Espacios S - Simétricos

y Espacios Naturalmente Reductivos en Dimensiones Bajas

Colección manuales uex - 72

Teresa
Arias-Marco

72

ESPACIOS S – SIMÉTRICOS
Y ESPACIOS NATURALMENTE REDUCTIVOS
EN DIMENSIONES BAJAS

MANUALES UEX

72

TERESA ARIAS-MARCO

ESPACIOS S – SIMÉTRICOS
Y ESPACIOS NATURALMENTE REDUCTIVOS
EN DIMENSIONES BAJAS

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

2010

ARIAS-MARCO, Teresa
Espacios S-Simétricos y espacios naturalmente reductivos en dimensiones bajas / Teresa Arias-Marco. — Cáceres : Universidad de Extremadura, Servicio de Publicaciones, 2010
292 pp. ; 17 x 24 cm. – (Manuales UEX, ISSN 1135-870-X ; 72)
ISBN 978-84-7723-903-1
1. Matemáticas. 2. Geometría. I. Título. II. Universidad de Extremadura, Servicio de Publicaciones, ed. III. Serie
51(075.8)
514.11(075.8)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

Edita:

Universidad de Extremadura. Servicio de Publicaciones
C/ Caldereros, 2 - Planta 2ª. 10071 Cáceres (España)
Tel. 927 257 041 ; Fax 927 257 046
E-mail: publicac@unex.es
http://www.unex.es/publicaciones

ISSN 1135-870-X
ISBN 978-84-7723-903-1
Depósito Legal M-21.879-2010

Impreso en España - Printed in Spain
Maquetación e infografía: Pedro Cid, S.A. – 914 786 125

AGRADECIMIENTOS

Quisiera dedicar este libro al Dr. Antonio Martínez Naveira, mi director de tesis y amigo a quien deseo expresar mi gratitud y admiración por el entusiasmo que me ha transmitido y por la enorme e incondicional dedicación que me ha prestado. Sin sus seminarios y enseñanzas no habría sido posible la realización de este escrito.

Así mismo, quiero agradecer al Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Valencia las facilidades proporcionadas para poder llevar a cabo este trabajo y su buena acogida.

Además, quisiera expresar mi más sincero agradecimiento a mis padres, hermana y José V. por el gran e inagotable apoyo, confianza y paciencia que han depositado en mí durante todo este tiempo.

ÍNDICE GENERAL

ÍN

DI

CE

ÍN DI CE

ÍNDICE

PRÓLOGO

Es bien conocida la importancia de los espacios simétricos Riemannianos introducidos por E. Cartan en 1951. Sin embargo, como estos espacios son bien conocidos y están completamente estudiados, en las últimas décadas se ha dirigido la atención al estudio de los espacios Riemannianos que los generalizan de manera natural. En particular, los espacios homogéneos naturalmente reductivos y los espacios s-simétricos Riemanniannos son generalizaciones naturales de los espacios simétricos en las que aún quedan problemas abiertos por resolver.

Así, el objetivo de este escrito es facilitar al lector interesado en el estudio de los espacios homogéneos naturalmente reductivos y los espacios s-simétricos, el acceso a la historia de los mismos, a los conocimientos previos necesarios para su comprensión, a los últimos avances realizados en este tipo de espacios Riemannianos y a diversos problemas abiertos. Para ello, el primer capítulo de este libro está dirigido a unificar las definiciones y clarificar los resultados sobre los definitivamente denominados espacios s – simétricos, y en el segundo capítulo se estudia el problema de la clasificación de los mismos. Los dos últimos capítulos del libro están dedicados al estudio de los espacios naturalmente reductivos y al problema de su clasificación.

INTRODUCCIÓN

Como una generalización natural de los espacios simétricos Riemannianos, los espacios homogéneos naturalmente reductivos han sido estudiados por numerosos autores. Así, D'Atri y Ziller en [D'A-Z] han desarrollado una teoría general con muchos ejemplos y D'Atri y Nickerson han probado que todos los espacios naturalmente reductivos son espacios cuyas simetrías locales geodésicas conservan el volumen, [D'A], [D'A-Ni].

Otros autores, han dirigido su atención al estudio de la relación existente entre los espacios naturalmente reductivos y los espacios Riemannianos Conmutativos (en el sentido de I. M. Gelfand), que también generalizan a los espacios simétricos. Para estudiar su geometría, estos comenzaron realizando la clasificación de los espacios naturalmente reductivos en dimensiones bajas. Así, los espacios naturalmente reductivos de dimensión tres han sido clasificados por F. Tricerri y L. Vanhecke en [T-V]. Además, O. Kowalski en [K.4] encontró la misma clasificación, aunque en un contexto diferente, y además, probó que los espacios naturalmente reductivos y los espacios conmutativos forman la misma clase en dimensión tres. Por otra parte, O. Kowalski y L. Vanhecke en [K-V.1] y [K-V.2] obtienen la clasificación de los espacios naturalmente reductivos y de los espacios conmutativos en dimensión cuatro, donde de nuevo, se ve que ambas clases vuelven a ser la misma.

En [K-V.3] los mismos autores dan una clasificación (local) de los espacios naturalmente reductivos de dimensión cinco y, además, prueban que todo espacio naturalmente reductivo de dimensión cinco es un espacio conmutativo en el sentido de I. M. Gelfand. Este hecho, da una nueva evidencia de que la conjetura general "*Todo espacio naturalmente reductivo es un espacio de*

Gelfand", es cierta. Sin embargo, el recíproco de esta conjetura no es cierto debido a la existencia de un grupo de Heisenberg generalizado, el cual es un espacio de Gelfand de dimensión seis pero no un espacio naturalmente reductivo, [T-V], [Ka].

Este último artículo citado de O. Kowalski y L. Vanhecke motivó a la autora en [AM] a atacar el problema de la clasificación los espacios homogéneos naturalmente reductivos de dimensión seis pero, aunque se han realizado ciertos avances en esta dirección el problema sigue abierto y, evidentemente, la obtención de esta clasificación permitirá profundizar en el estudio de las propiedades geométricas de los diversos ejemplos de variedades que se obtengan.

El cuarto capítulo de este libro está dedicado a exponer con todo detalle los avances realizados en esta dirección. Sin embargo, para realizar esta clasificación es necesario el conocimiento de diversas técnicas utilizadas no sólo en [K-V.3] sino también en [K.2]. Por ello, estos dos artículos han sido minuciosamente estudiados respectivamente en los capítulos tercero y segundo de este escrito.

Por otra parte, para comprender las técnicas utilizadas en la obtención de la clasificación de los espacios s – simétricos de dimensión ≤ 5 desarrollada en [K.2], es necesario el conocimiento previo de algunos resultados sobre espacios s – simétricos.

Por este motivo, siguiendo A. J. Ledger, M. Obata, P. J. Graham y O. Kowalski en [L], [L-O], [G-L] y [K.1] ha sido desarrollado el primer capítulo de este libro donde se unifican las definiciones y se clarifican los resultados sobre los definitivamente denominados espacios s-simétricos.

Más explícitamente, siguiendo la teoría de los espacios simétricos Riemannianos generalizados, dada por A. J. Ledger en [L], los cuales forman una clase más general que los espacios simétricos de E. Cartan, fueron definidas las s – variedades afines y Riemannianas por A. J. Ledger y M. Obata en [L-O]. Más tarde, P. J. Graham y A. J. Ledger en [G-L], previa modificación de la definición de s – variedad afín, definieron las s – variedades regulares como una clase especial de las s – variedades.

Así, a lo largo del primer capítulo, se enuncian todos estos conceptos junto con algunas de sus propiedades, con el objetivo de conocer las s – variedades Riemannianas regulares que O. Kowalski usó para definir los espacios simétricos Riemannianos generalizados o espacios s – simétricos en [K.1] y cuya clasificación dada en [K.2] se analiza en el segundo capítulo de este libro.

Por otra parte, para poder comprender las técnicas utilizadas en dicha clasificación son especialmente necesarios los apartados dedicados en el primer capítulo al tratamiento algebraico de las s – variedades y al estudio de los sistemas de valores propios.

En el primero de ellos, es muy importante la obtención del teorema de existencia

> *"Cualquier s – variedad algebraica es el tipo algebraico de una única simplemente conexa s – variedad Riemanniana regular".*

así, como su demostración dada en [K.1], y en la cual, se usa la construcción del álgebra de Nomizu [N] esencial tanto para la obtención de la clasificación de los espacios s – simétricos de dimensión ≤ 5 dada en [K.2], como para la obtención de la clasificación de los espacios naturalmente reductivos cinco dimensionales dada en [K-V.3]. También, destacar en este apartado la obtención del resultado:

> *"Una s – variedad Riemanniana regular simplemente conexa es reducible, si y sólo si, su tipo algebraico es reducible".*

que junto con el apartado dedicado al estudio de los sistemas de valores propios en el cual se enuncian entre otros, los resultados

> *"Todo espacio s – simétrico simplemente conexo surge de un sistema de valores propios maximal",*

> *"Cada espacio s – simétrico obtenido a partir del producto interior positivo* g_o *y los tensores* S_o, $\widetilde{T}_o$ *de tipo (1,1) y (1,2) respectivamente, puede también ser obtenido a partir del sistema de valores propios* $(\Theta_1', \ldots, \Theta_n')$ *asociado a* S_o*".*

y

> *"Cada s – variedad algebraica, tal que* S_o *tenga un sistema de valores propios reducible, es reducible"*

permite probar que

> *"Cada espacio s – simétrico simplemente conexo, que procede de un sistema de valores propios reducible, es reducible"*

así, se podrá restringir y, por tanto, simplificar la búsqueda de la clasificación dada en [K.2] de forma considerable.

