An asymptotic series for the mean value of some L–functions

八木 彰子*†

(2002 年 7 月 26 日 受理)

Abstract

The object of this paper is to prove the generalization of a theorem due to Heath–Brown on certain mean value of Dirichlet L–function.

1 序

D. R. Heath–Brown の結果は以下の通りである．

χ を mod$q$ の Dirichlet 指標; $q > 1$, $L(s,\chi)$ をそれに対応する L–函数とする．そのとき

$$\sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\ q)} \left| L\left(\frac{1}{2}, \chi\right)\right|^2 = \frac{\varphi(q)}{q} \sum_{k|q} \mu\left(\frac{q}{k}\right) T(k)$$

が成り立つ．ここで $T(k)$ は以下の展開である

$$T(k) = k\left(\log\frac{k}{8\pi} + \gamma\right) + 2\zeta\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} q^{1/2} + \sum_{n=0}^{2N-1} c_n k^{-n/2} + O(k^{-N}).$$

このとき $N \geq 1$, また c_n は適当な常数, γ は Euler の定数, $\mu(\cdot)$ は Möbius の函数, $\varphi(\cdot)$ は Euler の函数, $\zeta(\cdot)$ は Riemann の ζ–函数を表す.

この定理を $\boldsymbol{Q}$ 上 $n = r_1 + 2r_2$ 次アーベル拡大体 K について述べたのが以下である.

*Department of Mathematics, Faculty of Education, Yamagata University, Yamagata, Japan

†2006 年 1 月逝去

2 主定理

K を $\boldsymbol{Q}$ 上 n 次アーベル拡大体とする $(n \geq 2)$．$\mathfrak{q}$ を K の固定した一つの整イデアルとするとき，

$$\sum_{\Phi(\bmod N\mathfrak{q})} \left|\xi\left(\frac{1}{2}, \Phi\right)\right|^2 = \frac{\varphi(N\mathfrak{q})}{N\mathfrak{q}} \sum_{\mathfrak{k}|\mathfrak{q}} \mu\left(\frac{N\mathfrak{q}}{N\mathfrak{k}}\right) T(\mathfrak{k})$$

が成り立つ．ここで Φ は $(\boldsymbol{Z}/(N\mathfrak{q})\boldsymbol{Z})^*$ の既約剰余類群の指標 (乗法群として)．ただし，$n=2$ のときは，右辺において $\varphi(N\mathfrak{q})$ のかわりに h_0 を代入する．

次に $\xi(s,\Phi)$ を以下の様に定義する．

$$\begin{aligned}\xi(s,\Phi) &= \sum_{\substack{\mathfrak{a}\,;\,1\leq N\mathfrak{a}\leq N\mathfrak{q} \\ \mathfrak{b}\,;\,K\text{ のすべての整イデアル}}} \Phi(N\mathfrak{a})(N\mathfrak{a}+N\mathfrak{q}N\mathfrak{b})^{-s}(N\mathfrak{q})^s \\ &= \sum_{\substack{1\leq N\mathfrak{a}\leq N\mathfrak{q} \\ \mathfrak{b}}} \frac{\Phi(N\mathfrak{a}+N\mathfrak{q}N\mathfrak{b})}{(N\mathfrak{a}+N\mathfrak{q}N\mathfrak{b})^s}(N\mathfrak{q})^s.\end{aligned}$$

この $\xi(s,\Phi)$ はいわゆる Hecke の L–函数とは異なるものであることに注意する．Heath–Brown の結果を自然に代数体に拡張するためには, この $\xi(s,\Phi)$ を対象にする方が Hecke の L–函数よりもふさわしいと思われる．ここで $T(\mathfrak{k})$ は以下のものである:

$$\begin{aligned}T(\mathfrak{k}) &= (N\mathfrak{k})\left\{\lambda^2 + \log\frac{N\mathfrak{k}}{8\pi} + 2\lambda\Delta - \lambda^2\gamma\right\} + \frac{A_2O_1}{\pi^{1/2}}\zeta_K^2\left(\frac{1}{2}\right)(N\mathfrak{k})^{1/2} \\ &\quad +(N\mathfrak{k})^{1-1/2n}\left[\frac{A_2O_1}{2^3\pi^{1/2}}\frac{1}{1/2-1/2n}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2-1/2n} + \frac{O_2O_1A_2}{2^{2+M}\pi^{M+1/2}}\right. \\ &\quad +\frac{\pi^{-1+1/2n}A_1}{2^{1/2-1/2n}(5/2-1/2n+M)} + \frac{\pi^{1/2}A_1}{2^{1-1/2n}(3/2-1/2n)} \\ &\quad +\frac{A_1}{2^{1/2-1/2n}\pi^{5/2+1/2n}} + \frac{(-3+1/2n)\pi^{1/2n-1/2}A_1}{(5/2-1/2n)2^{3/2-1/2n}} \\ &\quad \left.+\frac{\pi^{-1+1/2n}}{3^{3/2-1/2n}}MO_1\left(\frac{A_1}{M+1/2-1/2n} + \frac{A_2}{-M+1/2-1/2n}\right)\right] \\ &\quad +\sum_m c_m(N\mathfrak{k})^{1-m-n} + O\left((N\mathfrak{k})^{-N+\varepsilon/2}\right).\end{aligned}$$

