УДК 519.6

ОБ ОПЕРАЦИЯХ НАД T-СВЯЗАННЫМИ ВОЗМОЖНОСТНЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ[1]

Гордеев Р.Н.
Кафедра информационных технологий

Поступила в редакцию 03.12.2010, после переработки 20.12.2010.

В работе рассаматриваются вопросы суммирования и умножения взаимно T-связанных возможностных величин при произвольной Архимедовой t-норме T. Приводится обобщение теоремы Дюбуа и Прада [10], позволяющее идентифицировать сюръективность функции распределения суммы взаимно T-связанных возможностных величин. Доказана теорема, позволяющая аппроксимировать функцию распределения произведения возможностных величин при их агрегировании на основе Архимедовой t-нормы.

The sum and product of T-mutually related possibilistic variables were considered. The theorem of Dubois and Prade [10] was enhanced in order to identify surjectivity of the distribution function of T-mutually related possibilistic variables. Also we proved a theorem which allows to approximate the distribution function of the product of possibilistic variables when their aggregations are based on a Archimedean t-norm.

Ключевые слова: t-норма, t-конорма, функция агрегирования, возможностная величина, взаимно Т-связанные возможностные величины, сумма и произведение возможностных величин, функция распределения.
Keywords: t-norm, t-conorm, aggregation function, possibilistic variables, T-related possibilistic variables, sum and product of possibilistic variables, membership function.

Введение

В работе [10] приводится результат, позволяющий сделать вывод о сюрьективности результирующей функции распределения суммы нечетких величин при использовании в качестве функции агрегирования t-нормы $T = \min$. В данной работе мы приводим контр-пример, доказывающий неверность исходного утверждения, и накладываем некоторые дополнительные ограничения на функции распределения возможностных величин, которые позволяют получить нам требуемое утверждение. Далее мы рассматриваем произведение возможностных величин на

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №10-01-00052-а.

основе Архимедовой t-нормы T_p с аддитивным генератором $g^p : [0,1] \to [0,\infty)$, $p > 1$, и формулируем результат, позволяющий говорить о замкнутости произведения возможностных величин LR-типа относительно функций представления формы.

1. Основные понятия

Пусть тройка $(\Gamma, \mathscr{P}(\Gamma), \pi)$ есть возможностное пространство, $\mathbb{R}$ – числовая прямая.

Введем понятие возможностной (нечеткой) величины аналогично тому, как это сделано в работах [16, 17, 18, 19].

Определение 1. Возможностной величиной *называется отображение* $X : \Gamma \to \mathbb{R}$. Распределением возможностей *величины* X *называется функция* $\mu_X : \mathbb{R} \to [0,1]$*, определяемая по правилу*

$$\mu_X(x) = \pi\{\gamma \in \Gamma \mid X(\gamma) = x\}, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Таким образом $\mu_X(x)$ *есть возможность того, что нечеткая величина* X *может принять значение, равное* x.

Определение 2. Ядром *нечеткой величины* X*, обозначается* $\mathrm{Core}(X)$*, называется множество следующего вида*

$$\mathrm{Core}(X) = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu_X(x) = 1\}. \tag{2}$$

Возможностная величина X *называется* нормальной *если ее ядро не пусто.* Носителем *возможностной величины* X*, обозначается* $\mathrm{Supp}(X)$*, называется множество*

$$\mathrm{Supp}(X) = \mathrm{cl}\,\{x \in \mathbb{R} \mid \mu_X(x) > 0\}, \tag{3}$$

а ее высотой

$$\mathrm{Hgt}(X) = \sup\{\mu_X(x) \mid x \in \mathbb{R}\}. \tag{4}$$

Определение 3. *Для каждого* $\alpha \in [0,1]$ множеством α–уровня *возможностной величины* X *(или* α–уровнем X*) называется множество*

$$[X]_\alpha = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu_X(x) \geq \alpha\}, \tag{5}$$

