

# МОДЕЛИ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

УДК 539.3

## РАСЧЕТ НАПРЯЖЕНИЙ ВБЛИЗИ УПРУГОГО ВКЛЮЧЕНИЯ С МЕЖФАЗНЫМ СЛОЕМ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Зингерман К.М.

Кафедра вычислительной математики

---

*Поступила в редакцию 05.12.2010, после переработки 10.12.2010.*

---

Для случая конечных деформаций рассматривается приближенное аналитическое решение плоской задачи теории упругости для бесконечно протяженного тела с круговым включением, окруженным межфазным слоем. Решение находится методом возмущений. Линеаризованные задачи решаются с использованием функций комплексных переменных.

The plane problem of the theory of elasticity is considered for an infinite solid with circular inclusion surrounded by interphase layer. The perturbation technique is used for solution. The solution of linearized problems is found using functions of complex variables.

**Ключевые слова:** нелинейная теория упругости, конечные деформации, плоская задача, упругое включение, межфазный слой, приближенное аналитическое решение, метод возмущений.

**Keywords:** nonlinear elasticity, finite strains, plane problem, elastic inclusion, interphase layer, approximate analytical solution, perturbation technique.

### Введение

В современной механике композитов получила распространение концепция межфазного слоя — области вокруг частиц наполнителя, механические свойства которой существенно отличаются как от свойств наполнителя, так и от свойств матрицы [1]–[8]. Эта концепция получила экспериментальное обоснование, например, при исследовании наноструктуры наполненных эластомерных композитов с использованием атомно-силовых микроскопов [9]. Представляют интерес расчеты напряженно-деформированного состояния композита с учетом наличия этого слоя. В настоящей статье предлагается подход к решению модельных плоских задач нелинейной теории упругости, позволяющих исследовать влияние межфазного слоя при конечных деформациях.

### 1. Постановка задачи

Исследуется статическое напряженно-деформированное состояние бесконечно протяженного упругого тела (матрицы), в котором имеется круговая область с

другими свойствами. Эта область состоит из двух частей, ограниченных в недеформированном состоянии концентрическими окружностями — внутренней части (включения) и кольцевого межфазного слоя (рис. 2). Задача рассматривается при конечных плоских деформациях. Материалы матрицы, включения и межфазного слоя считаются сжимаемыми, их механические свойства описываются двухконстантным упругим потенциалом — частным случаем потенциала Мурнагана [10]. Считается, что на границах межфазного слоя с матрицей и включением выполнены условия идеального контакта — условия непрерывности вектора перемещений и вектора нормальных истинных напряжений.

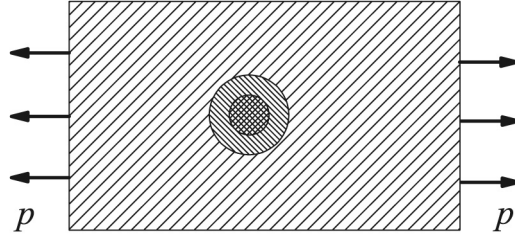


Рис. 1: Схема нагружения тела с включением и межфазным слоем

Рассмотрим математическую постановку задачи в координатах недеформированного состояния. Уравнение равновесия имеет вид

$$\overset{0}{\nabla} \cdot [\overset{0}{\Sigma} \cdot \Psi] = 0, \quad (1)$$

здесь

$$\overset{0}{\Sigma} = (1 + \Delta) \Psi^{*-1} \cdot \sigma \cdot \Psi^{-1}. \quad (2)$$

Определяющие соотношения записываются в форме [10]

$$\overset{0}{\Sigma} = \lambda(\overset{0}{\mathbf{E}} : \mathbf{I})\mathbf{I} + 2G\overset{0}{\mathbf{E}}. \quad (3)$$

В этих соотношениях модули  $\lambda$  и  $G$  принимают разные значения в разных областях:

$$\lambda = \lambda_i, \quad G = G_i \quad \text{в области } S_i, \quad i = 0, 1, 2.$$

Кинематические соотношения имеют вид

$$\overset{0}{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} (\Psi \cdot \Psi^* - \mathbf{I}), \quad \Psi = \mathbf{I} + \overset{0}{\nabla} \mathbf{u}. \quad (4)$$

В постановку задачи входят также условия на бесконечности

$$\overset{0}{\Sigma} \Big|_{\infty} = \overset{0}{\Sigma}^{\infty} \quad (5)$$

а также условия непрерывности вектора перемещений  $\mathbf{u}$  и вектора нормальных напряжений  $\overset{0}{\mathbf{N}} \cdot \overset{0}{\Sigma} \cdot \Psi$  на границах межфазного слоя с матрицей и включением в недеформированном состоянии [11, 12].