記号の説明は以下の通りである:

$$\int_0^{N\mathfrak{q}/2\pi} \Delta(x) x^{-1/2+M} dx = O\left(\frac{1}{3/2-1/2n+M}\right)\left(\frac{N\mathfrak{q}}{2\pi}\right)^{3/2-1/2n+M}$$
$$= O_1 \times \left(\frac{N\mathfrak{q}}{2\pi}\right)^{3/2-1/2n+M},$$
$$\exp\left(\frac{2\pi ix}{N\mathfrak{q}}\right) = 1 + \frac{2\pi ix}{N\mathfrak{q}} + O\left(\left(\frac{2\pi}{N\mathfrak{q}}\right)^2 x^2\right)$$
$$= 1 + \frac{2\pi ix}{N\mathfrak{q}} + O_2,$$

$$a = \frac{N\mathfrak{a}}{N\mathfrak{q}}, \quad 0 \le N\mathfrak{a} \le N\mathfrak{q},$$
$$A_1 = O\left(\frac{ae^{-(a+x)}}{1-e^{-x}}\right), \quad A_2 = O\left(\frac{\varepsilon e^{-(a+x)}}{1-e^{-x}}\right)$$

で $M \gg 0$ のとき $\Delta(x)$ は次で定義される.

$$\lambda = 2^{r_1+r_2}\frac{Rh\pi^{r_2}}{w\sqrt{D}}, \quad \text{また} \quad \Delta = \lambda + \int_1^\infty \frac{R(t)}{t^2}dt$$

とおく.

$$\sum_{N\mathfrak{a}\le x} d(\mathfrak{a}) = D(x) = x(\log x + 2\gamma - 1) + \Delta(x).$$

ここで $d(n)$ は n の約数函数 (参考文献 [4] の p.9 を参照), また, D は K の判別式の絶対値, R は単数基準. $I(x)$ はノルムが x をこえないような K の整イデアルの個数とすると

$$I(x) = \lambda x + O(x^{1-1/n}) = \lambda x + R(x)$$

と書き表せる. また

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{(N\mathfrak{a})^s}$$

は Dedekind の ζ–函数である. 但し $\mathfrak{a}$ が K の整イデアルを動くとする. また, $s = \sigma + it \in \boldsymbol{C}$.

3 定義

$$I(s) = \int_c \frac{z^{s-1}}{e^z-1}dz,$$

ここで積分路 c は ∞ から出発して (正の実軸の), 原点をかこんで (正の方向で), $\pm 2i\pi$, $\pm 4i\pi$, $\cdots$, をかこんで正の ∞ に帰ってゆくもの. このとき (参考文献 [7] の p.18 を参照)

$$\zeta(s) = \frac{e^{-i\pi s}\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_c \frac{z^{s-1}}{e^z-1}dz$$

が成り立つことが示されている.

次に (参考文献 [2] の p.92 を参照) $ABCDE$ 上の積分 (図 1 参照)

$$\Gamma(x)\left(e^{2\pi i x}-1\right) = \int\limits_{ABCDE} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

がなりたっている.

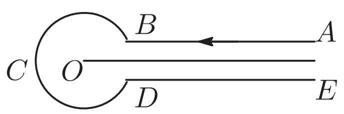

Fig. 1

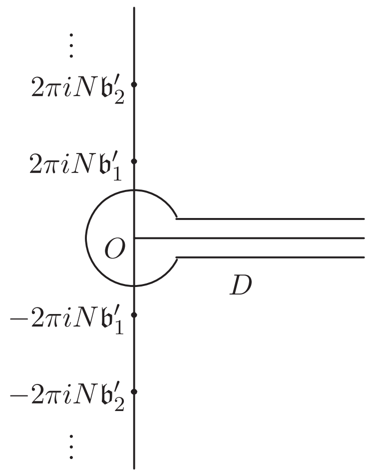

Fig. 2

これを代数体に拡張する. $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}$; K 上の整イデアルを動くとき,

$$\frac{\Gamma(s)}{(N\mathfrak{b})^s} = \frac{1}{e^{2\pi i s}-1}\int\limits_D z^{s-1}\exp(-(N\mathfrak{b})z)dz,$$

