УДК 519.216.8

О СТРУКТУРЕ ГИЛЬБЕРТОВОЗНАЧНЫХ МАРТИНГАЛОВ

Лаврентьев В.В.
Лаборатория статистического анализа,
факультет вычислительной математики и кибернетики,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва

Поступила в редакцию 08.04.2010, после переработки 15.04.2010.

В работе определяется интеграл по случайной мере для гильбертовозначных функций и выводится разложение для гильбертовозначных локальных мартингалов с помощью стохастических интегралов.

In this paper, we define the integral over the random measure for Hilbert-valued functions and derive the expansion of Hilbert-valued local martingales by means of stochastic integrals.

Ключевые слова: мартингал, гильбертово пространство, случайная мера.
Keywords: martingale, Hilbert space, random measure.

Введение

Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ — измеримое пространство, с выделенным на нем неубывающим непрерывным справа семейством $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ σ-алгебр $\mathcal{F}_t$ таких, что $\mathcal{F} = \vee_{t\geq 0}\mathcal{F}_t$.

Случайный процесс $X = (X_t, \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ называется вполне измеримым (предсказуемым), если отображение $(t,\omega) \to X_t(\omega)$ измеримо относительно σ-алгебры $\mathcal{W}$ (соответственно, $\mathcal{P}$) в $[0,\infty) \times \Omega$, порожденной отображениями $(t,\omega) \to Y_t(\omega)$, которые являются $\mathcal{F}_t$-измеримыми для каждого $t \geq 0$, непрерывными справа и имеющими пределы слева (соответственно - непрерывными).

Пусть E — лузинское пространство (борелевское подмножество компактного метрического пространства) с σ-алгеброй борелевских множеств $\mathcal{E}$. Введем обозначения:

$$\tilde{\Omega} = \Omega \times (0,\infty) \times E,$$

$$\tilde{\mathcal{W}} = \mathcal{W} \otimes \mathcal{E},$$

$$\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \otimes \mathcal{E},$$

$$\tilde{E} = (0,\infty) \times E,$$

$$\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{B}((0,\infty)) \times \mathcal{E},$$

(где $\mathcal{B}((0,\infty))$ — σ-алгебра борелевских множеств на $(0,\infty)$).

1. Случайные меры

Напомним ([1],[2]), что неотрицательная функция $\mu = \mu(\omega, \tilde{A})$, $\omega \in \Omega$, $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{E}}$, называется случайной мерой (на $\tilde{E}$), если
1) $\mu(\cdot, \tilde{A})$ - $\mathcal{F}$ -измерима для каждого $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{E}}$;
2) $\mu = \mu(\omega, \cdot) - \sigma-$ конечная мера на $\left(\tilde{E}, \tilde{\mathcal{E}}\right)$ для любого $\omega \in \Omega$.

Случайная мера μ называется целочисленной, если
1) $\mu(\omega, \tilde{A}) \in \{0, 1, ..., +\infty\}$, $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{E}}$;
2) $\mu(\omega, \{t\}, E) \le 1, t > 0$.

Пусть $f = f(\omega, t, x)$ - неотрицательная $\mathcal{F} \otimes \tilde{\mathcal{E}}$-измеримая функция на $\tilde{\Omega}$. Образуем новую случайную меру $f \circ \mu$ и неубывающий процесс $f * \mu$, полагая $(f \circ \mu)(\omega, dt, dx) = f(\omega, t, x)\mu(\omega, dt, dx)$ и

$$f * \mu = (f \circ \mu)(\omega, (0, t], E) = \int_{(0,t]\times E} f(\omega, s, y)\mu(\omega, ds, dy).$$

Интеграл понимается как обычный интеграл Лебега для каждого ω. Если для любой неотрицательной $\tilde{\mathcal{W}}$-измеримой ($\tilde{\mathcal{P}}$-измеримой) функции f процесс $f * \mu$ вполне измерим (предсказуем), то мера μ будет называться вполне измеримой (предсказуемой).

Для вероятностной меры $\mathbf{P}$ на $(\Omega, \mathcal{F})$ и случайной меры μ определим на $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{W}}\right)$ меру $M_\mu(\cdot)$ полагая $M_\mu(f) \equiv \mathbf{E}(f * \mu)_\infty$, где $f = f(\omega, t, x) \ge 0$ и $\tilde{\mathcal{W}}$-измерима.