A la hora de abordar el problema de la clasificación de los espacios s – simétricos es posible seguir las dos líneas siguientes:

A) Dado un orden k, encontrar todos los espacios s – simétricos de ese orden.

B) Dada una dimensión n, encontrar en esa dimensión todos los espacios s – simétricos.

Para resolver el problema indicado en B), lo más natural es comenzar con la dimensión $n = 2$ donde, se sabe que los espacios s – simétricos son los espacios simétricos Riemannianos. Así, todo espacio s – simétrico de dimensión 2 tiene orden $k = 2$ y por tanto, es un espacio simétrico en el sentido de E. Cartan cuya clasificación ya es conocida; por ello, estos espacios no son considerados en la clasificación estudiada por O. Kowalski en [K.2], la cual es desarrollada en el segundo capítulo de este libro y proporciona la solución al problema B) para las dimensiones $n = 3$, 4 y 5. En particular, se obtiene un único tipo de espacio s – simétrico de orden cuatro en dimensión tres, un único tipo de espacio s – simétrico de orden tres en dimensión cuatro y, nueve tipos de espacios s – simétricos en dimensión cinco, de los cuales ocho son de orden cuatro y uno es de orden seis.

Así, los tres primeros apartados del segundo capítulo de este libro se han dedicado al desarrollo y estudio de las técnicas utilizadas para la obtención de la citada clasificación, centrándonos principalmente, en el método aplicado para obtener la variedad homogénea correspondiente del espacio s – simétrico buscado, que será de gran utilidad en el tercer capítulo.

Para dar consistencia a la lista de la clasificación aquí enunciada, es conveniente poder afirmar que

> *“Dos espacios excepcionales pertenecientes a tipos distintos son no isométricos y, además, en cada tipo los parámetros correspondientes a la métrica Riemanniana son invariantes infinitesimales”.*

Por ello, el cuarto apartado del segundo capítulo de este libro se ha dedicado a la demostración de esta afirmación.

Para finalizar este segundo capítulo y como aplicación del estudio realizado en los apartados anteriores, se prueba que es cierta la conjetura enunciada en [K.1]

> *“Existen s – estructuras no paralelas sobre variedades simétricas Riemannianas”.*

En efecto, para probar que esta conjetura es cierta es necesario analizar los distintos espacios s – simétricos de dimensión 2, 3, 4 y 5 con el fin de encontrar algún ejemplo.

El tercer capítulo, dedicado al estudio de [K-V.3], consta de cinco apartados donde, primero se recordarán ciertas definiciones y resultados relativos de espacios homogéneos reductivos y naturalmente reductivos, posteriormente se desarrollará la clasificación y, finalmente, se probará la conmutatividad de cada uno de los espacios de la lista de la clasificación.

Para la obtención de dicha clasificación, primero se clasifican las estructuras algebraicas, abstractas y naturalmente reductivas $\tilde{R}$, $\tilde{T}$ y g sobre un espacio vectorial V de dimensión 5, obteniendo un número finito de tipos. Entonces, eliminando los casos descomponibles que vayan apareciendo a lo largo de la demostración, así como los casos en los que se obtendría un espacio simétrico y, procediendo sobre cada tipo como se indica en los dos primeros apartados, se obtienen cuatro tipos distintos de familias de espacios naturalmente reductivos.

El objetivo del quinto apartado es probar la conmutatividad de los distintos tipos de familias de espacios obtenidos. Para ello, se realiza un breve resumen de los conceptos teóricos necesarios acerca de espacios conmutativos y se indica la metodología a seguir. Además, para profundizar en la comprensión de la teoría aquí utilizada, siguiendo [H.2] se han desarrollado algunos conceptos sobre Operadores Diferenciales en el Anexo A.

En el cuarto y último capítulo, se clasifica la estructura abstracta y naturalmente reductiva $\tilde{T}$ sobre un espacio vectorial de dimensión seis que, según el método seguido en el capítulo anterior, es el primer paso a seguir para demostrar el Teorema de Clasificación buscado.

Así, teniendo en cuenta los conceptos teóricos utilizados en dicho capítulo y, eliminando los casos descomponibles que vayan apareciendo a lo largo de la demostración, así como los casos en los que se obtendría un espacio simétrico, se obtienen seis tipos distintos de estructuras abstractas y naturalmente reductivas $\tilde{T}$ sobre un espacio vectorial de dimensión seis.

Por otra parte, es bien conocido que en dicha clasificación debe aparecer la variedad bandera $U(3)/U(1)\times U(1)\times U(1)$, que admite una estructura nearly-kaehler, según la terminología de los especialistas en geometría casi-Hermítica. En efecto, es bien sabido que esta variedad es un espacio homogéneo naturalmente reductivo de dimensión seis y a su vez, un espacio s – simétrico de orden tres. Para realizar un análisis más pormenorizado de las propiedades geométricas de esta variedad se puede consultar la siguiente bibliografía, [B-U], [G.1], [G.2], [Wo-G.1], [Wo-G.2].

1. NOCIONES SOBRE ESPACIOS S – SIMÉTRICOS

Siguiendo la teoría de los espacios Simétricos Riemannianos generalizados, dada por A. J. Ledger en [L], los cuales forman una clase más general que los espacios simétricos de E. Cartan, fueron definidas las s – variedades afines y Riemannianas por A. J. Ledger y M. Obata en [L-O]. Más tarde, P. J. Graham y A. J. Ledger en [G-L], previa modificación de la definición de s – variedad afín, definieron las s – variedades regulares como una clase especial de las s – variedades.

A lo largo de este capítulo, se recordarán todos estos conceptos, así como algunas de sus propiedades, pero nuestro objetivo será conocer las s – variedades Riemannianas regulares, ya que O. Kowalski [K.1] usó este último concepto para definir los espacios Simétricos Riemannianos generalizados o espacios s – simétricos, y así, en el siguiente capítulo poder analizar su clasificación.

Los apartados dedicados al tratamiento algebraico de las s – variedades y al estudio de los sistemas de valores propios, serán especialmente necesarios para poder comprender las técnicas utilizadas en dicha clasificación.

1.1. S – VARIEDADES

Para cualquier variedad Riemanniana (M,g), se denotará por $\boldsymbol{\mathfrak{I}(M)}$ el grupo de Lie de todas las isometrías de (M,g) en sí misma. Una isometría, $s_x \in \mathfrak{I}(M)$, para la cual $x \in M$ es un punto fijo aislado, se denominará **simetría Riemanniana en *x*.** Un punto $x \in M$, es un **punto fijo aislado de una simetría** s_x, si y sólo si, s_x

induce sobre el espacio tangente T_xM en x una transformación ortogonal $S_x = (s_x)_{*x}$, la cual no tiene vectores invariantes (salvo el vector nulo).

Definición 1.1.1

Una **s – variedad Riemanniana** es una variedad Riemanniana (M,g) junto con una aplicación $s\colon M \to \mathfrak{I}(M)$, tal que para cada $x \in M$ la imagen s_x es una simetría Riemanniana en x.

Notar que no se ha supuesto ninguna hipótesis de continuidad sobre s y además debido a F. Brickell, se tiene la siguiente propiedad sobre el grupo de isometrías, cuya demostración puede ser vista en [L–O].

Teorema 1.1.2

El grupo de todas las isometrías sobre una s – variedad Riemanniana es transitivo.

Para cualquier variedad afín (M, ∇), $\boldsymbol{A(M, \nabla)}$ denotará el grupo de Lie de todas las transformaciones afines de (M, ∇) en si mismo.

Definición 1.1.3

Una transformación afín $s_x \in A(M, \nabla)$, para la cual $x \in M$ es un punto fijo aislado, se denominará **simetría afín en x.**

Definición 1.1.4

Una **s – variedad afín** es una variedad afín (M, ∇) junto con una aplicación $s\colon M \to A(M, \nabla)$ tal que,

i) para cada $x \in M$, la imagen s_x es una simetría afín en x,

ii) el campo tensorial $\boldsymbol{S}$, definido mediante la relación $S_x = (s_x)_{*x}$, es diferenciable. Así, S es un campo tensorial diferenciable de tipo $(1,1)$.

