

interactivo.

## An analysis methodology of mathematical competences in interactive environments.

Jesús Murillo, Guillermina Marcos<sup>(1)</sup>, Josep María Fortuny<sup>(2)</sup>

(1) Dto. De Matemáticas y Computación. Universidad de La Rioja.

(2) Dto. De Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales. Universidad Autónoma de Barcelona.

Fecha de recepción 16-03-2011. Fecha de aceptación 04-07-2011.

### Resumen.

*En este trabajo de investigación, se ha implementado y analizado una metodología (modelo) para potenciar el desarrollo de ciertas competencias matemáticas por parte de alumnos de Educación Secundaria, cuando los mismos desarrollan trabajo colaborativo en un EVA. Nos hemos centrado en particular en las competencias relacionadas con el aprendizaje de la Geometría y con la competencia comunicativa matemática; estableciendo a la vez relaciones entre estas dos dimensiones de análisis.*

*Hemos diseñado y aplicado los instrumentos de análisis correspondientes para estudiar, por un lado, las actividades propuestas a lo largo del proceso de aprendizaje teniendo en cuenta diferentes criterios para las mismas y, por otro lado, la evolución de los aprendizajes de los alumnos en relación a las competencias matemáticas mencionadas. Hemos estudiado también, aspectos relacionados con la capacidad de motivación del EVA.*

**Palabras clave:** Entorno interactivo; aprendizaje de la geometría; atención a la diversidad; competencia comunicativa; Cabri.

### Summary.

*In this scientific research, it has been implemented and analyzed a methodology (model) to improve the development of certain mathematic abilities of Secondary Students, when these students develop a collaborative learning in a Virtual Environment of Learning (VEL). We have primarily focused on abilities connected with Geometry learning and with communicative mathematic abilities; establishing at the same time a relationship between these two dimensions of analysis.*

*We have designed and put into practice the relevant means of analysis to study on one hand the suggested activities during the learning process, taking into account different*

*criteria and on the other hand the development of the students learning in connection with the mathematic abilities. We have also studied aspects connected with the capacity for motivation of the Virtual Environment of Learning (VEL).*

**Key words:** *Interactive environment; Geometry learning; attention to diversity; communicative competence; Cabri.*

## 1.- Introducción.

Hemos diseñado, aplicado y estudiado un entorno interactivo de aprendizaje con la finalidad de potenciar un aprendizaje matemático que desarrolle determinadas competencias y nos permita analizar los beneficios obtenidos, cuando el trabajo de los alumnos se organiza de forma colaborativa.

En este artículo, que muestra una parte de un trabajo más amplio (Marcos, 2008), siguiendo la línea marcada en Murillo (2001) y en Martín (2002), nos centramos en la aplicación de los instrumentos de análisis diseñados a los producciones de los alumnos y en presentar los beneficios cognitivos que se producen en los alumnos: las competencias relacionadas con el aprendizaje de la Geometría: capacidad para modelizar el problema; capacidades relacionadas con los procesos de visualización, de construcción mediante herramientas y los procesos discursivos de razonamiento y con el desarrollo de la competencia comunicativa entendida como el conjunto de procesos y conocimientos de diverso tipo –lingüísticos, socio-lingüísticos, estratégicos y discursivos- que se ponen en juego para producir o comprender discursos adecuados a la situación y al contexto de comunicación y al grado de formalización requerido.

Hemos diseñado y aplicado los instrumentos de análisis correspondientes para estudiar, por un lado, las actividades propuestas a lo largo del proceso de aprendizaje teniendo en cuenta diferentes criterios para las mismas y, por otro lado, la evolución de los aprendizajes de los alumnos en relación a las competencias matemáticas. En el trabajo completo, hemos estudiado también, aspectos relacionados con la capacidad de motivación del EVA (Entorno Virtual de Aprendizaje); analizando el impacto de su implementación en el interés y la participación de los alumnos.

Nuestro trabajo complementa aspectos de innovación en el diseño e implementación de un EVA y que tiende al desarrollo de ciertas competencias a lo largo de un “Taller de Matemáticas” en el que se abordan temáticas curriculares relativas a la Geometría y de investigación sobre ciertos aprendizajes e interacciones que se desarrollan en el marco de dicho Taller; en particular los relativos al desarrollo de determinadas competencias por parte de los alumnos.

Nos hemos propuesto analizar asimismo la evolución producida respecto al Aprendizaje de la Geometría y al desarrollo de la Competencia Comunicativa.

## 2.- Fundamentos teóricos del desarrollo del EVA.

Desde 1999, el grupo de investigación trabaja en un marco de investigación-acción, desarrollando entornos que generen interacciones adecuadas de aprendizaje entre profesor y alumnos con la idea fundamental de incrementar el aprendizaje y el conocimiento y estudiando las interacciones, las condiciones que favorecen su mejor consecución y modificando la práctica en función de las investigaciones realizadas.

El trabajo completo incluye: el diseño e implementación de un entorno de aprendizaje interactivo destinado a alumnos de ESO y tendiente al desarrollo de ciertas competencias a lo largo de un “Taller de Matemáticas” en el que se abordan temáticas curriculares relativas a la Geometría para la Educación Secundaria y la investigación sobre ciertos procesos relacionados con determinados aprendizajes e interacciones que se desarrollan en el marco de dicho Taller; en particular los relativos al desarrollo de determinadas competencias por parte de los alumnos. Para llevarlo a cabo, hemos asumido ciertos marcos y planteamientos teóricos; algunos relativos a modelos y concepciones respecto a la enseñanza y el aprendizaje; otros vinculados específicamente con la incorporación de las TIC y la utilización de medios y soportes de Geometría Dinámica -como Cabri Geomètre II-. De esta manera, podemos decir que nuestro marco teórico general ha sido construido a partir de diferentes aportes; algunos provenientes de amplias teorías, otros de planteamientos más específicos.

En el marco de nuestra investigación entendemos por *entorno de aprendizaje*

*un espacio educativo capaz de generar situaciones de aprendizaje adaptadas e interactivas para trabajar matemáticamente y capaces de promover y soportar el cambio cognitivo de los alumnos* (Muriello, 2001, p. 51). En tal sentido, caracterizamos el entorno interactivo de aprendizaje propuesto de la siguiente manera: *un entorno de aprendizaje interactivo, soportado por aplicaciones informáticas y por el uso de las TIC, en el que el trabajo se organiza de manera colaborativa*. Está constituido fundamentalmente por una red electrónica como soporte instruccional y en el que las actividades propuestas para resolver con un SGD (Software de Geometría Dinámica), presentadas en la página Web correspondiente o a través del correo electrónico, constituyen el medio esencial de comunicación y aprendizaje. Se utiliza además un foro electrónico en el que es posible plantear preguntas, replicar, solicitar aclaraciones, quedando todas las intervenciones a la vista del grupo.

Es necesario tender a una “*interactividad significativa*” (Depover, 1998, pp. 155–178), fundamentada en la autonomía de funcionamiento, en las posibilidades de experiencias concretas, de descubrimientos personales, de generar situaciones de aprendizaje adaptadas e interactivas. La acción, la participación de la persona, es un aspecto fundamental para esta significatividad de la interactividad; de ahí la importancia de recrear en estos entornos el proceso de diálogo interpersonal, incluyendo sus componentes comunicacionales, cognitivas e incluso afectivas.

Las razones que justifican la importancia del aprendizaje de la Geometría por

parte de alumnos de la ESO han sido ampliamente detalladas por Alsina y otros (1997), Gutiérrez (2005); por tanto aquí sólo mencionaremos la importancia de la Geometría como ciencia del espacio, como método para la visualización, como punto de encuentro entre las Matemáticas como teoría y la Matemáticas como modelo, como contexto de interacción entre los procesos de inducción y deducción, de experimentación y demostración; pero principalmente, como espacio para la reflexión, la experimentación, la crítica, el intercambio y la creatividad; aspectos reconocidos, por los actuales currículos europeos y en particular el español para las Matemáticas de la ESO.

Asimismo, la clase de Geometría, pueden favorecer el complejo proceso de interrelaciones entre conceptos, símbolos y objetos reales: ante una realidad educativa en la que el manejo del lenguaje se hace tan conflictivo, el trabajo desde la Geometría y su manejo simbólico permite comprender, recordar, comunicar en relación a los conceptos, construir conceptos nuevos, visualizar, traducir, clasificar, promoviendo el desarrollo de la creatividad y de la reflexión.

