View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk brought to you by CORE

МЕТОДИ ТА ПРИЛАДИ КОНТРОЛЮ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПАРАМЕТРІВ

УДК 621.314

ЕНЕРГЕТИЧНИЙ СИГНАЛ ТА ЙОГО ОСОБЛИВОСТІ

© Майстренко В.М., 2005
Національний технічний університет України „Київський політехнічний інститут”

Введено поняття енергетичного сигналу. Показано, що сигнал, який має обмежену тривалість і є позитивним, не завжди буде енергетичним. Також показано, що якщо енергетичним сигналом є дельта-функція, то вона має рівномірний спектр нескінченно малої амплітуди. Введено поняття епсілон-функції

В загальному випадку сигнал – це складне коливання. Тому виникає необхідність представити складну функцію, що визначає сигнал, через прості функції, які є лінійною комбінацією певних елементарних функцій. Для математичного представлення сигналів широко використовується два окремих випадки розкладу функцій в ортогональні ряди: по тригонометричних функціях – спектральне представлення в вигляді ряду або перетворення Фур’є, і часове представлення у вигляді ряду Котельникова. Обидві ці форми є адекватними. Для достатньої точності представлення сигналів сумою рядів необхідно, щоб виконувалася рівність Парсеваля [1].

Основою спектрального аналізу сигналів є представлення функції часу у вигляді ряду або перетворення Фур’є. Практично ширина спектра сигналу визначається як область частот, в границях якої зосереджена основна енергія сигналу.

Неперіодичний сигнал розглядається як періодичний з нескінченно великим періодом. При цьому різниця частот між сусідніми гармоніками прямує до нуля. Спектр стає суцільним, а амплітуди – нескінченно малими.

При спостереженні за протіканням випадкового процесу можна визначити лише поточний спектр реалізації, що розглядається. Ця функція є випадковою. Тому вводиться поняття енергетичного спектра, яке приводить до невипадкової функції частоти. Енергетичний спектр стаціонарного випадкового процесу визначається як спектр його автокореляційної функції. Фізичний зміст енергетичного спектра – це спектральна щільність потужності процесу. Енергетичний спектр характеризує поведінку процесу в середньому.

Реальні сигнали завжди мають кінцеву тривалість і обмежену смугу частот. Але спектральне представлення таких сигналів, що широко використовується, часто порушує енергетичний баланс між сигналом та його спектром, а використання енергетичного спектра спотворює співвідношення між спектральними складовими. Особливо це має місце в граничних випадках, коли імпульс сигналу розглядається як дуже короткий і замінюється дельта-функцією, а також при нескінченно вузькому частотному спектрі, який також представляється дельта-функцією. Тому це питання є актуальним і потребує додаткової уваги.

Розглянемо сигнал $f(t)$ з обмеженою енергією, наприклад, одиночний імпульс прямокутної або більш складної форми. Як відомо [1], повна потужність такого сигналу дорівнює сумі середніх потужностей постійної складової та гармонік, що створюють сигнал. Тобто середня потужність не залежить від фазування окремих гармонік. З іншого боку розподіл енергії в спектрі неперіодичного сигналу визначається такою рівністю Парсеваля:

$$E=\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[S(\omega)]^2 d\omega, \qquad (1)$$

де $S(\omega)$ – спектр сигналу $f(t)$.

Площа одиночного імпульсу відповідає його постійній складовій. Тобто

$$S(0)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt .$$

З іншого боку, можна говорити про енергію цього імпульсу, яка визначається згідно (1).

В деяких практичних задачах площа імпульсу, а не його форма, має основне значення, тобто площа, обмежена функцією часу, повинна дорівнювати площі, обмеженої спектральною функцією. В цьому випадку ми маємо справу з енергетичним спектром, а, виходячи з (1), площа імпульсу буде енергією. Отже такий імпульс будемо називати енергетичним імпульсом, а всю функцію – енергетичною функцією або енергетичним сигналом.

Енергетичні сигнали безпосередньо не переносять інформацію, а є узагальнюючими функціями інформації. Наприклад, кореляційну функцію, що узагальнює окремі випадкові процеси, можна вважати енергетичною функцією. Енергетичною функцією можна вважати також функцію щільності розподілу ймовірності випадкового процесу (функцію розподілу) [2-6]. Порівняємо енергетичні функції із звичайними на конкретних прикладах.

