di sesta solo sulla rappresentazione lineare

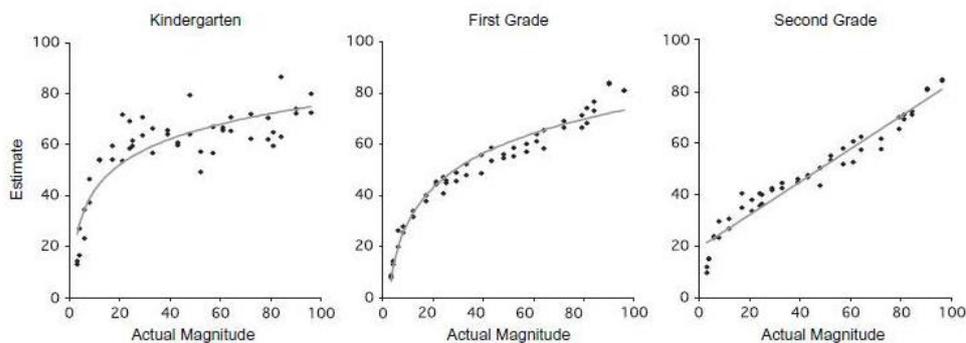
Per questo motivo, si è ipotizzato che un cambiamento avvenisse tra la scuola materna e la seconda classe poiché proprio in questo periodo molti bambini si trovano a fare le prime esperienze con questo range numerico. L'intenzione era quella di valutare la relazione tra la stima della linea numerica per ampie misure e il raggiungimento delle conoscenze matematiche e se esistesse un coinvolgimento relativo ai miglioramenti nella stima legati all'età. Inoltre si è ipotizzato che, se la flessibilità della stima della linea numerica è dipendente dall'esperienza, se fossero state presentate esperienze pertinenti i bambini avrebbero migliorato rapidamente le loro prestazioni in questi compiti. A partire da queste ipotesi Siegler e Booth (2004), hanno ipotizzato la presenza di un pattern di stima a predominanza logaritmica che, diventando logaritmico - lineare in una fase intermedia, diviene prevalentemente lineare. L'accuratezza nella stima numerica potrebbe correlare positivamente con il successo nei compiti matematici. Inoltre, la crescente linearità, la decrescente variabilità e l'accuratezza nella stima potrebbero migliorare con l'età e la scolarizzazione.

L'esperimento, composto di due parti, è stato somministrato a bambini di scuola d'infanzia, prima e seconda classe.

Nel primo esperimento, sono stati utilizzati 48 fogli di carta con, stampate a centro, linee di 23 cm le cui estremità erano delimitate da una parte dal numero 0 e dall'altra dal numero 100, con un numero (compreso tra 0 e 100) stampato sul bordo superiore di ogni pagina. Per valorizzare l'abilità di discriminazione tra pattern di stima lineare e logaritmica, i numeri al di sotto del 30 sono stati sovra campionati (10 numeri tra 0-30; 14

numeri tra 30-100). I 24 numeri presentati erano: 3, 4, 6, 8, 12, 17, 21, 23, 25, 29, 33, 39, 43, 48, 52, 57, 61, 64, 72, 79, 81, 84, 90, 96. Ogni bambino, ha ottenuto un punteggio allo *Stanford Achievement Test* (SAT-9) per le abilità matematiche, somministrato in prossimità della fine dell'anno accademico (3-4 mesi prima).

Nel secondo esperimento, creato con l'intento di valutare se l'accuratezza e la linearità della stima numerica potessero essere aumentate da procedure mirate ad innescare un conflitto cognitivo, è stato chiesto ai bambini di posizionare 10 numeri equidistanti su una singola linea numerica, successivamente riflettere sulla stima iniziale e, in caso riposizionare i numeri su una nuova linea. Ciò che ci si aspettava era un aumento dell'accuratezza e della dipendenza su una rappresentazione lineare perché, bambini in grado di generare rappresentazioni lineari ma che non contavano su loro stessi nel compito di stima, avrebbero visto che i numeri che dovevano essere equidistanti in realtà non lo erano. Questo conferma che se i bambini avessero ricevuto prima questa esperienza, avrebbero in seguito generato rappresentazioni lineari più accurate rispetto al gruppo di controllo a cui non è stata fornita alcuna prova aggiuntiva. In una modifica di questo esperimento, dopo la stima di posizionamento del numero da parte del bambino, veniva fornito un feedback sulla corretta posizione del numero, per aiutare il bambino a comprendere meglio il compito. Questi esperimenti dimostrano le ipotesi preformulate. Quasi tutti i bambini di scuola materna hanno generato pattern logaritmici mentre bambini di seconda pattern lineari. I bambini di prima classe si interpongono nel mezzo con pattern sia logaritmici che lineari (*Figura 2.3*). Per quanto riguarda l'età e la scolarizzazione sono state trovate differenze significative nella stima della linea numerica tra i bambini di prima e di seconda classe. Inoltre, la possibilità di correggere gli errori più evidenti ha permesso un aumento dell'accuratezza nella stima rispetto al compito iniziale (Siegler e Booth, 2004).



**Figura 2.3:** Stime di linea numerica: analisi con modello “best-fitting” (Siegler e Booth, 2004).

Un'altra ragione alla base delle conoscenze limitate in altre abilità di base è dovuta alla diversità dei compiti di stima esistenti. Due tipi di conoscenza, che spesso utilizziamo per fare una distinzione tra in vari compiti di stima, sono la conoscenza del mondo reale e la conoscenza dei numeri. Infatti, alcuni compiti di stima richiedono conoscenze specifiche relative a entità del nostro mondo, altri a unità di misura convenzionali e altri ancora a entrambi. Il processo d'interesse dello studio di Siegler e Booth (2006) è la "*stima numerica pura*". Questo può essere definito come un processo che ha come obiettivo quello di approssimare alcuni valori quantitativi che non richiedono la conoscenza di entità relative al mondo reale o specifiche unità di misura per essere stimate, come ad esempio stimare il numero di biglie in un vaso o localizzare un numero su una linea numerica. Questo processo sembra particolarmente centrale nei processi di stima non solo perché elimina la conoscenza non-matematica per specifiche entità e particolari unità di misura, che sono fonte di variabilità nelle prestazioni di stima, ma anche perché molti studi hanno rivelato che cambiamenti nello sviluppo possono influenzare ogni tipo di stima numerica. Questo cambiamento nello sviluppo comporta il passaggio da rappresentazioni di tipo logaritmico a rappresentazioni di tipo lineare tra la scuola materna e la seconda classe per stime di posizione su linee 0-1000, come mostrato da Siegler e Opfer (2003). Il fatto che questo spostamento avvenga a età diverse, sembrerebbe guidato da un'aumentata esposizione ai numeri in ciascun intervallo, piuttosto che a una più generale comprensione del sistema numerico decimale o ai cambiamenti evolutivi.

Il passaggio da rappresentazioni logaritmiche a lineari è importante sia per ragioni teoriche che per ragioni empiriche. A livello teorico le rappresentazioni lineari riflettono la struttura del sistema numerico, fondamentale per la comprensione dell'aritmetica, dell'algebra e di altri concetti matematici. A livello empirico, il grado con cui i bambini generano rappresentazioni lineari è fortemente legato al miglioramento nei punteggi ai test matematici. Dowker (2003) ha riscontrato che alcuni tipi di stima numerica sono migliorati dall'età e dall'esperienza mentre altri rimangono invariati. Tuttavia rimane importante il tipo di conoscenza necessaria, ad esempio quella per stimare la distanza tra due città è correlata col tipo di conoscenza necessaria per stimare il rapporto tra due numeri. Pertanto, scopo della presente ricerca è quello di determinare se l'andamento nello sviluppo, trovato per i compiti di stima su linea numerica, si verifichi anche su altri tipi di compiti come quelli di "*stima pura*" e se questi si verifichino durante lo stesso periodo di sviluppo. L'obiettivo principale della ricerca è esaminare la consistenza delle differenze individuali

in diverse tipi di *stima numerica pura* in bambini di scuola d'infanzia, prima, seconda e terza classe.

Nel primo esperimento sono stati presentati 4 compiti di stima numerica pura ai bambini a cui è stato chiesto di fornire risposte a problemi di addizione (*stima computazionale*), indicare il numero di biglie in un vaso (*stima di numerosità*), la lunghezza di una linea in pollici (*stima di misurazione*), e localizzare la posizione di un numero su una linea (*stima di linea numerica*). Quest'ultimo compito nasceva con l'intento di replicare i risultati ottenuti da Siegler e Booth (2004) sul passaggio da logaritmico a lineare e la relazione tra linearità delle stime e miglioramento nei punteggi ai test matematici. In una prima fase di questo esperimento ai bambini veniva presentato un foglio di carta con, stampata al centro, una linea di 25 cm, le cui estremità erano delimitate da una parte dal numero 0 e dall'altra dal numero 100. Veniva chiesto ai bambini di indicare con un segno grafico dove pensavano potesse trovarsi il numero 50 sulla linea. Veniva poi mostrata una linea identica con il numero 50 segnato nella posizione corretta e veniva chiesto al bambino di spiegare perché il numero si trovasse proprio in quella posizione. A tutti i bambini è stato spiegato che "50 è la metà di 100 e si trova a metà strada tra lo 0 e il 100". Successivamente ai bambini venivano presentati 26 fogli di carta con una linea di 25 cm, identica alla precedente, e veniva chiesto loro di indicare con un segno grafico la posizione del numero presentato (questa volta differente per ogni trial). Per valorizzare l'abilità di discriminazione tra pattern di stima lineare e logaritmica, i numeri al di sotto del 30 sono stati sovra campionati (4 numeri per ognuna delle prime 3 decine). I 26 numeri presentati erano: 3, 4, 6, 8, 12, 14, 17, 18, 21, 24, 25, 29, 33, 39, 42, 48, 52, 57, 61, 64, 72, 79, 81, 84, 90, 96. Le altre fasi del primo esperimento includevano gli altri 3 compiti di stima.

Nel secondo esperimento sono stati valutati gli stessi quattro tipi di stima ma questa volta con rigorose tecniche di valutazione su tutti i compiti, per consentire un esame approfondito delle rappresentazioni numeriche dei bambini. L'obiettivo principale era determinare se il passaggio da un modello logaritmico a uno lineare fosse presente anche nei compiti di *stima numerica pura* oltre che in quelli di stima della linea numerica e se i tempi di spostamento da logaritmico a lineare fossero simili sui diversi tipi di stima. Per quanto riguarda il compito di stima della linea numerica, la procedura era identica al primo esperimento fatta eccezione per la scala che questa volta era 0-1000 anziché 0-100. È stata scelta una scala 0-1000 in quanto questa aveva giocato un ruolo importante dello studio di Siegler e Opfer (2003) e si voleva tentare di produrre lo stesso effetto anche su altri tipi di stima numerica pura. I 22 numeri presentati includevano quattro numeri tra 0 e 100 e due

numeri per le successive centinaia: 3, 7, 19, 52, 103, 158, 240, 297, 346, 391, 438, 475, 502, 586, 613, 690, 721, 760, 835, 874, 907, 962. Dai risultati è emerso che il passaggio da un andamento logaritmico a uno lineare è presente nei bambini tra la scuola d'infanzia e la quarta classe con un'accuratezza nella stima che cresce sostanzialmente in questo periodo. Ciò è stato confermato per le stime di linea numerica ma non per altri tipi di stima pura (computazionale, numerosità, misurazione). La ragione per cui i bambini delle scuole elementari possiedono una stima povera, sia in relazione allo sviluppo che alle differenze individuali, è attribuibile a una dipendenza su scala logaritmica piuttosto che su una lineare per le rappresentazioni delle magnitudini numeriche (Siegler e Booth, 2006).

## ***2.3 Le rappresentazioni numeriche nei bambini***

### ***2.3.1 Rappresentazioni numeriche e non-numeriche***

In un recente studio sulla rappresentazione degli ordini numerici e non-numerici nei bambini, sono state esaminate le prestazioni di bambini in età prescolare e bambini di scuola primaria in diversi compiti di posizionamento. Sono state presentate due linee numeriche classiche, più due nuove linee in cui i bambini dovevano posizionare lettere e mesi dell'anno.

Nel compito con linee numeriche, sono state sviluppate delle varianti al compito di *Number-to-Position* di Sigler e Opfer (2003), per indagare se le sequenze ordinate non-numeriche possono essere facilmente tracciate su linee, come nel caso dei numeri, e se il tipo di rappresentazione utilizzata da parte dei bambini mostra una tendenza evolutiva simile al modello che è stato stabilito per i numeri.

Nel compito di *Letter-to-Position* (LP) e *Month-to-Position* (MP) veniva richiesto di posizionare le lettere o i mesi su una linea delimitata da una parte dalla lettera "A" o dal mese "Gennaio" e dall'altra dalla lettera "Z" o dal mese "Dicembre". Inoltre, per consentire un diretto confronto con la rappresentazione numerica, sono state presentate due nuove linee numeriche abbinata al compito non-numerico in termini di lunghezza dell'intervallo (ad esempio la linea numerica abbinata alla linea del mese è stata delimitata dai numeri 1 e 12 alle estremità). Queste linee hanno consentito di valutare direttamente l'ipotesi della generalizzazione. Infatti, se la linearità numerica è generalizzata per le sequenze non-numeriche ordinali, le prestazioni a questo tipo di compito possono essere previste da prestazioni corrispondenti alle linee numeriche classiche.

Nel compito di *Number-to-Position* sono stati utilizzati fogli di carta A4 con, stampate a centro, linee di 25 cm le cui estremità erano delimitate da una parte dal numero 0 e dall'altra dal numero 100 o 1000. Per la linea 0-100 i numeri utilizzati erano: 2, 3, 4, 6, 18, 25, 48, 67, 71, 86; per la linea 0-1000 erano invece: 4, 6, 18, 2, 71, 86, 230, 390, 780, 810. Per assicurarsi che il bambino fosse consapevole delle dimensioni dell'intervallo lo sperimentatore specificava, indicandoli, i due estremi dell'intervallo e chiedeva al bambino di stimare la posizione del 50 o del 500.

Nei compiti *Letter-to-Position* (LP) e *Month-to-Position* (MP) e nel corrispettivo numerico, gli stimoli sono stati presentati come nel compito di NP. Per il LP erano: B, E, H, L, N, P, S, V; per il MP erano: Febbraio, Aprile, Luglio, Settembre, Novembre. Le linee numeriche corrispondenti erano 1-21 per le lettere dell'alfabeto e 1-12 per i mesi dell'anno. I numeri da posizionate corrispondevano alla posizione seriale dell'elemento non-numerico scelto (ad esempio "B" e "Febbraio" sono stati sostituiti dal numero 2).

I risultati nel compito di NP abbinato al compito non-numerico, anche dopo gli effetti parziali della scolarizzazione, dimostrano che la qualità della distribuzione nel compito numerico era predittivo del successivo posizionamento in quello non-numerico. Questo risultato supporta l'ipotesi che la linearità di sequenze ordinate non-numeriche è una generalizzazione dei domini numerici. Inoltre, è importante sottolineare che la conoscenza dell'alfabeto non implica necessariamente una rappresentazione in cui le lettere adiacenti sono fissate equidistanti tra loro.

L'interpretazione del passaggio da logaritmico a lineare è stata recentemente contestata da Barth e Paladino (2011). Essi sostengono che le performance nel compito NP sono meglio spiegate da un modello di giudizio di proporzione (che implica una sigmoidale piuttosto che una logaritmica) e che l'apparente compressione logaritmica è un artefatto provocato dal sotto-campionamento dei valori più grandi del range numerico. Nel loro insieme, i risultati del presente studio escludono la possibilità che il posizionamento lineare sia un fenomeno di regolarizzazione generale tale per cui la linearità è una caratteristica distintiva dei numeri. Infatti, il passaggio da un posizionamento logaritmico a uno lineare è condiviso anche da sequenze ordinate non-numeriche. Tuttavia, la qualità della rappresentazione numerica è predittiva del modello mostrato dai bambini nel posizionamento di elementi non-numerici, anche se, la perfetta conoscenza delle sequenze ordinate, non è sufficiente a produrre linearità. Si può quindi concludere che il principio di linearità è generalizzato dal dominio numerico per le sequenze non-numeriche ordinate (Berteletti, Lucangeli, Zorzi, 2012).

### ***2.3.2 Influenza dell'apprendimento dell'aritmetica nelle rappresentazioni numeriche***

Come già affermato, con l'età e l'esperienza i bambini migliorano in molti compiti passando da rappresentazioni logaritmiche a rappresentazioni lineari. Quando, infatti, ai bambini sono presentate delle linee numeriche delimitate da 0 e 100 e viene chiesto loro di stimare la posizione di specifici numeri sulla linea, molti bambini della scuola d'infanzia producono stime che si adattano meglio a funzioni logaritmiche. I bambini di seconda classe generano pattern di stima lineare e circa la metà dei bambini di prima classe produce entrambi i tipi di pattern. L'uso di una rappresentazione logaritmica comporta un aumento delle stime più rapido per i numeri piccoli che per quelli grandi, mentre l'uso di una rappresentazione lineare comporta un aumento delle stime bilanciato su tutto il range numerico. Il passaggio da un pattern logaritmico a uno lineare, nella stima delle linee numeriche, si verifica tra la scuola d'infanzia e la seconda classe per l'intervallo 0-100 e tra la seconda e la quarta classe per l'intervallo 0-1000. Lo stesso passaggio avviene nelle stesse fasce d'età su altri tipi di stima come compiti di misurazione o di numerosità. La consistenza delle differenze individuali, nelle performance a questi compiti, conferma i cambiamenti nella rappresentazione delle magnitudo numeriche.

La questione centrale dello studio di Siegler e Booth (2008) è se la linearità nelle rappresentazioni delle magnitudo numeriche influenza l'acquisizione di nuove informazioni numeriche. Le particolari acquisizioni numeriche esaminate sono relative al tipo di apprendimento per la risoluzione di problemi di aritmetica sconosciuti. Anche se l'apprendimento dell'aritmetica è stato visto come un processo meccanico di memorizzazione, si crede che questo possa includere altre significative attività cognitive. In particolare, sembra fare affidamento non solo su associazioni verbali tra problemi e risposte ma anche sul "senso del numero" e sulla comprensione di come le quantità numeriche siano combinate tra loro. Per tali ragioni, si ritiene che le rappresentazioni delle magnitudo numeriche dei bambini potrebbero influenzare l'apprendimento dell'aritmetica e inoltre che tali rappresentazioni potrebbero essere condizionate dai programmi scolastici, progettati ad hoc per inculcare rappresentazioni mentali lineari dei numeri. Sembra quindi probabile che le continue esperienze con i numeri, contribuiscano a una conoscenza differenziata dei range numerici (numeri grandi e numeri piccoli) che potrebbero vincolare la gamma di risposte possibili durante la presentazione di problemi aritmetici. Questo

studio nasce con l'intento di valutare se, nei bambini di seconda classe, le rappresentazioni dei numeri tra 0 e 100 sono correlate: alle loro conoscenze aritmetiche, alla loro abilità ad acquisire nuovi concetti e alla relazione esistente tra apprendimento dell'aritmetica e altre variabili specifiche (conoscenze aritmetiche complessive, conoscenze pregresse dell'addizione e memoria a breve termine per i numeri). Se la linearità della rappresentazione delle magnitudo numeriche è così influente, allora questa potrebbe predire l'apprendimento di problemi aritmetici sconosciuti al di là dell'influenza di altre variabili. Infine, lo studio vuole valutare l'importanza degli ausili visivi esterni, nella rappresentazione e nell'apprendimento dell'aritmetica, come figure o grafici solitamente inclusi nell'insegnamento dei concetti matematici. Secondo alcuni infatti questi sono indispensabili, secondo altri dannosi, per favorire l'apprendimento della matematica. Un pre-test condotto sui bambini di prima classe, divisi in due gruppi, ai quali venivano somministrate linee numeriche 0-100 con l'esposizione a diversi tipi di rappresentazioni esterne delle magnitudo di addendi e somme, ha gettato le ipotesi alla base di questo studio. La linearità nella rappresentazione delle magnitudo numeriche al pre-test potrebbe predire l'apprendimento dell'aritmetica in quanto, bambini con una rappresentazione lineare attivano intervalli relativamente stretti di risposta, rispetto a coloro che possiedono una rappresentazione logaritmica, che fornisce invece risposte più plausibili. Il rapporto tra linearità e apprendimento dell'aritmetica è presente al di là della relazione con le altre variabili specifiche descritte. Inoltre i bambini nelle due situazioni di pre-test, a cui sono state fornite informazioni precise sulle magnitudo numeriche, potrebbero mostrare un apprendimento maggiore per le somme corrette e un miglioramento nella discrepanza tra la loro risposta e la risposta corretta, diversamente dai bambini a cui queste informazioni non sono state fornite. Infine, i bambini che generano stime proprie dei valori di addendi e somme mostrerebbero un miglioramento maggiore nella conoscenza di problemi di addizione rispetto ai bambini che non generano queste stime.

Per quanto riguarda il compito di stima della linea numerica, sono state presentate ai bambini, su un computer, delle linee numeriche delimitate dallo 0 e dal 100 e in alto nello schermo un numero da 1 a 99. Il bambino doveva cliccare sulla linea, nel punto in cui riteneva potesse collocarsi il numero che appariva sulla parte alta dello schermo. Per valorizzare l'abilità di discriminazione tra pattern di stima lineare e logaritmica sono stati sovra campionati i numeri all'inizio dell'intervallo, includendo quattro numeri per ogni decina al di sotto del numero 30 e due numeri per ogni decina successiva. I 26 numeri

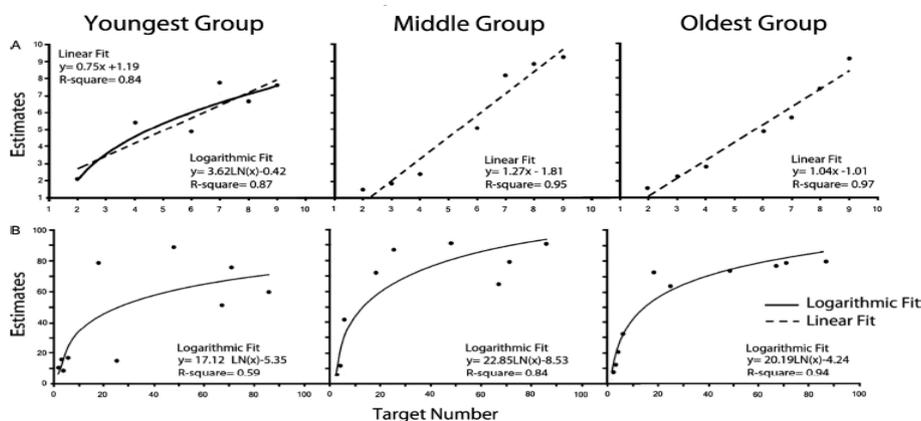
presentati erano: 2, 3, 6, 7, 11, 14, 15, 19, 21, 23, 24, 28, 32, 36, 44, 47, 51, 58, 63, 69, 72, 76, 84, 87, 91, 98.

I risultati dello studio, anche per quanto riguarda gli altri compiti, supportano tre delle ipotesi preformulate. Infatti, la stima della linea numerica dei bambini correla positivamente con le loro pregresse conoscenze dell'addizione e il livello di linearità stimata al pre-test era predittiva dell'apprendimento di risposte per problemi di addizione nuovi. Inoltre, fornire rappresentazioni visive accurate delle magnitudo di addendi e somme aumenta l'apprendimento di risposte per nuovi problemi rispetto a semplici presentazioni di problemi e risposte. L'unico risultato contrario alle aspettative è relativo al fatto che bambini che generano rappresentazioni proprie non hanno miglioramenti nell'apprendimento anzi, questo può interferire. I risultati attuali indicano che le rappresentazioni delle magnitudo numeriche non solo correlano positivamente con una varietà di tipi di conoscenza numerica, ma sono anche predittive del successo nell'acquisizione di nuove informazioni numeriche, in particolare, le risposte a problemi aritmetici. Diversi studi hanno sostenuto che “strategie di backup”, come contare con le dita, fanno dell'aritmetica non un'attività meccanica, come si crede, ma un'attività significativa (Siegler e Booth, 2008). E' stato proposto che il “senso del numero” sia basato su un duplice sistema centrale: un *sistema per i numeri piccoli*, specifico per numerosità fino a 3 e un *sistema approssimativo*, specifico per la rappresentazione di numerosità maggiori. Quest'ultimo codifica le numerosità come grandezze analogiche, solitamente attraverso distribuzioni sovrapposte di attivazioni, su una linea numerica mentale logaritmicamente compressa, il cui aumento di precisione è strettamente correlato all'apprendimento della matematica. In un recente studio, è stata valutata l'abilità dei bambini nel fornire stime affidabili già a 3 anni e mezzo per spiegare ulteriormente la tendenza evolutiva che porta allo svilupparsi di una rappresentazione lineare formale dei numeri. Il passaggio da logaritmico a lineare è ormai fortemente associato agli intervalli 0-100 e 0-1000, ma non quando il range numerico è ristretto a unità o decine, come osservato in uno studio di Whyte e Bull (2008) sul posizionamento su linee numeriche 0-10. Nello studio di Berteletti, Zorzi e collaboratori (2010), condotto su bambini di scuola d'infanzia sono stati somministrati intervalli 0-100 (come quelli utilizzati da Siegler e Booth nel 2004) e intervalli più piccoli da 1-10 poiché ritenuti più familiari per i bambini più piccoli. Lo zero è stato escluso poiché tale concetto avviene successivamente rispetto all'apprendimento delle sequenze di conteggio a partenza dal numero 1. In una seconda parte dell'esperimento è stato testato un grande campione di bambini, sostituendo

l'intervallo più grande con un nuovo intervallo 1-20. Osservando il passaggio da logaritmico a lineare in questi due intervalli più piccoli si voleva dimostrare la diffusione di rappresentazioni logaritmiche anche all'interno di range numerici più piccoli. I bambini sono stati anche testati anche per valutare la relazione tra conoscenza numerica e abilità di stima con una semplice operazione di denominazione di cifre che si è dimostrata essere un forte predittore per altri compiti numerici.

Nel primo esperimento sono stati utilizzati fogli di carta A4 con, stampate a centro, linee di 25 cm le cui estremità erano delimitate da una parte dal numero 1 o 0 e dall'altra dal numero 10 o 100. Il numero da posizionare era mostrato sul lato sinistro superiore del foglio. I numeri, ad esclusione del 1, del 5 e del 10 erano: 2, 3, 4, 6, 18, 25, 48, 67, 71, 86. Nel secondo esperimento la procedura era identica ma l'intervallo 1-100 era stato sostituito dall'intervallo 1-20 con i numeri: 2, 4, 6, 7, 13, 15, 16, 18. E' stato chiesto ai bambini di contare con le dita, fino a 10 e ordinare numeri e puntini (presentati su carte) da 1 a 5.

Lo studio ha dimostrato che la comprensione di come i numeri sono disposti nello spazio si sviluppa molto prima dell'inizio dell'istruzione formale. I bambini in età prescolare presentano un posizionamento logaritmico quando si confrontano con intervalli 0-100 così come bambini più piccoli in intervalli 1-10. Al contrario bambini più grandi presentano un posizionamento lineare confrontandosi con intervalli 1-10 a loro più familiari. Inoltre, nell'intervallo 1-20, i bambini più piccoli presentano un posizionamento logaritmico rispetto agli altri due gruppi, che hanno mostrato alcune abilità di tipo lineare. Pertanto, l'uso di una strategia logaritmica, prima di una lineare, sembra obbligatoria anche per piccoli range numerici. La dissociazione tra intervalli piccoli e grandi è coerente con i risultati di Siegler e collaboratori e rivela la co-presenza di molteplici rappresentazioni spaziali per i numeri (Berteletti, Lucangeli, Piazza, Dehaene e Zorzi, 2010).



**Figura 2.4:** Stime di linea numerica: analisi con modello "best-fitting" (Berteletti, Lucangeli, Piazza, Dehaene e Zorzi, 2010).

### ***2.3.3 Elaborazione olistica contro scomposizione di numeri a due cifre***

In una serie di studi, Nuerk e colleghi hanno osservato che mettendo a confronto numeri a due cifre e numeri ad una cifra, le decine e le unità sono esaminate separatamente e in parallelo (Moeller, Fischer, Nuerk, & Willmes, 2009; Moeller, Nuerk, & Willmes, in press; Nuerk, Weger, & Willmes, 2002a, 2004b, 2005; Nuerk et al., 2001; Ratinckx, Nuerk, van Dijck, & Willmes, 2006). In questi esperimenti chiesero ai partecipanti di indicare il numero più grande in una coppia di numeri a due cifre. Ogni coppia era unità-decina compatibile o unità-decina incompatibile (es. 45 e 78 sono compatibili e 43 e 78 sono incompatibili). I risultati indicano che, indipendentemente dal modo di presentazione e dal formato, i partecipanti erano più lenti e facevano più errori con le coppie di numeri incompatibili, rispetto alle coppie compatibili anche se la distanza complessiva era uguale tra i rispettivi gruppi di item. Inoltre, le prove per il processo di scomposizione di decine ed unità sono state trovate anche in altri compiti.

Concludendo, ci sono ampie evidenze a supporto del fatto che i numeri a cifra multipla sono elaborati attraverso una modalità di scomposizione in differenti compiti. Molto importante è il fatto che questo processo di scomposizione di decine ed unità è stato già osservato in bambini di scuola elementare dalla seconda in poi (Nuerk, 2004a).

### ***2.3.4 Una spiegazione alternativa del passaggio da una rappresentazione logaritmica ad una lineare nei Number Line Task***

Sulla base dei risultati discussi fino ad ora sui processi di scomposizione di decine ed unità, gli autori hanno precedentemente indicato che le difficoltà di bambini piccoli o discalculici possono anche essere dovuti ad un deficit di integrazione di decine ed unità entro una coerente rappresentazione di numeri a due cifre (Kaufmann & Nuerk, 2005; Nuerk et al., 2004a). L'ultimo postulato è coerente con la proposta di Siegler e Opfer (2003), che ha sostenuto come le difficoltà dei bambini a stimare un compito di linea numerica può essere dovuto ad una errata comprensione del sistema decimale.

Nel compito di linea numerica, il comportamento di bambini più grandi e adulti è descritto meglio da un modello lineare. Per numeri ad una e a due cifre, il modello lineare afferma che gli adulti considerano la distanza da 0 a 60 dieci volte più grande di quella tra 0 e 6 perché questo è un attributo del sistema numerico Arabo in base 10. La comprensione

e il successo nell'applicazione del sistema numerico Arabo è necessario per stimare correttamente la grandezza di un determinato numero in un compito di linea numerica perché gli intervalli sulla linea numerica dovrebbero essere linearmente equidistanti; per esempio, l'intervallo tra 0 e 60 deve essere dieci volte più grande dell'intervallo tra 0 e 6.

Comunque, i bambini più grandi e/o gli adulti possono avere imparato ad applicare questa relazione lineare decimale. Questo significa necessariamente che essi rappresentano le grandezze numeriche in questo modo? Forse no. Nell'analisi di regressione dei dati di confronto di numeri a due cifre, il valore beta della distanze lineare tra decine, non è dieci volte più grande rispetto al valore beta della distanze lineare tra unità. Infatti, quando si analizzano nuovamente i dati di Nuerk (2001) inserendo solo i predittori lineari di distanze tra decine ed unità, il valore beta per distanze lineari di decina era solo 4,39 volte più grande rispetto a quello di distanza per unità. Questi risultati aprono la possibilità che anche negli adulti le decine non sono rappresentate come dieci volte più grandi delle unità. Tuttavia, gli adulti possono aver imparato a superare questo bias rappresentazionale quando risolvono compiti numerici che richiedono l'elaborazione di informazioni sulla posizione del numero. Ma come fanno i bambini ad eseguire i compiti di linea numerica se ancora non hanno imparato a superare questo bias rappresentazionale?

Come conseguenza del loro bias rappresentazionale, i bambini possono sovrastimare gli intervalli numerici entro il range di numeri ad una cifra sulla linea numerica (es. 0-6), rispetto agli intervalli numerici dieci volte più grande degli intervalli tra i corrispondenti numeri a due cifre (es. 0-60). Così, quando la dimensione relativa di intervalli di numeri ad una cifra è relativamente sovrastimata rispetto a quella di intervalli di numeri a due cifre, la posizione percepita dei numeri ad una cifra sulla linea numerica può essere sovrastimata (es. anche lo spostamento verso destra). Quando le relative dimensioni degli intervalli di numeri a due cifre sono sottostimate, la distanza sarebbe sottostimata. Considerati nel loro insieme, ci si aspetterebbe una slope lineare molto inclinata relativa ai numeri ad una cifra e una slope lineare piatta relativa ai numeri a due cifre. Comunque, questi dati originati da due segmenti lineari possono essere rappresentati molto bene anche da una curva logaritmica. Ad esempio, posso assumere che un bambino rappresenta numeri ad una e a due cifre separatamente ed in modo lineare. Quando assumiamo ulteriormente che i bambini sono perfettamente capaci di segnare i numeri in un compito di linea numerica, l'adattamento della funzione logaritmica dovrebbe spiegare il 97% della varianza, anche se le ipotesi in questo esempio sono esclusivamente lineari. Così, anche un adattamento logaritmico molto buono non implica necessariamente che la rappresentazione sottostante è

logaritmica; infatti, una buona misura logaritmica potrebbe anche essere prodotta da due rappresentazioni lineari. È interessante notare che l'adattamento della stima logaritmica e il valore di  $R^2$  riportato nell'ultimo studio di Opfer e Siegler (2007) sono quasi identici.

In un recente studio, Elbersbach e colleghi (2008) hanno riportato altre evidenze contro l'idea che la performance di stima numerica dei bambini piccoli sia interpretabile in base ad una rappresentazione logaritmica della magnitudo numerica. Utilizzando un compito di linea numerica simile a quello di Siegler e colleghi (Booth & Siegler, 2006; Siegler & Booth, 2004), gli autori mostrano che un modello di regressione lineare segmentato fornisce un'interpretazione migliore del modello logaritmico. In accordo con Elbersbach e colleghi (2008), il punto di interruzione tra due segmenti lineari del modello è stato associato alla familiarità dei bambini con i numeri in compiti di calcolo. Questo implica che i bambini discriminano con successo i numeri entro il range. D'altra parte, la slope lineare piatta indica che le loro abilità di discriminazione diminuiscono quando elaborano numeri meno familiari. Così, questi autori sono stati i primi a mettere in discussione l'ipotesi di un modello logaritmico che sia il più adeguato per descrivere le caratteristiche dei dati normalmente osservati. In tal modo, questi studi hanno dato la possibilità di discutere interpretazioni controverse dei dati della linea numerica. Moeller e Nuerk (2009) suggeriscono che due rappresentazioni lineari separate per numeri ad una e a due cifre possono esistere nei bambini piccoli e che inizialmente l'integrazione di queste due rappresentazioni nella struttura del sistema numerico arabo, non sono completamente padroneggiate. Per testare questa ipotesi è stato utilizzato un campione di più di 120 alunni di prima elementare, è osservato che il modello a doppia lineare è costantemente l'indice migliore. Gli autori concludono che invece di assumere una trasformazione da codifica logaritmica a lineare, le differenze nelle prestazioni potrebbero anche essere rappresentate da un miglioramento nell'integrazione di decine e unità nel sistema numerico arabo.

## III Capitolo

### **La Linea mentale dei Numeri (MNL) non ha una organizzazione sinistra/destra intrinseca: evidenza dall'assenza di correlazione tra bisezione di linee visive e bisezione di intervalli numerici in soggetti adulti.**

#### ***3.1 Introduzione***

I numeri sono spesso rappresentati spazialmente come posizionati lungo una linea numerica mentale.

In uno studio di Gobel et al. (2006) è stato evidenziato come, pazienti con eminegligenza visuo-spaziale sinistra (neglect), in genere dopo un danno al lobo parietale destro, mostrano un bias sistematico verso i numeri più grandi quando gli viene chiesto di bisecare un intervallo numerico. Questa è stata considerata come ulteriore prova a sostegno dell'esistenza di una rappresentazione spaziale dei numeri, simile ad una linea numerica mentale con i numeri piccoli rappresentati a sinistra e i più grandi a destra. In studi precedenti, sono stati indotti in soggetti sani, deficit controlaterali del neglect in bisezioni di linee fisiche con stimolazione magnetica transcranica (rTMS) nel lobo parietale posteriore destro. In particolare, in tale studio è stato somministrato un protocollo di stimolazione rTMS su aree parietali e occipitali in soggetti sani impegnati in un compito di bisezione di intervalli numerici, al fine di indagare le caratteristiche della rappresentazione spaziale dei numeri. Ai soggetti veniva chiesto di indicare il punto medio di una serie di intervalli numerici senza eseguire calcoli mentali. Nei trials di controllo il comportamento dei soggetti era simile a prestazioni riportate in compiti di bisezione di linee fisiche. I soggetti sottostimavano il punto medio dell'intervallo numerico. La stimolazione magnetica transcranica ripetitiva produceva sintomi simili all'eminegligenza per bisezioni numeriche quando applicata sul lato destro della corteccia parietale posteriore (PPC destra). Questa provocava, nella PPC destra un significativo shift a destra del punto medio

dell'intervallo numerico, mentre nell'occipitale non aveva alcun effetto sulle prestazioni di bisezione. Questo studio fornisce dunque ulteriori prove a sostegno del fatto che i soggetti utilizzano rappresentazioni spaziali, probabilmente simili ad una linea numerica mentale, in attività di elaborazione numerica di base. Inoltre, è stato dimostrato che la corteccia parietale posteriore destra ha un ruolo cruciale nella rappresentazione spaziale dei numeri.