Nota 1.1.5

Análogamente, se define el campo tensorial S sobre una s – variedad Riemanniana, aunque en este caso no tiene porque ser diferenciable. Tanto sobre s – variedades Riemannianas como afines, se dirá que S es el **campo tensorial de la simetría.**

Nota 1.1.6

Una transformación afín (resp. isometría) $\phi\colon M \to M$ es una simetría afín (resp. Riemanniana) en $x \in M$, punto fijo de ϕ, si y sólo si, la diferencial $\phi_{*x} : T_xM \to T_xM$ no tiene el 1 como valor propio.

El resultado análogo al Teorema 1.1.2 es probado en [L-O] bajo la hipótesis de que la aplicación $s\colon M \to A(M,\nabla)$ sea diferenciable. Sin embargo, en [G-L] se observa que ese resultado puede ser extendido a la definición aquí dada, en la cual no se ha tenido en cuenta dicha hipótesis.

Teorema 1.1.7

El grupo de todas las transformaciones afines sobre una s – variedad afín es transitivo.

La siguiente definición fue introducida en [L] bajo la hipótesis de que la aplicación $s\colon M \to \mathfrak{T}(M)$ fuese diferenciable, sin embargo aquí, siguiendo [L–O], no se tendrá en cuenta esta hipótesis.

Definición 1.1.8

Una simetría s_x se denominará **simetría de orden *k* en *x*,** si k es el menor entero positivo tal que $s^k_x = Id.$, así, una ***s* – variedad Riemanniana de orden *k*** es una s – variedad Riemanniana con una simetría de orden k en cada punto.

Observar que una s – variedad Riemanniana de orden 2 no es más que un espacio simétrico en el sentido ordinario.

Nota 1.1.9

Sea M una s – variedad Riemanniana de orden $k > 1$, donde además, la aplicación $s\colon M \to \mathfrak{T}(M)$ es diferenciable. Así, el campo tensorial S satisface la ecuación $S^k = Id.$ y, por tanto, los valores propios de S son las raíces k-ésimas de la unidad. Debido a que S es continua, se obtiene que cada raíz debe ser constante sobre M. Por otra parte, puesto que S es real, los valores propios aparecen como pares de números conjugados, excepto para el valor propio -1, si existe. Por ello, en cada punto x de M se tiene una única descomposición de T_xM como suma directa de espacios propios:

$$T_xM = T_{(x,\,-1)}M \oplus T_{(x,1)}M \oplus \cdots \oplus T_{(x,r)}M$$

donde $T_{(x,-1)}M$, denota el espacio propio correspondiente al valor propio -1 y $T_{(x,j)}M$, $1 \le j \le r$, son los espacios propios correspondientes a los valores propios $Cos\,\Phi_j \pm i\ Sen\,\Phi_j$.

Además, si k es impar, no se tiene el valor propio real -1.

Nota 1.1.10

Sea M una s – variedad Riemanniana de orden k, tal que los únicos valores propios del campo tensorial S son θ (no real) y su conjugado $\overline{\theta}$. Entonces, M es un espacio localmente simétrico ó $k = 3$.

1.2. S – VARIEDADES REGULARES

El objetivo de este apartado será, siguiendo [G-L], conocer algunas propiedades de las *s* – variedades regulares. Para ello, se comenzará con su estudio local, resaltando los teoremas que generalizan, en términos de campos tensoriales, la condición $\nabla R = \nabla T = 0$ para los espacios localmente simétricos [K-N]. El paso esencial para conseguir estos resultados es la introducción de una segunda conexión para la cual, los correspondientes campos tensoriales torsión y curvatura son paralelos. Seguidamente, se realizará el estudio global, donde se verá que cada *s* – variedad regular tiene asociado un campo tensorial *S* de tipo (*1,1*), el cual se correspondería con –*I* en el caso de estar en un espacio simétrico y, además, que el grupo de las transformaciones afines (o Riemannianas), que conserva *S*, es transitivo. Para terminar, se resaltarán algunos teoremas que relacionan los estudios local y global.

1.2.1. S – Variedades Afines y Riemannianas localmente regulares

En primer lugar se aclararán algunas notaciones utilizadas en el resto del subapartado.

Dados *p*, *q* enteros no negativos, se denota por *F*(*M*) el anillo de las funciones diferenciables valuadas reales sobre *M* y por $\Im^{(p,q)}(M)$ el módulo sobre *F*(*M*) de todos los campos tensoriales diferenciables de orden contravariante *p* y orden covariante *q*. Así, en particular se tiene que $\Im^{(0,0)}(M) = F(M)$. Además, si

$$\Im(M) = \sum_{p,q=0}^{\infty} \Im^{(p,q)}(M)$$

y $\mathfrak{D}(M)$ denota el álgebra de Lie de todas las derivaciones de grado cero actuando sobre $\Im(M)$, se tiene que la subálgebra de las derivaciones que anulan *F*(*M*); es decir, las derivaciones que actúan como endomorfismos sobre cada espacio tangente T_xM, se identifica con $\Im^{(1,1)}(M)$.

Finalmente, si ∇ es una conexión afín sobre *M* y $P \in \Im^{(p,q)}(M)$ entonces, ∇P se define mediante

$$(\nabla P)(w^1,\ldots,w^p,X_1,\ldots,X_q,X) = (\nabla_X P)(w^1,\ldots,w^p,X_1,\ldots,X_q)$$

para todo $w^1,\ldots,w^p \in \Im^{(0,1)}(M)$ y $X_1,\ldots,X_q \in \Im^{(1,0)}(M)$.

Definición 1.2.1.1

Una ***s* – variedad afín (resp. Riemanniana) localmente regular** es una variedad afín (resp. Riemanniana) *M* junto con una aplicación *s*, definida sobre *M*, con las siguientes propiedades:

i) Para cada $x \in M$, s_x es una simetría local en x, es decir, existen U, V entornos de x, tal que s_x: $U \to V$ es una transformación afín (resp. isometría) para la cual, x es un punto fijo aislado;

ii) Sea S el campo tensorial definido sobre M mediante

$$S_x = (s_x)_{*x}, \text{ para todo } x \in M.$$

Entonces, S es localmente s – invariante, es decir, para cada $x \in M$, existe W entorno de x tal que

$$(s_x)_*(SX) = S((s_x)_* X), \text{ para todo } X \in \Im^{(1,0)}(W).$$

iii) $S \in \Im^{(1,1)}(M)$.

Nota 1.2.1.2

Se dirá que la variedad afín (resp. Riemanniana) M admite una **s – estructura localmente regular**, si M junto con s es una s – variedad afín (resp. Riemanniana) localmente regular. Por ejemplo, un espacio localmente simétrico afín o Riemanniano (de Cartan) admite una s – estructura localmente regular, definida mediante las familias de simetrías geodésicas que en particular son simetrías locales de orden 2 en cada punto. En este caso $S = -I$ donde, I es el campo tensorial identidad.

A continuación, se resaltarán algunos lemas necesarios para probar los teoremas que generalizan, en términos de campos tensoriales, la condición $\nabla R = \nabla T = 0$ para los espacios localmente simétricos, es decir, dan definiciones equivalentes a la Definición 1.2.1.1.

Definición 1.2.1.3

Dados $A \in \Im^{(1,1)}(M)$ y $P \in \Im^{(p,q)}(M)$, $p + q > 0$. Se dirá que **P es A – invariante** si para todo $w^1,\dots, w^p \in \Im^{(0,1)}(M)$ y $X_1,\dots, X_q \in \Im^{(1,0)}(M)$,

$$P(w^1A,\dots, w^pA, X_1,\dots, X_q) = P(w^1,\dots, w^p, AX_1,\dots, AX_q),$$

donde, si $w \in \Im^{(0,1)}(M)$ y $X \in \Im^{(1,0)}(M)$, wA viene definido por

$$(wA)X = w(AX).$$

En particular, si $P \in \Im^{(1,q)}(M)$, entonces P es A – invariante, si y sólo si, para todo $X_1,\dots, X_q \in \Im^{(1,0)}(M)$,

$$A(P(X_1,\dots, X_q)) = P(AX_1,\dots, AX_q).$$

Lema 1.2.1.4

Sea (M,∇) una variedad afín y se supone dado $A \in \mathfrak{I}^{(1,1)}(M)$ tal que, sobre cada espacio tangente T_xM el endomorfismo A_x no tiene ni el valor propio 0 ni el valor propio 1. ∇^* será la conexión afín sobre M, definida de la forma siguiente:

$$\nabla^*_X Y = \nabla_X Y - (\nabla_{(I-A)^{-1}X} A)\, A^{-1}Y, \text{ para todo } X, Y \in \mathfrak{I}^{(1,0)}(M).$$

Se prueba fácilmente que si P y ∇P son campos tensoriales A – invariantes, entonces $\nabla^* P = 0$.