строгим множеством α-уровня *возможностной величины* X *называется множество*

$$(X)_\alpha = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu_X(x) > \alpha\}. \tag{6}$$

Класс всех возможностных величин на $\mathbb{R}$ *далее будем обозначать через* $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Определение 4. *Пусть* $\mu : \mathbb{R} \to [0,1]$ *– произвольная функция,* $\alpha \in [0,1]$. Верхним множеством уровня α*,* $U(\mu,\alpha)$*, функции* μ *называется множество*

$$U(\mu,\alpha) = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu(x) \geq \alpha\}. \tag{7}$$

В [12] показано, что система верхних множеств уровня α нормированной функции может рассматриваться как возможностная величина с соответствующими множествами уровня α.

Определение 5. *Возможностная величина X называется* замкнутой, *если ее функция распределения полунепрерывна сверху;* выпуклой, *если ее функция распределения квазивогнута, т.е. удовлетворяет условию*

$$\mu_X(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\left\{\mu_X(x_1), \mu_X(x_2)\right\},\ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \lambda \in [0,1].$$

Определение 6. *Выпуклые возможностные величины называют* нечеткими интервалами. *Нечеткий интервал, ядро которого состоит из одной точки, называется* нечетким числом. *Каждая точка ядра возможностной величины называется ее* модальным значением.

Наиболее широко применяемым на практике классом нечетких интервалов является класс возможностных величин LR-типа [9]. Он получается представлением возможностной величины с полунепрерывной сверху функцией распределения на основе двух типов функций $L, R : \mathbb{R}^+ \to [0,1]$: L, R – невозрастающие функции, полунепрерывные сверху и удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned}
&L, R : [0,\infty) \to [0,1],\\
&L(0) = R(0) = 1,\\
&\lim_{x\to+\infty} L(x) = \lim_{x\to+\infty} R(x) = 0.
\end{aligned}$$

Функция L (или R), удовлетворяющая этим условиям, называется функцией представления формы.

Определение 7. *Бинарная операция $*$ на $\mathbb{R}$ называется* возрастающей (убывающей), *если для любых $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, таких, что $x_1 > y_1$ и $x_2 > y_2$, имеет место $x_1 * x_2 > y_1 * y_2 (x_1 * x_2 < y_1 * y_2)$.*

Для описания операций над нечеткими величинами в общем виде нам потребуются t-нормы и t-конормы, которые являются естественным обобщением операций max и min, положенных в основу операций над возможностными величинами.

Триангулярной нормой (или t-нормой) называется вещественная функция двух переменных $T : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, обладающая следующими свойствами:

i. $T(0,0) = 0$, $T(1,x) = T(x,1) = x$, (граничное условие);

ii. $T(x,y) = T(y,x)$, (коммутативность);

iii. $T(x, T(y,z)) = T(T(x,y),z)$, (ассоциативность);

iv. Если $w \leq x$ и $y \leq z$, то $T(w,y) \leq T(x,z)$, (монотонность).

Если помимо приведенных выше четырех условий t-норма удовлетворяет условию

v. $T(x,x) < x$, $\forall x \in (0,1)$,

то она нызвается *Архимедовой* t-нормой.

Справедливо следующее утверждение [4].

Теорема 1. *t-норма является непрерывной Архимедовой t-нормой тогда и только тогда, когда*

$$T(x,y) = f(g(x) + g(y)), \tag{8}$$

где

- $g : [0,1] \to R^+$ *- непрерывная убывающая функция, такая, что* $g(1) = 0$,
- $f : R^+ \to [0,1]$ *- непрерывная функция, такая, что* $f(x) = g^{-1}(x)$, $\forall x \in [0, g(0)]$ *и* $f(x) = 0$, $\forall x > g(0)$;

или, эквивалентно,

$$T(x,y) = g^{-1}(\min(g(x) + g(y), g(0))). \tag{9}$$

Функция g называется аддитивным генератором t-нормы T.