Использованы следующие обозначения [10, 14]:  $\mathbf{u}$  — вектор перемещений,  $\Psi$  — аффинор деформаций,  $\mathbf{E}^0$  — тензор деформаций Грина,  $\mathbf{\Sigma}^0$  — тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа второго рода,  $\boldsymbol{\sigma}$  — тензор истинных напряжений,  $\nabla^0$  — градиент в базисе недеформированного состояния,  $\mathbf{I}$  — единичный тензор,  $\mathbf{N}^0$  — нормаль к границе в координатах недеформированного состояния;  $S_0, S_1, S_2$  — области, занятые в недеформированном состоянии включением, межфазным слоем и матрицей соответственно.

## 2. Метод решения

Для решения задачи применяется метод возмущений (малого параметра) [10, 14]. Выбирается малый параметр  $q$  в виде

$$q = \max_{i,j} \left| \frac{\Sigma_{ij}^0}{G_2} \right| \quad (6)$$

и для всех величин, входящих в постановку задачи, записывается разложение в ряд по этому параметру. Например, для вектора перемещений  $\mathbf{u}$  такое разложение может быть записано в форме

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{u}^{(1)} + \dots, \quad \mathbf{u}^{(j)} \sim q^{j+1}. \quad (7)$$

В результате решение нелинейной задачи сводится к последовательному решению линейаризованных задач.

Решение линейаризованной задачи для каждого приближения определяется методом Колосова–Мухелишвили [13] с использованием алгоритмов, изложенных в [14]–[16].

Пусть  $\mathbf{u}^{(j,k)}$  — вектор перемещений в  $j$ -м приближении для  $k$ -й области ( $k = 0, 1, 2$ ). Вводится в рассмотрение комплексная переменная  $z = x + iy$  и комплексный вектор перемещений  $w^{(j,k)} = u_1^{(j,k)} + iu_2^{(j,k)}$ , который представляется в виде

$$w^{(j,k)} = w_{\text{н.}}^{(j,k)} + w_{\text{одн.}}^{(j,k)},$$

где  $w_{\text{н.}}^{(j,k)}$  — частное решение неоднородной системы уравнений, а  $w_{\text{одн.}}^{(j,k)}$  — решение однородной системы уравнений, определяемое из граничных условий с помощью комплексных потенциалов  $\varphi_{j,k}(z)$ ,  $\psi_{j,k}(z)$ :

$$w_{\text{одн.}}^{(j,k)} = \frac{1}{G_k} \left[ \alpha_k \varphi_{j,k}(z) - z \overline{\varphi'_{j,k}(z)} - \overline{\psi_{j,k}(z)} \right].$$

Эти потенциалы ищутся в виде

$$\varphi_{j,0}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{j,0}^{(m)} z^m, \quad \psi_{j,0}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_{j,0}^{(m)} z^m, \quad (8)$$

$$\varphi_{j,1}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{j,1}^{(m)} z^m, \quad \psi_{j,1}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_{j,1}^{(m)} z^m, \quad (9)$$

$$\varphi_{j,2}(z) = \sum_{m=-1}^{\infty} a_{j,2}^{(m)} z^{-m}, \quad \psi_{j,2}(z) = \sum_{m=-1}^{\infty} b_{j,2}^{(m)} z^{-m}. \quad (10)$$

Подстановка комплексных потенциалов  $\varphi_{j,k}(z)$ ,  $\psi_{j,k}(z)$  в граничные условия линейризованной задачи для  $j$ -го приближения позволяет записать систему линейных алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов  $a_{j,k}^{(m)}$ ,  $b_{j,k}^{(m)}$  ( $k = 0, 1, 2$ ). Отметим, что для каждого приближения можно ограничиться в суммах (8)–(10) конечным числом слагаемых без потери точности.

### 3. Результаты расчетов

Для решения задачи было разработано программное обеспечение в среде системы компьютерной алгебры Maple [17]. Были вычислены первые два приближения: линейное и квадратичное.