In uno studio, Longo e Lourenco (2007) hanno voluto analizzare se la direzionalità dell'attenzione spaziale opera in modo simile nello spazio fisico e numerico. Ai partecipanti veniva chiesto di bisecare una linea fisica, indicandone il centro, e di stimare mentalmente quale fosse il numero centrale di un intervallo numerico i cui estremi venivano presentati visivamente, uno a sinistra ed uno a destra di una piccola linea orizzontale. I partecipanti sani in genere mostrano un lieve bias a sinistra (pseudoneglect, Jewell & McCourt, 2000) nei compiti di bisezione di linee fisiche. Nel presente studio, lo pseudoneglect è stato osservato anche nella bisezione di intervalli numerici e, soprattutto, è stato maggiore per i partecipanti che hanno mostrato un forte pseudoneglect nella bisezione della linea fisica. L'obiettivo primario di questo studio era di esaminare la relazione tra direzione dell'attenzione nello spazio fisico e numerico. A tal fine, i partecipanti dovevano bisecare entrambe le linee fisiche e mentali. Secondo gli autori, se i bias osservati in questi compiti riflettevano meccanismi simili, i partecipanti, che bisecano più a sinistra sulla linea fisica, avrebbero dovuto mostrare un bias più "a sinistra" (cioè, verso i numeri più piccoli) anche sulla bisezione mentale numerica. In questo studio, coppie di numeri venivano rappresentate con il numero più piccolo a sinistra (Esperimenti 1 e 2) o a destra (Esperimento 2) del numero più grande. Un obiettivo secondario dello studio era quello di indagare l'organizzazione spaziale della linea numerica mentale, in particolare, se si trattasse di una compressione non lineare. Se c'è compressione, lo pseudoneglect dovrebbe aumentare con la magnitudo numerica, in quanto, i numeri diventano più grandi, se lineare il bias dovrebbe essere indipendente dalla grandezza numerica.

Nel primo esperimento. I partecipanti dovevano bisecare le linee facendo un segno nel centro percepito. Le coppie di numeri e le linee sono state stampate su fogli di carta bianca standard (8,5 pollici x 11 pollici). I partecipanti "bisecavano" le coppie di numeri scrivendo il numero stimato a metà strada tra quelli presentati. Era stato detto loro di non calcolare esplicitamente la risposta, e di essere il più veloci possibili, utilizzando qualsiasi numero potesse sembrare loro opportuno, ma non veniva dato un limite di tempo. Le coppie di numeri erano centrate sulla pagina, il numero più piccolo sulla sinistra, separata da una piccola linea orizzontale (2,3 cm) sul quale i partecipanti scrivevano la risposta; sono state

selezionate in modo casuale 80 coppie di numeri compresi tra 11 e 99. I numeri più piccoli variavano da 10 a 80 ( $M = 35.78$ ,  $DS = 21,38$ ), e i numeri più grandi variavano da 21-98 ( $M = 65.24$ ,  $DS = 22,73$ ); la differenza tra i due numeri variava tra 2 e 78 ( $M = 29.46$ ,  $DS = 19.45$ ). Non c'era alcuna correlazione tra la media dei numeri e la dimensione dell'intervallo,  $r(79) = 0,077$ .

Nel secondo esperimento, i partecipanti bisecavano 160 coppie di numeri, la metà delle quali aveva il numero più piccolo a sinistra, l'altra metà quello più grande. L'ordine di prove è stato randomizzato. Poiché questo esperimento è stato progettato per controllare la relazione spaziale tra i numeri più piccoli e quelli più grandi, non vi era alcuna linea fisica di bisezione. Le coppie di numeri sono state selezionate come nell'esperimento 1, tranne che sono state escluse le coppie con intervalli al di sotto del dieci, a causa del *ceiling effect* nelle prestazioni dell'esperimento precedente. I numeri più piccoli variavano da 10 a 80 ( $M = 35.43$ ,  $DS = 19,22$ ), ed i numeri più grandi andavano 24-99 ( $M = 71.64$ ,  $DS = 19.44$ ), la differenza tra i due numeri variavano 11-87 ( $M = 36.22$ ,  $DS = 19.22$ ). anche in questo caso non c'era alcuna correlazione tra la media dei numeri e la dimensione dell'intervallo tra loro,  $r(159) = .013$ .

Questo sembrerebbe suggerire che le asimmetrie emisferiche di attenzione spaziale funzionino in modo simile nello spazio fisico e numerico. Inoltre, l'aumento del bias della media dei numeri, è coerente con la probabilità che la rappresentazione spaziale della linea mentale numerica subisca una compressione di tipo non lineare, con coppie di numeri che si trovano più vicini con l'aumentare della magnitudo.

La scoperta che, in un compito che richiede la scelta tra il premere un tasto a sinistra e uno a destra, i lettori da sinistra a destra sono più veloci a decidere con il tasto sinistro che un numero è minore di 5 (o che un numero minore di 5 è pari o dispari) e con il tasto destro che un numero è maggiore di 5 (o che un numero maggiore di 5 è pari o dispari; Spatial-Numerical Association of Response Codes = SNARC), ha portato alla convinzione diffusa che le magnitudo numeriche abbiano un'intrinseca rappresentazione spaziale conforme agli stili di lettura culturali. In tal modo, nelle culture occidentali i numeri piccoli sono rappresentati alla sinistra di quelli grandi su una linea mentale numerica (MNL). La forza e l'affidabilità dell'effetto SNARC, ha favorito lo sviluppo di diverse linee d'indagine che sfruttano ed esplorano i collegamenti funzionali ed anatomici tra i meccanismi alla base della rappresentazione delle grandezze numeriche e di quelle alla base della rappresentazione dello spazio e dell'orientamento dell'attenzione spaziale. In ambito neuropsicologico, è stato inizialmente suggerito che i pazienti con lesione cerebrale destra

(RBD) che presentano un deficit di attenzione spaziale nel lato contro lesionale (neglect spaziale sinistro), presentano un deficit simile anche quando si chiede loro di indicare mentalmente, senza effettuare calcolo formale, il punto medio dell'intervallo numerico presentato verbalmente da un esaminatore. È stato riscontrato che tali pazienti mostrano uno spostamento del punto medio soggettivo di intervalli da 5, 7 e 9 unità verso numeri più grandi rispetto al punto medio reale (es. punto medio tra 1 e 9 = 7 invece di 5), proprio come se non facessero attenzione ai numeri più piccoli sul lato sinistro dell'intervallo numerico. La somiglianza fenomenologica tra deficit spaziali e numerici, è stata resa ancora più interessante dalla constatazione che esiste una tendenza paradossale verso i numeri più piccoli rispetto al reale punto medio, cioè presumibilmente alla sinistra del punto centrale, osservata nella bisezione numerica mentale degli intervalli da 3 unità, proprio come osservato spesso nelle bisezioni di linee orizzontali visive molto brevi (i.e. "cross-over" effect; Doricchi et al., 2005).

Più di recente, in due studi indipendenti (entrambi di Aiello et al., 2012) si è invece osservato che i pazienti RBD che presentano un bias patologico verso i numeri più grandi rispetto al punto medio reale nella bisezione di intervalli numerici, mostrano anche un bias patologico equivalente quando gli stessi intervalli sono trattati come intervalli di tempo su un orologio mentale, cioè quando l'organizzazione spaziale mentale di intervalli è invertita e gli stimoli numerici temporali maggiori sono rappresentati sul lato sinistro e non su quello destro. Questi risultati hanno suggerito che un danno cerebrale destro influenzi la rappresentazione approssimativa di grandezze numeriche piccole, creando così un corrispondente bias verso grandezze maggiori, indipendentemente dalla mappatura mentale a sinistra o a destra di grandezze minori. Questa ipotesi ha trovato un primo supporto in uno studio conseguente dove sono stati riesaminati i dati di un campione di 77 RBD. Questo studio ha dimostrato che, indipendentemente dal neglect spaziale, il bias patologico di bisezione mentale degli intervalli numerici è presente solo per intervalli appartenenti alla prima decina, vale a dire gli intervalli che includono le più piccole grandezze numeriche, mentre è assente per intervalli appartenenti alla seconda e terza decina che includono grandezze numeriche maggiori. Tutti questi risultati sottolineano come il bias patologico di bisezione di intervalli numerici negli RBD sia sistematico, non occasionale e non correlato ad un equivalente bias dell'attenzione spaziale.

Tuttavia, in contrasto con i risultati della bisezione verbale di intervalli numerici, studi neuropsicologici hanno evidenziato come le prestazioni dei pazienti con neglect in compiti di *magnitude comparison*-SNARC che richiedono la codifica, l'associazione e la selezione

di risposte manuali sinistra vs destra con grandezze numeriche, hanno fornito risultati più omogenei. Questi studi dimostrano come i pazienti con neglect mantengano un effetto SNARC insieme ad una chiara asimmetria di tempi di reazione (RT) per i numeri immediatamente adiacenti al numero di riferimento: i RT sono più veloci per i numeri superiori a quello di riferimento (ad esempio 6 quando il riferimento è 5, 8 quando il riferimento è 7) e più lenti per i numeri inferiori (ad esempio 4 quando il riferimento è 5, 6 quando il riferimento è 7). Questi risultati suggeriscono un chiaro bias spaziale patologico con l'elaborazione rallentata per i numeri posti a sinistra del numero di riferimento. È stato recentemente sottolineato (Aiello et al., 2012) che la dissociazione tra neglect spaziale sinistro e il bias nel compito di bisezione verbale di intervalli numerici e, al contrario, l'associazione tra neglect e performance asimmetrica di RT nei compiti di *magnitude comparison*-SNARC, dove si richiede la selezione manuale di risposte sinistra vs destra, potrebbe fornire un indizio molto importante per interpretare i meccanismi e le condizioni di setting sperimentali in una serie di compiti che danno luogo all'utilizzo di una MNL organizzata spazialmente. È stato proposto (Aiello et al., 2012) che questi risultati divergenti sottolineano che i numeri sono codificati spazialmente quando vi è una codifica della risposta sinistra-destra, come nel compito SNARC, o, eventualmente, la disposizione spaziale sinistra-destra del materiale numerico da trattare, che innescano l'utilizzo di strategie da adottare per un'organizzazione equivalente sinistra-destra di magnitudo numeriche nello spazio mentale, in modo che, un bias patologico spaziale-attentivo casualmente entra in gioco nelle performance dei pazienti con neglect spaziale sinistro. La disposizione mentale dei numeri da sinistra a destra è di facile recupero in quanto intrinseca alle abitudini di lettura che vengono rafforzate dalla formazione all'uso del calcolo "esatto" con l'organizzazione sintattica da sinistra a destra. La stessa disposizione non è evidentemente recuperata ed applicata quando, come nel caso del compito di bisezione mentale di intervalli numerici, il calcolo "approssimativo" della risposta è formulato verbalmente, quindi non richieda alcuna organizzazione percettiva sinistra-destra del materiale numerico da utilizzare, e non deve essere fatta nessuna scelta sinistra vs destra per selezionare la risposta.

## ***3.2 Esperimento***

In questo studio abbiamo cercato di indagare ulteriormente questi andamenti esaminando se i bias di bisezione mostrati dai soggetti sani in bisezione di linee visive orizzontali di diversa lunghezza, siano sistematicamente associati a bias equivalenti di bisezione mentale degli intervalli numerici di diversa lunghezza presentati verbalmente. Abbiamo analizzato i risultati dello studio precedentemente descritto, eseguito in soggetti sani da Longo e Laurenci (2007). Come detto già in precedenza, questi autori hanno riscontrato una correlazione significativa tra il piccolo bias verso sinistra (cioè pseudoneglect), tipicamente osservato nella bisezione di linee visive in soggetti sani, e un bias simile in un compito di bisezione di intervalli numerici in cui gli estremi degli intervalli numerici venivano presentati visivamente, uno a sinistra e uno a destra di una breve linea orizzontale. Alla luce di tali dati, abbiamo ipotizzato che, se la disposizione spaziale da sinistra a destra fosse inerente alla grandezza numerica, dovremmo trovare una correlazione tra la performance in compiti di bisezione di linee ed intervalli numerici anche nel caso in cui gli intervalli numerici vengono presentati verbalmente senza, *cue* spaziali, rappresentate dagli estremi a sinistra e a destra di una linea orizzontale. Al contrario, se la disposizione mentale sinistra/destra di intervalli è innescata dalla disposizione spaziale visiva da sinistra a destra dei numeri che definiscono gli estremi dell'intervallo, non troveremo alcuna correlazione quando gli intervalli numerici sono presentati in modo puramente verbale.

### ***3.2.1 Campione***

Per questo studio sono stati utilizzati 90 soggetti sani di età compresa tra i 18 e i 30 anni (età media = 21,9a). Tutti i soggetti sono stati sottoposti ad una bisezione di intervalli numerici piccoli in una prima sessione. In una sessione successiva, 60 soggetti facenti parte dello stesso gruppo, hanno effettuato un compito di bisezione di intervalli grandi (range tra 16 e 64). Tutti i partecipanti hanno eseguito un compito di bisezione di linee orizzontali, di 2 cm, 10 cm e 20 cm.

### **3.2.2 Materiali e Metodo**

Abbiamo testato 90 soggetti normali adulti (età media = 21,9 anni). In una prima sessione, tutti i partecipanti hanno svolto un compito di bisezione manuale di linee visive orizzontali di 2, 10 e 20 cm (5 trials per lunghezza). Ogni linea era presentata al centro di un foglio A4. Le deviazioni verso destra dal centro della linea sono state codificate come positive e quelle verso sinistra come negative.

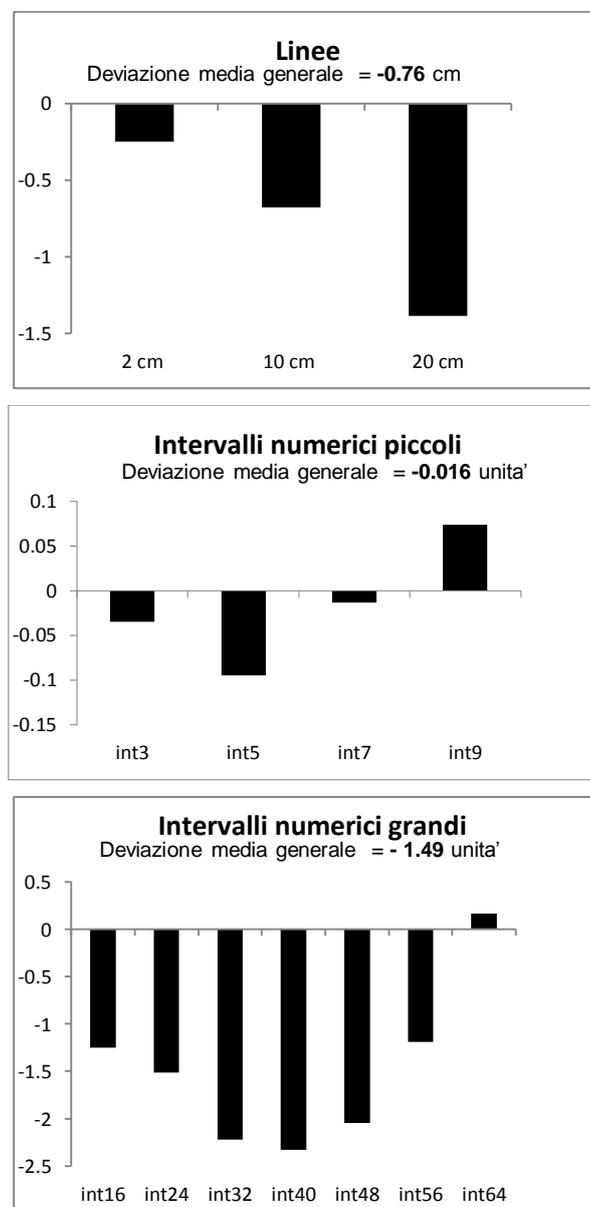
In sessioni successive e separate ai partecipanti è stato chiesto di bisecare mentalmente intervalli numerici piccoli di 3, 5, 7 e 9 unità (Zorzi et al., 2002) ed intervalli più ampi di 16, 24, 32, 40, 48, 56, e 64 unità (Longo et al., 2007). L'ordine di somministrazione del test con intervalli numerici piccoli o grandi, è stato controbilanciato tra i soggetti. 90 partecipanti hanno completato il compito con gli intervalli numerici piccoli e 60 quello con gli intervalli numerici grandi. Ogni coppia veniva presentata oralmente in due sessioni separate, forward (48 trials per gli intervalli con i numeri piccoli e 42 per quelli con i numeri grandi) e backward (stesso numero di trials). La consegna era quella di indicare quale fosse il numero che stava al centro tra i due della coppia, senza fare calcoli e senza utilizzare strategie, il più velocemente possibile.

### **3.2.3 Risultati**

In un primo momento abbiamo analizzato, per gli intervalli con i numeri piccoli, l'andamento del bias d'errore di bisezione in funzione della grandezza dell'intervallo indipendentemente dalla decina. Allo stesso modo, per gli intervalli con i numeri grandi, sono state eseguite delle analisi per indagare la lunghezza dell'intervallo indipendentemente dal punto di partenza dello stesso. Per ogni soggetto sono stati analizzati i dati relativi alle coppie per ogni singolo intervallo; in particolare, sono state calcolate le medie di tutti i soggetti per tutte le coppie di ogni intervallo, indipendentemente dalla posizione della coppia all'interno della decina. Su queste medie è stata calcolata un'ANOVA per posizione di ogni intervallo, da cui è risultata una differenza significativa per gli intervalli 16, 40, 48, 56 e 64. Tale effetto dimostra che, per questi intervalli, le coppie facenti parte della prima decina sono significativamente diverse da quelle delle altre decine. È stata fatta un'ANOVA mettendo a confronto le medie totali

degli intervalli indipendentemente dalla posizione. Da questa analisi è risultata una differenza significativa tra gli intervalli. Nello specifico l'intervallo da 64, che è l'unico positivo, risulta differente dagli altri;  $F_{(6,354)} = 10,374$ ;  $p = 0,0000$ . La stessa analisi è stata fatta sulle linee visive.

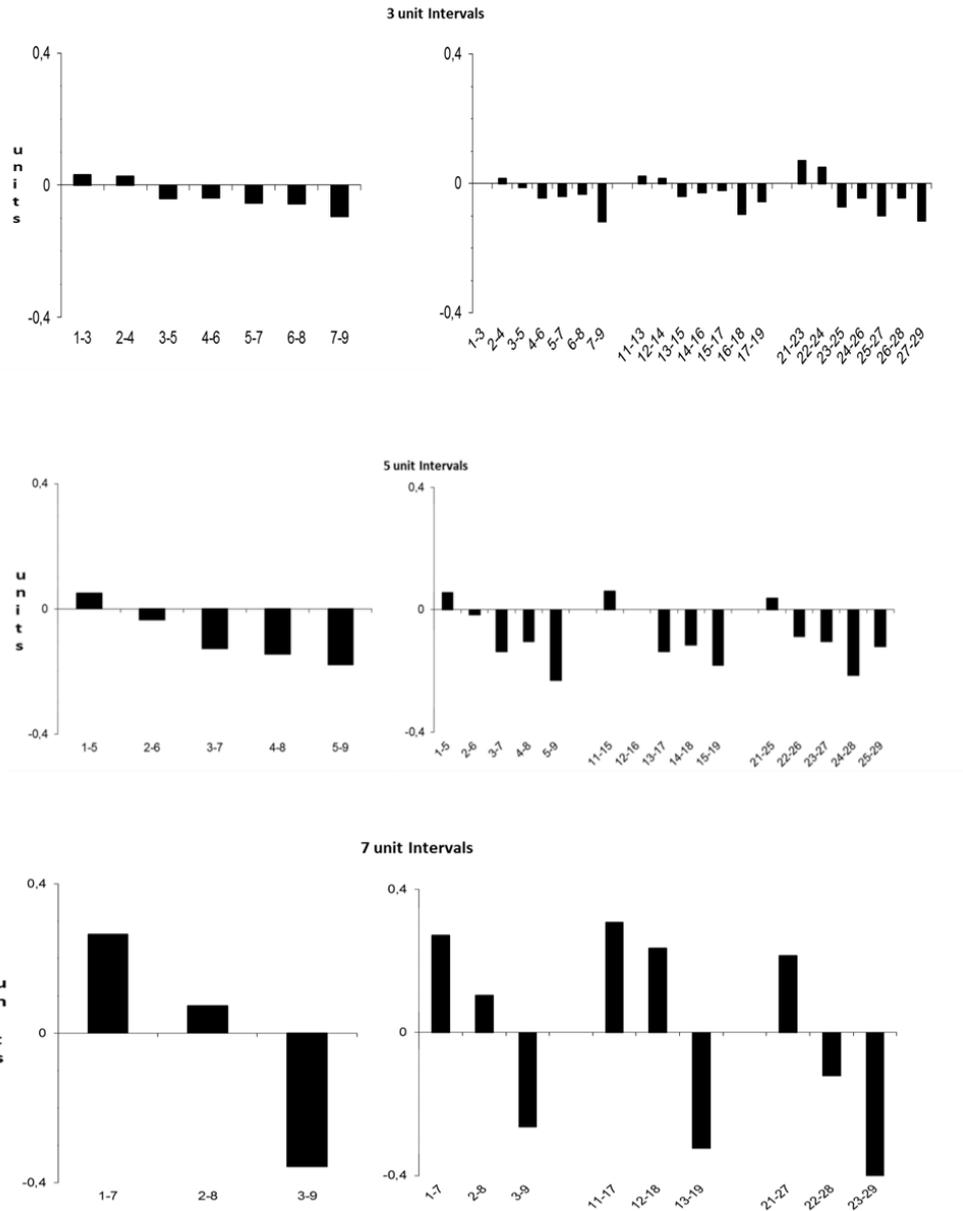
Queste analisi preliminari sono servite per verificare la presenza o meno dello pseudoneglect ed, in accordo con le osservazioni riportate in studi precedenti, abbiamo riscontrato l'effetto di "pseudoneglect" sia nel compito di bisezione di linee che nei compiti di bisezione mentale degli intervalli numerici.



*Fig. 3.1.* rappresentazione dello pseudoneglect sia nella bisezione di linee fisiche che nella bisezione di intervalli numerici

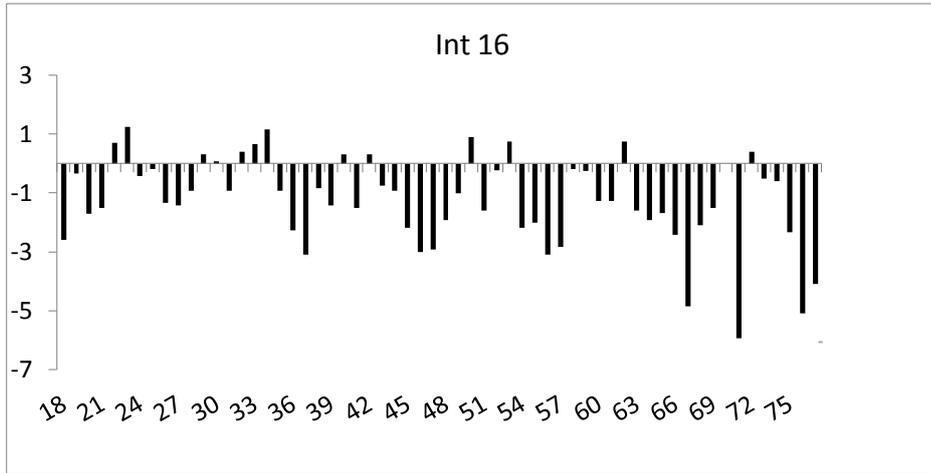
Successivamente, per gli intervalli con i numeri piccoli, abbiamo analizzato l'andamento dell'errore di bisezione, per ogni lunghezza di intervallo, indipendentemente dalla decina, quindi è stata fatta una media di tutti i soggetti per posizione della coppia, e ancora, sempre per ogni lunghezza di intervallo, l'analisi dell'errore di bisezione in funzione della posizione dell'intervallo lungo le decine. Queste analisi hanno confermato i dati ottenuti nello studio di Doricchi et al. (2009)

Inizialmente è stata fatta una ANOVA per ogni lunghezza di intervallo, mettendo a fattore la posizione dell'intervallo stesso, indipendentemente dalla decina di appartenenza. In tutti gli intervalli abbiamo riscontrato una significatività dell'effetto posizione; Int 3:  $F_{(1,6)} = 6.51$ ;  $p = 0.00$ . Int 5:  $F_{(1,4)} = 6.23$ ;  $p = 0.00$ . Int 7:  $F_{(1,2)} = 56.48$ ;  $p = 0.00$ . Successivamente abbiamo fatto un'ANOVA a misure ripetute mettendo a fattore la Posizione dell'intervallo e la Decina di appartenenza. Anche qui in tutti gli intervalli abbiamo ottenuto un effetto Posizione significativo. Per l'intervallo da 5 unità è risultata significativa anche l'interazione Decina x Posizione, mentre per l'intervallo da 7 unità è risultata significativa anche la Decina. Int 3: Posizione  $F_{(2,6)} = 6.47$ ;  $p = 0.00$ . Int 5: Posizione  $F_{(2,4)} = 10.43$ ;  $p = 0.00$ . Interazione  $F_{(12,8)} = 2.07$ ;  $p = 0.03$ . Int 7: Decina  $F_{(1,2)} = 8.37$ ;  $p = 0.00$ . Posizione  $F_{(2,2)} = 55.28$ ;  $p = 0.00$ .

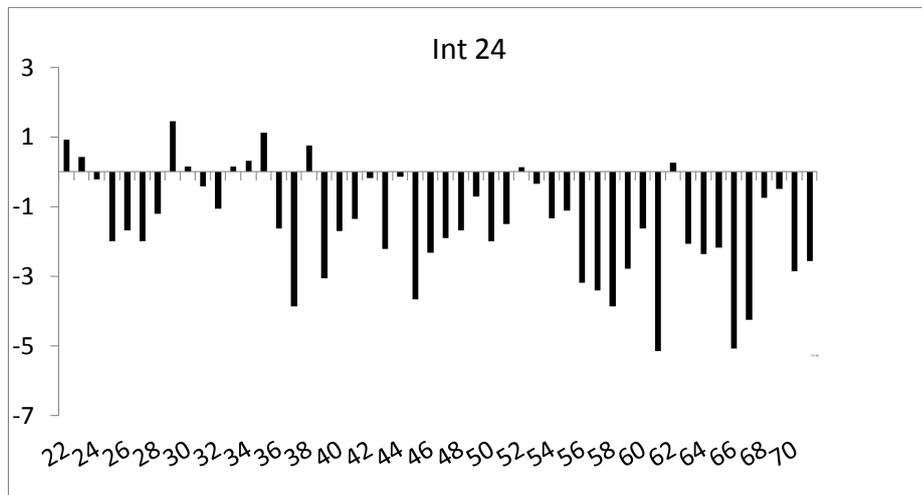


**Fig. 3.2.** *Andamento del bias d'errore nei tre intervalli indipendentemente dalla decina e nelle tre decine separate*

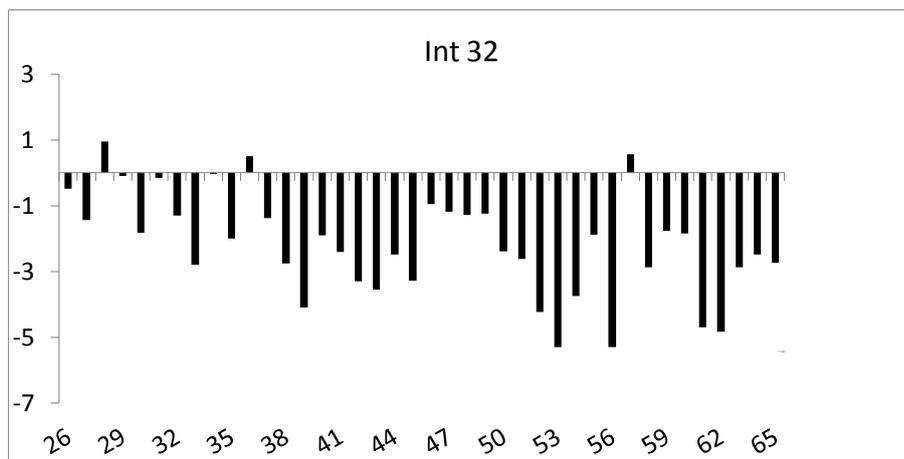
Per gli intervalli con i numeri grandi abbiamo ulteriormente analizzato la posizione dell'intervallo in funzione della lunghezza. Sono state calcolate le medie per ogni coppia di ogni decina per ogni intervallo. È stata indagata la correlazione tra il punto medio dei soggetti ed il punto medio effettivo di ogni coppia. Tale analisi ha rilevato una correlazione negativa per tutti gli intervalli tranne che per l'intervallo da 64.



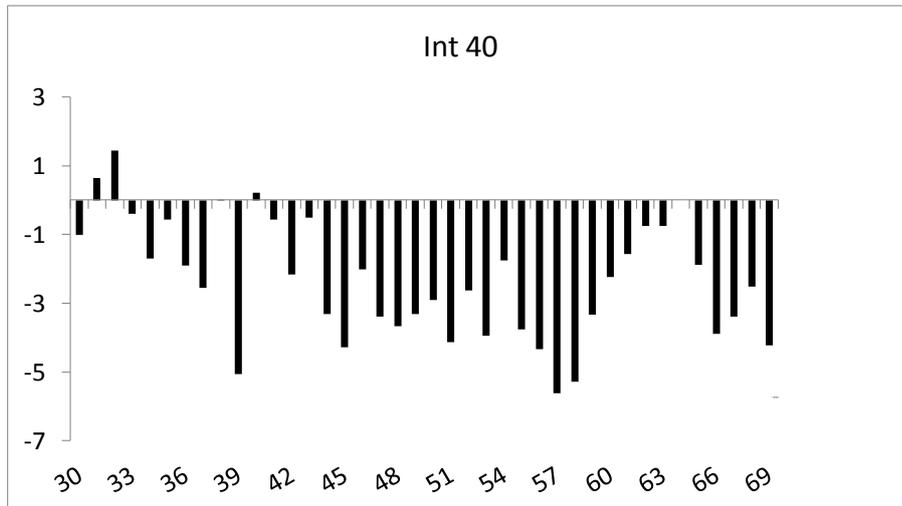
$r = -0.37; p = 0.003$



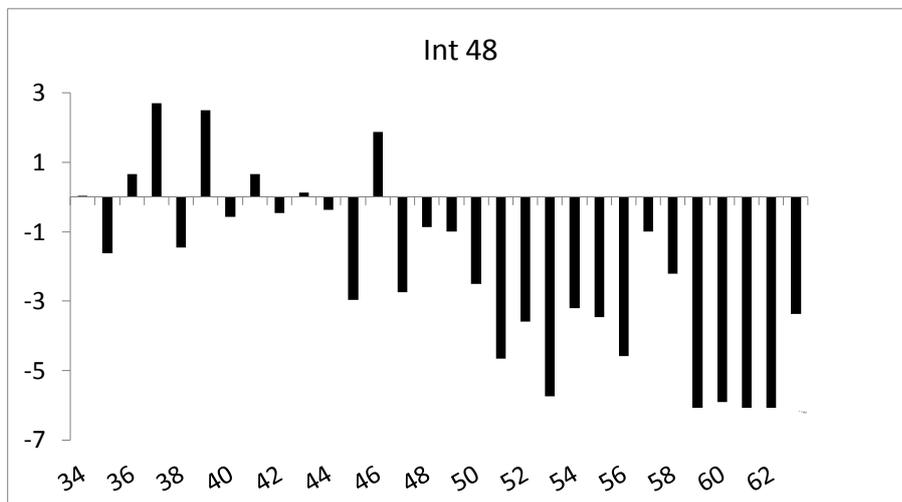
$r = -0.48; p = 0.00$



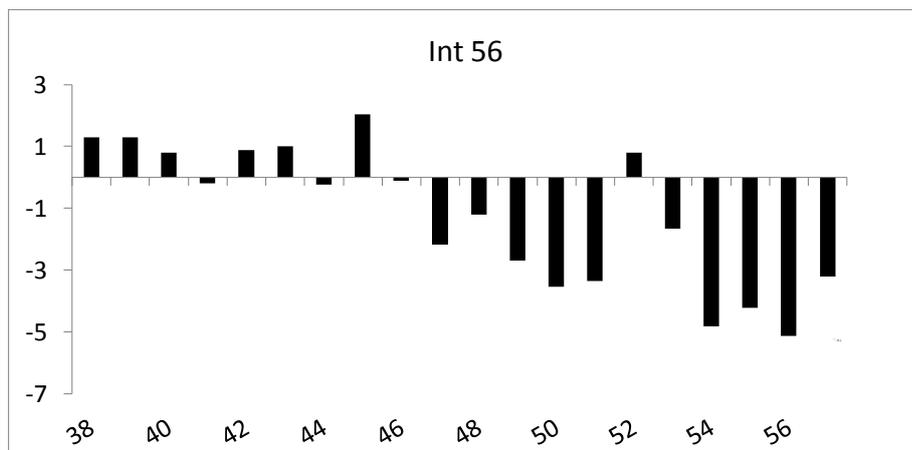
$r = -0.50; p = 0.001$



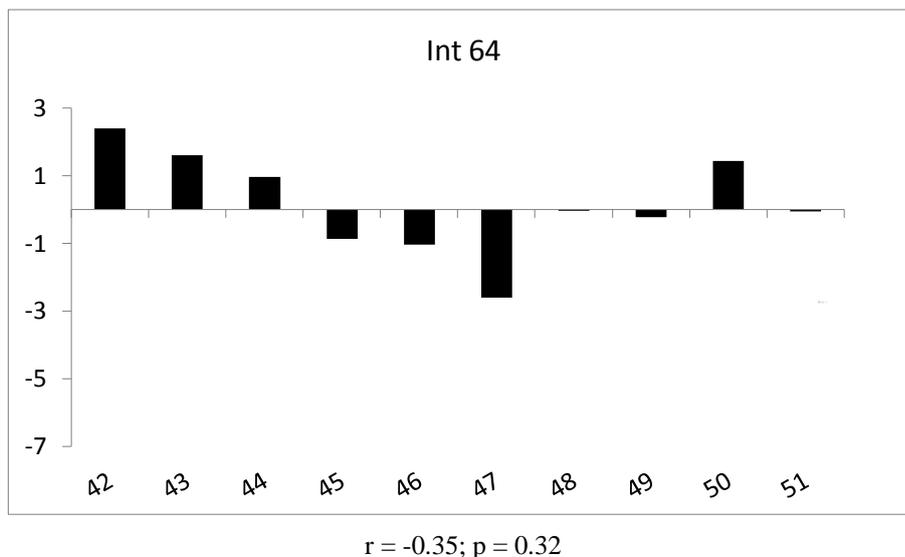
$r = -0.41; p = 0.008$



$r = -0.77; p = 0.00$

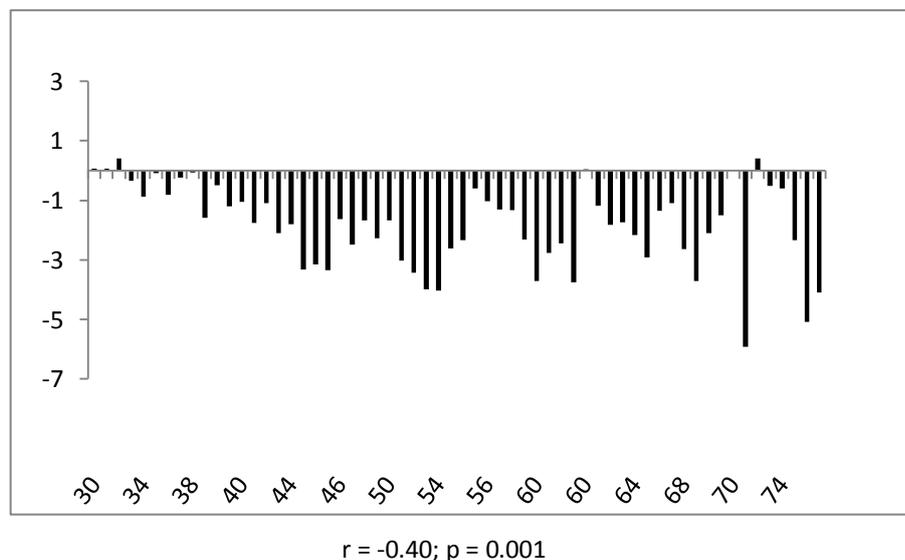


$r = -0.81; p = 0.00$



**Fig. 3.3.** Rappresentazione grafica della posizione dell'intervallo in funzione della grandezza

È stata fatta una ulteriore analisi correlando il bias medio d'errore di tutte le coppie aventi lo stesso numero iniziale con la media del punto medio effettivo delle stesse, indipendentemente dalla grandezza dell'intervallo (deviazione dal punto di inizio dell'intervallo, indipendentemente dalla lunghezza). È risultata una correlazione negativa.



**Fig. 3.4.** Rappresentazione grafica della posizione dell'intervallo indipendentemente dalla grandezza

A questo punto ci siamo preoccupati di verificare se in effetti ci fosse una correlazione tra gli errori di bisezione di linee e quelli di intervalli numerici.

Per quanto riguarda i numeri piccoli abbiamo fatto una correlazione tra i singoli intervalli numerici con le singole lunghezze di linee visive. Da questa analisi non abbiamo riscontrato alcuna correlazione significativa, ad eccezione di quella tra l'intervallo da 7

unità e la linea da 10 cm che, però, contrariamente alle predizioni formulabili sulla base dello studio precedente di Longo e Lourenco(2007) è risultata negativa.