Будем говорить, что t-норма T имеет *нулевые делители* (является *нильпотентной*), если она удовлетворяет условию

vi. $T(x,y) = 0$ для каких либо $x, y \in (0,1]$.

Определение 8. Триангулярной конормой (t-конормой) *называется вещественная функция двух переменных $S : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, удовлетворяющая следующим условиям:*

i. $S(1,1) = 1$, $S(0,x) = S(x,0) = x$, *(граничное условие);*

ii. $S(x,y) = S(y,x)$, *(коммутативность);*

iii. $S(x, S(y,z)) = S(S(x,y), z)$, *(ассоциативность);*

iv. *Если* $w \le x$ *и* $y \le z$, *то* $S(w,y) \le S(x,z)$, *(монотонность).*

t-конорма S двойственна *данной t-норме T, если*

$$S(x,y) = 1 - T(1-x, 1-y)$$

верно для всех $x, y \in [0,1]$. Обратно, t-норма T двойственна *данной t-конорме S, если*

$$T(x,y) = 1 - S(1-x, 1-y)$$

верно для всех $x, y \in [0,1]$. Кроме того заметим, что каждая t-конорма удовлетворяет дополнительному граничному условию $S(1,x) = S(x,1) = 1$ для всех $x \in [0,1]$.

Определение 9. *Отрицанием называют строго убывающую функцию $N : [0,1] \to [0,1]$, такую что $N(N(x)) = x$, $\forall x, y \in [0,1]$.*

Определенная таким образом функция удовлетворяет граничным условиям:

- $\mathrm{N}(0) = 1$,
- $\mathrm{N}(1) = 0$.

Примером отрицания может служить функция $N(x) = 1 - x$.

Введем теперь понятие взаимно несвязанных (минисвязанных и T-связанных) возможностных величин. Для этого сначала определим вектор возможностных величин. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_m$ – возможностные величины, тогда их совместное распределение определяется формулой

$$\mu_{X_1,\ldots,X_m}(x_1, \ldots, x_m) = \pi\big\{\gamma \in \Gamma \mid X_1(\gamma) = x_1, \ldots, \\ X_m(\gamma) = x_m\big\},\ \forall (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m,$$

а совокупность $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ называется *вектором возможностных величин.*

Определение 10. *Пусть T будет t-нормой. Возможностные величины $X_1, X_2, \ldots, X_m$ называются* взаимно T-связанными*, если для любого подмножества $\big\{i_1, i_2, \ldots, i_k\big\}$ множества $\big\{1, 2, \ldots, m\big\}$*

$$\mu_{X_{i_1},\ldots,X_{i_k}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) = \\ T(\mu_{X_{i_1}}(x_{i_1}), T(\mu_{X_{i_2}}(x_{i_2}), T(\mu_{X_{i_2}}(x_{i_2}), \ldots, T(\mu_{X_{i_{k-1}}}(x_{i_{k-1}}), \mu_{X_{i_k}}(x_{i_k}))))) = \\ T(\mu_{X_{i_1}}(x_{i_1}), \ldots, \mu_{X_{i_k}}(x_{i_k})),\ \forall (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) \in \mathbb{R}^k. \quad (10)$$

В случае, когда $T = \min$, возможностные величины $X_1, X_2, \ldots, X_m$ называются взаимно минисвязанными.

Замечание 1. Далее мы будем использовать $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ для обозначения множества всех возможностных величин, а $\mathcal{FN}_{LR}(\mathbb{R})$ для обозначения множества всех возможностных величин LR типа.

2. Усиленная теорема Дюбуа и Прада

Используя функции нечетких величин, бинарная операция $*$, заданная на $\mathbb{R}$, может быть обобщена на $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, т.е. может быть применена к возможностным величинам.

Если μ_X, μ_Y являются функциями распределения возможностей нечетких величин X и Y соответственно, то функция распределения возможностей величины $X * Y$ определяется по правилу

$$\mu_{X*Y}(z) = \sup_{z=x*y} T\{\mu_X(x), \mu_Y(y)\},$$

где T - t-норма, в классической формулировке принципа обобщения Заде используется t-норма $T = \min$.