Лемма 1. *Пусть сужение M_μ на $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{P}})$ σ-конечно, тогда*
а) существует и единственная (с точностью до $\boldsymbol{P}$-нулевого множества) предсказуемая случайная мера $\nu = \nu(\omega, dt, dx)$, называемая компенсатором меры μ, такая, что

$$M_\nu(f) = M_\mu(f) \tag{1}$$

для любой $\tilde{\mathcal{P}}$-измеримой $f = f(\omega, t, x) \ge 0$;
б) если $f * \mu$ - процесс локально интегрируемой вариации и f - $\tilde{\mathcal{P}}$-измерима, то $f * \mu - f * \nu$ - локальный мартингал;
в) если τ - предсказуемый момент остановки (м.о.), то

$$\mathbf{E}\left\{\int_E f(\tau, x)\mu(\{\tau\}, dx) | F_{\tau-}\right\} = \int_E f(\tau, x)\nu(\{\tau\}, dx); \tag{2}$$

г) в случае целочисленной случайной меры μ можно выбрать такую модификацию ν, что $0 \le \nu(\omega, \{t\}, E) \le 1$. Далее будет рассматриваться именно такая модификация.

Доказательство этой леммы изложено в работах ([1], [2]).

Пример 1 (см. [2]). Пусть $X = (X_t, \mathcal{F}_t; \mathbf{E})$ - семимартингал, принимающий значения в сепарабельном банаховом пространстве $\mathbf{E}$ с траекториями в пространстве $(D(\mathbf{E}), \mathcal{D})$ - измеримом пространстве непрерывных справа и имеющих пределы слева $\mathbf{E}$-значных функций с топологией Скорохода. Для $\Gamma \in \tilde{\mathcal{E}}$ положим

$\mu(\omega, \Gamma) = \sum_s I(\Delta X_s \neq 0) I((s, \Delta X_s) \in \Gamma)$. Такая случайная мера называется целочисленной мерой скачков процесса X. В этом случае сужение меры M_μ на $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{P}})$ σ-конечно.

2. Определение стохастического интеграла по мере $\mu - \nu$ для гильбертовозначных функций

Будем следовать схеме, предложенной в [1] для действительных функций. Считаем, что выполнены условия леммы 1, тогда для некоторого множества $\tilde{\mathcal{P}}$-измеримых функций, принимающих значения в гильбертовом пространстве H (для $U \in \tilde{\mathcal{P}}(H)$) будем определять стохастический интеграл

$$\int_0^t \int_E U(s,x)(\mu - \nu)(ds, dx), t \geq 0 \tag{3}$$

обозначаемый далее через $U * (\mu - \nu)$ и являющийся локальным мартингалом ($\mathcal{M}_{loc}(H)$). Здесь и далее опускаем переменную ω.

Если $\|U\| * \mu, \|U\| * \nu \in \mathcal{A}^+(\mathbf{R}) \equiv \{X \in \mathcal{V}^+(\mathbf{R}) : \mathbf{E} X_\infty < \infty\}$, где $\mathcal{V}^+(\mathbf{R})$ - множество неубывающих (по t) процессов X таких, что $X_t < \infty$ ($\mathbf{P}$ - п.н.) для $t > 0$ и $X_\infty \equiv \lim_{t \to \infty} X_t$, то по определению можно положить, что $U * (\mu - \nu) = U * \mu - U * \nu$. Однако стохастический интеграл по мере $\mu - \nu$ можно определить для более широкого класса функций.

Для каждого $B \in \mathcal{E}$ такого, что $(\nu((0,t], B))_{t \geq 0} \in \mathcal{A}^+_{loc}(\mathbf{R})$, процесс

$$m_t = \mu((0,t], B) - \nu((0,t], B)$$

является чисто разрывным локальным мартингалом и при этом

$$\Delta m_t = \mu(\{t\}, B) - \nu(\{t\}, B).$$

Таким образом, при определении $U * (\mu - \nu)$ естественно предъявить требование, чтобы

$$\Delta \left(U * (\mu - \nu)\right)_t = \int_E U(t,x) \mu(\{t\}, dx) - \int_E U(t,x) \nu(\{t\}, dx) \tag{4}$$

Положим для $U \in \tilde{\mathcal{P}}(H)$

$$\hat{U}_t = \int_E U(t,x) \nu(\{t\}, dx), \tag{5}$$

$$G_t(U) = \int_0^t \int_E \frac{\left\|U(s,x) - \hat{U}_s\right\|^2}{1 + \left\|U(s,x) - \hat{U}_s\right\|} d\nu + \sum_{s \leq t} \frac{\left\|\hat{U}_s\right\|^2}{1 + \left\|\hat{U}_s\right\|} (1 - a_s), \tag{6}$$

$$G^i_t(U) = \int_0^t \int_E \left\|U(s,x) - \hat{U}_s\right\|^i d\nu + \sum_{s \leq t} \left\|\hat{U}_s\right\|^i (1 - a_s), \tag{7}$$

где $a_t = \nu(\{t\}, E), i = 1, 2$.