Nota 1.2.1.5

Para simplificar la notación, se define $\mathcal{D} \in \mathfrak{I}^{(1,2)}(M)$ como

$$\mathcal{D}_X Y = \mathcal{D}(X,Y) = (\nabla_{(I-A)^{-1}X} A)\, A^{-1}Y, \text{ para todo } X, Y \in \mathfrak{I}^{(1,0)}(M).$$

Así, ∇^* queda definida por la siguiente expresión:

$$\nabla^*_X Y = \nabla_X Y - \mathcal{D}_X Y, \text{ para todo } X, Y \in \mathfrak{I}^{(1,0)}(M).$$

Lema 1.2.1.6

Si ∇A y $\nabla^2 A$ son A - invariantes, entonces $\mathcal{D}$ y $\nabla\mathcal{D}$ son A - invariantes.

Lema 1.2.1.7

Sea (M,∇) una s – variedad afín localmente regular con campo tensorial de simetría S y sea $\mathcal{D}$ el campo tensorial definido por

$$\mathcal{D}_X Y = (\nabla_{(I-S)^{-1}X} S)\, S^{-1} Y, \text{ para todo } X, Y \in \mathfrak{I}^{(1,0)}(M).^1$$

Entonces, los campos tensoriales R, ∇R, T, ∇T, ∇S, $\nabla^2 S$, $\mathcal{D}$ y $\nabla\mathcal{D}$ son localmente s – invariantes; es decir, para cada $x \in M$, éstos son invariantes bajo la acción de s_x sobre algún entorno de x.

Lema 1.2.1.8

Sean (M,∇) una s – variedad afín localmente regular y P un campo tensorial sobre M.

i) Si P es S – invariante y paralelo entonces, es localmente s – invariante.
ii) Si P es localmente s – invariante entonces, es S – invariante.

En particular, siguiendo la notación del lema anterior, se tiene que los campos tensoriales R, ∇R, T, ∇T, ∇S, $\nabla^2 S$, $\mathcal{D}$ y $\nabla\mathcal{D}$ son S – invariantes.

---

[1] Notar que S es invertible ya que para cada $x \in M$, s_x es una transformación local afín y, que $I - S$ también es invertible debido a la Nota 1.1.6. Por tanto, $\mathcal{D}$ existe y está bien definido.

Lema 1.2.1.9

Sean ∇ y ∇^* conexiones afines sobre M tales que el campo tensorial $\mathcal{D}$, definido por la relación $\mathcal{D}_X Y = \nabla_X Y - \nabla^*_X Y$, satisface $\nabla^* \mathcal{D} = 0$. Entonces, para todo $X, Y \in \mathfrak{I}^{(1,0)}(M)$,

$$T^*(X,Y) = T(X,Y) + \mathcal{D}_Y X - \mathcal{D}_X Y,$$

y

$$R^*(X,Y) = R(X,Y) - [\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_Y] - \mathcal{D}_{T^*(X,Y)}.$$

Lema 1.2.1.10

Sean (M,∇) una s – variedad afín localmente regular con $\mathcal{D}$ definida como en el lema 2.2.1.7 y ∇^* la conexión afín definida por

$$\nabla^*_X Y = \nabla_X Y - \mathcal{D}_X Y, \text{ para todo } X, Y \in \mathfrak{I}^{(1,0)}(M).$$

Entonces, (M,∇^*) es una s – variedad afín localmente regular sobre la cual, $\nabla^* P = 0$ para cualquier campo tensorial P localmente s – invariante. En particular,

$$\nabla^* R = \nabla^* T = \nabla^* S = \nabla^* \mathcal{D} = \nabla^* T^* = \nabla^* R^* = 0.$$

Haciendo uso de los anteriores lemas, se obtiene el siguiente teorema (ver [G-L]) que proporciona definiciones equivalentes y más manejables, que la Definición 1.2.1.1 en el caso afín.

Teorema 1.2.1.11

Las siguientes definiciones son equivalentes:

i) (M,∇) es una s – variedad afín localmente regular con campo tensorial de simetría S ;

ii) (M,∇) es una variedad afín sobre la cual existe una conexión afín ∇^*, tal que

a) (M,∇^*) es una s – variedad afín localmente regular con campo tensorial de simetría S,

b) el campo tensorial $\mathcal{D}$, definido por la relación $\mathcal{D}_X Y = \nabla_X Y - \nabla^*_X Y$, es S – invariante,

c) $\nabla^* \mathcal{D} = \nabla^* T^* = \nabla^* R^* = 0$;

iii) (M,∇) es una variedad afín sobre la cual existe un campo tensorial $S \in \mathfrak{I}^{(1,1)}(M)$ tal que:

a) S e $I - S$ son invertibles.

b) Los campos tensoriales, R, ∇R, T, ∇T, ∇S y $\nabla^2 S$ son S – invariantes.

En el caso Riemanniano se tiene un teorema análogo al anterior, que es el siguiente:

Teorema 1.2.1.12

Las siguientes definiciones son equivalentes:

i) (M, g) es una s – variedad Riemanniana localmente regular con campo tensorial de simetría S ;

ii) (M, g) es una variedad Riemanniana sobre la cual existe una conexión afín ∇^* tal que

a) (M, ∇^*) es una s – variedad afín localmente regular con campo tensorial de simetría S,

b) g es S – invariante,

c) $\nabla^* g = \nabla^* T^* = \nabla^* R^* = 0$;

iii) (M, g) es una variedad de Riemann sobre la cual existe un campo tensorial $S \in \Im^{(1,1)}(M)$ tal que:

a) $I - S$ es invertible.

b) Los campos tensoriales g, R, ∇R, ∇S y $\nabla^2 S$ son S – invariantes[2].

Notar que si $S = -I$, entonces el Teorema anterior se reduce a:

Teorema 1.2.1.13

Un espacio Riemanniano es localmente simétrico, si y sólo si, $\nabla R = 0$.

Demostración

En un espacio Riemanniano localmente simétrico (M, g), se sabe que $S = -I$.

Por tanto, el operador $\mathcal{D}$ es 0 ya que,

$$\mathcal{D}_X Y = (\nabla_{(I-S)^{-1}X} S)\, S^{-1} Y = (\nabla_{(2I)^{-1}X}(-I))\,(-I)^{-1} Y = (\nabla_{\frac{1}{2}IX} I) IY = \frac{1}{2}(\nabla_X I) Y = 0$$

para todo X, $Y \in \Im^{(1,0)}(M)$.

Y, como la conexión afín ∇^* viene definida por

---

[2] ∇ simboliza la conexión Riemanniana de g. Por tanto, $\nabla T = 0$.

$$\nabla^*_X Y = \nabla_X Y - \mathcal{D}_X Y, \text{ para todo } X, Y \in \mathfrak{I}^{(1,0)}(M),$$

se tiene que $\nabla^* = \nabla$. Aplicando esto en el apartado ii) c) del Teorema 1.2.1.12, se obtiene $\nabla g = \nabla T = 0$ (resultado ya conocido debido a que ∇ es la conexión de Levi-Civita) y $\nabla R = 0$.

Debido al Teorema 1.2.1.11 y al Teorema 7.7 de [K-N, Capítulo VI], se tiene el siguiente resultado, cuya prueba puede verse en [G-L]:

Teorema 1.2.1.14

Sea (M,∇) (resp. (M,g)) una s – variedad afín (resp. Riemanniana) localmente regular. Entonces, (M,∇) (resp. (M,g)) y el campo tensorial de simetría S son analíticos.

1.2.2. s – Variedades Afines y Riemannianas Regulares

Definición 1.2.2.1

Una ***s* – variedad Riemanniana regular *M*** es una s – variedad Riemanniana tal que,

i) el campo tensorial de simetría S es s – invariante[3] ,
ii) S es C^∞.

Debido a la Definición 1.1.4, una s –variedad afín ya cumple la propiedad ii) y, por tanto, en este caso se tiene la siguiente definición:

Definición 1.2.2.2

Una ***s* – variedad afín regular *M*** es una s – variedad afín, tal que el campo tensorial de simetría S es s – invariante.

Nota 1.2.2.3

Una s – variedad afín (resp. Riemanniana) regular M es claramente una s – variedad afín (resp. Riemanniana) localmente regular.

Nota 1.2.2.4

De forma análoga a la Nota 1.2.1.2 y usando la Definición 1.1.8, se dirá que una variedad Riemanniana M admite una ***s* – estructura regular de orden *k*** si

i) M junto con s es una s – variedad Riemanniana regular,

---

[3] Un campo tensorial se dice ϕ – invariante si es invariante bajo la acción de la aplicación ϕ: $M \rightarrow M$.

ii) Para todo $x \in M$, s_x es una simetría de orden k en x.

Recordar que k es el menor entero tal que $s^k_x = Id.$, para todo $x \in M$.