が成り立つ. $(N\mathfrak{b}_1+1)^s > (N\mathfrak{b}_1+N\mathfrak{a}/N\mathfrak{q})^s > (N\mathfrak{b}_1)^s$ より $\mathrm{Re}(s)>1$ のとき

$$(N\mathfrak{b}_1+1)^{-s} < \left(N\mathfrak{b}_1+\frac{N\mathfrak{a}}{N\mathfrak{q}}\right)^{-s} < (N\mathfrak{b}_1)^{-s}.$$

従って $\mathfrak{b}_1$ が K の整イデアルを動くとき

$$\sum_{\mathfrak{b}_1}(N\mathfrak{b}_1+1)^{-s} < \sum_{\mathfrak{b}_1}\left(N\mathfrak{b}_1+\frac{N\mathfrak{a}}{N\mathfrak{q}}\right)^{-s} < \sum_{\mathfrak{b}_1}(N\mathfrak{b}_1)^{-s}$$

となる．ここで右辺は $\mathrm{Re}(s) > 1$ か $\mathrm{Re}(s) < 0$ で収束するから左辺もそうである．さらに $1 \leq N\mathfrak{a} \leq N\mathfrak{q}$ より $1/N\mathfrak{q} \leq N\mathfrak{a}/N\mathfrak{q} \leq 1$ で

$$\frac{d}{ds}\exp\left(-s\left(N\mathfrak{b}_1+\frac{N\mathfrak{a}}{N\mathfrak{q}}\right)\right) = -\left(N\mathfrak{b}_1+\frac{N\mathfrak{a}}{N\mathfrak{q}}\right)\exp\left(-\left(N\mathfrak{b}_1+\frac{N\mathfrak{a}}{N\mathfrak{q}}\right)s\right)$$

で有理型函数として $s=1$ 以外は解析接続可能である．もし

$$\zeta_K\left(s, \frac{N\mathfrak{a}}{N\mathfrak{q}}\right) \underset{\leftarrow}{=} \sum_{\mathfrak{b}_1} \frac{1}{(N\mathfrak{b}_1 + N\mathfrak{q}^{-1}N\mathfrak{a})^s} = \sum_{\mathfrak{b}_1} \frac{(N\mathfrak{q})^s}{(N\mathfrak{q}N\mathfrak{b}_1 + N\mathfrak{a})^s}$$

とおくと，また $\mathfrak{a}$ は K の整イデアルを動く $(1 \leq N\mathfrak{a} \leq N\mathfrak{q})$ とすると

$$\zeta_K\left(s, \frac{N\mathfrak{a}}{N\mathfrak{q}}\right) = \frac{1}{\Gamma(s)(e^{2\pi is}-1)}\sum_{\mathfrak{b}_1}\int_D z^{s-1}\exp\left\{-\left(N\mathfrak{b}_1+\frac{N\mathfrak{a}}{N\mathfrak{q}}\right)z\right\}dz,$$

となる (図 2 参照)．K の整イデアルでノルムが n となる個数は，$^{\forall}\varepsilon > 0$ のとき，

$$\sum_{N\mathfrak{b}=n} \cdot 1 = O\left(n^{\varepsilon}\right)$$

と書ける．したがって，

$$\begin{aligned}\sum_{\mathfrak{b}_1} z^{s-1}\exp\left\{-\left(N\mathfrak{b}_1+\frac{N\mathfrak{a}}{N\mathfrak{q}}z\right)\right\} &= O\left(\sum_{n=1}^{\infty} z^{s-1}n^{\varepsilon}\exp\left\{-\frac{N\mathfrak{a}}{N\mathfrak{q}}z\right\}-nz\right)\\ &= O\left(z^{s-1}\exp\left(-\frac{N\mathfrak{a}}{N\mathfrak{q}}z\right)\sum_{n=1}^{\infty} n^{\varepsilon}e^{-nz}\right)\end{aligned}$$