Siguiendo la línea del constructivismo social (Ernest, 1998, pp. 153-171); consideramos que si bien el aprendizaje es en principio una actividad individual y personal, ésta no se produce sin las interacciones con los demás: las interacciones con los demás son imprescindibles para la construcción social de significados.

Mediante el trabajo cooperativo/colaborativo, es posible generar lecturas compartidas y debates grupales, producir análisis e interpretaciones conjuntas que enri-

quecen el proceso individual a través de una construcción social del conocimiento (Bereiter y Scardamalia, 1992, p. 245). Los alumnos ayudan a otros para que “todos” puedan alcanzar en alguna medida el éxito. La necesidad de articular y explicar al grupo las ideas propias lleva a que éstas sean más concretas y precisas y a organizar e integrar más el conocimiento. Los momentos de interacción permiten a los alumnos tomar conciencia del grado de dominio adquirido pero también reconocer lo que todavía no logran hacer solos y los medios de los que disponen para alcanzar ese objetivo.

Para el diseño del EVA, se ha considerado como función principal del profesor la de intentar modular y guiar el proceso. Para describir esta función, empleamos el concepto de “*andamiaje*”; acuñado por Bruner y colaboradores (1975) y retomado por Vygostky (1978), según el cual el profesor es quien realiza “*parte de la tarea que el estudiante todavía no puede manejar y le proporciona soporte en forma de sugerencias o ayuda, basadas en una diagnosis correcta del nivel actual del alumno en cuanto a destrezas o dificultades. El andamiaje es un modo cooperativo de resolución de problemas de profesor y alumnos, en el que el soporte se modifica gradualmente hasta que los alumnos se hace cargo de lo suyo y finalmente la ayuda del profesor se desvanece*” (Fortuny y Murillo, 2003/2004, pp. 295-316). El diseño y control de los entornos de aprendizaje debe contribuir a este andamiaje; proporcionando en cada momento más que los aportes necesarios los mínimos necesarios, de manera que se potencia el desarrollo óptimo de los alumnos.

### **2.1. El enfoque por competencias y la noción de competencia comunicativa (CC) en Matemáticas**

Consideramos la clase de matemáticas como un sistema complejo en el que las interacciones entre los cuatro polos del sistema educativo (alumno, profesor, conocimiento y medio) producen beneficios en los alumnos que van más allá del contenido matemático en sí mismo y que conciernen dimensiones cognitivas y sociales más amplias. En particular, en este trabajo se han considerado como aspectos fundamentales los procesos relacionados con la comunicación, con el uso de las TIC y con la motivación de los alumnos; habiendo resultado un enfoque adecuado el desarrollado a través de las competencias.

En los últimos años el “*aprender a comunicarse matemáticamente*”, ha cobrado gran importancia como parte del proceso de aprendizaje de las Matemáticas. La relevancia del desarrollo de la capacidad de comunicarse matemáticamente y del papel del lenguaje en el aprendizaje de las Matemáticas, se ve reflejado tanto en numerosas investigaciones de Didáctica de las Matemáticas (Nesher 2000, Morgan 1998), así como en diversas orientaciones curriculares (NCTM 2000, MEC, 2006).

La conversación matemática es buena para el pensamiento matemático (Sfard, 1997); en particular la acción de “describir” en la clase de Matemáticas, resulta una tarea lingüística con consecuencias matemáticas (Hyde, 1996).

El lenguaje matemático, el geométrico en particular, constituye un sistema muy complejo dado su carácter mixto; mixto en el sentido de que incluye un lenguaje natu-

ral y un lenguaje simbólico específico en permanente interacción y que a su vez también contiene registros semióticos no lingüísticos como son los gráficos figuras, diagramas, etc.

En la identificación de los procesos cognitivos involucrados en la resolución de problemas y en las demostraciones en Geometría, reconoce tres tipos de procesos: procesos de visualización, procesos de construcción mediante herramientas y procesos discursivos de razonamiento. Distingue a su vez el proceso discursivo natural (realizado en lengua natural a través de la descripción, explicación, argumentación) y el proceso discursivo teórico (realizado a través de la deducción, ya sea en un registro puramente simbólico o en el registro de la lengua natural).

### **2.2. El paradigma comunicativo**

El “*paradigma comunicativo*”, proveniente de la Didáctica de la Lengua y de los modelos comunicativos, aporta algunas consideraciones importantes a tener en cuenta en relación al aprendizaje de la comunicación tanto para el diseño de entornos de aprendizaje como para el análisis de los procesos de aprendizaje. Desde este nuevo paradigma, la comunicación deja de entenderse como un “*contenido enseñable*” (en un contexto específico y transferible a otros contextos) para convertirse en “*una actividad que debe hacerse*” en los distintos espacios curriculares, de manera que los alumnos puedan desarrollar su *competencia comunicativa*<sup>1</sup>, mediante la participación en procesos comunicativos reales y contextualizados que les permitan relacionarse con los otros, regular sus discursos, negociar significa-

dos, hacerse entender, transmitir ideas, argumentar, etc.; y el aula debe ser entonces un contexto comunicativo significativo dónde no sólo se aprende, sino que también se aprende a hacer; donde los procesos de comprensión y expresión, escrita y oral, se alcanzan de manera progresiva a través del uso y de la interacción.

El contexto específico para el desarrollo de los aprendizajes relativos a la comunicación matemática es la clase de Matemáticas y que la manera de propiciar el desarrollo de estas capacidades comunicativas es mediante el uso.

En relación a los procesos de escritura que los alumnos llevan a cabo como parte de la resolución de problemas geométricos, creemos que esos procesos son parte del aprendizaje geométrico que pretendemos para nuestros alumnos, contribuyen al desarrollo de las capacidades geométricas en general y mejoran la capacidad de comunicación e interacción.

La Competencia Comunicativa constituye una noción social recontextualizada en Educación Matemática (Bernstein 1996, Planas 2002); es decir una noción proveniente de otras disciplinas incorporada a la Didáctica de la Matemática. En su investigación sobre el proceso de recontextualización de esta noción, Planas reinterpreta lo que significa ser competente en el aula de Matemáticas desde un punto de vista comunicativo.

“La adquisición de competencia comunicativa consiste en la adquisición de todo aquello que es necesario saber para poder relacionarse con eficacia en contextos cultural y socialmente significativos sin que se produzcan discontinuidades que lo impidan.... En este sentido, la construcción de

conocimiento matemático y el buen desarrollo de los procesos de comunicación son del todo inseparables.” (Planas, 2002: pp. 179-180).

### **2.3. *Hablar (y escribir) de matemáticas***

Nesher (2000) distingue entre dos acciones: “*hablar matemáticamente*” y “*hablar de matemáticas*”. Con el término “*hablar matemáticamente*” se refiere a usar el lenguaje matemático, aplicándolo a variados contextos, pero teniendo en cuenta su propia sintaxis. Con la expresión “*hablar de matemáticas*” hace referencia al hecho de utilizar el lenguaje natural como metalenguaje para expresar ideas matemáticas; en este caso, el vocabulario y la gramática, sintaxis y semántica, son las del lenguaje natural; aunque claro está que suele tratarse de discursos parcialmente expresados en términos matemáticos.

Coincidimos con Nesher en que cuando los alumnos producen este tipo de discursos, utilizando el lenguaje natural como metalenguaje, desarrollan aprendizaje matemático; en particular que cuando los alumnos comunican sus estrategias geométricas en este modo mixto, desarrollan aprendizaje geométrico. Por esta razón, nuestro trabajo incluye el análisis de los discursos –escritos- producidos, como parte de la resolución de problemas geométricos, por parte de alumnos de ESO, en el marco de la materia optativa “*Taller de Matemáticas*”.

En nuestro caso, adaptando la expresión “*hablar de matemáticas*” propuesta por Nesher, trabajaremos sobre el “*escribir de geometría*”, para referirnos al proceso de producción de discursos –escritos-

tos- en los que los alumnos explican, justifican, describen el procedimiento que han llevado a cabo para la resolución de problemas, empleando el lenguaje natural como metalenguaje.