Nota 1.2.2.5

Sea P un campo tensorial sobre una s – variedad afín ó Riemanniana regular. Entonces, como en el Lema 1.2.1.8:

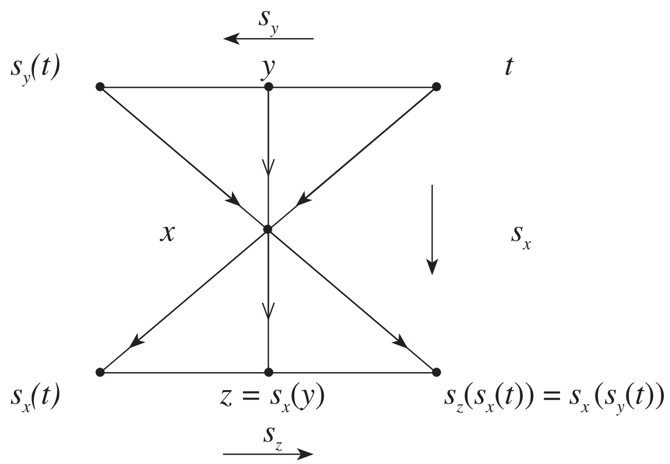
i) Si P es S – invariante y paralelo entonces, es s – invariante .
ii) Si P es s – invariante entonces, es S – invariante.

Proposición 1.2.2.6

Una s – variedad afín ó Riemanniana es una s – variedad regular si y sólo si

i) para todo $x, y, z \in M$, $s_x(y) = z$ implica que $s_x \circ s_y = s_z \circ s_x$,
ii) S es C^∞.

El siguiente gráfico ilustra el significado de las composiciones anteriores:



Debido al siguiente teorema se sabe que cada s – variedad Riemanniana regular M es una variedad Riemanniana homogénea G/H.

Teorema 1.2.2.7

Sea M una s – variedad afín (resp. Riemanniana) regular. Entonces $M = G/H$, donde G es el subgrupo cerrado de todas las transformaciones afines (resp. isometrías) de M que conservan S y H es el subgrupo de isotropía de G en un punto arbitrario de M.

Demostración

Como *G* es un subgrupo cerrado de $A(M,\nabla)$ (resp. $\mathfrak{I}(M)$), por el Teorema del subgrupo cerrado [W, Teorema 3.21], se tiene que G, en particular, es Grupo de Lie. Así, bastará comprobar que *G* es transitivo sobre *M* para poder aplicar el Teorema de la Variedad Homogénea [W, Teorema 3.62] y concluir que $M = G/H$.

Veamos que *G* es transitivo sobre *M*. Si *M* es una *s* – variedad afín (resp. Riemanniana), por el Teorema 1.1.7 (resp. Teorema 1.1.2) se sabe que $A(M,\nabla)$ (resp. $\mathfrak{I}(M)$) es transitivo sobre *M*. Debido a que en la demostración de este teorema sólo se usa la composición de simetrías afines (resp. Riemannianas), se sigue que, el subgrupo *G'* de $A(M,\nabla)$ (resp. $\mathfrak{I}(M)$) generado por las simetrías afines (resp. Riemannianas) es transitivo sobre *M*. En nuestro caso, *M* es una *s* – variedad afín (resp. Riemanniana) regular. Así, si se considera *G* como el subgrupo de $A(M,\nabla)$ (resp. $\mathfrak{I}(M)$) cuyos elementos conservan el campo tensorial de simetría *S*; es decir, para todo $\phi \in G$ se tiene que *S* es ϕ - invariante, que *G'* está contenido en *G* y, por tanto, que *G* es transitivo sobre *M*.

1.2.3. Relaciones entre s – Variedades, s – Variedades Localmente Regulares y s – Variedades Regulares

Los siguientes teoremas, cuya demostración puede ser consultada en [G-L], permitirán relacionar los resultados de los anteriores apartados.

Teorema 1.2.3.1

Una *s* – variedad afín (resp. Riemanniana) localmente regular, completa y simplemente conexa es una *s* – variedad afín (resp. Riemanniana) regular.

Supongamos que *M* es completa pero no necesariamente simplemente conexa. Usando el teorema anterior y algunos resultados conocidos de la teoría de espacios de recubrimiento se tiene el siguiente resultado:

Teorema 1.2.3.2

Sea *M* una *s* – variedad afín (resp. Riemanniana) localmente regular completa. Entonces, *M* es el espacio cociente de una completa y simplemente conexa *s* – variedad afín (resp. Riemanniana) M', factorizada por un grupo de transformaciones afines (resp. isometrías) actuando libre, propia y discontinuamente sobre M'.

Finalmente, para cualquier *s* – variedad *M* localmente regular se tiene:

Teorema 1.2.3.3

Sea (M,∇) (resp. (M,g)) una s – variedad afín (resp. Riemanniana) localmente regular. Entonces, para cada $x \in M$ existe una s – variedad afín (resp. Riemanniana) (M',∇') (resp. (M',g')) la cual representa a (M,∇) (resp. (M,g)) localmente; es decir, existen entornos U de x y $U' \subset M'$ y, una transformación afín (resp. una isometría) entre ellos, $\phi\colon U \to U'$.

Siguiendo [K.1], se destacarán las siguientes definiciones que permitirán relacionar entre si s – variedades Riemannianas regulares:

Definición 1.2.3.4

Dos **s – variedades Riemannianas regulares** (M,g) y (M',g') se dicen **isomorfas** si existe un difeomorfismo $F\colon M \to M'$ (llamado **isomorfismo**) tal que:

i) $F\colon (M,g) \to (M',g')$ es una isometría.
ii) Para todo $x \in M$ se tiene $F \circ s_x = s'_{F(x)} \circ F$.

Nota 1.2.3.5

La condición ii) puede ser remplazada por:

ii)' $F_*(S) = S'$; es decir, $F_* \circ S = S' \circ F_*$ sobre el fibrado tangente $T(M)$.

Definición 1.2.3.6

Dos **s – variedades Riemannianas regulares** (M,g) y (M',g') se dicen que son **localmente isomorfas** si para cualesquiera $p \in M$ y $p' \in M'$, existe una isometría Φ de un entorno de p, U, a un entorno de p', U', tal que

$$\Phi_*(S_{|U}) = S'_{|U'}.$$

Nota 1.2.3.7

Debido a que en cualquier s – variedad Riemanniana regular el campo tensorial S es s – invariante, será suficiente verificar la condición anterior para un par de puntos fijados, $p \in M$ y $p' \in M'$.

Nota 1.2.3.8

Usando el Teorema 1.2.1.14 y el Corolario 6.4 de [K-N, Capítulo VI], se obtiene que dos s – variedades Riemannianas regulares, simplemente conexas y localmente isomorfas siempre son globalmente isomorfas.

Por otra parte, usando el Teorema 1.2.3.2 se obtiene:

Teorema 1.2.3.9

Para toda s – variedad Riemanniana regular (M,g), existe una s – variedad Riemanniana regular (M',g') simplemente conexa que la cubre tal que, la aplicación del cubrimiento es un isomorfismo local en el entorno de cada punto de M'.

Nota 1.2.3.10

Si (M',g') es la variedad Riemanniana que cubre universalmente una s – variedad Riemanniana regular dada (M,g), se tiene que la aplicación del cubrimiento universal π induce sobre (M',g') una aplicación $s':M'\to\mathfrak{I}(M')$ tal que, para cada $y\in M'$, la imagen s'_y es una simetría Riemanniana local en *y*. Además, para cada $y\in M'$, s'_y puede ser extendida obteniendo así que s'_y es una simetría Riemanniana global en *y*. Así, $\pi_*(S') = S$.

1.3. TRATAMIENTO ALGEBRAICO DE LAS S – VARIEDADES RIEMANNIANAS REGULARES

Dada una s – variedad Riemanniana regular, se denota por ∇ la conexión Riemanniana sobre (M,g) y por S el campo tensorial de simetría asociado a s. Usando los Lemas 1.2.1.7 y 1.2.1.10, se introduce la conexión canónica $\tilde{\nabla}$ como:

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \mathcal{D}_X Y \qquad \textbf{(1.1)}$$

donde,

$$\mathcal{D}_X Y = (\nabla_{(I-S)^{-1}X} S)\, S^{-1} Y$$

y X, Y son campos vectoriales arbitrarios sobre M.

Debido al Lema 1.2.1.10, en el que se indican las propiedades básicas de la conexión $\tilde{\nabla}$, se sabe que $\tilde{\nabla}\tilde{R} = \tilde{\nabla}\tilde{T} = \tilde{\nabla}g = \tilde{\nabla}S = 0$. Además, usando el Teorema 4.5 de [K-N, Capítulo IV] y el Teorema 1.1.7, se demuestra fácilmente que:

Teorema 1.3.1

La variedad afín $(M,\tilde{\nabla})$ correspondiente a la s – variedad Riemanniana regular (M,g) es completa.

Dada la s – variedad Riemanniana regular (M,g), se denota por o un punto fijado de M y por $V = T_oM$ su correspondiente espacio tangente.