Interval Length	Line Length		
	2 cm	10 cm	20 cm
Interval 3	-0,0635	0,0901	-0,0003
	p=,552	p=,398	p=,997
Interval 5	-0,0928	-0,0024	-0,1274
	p=,385	p=,982	p=,231
Interval 7	-0,1805	-0,2254	-0,1487
	p=,089	p=,033	p=,162
Interval 9	-0,093	-0,0566	-0,091
	p=,383	p=,596	p=,394
Slope	-0,0963	-0,1014	-0,0949
	p=,367	p=,342	p=,374

**r generale = -0.16; p= 0.124**

**Fig. 3.5.** Tabella delle correlazioni tra intervalli piccoli e linee

Inoltre abbiamo analizzato le stesse correlazioni separatamente nel campione di partecipanti che mostrava un forse (High) o un basso (Low) pseudoneglect nella bisezione delle linee visive orizzontali. In entrambi i campioni non è stata riscontrata alcuna correlazione significativa.

Correlazioni HIGH Num picc e linee Correl. marcate significative al liv. p < ,05000 44 (Eliminaz. casewise dati mancanti)					Correlazioni LOW -num picc e linee Correl. marcate significative al liv. p < ,05000 46 (Eliminaz. casewise dati mancanti)				
	CM2	CM10	CM20		CM2	CM10	CM20		
INT3	-0,0869	0,0303	-0,0137		-0,2271	0,0651	-0,168		
	p=,575	p=,845	p=,930		p=,129	p=,667	p=,264		
INT5	0,1484	0,1857	0,0098		-0,1503	0,1153	-0,046		
	p=,337	p=,227	p=,950		p=,319	p=,446	p=,762		
INT7	-0,1555	0,0037	0,1357		0,031	-0,206	-0,1027		
	p=,313	p=,981	p=,380		p=,838	p=,170	p=,497		
INT9	-0,1941	0,0955	0,0871		0,1756	0,0493	-0,0255		
	p=,207	p=,537	p=,574		p=,243	p=,745	p=,867		
SLOPE	-0,2038	0,0676	0,1049		0,2069	-0,0079	-0,0121		
	p=,184	p=,663	p=,498		p=,168	p=,958	p=,936		

**Fig. 3.6.** Tabella delle correlazioni tra intervalli piccoli e soggetti con High e Low pseudoneglect nella bisezione di linee visive

Per i numeri grandi, invece, abbiamo analizzato la correlazione generale tra la deviazione della bisezione mentale di intervalli numerici (  $X = -1.49$  unità) e la deviazione

della bisezione di linee visive (  $X = -0.76$  cm), anche qui non abbiamo riscontrato alcuna correlazione:  $r = 0.05$ ,  $P = 0.664$

Abbiamo ripetuto la stessa analisi per i gruppi di partecipanti con High e Low pseudoneglect e non abbiamo riscontrato alcuna correlazione significativa (**High Pseudoneglect:  $r = 0.19$ ,  $p = .309$ ; Low Pseudoneglect:  $r = 0.02$ ,  $p = 0.90$** ).

Al fine di ottenere un quadro più chiaro e dettagliato della possibile correlazione tra i due compiti abbiamo ripetuto tutte queste analisi prendendo in considerazione tutte le possibili combinazioni tra lunghezze di linee e lunghezze di intervalli numerici. Nel gruppo totale di partecipanti sono state riscontrate delle correlazioni di valore negativo tra la bisezione delle linee di 2 cm e la bisezione mentale degli intervalli da 32, 56 e 64 unità ed una correlazione positiva tra bisezione delle linee da 20 cm e la bisezione di intervalli numerici da 48 unità. Tutte le altre correlazioni non sono risultate significative (vedi tabella 3.7)

Correlazioni Num grandi e linee			
Correl. marcate significative al liv. $p < ,05000$			
60 (Eliminaz. casewise dati mancanti)			
	CM2	CM10	CM20
INT16	0.1131	0.2151	0.1247
	$p = ,390$	$p = ,099$	$p = ,342$
INT24	-0.1437	0.1372	0.1626
	$p = ,273$	$p = ,296$	$p = ,215$
INT32	<b>-0.3021</b>	0.0459	0.013
	<b><math>p = ,019</math></b>	$p = ,728$	$p = ,921$
INT40	-0.0452	0.164	0.0621
	$p = ,732$	$p = ,210$	$p = ,638$
INT48	-0.027	0.2203	<b>0.2664</b>
	$p = ,838$	$p = ,091$	<b><math>p = ,040</math></b>
INT56	<b>-0.258</b>	-0.0471	-0.0672
	<b><math>p = ,047</math></b>	$p = ,721$	$p = ,610$
INT64	<b>-0.2838</b>	-0.1748	-0.0256
	<b><math>p = ,028</math></b>	$p = ,182$	$p = ,846$

**Fig. 3.7.** Tabella delle correlazioni tra bisezione di linee e bisezione di intervalli con numeri grandi. In rosso sono riportati i valori significativi.

Abbiamo anche svolto l'analisi delle stesse correlazioni nel gruppo di partecipanti con High e Low pseudoneglect. Nel primo gruppo è risultata una correlazione negativa tra bisezione di linee da 2 cm e bisezione di intervalli numerici da 32 unità e tra bisezione di linee da 20 ed intervalli da 16 unità. Nel gruppo con basso pseudoneglect (Low) è risultata

una correlazione positiva tra la bisezione di linee da 10 cm ed intervalli da 32 unità ed una correlazione negativa tra bisezione di linee da 10 cm ed intervalli da 56 unità. (vedi tabella 3.8)

Correlazione High per int				Correlazione Low per int			
Correlazioni (nuovo.sta)				Correlazioni (nuovo.sta)			
Correl. marcate significative al liv. p < ,05000				Correl. marcate significative al liv. p < ,05000			
30 (Eliminaz. casewise dati mancanti)				30 (Eliminaz. casewise dati mancanti)			
	LINEA2	LINEA10	LINEA20		LINEA2	LINEA10	LINEA20
INT16	0.0738	-0.0671	<b>-0.4352</b>	INT16	-0.0342	0.2522	0.3183
	p=,698	p=,724	<b>p=,016</b>		p=,858	p=,179	p=,086
INT24	-0.1568	0.2738	0.1746	INT24	-0.2341	-0.0373	0.1448
	p=,408	p=,143	p=,356		p=,213	p=,845	p=,445
INT32	<b>-0.46</b>	-0.118	0.197	INT32	-0.128	<b>0.448</b>	0.0461
	<b>p=,011</b>	p=,535	p=,297		p=,500	<b>p=,013</b>	p=,809
INT40	-0.18	0.0784	-0.1267	INT40	-0.0294	0.1813	0.0957
	p=,341	p=,680	p=,505		p=,877	p=,338	p=,615
INT48	-0.3499	0.2815	0.17	INT48	0.1974	0.0011	0.31
	p=,058	p=,132	p=,369		p=,296	p=,996	p=,095
INT56	-0.2582	0.3516	0.0972	INT56	-0.233	<b>-0.4172</b>	-0.1234
	p=,168	p=,057	p=,609		p=,215	<b>p=,022</b>	p=,516
INT64	-0.2899	0.1606	0.3549	INT64	-0.1478	-0.3235	-0.0608
	p=,120	p=,397	p=,054		p=,436	p=,081	p=,750

**Fig. 3.8. Tabella delle correlazioni**

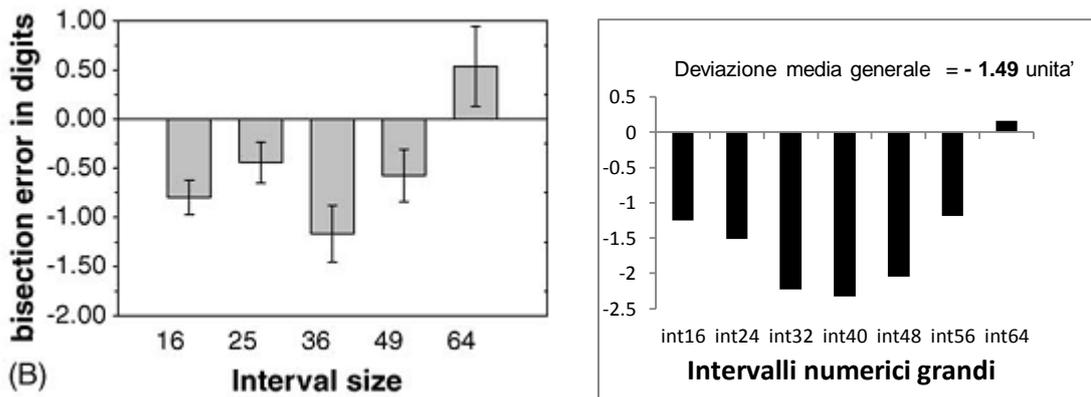
Ci sembra che nel loro complesso l'analisi delle correlazioni generali tra i due compiti, cioè quelle analisi che, come nello studio di Longo e Lourenco (2007) non hanno ottenuto conto delle differenti lunghezze delle linee e degli intervalli, non hanno messo in luce alcun risultato significativo. Inoltre, le analisi più dettagliate svolte tra le diverse combinazioni di lunghezza di linee e lunghezza di intervalli numerici, hanno evidenziato solo poche correlazioni statisticamente significative che sembrano non mostrare un chiaro pattern di regolarità e che in alcuni casi sono risultate di segno contrario alle aspettative.

### **3.3 Discussione dello studio**

Il compito di bisezione di linee può fornire una misura dei bias individuali, normali e patologici, della distribuzione dell'attenzione spaziale lungo lo spazio orizzontale. La performance, ad esempio, è tipicamente alterata in pazienti cerebrolesi destri con sindrome da neglect sinistro. Questi pazienti mostrano un tipico bias patologico ipsilesionale nella bisezione di linee medio-lunghe (cioè di lunghezza: tra i 10 e i 20 cm) e possono mostrare un bias paradossale controlesionale (vale a dire "cross-over ") nella bisezione di linee corte (2 cm). Quest'ultimo fenomeno però sembra legato al concomitante deficit di campo visivo

controlaterale, cioè emianopsia (Doricchi et al., 2005). Nel compito di bisezione di linee, i soggetti adulti sani mostrano, indipendentemente dalla lunghezza della linea, una piccola deviazione a sinistra dell'effettivo centro della linea, denominata "pseudoneglect" (Jewell & McCourt, 2000), che è considerata derivare dalla lateralizzazione dominante delle funzioni attentive e spaziali nell'emisfero destro. Un recente studio DTI ha dimostrato che, nei soggetti adulti sani, le variazioni inter-individuali del bias di bisezione di linee orizzontali, sono correlate a corrispondenti variazioni nell'asimmetria emisferica delle connessioni della materia bianca che collegano la corteccia parietale e frontale (cioè il secondo ramo del *Superior Longitudinal Fasciculus*, SLF II): di maggiore volume dei tratti della sostanza bianca nell'emisfero destro, rispetto al sinistro, è correlato ad una maggiore deviazione verso sinistra, cioè pseudoneglect, nella bisezione di linee (Thiebaut de Schotten et al., 2011).

In questo studio, analogamente ai lavori precedenti, abbiamo osservato in campioni di 60 e 90 soggetti adulti sani, un significativo "pseudoneglect" durante la bisezione di linee. Questo bias è presente per tutte le lunghezze delle linee (cioè 2, 10 e 20 cm) e mostra una diminuzione lineare al diminuire della lunghezza della linea. Inoltre, in accordo con una precedente ricerca, abbiamo scoperto che durante la bisezione mentale di Piccoli (lunghezza = 3 - 5 - 7 - 9 unità) e Grandi intervalli numerici (lunghezza = 16 - 24 - 32 - 40 - 48 - 56 - 64 unità), gli stessi soggetti mostrano un bias d'errore in direzione dei numeri più piccoli rispetto al centro effettivo dell'intervallo. Questo bias è modulato dalla grandezza dell'intervallo numerico e, a parità di grandezza, dalla magnitudo dei numeri che definiscono l'intervallo. All'interno del range dell'intervallo con i numeri piccoli (es. lunghezza = 3 - 9 unità) un bias di bisezione negativo era presente negli intervalli da 3, 5 e 7 unità ma, contrariamente alla bisezione di linea dove il bias negativo diventava sempre più pronunciato all'aumentare della lunghezza della linea, il bias diventava positivo con gli intervalli più grandi, da 9 unità. In linea con i precedenti studi, per ogni lunghezza di intervallo il bias è risultato modulato dalla posizione dell'intervallo all'interno della decina e ha mostrato lo stesso andamento ricorsivo attraverso decine consecutive. All'interno del range dell'intervallo con i numeri grandi (es. lunghezza = 16 - 64 unità), la variazione del bias che abbiamo osservato, in funzione della grandezza dell'intervallo, era sorprendentemente simile a quella osservata in un precedente studio di Goebel et al. (2006) nel quale erano stati usati intervalli da 16 - 25 - 36 - 49 e 64 unità. Come per gli intervalli piccoli, il bias risultava negativo negli intervalli più piccoli, per poi diventare progressivamente positivo nell'intervallo da 64 unità.



*Fig. 3.8. la variazione del bias in funzione della grandezza dell'intervallo, nello studio di Goebel (2006) e nel nostro lavoro*

I plots dei bias d'errore suggeriscono che, soprattutto dall'intervallo da 16 unità a quello da 40, come nel caso degli intervalli numerici piccoli, la modulazione ricorsiva del bias era presente tra decine consecutive, in modo che lo pseudoneglect era fortemente pronunciato nella bisezione di intervalli che avevano il punto iniziale al termine della decina. Questi risultati replicano il ricorsivo "Number Intervals Position Effect" (NIPE) precedentemente riscontrato negli intervalli numerici piccoli in Doricchi et al, (2009, vedi anche Aiello et al, 2013). Il NIPE consiste nella variazione sistematica del bias d'errore, in un compito di bisezione mentale di intervalli numerici. Tale effetto dimostra come, a parità di lunghezze dell'intervallo numerico, es. 7 unità, il bias d'errore di bisezione cambia in funzione della posizione dell'intervallo nella decina: è positivo per gli intervalli all'inizio della decina (1-7) ed è negativo per gli intervalli alla fine della decina (3-9).

Fondamentale per questo studio è stata l'assenza di correlazione significativa tra i bias individuali di bisezione di linea e i compiti di bisezione mentale di intervalli numerici. Infine, non sono state trovate correlazioni significative o pattern di correlazione quando i dati sono stati analizzati separatamente nei sottogruppi di partecipanti che mostrano alto e basso pseudoneglect nella bisezione di linee visive.

Nel loro insieme questi risultati suggeriscono, in accordo con lavori precedenti, come: i meccanismi neurali e funzionali che sono alla base dello svolgimento del compito di bisezione mentale di intervalli numerici, presentati verbalmente, non sono sovrapponibili a quelli che sottendono le bisezioni mentali di linee visive. Questi risultati sono in contrasto con quelli di uno studio precedente nel quale gli estremi che definivano gli intervalli numerici erano stati presentati visivamente uno a sinistra ed uno a destra di una breve linea orizzontale e nel quale erano state riscontrate correlazioni significative tra la bisezione di

linee e quella degli intervalli numerici così definiti (Longo et al. 2007).

La combinazione delle evidenze di questi due studi sottolineano che gli intervalli numerici non sono intrinsecamente disposti da sinistra a destra lungo l'equivalente di una linea visiva mentale e che questa disposizione è piuttosto suggerita dall'organizzazione visuo-spaziale del materiale numerico da elaborare. In sintesi, è la rappresentazione visiva da sinistra a destra dei punti estremi che definiscono un intervallo numerico, come nel compito di Longo et al. (2007), o l'associazione sinistra vs destra dei codici di risposta dei numeri, come nel caso del compito SNARC, genera un'organizzazione mentale spazio-numerica da sinistra a destra, dove le grandezze possono essere eventualmente esplorate con gli stessi meccanismi spazio-attenzionali utilizzati nel controllo dello spazio visivo.

Oltre alla doppia dissociazione comportamentale ben documentata tra il bias patologico nella bisezione di linee e quello nella bisezione mentale di intervalli numerici che può essere osservato in pazienti cerebrolesi destri, i risultati degli studi di correlazione anatomo-clinici supportano una chiara dissociazione tra strutture implicate nella bisezione di linee e quella di intervalli mentali numerici. Infatti, mentre le lesioni dell'emisfero destro più frequentemente associate al bias patologico ipsilesionale nella bisezione di linea si trovano nell'area parietale (giro angolare e sopramarginale della sostanza bianca sottostante; Binder et al. 1992; Fink et al. 2000; Verdon et al. 2010; Aiello et al. 2012) quelle più frequentemente associate al bias di bisezione di intervalli numerici, nei pochi studi presenti in letteratura, si trovano nel modulo pre-frontali (Doricchi et al. 2005; Doricchi et al. 2009; Aiello et al. 2012) corrispondente all'area pre-frontale dove è stata localizzata la modulazione dei numeri nel cervello delle scimmie (Nieder e Miller. 2003) e nella materia bianca sottostante.

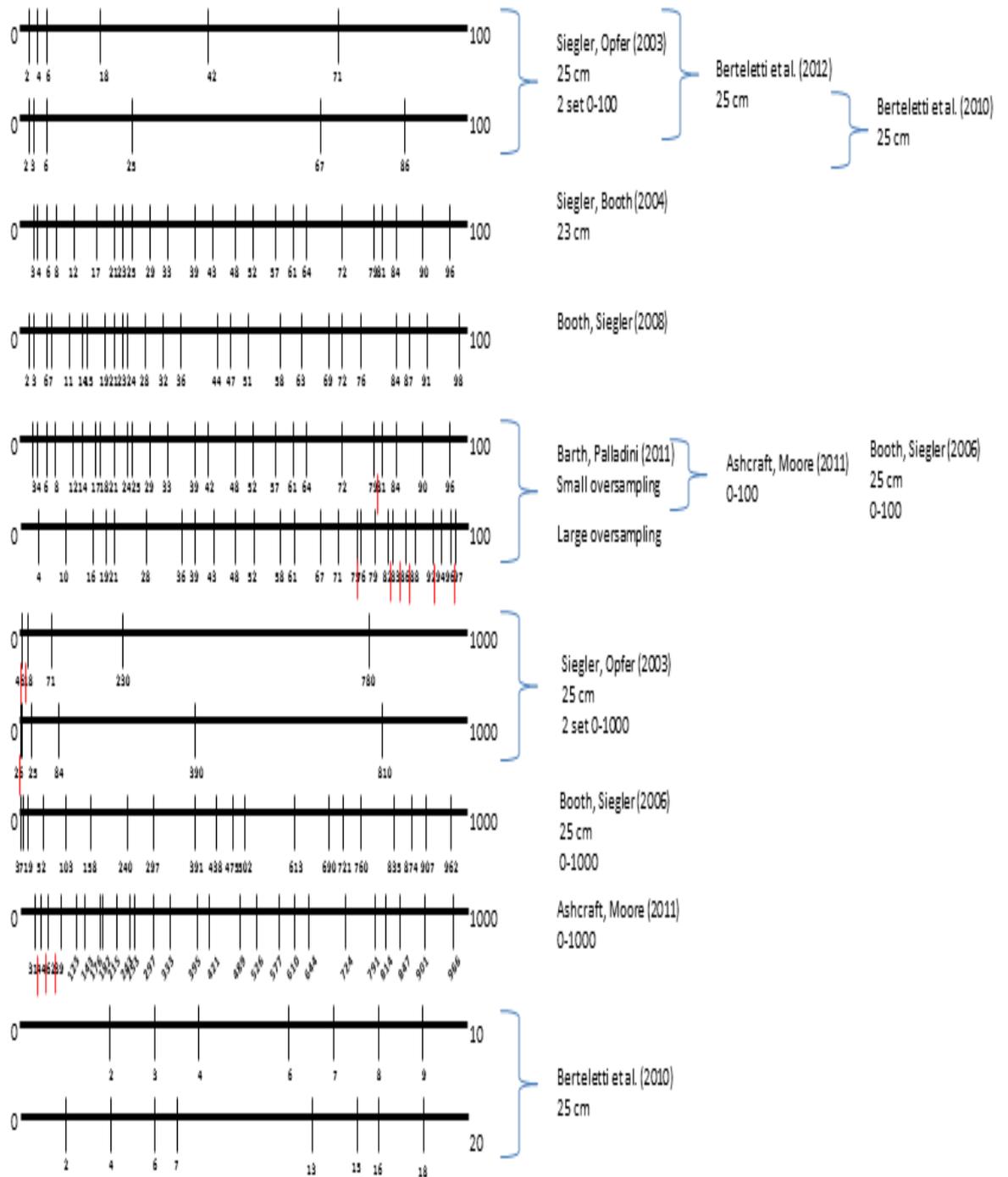
## IV Capitolo

### **Lo sviluppo della stima numerica: *Evidenze sulle rappresentazioni multiple di quantità numeriche***

#### ***4.1 Introduzione***

Sulla base di una rassegna degli studi precedenti che avevano utilizzato il Number to Position task, avevamo avanzato l'ipotesi che l'andamento logaritmico osservato nel posizionamento su una linea orizzontale delle magnitudo numeriche corrispondenti alla serie crescente dei numeri naturali nei bambini in età prescolare e di prima elementare, potesse essere stato indotto dalla più alta frequenza di campionamento dei numeri o delle numerosità più piccole. Inoltre, avevamo notato che tale andamento logaritmico sembrava essere più evidente per i range numerici-sperimentali "0-100" e "0-1000" rispetto al range "0-10" che comprendeva solamente i numeri appartenenti alla prima decina.

Di seguito è riportata una rappresentazione grafica delle sequenze di stimoli dei vari studi.



*Fig. 4.1. Rappresentazione degli stimoli nei vari studi*

Di seguito sono riportate le sequenze del nostro studio per l'oversampling dei numeri piccoli, l'oversampling dei numeri grandi ed un campionamento equamente distribuito nelle varie decine.

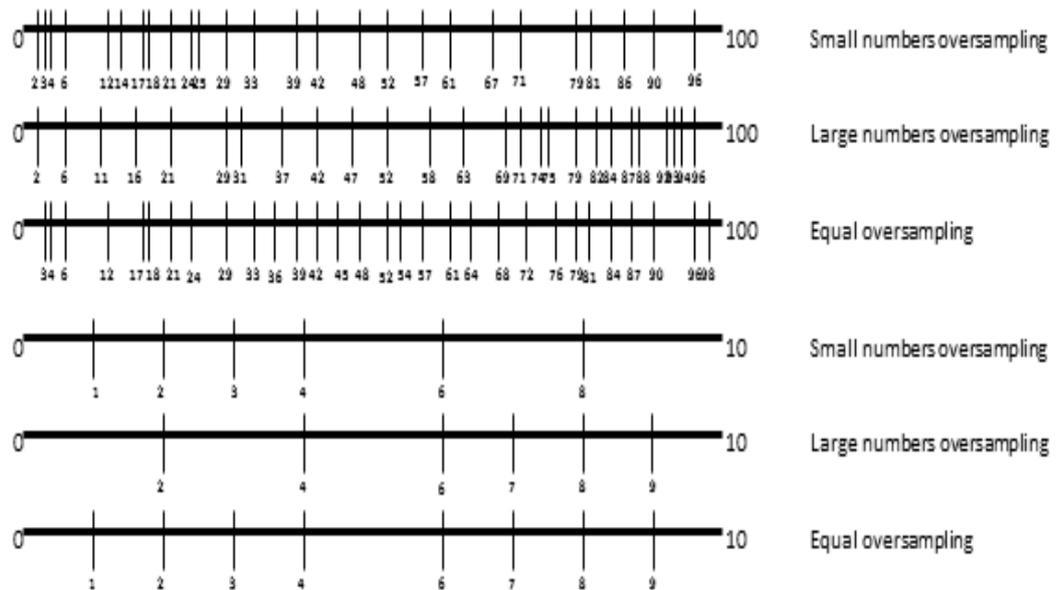


Fig. 4.2. Rappresentazione dei nostri campionamenti

## 4.2 Studio sperimentale

### 4.2.1 Number to Position nei bambini

In un recente studio condotto su bambini di tre diverse fasce d'età (II, III, V), abbiamo chiesto di posizionare dei numeri lungo delle linee con agli estremi i numeri 0 e 100. I bambini posizionavano erroneamente i numeri più piccoli di 50 verso l'estremità opposta e quelli più grandi di 50 verso i numeri più piccoli. L'errore è circa pari a zero e la curva inverte il segno intorno al punto medio. Il migliore fitting è stato ottenuto da una funzione bimodale-centripeda ( $f(x) = a \cdot \arctan(d + b \cdot x) + c$ ) piuttosto che funzioni lineari o logaritmiche.

Dall'analisi di studi precedenti di NtoP è parso come l'andamento logaritmico osservato nel posizionamento su una linea orizzontale delle magnitudo numeriche, corrispondenti alla serie crescente dei numeri naturali nei bambini in età prescolare e di prima elementare, potesse essere stato indotto dalla più alta frequenza di campionamento dei numeri o delle numerosità più piccole. L'obiettivo di questo lavoro è stato di verificare se fosse possibile che il bias d'errore potesse essere indotto dal campionamento verificando se:

- 1) L'andamento logaritmico del bias d'errore nel NtoP viene mantenuto quando piccole e grandi magnitudo numeriche sono ugualmente campionate o quando vi è un oversampling delle grandi magnitudo numeriche.
- 2) L'andamento logaritmico del bias d'errore nel NtoP vale per intervalli numerici grandi (ad esempio 1-100) e piccolo (es. 1-10).

#### ***4.2.2 Campione:***

Per rispondere a questa domanda abbiamo somministrato, a soggetti selezionati in quattro diverse fasce d'età, tre diverse liste di numeri: ultimo anno di scuola materna (5 anni; n = 60), 1° elementare (6 anni: n = 62), 2° elementare (7anni: n = 62) e 5° elementare (10 anni: n = 49), per un campione totale di 233 soggetti. Queste liste venivano presentate a tre gruppi diversi di soggetti per ogni classe.

Le scuole che hanno partecipato sono: la scuola elementare "Don Filippo Rinaldi"; i plessi di Passoscuro, Torre in Pietra, Palidoro e Aranova facenti parte del centocinquantasettesimo circolo didattico di Torre in Pietra, comune di Fiumicino (RM); l'istituto comprensivo "Orsa Maggiore".

#### ***4.2.3 Metodo:***

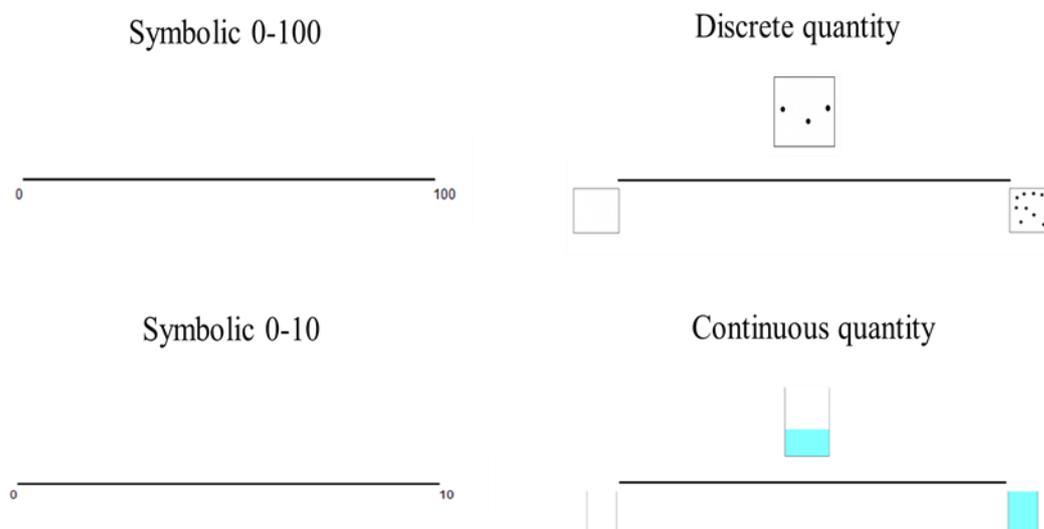
Ad un primo gruppo (equal sampling) venivano presentate tre cifre per ogni decina, escluso il 50, per la bisezione 0-100, per gli altri compiti tutti i numeri escluso il 5, bilanciando così il campionamento; ad un secondo gruppo (Small numbers oversampling) venivano presentati più numeri piccoli, sbilanciando il campionamento; ad un ultimo

gruppo (Large numbers oversampling) venivano presentati più numeri grandi, sbilanciando in questo caso il campionamento nel verso opposto.

I compiti utilizzati sono quattro diverse bisezione di linee: stimoli arabi (0-100, 0-10), quantità discrete (nuvole di punti) e quantità continue (volume di bicchieri).

Per quanto riguarda le linee con agli estremi i numeri 0-100 e 0-10 veniva chiesto al bambino di posizionare un numero sulla linea, presentatogli oralmente, facendo un segno nella posizione secondo lui corretta. Per le linee con agli estremi un quadrato vuoto e uno con dieci punti (quantità discrete), al soggetto veniva presentata l'immagine di una nuvola da posizionare e veniva chiesto esplicitamente di non contare i puntini all'interno dell'immagine. Per le linee con agli estremi un bicchiere vuoto e uno pieno (quantità continue), veniva presentata l'immagine di un bicchiere che poteva essere più o meno pieno e si chiedeva, loro quale potesse essere la posizione giusta sulla linea.

Per la selezione del campione è stato utilizzato il test di valutazione matematica AC-MT 6-11, ampiamente spiegato nel capitolo successivo.



**Fig.4..3** Esempio di stimoli presentati

### **4.3 Esperimento 1: Bisezione 0-100**

#### **4.3.1 Materiale:**

Abbiamo utilizzato un Number to Position con una linea lunga 20 cm con agli estremi i numeri 0-100. Ai soggetti veniva chiesto di posizionare sulla linea un numero, presentatogli oralmente, nella posizione secondo loro corretta.

Le sequenze di numeri erano pseudo-randomizzate e i target erano:

**0-100 Small numbers oversampling:** 2, 3, 4, 6, 12, 14, 17, 18, 21, 24, 25, 29, 33, 39, 42, 48, 52, 57, 61, 67, 71, 79, 81, 86, 90, 96

**Large numbers oversampling:** 2, 6, 11, 16, 21, 29, 31, 37, 42, 47, 52, 58, 63, 69, 71, 74, 75, 79, 82, 84, 87, 88, 92, 93, 94, 96

**Equal oversampling:** 3, 4, 6, 12, 17, 18, 21, 24, 29, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 52, 54, 57, 61, 64, 68, 72, 76, 79, 81, 84, 87, 90, 96, 98.

#### **4.3.2 Risultati:**

Per ogni classe e per ogni campionamento è stato analizzato quale potesse essere il fitting che meglio spiegasse gli andamenti tra logaritmico( $v_n = a + b \cdot \log(v_1)$ ), lineare( $v_n = a + b \cdot v_1$ ) ed esponenziale( $v_n = a \cdot \exp(b \cdot v_1)$ ). È stata fatta un'analisi dei punti stimati, per ogni soggetto, rispetto ai punti reali.

Per quanto riguarda l'ultima classe della materna, in questo compito abbiamo riscontrato che il fitting migliore in tutti i campionamenti è quello lineare rispetto a quello logaritmico (Small numbers oversampling  $R_{lin} = 0,997 > R_{log} = 0,911$ ; Large numbers oversampling  $R_{lin} = 0,998 > R_{log} = 0,910$ ; Equal oversampling  $R_{lin} = 1,00 > R_{log} = 0,92$ ). Dall'analisi delle medie con il T-Test risulta che queste differenze sono tutte significative ( $p < 0,05$ ).

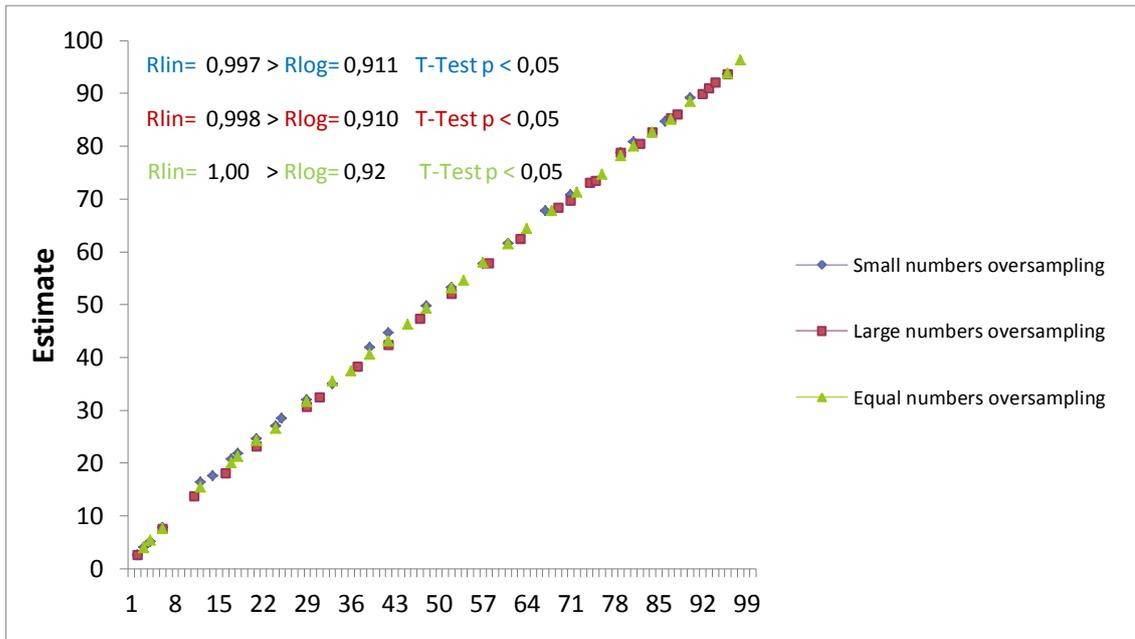


Fig. 4.4. Scuola dell'infanzia Punto stimato 0-100

Per la prima elementare, il fitting migliore in tutti i campionamenti è quello lineare rispetto a quello logaritmico (Small numbers oversampling  $R_{lin} = 0,998 > R_{log} = 0,908$ ; Large numbers oversampling  $R_{lin} = 0,999 > R_{log} = 0,908$ ; Equal oversampling  $R_{lin} = 0,998 > R_{log} = 0,918$ ), con un valore al T-test di  $p < 0,05$ .

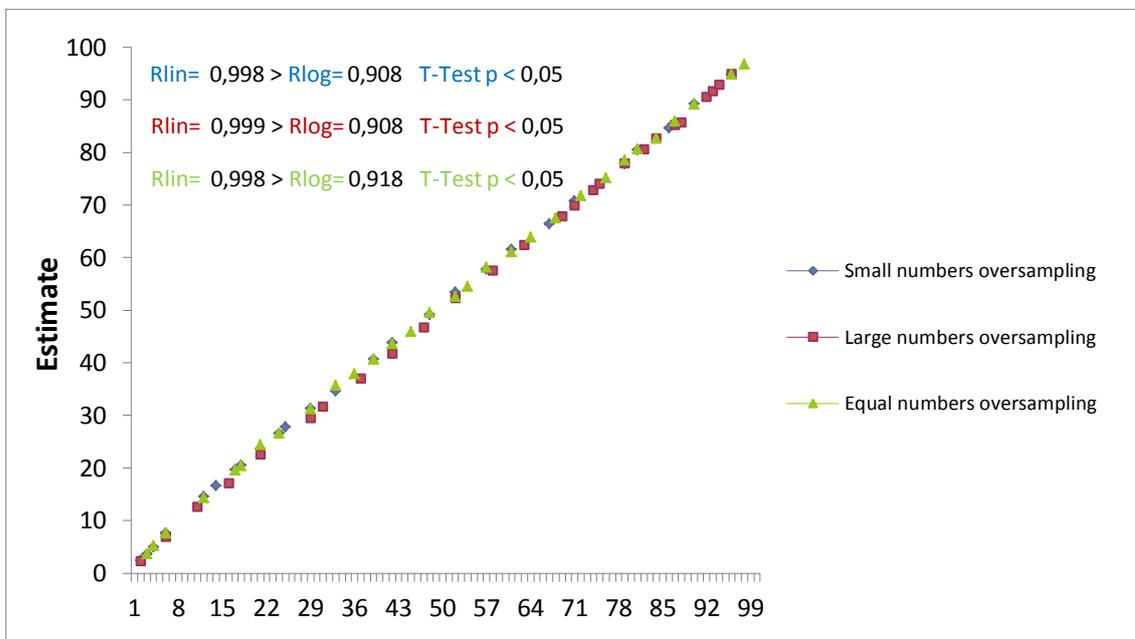
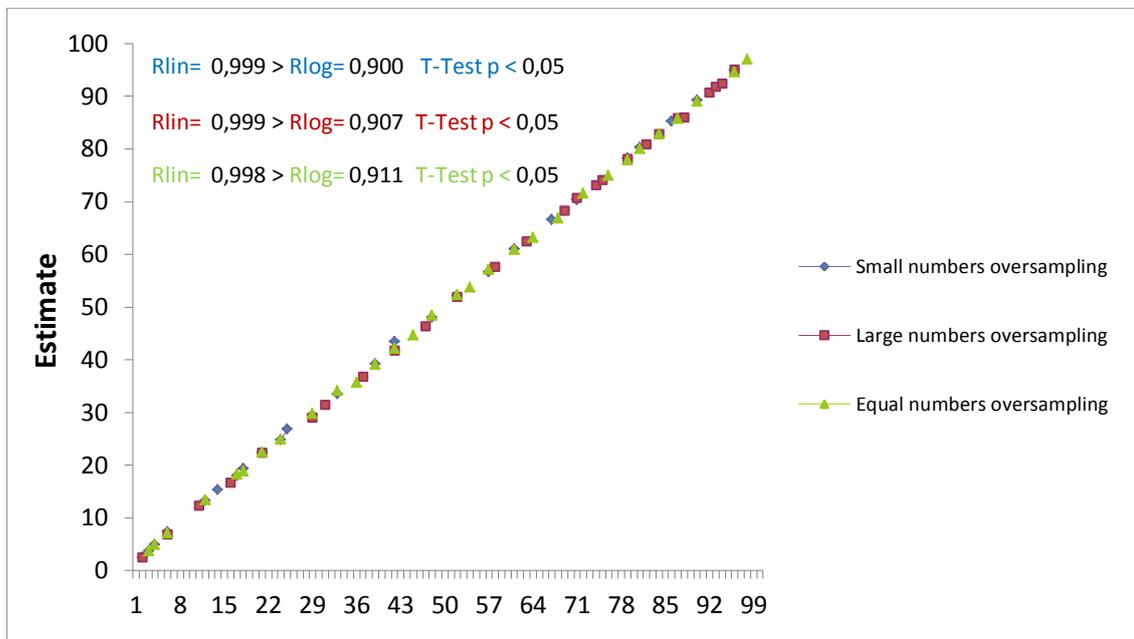


Fig. 4.5. Prima elementare Punto stimato 0-100

Per la seconda elementare, il fitting migliore in tutti i campionamenti è quello lineare rispetto a quello logaritmico (Small numbers oversampling  $R_{lin}= 0,999 > R_{log}= 0,900$ ; Large numbers oversampling  $R_{lin}= 0,999 > R_{log}= 0,907$ ; Equal oversampling  $R_{lin}= 0,998 > R_{log}= 0,911$ ). Dal T-Test risulta che queste differenze sono tutte significative ( $p < 0,05$ ).