En el contexto de la asignatura considerada, este proceso de producción de discursos escritos relativos a la resolución de problemas geométricos, cobra una relevancia especial debido a su formato mixto (*enseñanza bimodal*). La producción de discursos escritos juega un rol superador al de “tarea escolar” ya que adquiere una dimensión comunicativa real e imprescindible en las interacciones profesor-alumno y alumno-alumno. Esta modalidad comunicativa, favorece el desarrollo de la competencia comunicativa en Matemáticas en particular y la mejora de las capacidades geométricas en general, en tanto que propicia la interacción, el intercambio y la reflexión.

La reflexión escrita sobre las experiencias matemáticas puede llevar a los alumnos a pensar críticamente sus ideas favoreciendo los procesos metacognitivos. La escritura trae acoplada la acción de reflexionar sobre la experiencia, como posibilidad de influenciar significativamente sobre la cognición y la metacognición del sujeto que aprende; además, a partir de la observación de lo que escribe una persona, es posible explorar relaciones, construir significados, ampliar, enriquecer o abandonar ideas, e incluso, comentar y monitorizar sus reflexiones.

Frente a la naturaleza efímera del habla, la escritura ofrece un medio estable, que permite a profesor y alumno, examinar, reaccionar y responder al pensamiento matemático.

Atienza (1999), identifica dos funciones básicas de la escritura del discurso académico:

- Función representativa o expresiva (la escritura académica como construcción del conocimiento): escritura empleada por el estudiante como tanteo y aproximación al saber, para explorar y analizar los tópicos de las diferentes disciplinas, esto es, para descubrir, formular y expresar ideas. En definitiva, el discurso efectuado para aprender, para construir conocimiento: la escritura académica como facilitadora del aprendizaje.

- Función transaccional (la escritura académica como demostración del conocimiento): la escritura que se utiliza para transmitir conocimientos; aquella escritura que, con carácter público, permite comunicar o demostrar a otras personas los conocimientos de que se dispone. Para acceder al conocimiento de la disciplina y superar las dificultades de socialización dentro de una determinada comunidad de discurso, es necesario conocer las convenciones de la escritura transaccional propia de cada ámbito disciplinar. El dominio de la comprensión y de la producción de este tipo de escritura requiere unas estrategias sustancialmente distintas a las necesarias en el dominio de textos más generales.

Existen dos consideraciones a tener en cuenta respecto a estas dos funciones del discurso académico:

- el discurso académico no puede concebirse como una realidad homogénea porque “cada disciplina quizás tenga sus propias convenciones de discurso, reflejo de diferentes epistemologías, lo que da lugar a diversos subgéneros” (Atienza, 1999).

- las funciones representativa y transaccional del discurso académico son complementarias (Britton et al, 1975): la demostración del conocimiento no se puede llevar a cabo de manera satisfactoria si no se ha producido la construcción previa del conocimiento y a la

vez la mejora en las formas de “demostrar por escrito” el conocimiento, mejoran el aprendizaje en sí.

Asumimos entonces que: el discurso académico geométrico es diferente a los discursos académicos de otras disciplinas el discurso académico geométrico cumple una función representativa (la escritura académica como construcción del conocimiento) y una función transaccional (la escritura académica como demostración del conocimiento) por ser estas funciones complementarias: la demostración de conocimiento geométrico a través de discursos académicos geométricos correctos no puede hacerse sin la construcción de los conocimientos involucrados pero a la vez la destreza en la elaboración de discursos académicos geométricos correctos, además de dar cuenta de los conocimientos construidos, contribuye a la construcción de nuevos conocimientos geométricos.

Por estas razones, consideramos importante el análisis de los “discursos académicos geométricos” producidos por los alumnos como parte de la resolución de los problemas geométricos propuestos.

#### **2.4. Como utilizar EVA**

El entorno de aprendizaje diseñado se ha implementado en el marco de la materia optativa “*Taller de Matemáticas*” destinada a alumnos de ESO. Las clases de la asignatura se desarrollan en un aula de Informática, cuyos ordenadores cuentan con un programa de Geometría Dinámica (Cabri), con acceso a Internet y con un navegador.

En el desarrollo de la asignatura, se diferencian tres fases o etapas que deno-

minamos: “*etapa presencial*”, “*etapa correo electrónico*” y “*etapa foro electrónico*”. Dichas etapas, aparecen cronológicamente en el orden en que se han mencionado; no obstante la aparición de una no supone la finalización de la anterior sino que en muchos casos coexisten.

En la primera etapa, “*etapa presencial*”, se trabaja con los alumnos sobre el manejo del entorno interactivo y del software correspondiente. Se apunta a que los alumnos aprendan a utilizar el SGD y el entorno, a través de la resolución de problemas geométricos de diversa índole en cuanto a la complejidad y en cuanto a las temáticas geométricas abordadas. Las actividades, se proponen por escrito y las clases son coordinadas por un “*profesor presencial*”.

En una segunda fase, “*etapa correo electrónico*”, se incorpora a las clases, una nueva figura, la del “*profesor virtual*”, y con él una dinámica de trabajo diferente y la necesidad de manejar no sólo el SGD como parte del entorno de aprendizaje y la Geometría como tema, sino también una manera de comunicación e interacción diferente.

En la tercera etapa, “*etapa foro electrónico*”, la dinámica vuelve a cambiar y las interacciones vuelven a incrementarse dado que las actividades se plantean a través de un foro en el que participan alumnos y profesor.

En estas dos últimas etapas los intercambios están mediados exclusivamente por las TIC; se producen a través del correo electrónico, del foro y de la página Web del Proyecto; lo que supone aprender a utilizar esta nueva herramienta para comunicarse. Esta modalidad comunicativa para la comu-



nicación alumno-profesor y alumno-alumno, incluye tanto las actividades como a sus resoluciones, las consultas de dudas o solicitudes de ayudas, las réplicas y contrarréplicas e incluso los comentarios personales.

### **2.5. Estructura de las actividades.**

Consideramos que atender a la diversidad no consiste en fijar un nivel medio para desarrollar en el curso. sino en plantear un entorno que permita, estratégicamente, que cada alumno desarrolle al máximo sus potencialidades, que cada uno evolucione a partir de su nivel inicial optimizando su aprendizaje; pero todo esto sin perder cierta uniformidad en las temáticas desarrolladas por cada alumno. Para hacer posible el máximo desarrollo de las potencialidades de cada alumno, se han diseñado unas actividades adaptables a cada alumno y que permiten a cada uno desarrollar el máximo nivel de profundidad y complejidad en su resolución. Todos los alumnos parten de un mismo enunciado, planteado para poner en juego determinados conocimientos y procedimientos y que tiende a desarrollar ciertas competencias; de forma progresiva y de acuerdo con las respuestas que va dando el alumno, el enunciado inicial se irá adaptando a cada resolutor. Esta adaptación se logra a través de un sistema de “ayudas progresivas y diversificaciones” (Murillo y Marcos, 2009, pp. 244).

Además, las actividades propuestas a los alumnos a lo largo del Taller, cumplen ciertas condiciones para adaptarse a cada una de las tres etapas del proceso y sus correspondientes modalidades comunicativas, de manera que cada alumno pueda recorrer el “itinerario de resolución” más conveniente.

Pero más allá de esas características para las actividades, hemos asumido ciertos criterios relacionados con el orden en que éstas se presentan, la manera en que se seleccionan a la hora de construir una secuencia didáctica de actividades.

Las actividades que forman parte de cada una de las secuencias propuestas a los alumnos guardan un orden que respecta criterios de complejidad creciente y resulta acorde a los contenidos y objetivos que se pretenden desarrollar. Pero entre unas y otras, se intercalan otras actividades que involucran otros conceptos y procedimientos geométricos; es decir las actividades seleccionadas para el desarrollo y estudio de un núcleo temático no se presentan de manera consecutiva.

### **3.- Test de interacción con EVA en un estudio de casos.**

Hemos evaluado mediante los instrumentos de análisis propuestos para el desarrollo de la Competencia Comunicativa y para el Aprendizaje de la Geometría, las resoluciones llevadas a cabo por tres alumnos seleccionados, en relación a nueve actividades.

En muchos casos, hasta llegar a la versión definitiva de la resolución, los alumnos proponen varias versiones intermedias que a través de la orientación docente de ayudas y diversificaciones de la actividad inicial de tutorización, de las interacciones con los pares y de los propios procesos de reflexión/revisión/control se van mejorando y completando. Estas versiones preliminares, dan cuenta del itinerario de resolución seguido por cada alumno, aportando información relevante en relación al estado de la competencia comu-

nicativa y del aprendizaje de la geometría del alumno en cada momento.