Были выполнены расчеты при следующих значениях констант материала:  $\lambda_0/G_2 = 5$ ,  $G_0/G_2 = 4$ ,  $\lambda_1/G_2 = 3$ ,  $G_1/G_2 = 2$ ,  $\lambda_2/G_2 = 2$ . На бесконечности приложена одноосная растягивающая нагрузка вдоль оси  $x$ :  $\overset{0}{\Sigma}_{11} = p$ ,  $\overset{0}{\Sigma}_{12} = \overset{0}{\Sigma}_{22} = 0$ ,  $p/G_2 = 0.2$ . Геометрические характеристики в недеформированном состоянии:  $R_2/R_1 = 2$ , здесь  $R_1$  — радиус включения,  $R_2$  — внешний радиус межфазного слоя.

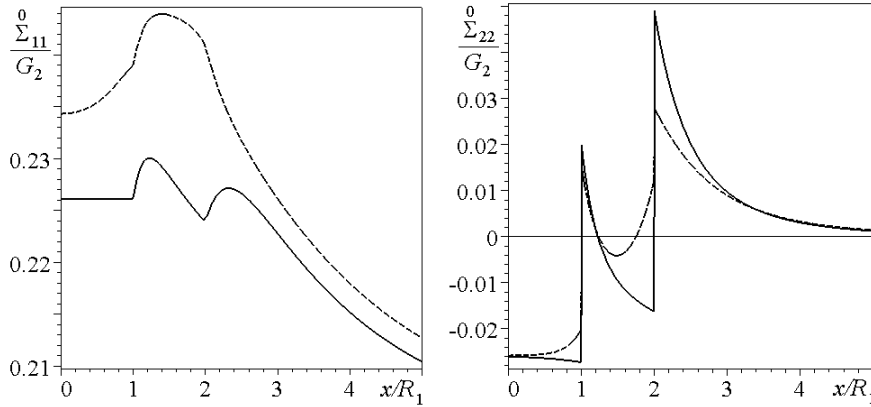


Рис. 2: Распределение напряжений  $\overset{0}{\Sigma}_{11}$  и  $\overset{0}{\Sigma}_{22}$  вдоль оси  $x$  при  $R_2/R_1 = 2$

На рис. 2 показано распределение напряжений  $\overset{0}{\Sigma}_{11}$  и  $\overset{0}{\Sigma}_{22}$  вдоль оси  $x$  (считается, что начало координат совпадает с центром включения). Сплошная линия соответствует линейному решению, пунктирная — решению с учетом нелинейных эффектов.

На рис. 3 приведены результаты решения аналогичной задачи для случая  $R_2/R_1 = 1.2$  (константы материала и нагрузки те же, что и на предыдущем рисунке). Можно видеть, что уменьшение ширины межфазного слоя относительно радиуса включения приводит к некоторому увеличению максимального напряжения  $\overset{0}{\Sigma}_{11}$ . Поправка от учета нелинейных эффектов для этой компоненты тензора напряжений в данном случае не превосходит 10 %.

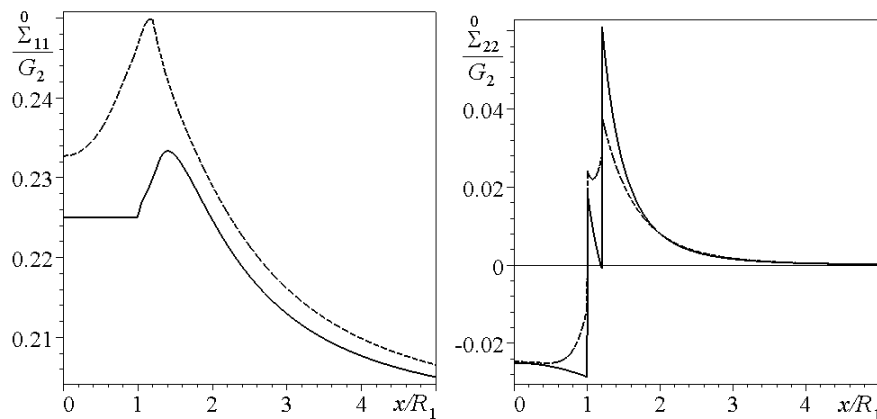


Рис. 3: Распределение напряжений  $\frac{\sigma_{11}}{G_2}$  и  $\frac{\sigma_{22}}{G_2}$  вдоль оси  $x$  при  $R_2/R_1 = 1.2$