В [10] доказана следующая теорема, характеризующая свойства указанной выше функции распределения.

Теорема 2 (Дюбуа, Прад)**.** *Если X и Y являются нечеткими числами с непрерывными сюръективными функциями распределения из $\mathbb{R}$ в $[0, 1]$, а $*$ является непрерывным возрастающим (убывающим) бинарным оператором, то функция распределения нечеткого числа $X * Y$ является непрерывной и сюръективной функцией из $\mathbb{R}$ в $[0, 1]$.*

Однако, можно показать, что условия теоремы не гарантируют сюръективность функции μ_{X*Y}. Для этого рассмотрим следующий пример.

Пример 1. Пусть функция μ_X имеет вид:

$$\mu_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } x \leq -\frac{1}{2}, \\ 1 - |x|, & \text{если } x \in [-\frac{1}{2}, 1], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

А функция $\mu_Y(y) = \mu_X(-y)$. Очевидно, что функции μ_X и μ_Y непрерывны и являются отображением $\mathbb{R}$ на $[0,1]$. Выберем в качестве оператора $*$ алгебраическое сложение $+$, которое является непрерывным и возрастающим. Произведя необходимые вычисления, получим функцию распределения $\mu_{X\oplus Y}$:

$$\mu_{X\oplus Y}(z) = \sup_{z=x+y} \min\{\mu_X(x), \mu_Y(y)\} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}|z|, & |z| \leq 1, \\ \frac{1}{2}, & |z| > 1. \end{cases}$$

Легко заметить, что данная функция не является отображением $\mathbb{R}$ на $[0,1]$, поскольку, скажем, для значения $0 \in [0,1]$ не существует прообраза $z \in \mathbb{R}$.

Далее мы сделаем более сильные предположения относительно функций распределения μ_X и μ_Y, которые гарантирую сюръективность функции $\mu_{X*Y} : \mathbb{R} \to [0,1]$ даже в том случае, когда в качестве функции агрегирования выступает произвольная непрерывная t-норма T, а не только $T = \min$.

Рассмотрим возможностные величины с непрерывными функциями распределения и ограниченными носителями. Заметим, если возможностная величина X имеет ограниченный носитель, то существует открытый интервал (ϕ_X, ψ_X) такой, что $\operatorname{Supp} X = (\phi_X, \psi_X)$. Кроме того, заметим, что условие ограниченности $\operatorname{Supp} X$ сильнее условия сюръективности μ_X, поскольку ограниченность $\operatorname{Supp} X$ дает возможность построить ограниченный прообраз отображения μ_X, в то время как сюръективность лишь предполагает наличие прообраза и никак не характеризует его свойства.

Докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть X и Y непрерывные возможностные величины с ограниченным носителем, $*$ - непрерывный бинарный оператор, а T - непрерывня t-норма, то $\mu^{-1}_{X*Y}(0) \neq \emptyset$.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{Supp} X = (\phi_X, \psi_X)$ и $\operatorname{Supp} Y = (\phi_Y, \psi_Y)$, а $\max\{|\phi_X|, |\psi_X|, |\phi_Y|, |\psi_Y|\} = \rho$. Далее из непрерывности оператора $*$ и компактности $[-\rho, \rho] \times [-\rho, \rho]$ следует, что $\sup\{|x*y| : |x| \leq \rho, |y| \leq \rho\} \leq M < \infty$. Для $z \in \mathbb{R}$ таких, что $|z| > M$, имеем

$$\begin{aligned} \mu_{X*Y}(z) &= \sup_{z=x*y} T\{\mu_X(x), \mu_Y(y)\} \\ &\leq \sup\{\min(\mu_X(x), \mu_Y(y)) | (x,y) \in ((\phi_X, \psi_X) \times (\phi_Y, \psi_Y))^c\}\} = 0. \end{aligned}$$

Последнее доказывает лемму. □

Данная лемма приводит нас к следующей усиленной теореме Дубуа и Прада.