### **3.1. Tareas, participantes y configuración.**

La elección, tanto de los alumnos como de las actividades, cuyas resoluciones se han analizado en un estudio de tres casos. A, B, C, son representativos de distintos rendimientos académicos. La elección de los alumnos a analizar se ha realizado en base a la información académica anterior disponible para cada alumno (notas en general, notas en la asignatura Matemáticas, cantidad de suspensos, concepto de los profesores y tutores en relación a actitudes frente al aprendizaje, capacidades generales y específicas, etc.).

El diseño del instrumento para el análisis del Aprendizaje de la Geometría (AG), ha implicado un proceso de revisión de aportes de diferentes autores en relación a la resolución de problemas (Mason, Burton y Stacey 1988), al aprendizaje de la Geometría (De la Torre 2003, Alsina et al.

1997), al enfoque por competencias (Rico 2006, Cobo y Fortuny, 2005); y a la vez una contextualización de nuestro EVA, teniendo en cuenta algunos aspectos como su formato bimodal, el sistema de “ayudas progresivas y diversificaciones” como estrategia para la atención a la diversidad y la noción de lo que entendemos por “itinerario de resolución” recorrido por el alumno.

Para ejemplificar, expondremos a continuación el análisis de una de las resoluciones propuesta por un alumno representante del caso de nivel medio para una de las actividades de la etapa “correo electrónico”.

### **3.2. Instrumentos y criterios para evaluar los Aprendizaje en Geometría (AG).**

Este proceso se ha analizado con el instrumento para el análisis del Aprendizaje de la Geometría (Murillo, Marcos, 2009, pp. 247) como presentamos en la Tabla I de Análisis del aprendizaje de la Geometría :

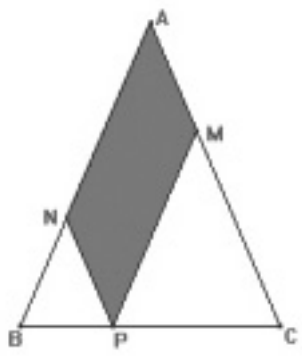
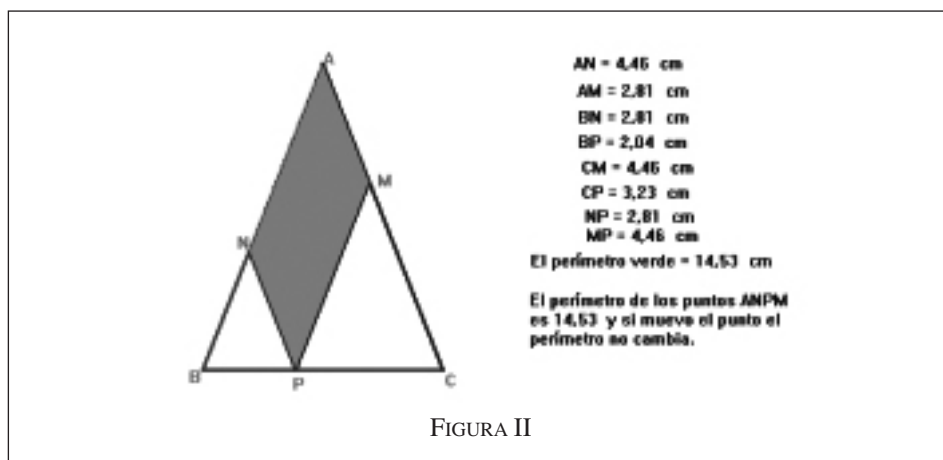
<p><i>Actividad:</i></p> <p>Por un punto del lado desigual BC de un triángulo isósceles ABC traza paralelas a los lados iguales. Se forma así un cuadrilátero PMAN. Toma medidas en el cuadrilátero formado y mueve el punto P. ¿Qué puedes decir del perímetro de PMAN cuando se mueve el punto P? Expresa en forma de teorema lo que observes sobre el perímetro y muestra un razonamiento que lo demuestre. ¿En qué posición del punto P es máxima el área del cuadrilátero? ¿Cuánto vale esa área máxima?</p> <p>Muestra tu razonamiento.</p>	
---	--

TABLA I

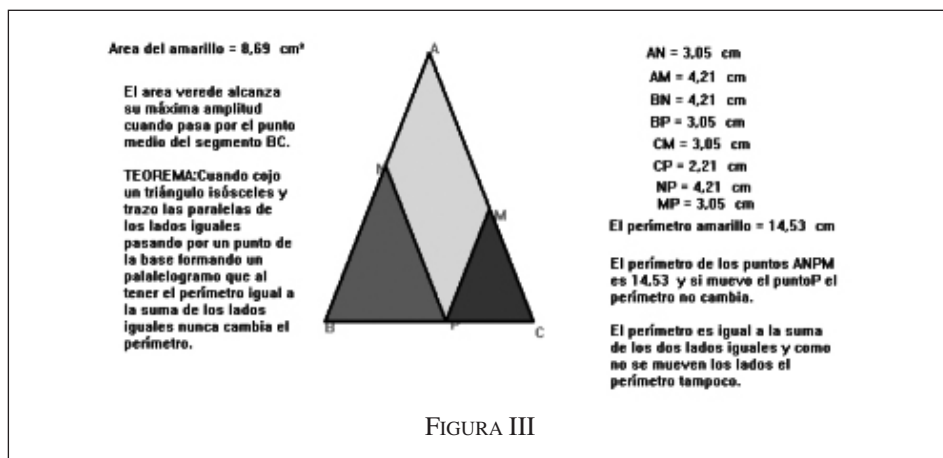
Análisis del Aprendizaje de la Geometría

Primera solución propuesta



**Tutorización (1ª ayuda):** “Lo que dices del perímetro es cierto, por más que movamos el punto P (siempre sobre BC), el perímetro del cuadrilátero no cambia; faltaría que analices porqué ocurre esto y que expreses lo sucedido en forma de teorema. Analiza además, la otra cuestión: ¿En qué posición del punto P es **máxima el área del cuadrilátero**? ¿Cuánto vale esa área máxima? Muestra tu razonamiento”

Segunda solución propuesta



**Tutorización (2ª ayuda):** “Lo que dices está muy bien, el perímetro del cuadrilátero amarillo es igual a la suma de los dos lados iguales del triángulo ABC, faltaría que justificases porqué (¿por que el perímetro del paralelogramo es siempre igual a la suma de los lados iguales?). El teorema que has formulado está bastante bien, pero revisa la manera en que lo has expresado intentando mejorarla para que quede más claro.”

Tercera solución propuesta

El área del amarillo = 8,92 cm<sup>2</sup>

El área amarilla alcanza su máxima amplitud cuando pasa por el punto medio del segmento BC.

TEOREMA: Cuando se hace un triángulo isósceles y se traza las paralelas de los lados iguales pasando por un punto de la base queda formado un paralelogramo que al tener el perímetro igual a la suma de los lados iguales nunca cambia el perímetro.

Esto es la respuesta a la pregunta ¿por que el perímetro del paralelogramo es siempre igual a la suma de los lados iguales?

Se coge el lado NP y se pone en el lugar del lado NB porque miden lo mismo y se cambia el lado MP por el lado MC porque también miden lo mismo porque se han formado aparte de los lados y de las paralelas de los lados y con el triángulo inicial es isósceles y los dos pequeños también son isósceles. Con estos triángulos y con este ejemplo he podido hallar la respuesta.

AN = 3,65 cm  
 AM = 3,62 cm  
 BN = 3,62 cm  
 BP = 2,62 cm  
 CM = 3,65 cm  
 CP = 2,65 cm  
 NP = 3,62 cm  
 MP = 3,65 cm

El perímetro amarillo = 14,53 cm  
 El perímetro de las puntos ANPM es 14,53 y si mueve el punto P el perímetro no cambia.  
 El perímetro es igual a la suma de los dos lados iguales y como no se mueven los lados el perímetro tampoco.

FIGURA IV

**Tutorización (1ª diversificación):** “El razonamiento que propones está muy bien, y es muy claro tu dibujo para explicarlo paso a paso. Respecto al área del cuadrilátero, es cierto que es máxima cuando P coincide con el punto medio de BC, intenta relacionar ese valor máximo con el área del triángulo ABC y justificar lo sucedido.”