Teorema 1.3.2

Los campos tensoriales S, g, $\tilde{R}$, $\tilde{T}$ satisfacen en el punto inicial o, las siguientes condiciones de compatibilidad algebraicas:

i) Las transformaciones lineales sobre V, S_o e $I_o - S_o$, son no singulares.

ii) Para cualesquiera $X, Y \in V$ el endomorfismo $\widetilde{R}_o(X,Y)$ actúa como una derivación sobre el álgebra tensorial $\Im(V)$ satisfaciendo:

$$\tilde{R}_o(X,Y)S_o = \tilde{R}_o(X,Y)g_o = \tilde{R}_o(X,Y)\tilde{R}_o = \tilde{R}_o(X,Y)\tilde{T}_o = 0.$$

iii) Los tensores $g_o, \widetilde{R}_o, \widetilde{T}_o$ son invariantes por S_o.

iv) $\widetilde{R}_o(X,Y) = -\widetilde{R}_o(Y,X)$, $\widetilde{T}_o(X,Y) = -\widetilde{T}_o(Y,X)$.

v) La primera identidad de Bianchi $\mathfrak{S}[\tilde{R}_o(X,Y)Z - \tilde{T}_o(\tilde{T}_o(X,Y),Z)] = 0.$

vi) La segunda identidad de Bianchi $\mathfrak{S}\ [\widetilde{R}_o(\widetilde{T}_o(X,Y)\ Z)] = 0.$

Para demostrar este Teorema sólo es necesario utilizar las propiedades básicas de $\widetilde{\nabla}$.

1.3.1. s–Variedades Algebraicas, definición, equivalencia y existencia

A continuación se ve que las relaciones algebraicas i) – vi) caracterizan completamente la estructura de una s – variedad Riemanniana regular. Para ello, siguiendo [K.1], se introduce el concepto de s – variedad algebraica como sigue:

Definición 1.3.1.1

Una ***s* – variedad algebraica** es una colección (V, g_o, S_o, $\widetilde{R}_o$, $\widetilde{T}_o$), donde V es un espacio vectorial, g_o es un producto interior positivo sobre V y S_o, $\widetilde{T}_o$ son tensores de tipo ($1,1$), ($1,3$) y ($1,2$) respectivamente, de forma que las condiciones i) – vi) del Teorema 1.3.2 son satisfechas.

Definición 1.3.1.2

Dos ***s* – variedades algebraicas** (V_i, g_i, S_i, $\widetilde{R}_i$, $\widetilde{T}_i$), i = 1, 2, se denominarán **isomorfas** si existe un isomorfismo lineal de espacios vectoriales $f: V_1 \to V_2$ tal que $f(g_1) = g_2$, $f(S_1) = S_2$, $f(\widetilde{R}_1) = \widetilde{R}_2$, $f(\widetilde{T}_1) = \widetilde{T}_2$.[4]

El siguiente teorema, permitirá relacionarlas con las s – variedades Riemannianas regulares.

Teorema 1.3.1.3

Sea (M,g) una s – variedad Riemanniana regular. Entonces:

[4] Aquí f indica, en cada caso, la extensión a las correspondientes álgebras tensoriales; ver [K-N, Capítulo I].

1. Para cada punto $p \in M$, la colección (T_pM, g_p, S_p, $\tilde{R}_p$, $\tilde{T}_p$) es una s – variedad algebraica.
2. Para cualquier par de puntos $p, q \in M$, las correspondientes s – variedades algebraicas son isomorfas.

Demostración

1. Es debido al Teorema 1.1.2.
2. Dados $p, q \in M$, por el Teorema 1.1.7, se sabe que existe $g \in A(M, \tilde{\nabla})$ tal que $g(p) = q$ y, además, por la definición de $\tilde{\nabla}$, $A(M, \tilde{\nabla})$ preserva g y S. Entonces, se obtiene $g_{*p} : T_pM \to T_qM$, el cual es el isomorfismo querido.

Este Teorema motiva la siguiente definición:

Definición 1.3.1.4

El **tipo algebraico de una *s* – variedad Riemanniana regular** (M, g), es la clase de isomorfía de una s – variedad algebraica asociada, (T_pM, g_p, S_p, $\tilde{R}_p$, $\tilde{T}_p$), $p \in M$. [5]

El siguiente teorema muestra cuando dos s – variedades Riemannianas regulares son equivalentes.

Teorema 1.3.1.5

Dos s – variedades Riemannianas regulares son localmente isomorfas, si y sólo si, tienen el mismo tipo algebraico.

Corolario 1.3.1.6

Sean (M, g) una s – variedad Riemanniana regular y (M', g') una s' – variedad Riemanniana regular. Entonces, son localmente isomorfas, si y sólo si, en al menos un par de puntos, $p \in M$, $p' \in M'$ existe un isomorfismo lineal $f : T_pM \to T_{p'}M'$ tal que

$$f(g_p) = g'_{p'},\ f(S_p) = S'_{p'},\ f((\nabla S)_p) = (\nabla' S')_{p'},\ f(R_p) = R'_{p'}.$$

A continuación se ve el teorema de existencia.

Teorema 1.3.1.7

Cualquier s – variedad algebraica es el tipo algebraico de una única simplemente conexa s – variedad Riemanniana regular.

[5] Naturalmente, no se diferenciará entre s – variedades algebraicas y sus clases de isomorfía.

La demostración de este teorema dada en [K.1], está basada en la prueba del Teorema 1.2.3.3, en la cual, se usa la construcción del álgebra de Nomizu [N, Pág. 62].

Demostración

Sea, (V, g_o, S_o, $\widetilde{R}_o$, $\widetilde{T}_o$), una s – variedad algebraica. Se define $\mathfrak{h}$ como el álgebra de Lie de todos los endomorfismos A de V que, actuando como una derivación, satisfacen

$$A(g_o) = A(S_o) = A(\widetilde{R}_o) = A(\widetilde{T}_o) = 0.$$

En particular, $\widetilde{R}_o(X,Y) \in \mathfrak{h}$ para cualesquiera X, $Y \in V$. Entonces, se define el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, como $V \oplus \mathfrak{h}$, con la siguiente tabla de multiplicar

$$\left.\begin{array}{l} [X,Y] = (-\widetilde{T}_o(X,Y), -\widetilde{R}_o(X,Y)) \\ [A,X] = AX \\ [A,B] = AB - BA \end{array}\right\} X,Y \in V;\ A,B \in \mathfrak{h}. \qquad \textbf{(1.2)}$$

Se puede ver fácilmente que usando las condiciones v) y vi) del Teorema 1.1.2 se obtienen las identidades de Jacobi.

Sean G el grupo de Lie simplemente conexo cuya álgebra de Lie es $\mathfrak{g}$ y H el subgrupo de Lie conexo cuya álgebra de Lie es $\mathfrak{h}$. Entonces, como $\mathfrak{h}$ está generada por los endomorfismos de V que dejan invariantes $\widetilde{T}$ y $\widetilde{R}$, H es un subgrupo cerrado de G y, $M = G / H$ es un espacio homogéneo reductivo con respecto a la descomposición $\mathfrak{g} = V \oplus \mathfrak{h}$. Debido a que G es simplemente conexo y H es conexo, se tiene que M es también simplemente conexo. Ahora, se define $\tilde{\nabla}$ como el segundo tipo de conexión canónica sobre G / H. Entonces, usando el Corolario 2.5 del Capítulo X de [K-N], se concluye que $\tilde{\nabla}$ es completa.

Se identificará el espacio vectorial V con el espacio tangente T_oM en el origen $o \in M$, correspondiente a la clase H de G/H . Entonces, los tensores g_o, S_o, $\widetilde{R}_o$, $\widetilde{T}_o$ sobre T_oM son invariantes con respecto al grupo $Ad(H)$ y, por tanto, pueden ser extendidos a campos tensoriales G – invariantes g, S, $\widetilde{R}$, $\widetilde{T}$ sobre la variedad $M = G/H$. También, debido a la Proposición 2.7 del Capítulo X de [K-N], g, S, $\widetilde{R}$, $\widetilde{T}$ son paralelos con respecto a $\tilde{\nabla}$. Por otra parte, debido al Teorema 2.6 del Capítulo X de [K-N], se puede deducir que $\widetilde{R}$ y $\widetilde{T}$ son, respectivamente, los campos tensoriales curvatura y torsión asociados a $\tilde{\nabla}$. Usando la condición iii) del Teorema 1.1.2 y fijado un punto $x \in M$, se obtiene $S_x(\widetilde{R}_x) = \widetilde{R}_x$ y $S_x(\widetilde{T}_x) = \widetilde{T}_x$. Puesto que, $(M, \tilde{\nabla})$ es una variedad afín con curvatura y torsión paralelas, S_x proporciona una transformación afín local $\widetilde{s}_x$ respecto a x tal que $(\widetilde{s}_x)_{*x} = S_x$, [K-N, Capítulo VI, Teorema 7.4]. $(M, \tilde{\nabla})$ es también simplemente conexa y completa; así $\widetilde{s}_x$ puede ser extendida a una transformación afín global s_x. Además, como S_x conserva el producto interior g_x, y g es paralelo, se tiene que s_x conserva la métrica g. Análogamente, s_x conserva el campo tensorial S. Por tanto, se sigue que la isometría s_x, de la variedad Riemanniana (M, g) tal que $(s_x)_{*x} = S_x$, es única. Así, se tiene una aplicación s: $M \to \mathfrak{T}(M)$ satisfaciendo la condición i) de la Proposición 1.2.2.5 y cuyo campo tensorial de simetría S es G – invariante. Por tanto, se ha obtenido que (M, g) es una s – variedad Riemanniana regular.