は $\varepsilon \to 0$ のとき $1 \leq N\mathfrak{a} \leq N\mathfrak{q}$ において一様に収束する．ここで $\mathfrak{b}_1$ は K の全ての整イデアルを動く．$z = \pm 2\pi i N\mathfrak{b}_2$ の留数は

$$\begin{aligned}\sum_{\mathfrak{b}_2}\frac{1}{\Gamma(s)(e^{2\pi is}-1)}A_0 &= \zeta_K\left(s, \frac{N\mathfrak{a}}{N\mathfrak{q}}\right)\\ &= \frac{1}{\Gamma(s)(e^{2\pi is}-1)}\int_D z^{s-1}\exp\left\{-\left(N\mathfrak{b}_2+\frac{N\mathfrak{a}}{N\mathfrak{q}}\right)z\right\}dz,\end{aligned}$$

と書き表せる (図 2 参照)．ここで

$$A_0 = -2(2\pi N\mathfrak{b}_2)^{s-1}\sin\left\{2\pi N\mathfrak{b}_2\frac{N\mathfrak{a}}{N\mathfrak{q}}+\frac{\pi}{2}s\right\}$$

と書けるから, 従って次を得る.

$$\zeta_K\left(s, \frac{N\mathfrak{a}}{N\mathfrak{q}}\right) = \frac{2}{\Gamma(s)(e^{2\pi is}-1)}\sum_{\mathfrak{b}_2}(N\mathfrak{b}_2)^{s-1}\sin\left\{2\pi N\mathfrak{b}_2\frac{N\mathfrak{a}}{N\mathfrak{q}}+\frac{\pi}{2}s\right\}.$$

最初に $\xi(s,\Phi)$ を定義した. $s>1$ のとき

$$\begin{aligned}
\xi(s,\Phi)\xi(1-s,\bar{\Phi}) &= \left\{(N\mathfrak{q})^{-s}\sum_{\substack{\mathfrak{a}_1\\ 1\le N\mathfrak{a}_1\le N\mathfrak{q}}}\Phi(\mathfrak{a}_1)\zeta_K\left(s,\frac{N\mathfrak{a}_1}{N\mathfrak{q}}\right)\right\}\\
&\quad\times\left\{(N\mathfrak{q})^{s-1}\sum_{\substack{\mathfrak{a}_2\\ 1\le N\mathfrak{a}_2\le N\mathfrak{q}}}\bar{\Phi}(\mathfrak{a}_2)\zeta_K\left(1-s,\frac{N\mathfrak{a}_2}{N\mathfrak{q}}\right)\right\}\\
&= (N\mathfrak{q})^{-1}\sum_{\substack{\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2\\ 1\le N\mathfrak{a}_1,N\mathfrak{a}_2\le N\mathfrak{q}}}\Phi(\mathfrak{a}_1)\bar{\Phi}(\mathfrak{a}_2)\zeta_K\left(s,\frac{N\mathfrak{a}_1}{N\mathfrak{q}}\right)\\
&\quad\times\frac{2\Gamma(s)}{(2\pi)^s}\sum_{\mathfrak{b}}\frac{1}{(N\mathfrak{b})^s}\left(2\pi N\mathfrak{b}\frac{N\mathfrak{a}}{N\mathfrak{q}}+\frac{\pi}{2}(1-s)\right), \qquad (1)
\end{aligned}$$

がなりたつ. 但し $\mathfrak{b}$ は K の全ての整イデアルを動くとする. 従って

$$\begin{aligned}
\xi(s,\Phi) &= \sum_{\substack{\mathfrak{a}_1\\ 1\le N\mathfrak{a}_1\le N\mathfrak{q}}}\Phi(\mathfrak{a}_1)\sum_{\mathfrak{b}_1}\frac{1}{(N\mathfrak{b}_1+N\mathfrak{q}^{-1}N\mathfrak{a}_1)^s}\\
&= \sum_{\mathfrak{a}_1}\Phi(\mathfrak{a}_1)\sum_{\mathfrak{b}_1}\frac{(N\mathfrak{q})^s}{(N\mathfrak{q}N\mathfrak{b}_1+N\mathfrak{a}_1)^s}
\end{aligned}$$