Cuarta solución propuesta

El área del amarillo = 8,92 cm<sup>2</sup>  
 El área de ABC = 17,83 cm<sup>2</sup>

El área amarilla alcanza su máxima amplitud cuando pasa por el punto medio del segmento BC.

El área amarilla es la mitad del área de ABC.

Para que el área del amarillo sea máxima, el paralelogramo tiene que ser un rombo para que su anchura sea máxima. Para convertir el amarillo en un rombo tengo que mover P hasta el punto medio de BC.

Esto es la respuesta a la pregunta ¿por que el perímetro del paralelogramo es siempre igual a la suma de los lados iguales?

Se coge el lado NP y se pone en el lugar del lado NB porque miden lo mismo y se cambia el lado MP por el lado MC porque también miden lo mismo porque se han formado aparte de los lados y de las paralelas de los lados y con el triángulo inicial es isósceles y los dos pequeños también son isósceles. Con estos triángulos y con este ejemplo he podido hallar la respuesta.

TEOREMA: Cuando se hace un triángulo isósceles y se traza las paralelas de los lados iguales pasando por un punto de la base queda formado un paralelogramo que al tener el perímetro igual a la suma de los lados iguales nunca cambia el perímetro.

AN = 3,65 cm  
 AM = 3,62 cm  
 BN = 3,62 cm  
 BP = 2,62 cm  
 CM = 3,65 cm  
 CP = 2,65 cm  
 NP = 3,62 cm  
 MP = 3,65 cm

El perímetro amarillo = 14,53 cm  
 El perímetro de las puntos ANPM es 14,53 y si mueve el punto P el perímetro no cambia.  
 El perímetro es igual a la suma de los dos lados iguales y como no se mueven los lados el perímetro tampoco.

FIGURA V

### 3.3 Análisis del progreso cognitivo de los estudiantes resultante de sus interacciones con EVA.

Consideramos que las producciones escritas, a través de las cuales los alumnos utilizan el lenguaje natural como meta-lenguaje para expresar ideas matemáticas –discursos que suelen estar parcialmente

<p><b>Indicador:</b> ¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)</p> <p>Esta fase no aparece en esta actividad.</p>
<p><b>Indicador:</b> ¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?</p> <p><b>Sin ayudas:</b> El alumno propone una estructura geométrica que responde a las condiciones planteadas en el enunciado sin necesidad de ayuda.</p>
<p><b>Indicador:</b> ¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?</p> <p><b>Sin ayudas:</b> El alumno recurre, en los distintos momentos de su resolución, a conceptos y relaciones ya aprendidos como área y perímetro, características de triángulos isósceles y de paralelogramos, punto medio, noción de teorema, comparación de medidas de segmentos.</p>
<p><b>Indicador:</b> ¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?</p> <p><b>Sin ayudas:</b> Para dar respuesta a las cuestiones planteadas por la actividad, el alumno aplica y adapta diversas estrategias; elige las técnicas, propiedades y relaciones que mejor se ajustan a las condiciones dadas: mide y compara perímetros, áreas y segmentos, busca regularidades y relaciones analizando variaciones del modelo que ha construido, distingue los elementos, propiedades y relaciones invariantes de los variables y los elementos relevantes de los irrelevantes.</p>
<p><b>Indicador:</b> ¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?</p> <p><b>Sin ayudas:</b> El alumno reflexiona sobre el proceso propuesto, valida la solución propuesta a través de procesos de visualización, medición, intentos de variaciones sobre la construcción.</p> <p><b>Con ayudas:</b> Las orientaciones del tutor, no obstante, le llevan a reflexionar sobre cuestiones puntuales, indicando por ejemplo qué le falta hacer todavía, pero en ningún caso, las ayudas aportan información adicional respecto a la que se ofrecía en el enunciado original del problema: en este caso la ayuda del tutor no aporta nuevas informaciones, simplemente sugiere la autorreflexión sobre las ideas propuestas por el mismo alumno.</p>
<p><b>Indicador:</b> ¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto?</p> <p><b>Sin ayudas:</b> El alumno comunica de manera clara y coherente, una respuesta que se corresponde con lo solicitado por la actividad y con las diversificaciones propuestas. Realiza además una descripción, utilizando lenguaje verbal, del proceso de resolución del problema geométrico planteado y del razonamiento llevado a cabo para justificar las relaciones involucradas.</p>

<p><b>Indicador:</b> ¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?) Una vez resuelta la actividad inicial, el alumno avanza y es capaz de resolver una diversificación.</p> <p><b>Valoración/ ponderación:</b> Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde</p> <p>Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una <i>Actividad de Tercera clase</i>, que se corresponde con un <i>Nivel 3</i>.</p>
---

TABLA I

ANÁLISIS DEL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA

expresados utilizando términos y notaciones geométricas— son parte de la resolución del problema geométrico propuesto (Figura VI). (tomado de Marcos, 2008, pp. 70).

Entendemos que cuando los alumnos producen este tipo de discursos, desarrollan aprendizaje matemático; en particular cuando los alumnos comunican sus estrategias geométricas en este modo mixto, desarrollan aprendizaje geométrico.

Por esta razón, se incluye el análisis de los discursos escritos producidos por

los alumnos, como parte de la resolución de los problemas geométricos propuestos; discursos en los que los alumnos explican, justifican y describen el procedimiento que han llevado a cabo (competencia comunicativa).

De nuevo, el diseño de este instrumento de análisis ha implicado un proceso de revisión de aportes de diferentes autores en relación a la noción de competencia comunicativa en general y en particular en el ámbito de la Educación Matemática (Canale, 1995), a cuestiones relativas al discurso académico (Atienza,

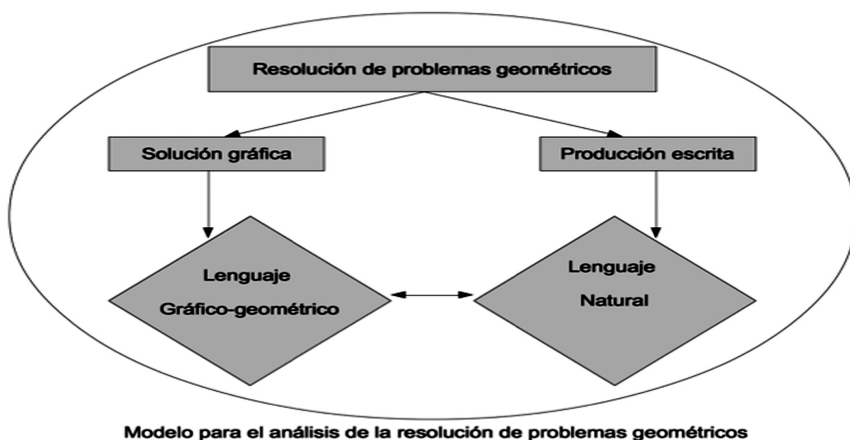


FIGURA VI

1999) y a la vez una contextualización a nuestro EVA. Este complejo proceso de diseño de este instrumento de análisis, también se describe en Murillo y Marcos (2009, p. 249) y Marcos (2008, pp. 69-76).

A continuación mostramos la aplicación de este instrumento de análisis al proceso de resolución anterior.