Теорема 3. *Если возможностные величины X и Y имеют непрерывные функции распределения и ограниченные носители, оператор $*$ является непрерывной возрастающей (убывающей) бинарной операцией на $\mathbb{R}$, T является непрерывной t-нормой, то $X*Y$ является возможностной величиной с непрерывной функцией распределения, являющейся отображением $\mathbb{R}$ на $[0,1]$.*

3. Произведение возможностных величин

В целях некоторого упрощения будем рассматривать только положительные возможностные величины, т.е. величины $X \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ такие, что $\mu_X(x) = 0 \ \forall x < 0$. Обозначим множество положительных возможностных величин $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+)$, а множество положительных возможностных величин LR типа $\mathcal{FN}_{LR}(\mathbb{R}^+)$.

Как уже упоминалось выше, любую бинарную операцию $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ можно обобщить, использую функции нечетких величин, на случай возможностных величин $* : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}(\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$. Рассмотрим $X, Y \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, имеем

$$\mu_{X*Y}(z) = \sup_{z=x*y} T\{\mu_X(x), \mu_Y(y)\}, \tag{11}$$

где T - произвольная t-норма (min в случае минисвязанных величин).

Произведение минисвязанных возможностных величин LR типа рассмотрено, например, в [10]. Рассмотрим две положительные возможностные величины $X = (a, \alpha_1, \beta_1), Y = (b, \alpha_2, \beta_2) \in \mathcal{FN}_{LR}(\mathbb{R}^+)$, имеющие одинаковые функции представления формы. В отличие от суммы $X \oplus Y$, произведение $X \odot Y$ не является возможностной величиной LR типа с теми же функциями представления формы, что и у X и Y. Для того, чтобы определить функцию распределения величины $(X \odot Y)(x)$, не прибегая к аппроксимации, необходимо решить уравнение второго порядка относительно z. Однако, если коэффициенты нечеткости величин X и Y малы по сравнению с их модальными значениями, т.е. $\alpha_1, \beta_1 \ll a$ и $\alpha_2, \beta_2 \ll b$, то величинами порядка $O(\frac{\alpha_1\beta_1}{ab})$ можно пренебречь. Последнее приводит нас к следующей аппроксимации

$$(a, \alpha_1, \beta_1)_{LR} \odot (b, \alpha_2, \beta_2)_{LR} \simeq (ab, a\alpha_2 + b\alpha_1, a\beta_2 + b\beta_1)_{LR}, \tag{12}$$

то есть, в случае $T = \min$, $X \odot Y$ является приблизительно возможностной величиной LR типа с функциями представления формы L и R, аналогичными функциям представления формы исходных величин.

Если в выражении (11) вместо min использовать произвольную t-норму T, то это осложнит ситуацию даже для суммирования. Существует достаточно много работ, посвященных суммированию T-связанных возможностных величин, например [7] (здесь же можно посмотреть библиографический список остальных работ, относящихся к данному вопросу), и только несколько работ, посвященных произведению T-связанных возможностных величин.

Среди идей, положенных в основу вычисления функции распределения взаимно T-связанных возможностных величин, примечателен принцип (g,p)-фаззификации М. Ковач [13, 14]. М. Ковач рассматривает суммирование взаимно T-связанных нечетких чисел с функциями представления формы $L = R = g^{-1}$