**Fig. 4.6.** Seconda elementare Punto stimato 0-100

Anche per la Quinta elementare, il fitting migliore in tutti i campionamenti è quello lineare rispetto a quello logaritmico (Small numbers oversampling  $R_{lin}= 0,999 > R_{log}= 0,897$ ; Large numbers oversampling  $R_{lin}= 0,999 > R_{log}= 0,906$ ; Equal oversampling  $R_{lin}= 0,999 > R_{log}= 0,909$ ). Dal T-Test risulta che queste differenze sono tutte significative ( $p < 0,05$ ).

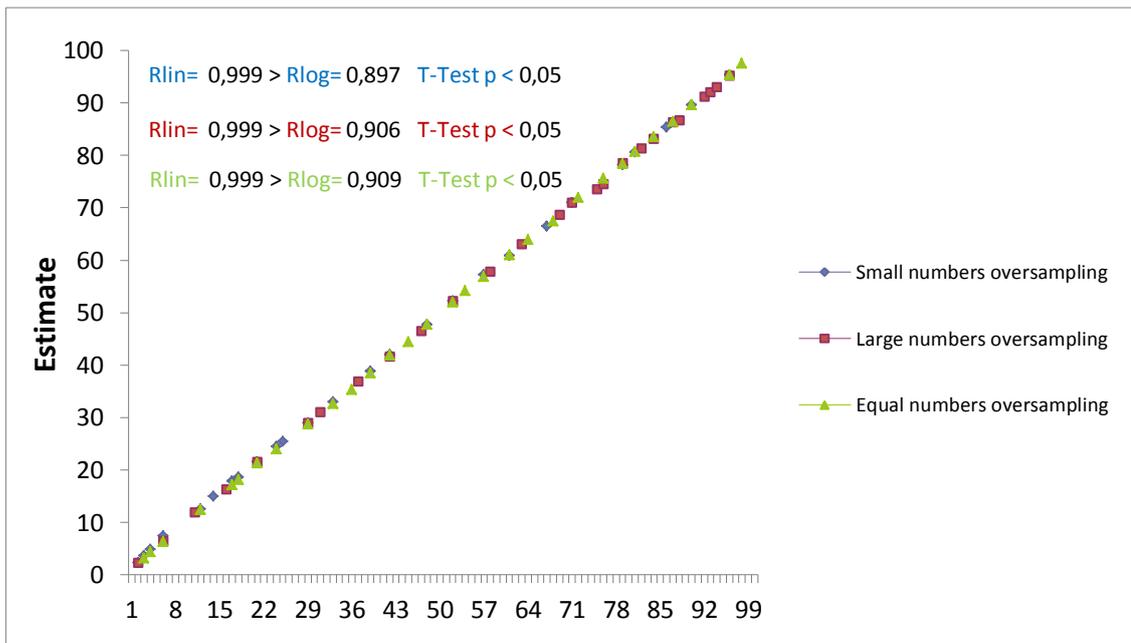


Fig. 4.7. Quinta elementare Punto stimato 0-100

È stata fatta un'ulteriore analisi dell'andamento del bias d'errore per verificare se ci fosse la presenza della compressione e se il campionamento potesse influenzare l'andamento della curva.

Per l'ultima classe di scuola materna risulta che l'errore è circa pari a zero e la curva inverte il segno in base al campionamento, infatti, per lo Small numbers oversampling l'errore è circa pari a zero tra il 71 e l'79, per il Large numbers oversampling è tra il 52 ed il 58, mentre nell'Equal oversampling è tra il 61 ed il 64.

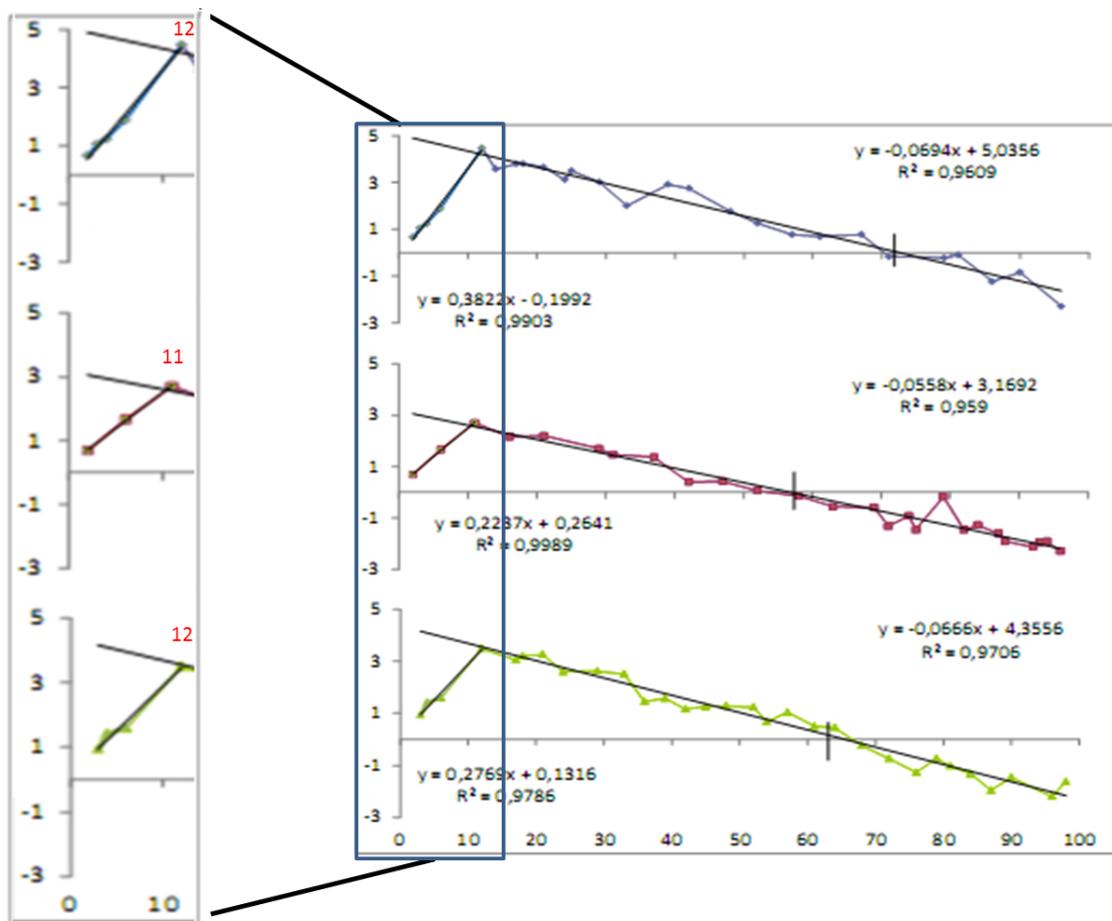


Fig. 4.8. Bias d'errore 0-100 Scuola dell'infanzia

Anche per la prima elementare risulta che l'errore è circa pari a zero e la curva inverte il segno in base al campionamento, infatti, per lo Small numbers oversampling l'errore è circa pari a zero tra il 61 e il 67, per il Large numbers oversampling è tra il 42 ed il 47, mentre nell'Equal oversampling è tra il 64 ed il 68.

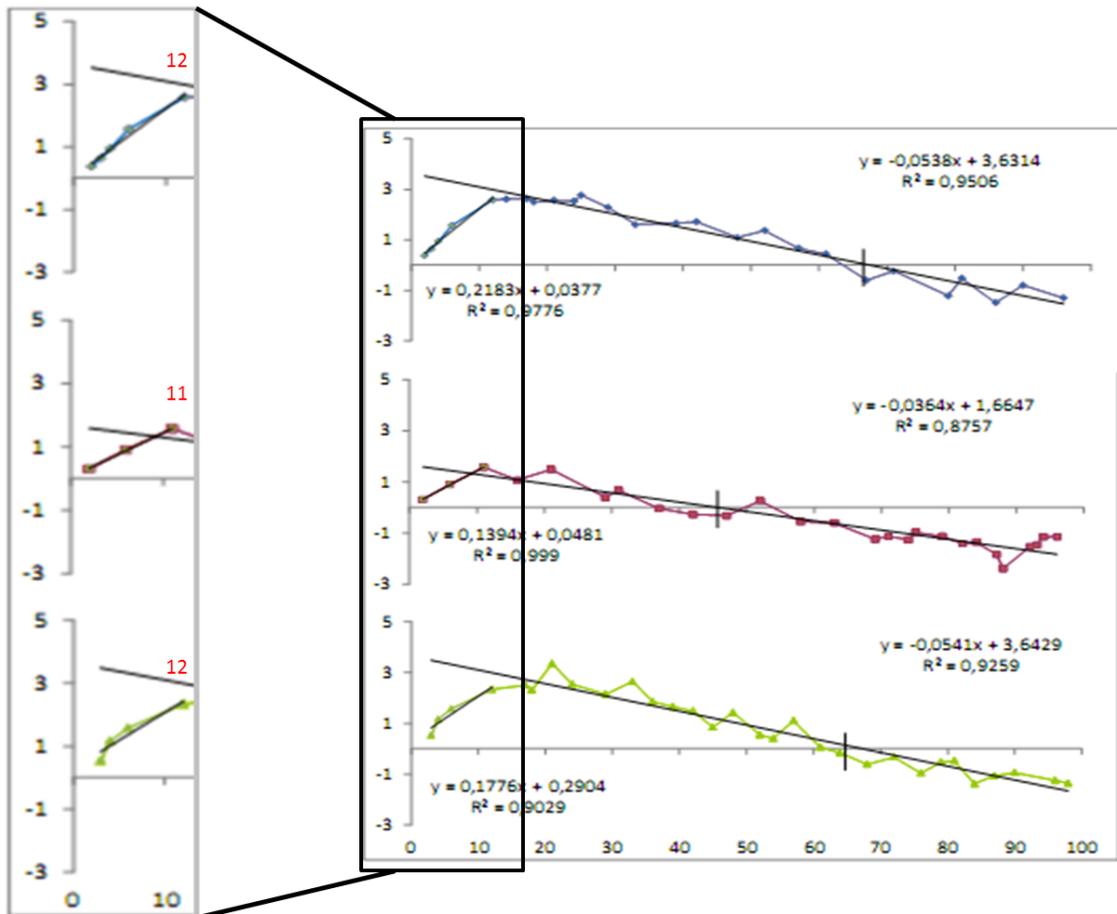
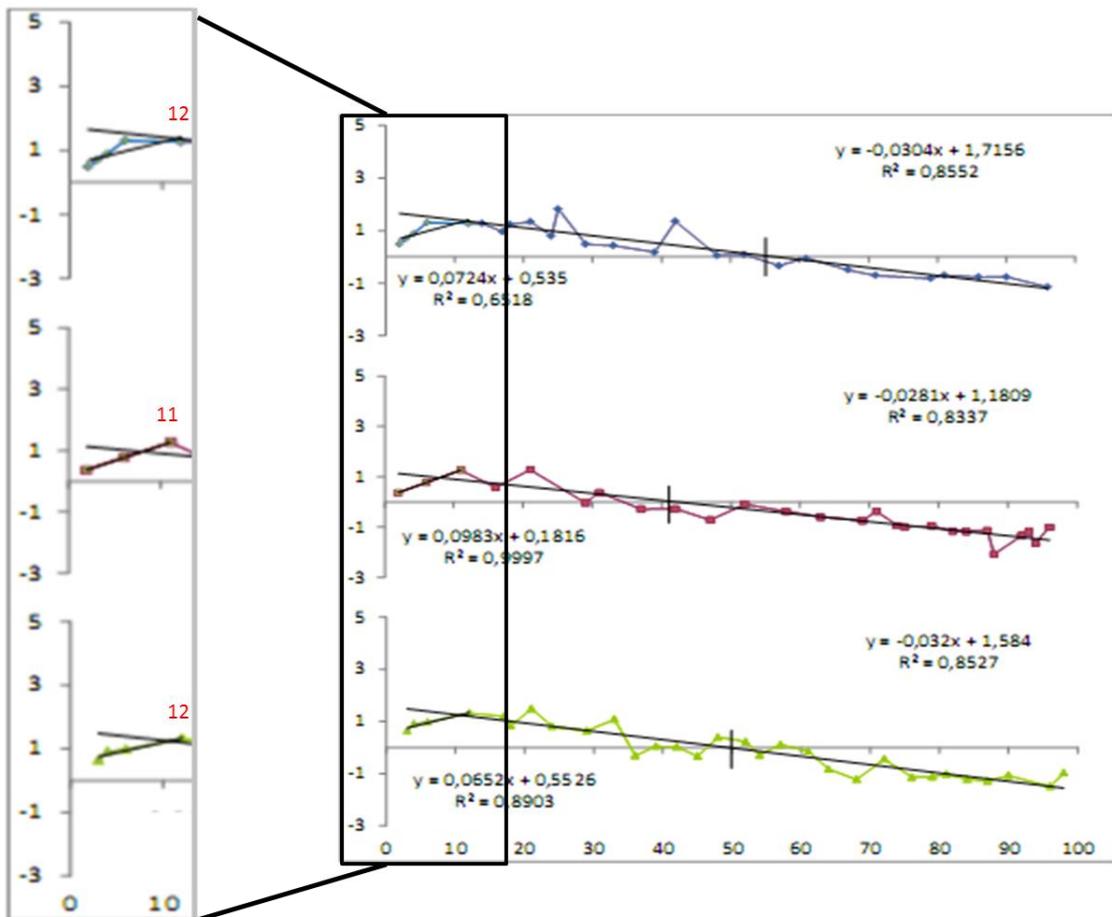


Fig. 4.9. Bias d'errore 0-100 Prima elementare

Nella seconda elementare, per lo Small numbers oversampling l'errore è circa pari a zero tra il 52 e il 57, per il Large numbers oversampling è tra il 42 ed il 47, mentre nell'Equal oversampling è intorno al 50.



**Fig. 4.10.** Bias d'errore 0-100 Seconda elementare

Nella quinta elementare, per lo Small numbers oversampling l'errore è circa pari a zero tra il 52 e il 57, per il Large numbers oversampling è tra il 42 ed il 47, nell'Equal oversampling è intorno al 30.

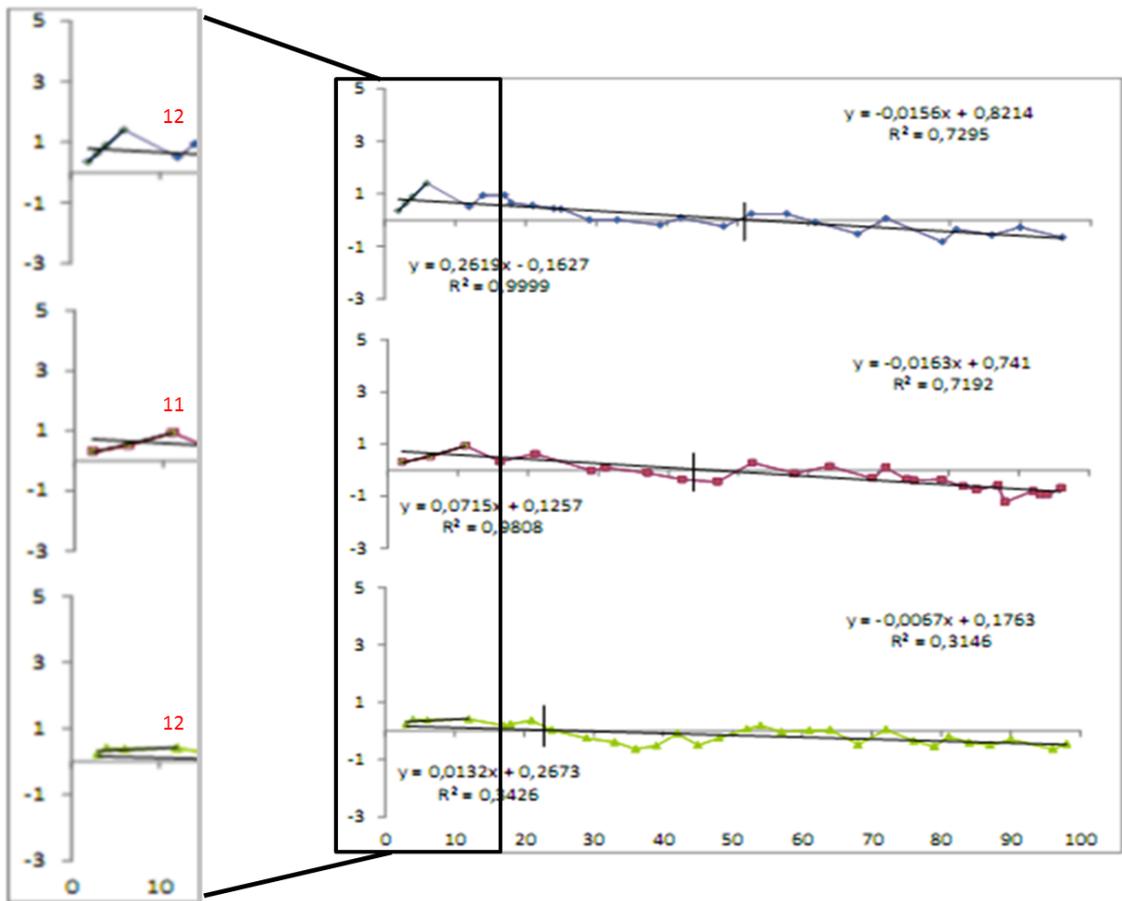
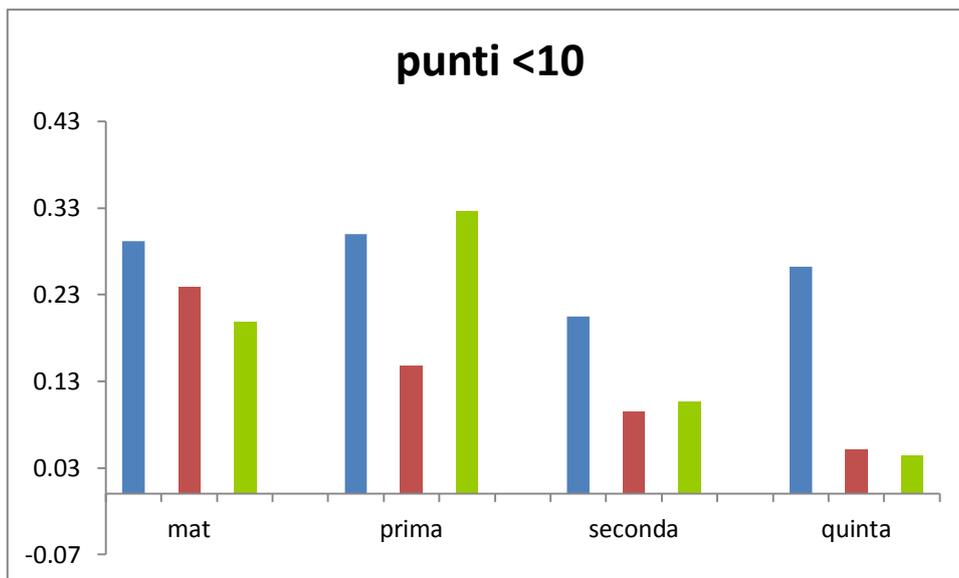
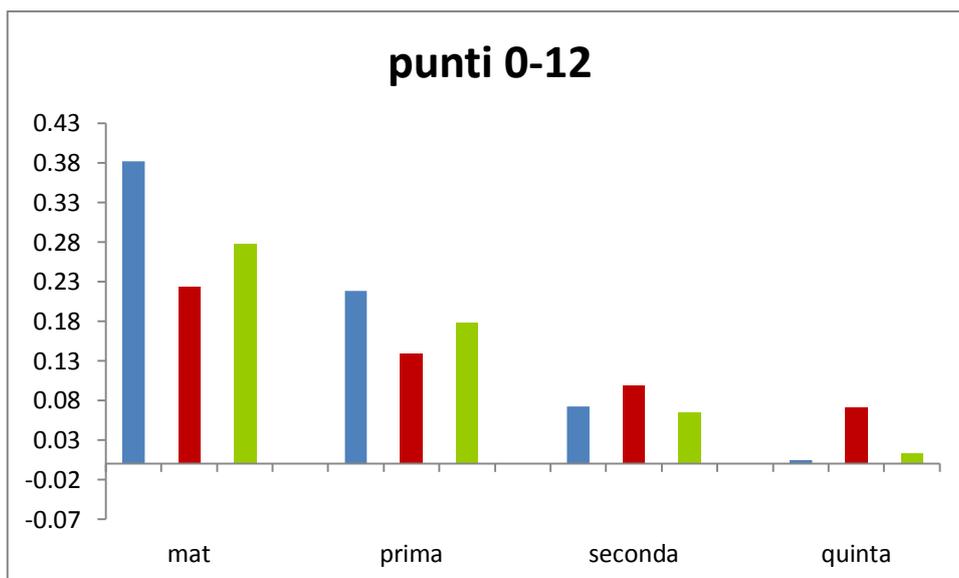


Fig. 4.11. Bias d'errore 0-100 Quinta elementare

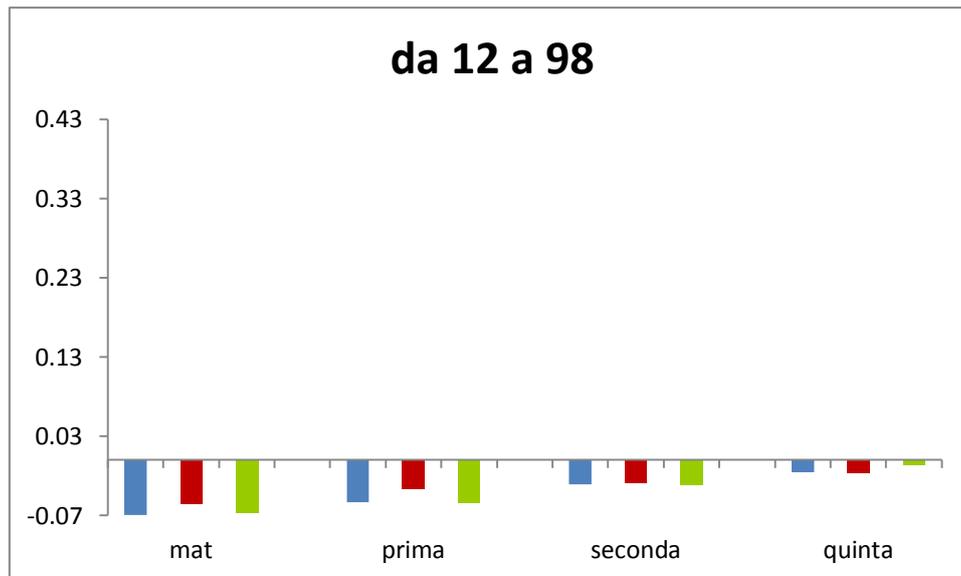
Inoltre è stata fatta l'analisi delle slope della prima decina, dei punti fino al primo della seconda decina, quindi fino al numero 11 o 12, e dei punti dalla seconda decina in poi per tutti i campionamenti.



*Fig. 4.12. Slope per ogni classe e per ogni campionamento per i numeri della prima decina. In blu sono rappresentate le slope dello Small oversampling, in rosso quelle del Large oversampling e in verde l'Equal oversampling.*



*Fig. 4.13. Slope per ogni classe e per ogni campionamento per i numeri da 0 a 12*



*Fig. 4.14. Slope per ogni classe e per ogni campionamento per i numeri dalla seconda decina in poi*

Come si può vedere, a prescindere dal campionamento, l'andamento della slope per la prima decina è pressappoco uguale per ogni classe. Questo vuol dire che i numeri della prima decina sono rappresentati ugualmente e le slope sono sempre positive, contrariamente a quella dei numeri dalla seconda decina in poi. I dati della prima decina nella bisezione con range 0-100 sono opposti ai dati per i numeri piccoli riscontrati nella bisezione con range 0-10, in quanto nello 0-100 la slope è positiva, mentre nello 0-10 la slope è negativa.

#### **4.4 Esperimento 2: Bisezione 0-10**

##### **4.4.1 Materiale**

Abbiamo utilizzato un Number to Position con una linea lunga 20 cm con agli estremi i numeri 0-10. La consegna era la stessa del compito precedente

Le sequenze di numeri erano pseudo-randomizzate e i target ripetuti due volte:

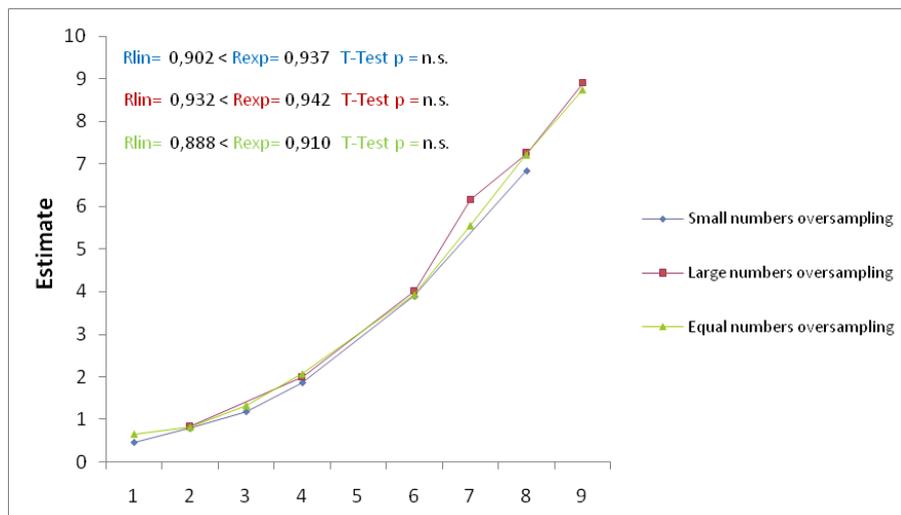
**0-10 Small numbers/quantities oversampling:** 1, 2, 3, 4, 6, 8.

**Large numbers/quantities oversampling:** 2, 4, 6, 7, 8, 9.

**Equal numbers/quantities oversampling:** 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9.

#### 4.4.2 Risultati:

Per quanto riguarda l'ultima classe della materna, in questo compito abbiamo riscontrato che il fitting migliore in tutti i campionamenti è quello esponenziale rispetto a quello lineare (Small numbers oversampling  $R_{lin}= 0,902 < R_{exp}= 0,937$ ; Large numbers oversampling  $R_{lin}= 0,932 < R_{exp}= 0,942$ ; Equal oversampling  $R_{lin}= 0,888 < R_{exp}= 9,10$ ). Dall'analisi delle medie con il T-Test risulta che queste differenze non sono significative ma comunque il fitting migliore resta quello esponenziale.



**Fig. 4.21.** Punto stimato 0-10 Scuola dell'infanzia

Per la prima elementare, il fitting migliore in tutti i campionamenti è quello esponenziale rispetto a quello lineare (Small numbers oversampling  $R_{lin}= 0,924 < R_{exp}= 0,971$ ; Large numbers oversampling  $R_{lin}= 0,888 < R_{exp}= 0,953$ ; Equal oversampling  $R_{lin}= 0,935 < R_{exp}= 0,962$ ). Dall'analisi delle medie con il T-Test risulta che queste differenze sono tutte significative ( $p < 0,05$ ) tranne che per il Large numbers oversampling dove la differenza tra lineare ed esponenziale non è significativa.

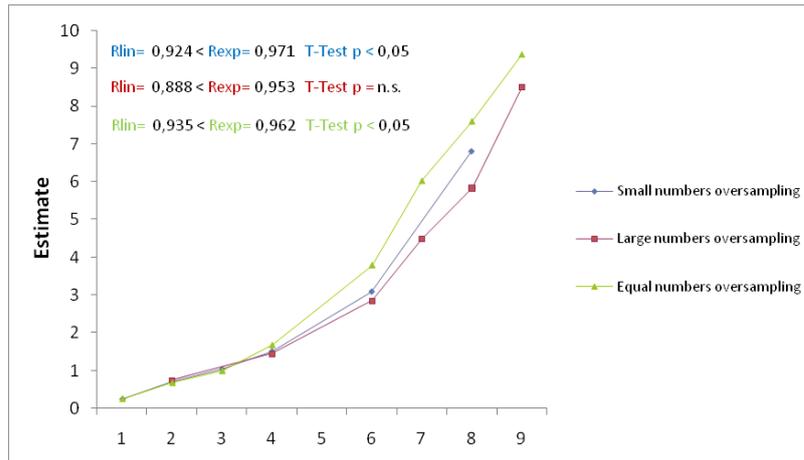


Fig. 4.22. Punto stimato 0-10 Prima elementare

Per la seconda elementare il fitting migliore è quello esponenziale tranne nell'equal oversampling dove il migliore è quello lineare (Small numbers oversampling  $R_{lin} = 0,955 < R_{exp} = 0,981$ ; Large numbers oversampling  $R_{lin} = 0,922 < R_{exp} = 0,941$ ; Equal oversampling  $R_{lin} = 0,965 > R_{exp} = 0,959$ ). In questo caso la differenza risulta significativa solo nello Small numbers oversampling.

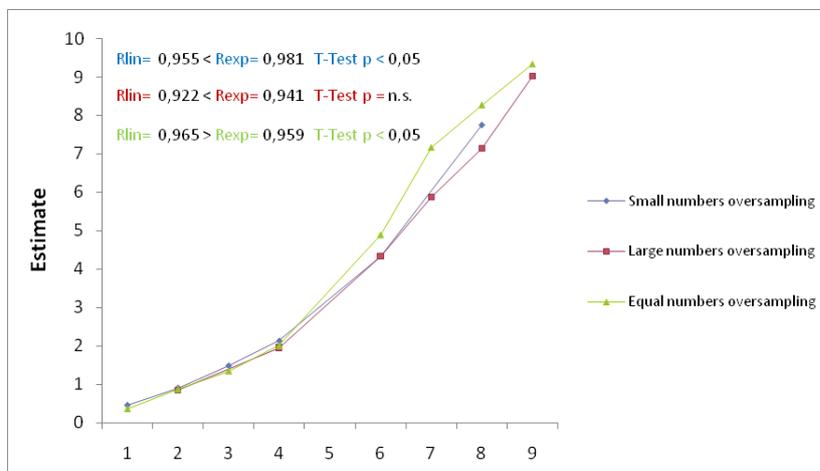


Fig. 4.23. Punto stimato 0-10 Seconda elementare

Per quanto riguarda la quinta elementare, invece, il fitting migliore è quello lineare in tutti i campionamenti (Small numbers oversampling  $R_{lin} = 0,986 > R_{exp} = 0,976$ ; Large numbers oversampling  $R_{lin} = 0,979 > R_{exp} = 0,971$ ; Equal oversampling  $R_{lin} = 0,989 > R_{exp} = 0,964$ ) ma l'unica differenza significativa si riscontra nell'equal oversampling ( $p < 0,05$ ).

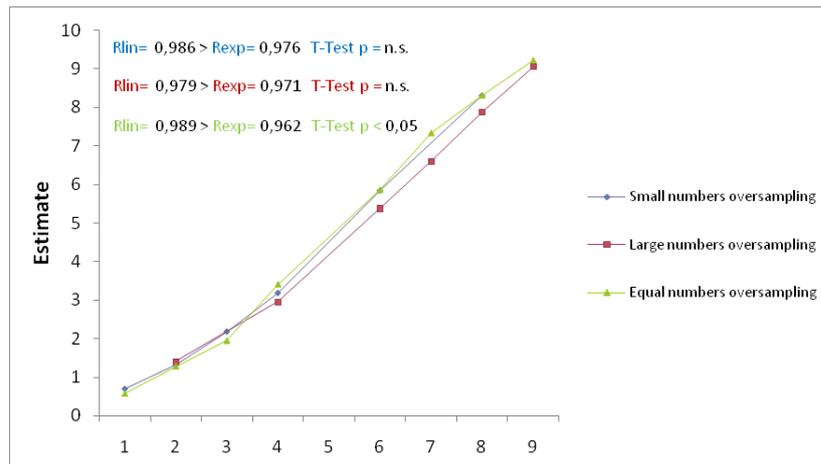


Fig. 4.24. Punto stimato 0-10 Quinta elementare

## 4.5 Esperimento 3: Quantità Discrete

### 4.5.1 Materiale

Abbiamo utilizzato un Number to Position con una linea lunga 20 cm con agli estremi due quadrati, uno vuoto e uno con dieci punti. La consegna era la stessa del compito precedente e si chiedeva esplicitamente di non contare i puntini all'interno del quadrato.

Le sequenze di numeri erano pseudo-randomizzate e i target ripetuti due volte:

**Quantità Discrete** ogni sequenza ripetuta due volte.

**Small numbers/quantities oversampling:** 1, 2, 3, 4, 6, 8.

**Large numbers/quantities oversampling:** 2, 4, 6, 7, 8, 9.

**Equal numbers/quantities oversampling:** 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9.

### 4.5.2 Risultati:

In questo compito il fitting migliore, in tutte le classi ed in tutti i campionamenti, è risultato sempre quello lineare.

Nell'ultima classe della materna è risultato: Small numbers oversampling  $R_{lin}= 0,909 >$   $R_{log}= 0,851$ ; Large numbers oversampling  $R_{lin}= 0,847 >$   $R_{log}= 0,825$ ; Equal

oversampling  $R_{lin} = 0,913 > R_{log} = 0,851$ , dove il valore al T-Test è  $p < 0,05$  solo nell'equal oversampling.

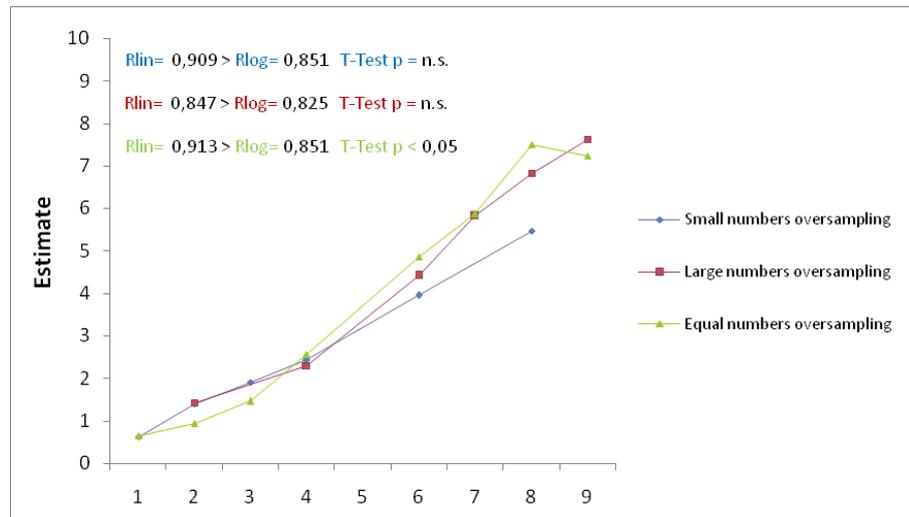


Fig. 4.25. Punto stimato *Quantità Discrete Scuola dell'infanzia*

Nella prima elementare è risultato: Small numbers oversampling  $R_{lin} = 0,883 > R_{log} = 0,829$ ; Large numbers oversampling  $R_{lin} = 0,843 > R_{log} = 0,828$ ; Equal oversampling  $R_{lin} = 0,918 > R_{log} = 0,863$ , dove il valore al T-Test è  $p < 0,05$  nell'equal oversampling.