### 3.4. Evolución producida en los estudiantes en relación al AG y a la CC.

Al aplicar el instrumento diseñado para el análisis del AG, a las resoluciones propuestas por cada uno de los tres alumnos estudiados a lo largo del proceso, hemos obtenido que los tres alumnos han evolucionado

TABLA II

<p><b>Coherencia</b> (<i>componente relativa a la competencia discursiva</i>): para analizar la capacidad de elaborar discursos coherentes en los que no aparezcan contradicciones. Las partes del discurso deben estar conexionadas dando lugar a un mensaje claro, con sentido y completo.</p> <p>Analizamos la coherencia tomando en consideración dos niveles, uno centrado en la propia estructura del discurso (intratextual) y otro tomando en consideración la relación entre la solución gráfica<sup>2</sup> y la producción escrita (extratextual).</p>	<p><b>Análisis Coherencia intratextual:</b></p> <p>El enunciado de la actividad propone encontrar una relación geométrica, para lo cual la construcción adecuada es un requisito. La construcción es realizada con corrección por el alumno (cumpliendo las condiciones indicadas en el enunciado de la actividad) y también se encuentran las condiciones para que el área del cuadrilátero sea máxima y la particularidad que se cumple para el perímetro. En todos los casos, los comentarios son claros, completos y consistentes.</p> <p>En la 1ª versión sólo se explicita la relación hallada para el perímetro de manera correcta y clara, pero no se justifica por qué ocurre.</p> <p>En la 2ª versión, se produce un avance importante y el alumno relaciona ese perímetro constante con las medidas del triángulo inicial (aunque todavía no justifica por qué ocurre); escribe el enunciado del teorema solicitado de manera casi perfecta (incluye las condiciones iniciales que deben cumplirse y la relación que ocurrirá a partir de ellas) salvo por un pequeño fallo en la utilización de los verbos; y encuentra las circunstancias para las cuales el área del cuadrilátero se hace máxima.</p> <p>En la 3ª versión, además de corregir el enunciado de su teorema, el alumno parte de la pregunta formulada por el tutor en la ayuda y explica perfectamente, proponiendo para ellos una secuencia de razonamiento que acompaña de dibujos aclaratorios, por qué el perímetro del cuadrilátero coincide con la suma de los lados iguales del triángulo ABC. En esa explicación, el alumno incluye incluso la justificación de por qué los “triángulos pequeños” resultan isósceles refiriéndose a su construcción mediante paralelas a los lados del triángulo isósceles inicial (esta justificación no suele incluirse por los alumnos a</p>
---	--

	<p>a menos que el tutor lo solicite a través de una diversificación que en este caso no fue necesaria).</p> <p>En la 4ª versión, el alumno relaciona el área máxima del cuadrilátero con la del triángulo ABC y da una explicación intuitiva de porqué el área es máxima en esas condiciones (no se pretendía una demostración de esta relación sino simplemente una explicación intuitiva).</p> <p><b>Análisis Coherencia extratextual</b></p> <p>En todos los casos, la construcción es acorde a las condiciones enunciadas por el problema, y permite el análisis solicitado; existiendo total coherencia entre textos y construcciones.</p>
<p><b>Cortesía y Adecuación</b> (<i>componente relativa a la competencia socio- comunicativa</i>): para analizar el conocimiento de las reglas socioculturales de uso necesarias para llevar a cabo cualquier acto comunicativo.</p> <p>La adecuación se refiere al uso del texto en un contexto concreto de comunicación; que incluye las circunstancias de lugar y tiempo, las características de los destinatarios, la relación que se mantiene con ellos, etc.</p> <p>Es característico de la adolescencia el no diferenciar los distintos registros comunicativos y usarlos indistintamente en los distintos contextos.</p> <p>La cortesía constituye una regla regulativa de la comunicación; en tanto permite evitar conflictos y mantener la armonía en el proceso.</p>	<p><b>Análisis Cortesía y adecuación</b></p> <p>El texto de los mensajes sigue manteniendo la cortesía y la adecuación; se observa un gran avance en la construcción de la relación interpersonal. Se produce un intercambio con el tutor que abarca temas culturales, religiosos, deportivos y geométricos; todos ellos de manera amena e integrada (puede notarse en los textos de correo, la manera en que el alumno se refiere a estos distintos temas, cambiando de uno a otro en los distintos párrafos en los que la geometría aparece como un tema más de conversación).</p> <p>La forma de comunicación a través del correo electrónico de Stefan, siempre respetuosa pero cada vez más extrovertida y predispuesta al intercambio, contrasta con su actitud en las clases (no sólo en las clases de esta materia sino en otras que se han observado), en las que es un alumno de lo más callado, silencioso, los profesores no conocen prácticamente nada de él más que es rumano.</p> <p>Destacamos este aspecto como muy positivo, en el sentido de lograr que el alumno se sienta ante un interlocutor que lo escucha (en realidad lo lee), se interesa por los distintos aspectos de su vida permitiéndole que su cultura, sus costumbres adquieran importancia en el intercambio; sirviendo todo esto además para que el alumno logre una excelente conexión respecto a la materia y sus actividades.</p>



<p><b>Ortografía y Vocabulario</b> <i>(componente relativa a la competencia lingüística):</i> para analizar el código lingüístico propiamente dicho.</p> <p>Con ortografía, hacemos referencia al uso correcto de las palabras y signos auxiliares; con vocabulario, al uso correcto del vocabulario general y específico, tanto por su riqueza (cantidad y valoración de palabras que no son usuales en el lenguaje del alumno) como por su precisión (utilización adecuada de esas palabras, oportunidad de su empleo en el desarrollo de la idea).</p> <p>Estas categorías se refieren no sólo al lenguaje natural en general sino también a las particularidades del lenguaje geométrico.</p>	<p><b>Análisis Ortografía</b></p> <p>Aparecen muy pocos errores de ortografía, faltan algunas tildes (en Se, esta, solo, representara, area, este, arbitro, etc.); pero el uso de las mismas ha mejorado muchísimo.</p> <p>Aparece algunas omisiones de letras o uso de unas en lugar de otras (“pardido” en lugar de partido, “ropa” en vez de rompa), pero dichos errores son más de tipo mecanográfico que ortográficos.</p> <p>Se sigue apreciando el mejor uso de los signos de puntuación (lo que contribuye a la coherencia y claridad del texto).</p> <p>En cuanto al uso del lenguaje geométrico, son adecuadas las notaciones empleadas para los segmentos, puntos, triángulos y cuadriláteros.</p>
	<p><b>Análisis Vocabulario</b></p> <p>El uso del vocabulario general y el geométrico en particular es muy correcto.</p> <p>Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas están bien empleados (área, punto, paralela, triangulo isósceles, perímetro, área, teorema, etc.); la única observación es que hace referencia, por ejemplo, al “perímetro del amarillo” o al “perímetro de los puntos ANPM”, se supone que refiriéndose al “perímetro del polígono amarillo” o al “perímetro del cuadrilátero ANPM”.</p>

<p><b>Creatividad y solución de problemas comunicativos</b>  <i>(componente relativa a la competencia estratégica):</i> para analizar el dominio de estrategias de comunicación, capacidad y creatividad para resolver problemas comunicativos, así como la originalidad de las ideas.</p> <p>La creatividad comunicativa, se refiere a la originalidad de ideas y a la capacidad de resolución de problemas comunicativos.</p> <p>Se trata de determinar cuando un alumno es capaz de resolver situaciones a pesar del desconocimiento de un término específico o el olvido de una definición, proponiendo caminos alternativos y superando ese escollo comunicativo.</p>	<p><b>Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos</b></p> <p>Nuevamente, la construcción propuesta no ofrece dificultades y resulta apropiada para resolver las cuestiones planteadas por la actividad.</p> <p>Se superan los escollos comunicativos que supone la explicitación de las propiedades que justifican las relaciones encontradas.</p> <p>Respecto a la identificación y contextualización de propiedades involucradas, si bien algunas vinieron en respuesta a demandas por parte del profesor; ha mejorado su enunciado, el orden en que se proponen, y la contextualización de las mismas logrando explicitarlas de una forma acorde a la situación del problema que aunque sería mejorable supone un gran avance respecto a lo realizado en actividades anteriores.</p> <p>Destacamos que ha sido de los muy pocos alumnos que ha propuesto un enunciado del teorema que, si bien requirió de una orientación del tutor para ser totalmente claro, resultaba claro y completo; respondiendo a las condiciones necesarias para un enunciado de teorema.</p> <p>Asimismo, ante una pregunta del tutor (“¿por que el perímetro del paralelogramo es siempre igual a la suma de los lados iguales?”); el alumno explicita sus ideas paso a paso, e incluso se ayuda de un esquema que ha improvisado para ilustrar gráficamente su razonamiento.</p>
	<p><b>Valoración/ ponderación</b>                  Discurso correcto (de Nivel 3)</p>

**Análisis de la Competencia Comunicativa**

positivamente, en el sentido de poder resolver actividades cada vez más complejas.

Desde nuestra perspectiva, que considera que aprender Geometría es hacer Geometría, a través de la resolución estratégica de problemas, podemos afirmar que los alumnos han progresado, mostrándose cada vez más competentes para la resolución de este tipo de actividades cada vez

más complejas (como se ejemplifica en la Figura VII con el perfil de AlumnoB).