とかける. 今 $\mathfrak{a}_1\equiv\mathfrak{a}_2 \pmod{N\mathfrak{q}}$ のとき次の様に定義する：

$$\begin{aligned}
T_1(\mathfrak{q},s) &\underset{\leftarrow}{=} \sum_{\Phi \bmod N\mathfrak{q}}\xi(s,\Phi)\xi(1-s,\bar{\Phi})\\
&= \frac{\varphi(N\mathfrak{q})}{N\mathfrak{q}}\sum_{\substack{\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2\\ 1\le N\mathfrak{a}_1,N\mathfrak{a}_2\le N\mathfrak{q}}}\frac{2(2\pi)^{-s}e^{i\pi(1-s)}}{\Gamma(1-s)(e^{2\pi i(1-s)}-1)}\\
&\quad\times\zeta_K\left(s,\frac{N\mathfrak{a}_1}{N\mathfrak{q}}\right)\left[\sum_{\mathfrak{b}_2}(N\mathfrak{b}_2)^{-s}\sin\left\{\frac{\pi(1-s)}{2}+2\pi N\mathfrak{b}_2\frac{N\mathfrak{a}_2}{N\mathfrak{q}}\right\}\right],
\end{aligned}$$

$$\because\quad (e^{2\pi i(1-s)}-1)^{-1}\Gamma(1-s)^{-1}e^{-i\pi s} = 2\pi\Gamma(s).$$

$$
\begin{aligned}
(1) &= \frac{\varphi(N\mathfrak{q})}{N\mathfrak{q}} \sum_{\substack{\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2 \\ 1\le N\mathfrak{a}_1, N\mathfrak{a}_2 \le N\mathfrak{q}}} \zeta_K\left(s, \frac{N\mathfrak{a}_1}{N\mathfrak{q}}\right) \\
&\quad \times \left[\frac{2\Gamma(s)}{(2\pi)^{s-1}}(N\mathfrak{q}) \sum_{\mathfrak{b}_2} \frac{1}{(N\mathfrak{b}_2)^s}\left\{\sin\frac{\pi}{2}(1-s) + \frac{2\pi N\mathfrak{a}_2 N\mathfrak{b}_2}{N\mathfrak{q}}\right\}\right] \\
&= \frac{\varphi(N\mathfrak{q})}{N\mathfrak{q}} 2\pi\Gamma(s)\left(\frac{N\mathfrak{k}}{2\pi}\right)^s \sum_{\substack{\mathfrak{d}|N\mathfrak{a}_2 \\ \mathfrak{d}|\mathfrak{q}}} \frac{\mu(\mathfrak{d})}{(N\mathfrak{d})^s} \\
&\quad \times \sum_{\mathfrak{b}_1}\sum_{\mathfrak{j}}\sum_{\mathfrak{b}_2} \frac{\sin\{2\pi N\mathfrak{a}_1 N\mathfrak{a}_2/N\mathfrak{q} + \pi(1-s)/2\}}{(N\mathfrak{j})^s (N\mathfrak{b}_1 N\mathfrak{q} + N\mathfrak{a}_2)^s},
\end{aligned}
$$

ここで $\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{d}\mathfrak{j}$, $(N\mathfrak{a}_1 N\mathfrak{a}_2, N\mathfrak{q}) = 1$ とおくと,

$$
N\mathfrak{b}_2 = n_1, \quad N\mathfrak{a}_2 + N\mathfrak{b}_1 N\mathfrak{q} = n_2, \quad n_1 n_2 = n. \tag{2}
$$

$n \ge 3$ のとき

$$
T(\mathfrak{k}, s) = 2\pi\Gamma(s)\left(\frac{N\mathfrak{k}}{2\pi}\right)^s \sum_{\mathfrak{j}}\sum_{\mathfrak{b}_2}\sum_{\mathfrak{b}_1} \frac{d(n)}{n^s}\sin\left(\frac{2\pi n}{N\mathfrak{k}} + \frac{\pi(1-s)}{2}\right), \tag{3}
$$

$\mathfrak{k}\mathfrak{d} = \mathfrak{q}$ のとき

$$
T_1(\mathfrak{q}, s) = \sum_{\Phi \bmod N\mathfrak{q}} \xi(s, \Phi)\xi(1-s, \bar{\Phi}) = T_1(\mathfrak{q}, 1-s) = \frac{\varphi(N\mathfrak{q})}{N\mathfrak{q}} \sum_{\mathfrak{k}} \mu\left(\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{k}}\right) T(\mathfrak{k}, s) \tag{4}
$$

となる．また $n = 2$ のとき, $\varphi(N\mathfrak{q})$ のかわりに h_0 だから

$$
T_1(\mathfrak{q}, s) = \frac{h_0}{N\mathfrak{q}} \sum_{\mathfrak{k}|\mathfrak{q}} \mu\left(\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{k}}\right) T(\mathfrak{k}, s) \tag{5}
$$

がなりたつ.