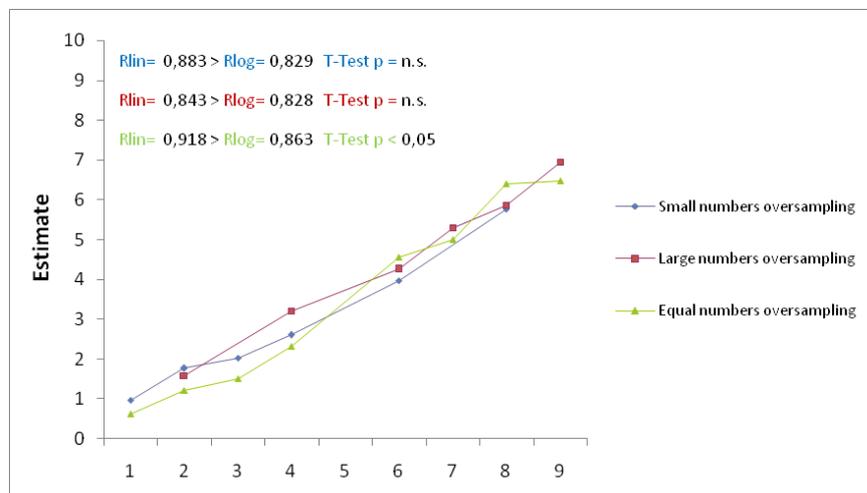


Fig. 4.26. Punto stimato *Quantità Discrete Prima elementare*

Nella seconda elementare i risultati sono: Small numbers oversampling  $R_{lin} = 0,946 > R_{log} = 0,878$ ; Large numbers oversampling  $R_{lin} = 0,922 > R_{log} = 0,881$ ; Equal oversampling  $R_{lin} = 0,938 > R_{log} = 0,875$ , dove il valore al T-Test è  $p < 0,05$  in tutti i campionamenti.

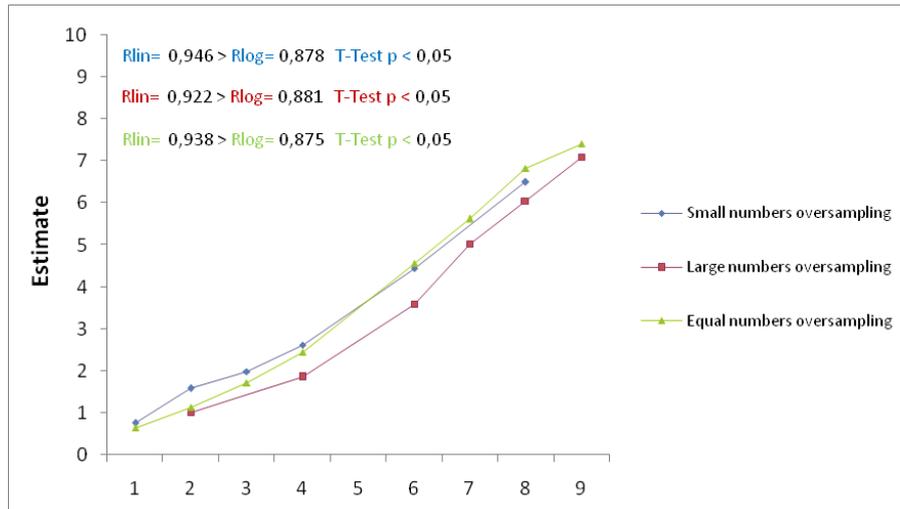


Fig. 4.27. Punto stimato *Quantità Discrete Seconda elementare*

Anche nella quinta elementare i risultati sono: Small numbers oversampling  $R_{lin} = 0,971 > R_{log} = 0,897$ ; Large numbers oversampling  $R_{lin} = 0,956 > R_{log} = 0,929$ ; Equal oversampling  $R_{lin} = 0,971 > R_{log} = 0,902$ . Anche qui il valore al T-Test è  $p < 0,05$  in tutti i campionamenti.

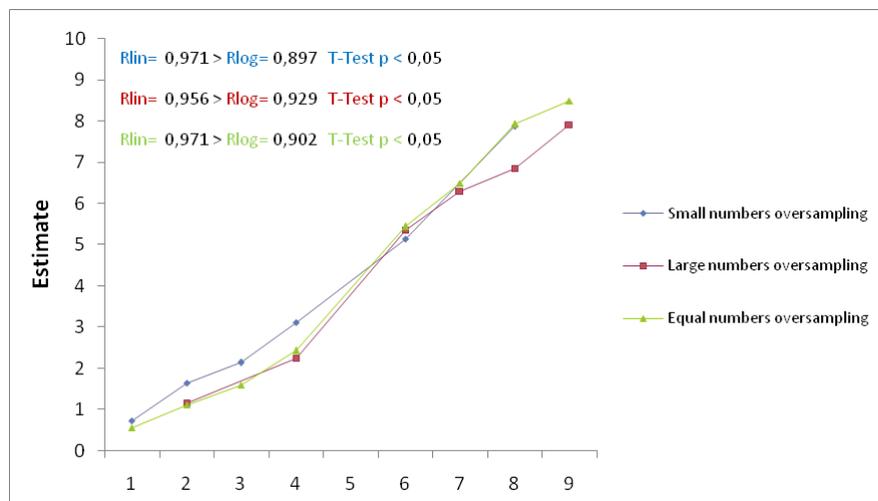


Fig. 4.28. Punto stimato *Quantità Discrete Quinta elementare*

## 4.6 Esperimento 4: Quantità Continue

### 4.6.1 Materiale

Abbiamo utilizzato un Number to Position con una linea lunga 20 cm con agli estremi due bicchieri, uno vuoto e uno pieno. La consegna era la stessa del compito 0-10

Le sequenze di numeri erano pseudo-randomizzate e i target ripetuti due volte:

**Quantità Continue**, ogni sequenza ripetuta due volte.

**Small numbers/quantities oversampling:** 1, 2, 3, 4, 6, 8.

**Large numbers/quantities oversampling:** 2, 4, 6, 7, 8, 9.

**Equal numbers/quantities oversampling:** 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9.

### 4.6.2 Risultati:

Anche in questo compito il fitting migliore è risultato quello lineare, infatti, nell'ultima classe di scuola materna i punteggi sono: Small numbers oversampling  $R_{lin} = 0,898 > R_{log} = 0,812$ ; Large numbers oversampling  $R_{lin} = 0,948 > R_{log} = 0,900$ ; Equal oversampling  $R_{lin} = 0,938 > R_{log} = 0,863$ . Qui il valore al T-Test è  $p < 0,05$  tranne che nel Large oversampling.

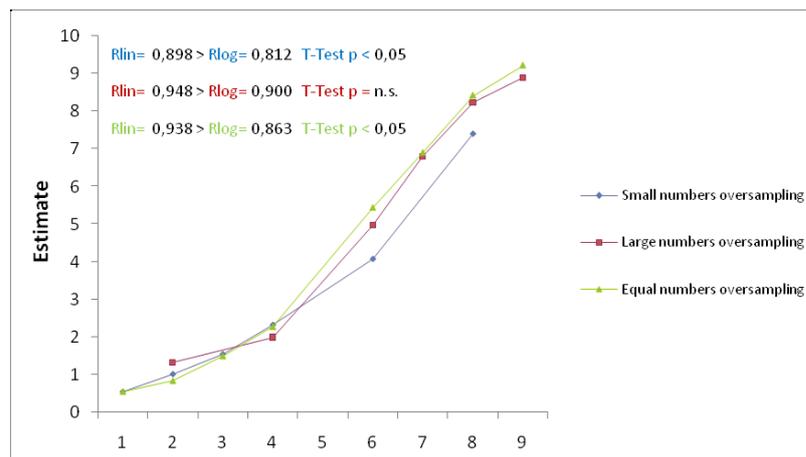
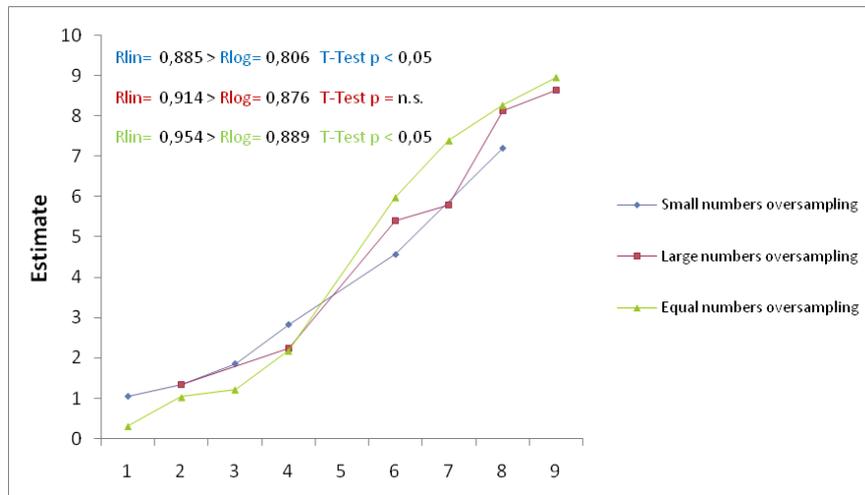


Fig. 4.29. Punto stimato Quantità Continue Scuola dell'infanzia

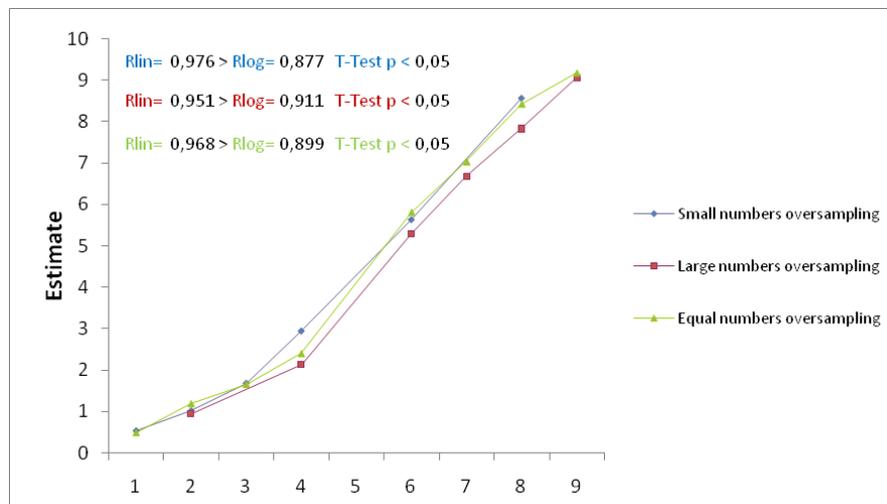
In prima elementare i valori sono: Small numbers oversampling  $R_{lin} = 0,885 > R_{log} = 0,806$ ; Large numbers oversampling  $R_{lin} = 0,914 > R_{log} = 0,876$ ; Equal oversampling

$R_{lin} = 0,954 > R_{log} = 0,889$ . Anche qui il valore al T-Test è  $p < 0,05$  tranne nel Large oversampling.



*Fig. 4.30. Punto stimato Quantità Continue Prima elementare*

Nella seconda elementare troviamo: Small numbers oversampling  $R_{lin} = 0,976 > R_{log} = 0,877$ ; Large numbers oversampling  $R_{lin} = 0,951 > R_{log} = 0,911$ ; Equal oversampling  $R_{lin} = 0,968 > R_{log} = 0,899$ . Qui il valore al T-Test è sempre  $p < 0,05$ .



*Fig. 4.31. Punto stimato Quantità Continue Seconda elementare*

Anche nella quinta elementare troviamo: Small numbers oversampling  $R_{lin} = 0,967 > R_{log} = 0,868$ ; Large numbers oversampling  $R_{lin} = 0,974 > R_{log} = 0,936$ ; Equal oversampling  $R_{lin} = 0,980 > R_{log} = 0,907$ , dove il valore al T-Test è sempre  $p < 0,05$ .

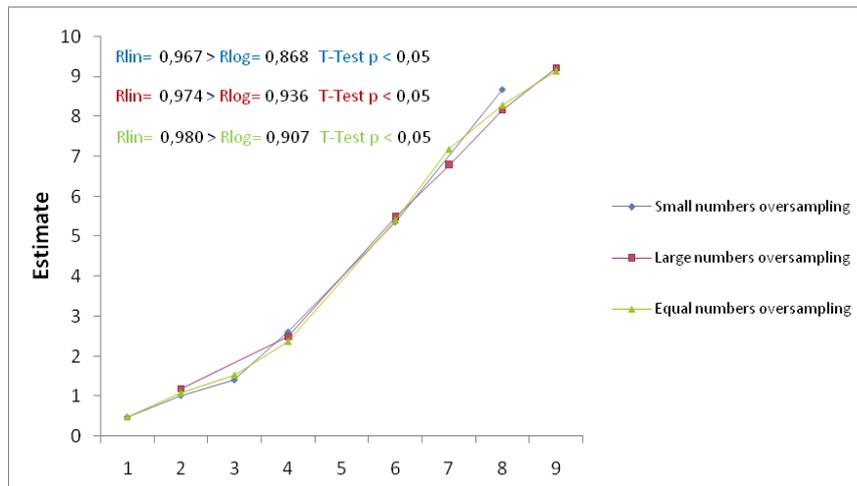


Fig. 4.32. Punto stimato *Quantità Continue Quinta elementare*

#### 4.7 Discussione dello studio

Sulla base di una rassegna degli studi precedenti che avevano utilizzato il Number to Position task, avevamo avanzato l'ipotesi che l'andamento logaritmico osservato nel posizionamento su una linea orizzontale delle magnitudo numeriche corrispondenti alla serie crescente dei numeri naturali nei bambini in età prescolare e di prima elementare, potesse essere stato indotto dalla più alta frequenza di campionamento dei numeri o delle numerosità più piccole. Inoltre avevamo notato che tale andamento logaritmico sembrava essere più evidente per i range numerici-sperimentali "0-100" e "0-1000" rispetto al range "0-10" che comprendeva solamente i numeri appartenenti alla prima decina. Nel nostro studio, indipendentemente dal oversampling dei numeri piccoli, di quello dei numeri grandi o dal campionamento bilanciato di numeri piccoli e grandi, nel compito di NtoP non abbiamo avuto modo di osservare una distribuzione logaritmica nel posizionamento soggettivo delle quantità numeriche su una linea orizzontale. Tale distribuzione logaritmica non è stata riscontrata in alcuno dei range di numeri utilizzati (0-10, 0-100) indipendentemente dal tipo di rappresentazione numerica utilizzata nel compito (i.e. arabica, discreta visiva, continua visiva).

Un'attenta analisi dei dati osservati nel range 0-100 ha però fornito delle informazioni molto utili riguardo i cambiamenti e le costanti evolutive che si osservano nell'esecuzione del compito. Innanzitutto, è importante dire che, per tutti i numeri compresi tra 10 e 100, il

bias d'errore osservato in età prescolare e nelle prime classi segue una linea di regressione con slope negativa ed ha un andamento centripeto rispetto alla linea: più il numero è piccolo e più la sua posizione viene spostata verso destra rispetto alla sua posizione effettiva sulla linea e, viceversa, più il numero è grande più la sua posizione viene spostata alla sinistra della sua posizione effettiva sulla linea. Tale andamento del bias d'errore, per i numeri compresi tra 10 e 100 è soggetto a due fattori principali. Il primo fattore è relativo al tipo di campionamento utilizzato: il punto di regressione centripeta dell'errore (cioè il numero per il quale l'errore è uguale a zero, che corrisponde al punto di intercetta della linea di regressione sull'ascissa) si sposta verso numeri più grandi a seguito di un oversampling dei numeri piccoli e verso numeri relativamente più piccoli a seguito di un oversampling dei numeri grandi. In caso di campionamento bilanciato dei numeri si osserva una situazione intermedia rispetto alle due precedenti. Il secondo fattore, che è qui teoricamente più rilevante, è quello evolutivo. Indipendentemente dal tipo di campionamento, al progressivo crescere dell'età scolare si osserva infatti una progressiva sparizione del bias d'errore ed una sempre migliore coincidenza tra posizione soggettiva ed oggettiva dei numeri sulla linea orizzontale. Questo vuol dire che, all'aumentare dell'esperienza, i bambini diventano più accurati nel posizionare quantità numeriche su una linea orizzontale.

In secondo luogo, sempre nel range 0-100, per i numeri compresi tra 0 e 10 è stata osservata una relazione positiva tra grandezza del numero e positività dell'errore: più il numero era grande, più veniva spostato sulla destra della sua posizione effettiva sulla linea. Anche questo andamento del bias d'errore era influenzato dalla modalità di campionamento e dall'educazione scolare. In generale il bias d'errore si riduceva progressivamente in funzione dell'età scolare. All'interno di questo fenomeno, però, era osservabile una caratteristica importante e cioè, che l'andamento del bias d'errore riscontrato nelle prove con oversampling dei numeri piccoli, cioè nella sola condizione sperimentale utilizzata in tutti gli studi precedenti, si manteneva inalterato per tutte le età scolari considerate. Tale risultato sembra quindi essere in accordo con la possibilità che la maggiore spazializzazione delle numerosità piccole sulla linea possa essere significativamente influenzata dalla modalità di campionamento utilizzata nel compito NtoP.

In terzo luogo l'ispezione dei grafici del bias d'errore ha messo in luce come nelle fasi scolari iniziali, il bias positivo d'errore osservato per numeri minori di 10 subisse una fortissima amplificazione e raggiungesse il suo picco in corrispondenza dei numeri che

seguivano immediatamente quelli della prima decina (11 o 12 a seconda del campionamento utilizzato). Per analizzare in modo quantitativo questo fenomeno ed il suo andamento evolutivo, abbiamo studiato i cambiamenti del valore della slope della linea di regressione descrivente l'andamento dell'errore nei numeri da 0 a 11 o 12 (a seconda del campionamento utilizzato) in funzione dell'età scolare. Tale analisi ha messo in luce che indipendentemente dal campionamento utilizzato la slope fortemente positiva, che si osserva in età prescolare, mostra un progressivo appiattimento, corrispondente ad una normalizzazione della rappresentazione delle quantità numeriche più grandi di 10, nella classe finale del ciclo elementare. Riassumendo, l'andamento del bias d'errore che si osserva nel compito 0-100 nelle prime fasi di età scolare, sembrerebbe essere ben descritto da una funzione bi-lineare composta da una funzione lineare con andamento positivo per i numeri compresi tra 0 ed il primo numero appartenente alla seconda decina (11 o 12) ed una funzione lineare con slope negativa a partire da tale numero in poi. Questi dati sembrano essere in accordo con gli andamenti di una ricerca precedente di Moeller, Nuerk, (2009). Rispetto agli studi precedenti i campionamenti adottati nel nostro studio ci hanno permesso inoltre di evidenziare come la normalizzazione evolutiva nella rappresentazione spaziale delle numerosità, sembra essere largamente, se non esclusivamente imputabile, alla riduzione del bias d'errore per i numeri successivi a quelli della prima decina.

In conclusione, i dati osservati della somministrazione del NtoP nel range 0-100 non sembrano interpretabili in termini di un passaggio da una rappresentazione logaritmica ad una lineare delle magnitudo numeriche. Di conseguenza la performance nel compito NtoP non sembra riflettere fedelmente la possibile rappresentazione con andamento logaritmico delle quantità numeriche suggerita dagli studi di neurofisiologia e da un punto di vista psicofisico dal *Size e distance Effect*.

Queste conclusioni sembrano essere ulteriormente rafforzate dai risultati ottenuti nel compito NtoP utilizzando il range 0-10. In questo caso, indipendentemente dal campionamento utilizzato, indipendentemente dall'età scolare considerata ed indipendentemente dal materiale utilizzato (arabico, discreto, continuo) non abbiamo mai osservato un andamento logaritmico nel posizionamento dei numeri sulla linea visiva. Per quel che riguarda il materiale arabico l'andamento è risultato addirittura esponenziale fino alla seconda elementare, mentre nella classe di quinta elementare l'andamento era ugualmente ben descritto sia da una funzione esponenziale che da una lineare. Per le quantità discrete e continue l'andamento è risultato essere sempre lineare.

Dall'osservazione dei grafici dello studio di Berteletti et al. (2010) per i Middle Group e per gli Oldest Group (corrispondenti alla nostra materna e prima elementare) sembrerebbe che, nel compito con range 0-10, anche in quel caso non vi è una funzione logaritmica ma piuttosto esponenziale, coerente con i nostri risultati.

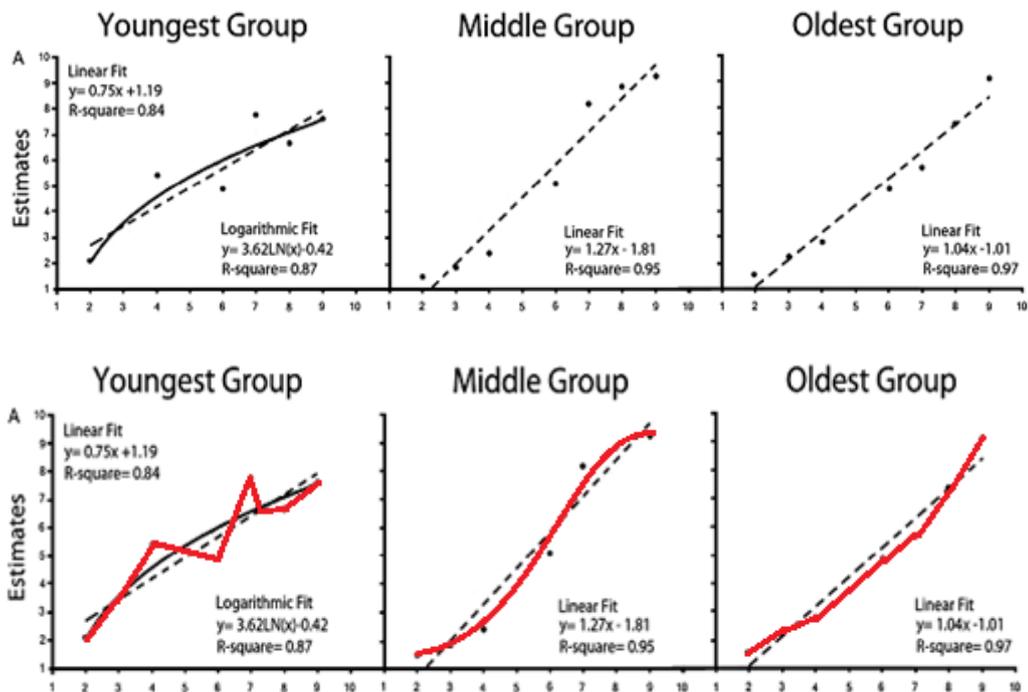


Fig. 4.33. Berteletti et al. (2010)

Questi dati sembrano fornire due indicazioni principali: la prima è che anche in questo caso, come nel caso 0-100, l'andamento della rappresentazione spaziale delle quantità numeriche, esponenziale o lineare, non sembra riflettere in alcun modo la codifica logaritmica centrale delle stesse quantità. La seconda è che, a parità di range quantitativo, la codifica spaziale delle quantità arabe ha un andamento diverso da quello della rappresentazione numerica di tipo discreto e continuo visivo. Tale dissociazione potrebbe indicare una diversa codifica cognitiva tra questi tipi di rappresentazioni di magnitudo numeriche.

## V Capitolo

### **Effetto della posizione dell' intervallo numerico all' interno della decina sul bias di bisezione mentale-numerica (Number Interval Position Effect, NIPE): uno studio in età evolutiva.**

#### *5.1 Introduzione*

Nel corso di secoli di evoluzione culturale, l'uso del sistema numerico in base dieci, è stato largamente accettato tra gli esseri umani (Ifrah, 2000). Sebbene l'origine dei decimali è possibile sia fatta risalire al contare con le dita delle mani (Ifrah, 2000; Dehaene, 1997), il suo successo si basa sulla possibilità di rappresentare con precisione la quantità e l'ordine di un qualsiasi insieme di elementi con un numero limitato di simboli e di regole. Comunque, le cifre simboliche seguono, sia filogeneticamente che ontogeneticamente, rappresentazioni numeriche non simboliche, che si sono sviluppate in base al modo in cui il cervello rappresenta lo spazio visivo e consente la stima approssimativa della numerosità (Walsh, 2003; Siegler, Opfer, 2003; Verguts, Fias, 2004). La codifica spaziale influenza sia i risultati più alti del pensiero matematico, come ad esempio l'invenzione di coordinate Cartesiane, che la definizione delle strategie computazionali di base. Tra questi vi è l'abitudine di allineare i numeri su una linea numerica mentale (MNL).

Studi di psicofisica (Dehaene, Bossini, Giraux, 1993; Loetscher, Schwarz, Schubiger, Brugger, 2008) e indagini su pazienti cerebrolesi (Zorzi, Priftis, Umiltà, 2002; Doricchi, Guariglia, Gasparini, Tomaiuolo, 2005) mostrano che in culture con lettura da sinistra a destra, i valori numerici in ordine crescente sono implicitamente classificati da sinistra a destra. Resoconti introspettivi di lettori che leggono da sinistra a destra che esperiscono esplicitamente un'organizzazione spaziale dei numeri, vale a dire, "sinestesia per i numeri" (Galton, 1880; Sagiv, Simner, Collins, Butterworth, Ward, 2006), confermano il prevalente orientamento sinistra-destra della MNL. Tuttavia, le relazioni stesse evidenziano che la forma della MNL mostra grande variabilità: si sviluppa spesso in senso

orizzontale, ma può anche svilupparsi in verticale o orizzontale alternata, segmenti verticali, diagonali o curvi. Nonostante queste variazioni, tutti questi studi sono notevolmente omogenei nel riportare la presenza di punti di riferimento, giri, interruzioni, (Galton, 1880) o variazioni di luminosità e colore in prossimità dei bordi che separano le decine e le centinaia sulla MNL (Galton, 1880; Spalding, Zangwill, 1950).

Doricchi e collaboratori nel 2009 hanno pubblicato un lavoro nel quale ci si preoccupava di analizzare il bias dell'orientamento spaziale nel sistema decimale numerico (Doricchi, Merola, Aiello, Guariglia, Bruschini, Gevers, Gasparini, Tomaiuolo, 2009). A prima vista sembrerebbe che gli esseri umani mappano i numeri su una linea mentale numerica (MNL) dove i numeri interi piccoli si trovano a sinistra di quelli più grandi (Galton, 1880; Dehaene, Bossini, Giraux, 1993). Sempre nel medesimo studio è stato mostrato che gli adulti spostano sistematicamente il punto medio soggettivo di un intervallo numerico dai bordi che separano decine contigue lungo la MNL. A parità di lunghezza dell'intervallo numerico, il bias dell'errore di bisezione varia sistematicamente in funzione della posizione occupata dall'intervallo all'interno della decina di appartenenza. Questo effetto è stato chiamato Number Interval Position Effect (NIPE).

Allo stesso modo, pazienti cerebrolesi destri trascurano il lato sinistro della MNL (Zorzi, Priftis, Umiltà, 2002; Doricchi, Guariglia, Gasparini, Tomaiuolo, 2005), mostrando un aumento patologico della deviazione verso il punto finale della bisezione di intervalli numerici posizionati vicino il punto di partenza della decina e riducendo la deviazione per gli intervalli posizionati verso il punto finale della decina. Questi dati mettono in luce gli effetti che il raggruppamento ricorsivo di cifre decimali simboliche, ha portato sulla precedente rappresentazione spaziale delle grandezze numeriche (Walsh, 2003; Siegler, Opfer, 2003).

Nello studio di Doricchi et al. (2009) è stato dimostrato che la segmentazione introspettiva della MNL, riportata dai sinestesici, rispecchia fedelmente (Kadosh, Henik, 2007) la rappresentazione spaziale che il cervello umano assegna a raggruppamenti ricorsivi dei numeri decimali all'interno delle decine. Si dimostra anche che, quando gli esseri umani compiono semplici deduzioni numeriche, come la stima del punto medio dell'intervallo tra due numeri, essi spontaneamente suddividono la MNL in subunità spaziali corrispondenti alla base del sistema decimale e, soprattutto, prendono come riferimento principale i confini e il centro di queste unità.

Questo è reso evidente dalla presenza di una deviazione sistematica dei punti medi soggettivi distanti dai bordi delle decine di intervalli numerici. In altre parole, i soggetti tendono a deviare verso il centro del intervallo numerico (deviazione centripeta).

Doricchi et al. (2009) hanno presentato in questo articolo tre studi.

Il primo studio era una bisezione di intervalli numerici in pazienti cerebrolesi destri e soggetti sani. È stato preso un campione di 43 pazienti destri e 31 soggetti sani anziani della stessa età dei pazienti. Il gruppo dei pazienti era composto da: 16 pazienti con neglect senza emianopsia (N+ H-), 6 con neglect ed emianopsia (N+ H+), 14 senza neglect e senza emianopsia (N- H-), 7 con emianopsia ma senza neglect (N- H+).

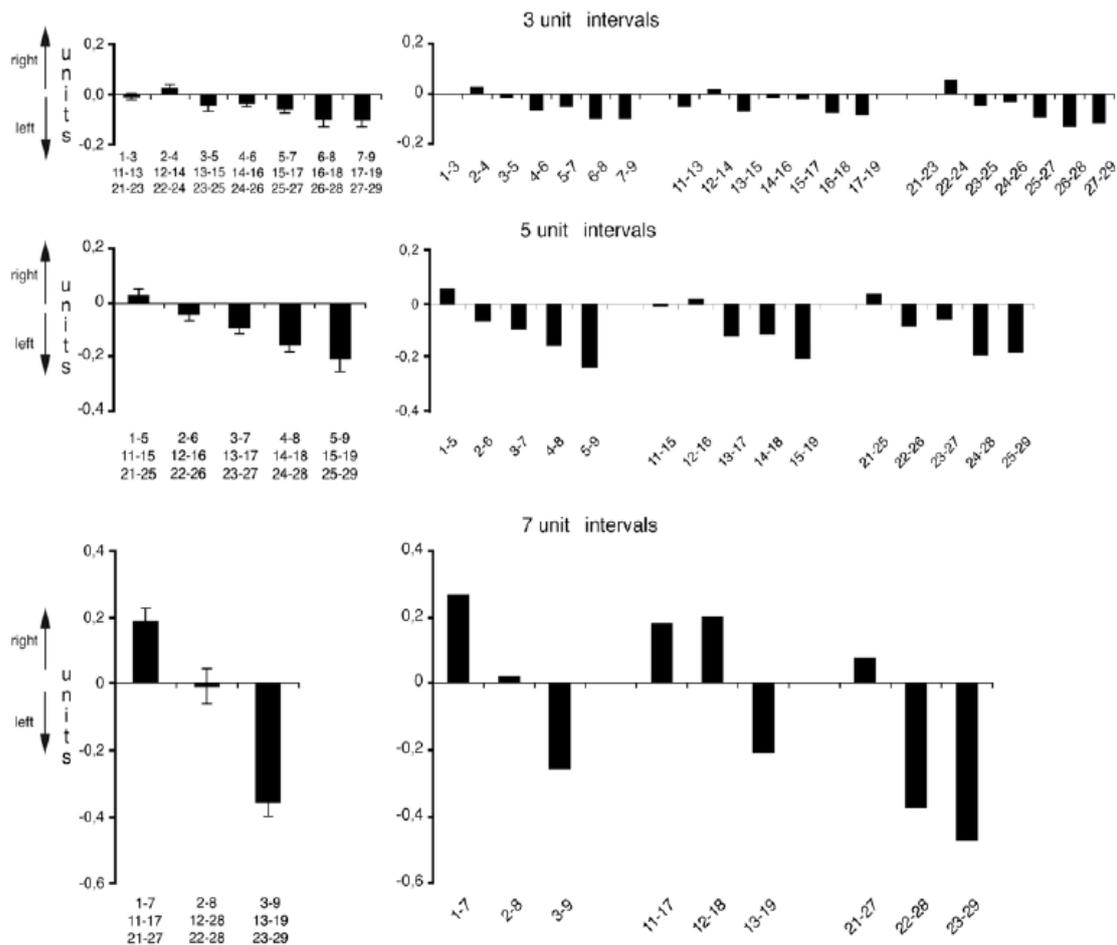
Il primo obiettivo è stato quello di verificare se la performance nel compito di bisezione di linee visive (2, 10 e 20 cm di lunghezza) potesse essere paragonata a quella nel compito di bisezione di intervalli numerici (3, 5, 7, e 9 unità appartenenti alle prime tre decine). Dai risultati è emerso che i pazienti con neglect spostano il punto medio della linea più lunga, molto più a destra rispetto agli altri pazienti. È stato trovato anche uno shift verso il punto finale nella bisezioni di intervalli numerici lunghi, ma in questo caso lo spostamento coinvolgeva tutto il gruppo sperimentale. La deviazione degli intervalli numerici non era legata alla severità del neglect ma alla memoria immediata di sequenze di posizioni spaziali (tast di Corsi) e numeriche (digit span). Tutto il gruppo di partecipanti è stato diviso in due sottogruppi, Devianti e non-Devianti nel compito di bisezione numerica. Dato che, nei pazienti con neglect, la deviazione verso destra nella bisezione di linee è incrementata quando le linee sono posizionate nell'emispazio negletto di sinistra mentre è ridotta quando le linee vengono posizionate nell'emispazio di destra, il passo successivo è stato quello di controllare se esistesse un effetto simile nella bisezione di intervalli numerici in funzione della loro posizione sulla MNL (es. l'intervallo 1-5 e 5-9, equivalenti in lunghezza, occupano rispettivamente la parte sinistra e destra della MNL). Dai risultati si evince che: maggiore è la prossimità dell'intervallo al punto finale delle decine, più gli intervalli piccoli di 3 unità vengono bisecati verso l'inizio della stessa. Gli intervalli da 5 e 7 unità presentano una compressione centripeta, quindi, più gli intervalli si trovano verso l'estremo iniziale delle decine più forte è il bias verso il punto finale e viceversa. Questi effetti di natura spaziale sono presenti sia nei pazienti che nei controlli sani. Inoltre, è importante che la compressione spaziale è presente in ognuna delle decine prese in esame.

Il secondo studio era una bisezione di intervalli numerici e linee visive in soggetti giovani sani. Le indagini descritte sopra sono state estese ad un gruppo di 31 soggetti giovani e sani. La compressione spaziale era presente in tutti gli intervalli e in ogni decina.

Si è visto che le linee visive posizionate nell'emispazio destro venivano bisecate più a destra rispetto alle linee posizionate al centro o nell'emispazio di sinistra. Questa deviazione centrifuga con le linee posizionate a destra rispetto al soggetto era radicalmente opposta alla deviazione crescente centripeta osservata nella bisezione di intervalli numerici posizionati verso il punto finale dell'intervallo.

Il terzo studio riguardava bisezioni di intervalli numerici posizionati all'interno e a cavallo di decine consecutive. Questo studio è stato fatto per evitare che i risultati dei primi due studi fossero dovuti all'uso di numeri all'interno della decina. Quindi sono stati inclusi intervalli numerici a cavallo delle decine (across decades) ed è stato testato un nuovo campione di 30 soggetti giovani. Si è vista una compressione spaziale negli intervalli 5 e 7 nelle decine. Questi effetti erano uguali tra le diverse decine. Inoltre negli intervalli di 7 unità across-decades, è stato osservato un effetto di posizione simile a quello riscontrato all'interno delle decine, quindi, un intervallo più era vicino al bordo della decina, più il suo punto medio veniva spostato nella direzione opposta.

Di seguito ho riportato i grafici con i dati dei partecipanti di controllo del primo secondo e terzo studio.



**Fig 5.1.** dati dei soggetti di controllo dei tre studi divisi nei tre intervalli

Le evidenze comportamentali e neurofisiologiche mostrano che le rappresentazioni di numerosità crescente si sovrappongono sempre più, diventando così sempre meno distinguibili da quelle adiacenti (Moyer, Landauer, 1967; Nieder, Miller, 2003). I risultati di questo studio hanno fornito nuove proprietà spaziali della MNL, costituite da una ricorsiva compressione simmetrica delle grandezze numeriche distanti dai bordi delle decine. All'interno della bisezione degli intervalli di unità 7 e 9, sono state trovate anche alcune prove di compressione verso il centro dell'intera estensione dello spazio sotteso dalle decine consecutive. Questi dati suggeriscono che la MNL può essere contemporaneamente mappata sia in base ad un modulo spaziale ricorsivo basato su decine, sia lungo una rappresentazione olistica che include decine consecutive (Nuerk, Weger, Willmes, 2001; Dehaene, Dupoux, Mehler, 1990). Più in generale, lo studio mostra che, anche in compiti che richiedono risposte verbali, i simboli numerici possono essere rappresentati in modo compresso sulla MNL (Kadosh, Tzelgov, Henik, 2008;

Verguts, Van Opstal, 2008). La dissociazione tra il compito di bisezione numerica e quello di bisezione di linee visive è così evidente che 6 pazienti del campione hanno mostrato una marcata deviazione ipsilesionale solamente nella bisezione di intervalli numerici. L'indagine anatomica ha confermato questa dissociazione, rilevando il coinvolgimento specifico di una lesione della sostanza bianca sottostante le aree prefrontali implicate nella trasformazione della grandezza (Nieder, Merten, 2007; Hubbard, Piazza, Pinel, Dehaene, 2005) in tutti i pazienti che mostrano una deviazione verso destra nella bisezione di intervalli numerici. Al contrario, il coinvolgimento ulteriore di lesioni della giunzione ventro-temporo-parietale, che non rispondono alla codifica delle grandezze, ma che sono soprattutto legate al neglect spaziale, è stato trovato solo nei pazienti che hanno mostrato una deviazione verso destra anche nella bisezione di linee visive.