Розглянемо прямокутний імпульс, приведений на рис. 1, площа якого дорівнює одиниці, тобто

$$f_1(t)=\begin{cases}0 \text{ при } t<-\dfrac{\tau}{2},\\ \dfrac{1}{\tau} \text{ при } -\dfrac{\tau}{2}\le t\le\dfrac{\tau}{2},\\ 0 \text{ при } t>\dfrac{\tau}{2}.\end{cases} \qquad (2)$$

Спектр такого імпульсу, який є парною функцією, буде таким:

$$S_1(\omega)=\frac{1}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}e^{-j\omega t}dt=\frac{2}{\tau}\int_0^{\frac{\tau}{2}}\cos\omega t dt=\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\Big/\left(\frac{\omega\tau}{2}\right). \qquad (3)$$

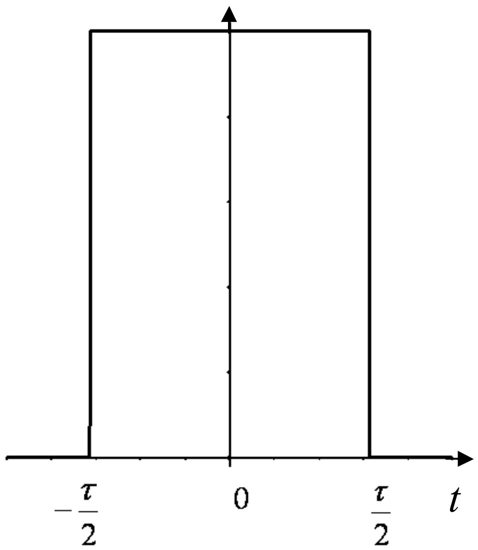

Рис. 1. Прямокутний імпульс

Площа, обмежена спектральною функцією, буде такою:

$$E_{S1}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\Big/\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)d\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\Big/\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)d\omega=\frac{1}{\tau}.$$

Таким чином площа, обмежена спектральною функцією, відрізняється від площі імпульсу на величину $\frac{1}{\tau}$. Це означає, що спектральна функція (3) не є енергетичним спектром сигналу (2).

З іншого боку сигнал (2) відповідає ознакам енергетичного сигналу, тобто є позитивним і має обмежену площу. Отже має енергетичний спектр. В цьому випадку сигнал (2) будемо розглядати як квадрат певної функції $f_2(t)$, тобто $f_1(t)=f_2^2(t)$, де

$$f_2(t)=\begin{cases}0 \text{ при } t<-\dfrac{\tau}{2};\\ \dfrac{1}{\sqrt{\tau}} \text{ при } -\dfrac{\tau}{2}\le t\le\dfrac{\tau}{2};\\ 0 \text{ при } t>\dfrac{\tau}{2}.\end{cases}$$

Тоді спектр цієї функції

$$S_2(\omega)=\frac{1}{\sqrt{\tau}}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}\cos\omega t dt=\sqrt{\tau}\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\Big/\frac{\omega\tau}{2}.$$

Енергетичний спектр функції $f_1(t)$ можна розглядати як спектр квадрата функції $f_2(t)$. Тоді, використовуючи теорему про спектр добутку функцій [7, 8], енергетичний спектр функції $f_1(t)$ буде таким:

$$S_{E1}(\omega)=\frac{\tau}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sin\frac{\nu\tau}{2}\cdot\sin\frac{(\omega-\nu)\tau}{2}\Big/\left(\frac{\nu\tau}{2}\cdot\frac{(\omega-\nu)\tau}{2}\right)d\nu= =\frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}, \qquad (4)$$

тобто відрізняється від неенергетичного спектра цієї функції $S_1(\omega)$.

Площа, обмежена кривою енергетичного сигналу, як видно з (1), буде дорівнювати його енергії, а не постійній складовій, як для неенергетичного сигналу.

Знайдемо енергію цього сигналу:

$$E_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega}d\omega=1.$$

Енергія такого сигналу не залежить від тривалості імпульсу (енергетичного сигналу).

При зменшенні тривалості імпульсу (2) до 0 функція сигналу може бути визначена наступним чином:

$$\delta(\tau)=\begin{cases}\infty \text{ при } \tau=0\\ 0 \text{ при } \tau\ne 0\end{cases},$$

або

$$\delta(\tau)=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}=\infty.$$

При цьому

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1,$$

так як площа імпульсу $\int\limits_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \frac{1}{\tau} dt = 1$.