4　重みつきの和

次の函数を考える.

$$
F(s) = s^{-1}\cos(\pi s)\exp\left(s^2\right) \quad (s \in \boldsymbol{C}).
$$

すると $F(s)$ は s の奇函数で留数 1 の原点に於ける単純極を除いて正則である. すると

$$
F(-s) = -s\cos(\pi s)\exp\left((-\sigma + it)^2\right),
$$

より $(-\sigma+it)^2=\sigma^2-2t\sigma i-t^2$ だから

$$F(\sigma+it)\ll\exp\left(-|t|^2\right)\qquad(|t|\geq 4,\quad \sigma_1\leq\sigma\leq\sigma_2).\tag{6}$$

F は奇函数より $T_1(\mathfrak{q},1/2)=2I$ (積分路を (-1) に移すと $s=0$ で極をもつ). 但し次の積分を考える:

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_{(1)}T_1\left(\mathfrak{q},s+\frac{1}{2}\right)F(s)ds.$$

すると,

$$I=T_1\left(\mathfrak{q},\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2\pi i}\int_{(-1)}T_1\left(\mathfrak{q},s+\frac{1}{2}\right)F(s)ds\tag{7}$$

が成り立つ. ここで, (σ) は $\sigma-i\infty$ から $\sigma+i\infty$ までの直線を表わす. また $F(-s)=-F(s)$ より,

$$T_1\left(\mathfrak{q},\frac{1}{2}\right)=2I=\frac{\varphi(N\mathfrak{q})}{N\mathfrak{q}}\sum_{\mathfrak{k}|\mathfrak{q}}T(\mathfrak{k})=\frac{\varphi(N\mathfrak{q})}{N\mathfrak{q}}\sum_{\mathfrak{k}|\mathfrak{q}}\mu\left(\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{k}}\right)T(\mathfrak{k},s),\tag{8}$$

$$T(\mathfrak{k},s)=2\Gamma(s)\left(\frac{N\mathfrak{k}}{2\pi}\right)^s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(n)}{n^s}\sin\left\{\frac{2\pi n}{N\mathfrak{k}}+\frac{\pi(1-s)}{2}\right\}.\tag{9}$$

今 $n=n_1n_2=N(\mathfrak{b}_1\mathfrak{j})\{N(\mathfrak{b}_2\mathfrak{q})+N\mathfrak{a}_2\}$ とおくと

$$T(\mathfrak{k})=4\sum_n d(n)K_1\left(\frac{2\pi n}{N\mathfrak{k}}\right)\tag{10}$$

が成り立つ. ここで,

$$K_1(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(1)}\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)x^{-s-1/2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi s}{2}\right)F(s)ds=\mathrm{Re}\{K(s)\},$$

$$K(s)=e^{-i\pi/4}e^{ix}x^{-1/2}J(x),\tag{11}$$

また,

$$J(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(1)}\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)x^{-s}e^{-i\pi s/2}F(s)ds\tag{12}$$

である. $F(s)$ は単純極 $s=0$ を除いて正則. このとき留数は $\Gamma(1/2)=\pi^{1/2}$. また

$$\sum_{N\mathfrak{a}\leq x}d(\mathfrak{a})=D(x)=\lambda^2x\log x+\left(2\lambda\Delta-\lambda^2\right)x+\Delta(x)$$

とおく．ここで，

$$\Delta(x) = O\left(x^{1-1/2n}\right)$$

である．$x \geq 1$ のとき，

$$\lambda = 2^{r_1+r_2}\frac{\pi^{r_2}Rh}{w\sqrt{D}},$$

h を K の ideal class group の数, R を K の判別式, D を K の共役差積, r_1 を K の実共役体の個数, r_2 を K の虚共役体の個数, w を K に属する 1 の巾根の数とする．ところで，

$$\Delta = \lambda + \int_1^\infty \frac{R(t)}{t^2}dt \qquad \text{(参考文献 [4] の p.9 参照)}$$

とおくと $\sum_{N\mathfrak{a}\leq x} \cdot 1 = \lambda x + R(x)$. また，

$$T(\mathfrak{k}) = 4\mathrm{Re}(S(\mathfrak{k})),$$

であるから, $D(x)$ の評価式より

$$\begin{aligned}
S(\mathfrak{k}) &= -\frac{2\pi}{N\mathfrak{k}}\int_0^\infty D(x)K'\left(\frac{2\pi x}{N\mathfrak{k}}\right)dx \\
&= -\frac{2\pi}{N\mathfrak{k}}\int_0^\infty \left\{\lambda^2 x\log x + \left(2\lambda\Delta - \lambda^2\right)x\right\}K'\left(\frac{2\pi x}{N\mathfrak{k}}\right)dx \\
&\quad -\frac{2\pi}{N\mathfrak{k}}\int_0^\infty \Delta(x)K'\left(\frac{2\pi x}{N\mathfrak{k}}\right)dx
\end{aligned}$$