La compressione centripeta delle magnitudo entro le decine è analoga alle deviazioni che sono state riscontrate nel *pointing* verso posizioni memorizzate di target lateralizzati (Sheth, B.R., and Shimojo, S., 2001; Revol, P., Rossetti, Y., Vighetto, A., Rode, G., Boisson, D., and Pisella, L., 2003). Le deviazioni centripete maggiori sono state osservate per i periodi più lunghi di delay tra la presentazione del target e il pointing e, esattamente come la bisezione di intervalli numerici, per i target presentati a maggiore eccentricità. Questo suggerisce che posizionare i numeri sulla MNL coinvolge meccanismi che convertono la memoria a breve termine di posizioni spaziali in output motori spazialmente appropriati.

Questa interpretazione è in linea con la proposta di un collegamento tra i meccanismi neurali per l'orientamento visuo-motorio e lo spazio dei numeri, raccolti da studi sugli effetti di adattamento prismatico nella bisezione della MNL (Rossetti, Jacquin-Courtois, Rode, Ota, Michel, Boisson, 2004).

I dati qui riportati indicano anche un'associazione tra deviazione verso destra nella bisezione di intervalli numerici e deficit del recupero immediato di sequenze ordinate dello spazio (Doricchi, Guariglia, Gasparini, Tomaiuolo, 2005) e stimoli verbali. Entrambi i fattori temporali, ad esempio, i valori più alti dovrebbero venire dopo quelli più bassi, e le abitudini di codifica spaziale, ad esempio, i valori più alti dovrebbero venire dopo quelli più bassi, perché sono a destra di quelli più piccoli in lettori da sinistra a destra, potrebbero contribuire alla strutturazione mentale tra simboli numerici. Un bias nel mantenimento in memoria degli items iniziali, mentre si esplora la sequenza di numeri ordinali che compongono l'intervallo, potrebbe quindi contribuire alla deviazione verso destra nella bisezione di intervalli più lunghi (come suggerito da Van Dijck e al). Complessivamente,

le evidenze qui riportate, suggeriscono che individuare esplicitamente le grandezze sulla MNL dipende da una illusione mentale e dall'aumento numerico di sequenze ordinate nel sistema di riferimento spaziale (Fias, Lammertyn, Caessens, Orban, 2007; Tang, Ward, Butterworth, 2008), utilizzato per dirigere i movimenti di *pointing* per raggiungere le posizioni memorizzate.

In sintesi, la compressione ricorsiva delle grandezze nelle decine divulgate dallo studio di Doricchi et al. (2009), rivela gli effetti specifici che il successo culturale del sistema simbolico decimale ha portato alla rappresentazione spaziale non simbolica delle grandezze che “gli esseri umani condividono con i primati, tipo, gli uccelli e gli anfibi”(Ansari, 2008).

È importante dire che questi andamenti erano presenti solo quando, nella bisezione di intervalli numerici, veniva chiesto al soggetto di non fare calcoli e non utilizzare strategie. Al contrario, gli andamenti non venivano replicati nella bisezione formale di intervalli numerici, vale a dire quando al soggetto veniva chiesto di calcolare la media aritmetica tra i due numeri dell'intervallo.

Questo indica che il bias d'errore nella bisezione di intervalli numerici, quindi, la struttura e soprattutto la ricorsività del NIPE, attraverso le decine successive, sembrano riflettere l'influenza che l'educazione all'uso del sistema decimale esercita sulla rappresentazione mentale approssimativa delle magnitudo numeriche.

## ***5.2 Studio sperimentale***

### ***5.2.1 NIPE nei bambini***

Dati i risultati dello studio di Doricchi et al. (2009) è stato naturale domandarsi cosa succede quando si chiede di bisecare un intervallo numerico ad un gruppo di bambini che non hanno appreso il sistema metrico decimale e non sono ancora in possesso del concetto di media aritmetica, o che sono all'inizio di tale apprendimento, quindi se la presenza del NIPE sia già riscontrabile in bambini in età prescolare e se questo possa essere soggetto a trasformazioni evolutive lungo il ciclo di studi di scuola elementare.

### **5.3 Esperimento:**

#### **5.3.1 Campione:**

Nel presente studio, appunto, ci siamo proposti di esplorare un campione di bambini di 5 diverse fasce di età : ultimo anno di scuola materna (5 anni; n = 42 ), 1° elementare (6 anni: n = 25), 2° elementare (7anni: n = 61), 3° elementare (8 anni: n = 24) e 5° elementare (10 anni: n = 82), per un campione totale di 234 soggetti.

Le scuole che hanno partecipato sono: la scuola primaria “Don Filippo Rinaldi”; i plessi di Passoscuro, Torre in Pietra, Palidoro e Aranova facenti parte del centocinquantesimo circolo didattico di Torre in Pietra, comune di Fiumicino (RM); l’istituto comprensivo “Orsa Maggiore”. Per la selezione del campione è stato utilizzato il test di valutazione matematica AC-MT 6-11.

#### **5.3.2 Materiale :**

Il primo compito somministrato, *test di valutazione delle abilità di calcolo – Gruppo MT*, è un test oggettivo composto di due parti, per la valutazione del livello di apprendimento del calcolo (in bambini dai 6 agli 11 anni), che nasce dall’esigenza di possedere uno strumento di valutazione delle abilità numeriche, di facile somministrazione e con valide proprietà psicometriche.

La prima parte “carta-matita”, che può essere somministrata o al singolo bambino o a tutto il gruppo classe, si compone di cinque prove (*operazioni scritte, giudizio di numerosità, trasformazioni in cifre, ordinamento di numerosità dal minore al maggiore, ordinamento di numerosità dal maggiore al minore*) che valutano in forma generale le abilità di calcolo del bambino.

La seconda parte, somministrata individualmente, si compone di ulteriori cinque prove (*calcolo a mente, calcolo scritto, enumerazione, dettato di numeri, recupero di fatti numerici*) che valutano, oltre alla correttezza dello svolgimento, anche il tempo impiegato per la soluzione degli esercizi proposti. Ognuna delle due parti, fornisce punteggi che si riferiscono a quattro indici (due ottenuti nella parte “carta-matita” e due nella parte individuale).

I primi due indici, *operazioni scritte in classe* e *accuratezza*, pur appartenendo a prove distinte (il primo alla parte “individuale”, il secondo a quella “collettiva”) si riferiscono alla stessa variabile e indicano quanto il bambino risponda correttamente agli esercizi proposti. Il terzo indice *tempo totale* valuta, per la parte individuale, la velocità di calcolo fornendo una misura di velocità generale nell’esecuzione delle prove. Infine, il quarto indice *conoscenza numerica* per la parte collettiva, fornisce informazioni circa l’abilità di comprendere e riprodurre gli “elementi di base del mondo numerico”. L’utilizzo del test AC-MT, particolarmente vantaggioso per la sua facilità di somministrazione, permette principalmente di fornire un quadro chiaro delle abilità matematiche del bambino, collocandolo all’interno di quattro fasce di prestazione (*ottimale, sufficiente, richiesta di attenzione, richiesta di intervento*) i cui valori normativi di riferimento risultano particolarmente utili per analizzare le prestazioni del bambino e collocare così il punteggio ottenuto rispetto alla media della classe o del gruppo di appartenenza. Nella somministrazione del test AC-MT, per il nostro studio, non è stata fatta una distinzione tra individuale e collettivo ma entrambe le parti sono state somministrate al bambino, individualmente, in un ambiente silenzioso e separato dal contesto della classe. Per la parte “carta-matita” abbiamo utilizzato quattro prove (ad esclusione della prova *operazioni scritte* poiché non discriminativa per l’esecuzione delle prove successive) mentre, della seconda parte del test, abbiamo utilizzato solo il compito *enumerazione*: in avanti da 1 a 20 per la I elementare; in avanti da 1 a 50 per la II elementare e indietro da 50 a 100 per la V elementare. Per gli esercizi “carta-matita” non veniva chiesto di rispettare un tempo prestabilito mentre, per le prove di enumerazione, veniva chiesto al bambino di contare il più velocemente possibile. E’ stato sia misurato il tempo impiegato per l’esecuzione del compito, sia segnati eventuali errori o omissioni. La somministrazione del test AC-MT ha permesso un inquadramento generale delle abilità matematiche del bambino rispetto all’età e al livello di istruzione atteso per la classe di appartenenza.

Dai risultati di questo test sono stati selezionati tutti i bambini che rientravano nella media rispetto alla loro età e al grado di istruzione.

Successivamente i bambini sono stati invitati a svolgere un compito di number bisection di carattere uditivo con numeri da 1 a 9 per i bambini di materna e di prima e con numeri da 1 a 29 per le altre classi. Gli intervalli dei numeri erano da 3-5 e 7 unità e le coppie venivano presentate in due sessioni separate, forward e backward (Doricchi et al. 2009). Questo compito è stato studiato per i bambini, come anche per gli adulti (vedi sopra), per verificare la rappresentazione spaziale di un intervallo numerico. Come ho già detto, lo

scopo è stato quello di verificare se l'effetto centripeto riscontrato nella bisezione di intervalli numerici di soggetti adulti potesse replicarsi con soggetti giovani e ignari del concetto di media e se quindi il NIPE potesse essere già presente in età prescolare e essere soggetto a trasformazioni nell'arco dello sviluppo.

### **5.3.3 Metodo:**

Nel compito di *number bisection* veniva chiesto ai bambini di indicare il punto medio dell'intervallo numerico il più velocemente possibile e senza contare o utilizzare strategie. Era l'esaminatore che, senza far vedere gli intervalli al bambino, ripeteva i due numeri a voce e segnava su un foglio delle risposte il numero indicato come medio dal bambino, ovviamente anche questo nascosto al bambino per evitare che vedesse se ci fossero errori e di quanto la sua risposta si discostava da quella esatta (es. Dimmi il numero che sta al centro tra 1 e 5). Non è stato ritenuto indispensabile dare un limite di tempo in quanto i bambini, non conoscendo il significato di media, non potevano fare calcoli, specialmente se spinti dall'esaminatore nel dare risposte immediate. L'unica classe, presa in considerazione in questo studio, a conoscenza del concetto di media era la quinta ed in questo caso si voleva proprio vedere se gli andamenti erano differenti da quelli dei bambini più piccoli. Inoltre, il tempo che un soggetto impiega per fare dei calcoli così elementari è molto soggettivo, quindi difficile da manipolare. Questo si può escludere in bambini così piccoli ed inesperti, e i risultati ne danno conferma.

### **5.3.4 Risultati:**

Dai risultati del compito di *number bisection* si evince che l'effetto centripeto è presente in tutti gli intervalli.

È stata fatta un'ANOVA a misure ripetute con fattore principale Posizione per ogni intervallo per ogni gruppo classe separatamente, per verificare se ci fossero differenze tra le posizioni dell'intervallo all'interno della decina e se ci fossero differenze tra le diverse classi, quindi, abbiamo calcolato la media per ogni intervallo di ogni decina per ognuno dei bambini testati; per ottenere un indice che fosse indipendente dalla decina, abbiamo calcolato la media per ogni posizione degli intervalli, a prescindere dalla decina di appartenenza. Abbiamo fatto un'ANOVA a misure ripetute a due fattori per evidenziare

eventuali differenze tra le decine e, soprattutto, l'Effetto di Posizione degli intervalli a prescindere dalla decina di appartenenza (effetto decina, effetto posizione, interazione tra i due), e per evidenziare le differenze tra le classi. Come vedremo, i risultati indicano che l'Effetto Posizione è significativo nella maggior parte dei casi, per ogni intervallo e per ogni classe; l'effetto classe e l'interazione Decina x Posizione non risultano quasi mai significativi.

Per evidenziare la similarità dell'Effetto di Posizione tra le classi, e ipotizzando una variazione della performance a seconda degli intervalli considerati, nei grafici viene rappresentato l'andamento di ogni classe diviso per intervalli. Nelle classi della scuola d'infanzia e in Prima elementare, i bambini sono stati somministrati intervalli appartenenti unicamente alla prima decina; nelle restanti classi, invece, abbiamo analizzato le prime tre decine.

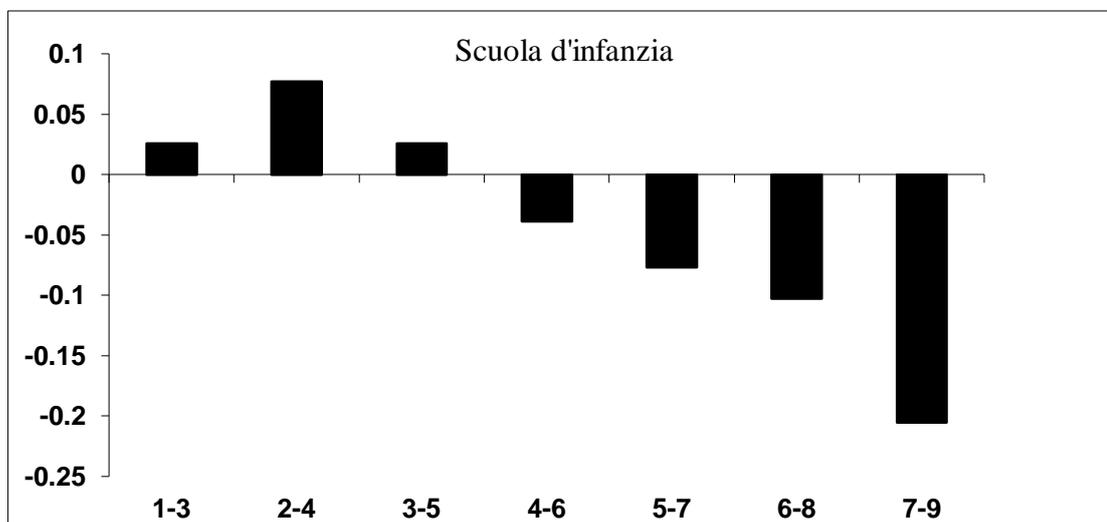
### **Intervallo di 3 unità:**

L'Effetto di Posizione è risultato significativo nella scuola materna e nella classe III e V [Scuola d'Infanzia:  $F(1, 6) = 2.89$ ,  $p = 0.0097$ ; Classe III:  $F(1, 6) = 6.13$ ,  $p = 5.54414E-06$ ; Classe V:  $F(1, 6) = 4.13$ ,  $p = 0.0005$ ]. Nonostante la mancanza di significatività, sia la I che la II classe presentano un andamento che rimarca l'effetto centripeto, con una regressione verso l'inizio della decina per gli intervalli piccoli e uno verso il centro per l'intervallo da 7 unità. È importante sottolineare che, nelle classi II, III e V, l'Effetto di posizione risulta indipendente dalla decina di appartenenza dell'intervallo. Nei post-hoc<sup>3</sup> della scuola d'infanzia è emersa una differenza significativa della posizione 2 rispetto alle posizioni 6 e 7, e della posizione 7 rispetto alle posizioni 1, 2, 3 e 4; nei post-hoc della classe III la posizione 1 è risultata essere significativamente diversa da tutte le altre posizioni; così come la posizione 6, significativamente differente dalle altre posizioni ad eccezione della posizione 7; i confronti post-hoc della V hanno rilevato una differenza significativa tra la posizione 1 e le posizioni 4, 5 e 7 e tra la posizione 2 e le posizioni 3, 4, 5, 6 e 7 (figura 0.0 a, b, c, d, e).

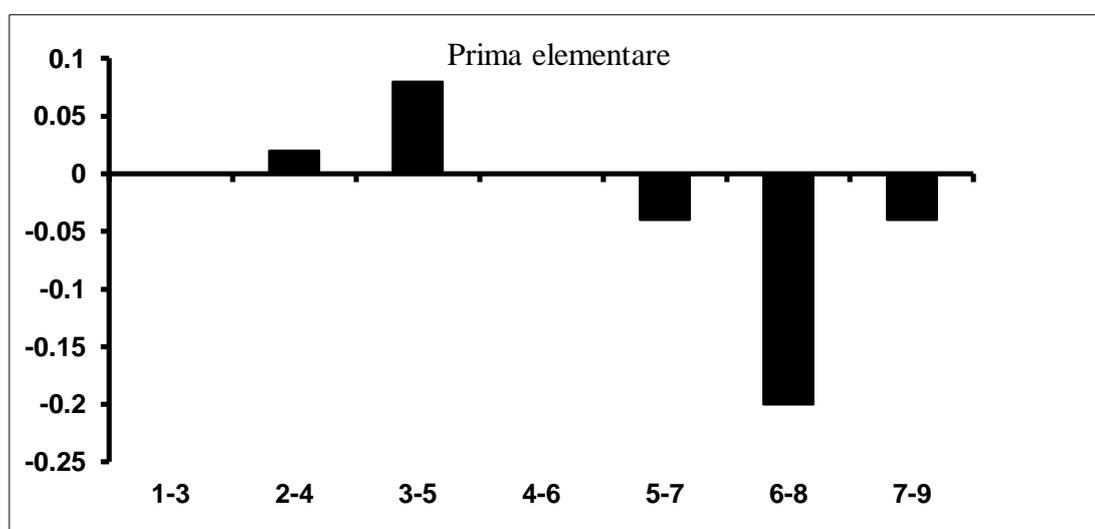
---

<sup>3</sup>Confronti post-hoc condotti con l'approccio LSD, Least Significant Difference.

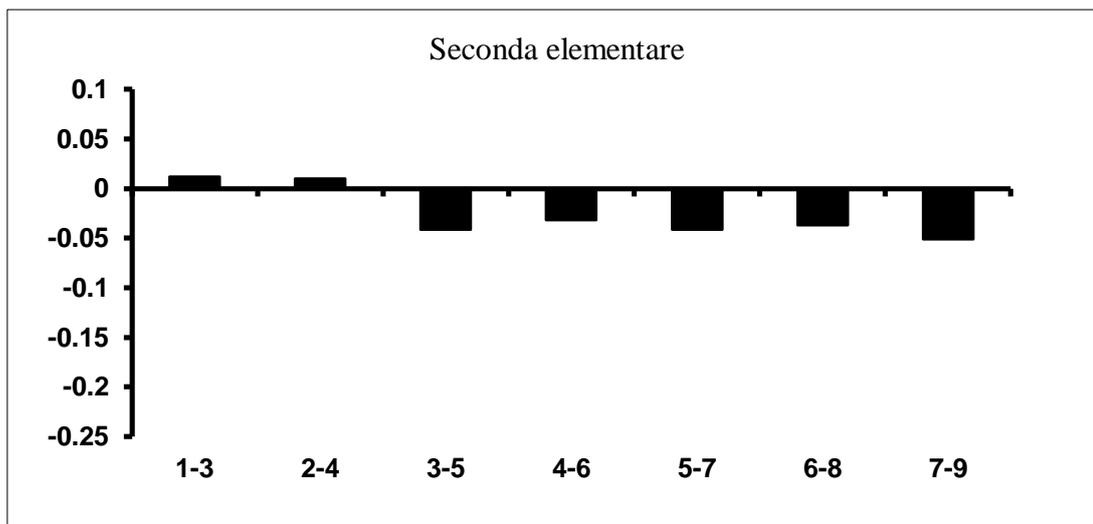
*Figura 5.2. Rappresentazione grafica dell'andamento d'errore di bisezione dell'intervallo da 3 unità nella scuola d'infanzia (a), nelle classi prima (b), seconda (c), terza (d) e quinta (e).*



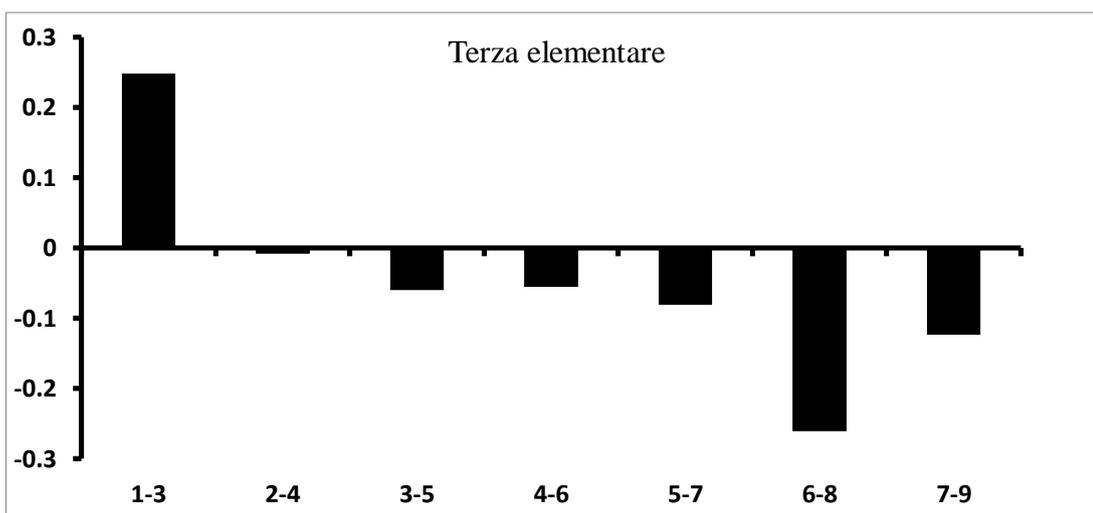
*Figura 5.2 (a). Sull'asse delle X sono riportati gli intervalli analizzati appartenenti alla prima decina, l'unica somministrata in questa classe; sull'asse delle Y è raffigurato l'andamento del bias di risposta.*



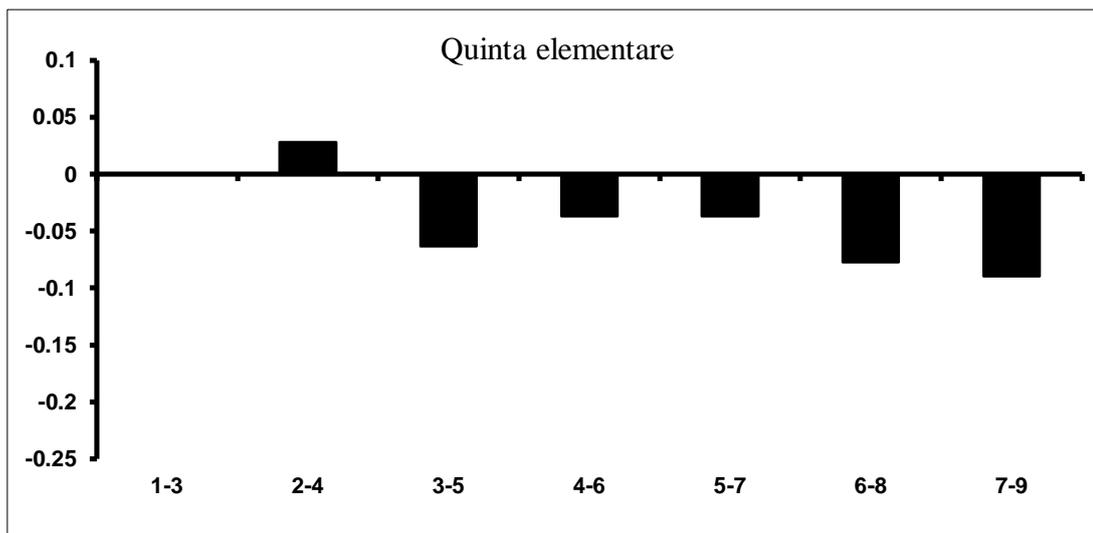
*Figura 5.2 (b). Anche per la classe I, la prima decina è stata l'unica somministrata.*



*Figura 5.2 (c) Sull'asse delle ascisse sono riportate le posizioni degli intervalli indipendentemente dalla decina: per esempio, la Pos 1 comprende gli intervalli 1-3, 11-13, 21-23; la Pos 2: 2-4, 12-14, 22-24 e così via per le altre posizioni.*

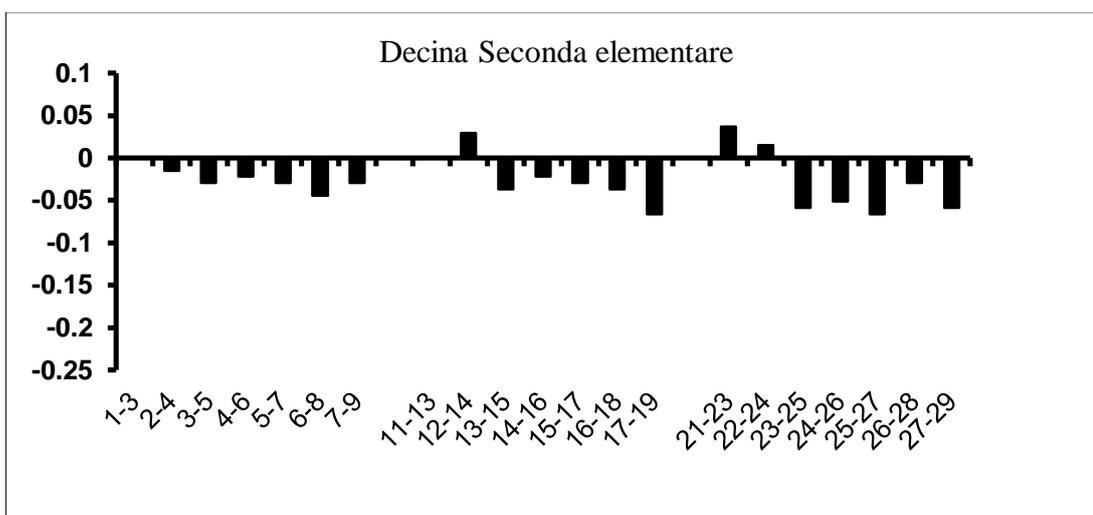


*Figura 5.2 (d) Sull'asse delle ascisse sono riportate le posizioni degli intervalli indipendentemente dalla decina.*



*Figura 5.2 (e).* Sull'asse delle ascisse sono riportate le posizioni degli intervalli indipendentemente dalla decina.

*Figura 5.3. Rappresentazione grafica dell'andamento dell'errore di bisezione delle tre decine separate per la classe II (a), III (b) e V (c).*



*Figura 5.3 (a).* Classe II elementare.

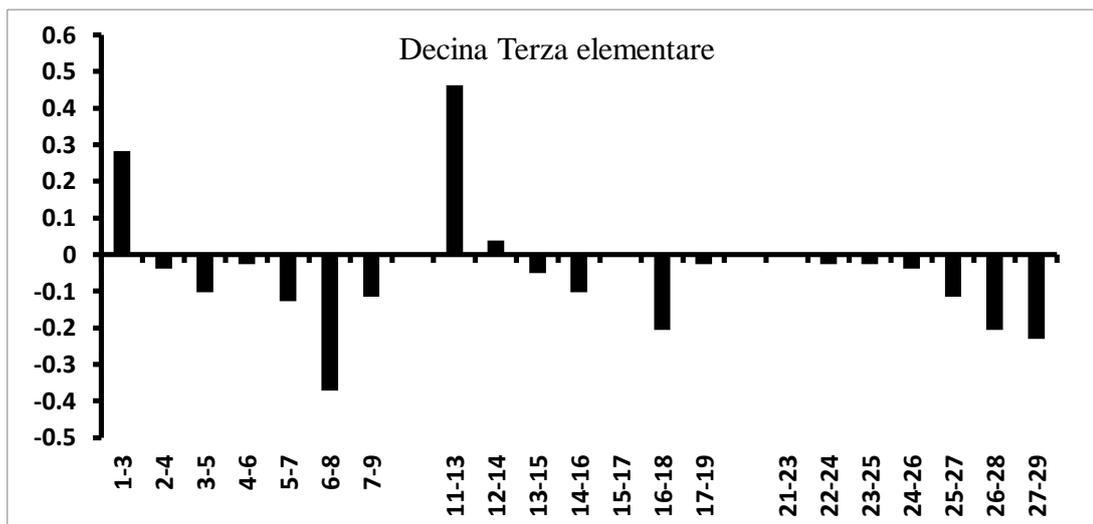


Figura 5.3 (b). Classe III elementare.

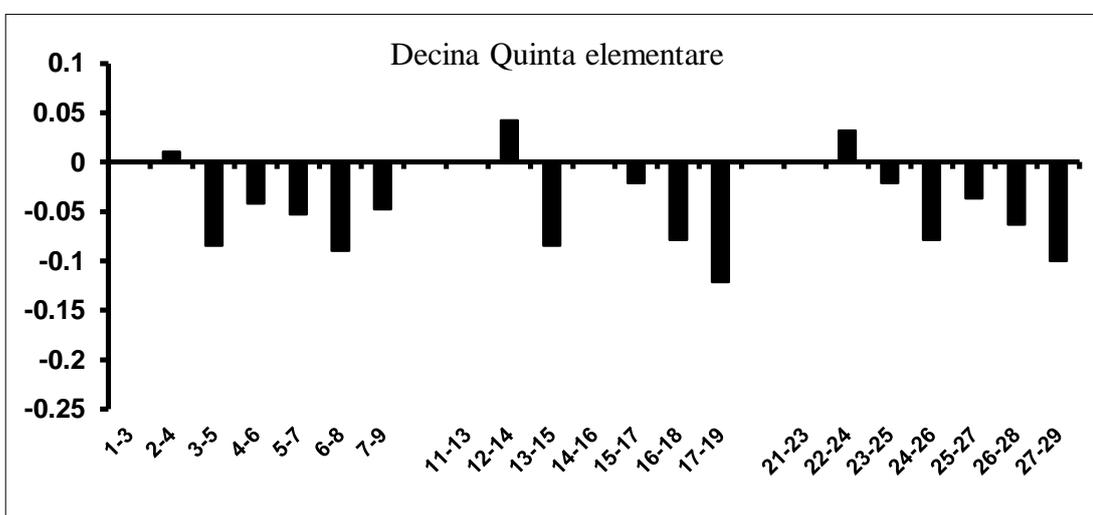


Figura 5.3 (c). Classe V elementare.

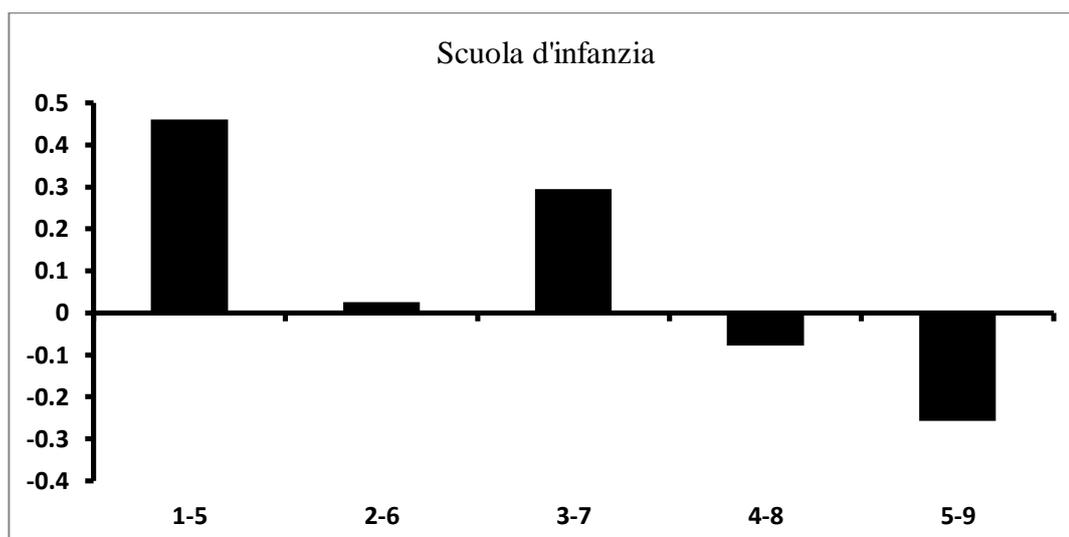
Nelle classi in cui è stato somministrato il compito di bisezione degli intervalli appartenenti alle tre decine, abbiamo condotto un'ANOVA a misure ripetute con due fattori, per verificare l'Effetto di Posizione, l'Effetto della Decina e la loro interazione. Anche in questo caso, nella classe II non è emerso alcun Effetto significativo della Posizione; assente anche l'Effetto della Decina e l'effetto significativo della loro interazione [Scuola d'Infanzia: Decina:  $F_{(1, 6)} = 1.92$ ,  $p = 0.079$ ; Posizione:  $F_{(1, 6)} = 0.612$ ,  $p = 0.545$ ; Decina x Posizione:  $F_{(1, 12)} = 0.823$ ,  $p = 0.626$ ]. Nella classe III, invece, oltre all'Effetto della Decina è emerso un effetto significativo dell'interazione Decina x Posizione, in mancanza di un Effetto significativo della Posizione [Classe III: Decina:  $F_{(1, 2)} = 11.24$ ,  $p = 5.265E-05$ ; Posizione:  $F_{(1, 6)} = 1.18$ ,  $p = 0.31$ ; Decina x Posizione  $F_{(1, 12)} = 2.33$ ,  $p = 0.006$ ]. Infine, l'ANOVA a due fattori nella classe V ha evidenziato un Effetto

significativo della Posizione e l'assenza di un effetto significativo della Decina e dell'interazione Posizione x Decina [Classe V: Decina:  $F_{(1, 2)} = 0.13$ ,  $p = 0.87$ ; Posizione:  $F_{(1, 6)} = 4.13$ ,  $p = 0.0005$ ; Decina x Posizione:  $F_{(1, 12)} = 0.69$ ,  $p = 0.75$ ].

### **Intervallo di 5 unità:**

L'Effetto di Posizione per l'intervallo di 5 unità è risultato significativo in tutte le classi, ad eccezione della I elementare [Scuola d'Infanzia:  $F_{(1, 4)} = 7.58$ ,  $p = 0.00001$ ; Classe I:  $F_{(1, 4)} = 1.66$ ,  $p = 0.16$ ; Classe II:  $F_{(1, 4)} = 20.01$ ,  $p = 5.619E-13$ ; Classe III:  $F_{(1, 4)} = 9.40$ ,  $p = 8.112E-07$ ; Classe V:  $F_{(1, 4)} = 23.24$ ,  $p = 3.5823E-16$ ]. Nella scuola d'infanzia, i post-hoc hanno rilevato una differenza significativa tra la posizione 1 e le posizioni 2, 4 e 5 e tra la posizione 3 e le posizioni 4 e 5; nei post-hoc della classe II, la posizione 1 è risultata essere significativamente diversa dalle posizioni 3, 4 e 5, la posizione 2 presentava una differenza significativa con le posizioni 3, 4 e 5, e la posizione 5 mostrava una differenza significativa anche con le posizioni 3 e 4; nei post-hoc della V classe, infine, tutte le posizioni sono risultate significativamente differenti tra loro, ad eccezione della posizione 3 e 4 la cui differenza non è significativa (figura 0.2 a, b, c, d, e).

**Figura 5.4. Rappresentazione grafica dell'andamento dell'errore di bisezione dell'intervallo da 5 unità nella scuola d'infanzia (a), nelle classi prima (b), seconda (c), terza (d) e quinta (e).**



**Figura 5.4 (a). Risultati del compito di bisezione dell'intervallo da 5 unità nella scuola materna.**

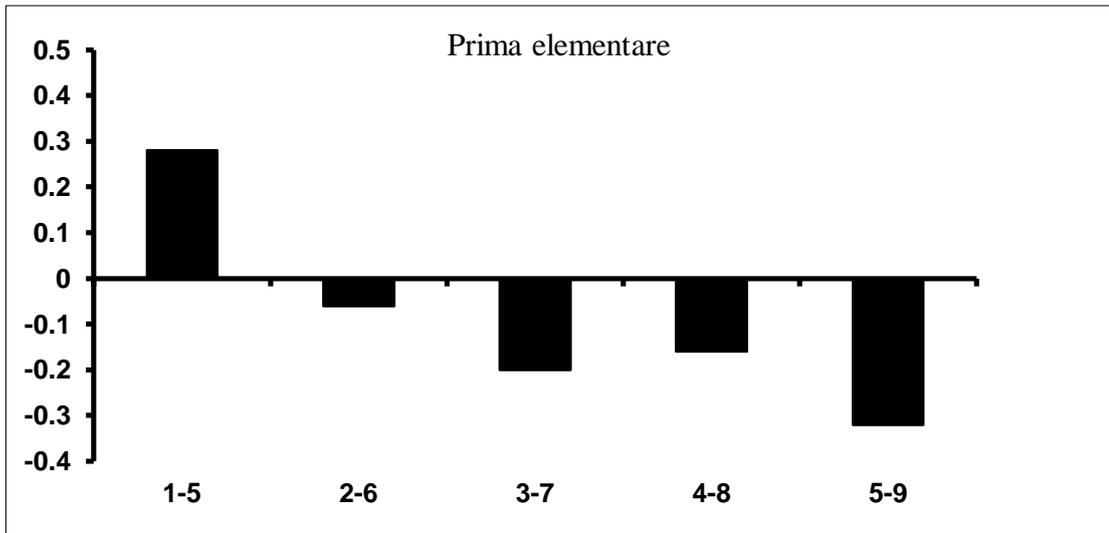


Figura 5.4 (b) Classe I elementare.