в случае, когда t-норма $T = T_p$ имеет аддитивный генератор $g^p, p \geq 1$. Было показано, что в случае, когда $X, Y \in \mathcal{FN}_{g^{-1}g^{-1}}(\mathbb{R})$ и $X = (a, \alpha_1, \beta_1)_{g^{-1}g^{-1}}$, $Y = (a, \alpha_2, \beta_2)_{g^{-1}g^{-1}}$, сумма $Z = X \oplus Y$, определенная согласно (11), при $T = T_p$, также является нечетким числом с функцией представления формы $L = R = g^{-1}$, т.е. $Z \in \mathcal{FN}_{g^{-1}g^{-1}}(\mathbb{R})$ и

$$(a, \alpha_1, \beta_1)_{g^{-1}g^{-1}} \oplus (b, \alpha_2, \beta_2)_{g^{-1}g^{-1}} = (a + b, \gamma_1(p), \gamma_2(p))_{g^{-1}g^{-1}}, \tag{13}$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$\begin{aligned} \gamma_1(p) = \|(\alpha_1, \alpha_2)\|_q = \sqrt[q]{(\alpha_1)^q + (\alpha_2)^q}, \\ \gamma_1(p) = \|(\beta_1, \beta_2)\|_q = \sqrt[q]{(\beta_1)^q + (\beta_2)^q}. \end{aligned} \tag{14}$$

Далее для краткости будем писать вместо $g^{-1}g^{-1}$ просто g в выражениях вида $\mathcal{FN}_g(\mathbb{R})$ или $X = (a, \alpha_1, \beta_1)_g$.

Следующее утверждение позволяет получить аналогичный результат для произведения T-связанных возможностных величин LR типа. Как и в случае с минисвязанными величинами [10] мы будем пренебрегать некоторыми компонентами второго порядка, чтобы получить формулу, аналогичную (12).

Теорема 4. *Если возможностные величины X и Y являются взаимно T-связанными, t-норма $T = T_p$ имеет аддитивный генератор $g^p : [0, 1] \to [0, \infty)$, $p \geq 1$, то обобщенная операция произведения двух возможностных величин $X = (a, \alpha_1, \beta_1), Y = (b, \alpha_2, \beta_2) \in \mathcal{FN}_g(\mathbb{R}^+)$, коэффициенты нечеткости которых значительно меньше их модальных значений, т.е. $\alpha_1, \beta_1 \ll a$ и $\alpha_2, \beta_2 \ll b$, может быть аппроксимирована следующим выражением:*

$$(a, \alpha_1, \beta_1)_g \odot (b, \alpha_2, \beta_2)_g \simeq (c, \gamma_1(p), \gamma_2(p))_g, \tag{15}$$

где $c = a \cdot b$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и

$$\begin{aligned} \gamma_1(p) = \|(b\alpha_1, a\alpha_2)\|_q = \sqrt[q]{(b\alpha_1)^q + (a\alpha_2)^q}, \\ \gamma_1(p) = \|(b\beta_1, a\beta_2)\|_q = \sqrt[q]{(b\beta_1)^q + (a\beta_2)^q}. \end{aligned} \tag{16}$$

То есть возможностная величина $Z = (c, \gamma_1(p), \gamma_2(p))_g \simeq X \odot Y$ описывается теми же функциями представления формы, что и величины X и Y.

Доказательство. Доказательство теоремы следует непосредственно из результатов работы [15] и того факта, используемого в [14, 13], что существует взаимно однозначное соответствие между нормированным линейным пространством $\mathbb{R}^n$ и нормированным линейным пространством линейных функционалов на $\mathbb{R}^n$, т.е. $Lin(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Более того, эта биекция является изометрическим отображением, если на $Lin(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ задана норма $\|\cdot\|_p$, а на $\mathbb{R}$ норма $\|\cdot\|_q$, такие что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. □

Из этой теоремы непосредственно вытекает следующее.