Al aplicar el instrumento diseñado para el análisis de la CC, a las resoluciones propuestas por cada uno de los tres alumnos estudiados a lo largo del proceso, hemos obtenido que los tres alumnos han progresado en relación al desarrollo de su

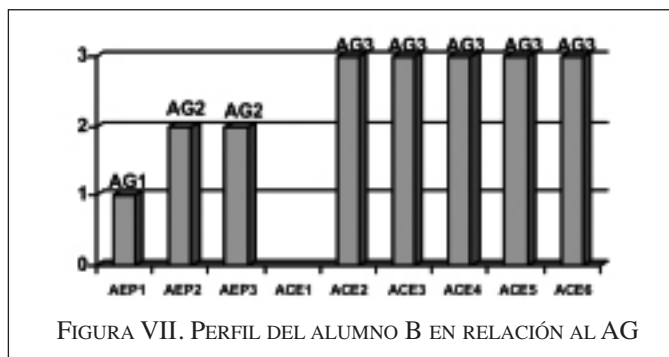


FIGURA VII. PERFIL DEL ALUMNO B EN RELACIÓN AL AG

competencia comunicativa geométrica, dado que los tres han mejorado sus discursos (como se ejemplifica en la Figura VIII con el perfil de AlumnoB).

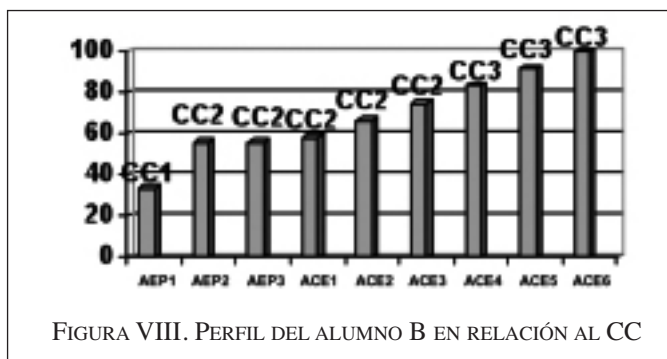


FIGURA VIII. PERFIL DEL ALUMNO B EN RELACIÓN AL CC

NOTA: La notaciones correspondientes a los gráficos son:

AEP (actividad correspondiente a la etapa presencial)

AG: Aprendizaje de la geometría

CC: Competencia comunicativa

Para los tres alumnos se han obtenido progresos notorios en relación al AG y a la CC. Resultados igualmente favorables se han obtenido también en el resto de los

alumnos; hecho que destacamos como una ventaja del diseño del entorno virtual de aprendizaje.

#### **4.- Discusión y conclusiones**

Uno de los principales objetivos de nuestra investigación ha sido: “Analizar los beneficios producidos en los alumnos en relación al desarrollo de la competencia comunicativa matemática”

Mediante la aplicación del instrumento de análisis correspondiente, a resoluciones sucesivas propuestas por algunos alumnos a lo largo del Taller, hemos podido estudiar el proceso y establecer un perfil de evolución correspondiente al desarrollo de la competencia comunicativa por parte de cada uno de los tres alumnos analizados.

##### ***4.1. En relación a la Competencia Comunicativa***

Hemos obtenido que los tres alumnos han progresado en relación al desarrollo de su competencia comunicativa geométrica a lo largo del Taller de Matemáticas, en el sentido de comprender y producir discursos geométricos cada vez más complejos.

En relación a este objetivo, nuestras conclusiones han sido las siguientes:

La comunicación matemática debe constituir un objetivo muy importante y a la vez un contenido fundamental en relación a la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría en la ESO.

Dado que el *discurso académico geométrico* es diferente a los discursos académicos de otras disciplinas y que cumple una *función representativa* (la escritura académica como construcción del conocimiento) y una *función transaccional* (la escritura académica como demostración del conocimiento), funciones complementarias entre sí; consideramos importante tener en cuenta dicho discurso en

todos los procesos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría.

Dichos discursos están en estrecha relación con el AG, puesto que existe una clara conexión entre comunicación y pensamiento, por lo que a medida que los alumnos desarrollan una capacidad de comunicación matemática más clara y coherente, se van convirtiendo en mejores pensadores matemáticos.

Por esta razón, los procesos relacionados con la producción de discursos geométricos deben ser considerados por las investigaciones relativas a dicho aprendizaje; pero también han de tenerse en cuenta en los procesos de enseñanza y aprendizaje relacionados con estas temáticas.

El “escribir de geometría”, constituye una modalidad comunicativa que favorece el desarrollo de la competencia comunicativa matemática y mejora las capacidades geométricas.

En el contexto de esta investigación, el proceso de producción de discursos escritos en los que los alumnos comunican sus ideas y estrategias geométricas relacionadas con la resolución de problemas geométricos, ha contribuido al desarrollo de la competencia comunicativa geométrica y por tanto al pensamiento geométrico; es decir: la producción de discursos se ha constituido en una tarea lingüística con consecuencias matemáticas.

El modelo con formato bimodal (presencial y virtual) para las interacciones ha resultado beneficioso, mejorando la capacidad de comunicación tanto matemática como personal por parte de los alumnos, al darle una dimensión real al proceso.

Cuando la comunicación entre alumnos y con el tutor es virtual, mediada por las

TIC; la producción de discursos escritos juega un rol superador al de “tarea escolar” ya que adquiere una dimensión comunicativa real e imprescindible en las interacciones profesor - alumno y alumno - alumno.

La existencia de esta necesidad comunicativa real generada por la comunicación virtual, cuando es indispensable expresar por escrito tanto las ideas matemáticas como las interacciones personales, se producen mejoras en el proceso de comunicación por parte de los alumnos; en especial en los procedimientos relacionados con la expresión escrita.

El “enfoque comunicativo” y la noción de competencia comunicativa, constituyen nociones sociales recontextualizadas en Educación Matemática que aportan valiosas perspectivas de análisis y potentes herramientas para contribuir a analizar y mejorar los procesos relacionados con la producción de discursos geométricos y el Aprendizaje de la Geometría.

Este enfoque comunicativo, resulta una perspectiva interesante en tanto que resulta coherente con la idea de que aprender Matemáticas consiste en hacer Matemáticas y con el enfoque por competencias, al considerar que el lenguaje se desarrolla a través de su uso; considera que cada espacio curricular, en particular el relacionado con la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría, debe incluir la apropiación de las formas de decir del discurso en que se expresan esos conocimientos.

Asimismo, la noción de CC, resulta una noción apropiada en tanto hace referencia al conjunto de procesos y conocimientos de diverso tipo (lingüísticos, socio-lingüísticos, estratégicos y discursivos) necesarios para la interacción comu-

nicativa, que incluye diversidad de conceptos, estrategias, destrezas cuyo carácter es integrador e interdependiente. Es decir, entiende el aprendizaje de la comunicación como el desarrollo de una competencia cultural formada por capacidades complejas; visión que resulta acorde con nuestra idea de considerar la clase de matemáticas como un sistema complejo en el que las interacciones entre los cuatro polos del sistema educativo (alumno, profesor, conocimiento y medio) producen beneficios en los alumnos que van más allá del contenido matemático en sí mismo y que conciernen dimensiones cognitivas y sociales más amplias.

#### ***4.2. En relación al Aprendizaje de la Geometría***

Otro de nuestros objetivos principales en esta investigación, ha sido: “Analizar los beneficios producidos en los alumnos en relación al Aprendizaje de la Geometría.”

Mediante la aplicación del instrumento de análisis correspondiente, a resoluciones sucesivas propuestas por algunos alumnos a lo largo del Taller, hemos podido estudiar el proceso y establecer un perfil de evolución correspondiente al AG por parte de cada uno de los tres alumnos analizados.

Hemos obtenido así que los tres alumnos han evolucionado positivamente, en el sentido de poder resolver estratégicamente actividades cada vez más complejas según resulta del estudio de su itinerario de resolución recorrido en cada caso.

En relación a este objetivo, nuestras conclusiones han sido las siguientes:

El proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría, puede organizarse a tra-

vés de un modelo para organizar las actividades que permite atender a la diversidad en el aula, adaptando las actividades a cada alumno de manera que cada uno desarrolle al máximo sus potencialidades de aprendizaje y sin perder la coherencia dada por los contenidos geométricos planteados.