Ahora, falta ver que la conexión $\tilde{\nabla}$ coincide con la dada en (1.1). Se denota por ∇ la conexión Riemanniana de (M, g) y sea $E = \nabla - \tilde{\nabla}$ el correspondiente tensor diferencia, donde $E_X Y = \nabla_X Y - \tilde{\nabla}_X Y$ para cualesquiera par de campos vectoriales X, Y sobre M. Puesto que las simetrías s_x son transformaciones afines, tanto con respecto a ∇ como a $\tilde{\nabla}$, E es invariante por S. Así,

$$(E_{(I-S)^{-1}X}S)(S^{-1}Y) = E_{(I-S)^{-1}X}Y - S(E_{(I-S)^{-1}X}(S^{-1}Y)) = E_{(I-S)^{-1}X}Y - E_{S(I-S)^{-1}X}Y = E_X Y.$$

Debido a que $\tilde{\nabla} S = 0$, se obtiene finalmente lo que se busca; esto es,

$$E_X Y = (E_{(I-S)^{-1}X}S)(S^{-1}Y) = (\nabla_{(I-S)^{-1}X}S)(S^{-1}Y) = \mathcal{D}_X Y \; .$$

Nota 1.3.1.8

Si en la construcción realizada, a lo largo de la demostración, se reemplaza el álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ por su subálgebra $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{h}$, suponiendo además que, el subgrupo de Lie generado por $\mathfrak{h}'$, $H' \subset GL(V)$, es cerrado y, que $\widetilde{R}_o(X, Y) \in \mathfrak{h}'$ para cualesquiera X, $Y \in V$, se obtiene el mismo resultado.

Nota 1.3.1.9

Si $S_o = -I_o$ y $\widetilde{T}_o = 0$ se obtiene el teorema de existencia para espacios simétricos. La versión local de este teorema puede ser encontrada, por ejemplo, en [C, Pág. 263].

1.3.2. Reducibilidad de s – Variedades Riemannianas Regulares

Usando el concepto de s – variedad algebraica, en este apartado se estudia la reducibilidad de las s – variedades Riemannianas regulares. Para ello, se sigue el estudio realizado en [K.2].

Definición 1.3.2.1

Una s – variedad Riemanniana regular (M,g) se dice que es producto de s – variedades Riemannianas regulares (M_1,g_1) y (M_2,g_2) si:

a) $(M,g) = (M_1,g_1) \times (M_2,g_2)$,

b) para todo $x, y \in M$, $x = (x_1,x_2)$, $y = (y_1,y_2)$, se tiene que

$$s_x(y) = (s^1_{x_1}(y_1), s^2_{x_2}(y_2)).$$

Así, una **s – variedad Riemanniana regular** se denominará **reducible** si es un producto de s – variedades Riemannianas regulares.

Nota 1.3.2.2

Si una s – variedad Riemanniana regular (M,g) es reducible entonces, la variedad Riemanniana asociada a esta es también reducible. En general, el recíproco no es cierto.

Definición 1.3.2.3

Se dice que una s – variedad algebraica $(V, g_o, S_o, \widetilde{R}_o, \widetilde{T}_o)$ es suma directa de s – variedades algebraicas $(V^i, g^i_o, S^i_o, \widetilde{R}^i_o, \widetilde{T}^i_o)$, i = 1, 2, si

a) $V = V^1 + V^2$,

b) $g_o(X,Y) = \sum_i g^i_o(\pi_i X, \pi_i Y)$,

c) $S_o(X) = \sum_i S^i_o(\pi_i X)$,

d) $\widetilde{R}_o(X,Y)Z = \sum_i \widetilde{R}^i_o(\pi_i X, \pi_i Y)\pi_i Z$,

e) $\widetilde{T}_o(X,Y) = \sum_i \widetilde{T}^i_o(\pi_i X, \pi_i Y)$

donde, $\pi_i : V \to V^i$, i = *1*, *2*, son las proyecciones.

Así, una **s – variedad algebraica** se denominará **reducible** si es suma directa de s – variedades algebraicas.

Teorema 1.3.2.4

Una s – variedad Riemanniana regular simplemente conexa (M,g) es reducible, si y sólo si, su tipo algebraico $(V, g_o, S_o, \widetilde{R}_o, \widetilde{T}_o)$ es reducible.

Demostración

Evidentemente, si (M,g) es una s – variedad Riemanniana regular reducible, los campos tensoriales g y S, y la conexión Riemanniana ∇ son descomponibles. Entonces, se obtiene que los campos tensoriales R y ∇S son descomponibles y, en consecuencia, $\mathcal{D}_X Y = (\nabla_{(I-S)^{-1}X} S)(S^{-1}Y)$ también lo es. Entonces, usando el Lema 1.2.1.9, se ve que $\widetilde{T}$ y $\widetilde{R}$ se descomponen y, por tanto, el tipo algebraico asociado es reducible.

Inversamente, si $(V,\ g_o,\ S_o,\ \widetilde{R}_o,\ \widetilde{T}_o)$ es suma directa de s – variedades algebraicas, se considera (M_i, g_i) como la s – variedad Riemanniana regular simplemente conexa correspondiente a la s – variedad algebraica $(V^i,\ g^i_o,\ S^i_o,\ \widetilde{R}^i_o,\ \widetilde{T}^i_o)$, $i = 1,\ 2$. Sea $\mathfrak{h}=\{A\in\ \mathfrak{gl}(V) : A(g_o) = A(S_o) = A(\widetilde{T}_o) = A(\widetilde{R}_o) = 0\}$ y se denota por $\mathfrak{h}_i$ la correspondiente álgebra de Lie asociada a $(V^i,\ g^i_o,\ S^i_o,\ \widetilde{R}^i_o,\ \widetilde{T}^i_o)$, $i = 1,\ 2$, la cual es construida de forma análoga a $\mathfrak{h}$. Entonces, $\mathfrak{h} \approx \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$ y $\mathfrak{g} = V + \mathfrak{h} \approx\ \approx (V+\mathfrak{h}_1)\oplus(V+\mathfrak{h}_2)$. Por tanto, $\mathfrak{g} \approx \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, $G \approx G_1 \times G_2$ y $G/H \approx G_1/H_1 \times G_2/H_2$ donde, esta última descomposición implica que la s – variedad Riemanniana regular es reducible.

1.4. ESPACIOS SIMÉTRICOS RIEMANNIANOS GENERALIZADOS

En este apartado se extenderá el concepto de s – variedad Riemanniana regular, para ello:

Teorema 1.4.1

Si (M,g) admite una s – estructura regular entonces, también admite una s – estructura regular de orden finito.

La demostración de este teorema puede verse en [K.1, Teorema 2].

La motivación de la siguiente definición, viene dada por el teorema anterior.

Definición 1.4.2

Un **espacio simétrico Riemanniano generalizado** (abreviadamente **espacio *s* – simétrico**) es una variedad Riemanniana (M,g) admitiendo al menos una s – estructura regular. El **orden de un espacio *s* – simétrico** es el menor entero positivo k tal que M admite una s – estructura regular de orden k.

Nota 1.4.3

Los espacios s – simétricos de orden 2 no son más que los espacios simétricos.

Nota 1.4.4

Si en un espacio s – simétrico (M,g) se fija s, se obtiene que (M,g) es una s – variedad Riemanniana regular.

El siguiente resultado, cuya demostración puede verse en [K.1, Teorema 3], generaliza el Teorema de descomposición de De Rham para espacios simétricos [K-N, Capítulo XI, Teorema 6.6]:

Teorema 1.4.5

Sea (M,g) un espacio s – simétrico simplemente conexo y sea

$$M = M_0 \times M_1 \times \cdots \times M_r$$

su descomposición de De Rham, donde M_0 es un espacio Euclídeo y $M_1,\ldots,M_r$ son irreducibles. Entonces, cada M_i es un espacio s – simétrico. Más aún, cualquier s – estructura regular de orden k sobre (M,g) determina una s – estructura regular de orden k_i sobre cada M_i, donde k_i divide a k, $i = 0, 1,\ldots, r$.

1.5. SISTEMAS DE VALORES PROPIOS

La Nota 1.1.9 motiva a realizar un estudio más exhaustivo de los sistemas de valores propios asociados al campo tensorial de simetría S, así como de sus aplicaciones. Para realizarlo se sigue [K.2].