### Заключение

Разработаны метод, алгоритм и программное обеспечение для приближенного аналитического решения задачи о распределении напряжений вблизи упругого включения в бесконечно протяженном упругом теле, окруженного межфазным слоем, при конечных плоских деформациях. Результаты решения этой задачи могут быть использованы при моделировании механического поведения наполненных эластомерных композитов с наноразмерными частицами наполнителя. Дана оценка нелинейных эффектов, исследовано влияние ширины межфазного слоя на напряженно-деформированное состояние.

### Список литературы

- [1] Липатов Ю.С. Межфазные явления в полимерах. — Киев: Наукова Думка, 1980. — 259 с.
- [2] Яновский Ю.Г., Образцов И.Ф. Некоторые аспекты компьютерного моделирования структуры и микромеханических свойств перспективных полимерных композиционных материалов// Физическая мезомеханика. 1998. Т.1. С. 135-142.
- [3] Яновский Ю.Г., Згаевский В.Э. Иерархическое моделирование механического поведения и свойств гетерогенных сред// Физическая мезомеханика. 2001. Т. 4, № 3. С. 63–71.
- [4] Bertoldi K., Bigoni D., Drugan W.J. Structural interfaces in linear elasticity. Part I: Nonlocality and gradient approximations. J. Mech. Phys. Solids. 2007. V. 55. P. 1–34.
- [5] Bertoldi K., Bigoni D., Drugan W.J. Structural interfaces in linear elasticity. Part II: Effective properties and neutrality// J. Mech. Phys. Solids 2007. V. 55. P. 35–63.

- [6] Bigoni D., Movchan A.B. Statics and dynamics of structural interfaces in elasticity// *Int. J. Solids Struct.* 2002. V. 39. P. 4843–4865.
- [7] Vasiliev A.A., Miroshnichenko A.E., Ruzzene M. A discrete model and analysis of one-dimensional deformations in a structural interface with micro-rotations// *Mechanics Research Communications.* 2010. V. 37. P. 225–229.
- [8] Yanovsky Yu.G. *Polymer rheology: theory and practice.* — London: Chapman and Hall, 1993. — 320 p.
- [9] Яновский Ю.Г., Валиев Х.Х., Корнев Ю.В., Карнет Ю.Н., Бойко О.В., Косичкина К.П., Николаева С.В., Юмашев О.Б. Структура эластомерных материалов с наполнителями: межфазный слой// Доклады 21 Симпозиума «Проблемы шин и резинокордных композитов». М: НИИШП, 2010. Т.2. С. 201–206.
- [10] Лурье А.И. *Нелинейная теория упругости.* — М.: Наука, 1980. — 512 с.
- [11] Зингерман К.М. О взаимовлиянии упругих включений, возникающих в предварительно нагруженном теле при конечных деформациях// *Вестник Тверского государственного университета. Серия Прикладная математика.* 2006. № 4(21). Вып. 3. — С. 65–77.
- [12] Зингерман К.М., Левин В.А. Перераспределение конечных упругих деформаций после образования включений. Приближенное аналитическое решение// *Прикладная математика и механика.* 2009. Т. 73, вып. 6. С. 983–1001.
- [13] Мусхелишвили Н.И. *Некоторые основные задачи математической теории упругости.* — М.: Наука, 1966. — 708 с.
- [14] Левин В.А., Зингерман К.М. *Плоские задачи многократного наложения больших деформаций. Методы решения.* М.: Физматлит, 2002. 272с.
- [15] Левин В.А., Калинин В.В., Зингерман К.М., Вершинин А.В. Развитие дефектов при конечных деформациях. Компьютерное и физическое моделирование. — М.: Физматлит, 2007. — 392 с.
- [16] V. A. Levin, K. M. Zingerman. A class of methods and algorithms for the analysis of successive origination of holes in a pre-stressed viscoelastic body. *Finite strains// Communications in Numerical Methods in Engineering.* 2008. V. 24. Issue 12. P. 2240–2251.
- [17] Матросов А.В. *Марле 6. Решение задач высшей математики и механики.* — СПб.: БХВ-Петербург, 2001. — 528 с.