が得られる．

5　主な項

以下計算は $\mathfrak{k}$ のかわりに $N\mathfrak{k}$ を代入すればよい．

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty K(y)\log y\,dy \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{(1/4)}\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)e^{-i\pi/4-i\pi s/2}\Gamma(s)i^{1/2-s} \\
&\quad \times\left\{\frac{i\pi}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right) - \Gamma'\left(\frac{1}{2}-s\right)\right\}ds \\
&= \frac{i\pi}{2}A - \frac{1}{2\pi i}\int_{(1/4)} e^{-i\pi s}\pi\sec(\pi s)\frac{\Gamma'(1/2-s)}{\Gamma(1/2-s)}F(s)ds
\end{aligned}$$

が成り立つ. $\Gamma(1/2+s)\Gamma(1/2-s)=\pi\sec(\pi s)$ を対数微分すると次を得る:

$$\frac{\Gamma'(1/2+s)}{\Gamma(1/2+s)}-\frac{\Gamma'(1/2-s)}{\Gamma(1/2-s)}=\pi\tan(\pi s).$$

さらに,

$$G(s)=\frac{\pi^2}{2}\tan(\pi s)+\pi\frac{\Gamma'(1/2-s)}{\Gamma(1/2-s)}$$

は s の奇函数である. 従って

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_{(1/4)}G(s)F(s)ds=\frac{1}{2}G(0)=-\frac{\pi}{2}(\gamma+\log 4),$$

である. また 参考文献 [6] の p.26 より

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z)=\frac{d}{dz}\log\Gamma(z)=\int_0^1\frac{x^{z-1}-1}{x-1}dx-\gamma,$$
$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{2}\right)=-(\log 4+\gamma).$$

ここで A を次の式とする.

$$A=\frac{1}{2\pi i}\int_{(1/4)}e^{-i\pi s}\sec(\pi s)F(s)ds.$$

すると,

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(A)&=\frac{\pi}{2}\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{(1/4)}\pi F(s)ds-\frac{2\pi}{N\mathfrak{k}}\int_0^\infty x\left(\lambda^2\log x+2\lambda\Delta-\lambda^2\right)K'\left(\frac{2\pi\lambda}{N\mathfrak{k}}\right)dx\\&=N\mathfrak{k}\left(\lambda^2\log\frac{N\mathfrak{k}}{8\pi}+2\lambda\Delta-\lambda^2\gamma\right).\end{aligned}$$

次を考えなければいけない.

$$I_{nl}=(N\mathfrak{k})^{-nl}\int_0^\infty\Delta_{nl}(x)M_{nl}\left(\frac{2\pi x}{N\mathfrak{k}}\right)dx,$$

但し $0\le n\le l$. 次に帰納的に次を定義する. $\Delta_1(x)=\Delta(x)$ でまた

$$\Delta_{l+1}(x)=\int_0^x\Delta_l(t)dt$$

とおく. このとき

$$\Delta_{nl}(x) = \sum_{0 \le m < l/2} K_{l,m} x^{nl-m-n} + O\left(x^{nl+1-l/2-n+\varepsilon/2}\right)$$

が成り立つ.

$$\int_0^\infty \Delta(x) K'\left(\frac{2\pi x}{N\mathfrak{k}}\right) dx = I_0 + I_1 + I_2 + I_3,$$

とおくとき

$$\begin{aligned} A_1 &= O\left(\int_0^\infty e^{-\pi t/2} t^M e^{-|t|^2} dt\right), \\ A_2 &= O\left(\int_{-\infty}^\infty e^{-\pi t/2} t^{-M} e^{-|t|^2} dt\right) \end{aligned}$$

とすれば I_0, I_1, I_2, I_3 は以下の通りである:

$$\begin{aligned} &-\frac{2\pi}{N\mathfrak{k}} I_0 = -\frac{\pi^{1/2}}{\sqrt{2}} (2\pi)^{-1+1/2n} (N\mathfrak{k})^{1-1/2n}, \qquad -\frac{2\pi}{N\mathfrak{k}} I_1 = (N\mathfrak{k})^{1-1/2n} A_1 C_1, \\ &I_2 = \frac{O_1 O_2 A_2}{2^2 + M\pi^{M+1/2}}, \qquad I_3 = \int_0^\infty H\left(\frac{2\pi x}{N\mathfrak{k}}\right) J'\left(\frac{2\pi x}{N\mathfrak{k}}\right) \Delta(x)\, dx. \end{aligned}$$