Спектр такого сигналу

$$S_\delta(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = \lim_{\tau \to 0} \frac{2}{\tau} \int\limits_{0}^{\frac{\tau}{2}} \cos \omega t dt =$$

$$= \lim_{\tau \to 0} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \Big/ \frac{\omega\tau}{2} = 1,$$

тобто є постійним на всіх частотах.

Енергія цього спектра

$$E_\delta = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} [S_\delta(\omega)]^2 d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{\tau \to 0} \int\limits_{0}^{\infty} \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \Big/ \frac{\omega^2\tau^2}{4} d\omega = \infty.$$

Якби цей спектр був енергетичним, то енергія дорівнювала б нескінченності, тобто

$$E_{\delta_E} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} S_\delta(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \lim_{\tau \to 0} \int\limits_{0}^{\infty} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \Big/ \frac{\omega\tau}{2} d\omega = \infty .$$

До цього ж результату можна прийти шляхом визначення площі, обмеженої кривою спектра дельта-функції:

$$E_\delta = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} [S_\delta(\omega)]^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} d\omega = \infty$$

та

$$E_{\delta_E} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} S_\delta(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} d\omega = \infty .$$

Якщо сигнал (2) вважати енергетичним, то його енергетичний спектр описується виразом (4), а для дельта-функції

$$S_{E\delta}(\omega) = \lim_{\tau \to 0} \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega} = 0 . \tag{5}$$

Але енергія сигналу не може бути нульовою, значення енергії на кожній частоті в цьому випадку є нескінченно малим. Площа, обмежена кривою спектра $S_{E1}(\omega)$, є енергією і дорівнює одиниці.

Отже енергетичний спектр дельта-функції як і неенергетичний є рівномірним, тобто з однаковою нескінченно малою амплітудою на кожній частоті і описується виразом (5). Враховуючи специфіку такої функції, назвемо її епсілон-функцією і позначимо $\varepsilon(\omega)$. Таким чином

$$\varepsilon(\omega) = \frac{2}{\omega} \lim_{\tau \to 0} \sin \frac{\omega\tau}{2} . \tag{6}$$

Відмітимо, що енергетичний спектр прямокутного імпульсу, який обмежує площу, що дорівнює одиниці ($f_1(t)$ згідно (2)), незалежно від тривалості імпульсу завжди обмежує площу, яка дорівнює одиниці. При нескінченно малій тривалості імпульсу ($\tau \to 0$), імпульс прагне до дельта-функції і має спектр у вигляді епсілон-функції (6), яка представляє собою, образно кажучи, лежачу дельта-функцію.

Таким чином прямокутний імпульс $f_1(t)$ згідно (2) може розглядатись і як неенергетичний, і як енергетичний. В першому випадку при нескінченно малій тривалості він буде мати рівномірний спектр з постійною амплітудою на всіх частотах, що дорівнює одиниці. В другому випадку він також буде мати рівномірний спектр, але з нескінченно малою постійною амплітудою на всіх частотах. Такий спектр виражається епсілон-функцією.

Якщо висоту вихідного імпульсу $f_1(t)$ домножити на постійну величину, то амплітуди спектральних складових його енергетичного і неенергетичного спектрів також домножуються на цю постійну величину, тобто

$$AS_\delta(\omega) = A ,$$

а енергетичний спектр цієї функції відповідно буде таким:

$$AS_{E\delta}(\omega) = A\varepsilon(\omega).$$

Зрозуміло, що дельта-функція та епсілон-функція можуть бути відповідно енергетичним спектром і енергетичним сигналом.

Сигнал в вигляді квадрата дельта-функції, тобто $\delta^2(t)$, завжди можна вважати енергетичним виходячи з (1). Його спектр

$$S_{\delta^2}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta^2(t) e^{-j\omega t} dt = \lim_{\tau \to 0} \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \Big/ \frac{\omega^2\tau^2}{4} = \infty .$$

Цей спектр є також рівномірним в усьому частотному діапазоні, але його енергія

$$\lim_{\tau \to 0} E_{\delta^2} = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \Big/ \frac{\omega^2\tau^2}{4} d\omega = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau^2} = \infty$$

є нескінченно великою. Тому такий підхід до оцінки енергетичного сигналу можна вважати нераціональним.

Підійдемо до цієї проблеми дещо інакше. Розглянемо сигнал

$$f_3(t) = \sin(wt/2)/\pi t , \tag{7}$$

форма якого приведена на рис. 2. Площа, обмежена таким сигналом, дорівнює одиниці.