Через $\Im_{loc}(H), \Im^i_{loc}(H)$ будем обозначать множество функций $U \in \tilde{\mathcal{P}}(H)$, для которых при каждом $t \in \mathbf{R}_+$ определены $\hat{U}_t$ и $G_t(U) \in \mathcal{A}^+_{loc}(\mathbf{R}), G^i_t(U) \in \mathcal{A}^+_{loc}(\mathbf{R})$.

Заметим, что $\Im^2_{loc}(H) \subset \Im^1_{loc}(H) \subset \Im_{loc}(H)$.

Для $M \in \mathcal{M}^2_{loc}(H)$ через $< M >$ будем обозначать компенсатор $\|M\|^2$, т.е. предсказуемый возрастающий процесс такой, что $\|M\|^2 - < M >$ - локальный мартингал.

Следующая теорема является обобщением теоремы 2 в [1] на случай гильбертовозначных U.

Теорема 1. *Пусть $U \in \Im_{loc}(H)$, тогда существует один и только один (с точностью до множеств нулевой вероятности) случайный процесс, обозначаемый $U * (\mu - \nu)$, который является чисто разрывным локальным мартингалом и для которого выполнено свойство* (4).

Кроме того:
а) $U \in \Im^1_{loc}(H) \Leftrightarrow Var[U * (\mu - \nu)] \in \mathcal{A}^+_{loc}(\boldsymbol{R})$;
в) $U \in \Im^2_{loc}(H) \Leftrightarrow \left\{U * (\mu - \nu) \in \mathcal{M}^2_{loc}(H), < U * (\mu - \nu) >= G^2(U)\right\}$

Доказательство. Пусть $U \in \Im_{loc}(H)$ и

$$Y_t = \int_E U(t,x)\mu(\{t\},dx) - \int_E U(t,x)\nu(\{t\},dx) \tag{8}$$

Согласно теореме 2 из [3] для существования чисто разрывного локального мартингала M со свойством $\Delta M = Y$ необходимо и достаточно, чтобы предсказуемая проекция (см. [3]) ${}^pY = 0$ и

$$\left(\sum_{s\le \cdot} \|Y_s\|^2\right)^{1/2} \in \mathcal{A}^+_{loc}(\mathbf{R}) \tag{9}$$

Поскольку для любого $h \in H$ согласно (2) и определению предсказуемой проекции

$${}^p\left(\int_E U(t,x)\mu(\{t\},dx)\right) = \int_E U(t,x)\nu(\{t\},dx) \tag{10}$$

и ${}^pY = 0$. В силу леммы 1 в [1] соотношение (9) эквивалентно

$$\sum_{s\le \cdot} \|Y_s\|^2 / (1 + \|Y_s\|) \in \mathcal{A}^+_{loc}(\mathbf{R}). \tag{11}$$

Пользуясь целочисленностью случайной меры μ, получаем

$$\sum_{s\le t} \frac{\|Y_s\|^2}{1+\|Y_s\|} = \sum_{s\le t} \frac{\left\|\int_E U(s,x)\mu(\{s\},dx) - \hat{U}_s\right\|^2}{1+\left\|\int_E U(s,x)\mu(\{s\},dx) - \hat{U}_s\right\|}\mu(\{s\},E) +$$

$$\sum_{s\le t} \frac{\left\|\int_E U(s,x)\mu(\{s\},dx) - \hat{U}_s\right\|^2}{1+\left\|\int_E U(s,x)\mu(\{s\},dx) - \hat{U}_s\right\|}(1-\mu(\{s\},E)) =$$

$$= \int_0^t \int_E \frac{\left\|U(s,x) - \hat{U}_s\right\|^2}{1+\left\|U(s,x) - \hat{U}_s\right\|}\mu(ds,dx) + \sum_{s\le t} \frac{\left\|\hat{U}_s\right\|^2}{1+\left\|\hat{U}_s\right\|}(1-\mu(\{s\},E)) \tag{12}$$