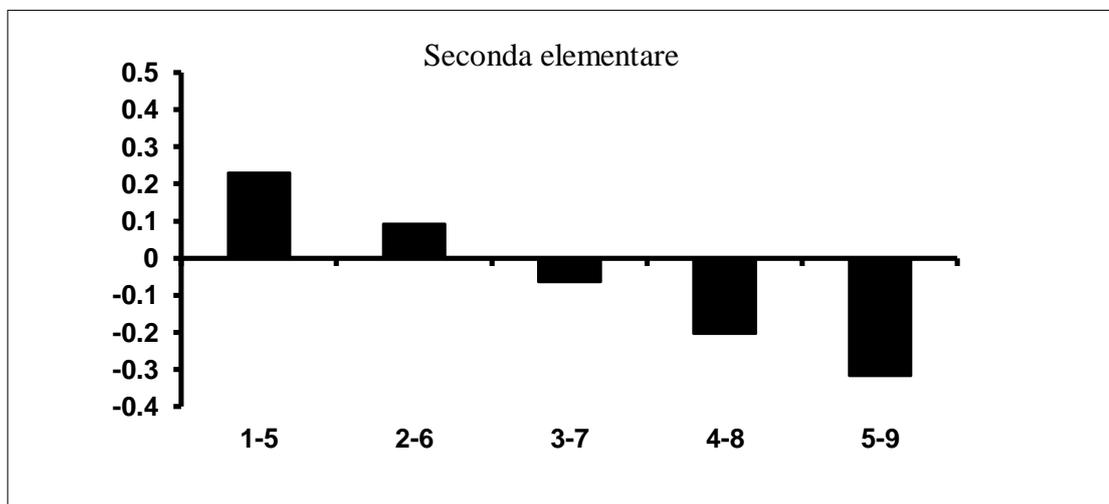


Figura 5.4 (c) Classe II elementare.

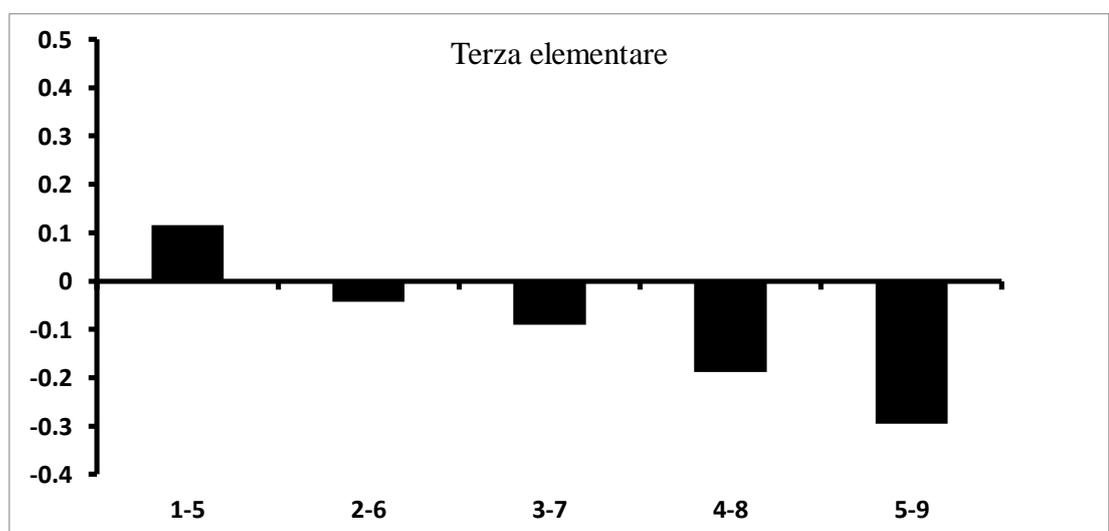


Figura 5.4 (d). Classe III elementare.

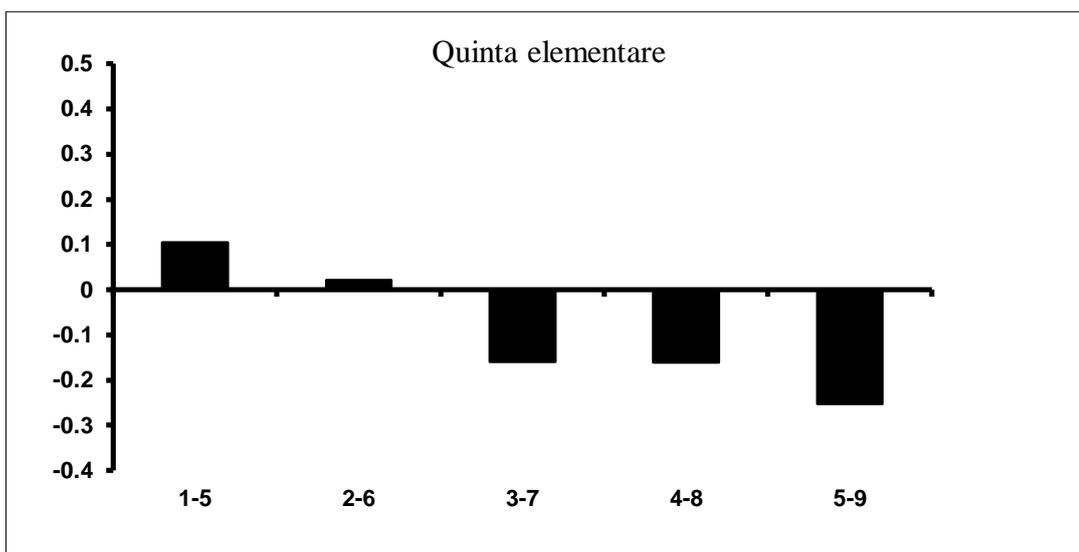


Figura 5.4 (e) Classe V elementare

Figura 5.5 Rappresentazione grafica dell'andamento dell'errore di bisezione delle tre decine separate per la classe II (a), III (b) e V (c).

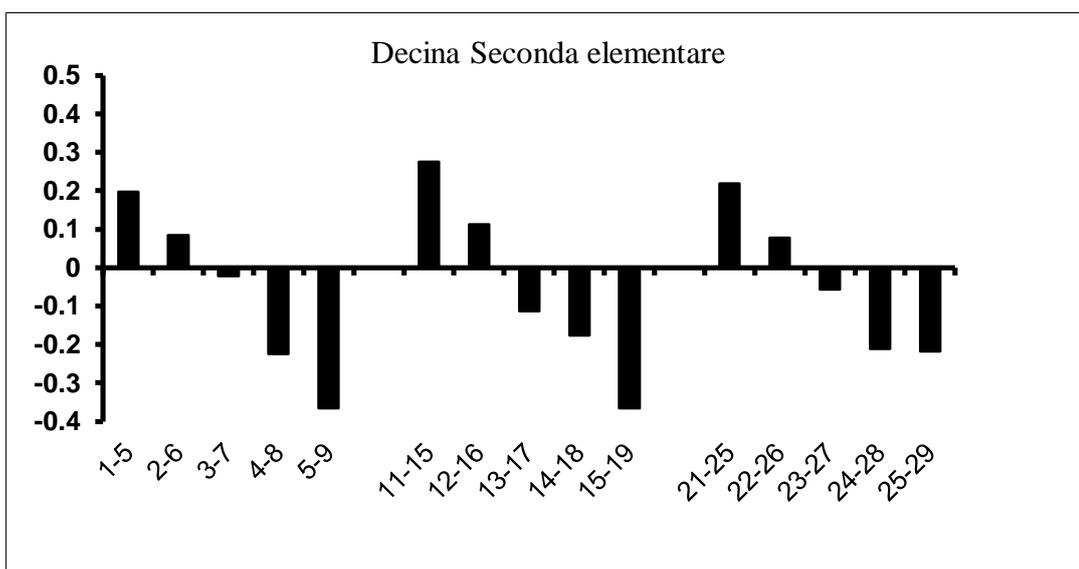
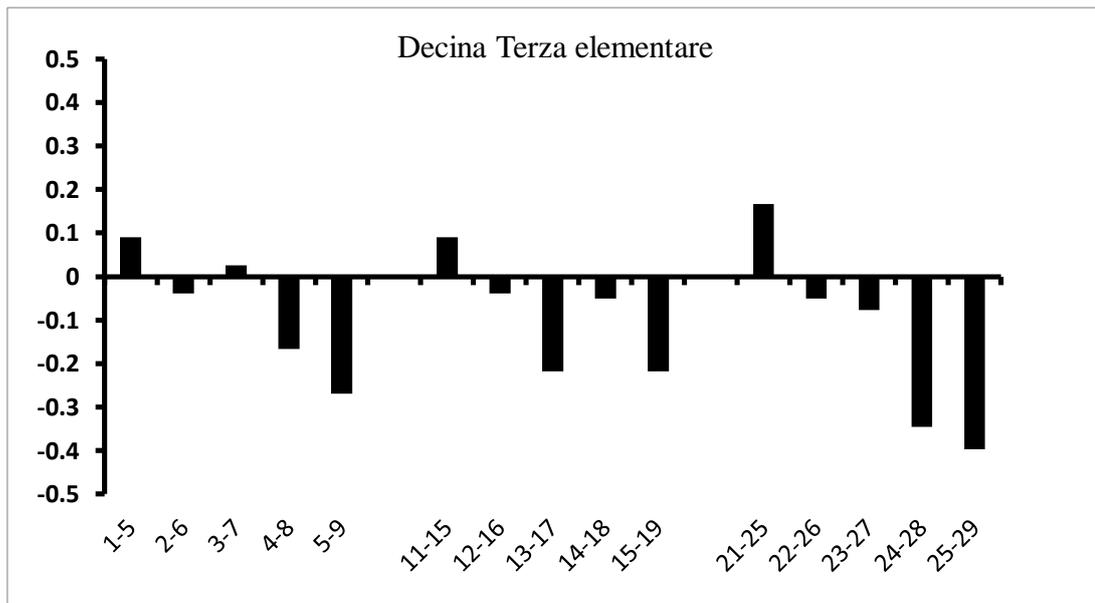
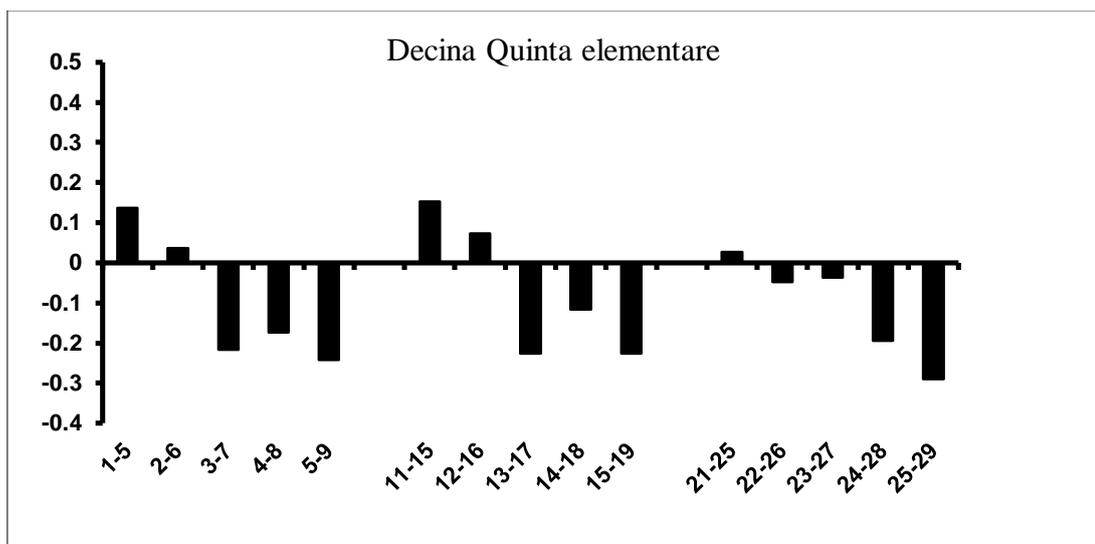


Figura 5.5 (a). Classe II elementare.



**Figura 5.5 (b).** Classe III elementare.



**Figura 5.5 (c).** Classe V elementare.

L'ANOVA a due fattori condotta nella classe II ha rilevato un Effetto della Posizione, in assenza dell'Effetto Decina e della loro interazione [Classe II: Decina:  $F_{(1, 2)} = 0.666$ ,  $p = 0.516$ ; Posizione:  $F_{(1, 4)} = 20.01$ ,  $p = 5.619E-13$ ; Decina x Posizione:  $F_{(1, 8)} = 1.102$ ,  $p = 0.361$ ]. Nella III elementare è emerso un Effetto significativo della Decina e dell'interazione Decina x Posizione [Classe III: Decina:  $F_{(1, 2)} = 13.53$ ,  $p = 9.342E-06$ ; Posizione:  $F_{(1, 4)} = 2.41$ ,  $p = 0.05$ ; Decina x Posizione:  $F_{(1, 8)} = 2.02$ ,  $p = 0.04$ ]. Infine, nella V classe è emerso un Effetto significativo della Posizione e dell'interazione Decina x Posizione [Classe V: Decina:  $F_{(1, 2)} = 1.003$ ,  $p = 0.36$ ; Posizione:  $F_{(1, 4)} = 23.24$ ,  $p = 3.58E-16$ ; Decina x Posizione:  $F_{(1, 8)} = 3.27$ ,  $p = 0.001$ ]

### Intervallo di 7 unità:

L'Effetto della Posizione è risultato significativo in ogni classe esaminata [Scuola d'Infanzia:  $F_{(1,2)} = 11.85$ ,  $p = 0.309E-05$ ; Classe I:  $F_{(1,2)} = 3.46$ ,  $p = 0.039$ ; Classe II:  $F_{(1,2)} = 26.69$ ,  $p = 2.76E-09$ ; Classe III:  $F_{(1,2)} = 25.65$ ,  $p = 3.06E-09$ ; Classe V:  $F_{(1,2)} = 47.61$ ,  $p = 8.01E-16$ ]. I confronti post-hoc della scuola d'infanzia hanno evidenziato una differenza significativa tra tutte le posizioni; nei confronti della classe I è emersa una differenza significativa tra la posizione 1 con le altre due posizioni; nelle classi II e III tutte le posizioni erano significativamente diverse tra loro; nella V elementare i post-hoc hanno mostrato una differenza significativa tra la posizione 1 e le posizioni 2 e 3 (figura 0.4 a, b, c, d, e).

*Figura 5.6 Rappresentazione grafica dell'andamento dell'errore di bisezione dell'intervallo da 7 unità nella scuola d'infanzia (a), nelle classi prima (b), seconda (c), terza (d) e quinta (e).*



*Figura 5.6 (a) Scuola d'infanzia*

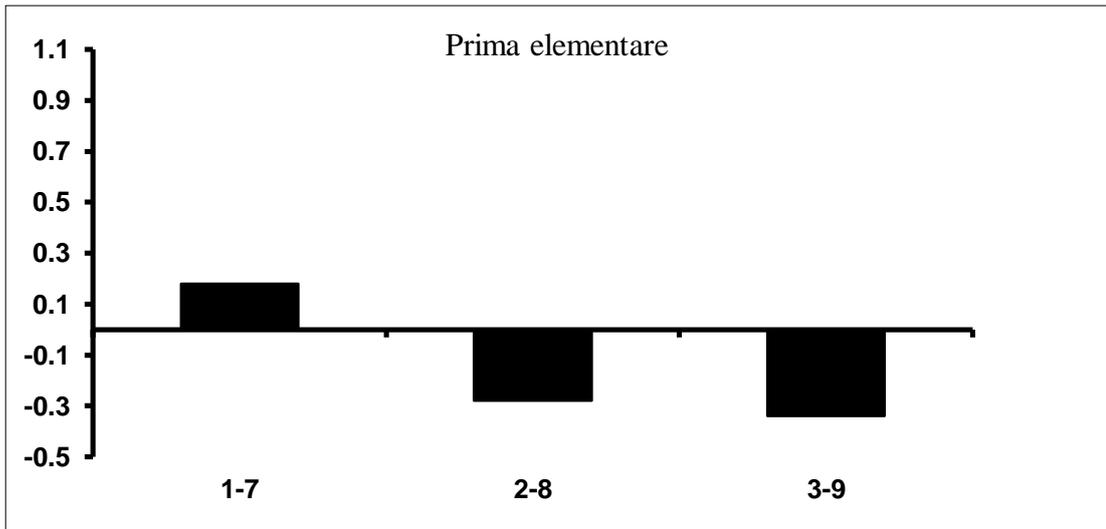


Figura 5.6 (b) Classe I elementare.

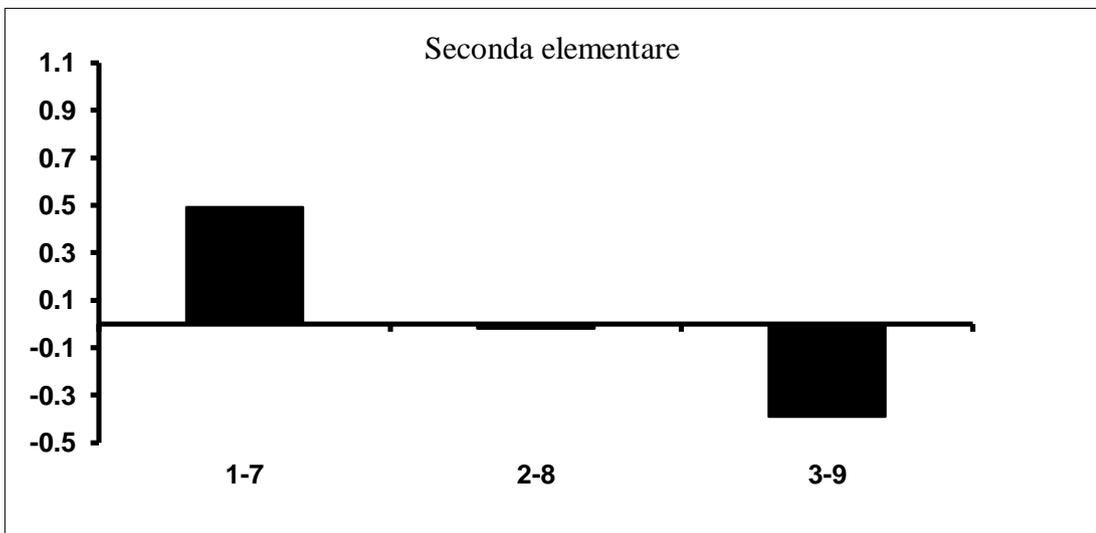


Figura 5.6 (c) Classe II elementare.

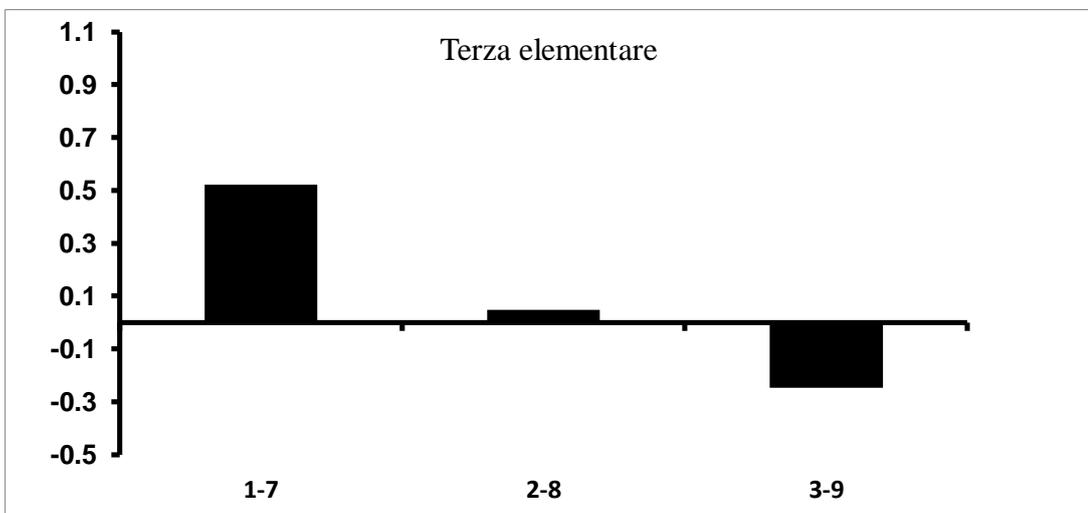
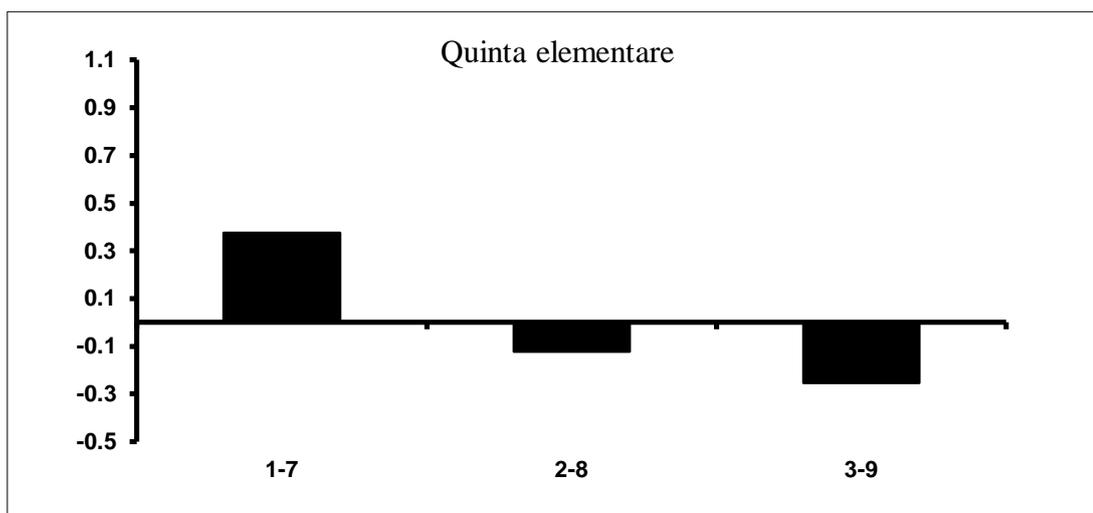
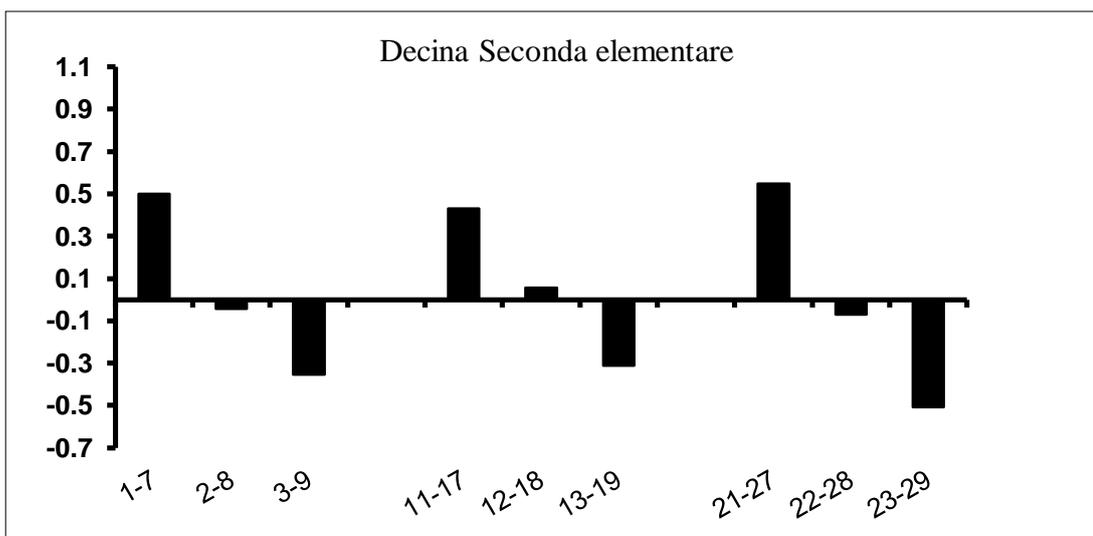


Figura 5.6 (d) Classe III elementare.



*Figura 5.6 (e) Classe V elementare.*

*Figura 5.7 Rappresentazione grafica dell'andamento dell'errore di bisezione delle tre decine separate per la classe II (a), III (b) e V (c).*



*Figura 5.7 (a) Classe II elementare.*

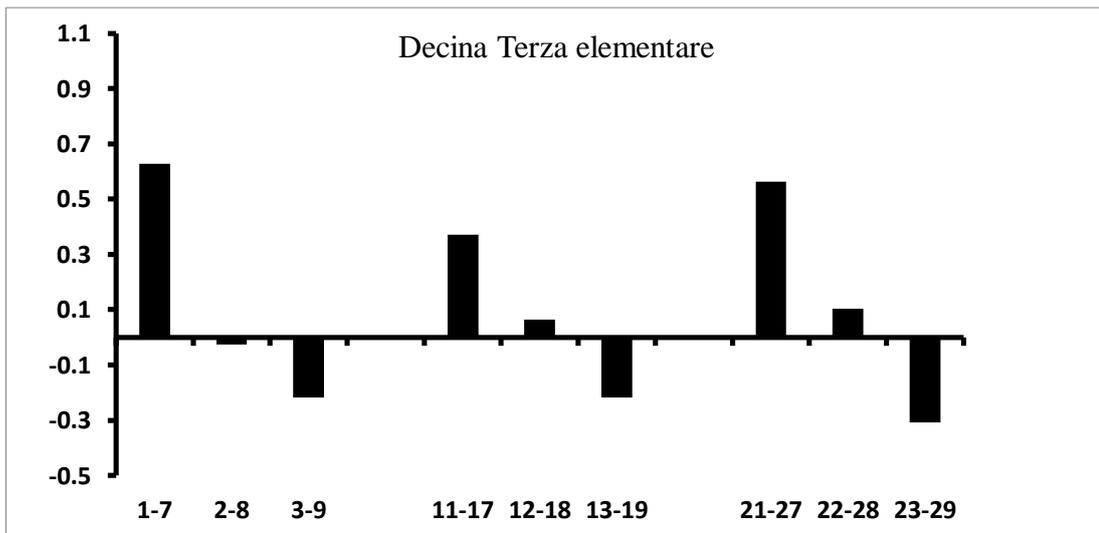


Figura 5.7 (b) Classe III elementare.

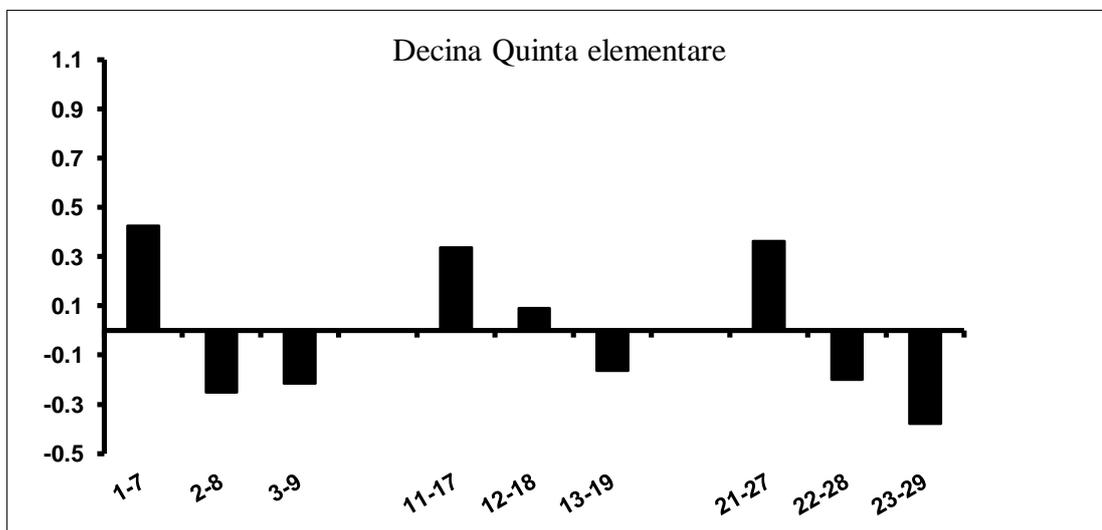


Figura 5.7 (c) Classe V elementare.

L'ANOVA a due fattori ha evidenziato un Effetto della Posizione, in assenza dell'Effetto Decina e della loro interazione nella classe II [Classe II: Decina:  $F_{(1, 2)} = 0.487$ ,  $p = 0.616$ ; Posizione:  $F_{(1, 2)} = 26.69$ ,  $p = 2,769E-09$ ; Decina x Posizione:  $F_{(1, 4)} = 0.489$ ,  $p = 0.743$ ]. Nella III elementare è emerso un Effetto della Decina, in assenza di un effetto significativo della Posizione e dell'interazione Decina x Posizione [Classe III: Decina:  $F_{(1, 2)} = 25.65$ ,  $p = 3.061E-09$ ; Posizione:  $F_{(1, 2)} = 0.28$ ,  $p = 0.75$ ; Decina x Posizione:  $F_{(1, 4)} = 1.17$ ,  $p = 0.32$ ]. Infine, nella V classe è risultato esserci un Effetto significativo della Decina e della Posizione, in assenza di significatività dell'interazione [Classe V: Decina:  $F_{(1, 2)} = 4.26$ ,  $p = 0.016$ ; Posizione:  $F_{(1, 2)} = 47.61$ ,  $p = 8.01022E-16$ ; Decina x Posizione:  $F_{(1, 4)} = 2.36$ ,  $p = 0$ ].

#### 5.4 *Discussione dello studio*

Nello studio di Doricchi del 2009, utilizzando un compito di bisezione di intervalli numerici in soggetti adulti, è stato osservato come, a parità di lunghezza dell'intervallo numerico, il bias dell'errore di bisezione vari sistematicamente in funzione della posizione occupata dall'intervallo all'interno della decina di appartenenza. Questo effetto è stato chiamato Number Interval Position Effect (NIPE).

La struttura e soprattutto la ricorsività del NIPE attraverso le decine successive, riscontrato in tale studio, aveva suggerito l'ipotesi che l'educazione all'uso del sistema decimale potesse esercitare una importante influenza sulla rappresentazione mentale approssimativa delle magnitudo numeriche. I risultati più rilevanti forniti dallo studio evolutivo qui riassunto sono due.

Primo, nelle analisi svolte sulle performance di bisezione mentale di ogni lunghezza di intervallo per ogni classe, mettendo a fattore la posizione dell'intervallo, è risultato generalmente significativo l'effetto Posizione dell'intervallo, a dimostrazione della presenza dell'effetto NIPE, ma non è mai risultata significativa l'interazione Classe per Posizione, a dimostrazione che l'effetto NIPE è già presente in fase prescolare e non cambia con il progredire dell'educazione all'uso della matematica formale durante il ciclo di studio elementare. Inoltre, l'effetto NIPE osservato nelle fasce d'età considerate nel presente studio, sembra essere del tutto simile a quello osservato nella popolazione adulta (Doricchi et al., 2009). Nel loro insieme queste osservazioni sembrano indicare che il NIPE possa riflettere delle proprietà fondamentali della rappresentazione delle magnitudo numeriche, proprietà che sembrano godere di una certa indipendenza rispetto all'apprendimento ed all'uso della matematica formale, in quanto il NIPE sembra essere già presente in età prescolare e mantenersi sostanzialmente inalterato sino all'età adulta. Questo è particolarmente interessante perché, in questo senso, il NIPE sembra comparire precocemente ed accompagnare costantemente la performance dei soggetti umani così come i più studiati *Size e Distance Effect*. Molti autori hanno suggerito che il *Size e Distance Effect* siano legati al fatto che al crescere del valore dei numeri naturali, le corrispondenti rappresentazioni cerebrali di tali numeri divengano progressivamente più imprecise, sovrapponendosi funzionalmente ed interferendo sulla rappresentazione delle magnitudo adiacenti (Gallistel et al., 2000; Nieder e Miller, 2003). Come accennato in precedenza, la distribuzione dei picchi di attività di tali rappresentazioni lungo la serie dei numeri naturali crescenti sarebbe di tipo logaritmico, come recentemente confermato da

studi di registrazione unicellulare nelle scimmie (Nieder e Miller, 2003). Sulla base delle analogie che abbiamo individuato nella costante precocità e nella costante presenza del *Size e Distance Effect* e dell'effetto NIPE, ci chiediamo se l'effetto NIPE possa essere un riflesso diretto della rappresentazione centrale logaritmica delle magnitudo numeriche. Una serie preliminare di simulazioni con reti neurali basate sulla "diffusione dell'informazione per gradienti energetici verso punti di accumulazione" (Hopfield J. J., 1982) sembra confermare questa ipotesi (Miglino et al. , in preparazione). Le stesse reti neurali sembrano inoltre anche simulare le alterazioni del NIPE che sono osservate nei pazienti cerebrolesi destri che, indipendentemente dalla presenza di eminegligenza spaziale sinistra, tendono a mostrare una sistematica e patologica deviazione verso i numeri più grandi quando il compito richiede di indicare mentalmente il centro di intervalli numerici.

Il secondo risultato rilevante del presente studio evolutivo, è la presenza di una chiara ricorsività dell'effetto NIPE attraverso le decine consecutive già a partire dalla seconda elementare. Questo dato sembra indicare che l'educazione all'uso del sistema metrico decimale ha una influenza molto rapida sul NIPE, influenza che appare già ben stabilizzata nelle prime fasi di apprendimento all'uso della matematica formale. Nel nostro studio avevamo deciso di provare a somministrare trials di bisezione mentale numerica di coppie appartenenti alle decine successive alla prima anche ai bambini in età prescolare e di prima elementare. Tuttavia nel corso della realizzazione dello studio è stato constatato che i bambini che hanno provato o sono solo in parte riusciti a svolgere tali prove sono stati un numero troppo insufficiente per poter svolgere una adeguata analisi quantitativa dei dati.

## Conclusioni generali

Il mio lavoro di tesi si divide in due parti; nella prima parte mi sono occupata di verificare se i meccanismi attenzionali che guidano l'analisi visuospatiale e la bisezione di stimoli visivi, come linee orizzontali, corrispondano funzionalmente ai processi che determinano la bisezione mentale di intervalli numerici. I dati di questo primo studio hanno indicato, in linea con altri recenti studi che sono stati passati in rassegna in alcune parti di questa stessa tesi, come il costrutto concettuale di "linea mentale numerica" non possa essere superficialmente inteso come la semplice traslazione rappresentativa di un percetto visivo che mostra analogie di forma con quella che potrebbe esser definita una intuizione introspettiva della linea mentale dei numeri (Galton, 1880). Con questo non è mia intenzione concludere che le possibili interazioni tra rappresentazioni spaziali e numeriche non esistano o non possano, in alcuni casi, avere un valore adattivo cognitivo. Quello che, secondo me, i risultati del mio primo studio indicano, è come l'attivazione di rappresentazioni di tipo spaziale con codifica sinistra-destra in corrispondenza alla attivazione cognitiva di rappresentazioni numeriche non è necessaria od intrinseca. Una possibilità alternativa, ad esempio suggerita da alcuni studi sull'effetto SNARC (Keus e Schwarz, 2005), è invece che sia la codifica spaziale sinistra/destra delle risposte motorie da associare alle magnitudo numeriche ad indurre una spazializzazione mentale corrispondente richiamando i meccanismi visuospatiali e motori legati alle abitudini di lettura acquisite culturalmente secondo una direzione sinistra-destra o destra-sinistra. La mia opinione è che un più approfondito studio di questa possibilità e della sua messa a confronto sperimentale con ipotesi che invece prevedono un intrinseco legame tra magnitudo numeriche e orientamento della attenzione (Fisher et al., 2003) potrebbe risultare di grande interesse empirico e teorico.

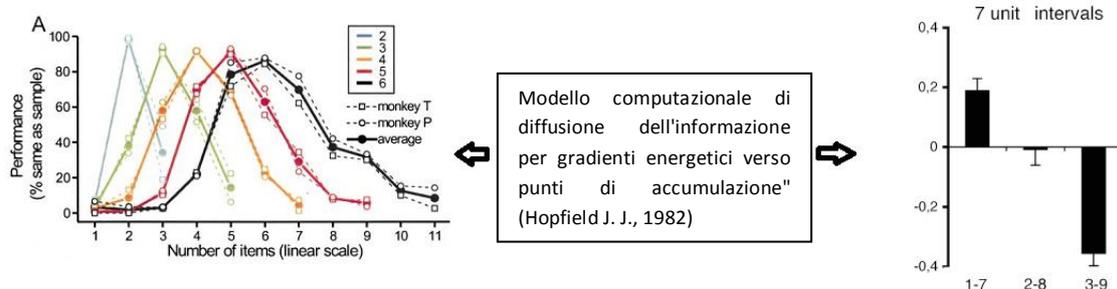
Nella seconda parte del mio lavoro di tesi, ho invece cercato di stabilire l'attendibilità con la quale due semplici, ma profondamente diversi, test comportamentali possono rivelare la modalità di rappresentazione centrale, e neurale, delle quantità numeriche. I risultati del primo della serie di questi studi hanno rivelato gli importanti limiti della prova di Number to Position, rivelandone l'estrema sensibilità alle modalità di campionamento con le quali vengono selezionate le quantità numeriche delle quali bisogna stimare la possibile rappresentazione spaziale su uno spazio limitato orizzontale. I limiti di questo

test, per altro molto diffuso e conosciuto, sono risultati esser palesi. Infatti, al di là delle modifiche che si osservano nella prestazione in funzione dell'oversampling di quantità numeriche piccole o grandi, il dato più saliente è che l'errore di posizionamento osservato nel range di numeri 0-100, consistente in una sottostima della posizione occupata dalle cifre della prima decina (i.e. le cifre vengono spostate alla destra della posizione ottimale). A causa del marcato oversampling dei numeri più piccoli, in molti studi precedenti questa sottostima aveva indotto un andamento logaritmico dell'errore che, nel compito con range 0-10 si trasformava in una chiara sovrastima (i.e. i numeri più piccoli vengono posti alla sinistra della loro posizione ottimale) inducendo un andamento di tipo addirittura esponenziale dell'errore di posizionamento. Come abbiamo avuto modo di notare, tale andamento esponenziale può essere difficilmente considerato un risultato artefatto in quanto, sebbene trascurato e non notato, è presente nello studio di autori (Berteletti et al., 2010) che peraltro accettano l'idea in voga che l'andamento logaritmico originariamente descritto da Siegler e Booth (2004) sia genuino e rifletta in modo altrettanto genuino la rappresentazione centrale logaritmica delle magnitudo numeriche. A questo proposito vogliamo sottolineare una possibile incongruenza teorica della quale gli studi precedenti sul test di NtoP, non sembrano avere considerato. Come abbiamo già avuto modo di notare nella discussione dello studio sul NIPE, i noti effetti di "size" e "distance" vengono solitamente attribuiti al fatto che le rappresentazioni centrali "approssimative" dei numeri siano organizzate secondo una distribuzione di tipo logaritmico, ove le quantità più grandi hanno una rappresentazione meno "precisa" di quelle piccole (i.e. l'attivazione della rappresentazione di un numero grande interferisce di più sulle rappresentazioni dei numeri adiacenti di quanto non faccia l'attivazione di un numero piccolo). Ora, come è ben noto, il *Size e Distance Effect* sono presenti anche negli adulti: sulla base della sopra citata interpretazione di questi due effetti è lecito quindi pensare che la rappresentazione approssimativa delle magnitudo numeriche abbia un andamento di tipo logaritmico anche nell'adulto. Questo è in netto contrasto con i risultati e le interpretazioni teoriche sino ad ora avanzate riguardo ai cambiamenti di performance osservati in funzione della età nel compito di NtoP: nei bambini più grandi si assiste infatti ad una linearizzazione della performance che secondo la maggioranza degli autori dovrebbe riflettere il passaggio da una rappresentazione centrale logaritmica ad una lineare. Questo sembra incompatibile con il mantenimento del *Size e Distance Effect* in età adulta. Se infatti questi effetti dipendono dalla rappresentazione centrale logaritmica delle magnitudo, allora dovrebbero sparire o

trasformarsi significativamente entrambi nelle fasi finali del ciclo di scuola elementare o in età adulta.