Спектр такого сигналу

$$\begin{aligned} S_3(\omega) &= \int\limits_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \frac{\sin(wt/2)}{\pi t} e^{-j\omega t} dt = 2\int\limits_{0}^{\frac{\tau}{2}} \frac{\sin(wt/2)}{\pi t} \cos \omega t dt = \\ &= \frac{1}{2}\left[\operatorname{sgn}\left(\frac{w}{2} - \omega\right) + \operatorname{sgn}\left(\frac{w}{2} + \omega\right)\right] \end{aligned} \tag{8}$$

має прямокутну форму.

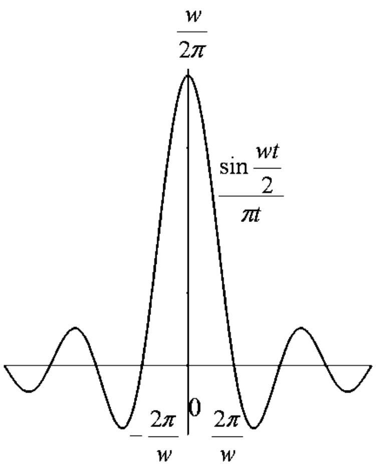

Рис. 2. Імпульс вигляду sinc (x)

При $w \to \infty$ сигнал (8) перетворюється в дельта-функцію, тобто

$$\delta(t) = \lim_{w\to\infty} \frac{\sin(wt/2)}{\pi t},$$

а його спектр

$$S_\delta(\omega) = \frac{1}{2}\lim_{w\to\infty}\left[\operatorname{sgn}(w/2+\omega) + \operatorname{sgn}(w/2-\omega)\right] = 1,$$

тобто результат співпадає з попереднім, отриманим іншим шляхом, а також із приведеним в літературі [1].

Площа, зосереджена під спектральною функцією (8), дорівнює w. Отже дельта-функція має нескінченну енергію, тому що при $w \to \infty$ площа, що зосереджена під спектральною функцією $wS_\delta(\omega)$, дорівнює ∞.

Отже сигнал (8) не є енергетичним. Але якщо амплітуда сигналу (7) буде дорівнювати $\sqrt{2/w}$, то спектр такого сигналу буде мати прямокутну форму з амплітудою $1/w$ і граничною частотою $\pm w/2$. Згортка такого сигналу дасть такий енергетичний спектр:

$$S_4(\omega) = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sgn}(w/2+\omega) + \operatorname{sgn}(w/2-\omega)}{w}, \qquad (9)$$

а сам енергетичний сигнал буде мати наступний вигляд:

$$f_4(t) = \frac{\sin(wt/2)}{\pi wt}. \qquad (10)$$

Отже вирази (9) та (10) аналогічні виразам (2) та (4), отриманим раніше, в яких форма енергетичних сигналу та спектра взаємно змінені.

В граничному випадку при $w \to \infty$ приходимо до дельта-функції, а при $w \to 0$ – до епсілон-функції. Площа сигналу при зміні w від 0 до ∞ залишається постійною і дорівнює одиниці. Тобто епсілон-функція є енергетичним спектром енергетичного сигналу у вигляді дельта-функції і навпаки.

На підставі проведеного аналізу особливостей енергетичного спектра можна зробити висновок, що якщо спектр сигналу є згорткою двох спектрів, то він є енергетичним і належить енергетичному сигналу, який є добутком сигналів, яким належать вихідні спектри. І навпаки, згортка двох сигналів, яка є енергетичним сигналом, має енергетичний спектр, що створює добуток спектрів вихідних сигналів. Спектр Фур'є кореляційної функції, яка завжди є згорткою двох функцій, завжди є енергетичним.

Квадрат будь-якого сигналу є енергетичним сигналом і має енергетичний спектр. Виходячи з цього, спектр функції

$$f_5(t) = \lim_{w\to\infty} \frac{\sin^2(wt/2)}{\pi^2 w^2 t^2}$$

є спектром квадрата дельта-функції і має енергетичний спектр у вигляді квадрата епсілон-функції, тобто сама вихідна функція має нескінченно велику площу, а її спектр теж має нескінченно велику площу з рівномірним розподілом. Причому амплітуда кожної складової є нескінченно малою другого порядку.