すると次が成り立つ:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}\left\{-\frac{2\pi}{N\mathfrak{k}}(I_0 + I_1 + I_2)\right\} \\ &= \frac{A_2 O_1}{2\pi^{1/2}} (N\mathfrak{k})^{1/2} \zeta_K^2\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\quad + \frac{A_2 O_1}{2\pi^{1/2}} \frac{1}{2^2} \frac{1}{1/2 - 1/2n} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2-1/2n} + \frac{O_2 O_1 A_2}{2^{2+M} \pi^{M+1/2}} \\ &\quad + \frac{\pi^{-1+1/2n}}{2^{1/2-1/2n}} \frac{A_1}{5/2 - 1/2n + M} + \frac{(-3/2 + 1/2n)\pi^{1/2n} A_1}{(5/2 - 1/2n) 2^{-3/2-1/2n}} \\ &\quad \times O_1 O_2 (N\mathfrak{k})^{1-1/2n} + O_1((N\mathfrak{k})^{-1/2n}). \end{aligned} \tag{13}$$

参考文献 [7] の (12.5.5) より

$$I_3 = \int_0^\infty H\left(\frac{2\pi x}{N\mathfrak{k}}\right) J'\left(\frac{2\pi x}{N\mathfrak{k}}\right) \Delta(x)\, dx.$$

従って次が成り立つ:

$$\zeta_K^2(s) = s \int_0^\infty \Delta_1(x) x^{-s-1} dx \qquad (1/3 < \operatorname{Re}(s) < 1).$$

また

$$\sum_{\Phi(\bmod N\mathfrak{q})}\left|\xi\left(\frac{1}{2},\Phi\right)\right|^2=\frac{\varphi(N\mathfrak{q})}{N\mathfrak{q}}\sum_{\mathfrak{k}|\mathfrak{q}}\mu\left(\frac{N\mathfrak{q}}{N\mathfrak{k}}\right)T(\mathfrak{k}),$$

$$\begin{aligned}T(\mathfrak{k})=N\mathfrak{k}&\left\{\lambda^2\log\frac{N\mathfrak{k}}{8\pi}+2\lambda\Delta-\lambda^2\gamma\right\}+\frac{A_2O_1}{\pi^{1/2}}\zeta_K^2\left(\frac{1}{2}\right)(N\mathfrak{k})^{1/2}\\&+(N\mathfrak{k})^{1-1/2n}\left[\frac{A_2O_1}{2^3\pi^{1/2}}\frac{1}{1/2-1/2n}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2+1/2n}+\frac{O_2O_1A_2}{2^{2+M}\pi^{M+1/2}}\right.\\&\quad+\frac{\pi^{-1+1/2n}A_1}{2^{1/2-1/2n}(5/2-1/2n+M)}+\frac{\pi^{1/2}A_1}{2^{1-1/2n}(3/2-1/2n)}\\&\quad+\frac{A_1}{2^{9/2-1/2n}\pi^{5/2+1/2n}}+\frac{(-3+1/2n)\pi^{1/2n-1/2}A_1}{(5/2-1/2n)2^{3/2-1/2n}}\\&\quad\left.+\frac{\pi^{-1+1/2n}}{2^{3/2-1/2n}}MO_1\left(\frac{A_1}{M+1/2-1/2n}+\frac{A_2}{-M+1/2-1/2n}\right)\right]\\&+\sum_{0\le m<N-n+2}C_m(N\mathfrak{k})^{1-m-n}+O\left\{(N\mathfrak{k})^{-N+\varepsilon/2}\right\}\end{aligned}$$

が成り立つ. $n=2$ のとき, $\varphi(N\mathfrak{q})$ のかわりに h_0 とおく.

References

[1] 内山 三郎. 素数の分布. 宝文館 (1970).

[2] 福原満洲雄. ガンマー函数. 弘文堂 (1951).

[3] D. R. Heath–Brown. *An asymptotic series for the mean value.* Comment. Math. Helvetici 56, 148–161 (1981).

[4] 三井 孝美. 解析的数論. 岩波書店 (1989).

[5] C. L. Siegel *Lectures on advanced analytic number theory.* Tata institute of Fundamental Research (1961).

[6] 末綱 恕一. 解析的整数論. 岩波書店 (1950).

[7] E. C. Titchmarsh. *The theory of the Riemann Zeta–function.* Clarendon Press, Oxford (1951).

[8] E. T. Whittaker and G. N. Watson. *A course of modern analysis.* Cambridge University Press (1927).