Il terzo studio ha invece indicato come l'effetto NIPE sia già presente in età prescolare, quando l'educazione all'uso della matematica formale è ai suoi primi albori, e si mantenga inalterato negli anni seguenti di scuola elementare e sia comparabile a quello osservato in età adulta. Essendo il NIPE elicitato in un compito di bisezione approssimativa di intervalli numerici (ai soggetti viene infatti chiesto di evitare di contare o svolgere computazioni formali), è plausibile ipotizzare che esso possa riflettere in modo diretto le modalità con i quali le magnitudo numeriche siano rappresentate indipendentemente dall'uso della matematica formale. A questo proposito, ci preme tra l'altro far notare che questa possibilità sembra essere rinforzata dall'osservazione che i cerebrolesi destri che compiono degli errori sistematici durante la bisezione approssimativa degli intervalli numerici (e che mostrano un NIPE alterato) non compiono o compiono un numero di errori molto ridotto quando vengono invitati a svolgere la bisezione secondo un computo formale (aggiungere gli estremi dell'intervallo e dividere il risultato per 2; Doricchi et al., 2009; Aiello et al., 2012).

A questo punto le osservazioni ed ipotesi che ho qui riportato hanno innanzitutto bisogno di essere verificate tramite dei modelli simulativi computazionali, che mettano in relazione (vedi Figura qui sotto) le proprietà funzionali della rappresentazione neurofisiologica delle grandezze numeriche documentate dagli studi di registrazione unicellulare nelle scimmie (Nieder e Miller, 2003) con l'effetto NIPE (Doricchi et al., 2009). Tali modelli computazionali, dovrebbero riuscire anche a simulare le alterazioni dell'effetto NIPE osservate in pazienti con lesioni cerebrali unilaterali (Doricchi et al., 2009). Questo è l'obiettivo che mi propongo di perseguire in modo più approfondito nell'immediato futuro.



## ***Bibliografia***

Aiello M., Merola S., Doricchi F. (2012), “Small numbers in the right brain: evidence from patients without and with spatial neglect”, *Cortex*, pp. 1–4

Aiello, M., Merola, S., & Doricchi, F. (2013). Small numbers in the right brain: evidence from patients without and with spatial neglect. *Cortex*, 49(1), 348-351.

Ansari (2008), “Effects of development and enculturation on number representation in the brain”, *Nature Reviews Neuroscience*, No. 9, pp. 278-291

Ashcraft, M. H., & Moore, A. M. (2012). Cognitive processes of numerical estimation in children. *Journal of experimental child psychology*, 111(2), 246-267.

Azouvi P, Samuel C, Louis-Dreyfus A, Bernati T, Bartolomeo P, Beis JM, Chokron S, Leclercq M, Marchal F, Martin Y et al. (GEREN/ GRECO) FCSGoAoUN. 2002. Sensitivity of clinical and behavioural tests of spatial neglect after right hemisphere stroke. *J Neurol Neurosurg Psychiatry*. 73:160–166.

Banks W.P., Fujii M., Kayra-Stuart F. (1976), “Semantic congruity effects in comparative judgments of magnitude in digits”, *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, No. 2, pp. 435–447

Barth, H., Kanwisher, N., & Spelke, E. (2003). The construction of large number representations in adults. *Cognition*, 86(3), 201-221.

Barth, H. C., & Paladino, A. M. (2011). The development of numerical estimation: evidence against a representational shift. *Developmental science*, 14(1), 125-135.

Bartolomeo, P., De Schotten, M. T., & Doricchi, F. (2007). Left unilateral neglect as a disconnection syndrome. *Cerebral Cortex*, 17(11), 2479-2490.

Bates, E., Wilson, S. M., Saygin, A. P., Dick, F., Sereno, M. I., Knight, R. T., & Dronkers, N. F. (2003). Voxel-based lesion–symptom mapping. *Nature neuroscience*, 6(5), 448-450.

Benson, D. F., & Denckla, M. B. (1969). Verbal Paraphasia as a. *Archives of Neurology*, 2

Berteletti I., Lucangeli D., Piazza M., Dehaene S., Zorzi M. (2010), “Numerical Estimation in Preschoolers”, *Developmental Psychology*, No. 2, pp. 545- 551

Berteletti, Ilaria, Daniela Lucangeli, and Marco Zorzi. "Representation of numerical and non-numerical order in children." *Cognition* 124 (2012): 304-313.

Bertillon J. (1880), “De la vision des nombres”, *La Nature*, No. 378, pp. 196–98

Bertillon J. (1881), “De la vision et la mémoire des nombres”, *La Nature*, No. 408, pp. 202–203

Bertillon J. (1882), “De la vision des nombres”, *La Nature*, pp. 265–268

Binder, J., Marshall, R., Lazar, R., Benjamin, J., & Mohr, J. P. (1992). Distinct syndromes of hemineglect. *Archives of Neurology*, 49(11), 1187-1194.

Booth J.L., Siegler R.S. (2006), “Developmental and individual differences in pure numerical estimation” *Developmental Psychology*, No. 41, pp. 189 – 201

Booth J.L., Siegler R.S. (2008), “Numerical Magnitude Representations Influence Arithmetic Learning”, *Child Development*, Vol. 79, No. 4, pp. 1016 -1031

Bremmer, F., Schlack, A., Shah, N. J., Zafiris, O., Kubischik, M., Hoffmann, K. P., ... & Fink, G. R. (2001). Polymodal motion processing in posterior parietal and premotor cortex: a human fMRI study strongly implies equivalencies between humans and monkeys. *Neuron*, 29(1), 287-296.

Brysbaert, M. (1995). Arabic number reading: On the nature of the numerical scale and the origin of phonological recoding. *Journal of experimental psychology: General*, 124(4), 434.

Buckley P.B., Gilman C.B. (1974), "Comparison of digits and dot patterns", *Journal of Experimental Psychology*, No. 103, pp. 1131–1136

Calabria M., Rossetti Y. (2005). Interference between number processing and line bisection: a methodology. *Neuropsychologia* 43 (2005) 779–783

Cappelletti, M., Freeman, E. D., & Cipolotti, L. (2007). The middle house or the middle floor: Bisecting horizontal and vertical mental number lines in neglect. *Neuropsychologia*, 45(13), 2989-3000.

Cappelletti, M., Freeman, E. D., & Cipolotti, L. (2009). Dissociations and interactions between time, numerosity and space processing. *Neuropsychologia*, 47(13), 2732-2748.

Casarotti M., Michielin M., Zorzi M., Umiltà C. (2007). Temporal order judgment reveals how number magnitude affects visuospatial attention. *Cognition*, 102 (2007) 101–117.

Case R., Okamoto Y. (1996), "The role of conceptual structures in the development of children's thought", *Monographs of the Society for Research in Child Development*, No. 61, Nos. 1 – 2 (Serial No. 246)

Castelli F., Glaser D.E., Butterworth B. (2006), "Discrete and analogue quantity processing in the parietal lobe: a functional MRI study", *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, No. 103, pp. 4693–4698

Chiao, J. Y., Bordeaux, A. R., & Ambady, N. (2004). Mental representations of social status. *Cognition*, 93(2), B49-B57.

Chochon F., Cohen L., van de Moortele P.F., Dehaene S. (1999), “Differential contributions of the left and right inferior parietal lobules to number processing”, *Journal of Cognitive Neuroscience*, No. 11, pp. 617–630

Cohen, Kadosh R., Henik A. (2006), “A common representation for semantic and physical properties: a cognitive anatomical approach”, *Journal of Experimental Psychology*, No. 53, pp. 87–94

Cohen Kadosh, R., Cohen Kadosh, K., Kaas, A., Henik, A., & Goebel, R. (2007). Notation-dependent and-independent representations of numbers in the parietal lobes. *Neuron*, 53(2), 307-314.

Cohen Kadosh, R., and Henik, A. (2007). Can synaesthesia research inform cognitive science? *Trends Cogn. Sci.* 114, 179–184.

Cohen Kadosh, R., Tzelgov, J., & Henik, A. (2008). A synesthetic walk on the mental number line: The size effect. *Cognition*, 106(1), 548-557.

Committeri, G., Pitzalis, S., Galati, G., Patria, F., Pelle, G., Sabatini, U., ... & Pizzamiglio, L. (2007). Neural bases of personal and extrapersonal neglect in humans. *Brain*, 130(2), 431-441.

Cytowic, Richard E. *Synaesthesia: A union of the senses*. MIT press, 2002.

Dehaene, S. (1989). The psychophysics of numerical comparison: A reexamination of apparently incompatible data. *Perception & psychophysics*, 45(6), 557-566.

Dehaene S., Dupoux E., Mehler, J. (1990), “Is numerical comparison digital: Analogical and symbolic effects in two-digit number comparison”, *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, No. 16, pp. 626–641.

Dehaene S., Mehler, J. (1992), “Cross-linguistic regularities in the frequency of number words”, *Cognition*, No. 43, pp. 1–29

Dehaene S. (1992), "Varieties of numerical abilities", *Cognition*, No. 44, pp. 1-42

Dehaene S., Bossini S., Giraux P. (1993), "The mental representation of parity and numerical magnitude", *Journal of Experimental Psychology: General*, No. 122, pp. 371-396

Dehaene S., Changeux J.P. (1993), "Development of elementary numerical abilities: A neuronal model", *Journal of Cognitive Neuroscience*, No. 5, pp. 390-407

Dehaene S., Cohen L. (1995), "Towards an anatomical and functional model of number processing", *Mathematical Cognition*, No. 1, pp. 83-120

Dehaene S. (1996), "The organization of brain activations in number comparison: Event-related potentials and the additive-factors methods". *Journal of Cognitive Neuroscience*, No. 8, pp. 47-68

Dehaene S. (1997), "The number sense: How the mind creates mathematics", New York: Oxford University Press

Dehaene S., Cohen L. (1997), "Cerebral pathways for calculation: Double dissociation between rote verbal and quantitative knowledge of arithmetic", *Cortex*, No. 33, pp. 219-250

Dehaene S., Cohen S. (1998), "Levels of representation in number processing", In B. Stemmer, H.A. Whitaker (Eds.), *The handbook of neurolinguistic*, pp. 331-341, New York: Academic Press

Dehaene S., Dehaene-Lambertz G., Cohen L. (1998), "Abstract representations of numbers in the animal and human brain", *Trends in Neurosciences*, No. 21, pp. 355-361.

Dehaene, S. (2001). Précis of the number sense. *Mind & language*, 16(1), 16-36.

Dehaene S. (2003), “The neural basis of the Weber-Fechner law: a logarithmic mental number line”, *Trends in Cognitive Sciences*, No. 7, pp. 145–147

Dehaene S., Piazza M., Pinel P., Cohen L. (2003), “Three parietal circuits for number processing”, *Cognitive Neuropsychology*, No. 20, pp. 487–506

Dehaene, S. (2009). Origins of mathematical intuitions. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 1156(1), 232-259.

de Hevia M. D., Girelli L., Vallar G. (2005). Numbers and space: a cognitive illusion? *Exp Brain Res* DOI 10.1007/s00221-005-0084-0

de Hevia M. D., Spelke E. S. (2009). Spontaneous mapping of number and space in adults and young children. *Cognition*. 110 (2009) 198–207

De Schotten, M. T., Dell'Acqua, F., Forkel, S. J., Simmons, A., Vergani, F., Murphy, D. G., & Catani, M. (2011). A lateralized brain network for visuospatial attention. *Nature neuroscience*, 14(10), 1245-1246.

Diester, I., & Nieder, A. (2007). Semantic associations between signs and numerical categories in the prefrontal cortex. *PLoS biology*, 5(11), e294.

Dodd M. D., Van der Stigchel S., Leghari M. A., Fung G., Kingstone A. (2008). Attentional SNARC: There's something special about numbers (let us count the ways). *Cognition*, 108 (2008) 810–818.

Doricchi, F., & Tomaiuolo, F. (2003). The anatomy of neglect without hemianopia: a key role for parietal-frontal disconnection?. *Neuroreport*, 14(17), 2239-2243.

Doricchi, F., Guariglia, P., Gasparini, M., & Tomaiuolo, F. (2005). Dissociation between physical and mental number line bisection in right hemisphere brain damage. *Nature neuroscience*, 8(12), 1663-1665.

Doricchi, F., Thiebaut de Schotten, M., Tomaiuolo, F., & Bartolomeo, P. (2008). White matter (dis) connections and gray matter (dys) functions in visual neglect: gaining insights into the brain networks of spatial awareness. *Cortex*, 44(8), 983-995.

Doricchi, F., Merola, S., Aiello, M., Guariglia, P., Bruschini, M., Gevers, W., ... & Tomaiuolo, F. (2009). Spatial orienting biases in the decimal numeral system. *Current biology*, 19(8), 682-687.

Dormal, V., Seron, X., & Pesenti, M. (2006). Numerosity-duration interference: A Stroop experiment. *Acta psychologica*, 121(2), 109-124.

Downing, P. E., Wiggett, A. J., & Peelen, M. V. (2007). Functional magnetic resonance imaging investigation of overlapping lateral occipitotemporal activations using multi-voxel pattern analysis. *The Journal of neuroscience*, 27(1), 226-233.

Ebersbach, M., Luwel, K., Frick, A., Onghena, P., & Verschaffel, L. (2008). The relationship between the shape of the mental number line and familiarity with numbers in 5-to 9-year old children: Evidence for a segmented linear model. *Journal of experimental child psychology*, 99(1), 1-17.

Eger, E., Sterzer, P., Russ, M. O., Giraud, A. L., & Kleinschmidt, A. (2003). A supramodal number representation in human intraparietal cortex. *Neuron*, 37(4), 719-726.

Feigenson, L., Dehaene, S., & Spelke, E. (2004). Core systems of number. *Trends in cognitive sciences*, 8(7), 307-314.

Fias, W. (1996). The importance of magnitude information in numerical processing: Evidence from the SNARC effect. *Mathematical cognition*, 2(1), 95-110.

Fias, W., Lauwereyns, J., & Lammertyn, J. (2001). Irrelevant digits affect feature-based attention depending on the overlap of neural circuits. *Cognitive Brain Research*, 12(3), 415-423.

Fias W., Lammertyn J., Reynvoet B., Dupont P., Orban G.A. (2003), "Parietal representation of symbolic and nonsymbolic magnitude", *Journal of Cognitive Neuroscience*, No. 15, pp. 47–56

Fias, W., Lammertyn, J., Caessens, B., & Orban, G. A. (2007). Processing of abstract ordinal knowledge in the horizontal segment of the intraparietal sulcus. *The Journal of Neuroscience*, 27(33), 8952-8956.

Fink, G. R., Marshall, J. C., Shah, N. J., Weiss, P. H., Halligan, P. W., Grosse-Ruyken, M., ... & Freund, H. J. (2000). Line bisection judgments implicate right parietal cortex and cerebellum as assessed by fMRI. *Neurology*, 54(6), 1324-1331.

Fischer, M. H. (2001). Number processing induces spatial performance biases. *Neurology*, 822–826.

Fischer M.H., Castel A.D., Dodd M.D., Pratt J. (2003), "Perceiving numbers causes spatial shifts of attention", *Nature Neuroscience*, No. 6, pp. 555–556

Fulbright, R. K., Manson, S. C., Skudlarski, P., Lacadie, C. M., & Gore, J. C. (2003). Quantity determination and the distance effect with letters, numbers, and shapes: a functional MR imaging study of number processing. *American journal of neuroradiology*, 24(2), 193-200.

Galfano G., Rusconi E., Umiltà C. (2006). Number magnitude orients attention, but not against one's will. *Psychonomic Bulletin & Review*, 13(5), 869-874.

Gallistel C.R., Gelman R. (1992), "Preverbal and verbal counting and computation", *Cognition*, No. 44, pp. 43-74

Gallistel C.R., Gelman I. (2000), "Non-verbal numerical cognition: from reals to integers", *Trends in Cognitive Science*, No. 4, pp. 59-65

Galton, F. (1880): "I.—STATISTICS OF MENTAL IMAGERY.", *Mind*, No. 19, pp.301-318.

Galton F. (1880), "Visualised numerals", *Journal of the Anthropological Institute (1881)*, No. 10, pp. 85–102

Galton, F. (1883). *Inquiries into human faculty and its development*. Macmillan.

Göbel, S. M., Calabria, M., Farnè, A., & Rossetti, Y. (2006). Parietal rTMS distorts the mental number line: Simulating 'spatial' neglect in healthy subjects. *Neuropsychologia*, 44(6), 860-868.

Goffaux V., Martin R., Dormal G., Goebel R., Schiltz C. (2012) Attentional shifts induced by uninformative number symbols modulate neural activity in human occipital cortex. *Neuropsychologia*. 50 (2012) 3419–3428.

Grabner, R. H., Ansari, D., Reishofer, G., Stern, E., Ebner, F., & Neuper, C. (2007). Individual differences in mathematical competence predict parietal brain activation during mental calculation. *Neuroimage*, 38(2), 346-356.

Grossi, D., Angelini, R., Pecchinenda, A., & Pizzamiglio, L. (1993). Left imaginal neglect in heminattention: experimental study with the O'clock Test. *Behavioural Neurology*, 6(3), 155-158.

Gruber, O., Indefrey, P., Steinmetz, H., & Kleinschmidt, A. (2001). Dissociating neural correlates of cognitive components in mental calculation. *Cerebral Cortex*, 11(4), 350-359.

Guariglia, C., Padovani, A., Pantano, P., & Pizzamiglio, L. (1993). Unilateral neglect restricted to visual imagery.

Hadamard, J. (1996). *The mathematician's mind: The psychology of invention in the mathematical field*. Princeton University Press.

Harvey, B. M., Klein, B. P., Petridou, N., & Dumoulin, S. O. (2013). Topographic representation of numerosity in the human parietal cortex. *Science*, *341*(6150), 1123-1126.

Holyoak, K. J. (1978). Comparative judgments with numerical reference points. *Cognitive Psychology*, *10*(2), 203-243.

Hubbard, E. M., Piazza, M., Pinel, P., & Dehaene, S. (2005). Interactions between number and space in parietal cortex. *Nature Reviews Neuroscience*, *6*(6), 435-448.

Hopfield J. J. (1982). Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, vol. 79 no. 8 pp. 2554–2558,.

Ifrah G (1994). Histoire universelle des chiffres: l' intelligence des homes racontè par les nombres et le calcul. R. Laffont (Ed).

Ifrah, G., Harding, E. F., Bellos, D., & Wood, S. (2000). *The Universal History of Computing: From the Abacus to Quantum Computing*. John Wiley & Sons, Inc..

Ischebeck, A., Zamarian, L., Egger, K., Schocke, M., & Delazer, M. (2007). Imaging early practice effects in arithmetic. *Neuroimage*, *36*(3), 993-1003.

Jewell, G., & McCourt, M. E. (2000). Pseudoneglect: a review and meta-analysis of performance factors in line bisection tasks. *Neuropsychologia*, *38*(1), 93-110..

Kadosh, R. C., Sagiv, N., Linden, D. E., Robertson, L. C., Elinger, G., & Henik, A. (2005). When blue is larger than red: Colors influence numerical cognition in synesthesia. *Journal of cognitive neuroscience*, *17*(11), 1766-1773.

Kaufmann, L., Koppelstaetter, F., Delazer, M., Siedentopf, C., Rhomberg, P., Golaszewski, S., ... & Ischebeck, A. (2005). Neural correlates of distance and congruity effects in a numerical Stroop task: an event-related fMRI study. *Neuroimage*, 25(3), 888-898.

Kaufmann, L. I. A. N. E., & Nuerk, H. (2005). Numerical development: current issues and future perspectives. *Psychology Science*, 47(1), 142.

Knoch, D., Gianotti, L. R., Mohr, C., & Brugger, P. (2005). Synesthesia: when colors count. *Cognitive Brain Research*, 25(1), 372-374.

Kosslyn, S. M., Murphy, G. L., Bemesderfer, M. E., & Feinstein, K. J. (1977). Category and continuum in mental comparisons. *Journal of Experimental Psychology: General*, 106(4), 341.

Le Clec'H, G., Dehaene, S., Cohen, L., Mehler, J., Dupoux, E., Poline, J. B., ... & Le Bihan, D. (2000). Distinct cortical areas for names of numbers and body parts independent of language and input modality. *Neuroimage*, 12(4), 381-391.

Lee, K. M. (2000). Cortical areas differentially involved in multiplication and subtraction: a functional magnetic resonance imaging study and correlation with a case of selective acalculia. *Annals of Neurology*, 48(4), 657-661.

Lemer, C., Dehaene, S., Spelke, E., & Cohen, L. (2003). Approximate quantities and exact number words: Dissociable systems. *Neuropsychologia*, 41(14), 1942-1958.

Loetscher, T., Schwarz, U., Schubiger, M., & Brugger, P. (2008). Head turns bias the brain's internal random generator. *Current Biology*, 18(2), R60-R62.

Loftus, A. M., Nicholls, M. E., Mattingley, J. B., & Bradshaw, J. L. (2008). Left to right: representational biases for numbers and the effect of visuomotor adaptation. *Cognition*, 107(3), 1048-1058.

Longo, M. R., & Lourenco, S. F. (2007). Spatial attention and the mental number line: Evidence for characteristic biases and compression. *Neuropsychologia*, 45(7), 1400-1407..

Lucchelli, F., & De Renzi, E. (1993). Primary dyscalculia after a medial frontal lesion of the left hemisphere. *Journal of Neurology, Neurosurgery & Psychiatry*, 56(3), 304-307.

McCloskey, M., Caramazza, A., & Basili, A. (1985). Cognitive mechanisms in number processing and calculation: Evidence from dyscalculia. *Brain and cognition*, 4(2), 171-196.

McCloskey, Michael, and Alfonso Caramazza. "Cognitive mechanisms in normal and impaired number processing." (1987).

McCloskey, M., & Caramazza, A. (1987). Cognitive mechanisms in normal and impaired number processing.

Medina, J., Kannan, V., Pawlak, M. A., Kleinman, J. T., Newhart, M., Davis, C., ... & Hillis, A. E. (2009). Neural substrates of visuospatial processing in distinct reference frames: evidence from unilateral spatial neglect. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 21(11), 2073-2084.

Menon, V., Rivera, S. M., White, C. D., Glover, G. H., & Reiss, A. L. (2000). Dissociating prefrontal and parietal cortex activation during arithmetic processing. *Neuroimage*, 12(4), 357-365.

Migliano E., Rotondaro F., Doricchi F. (in progettazione). *Per un modello neurale della cognizione dell'aritmetica elementare. Una possibile spiegazione a "diffusione dell'informazione per gradienti energetici verso punti di accumulazione" applicato al problema dell'individuazione di un numero (naturale) intermedio tra due numeri limiti.*

Milner, A. D., Goodale, M. A., & Vingrys, A. J. (2006). *The visual brain in action* (Vol. 2). Oxford: Oxford University Press.

Moeller, K., Fischer, M. H., Nuerk, H. C., & Willmes, K. (2009). Sequential or parallel decomposed processing of two-digit numbers? Evidence from eye-tracking. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 62(2), 323-334.

Moeller, K., Nuerk, H. C., & Willmes, K. (2009). Internal number magnitude representation is not holistic, either. *European Journal of Cognitive Psychology*, 21(5), 672-685.

Moyer, R. S., & Landauer, T. K. (1967). Time required for judgements of numerical inequality.

Moyer, R. S. (1973). Comparing objects in memory: Evidence suggesting an internal psychophysics. *Perception & Psychophysics*, 13(2), 180-184.

Nieder A., Freedman D.J., Miller E.K. (2002), "Representation of the quantity of visual items in the primate prefrontal cortex", *Science*, No. 297, pp. 1708-1711

Nieder A., Miller E.K. (2003), "Coding of cognitive magnitude: compressed scaling of numerical information in the primate prefrontal cortex" *Neuron*, No. 37, pp. 149-157

Nieder A., Miller E.K. (2004), "A parieto-frontal network for visual numerical information in the monkey", *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, No. 101, pp. 7457-7462

Nieder, A., & Miller, E. K. (2004). Analog numerical representations in rhesus monkeys: evidence for parallel processing. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 16(5), 889-901.

Nieder A., Merten K. (2007), "A labeled-line code for small and large numerosities in the monkey prefrontal cortex", *Journal of Neuroscience*, No. 27, pp. 5986-5993

Nieder A., Dehaene S., (2009), "Representation of Number in the Brain", *Annual Review of Neuroscience*, No. 32, pp. 185-208

Noël, M. P. (2005). Finger gnosia: a predictor of numerical abilities in children?. *Child Neuropsychology*, 11(5), 413-430.

- Norman, K. A., Polyn, S. M., Detre, G. J., & Haxby, J. V. (2006). Beyond mind-reading: multi-voxel pattern analysis of fMRI data. *Trends in cognitive sciences*, 10(9), 424-430.
- Nuerk, H. C., Weger, U., & Willmes, K. (2001). Decade breaks in the mental number line? Putting the tens and units back in different bins. *Cognition*, 82(1), B25-B33.
- Nuerk, H. C., Weger, U., & Willmes, K. (2002). A unit-decade compatibility effect in German number words. *Current Psychology Letters: Behaviour, Brain & Cognition*.
- Nuerk, H. C., Weger, U., & Willmes, K. (2004). On the perceptual generality of the unit-decade compatibility effect. *Experimental Psychology*, 51(1), 72.
- Nuerk, H. C., & Willmes, K. (2005). On the magnitude representations of two-digit numbers. *Psychology Science*, 47(1), 52-72.
- Parkman, J. M., & Groen, G. J. (1971). Temporal aspects of simple addition and comparison. *Journal of Experimental Psychology*, 89(2), 335.
- Pesenti, M., Thioux, M., Seron, X., & De Volder, A. (2000). Neuroanatomical substrates of Arabic number processing, numerical comparison, and simple addition: A PET study. *Journal of cognitive neuroscience*, 12(3), 461-479.
- Peelen, M. V., & Downing, P. E. (2007). Using multi-voxel pattern analysis of fMRI data to interpret overlapping functional activations. *Trends in cognitive sciences*, 11(1), 4-5.
- Piazza, M., Izard, V., Pinel, P., Le Bihan, D., & Dehaene, S. (2004). Tuning curves for approximate numerosity in the human intraparietal sulcus. *Neuron*, 44(3), 547-555.
- Piazza, M., & Dehaene, S. (2004). From number neurons to mental arithmetic: The cognitive neuroscience of number sense. *The cognitive neurosciences, 3rd edition, ed. MS Gazzaniga*, 865-77.

Piazza, M., Mechelli, A., Price, C. J., & Butterworth, B. (2006). Exact and approximate judgements of visual and auditory numerosity: An fMRI study. *Brain research*, *1106*(1), 177-188.

Piazza, M., Pinel, P., Le Bihan, D., & Dehaene, S. (2007). A magnitude code common to numerosities and number symbols in human intraparietal cortex. *Neuron*, *53*(2), 293-305.

Pinel, P., Dehaene, S., Riviere, D., & LeBihan, D. (2001). Modulation of parietal activation by semantic distance in a number comparison task. *Neuroimage*, *14*(5), 1013-1026.

Pinel, P., Piazza, M., Le Bihan, D., & Dehaene, S. (2004). Distributed and overlapping cerebral representations of number, size, and luminance during comparative judgments. *Neuron*, *41*(6), 983-993.

Priftis, Konstantinos, et al. "Explicit versus implicit processing of representational space in neglect: Dissociations in accessing the mental number line." *Journal of Cognitive Neuroscience* 18.4 (2006): 680-688.

Priftis, K., Zorzi, M., Meneghello, F., Marenzi, R., & Umiltà, C. (2006). Explicit versus implicit processing of representational space in neglect: Dissociations in accessing the mental number line. *Journal of Cognitive Neuroscience*, *18*(4), 680-688.

Ranzini M., Dehaene S., Piazza M., Hubbard E. M. (2009). Neural mechanisms of attentional shifts due to irrelevant spatial and numerical cues. *Neuropsychologia*. *47* (2009) 2615–2624

Ratinckx, E., Nuerk, H. C., van Dijck, J. P., & Willmes, K. (2006). Effects of interhemispheric communication on two-digit Arabic number processing. *Cortex*, *42*(8), 1128-1137.

Restle, F. (1970). Speed of adding and comparing numbers. *Journal of Experimental Psychology*, *83*(2p1), 274.

Revol, P., Rossetti, Y., Vighetto, A., Rode, G., Boisson, D., & Pisella, L. (2003). Pointing errors in immediate and delayed conditions in unilateral optic ataxia. *Spatial vision*, *16*(3-4), 347-364.

Rickard, T. C., Romero, S. G., Basso, G., Wharton, C., Flitman, S., & Grafman, J. (2000). The calculating brain: an fMRI study. *Neuropsychologia*, *38*(3), 325-335.

Rossetti, Y., Rode, G., Pisella, L., Farné, A., Li, L., Boisson, D., & Perenin, M. T. (1998). Prism adaptation to a rightward optical deviation rehabilitates left hemispatial neglect. *Nature*, *395*(6698), 166-169.

Rossetti, Y., Jacquin-Courtois, S., Rode, G., Ota, H., Michel, C., & Boisson, D. (2004). Does action make the link between number and space representation? Visuo-manual adaptation improves number bisection in unilateral neglect. *Psychological Science*, *15*(6), 426-430.

Ristic J., Wright A., Kingstone A. (2006). The number line effect reflects top-down control. *Psychonomic Bulletin & Review*, *13* (5), 862-868.

Rourke, B. P., & Conway, J. A. (1997). Disabilities of arithmetic and mathematical reasoning perspectives from neurology and neuropsychology. *Journal of Learning disabilities*, *30*(1), 34-46.

Rusconi, E., Walsh, V., & Butterworth, B. (2005). Dexterity with numbers: rTMS over left angular gyrus disrupts finger gnosis and number processing. *Neuropsychologia*, *43*(11), 1609-1624.

Sagiv, N., Simner, J., Collins, J., Butterworth, B., & Ward, J. (2006). What is the relationship between synaesthesia and visuo-spatial number forms?. *Cognition*, *101*(1), 114-128.

Sawamura, H., Shima, K., & Tanji, J. (2002). Numerical representation for action in the parietal cortex of the monkey. *Nature*, *415*(6874), 918-922.

Schenkenberg T, Bradford DC, and Ajax ET. Line bisection and unilateral visual neglect in patients with neurologic impairment. *Neurology*. 30: 509–517, 1980

Sekuler, R., & Mierkiewicz, D. (1977). Children's judgments of numerical inequality. *Child Development*, 630-633.

Sereno, M. I., & Huang, R. S. (2006). A human parietal face area contains aligned head-centered visual and tactile maps. *Nature neuroscience*, *9*(10), 1337-1343.

Seron, X., Pesenti, M., Noël, M. P., Deloche, G., & Cornet, J. A. (1992). Images of numbers, or “When 98 is upper left and 6 sky blue”. *Cognition*, *44*(1), 159-196.

Sheth, B. R., & Shimojo, S. (2001). Compression of space in visual memory. *Vision research*, *41*(3), 329-341.

Shuman, M., & Kanwisher, N. (2004). Numerical magnitude in the human parietal lobe: Tests of representational generality and domain specificity. *Neuron*, *44*(3), 557-569.

Siegler R.S. (1996), *Emerging minds: The process of change in children's thinking*, New York: Oxford University Press

Siegler, R. S., & Opfer, J. E. (2003). The development of numerical estimation evidence for multiple representations of numerical quantity. *Psychological science*, *14*(3), 237-250.

Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2004). Development of numerical estimation in young children. *Child development*, *75*(2), 428-444.

Spalding, J. M. K., & Zangwill, O. L. (1950). Disturbance of number-form in a case of brain injury. *Journal of Neurology, Neurosurgery, and Psychiatry*, *13*(1), 24.

Tang, J., Critchley, H. D., Glaser, D. E., Dolan, R. J., & Butterworth, B. (2006). Imaging informational conflict: A functional magnetic resonance imaging study of numerical Stroop. *Journal of Cognitive Neuroscience*, *18*(12), 2049-2062.

Tang, J., Ward, J., & Butterworth, B. (2008). Number forms in the brain. *Journal of Cognitive Neuroscience*, *20*(9), 1547-1556.

Temple E., Posner M.I. (1998), "Brain mechanisms of quantity are similar in 5-year-olds and adults", *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, No. 95, pp. 7836-7841

Tudusciuc, O., & Nieder, A. (2007). Neuronal population coding of continuous and discrete quantity in the primate posterior parietal cortex. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *104*(36), 14513-14518.

Umiltà, C., & Zorzi, M. (2003). I numeri in testa. *Mente e Cervello*, *1*, 18-24.

van Dijck, J. P., & Fias, W. (2011). A working memory account for spatial–numerical associations. *Cognition*, *119*(1), 114-119.

Venkatraman, V., Ansari, D., & Chee, M. W. (2005). Neural correlates of symbolic and non-symbolic arithmetic. *Neuropsychologia*, *43*(5), 744-753.

Venkatraman, V., Siong, S. C., Chee, M. W., & Ansari, D. (2006). Effect of language switching on arithmetic: A bilingual fMRI study. *Journal of Cognitive Neuroscience*, *18*(1), 64-74.

Verdon, V., Schwartz, S., Lovblad, K. O., Hauert, C. A., & Vuilleumier, P. (2010). Neuroanatomy of hemispatial neglect and its functional components: a study using voxel-based lesion-symptom mapping. *Brain*, *133*(3), 880-894.

Verguts, T., & Fias, W. (2004). Representation of number in animals and humans: a neural model. *Journal of Cognitive Neuroscience*, *16*(9), 1493-1504.

Verguts, T., & Van Opstal, F. (2008). A colorful walk, but is it on the mental number line? Reply to Cohen Kadosh, Tzelgov, and Henik. *Cognition*, *106*(1), 558-563.

Verguts, T., Fias, W., & Stevens, M. (2005). A model of exact small-number representation. *Psychonomic Bulletin & Review*, *12*(1), 66-80.

Vuilleumier, P., Ortigue, S., & Brugger, P. (2004). The number space and neglect. *Cortex*, *40*(2), 399-410.

Walsh, V. (2003). A theory of magnitude: common cortical metrics of time, space and quantity. *Trends in cognitive sciences*, *7*(11), 483-488.

Wood, G., Nuerk, H. C., & Willmes, K. (2006). Crossed Hands and the Snarc Effect: A failure to

Whalen, J., Gallistel, C. R., & Gelman, R. (1999). Nonverbal counting in humans: The psychophysics of number representation. *Psychological Science*, *10*(2), 130-137.

Woocher, F. D., Glass, A. L., & Holyoak, K. J. (1978). Positional discriminability in linear orderings. *Memory & Cognition*, *6*(2), 165-173.

Zago L., Petit L., Turbelin M.R., Andersson F., Vigneau M., Tzourio-Mazoyer N. (2008), "How verbal and spatial manipulation networks contribute to calculation: an fMRI study", *Neuropsychologia*, No. 46, pp. 2403–2414

Zorzi, M., Priftis, K., & Umiltà, C. (2002). Brain damage: neglect disrupts the mental number line. *Nature*, *417*(6885), 138-139.

Zorzi, M., Stoianov I, Umiltà C. (2005) Computational modeling of numerical cognition. Handbook of mathematical cognition, pp. 67-84.

Zorzi M., Priftis K., Meneghello F., Marenzi R., Umiltà C. (2005), “The spatial representation of numerical and non-numerical sequences: evidence from neglect”, *Neuropsychologia*, No. 44, pp. 1061–1067

Zorzi, M., Priftis, K., Meneghello, F., Marenzi, R., & Umiltà, C. (2006). The spatial representation of numerical and non-numerical sequences: evidence from neglect. *Neuropsychologia*, 44(7), 1061-1067.