Отсюда в силу (1) и (6) вытекает, что соотношение (11) эквивалентно $G(U) \in \mathcal{A}^+_{loc}(\mathbf{R})$, следовательно, согласно теореме 2 из [3], существует M - чисто разрывный локальный мартингал ($\mathcal{M}^d_{loc}(H)$) такой, что $\Delta M = Y$. Этот процесс называется стохастическим интегралом от U по случайной мере $\mu - \nu$ и обозначается

$$U * (\mu - \nu)_t = \int_0^t \int U(s,x) d(\mu - \nu).$$

а) Пусть $U \in \Im^1_{loc}(H)$, тогда

$$\left\| U - \hat{U} \right\| * \nu + \sum_{s \leq \cdot} \left\| \hat{U}_s \right\| (1 - a_s) \in \mathcal{A}^+_{loc}(\mathbf{R}).$$

отсюда, используя равенство (1), получаем, что

$$\left\| U - \hat{U} \right\| * \mu + \sum_{s \leq \cdot} \left\| \hat{U}_s \right\| (1 - \mu(\{s\}, E)) \in \mathcal{A}^+_{loc}(\mathbf{R}).$$

Положим $M = U * (\mu - \nu) \in \mathcal{M}^d_{loc}(H)$,

$$M' = (U - \hat{U}) * \mu - (U - \hat{U}) * \nu + \sum_{s \leq \cdot} \hat{U}_s (1 - \mu(\{s\}, E)) - \sum_{s \leq \cdot} \hat{U}_s (1 - a_s) \in \mathcal{M}^d_{loc}(H),$$

тогда $\Delta M' = \Delta M$ и, согласно теореме 2 из [3], $M' = M$, следовательно, $VarM' = VarM$.

Требуемое утверждение вытекает из (1) и следующего соотношения:

$$\left\| U - \hat{U} \right\| * \mu = \sum_{s \leq \cdot} \|\Delta M_s\| = \sum_{s \leq \cdot} \|\Delta M'_s\| \leq VarM' \leq$$
$$\leq \left\| U - \hat{U} \right\| * \mu + \sum_{s \leq \cdot} \left\| \hat{U}_s \right\| (1 - \mu(\{s\}, E)) + \left\| U - \hat{U} \right\| * \nu + \sum_{s \leq \cdot} \left\| \hat{U}_s \right\| (1 - a_s) \quad (13)$$

в) Пусть $G^2(U) \in \mathcal{A}^+_{loc}(\mathbf{R})$. Напомним [4], что квадратичная вариация гильбертовозначного процесса X - это

$$[X]_t \equiv [X, X]_t \equiv \mathbf{P} - \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{k \geq 0} \left\| X_{(k+1)2^{-n} \wedge t} - X_{k2^{-n} \wedge t} \right\|^2$$

В силу (4)

$$[U * (\mu - \nu)]_t = \sum_{s \leq t} \left\| \int_E U(s,x) \mu(\{s\}, dx) - \hat{U}_s \right\|^2 =$$
$$= \sum_{s \leq t} \int_E \left\| U(s,x) - \hat{U}_s \right\|^2 \mu(\{s\}, dx) + \sum_{s \leq t} \left\| \hat{U}_s \right\|^2 (1 - \mu(\{s\}, E)). \quad (14)$$

Отсюда $[U * (\mu - \nu)] \in \mathcal{A}^+_{loc}(\mathbf{R})$ и, значит, $U * (\mu - \nu)$ - локально квадратично интегрируемый мартингал.

Согласно лемме 1 — $G^2(U)$ является компенсатором $[U*(\mu-\nu)]$, но $< U*(\mu-\nu) >$ тоже компенсатор для $[U*(\mu-\nu)]$, следовательно,

$$< U*(\mu-\nu) >_t = G_t^2(U).$$

Обратное утверждение вытекает из того, что $G^2(U)$ есть компенсатор $[U*(\mu-\nu)]$, следовательно, $G^2(U) \in \mathcal{A}_{loc}^+(\mathbf{R})$.

3. Разложение локальных мартингалов с помощью стохастических интегралов

Лемма 2. *Для локального гильбертовозначного мартингала M имеем $\boldsymbol{E}[M]^{1/2} \in \mathcal{A}_{loc}^+(\boldsymbol{R})$.*

Доказательство. Пусть $H^1(H) \equiv \{M \in \mathcal{M}_{loc}(H) : \mathbf{E}[M]_\infty^{1/2} < \infty\}$, т.е. пространство мартингалов с нормой $\|\cdot\|_{H^1} \equiv \mathbf{E}[\cdot]_\infty^{1/2}$. Это полное нормированное пространство (см. [3]). Пусть τ - м.о. такой, что $M^\tau \in \mathcal{M}(H)$, тогда (см. [4], с.116) $M^\tau = N + V$, где $N \in \mathcal{M}^2(H) \subset H^1(H), V \in \mathcal{A}(H) \subset H^1(H)$, отсюда вытекает, что $M^\tau \in H^1(H)$, и $\mathbf{E}[M]^{1/2} \in \mathcal{A}_{loc}^+(\mathbf{R})$.