Следствие 1. *i. Если $X \in \mathcal{FN}(\mathbb{R}^-)$, а $Y \in \mathcal{FN}(\mathbb{R}^+)$, то (15) принимает вид*

$$(a, \alpha_1, \beta_1)_g \odot (b, \alpha_2, \beta_2)_g \simeq (a \cdot b, \|(b\alpha_1, a\beta_2)\|_q, \|(b\beta_1, a\alpha_2)\|_q)_g \tag{17}$$

ii. *Если $X \in \mathcal{FN}(\mathbb{R}^-)$, а $Y \in \mathcal{FN}(\mathbb{R}^-)$, то (15) принимает вид*

$$(a, \alpha_1, \beta_1)_g \odot (b, \alpha_2, \beta_2)_g \simeq (a \cdot b, \|(b\beta_1, a\beta_2)\|_q, \|(b\alpha_1, a\alpha_2)\|_q)_g \tag{18}$$

iii. *Если $p = 1$ и ($q = \infty$), то T_p вырождается в хорошо известную t-норму Лукасевича. В этом случае $(a, \alpha_1, \beta_1)_g \odot (a, \alpha_2, \beta_2)_g$ имеет наименьшие коэффициенты нечеткости*

$$\begin{aligned} \gamma_1(p) = \|(b\alpha_1, a\alpha_2)\|_\infty = \max\{b\alpha_1, a\alpha_2\}, \\ \gamma_1(p) = \|(b\beta_1, a\beta_2)\|_\infty = \max\{b\beta_1, a\beta_2\}. \end{aligned} \tag{19}$$

iv. *Очевидно, что $\lim_{p\to\infty} T_p(x, y) = \min\{x, y\}$. Поэтому в случае, если $p = \infty$ и ($q = 1$), мы имеем дело с минисвязаными величинами и $(a, \alpha_1, \beta_1)_g \odot (a, \alpha_2, \beta_2)_g$ имеет наибольшие коэффициенты нечеткости*

$$\begin{aligned} \gamma_1(p) = \|(b\alpha_1, a\alpha_2)\|_\infty = b\alpha_1 + a\alpha_2, \\ \gamma_1(p) = \|(b\beta_1, a\beta_2)\|_\infty = b\beta_1 + a\beta_2. \end{aligned} \tag{20}$$

v. *В случае, когда возможностные величины являются нечеткими интервалами LR-типа, т.е. $X = (a_1, a_2, \alpha_1, \beta_1)_g$, $Y = (b_1, b_2, \alpha_2, \beta_2)_g \in \mathcal{FI}_g(\mathbb{R}^+)$, выражение (15) примет вид*

$$(a_1, a_2, \alpha_1, \beta_1)_g \odot (b_1, b_2, \alpha_2, \beta_2)_g \simeq (a_1b_1, a_2b_2, \|(b_1\alpha_1, a_1\beta_2)\|_q, \|(b_2\beta_1, a_2\alpha_2)\|_q)_g \tag{21}$$

vi. *Запишем (15) в следующей форме*

$$(a, \alpha_1, \beta_1)_g \odot (b, \alpha_2, \beta_2)_g \simeq (c, \|(\frac{c\alpha_1}{a}, \frac{c\alpha_2}{b})\|_q, \|(\frac{c\beta_1}{a}, \frac{c\beta_2}{b})\|_q)_g, \tag{22}$$

где $c = a \cdot b$. Данная форма позволяет записать нам выражение для произведения более двух возможностных величин LR-типа. Если $X_i = (a_i, \alpha_i, \beta_i)_g \in \mathcal{FN}_g(\mathbb{R}^+)$ - положительные возможностные величины LR-типа, то выражение (15) принимает вид

$$\bigodot_{i=1}^{n} (a_i, \alpha_i, \beta_i)_g \simeq (c, \gamma_1(p), \gamma_2(p))_g, \tag{23}$$

где

$$\begin{aligned} c = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n, \\ \gamma_1(p) = \|(\frac{c\alpha_1}{a_1}, \frac{c\alpha_2}{a_2}, \ldots, \frac{c\alpha_n}{a_n})\|_q, \\ \gamma_2(p) = \|(\frac{c\beta_1}{a_1}, \frac{c\beta_2}{a_2}, \ldots, \frac{c\beta_n}{a_n})\|_q. \end{aligned}$$

Заключение

В работе доказано утверждение, устанавливающее достаточные условия сюръективности функции распределения суммы нечетких величин при использовании в качестве функции агрегирования t-нормы $T = \min$. Рассмотрено произведение возможностных величин на основе Архимедовой t-нормы T_p с аддитивным генератором $g^p : [0,1] \to [0,\infty)$, $p > 1$, и доказана теорема, позволяющая говорить о замкнутости произведения возможностных величин LR-типа относительно функций представления формы.