A través del sistema de ayudas progresivas y diversificaciones, hemos logrado en cada momento, proponer a los alumnos actividades asequibles pero resistentes; es decir que hemos conseguido graduar la complejidad de cada una de ellas adaptándolas al nivel de cada alumno de manera tal que cada uno pudiera resolverlas pero a la vez encontrar en ellas la resistencia necesaria para poder evolucionar en sus conocimientos anteriores. En la sección 4, hemos presentado un ejemplo que muestra de qué manera un enunciado inicial, común a todos los alumnos, se adapta al nivel de cada estudiante a través de ayudas y diversificaciones.

Así, hemos conseguido dar una respuesta estratégica al problema de la atención a la diversidad, posibilitando que cada alumno desarrolle al máximo sus potencialidades, pero sin perder cierta uniformidad en las temáticas desarrolladas por el total de los alumnos.

Resulta posible y motivador organizar la enseñanza de la Geometría en la ESO a través de un entorno interactivo de aprendizaje que incluya el uso de TIC.

En el Taller de Matemáticas, hemos podido organizar la enseñanza de la Geometría que pretendíamos abordar, a través del entorno interactivo con las características mencionadas anteriormente, encontrando en cada caso actividades apropiadas para desarrollar los contenidos y para cumplir los objetivos que nos habíamos propuesto.

El trabajo en este tipo de entornos puede, como ha ocurrido en este caso, fomentar el interés de los alumnos, despertar su curiosidad, aumentar la confianza en ellos mismos, y generar el deseo de hacer o aprender matemáticas; actitudes indispensables para el aprendizaje.

Si bien, el análisis de la motivación producida no ha sido uno de los objetivos centrales de esta investigación, sí se han registrado indicadores que permiten dar cuenta de ello tales como: el elevado porcentaje de asistencia a clase respecto de otras asignaturas; la puntualidad y operatividad para comenzar a trabajar (encender rápidamente los ordenadores, no esperar directivas ni consignas del profesor presencial, etc.); actitud de trabajo muy activa, autónoma y participativa; elevada nota media obtenida por los alumnos, etc.

#### ***4.3. Relaciones existentes entre el Aprendizaje de la Geometría y el desarrollo de la Competencia Comunicativa***

Otro de los objetivos de esta investigación ha sido: “Analizar la existencia o no de relación entre los progresos en el desarrollo de la CC y los progresos en el AG”

Interpretamos los resultados obtenidos de esta manera: El desarrollo de la CC ha favorecido el aprendizaje de la Geometría, la escritura académica en su función representativa, facilita el aprendizaje (el desarrollo de habilidades escritoras permite una mejor comprensión del contenido geométrico). Pero a la vez, los progresos en relación al AG mejoran la comunicación, porque dan fluidez y seguridad a los procesos de comunicación.

## **Referencias bibliográficas.**

- ALSINA, C., FORTUNY, J. M., y otros. ¿Por qué Geometría? Propuestas didácticas para la ESO. Madrid: Síntesis. 1997.
- ATIENZA, E. Propuesta de evaluación del texto escrito en Enseñanza Secundaria. Tesis Doctoral. UB. 1999.
- BEREITER, C. y SCARDAMALIA, M. Two models of classroom learning using a communal database. En Dijkstra, S.; Krammer, M. y Merriënboer, J. (Eds.), *Instructional models in computer-based learning environments* 1992. (p. 229- 261). Berlin: Springer-Verlag.
- BERNSTEIN, B. *Pedagogy, symbolic control and identity: Theory, research critique*. London: Taylor & Francis. 1996.
- BRITTON, J.; BURGESS, N.; MARTIN, A. et al. *The Development of Writing Abilities*. Londres: MacMillan Education. 1975
- BRUNER, J. *Early Social Interaction and Language Acquisition*. London: Academic Press. 1975.
- CANALE, M. De la competencia comunicativa a la pedagogía comunicativa del lenguaje. En *Competencia comunicativa*. Madrid: Edelsa. 1995.
- COBO, P y FORTUNY, J.M. El sistema tutorial AgentGeom y su contribución a la mejora de las competencias de los alumnos en la resolución de problemas de matemáticas. *Actas del IX Simposio de la SEIEM*. Córdoba: Servicio de publicaciones UCO y SEIEM. 2005.
- DE LA TORRE, E. Didáctica de la geometría y demostración de propiedades. Texto de la ponencia presentada durante el 7º Simposio de la SEIEM. Granada. 2003.
- ERNEST, P. *Social constructivism as a philosophy of mathematics*. New York: SUNY. 1998.
- GUTIÉRREZ, A. Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica. En MAZ, A.; GÓMEZ, B.; TORRALBO, M. (eds.), *Actas del 9º Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, (pp. 27-44). Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba. 2005.
- HYDE, R. “Matemáticas y lenguajes: un estudio sobre la descripción de patrones geométricos por parte de niños”. En *Matemáticas y lenguajes. Perspectivas Lógica, Semiótica, Social y Computacional*. ICME 8, Sevilla: Servicio de Publicaciones de la SAEM Thales. 1996.
- LOMAS, C., OSORO, A. y TUSÓN, A. *Ciencias del lenguaje, competencia comunicativa y enseñanza de la lengua*, Barcelona: Paidós. 1997.
- MARCOS, G. *Un modelo de análisis de competencias matemáticas en un entorno interactivo*. Tesis doctoral. Universidad de La Rioja. 2008.
- MASON, J., BURTON, L. y STACEY, K. *Pensar matemáticamente*. Madrid: Labor-MEC. 1998.
- MEC Decreto de contenidos mínimos para la ESO. RD 1631/2006. BOE Nº 5 del 5/1/2007.
- MORGAN, C. *Writing Mathematically. The Discourse of Investigation*. Londres: Falmer Press. 1998.

- MURILLO, J. Un entorno interactivo de aprendizaje con Cabri-actividades aplicado a la enseñanza de la geometría en la ESO. Tesis doctoral. UAB. 2001.
- MURILLO, J. y MARCOS, G. “Análisis de las competencias geométricas y comunicativas en un entorno interactivo de aprendizaje”. *Revista Enseñanza de las Ciencias*. Aceptado para su publicación. 2008.
- NCTM Principios y Estándares para la Educación Matemática. Traducción y edición realizada por SAEM THALES (Sevilla, 2003). 2000.
- NESHER, P. Posibles relaciones entre lenguaje natural y lenguaje matemático. *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*, 2000, p. 109-124. España: Graó
- PLANAS, N. Nociones sociales recontextualizadas en Educación Matemática: el caso de la competencia comunicativa. *Actas del VI Simposio de la SEIEM*. 2002, p. 175- 185).
- RICO ROMERO, L. Evaluación de competencias matemáticas. Proyecto PISA/OCDE 2003. Investigación en Educación Matemática, 8º Simposio de la SEIEM, pp. 89-102. U. da Coruña. 2004.
- RICO ROMERO, L. Las competencias matemáticas en el informe PISA 2003: el caso de la geometría. II Escuela de Educación Matemática Miguel de Guzmán: En torno a la geometría de Miguel de Guzmán. 2006. Recuperable en: [www.galega.org/emdg/web](http://www.galega.org/emdg/web)
- SFARD, E. A. “Learning Mathematics Through Conversation: Is It as They Say? A Debate, for The Learning of Mathematics” 1997. En NESHER, P. (2000).
- VYGOTSKY, L.S. *Mind and society*. Massachusetts: Harvard University Press. 1978

## **Notas.**

1 No se emplea la expresión “resolución geométrica”, porque entendemos que la resolución geométrica abarca tanto la construcción o solución gráfica como la expresión escrita correspondiente a dicha resolución. Denominamos texto o discurso escrito a dicha producción escrita.

2 Según Lomas, Osoro y Tusón (1997), con la expresión Competencia comunicativa se hace referencia a “el conjunto de procesos y conocimientos de diverso tipo – lingüísticos, socio- lingüísticos, estratégicos y discursivos- que el hablante/ oyente/ escritor/ lector deberá poner en juego para producir o comprender discursos adecuados a la situación y al contexto de comunicación y al grado de formalización requerido”. Este conjunto de habilidades y conocimientos operativos necesarios para interacción comunicativa incluye diversidad de conocimientos, estrategias, destrezas cuyo carácter es integrador e interdependiente. La competencia comunicativa es una competencia cultural que se adquiere mediante la participación en procesos comunicativos reales.