Теорема 2. *Пусть X - гильбертовозначный локальный мартингал ($\mathcal{M}_{loc}(H)$) и μ - мера скачков процесса X (или, что то же, процесса X^d), ν - ее компенсатор, тогда ($\boldsymbol{P}$-п.н.)*

$$X_t = X_t^c + \int_0^t \int_{H\setminus\{0\}} xd(\mu-\nu), t \geq 0,$$

где X^c - непрерывная составляющая локального мартингала X.

Доказательство. Нужно показать, что процессы X^d и $\left(\int_0^t \int_{H\setminus\{0\}} xd(\mu-\nu)\right)_{t\geq 0}$ $\mathbf{P}$-неразличимы. Прежде всего отметим, что эти интегралы определены. Действительно, в силу леммы 1 в [1] и нашей леммы 2

$$\sum_{s\leq\cdot} \frac{\|\Delta X_s\|^2}{1+\|\Delta X_s\|} \in \mathcal{A}_{loc}^+(\mathbf{R}) \Leftrightarrow \left(\sum_{s\leq\cdot} \|\Delta X_s\|^2\right)^{1/2} \in \mathcal{A}_{loc}^+(\mathbf{R}),$$

$(\|x\|^2/(1+\|x\|)) * \mu \in \mathcal{A}_{loc}^+(\mathbf{R})$ и согласно (1)

$$(\|x\|^2/(1+\|x\|)) * \nu \in \mathcal{A}_{loc}^+(\mathbf{R}) \tag{15}$$

Далее, без ограничения общности можно считать, что $X \in \mathcal{M}(H)$. Тогда из соотношения (2) вытекает, что для любого (конечного) м.о. τ и $h \in H$

$$\left(\int_{H\setminus\{0\}} x\nu(\{\tau\}, dx), h\right) = \left(\int_{H\setminus\{0\}} (x,h)\nu(\{\tau\}, dx)\right) =$$
$$= \mathbf{E}\left\{\int_{H\setminus\{0\}} (x,h)\mu(\{\tau\}, dx)|\mathcal{F}_{\tau-}\right\} = \mathbf{E}\{(\Delta X_\tau), h)|\mathcal{F}_{\tau-}\} = 0, \tag{16}$$

следовательно, $\int_{H\setminus\{0\}} x\nu(\{\tau\}, dx) = 0$.

Отсюда и из соотношения (15) в силу теоремы 1 вытекает, что процесс

$$\left(\int_0^t \int_{H\setminus\{0\}} xd(\mu-\nu)\right)_{t\geq 0}$$

определен, является чисто разрывным локальным мартингалом и для любого (конечного) м.о. τ

$$\Delta \int_0^t \int_{H\setminus\{0\}} xd(\mu-\nu) = \int_{H\setminus\{0\}} x\mu(\{\tau\}, dx) = \Delta X_\tau.$$

Однако процесс X^d также является чисто разрывным мартингалом и $\Delta X^d_\tau = \Delta X_\tau$. Таким образом, в силу теоремы о сечениях (см. [5], с. 90) процессы (X^d, e_i) и $\left(\int_0^t \int_{H\setminus\{0\}} xd(\mu-\nu), e_i\right)_{t\geq 0}$ являются $\mathbf{P}$-неразличимыми и, следовательно,

$$X^d_t = \int_0^t \int_{H\setminus\{0\}} xd(\mu-\nu).$$

Заключение

Итак, для гильбертовозначного локального мартингала X

$$X_t = X^c_t + \int_0^t \int_{H\setminus\{0\}} xd(\mu-\nu), t\geq 0,$$

где X^c_t - непрерывная составляющая локального мартингала X, μ - мера скачков процесса X, ν - ее компенсатор.

Список литературы

[1] Кабанов Ю.М., Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Абсолютная непрерывность и сингулярность локально абсолютно непрерывных вероятностных распределений. I. - Матем. сб., 1978, т. 107, № 3, с. 364–415.

[2] Jacod J. Un théorème de répresentation pour les martingales discontinues. - Z.Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 1976, Bd 34, p. 225-244.

[3] Лаврентьев В.В. Существование гильбертовозначного процесса с заданными скачками.- Успехи матем. наук, 1986, т. 41, №5, с. 183–184.

[4] Metivier M., Pellaumail J. Stochastic integration. - New York etc.: Acad.Press, 1980. - 196 p.

[5] Деллашери К. Емкости и случайные процессы. - М.: Мир, 1975. - 192 с.