Список литературы

[1] Mayor, G. Contribució a l'estudi de models matematics per a la lógic de la vaguetat: Ph.d. thesis / Univ. Islas Baleares. — 1984.

[2] Roubens, M. Some properties of choice functions based on valued binary relations / M. Roubens // European J. Oper. Res. — 1989. — no. 40. — Pp. 309–321.

[3] Schweizer, B. Associative functions and statistical triangle inequalities / B. Schweizer, A. Sklar // Publ. Math. Debrecen. — 1961. — no. 8. — Pp. 77–80.

[4] Schweizer, B. Probabilistic Metric Spaces / B. Schweizer, A. Sklar. — North-Holland: Amsterdam, 1983.

[5] Trillas, E. Sobre functiones de negation en ia teoria de conjunctos diffusos / E. Trillas // Stochastica. — 1979. — no. 3. — Pp. 47–59.

[6] Гордеев, Р. Н. Метод решения одной задачи возможностного программирования / Р. Н. Гордеев, А. В. Язенин // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2006. — № 3. — С. 121–128.

[7] Солдатенко, И. С. Задачи возможностной оптимизации с взаимно T-связанными параметрами: сравнительное изучение / И. С. Солдатенко, А. В. Язенин // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2008. — № 5. — С. 87–98.

[8] Nahmias, S. Fuzzy variables / S. Nahmias // Fuzzy Sets and Systems. — 1978. — no. 1. — Pp. 97–110.

[9] Дюбуа, Д. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике / Д. Дюбуа, А. Прад; Под ред. С. А. Орловский. — М.: Радио и связь, 1990. — 288 с.

[10] Dubois, D. Fuzzy sets and systems: theory and applications / D. Dubois, A. Prade. — New York: Academic Press, 1980. — 389 Pp.

[11] Dubois, D. Fuzzy real algebra: some resuls / D. Dubois, A. Prade // Fuzzy Sets and Systems. — 1979. — no. 2. — Pp. 327–348.

[12] Ralescu, D. A survey of the representation of fuzzy concepts and its applications / D. Ralescu // Advances in Fuzzy Sets Theory and Applications / Ed. by M. M. Gupta, R. K. Regade, R. Yager. — North Holland, Amsterdam, 1979. — Pp. 77–91.

[13] Kovács, M. Stable embedding of ill-posed linear equality and inequality systems into fuzzified systems / M. Kovács // Fuzzy Sets and Systems. — 1992. — no. 45(3). — Pp. 305–312.

[14] Kovács, M. On the g-fuzzy linear systems / M. Kovács // BUSEFAL. — 1988. — no. 37. — Pp. 69–77.

[15] Fullér, R. On generalization of Nguyen's theorem / R. Fullér, T. Keresztfalvi // Fuzzy Sets and Systems. — 1990. — no. 41. — Pp. 371–374.

[16] Язенин, А. В. Модели возможностного программирования в оптимизации систем / А. В. Язенин // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1991. — № 5. — С. 133–142.

[17] Язенин, А. В. К задаче максимизации возможности достижения нечеткой цели / А. В. Язенин // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 1999. — № 4. — С. 120–123.

[18] Yazenin, A. V. On the problem of possibilistic optimization / A. V. Yazenin // Fuzzy Sets and Systems. — 1996. — no. 81. — Pp. 133–140.

[19] Yazenin, A. V. Possibilistic optimization. A measure-based approach / A. V. Yazenin, M. Wagenknecht. — BUTC-UW, 1996. — Vol. 6.