Розглянемо ще одну модель імпульсу, площа якого дорівнює одиниці, приведену на рис. 3:

$$f_6(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{t^2}{2a^2}}. \qquad (11)$$

Спектр такого імпульсу

$$S_6(\omega) = \sqrt{a} e^{-\frac{\omega^2 a^2}{2}},$$

площа якого також дорівнює одиниці. Тому цей сигнал є енергетичним. На підставі функції (11) дельта-функція може бути визначена виразом

$$\delta(t) = \lim_{a\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{t^2}{2a^2}},$$

а її спектр – епсілон-функція

$$\varepsilon(\omega) = \lim_{a\to 0} \sqrt{a} e^{-\frac{\omega^2 a^2}{2}}.$$

Таким чином енергетичним сигналом будемо називати такий сигнал, спектр Фур'є якого є енергетичним спектром. Енергетичний сигнал повинен бути позитивним і обмеженим в часі.

Позитивний сигнал в залежності від форми може мати різні енергетичний і неенергетичний спектри, або ці спектри можуть співпадати. В першому випадку цей сигнал може розглядатись як енергетичний і неенергетичний в залежності від необхідності, а в другому – тільки як енергетичний.

Кореляційна функція завжди є енергетичним сигналом.

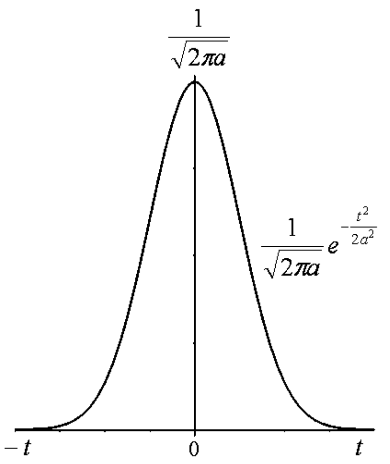

Рис. 3. Дзвоновий (гаусовий) імпульс

Епсілон-функцією назвемо функцію, що є рівномірною в діапазоні зміни змінної від мінус нескінченності до плюс нескінченності, має площу, що дорівнює одиниці, і має нескінченно малу висоту. Прикладами математичного визначення епсілон-функції можуть бути наступні:

$$\varepsilon(\tau)=\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau};\ \varepsilon(\omega)=\frac{2}{\omega}\lim_{\tau\to 0}\sin\frac{\omega\tau}{2};\ \varepsilon(\omega)=\lim_{a\to 0}\sqrt{a}e^{-\frac{\omega^2a^2}{2}}.$$

Якщо дельта-функція є енергетичним сигналом, то її енергетичним спектром є епсілон-функція і навпаки: якщо енергетичним сигналом є епсілон-функція, то її енергетичним спектром є дельта-функція.

Домноження дельта-функції, що є енергетичним сигналом, на постійну величину означає зміну епсілон-функції, яка є спектром дельта-функції, на цю ж постійну величину і навпаки, домноження епсілон-функції, що є спектром дельта-функції, на постійну величину означає зміну дельта-функції на цю ж величину. Цей зв'язок зберігається, якщо енергетичним сигналом буде епсілон-функція, а дельта-функція – її спектром.

1. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: «Советское радио», 1971. – 671 с. 2. Майстренко В.М. Спектри одномірних функцій розподілу випадкових процесів // Вісник Національного Технічного Університету „Київський політехнічний інститут", „Приладобудування – 2003". – № 26. – С. 145 – 150. 3. Майстренко В.М. Дослідження спектрів одномірних функцій розподілу випадкових процесів // Третя науково-технічна конференція „Приладобудування – 2004: Стан і перспективи" 20 – 21 квітня 2004 р. м. Київ, Україна, Збірка наукових праць – С. 137 – 138. 4. Майстренко В.М. Дослідження спектрів одномірних функцій розподілу випадкових процесів // Вісник Національного Технічного Університету „Київський політехнічний інститут", „Приладобудування – 2004". – № 27. – С. 163 – 170. 5. Майстренко В.М. Залежні функції розподілу випадкових процесів // Третя науково-технічна конференція „Приладобудування – 2004: Стан і перспективи" 20 – 21 квітня 2004 р. м. Київ, Україна, Збірка наукових праць – С. 138 – 139. 6. Майстренко В.М. Залежні функції розподілу випадкових процесів // Методи та прилади контролю якості. – 2004. – №12. – С.77 – 80. 7. Харкевич А.А. Спектры и анализ. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. – 235 с. 8. Криксунов В.Г. Спектральний аналіз електричних сигналів. – К.: Техніка, 1971. – 193 с.