Sea (M,g) una s – variedad Riemanniana regular y $(T_oM,\ g_o,\ S_o,\ \widetilde{T}_o)$ su tipo algebraico. Los valores propios $\Theta_1,\ldots,\Theta_n$ de la transformación S_o son unidades complejas tales que, $\Theta_i \neq 1$, para todo $i = 1,\ldots, n$, (debido a Nota 1.1.6) y, para cualquier valor propio, Θ, su conjugado complejo, $\overline{\Theta}$, es también valor propio y, además, con la misma multiplicidad. Así, se tiene la siguiente definición:

Definición 1.5.1

Un **sistema de valores propios** es una colección de unidades complejas, $(\Theta_1,\ldots,\Theta_n)$, tales que:

a) $\Theta_i \neq 1$, para todo $i = 1,\ldots, n$.

b) Si Θ, valor propio con multiplicidad m, pertenece a $\{\Theta_1,\ldots,\Theta_n\}$ entonces, $\overline{\Theta}$ también pertenece.

Definición 1.5.2

El **conjunto de las relaciones características asociado a (Θ_i), $\Sigma(\Theta_i)$**, es el conjunto de todas las relaciones de la forma $\Theta_i\Theta_j = \Theta_k$ $(i \neq j)$, y $\Theta_r\Theta_s = 1$.

Proposición 1.5.3

$\Sigma(\Theta_i)$ es el conjunto formado por las relaciones de la forma $\Theta_i\Theta_j = \Theta_k$, $\Theta_i = \Theta_j$, $\Theta_i = \overline{\Theta}_j$ $(i \neq j)$, $\Theta_i = -1$.

Demostración

Se quiere ver que los dos conjuntos siguientes son iguales:

$$\{\Theta_i\Theta_j = \Theta_k \ (i \neq j),\ \Theta_r\Theta_s = 1\} = \{\Theta_i\Theta_j = \Theta_k,\ \Theta_i = \Theta_j,\ \Theta_i = \overline{\Theta}_j \ (i \neq j),\ \Theta_i = -1\}$$

$\subset$) Si en (Θ_i) se considera (de forma notacional) que puedan existir valores repetidos; es decir, se añade la condición $\Theta_i = \Theta_j$, entonces la condición $\Theta_i\Theta_j = \Theta_k$ $(i \neq j)$ pasará a ser $\Theta_i\Theta_j = \Theta_k$.

Si ahora se analiza $\Theta_r\Theta_s = 1$, en el caso $r = s$ se obtiene que $\Theta_r^{\ 2} = 1$ y, por tanto $\Theta_r = -1$. Así, ya se ha obtenido la condición buscada $\Theta_i = -1$. Si ahora se considera el caso en que $r \neq s$, se obtiene $\Theta_r\Theta_s\overline{\Theta}_s = \overline{\Theta}_s$ y, usando que $\Theta_s\overline{\Theta}_s = 1$ se tiene $\Theta_r = \overline{\Theta}_s$ $(r \neq s)$ y, así, la condición buscada identificando r con i y s con j.

$\supset$) Este contenido es claro si se sigue la demostración del anterior pero en sentido contrario.

Notación 1.5.4

Es preciso realizar todas las cuentas con estos sistemas de valores propios sin olvidar que sus elementos son raíces de la unidad. Por ello, cuando se multiplican se puede pensar que en realidad se están sumando ángulos.

Así, el valor 1 se identificará con la raíz de la unidad correspondiente al ángulo de 0 ó 2π radianes y, el valor -1 con el ángulo de π radianes.

Teniendo esto presente, siempre se verificará que $\Theta_s\overline{\Theta}_s = 1$.

Notación 1.5.5

Se expresará que dos sistemas de valores propios (Θ_i) y (Θ_i') cumplen que $\Sigma(\Theta_i) \subset \Sigma(\Theta_i')$ (después de realizar, si es necesario, una reordenación de los números (Θ_i')) escribiendo $(\Theta_i) \prec (\Theta_i')$.

Definición 1.5.6

Dos **sistemas de valores propios** (Θ_i) y (Θ_i') se denominan **equivalentes** si $\Sigma(\Theta_i) = \Sigma(\Theta_i')$.

Definición 1.5.7

Un **sistema de valores propios** (Θ_i) se dirá **maximal**, si para cualquier otro sistema de valores propios (Θ_i') que cumpla $(\Theta_i) \prec (\Theta_i')$, se tiene que ambos sistemas son equivalentes.

Esta última definición implica, en cierto sentido, que el conjunto $\Sigma(\Theta_i)$ es maximal.

Las siguientes propiedades mostrarán la relación entre los espacios s – simétricos y los sistemas que se acaban de definir. Estas serán de gran importancia en el siguiente capítulo.

Teorema 1.5.8

Todo espacio s – simétrico simplemente conexo surge de un sistema de valores propios maximal.

Demostración

Sean, $(\Theta_i) \prec (\Theta_i')$, dos sistemas de valores propios con numeraciones coordinadas, y $(V,\ g_o,\ S_o,\ \widetilde{R}_o,\ \widetilde{T}_o)$ una s – variedad algebraica tal que $\Theta_1,\ldots,\Theta_n$ son los valores propios de S_o. Se considerará que $\{U_1,\ldots,U_n\}$ es una base arbitraria de vectores propios de $V^{\mathbb{C}} = V \oplus_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$; es decir, $S_oU_i = \Theta_iU_i$, $i = 1,\ldots, n$ y, se definirá una nueva transformación $S_o' : V \to V$ como aquella que cumple $S_o'U_i = \Theta_i'U_i$, $i = 1,\ldots, n$. Con esto, es posible ver que $(V,\ g_o,\ S_o',\ \widetilde{R}_o,\ \widetilde{T}_o)$ es una s – variedad algebraica.

Sea $\mathfrak{h}$ el álgebra de Lie formada por todos los endomorfismos reales $A \subset \mathfrak{gl}(V)$ que, actuando como una derivación anulan g_o, S_o, $\widetilde{R}_o$ y $\widetilde{T}_o$. Si $\mathfrak{h}'$ es el álgebra de Lie cuyos elementos anulan g_o, S_o', $\widetilde{R}_o$ y $\widetilde{T}_o$ entonces, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}'$. Ahora, a partir de $(V,\ g_o,\ S_o',\ \widetilde{R}_o,\ \widetilde{T}_o)$ y siguiendo la demostración del Teorema 1.3.1.7, se construye la s – variedad Riemanniana regular correspondiente, aunque en este caso se reemplazará el álgebra de Lie $\mathfrak{h}'$ por su subálgebra $\mathfrak{h}$ como indica la Nota 1.3.1.8. Por tanto, las s – variedades Riemannianas regulares simplemente conexas correspondientes a $(V,\ g_o,\ S_o,\ \widetilde{R}_o,\ \widetilde{T}_o)$ y a $(V,\ g_o,\ S_o',\ \widetilde{R}_o,\ \widetilde{T}_o)$ son isométricas pudiendo diferir solamente en la correspondiente s – estructura regular.

Debido a que cada sistema de valores propios "cubre" a uno maximal, se sigue la tesis.

Definición 1.5.9

Sean $(V,\ g_o,\ S_o,\ \widetilde{R}_o,\ \widetilde{T}_o)$ una s – variedad algebraica, $(\Theta_1,\ \ldots,\Theta_n)$ el sistema de valores propios asociado a S_o y, $\Sigma(\Theta_i)$ el conjunto de relaciones características asociado a (Θ_i). Se define el **sistema reducido de relaciones**

características, Σ^r, asociado a (V, g_o, S_o, $\widetilde{R}_o$, $\widetilde{T}_o$), como el sistema que se obtiene al eliminar en $\Sigma(\Theta_i)$ las relaciones de la forma $\Theta_i\Theta_j = \Theta_k$ y, donde si U y U' son vectores propios asociados a Θ_i y Θ_j respectivamente, se tiene que $\widetilde{T}_o(U,U') = 0$.

Proposición 1.5.10

Dados (V, g_o, S_o, $\widetilde{R}_o$, $\widetilde{T}_o$) una s – variedad algebraica y (Θ_i') un sistema de valores propios, se considera Σ^r como el sistema reducido de relaciones características asociado a (V, g_o, S_o, $\widetilde{R}_o$, $\widetilde{T}_o$) y, $\Sigma(\Theta_i')$ como el sistema de las relaciones características asociado a (Θ_i'). Entonces, si $\Sigma^r \subset \Sigma(\Theta'_i)$ existe una s – variedad algebraica, (V, g_o, S_o', $\widetilde{R}_o$, $\widetilde{T}_o$), tal que $\Theta_1',\ldots,\Theta_n'$ son los valores propios de S_o'.

En otras palabras, cada espacio s – simétrico obtenido a partir de los tensores g_o, S_o, $\widetilde{T}_o$ puede también ser obtenido a partir del sistema de valores propios ($\Theta_1',\ldots,\Theta_n'$).

A continuación, se analizará qué es la reducibilidad en sistemas de valores propios, relacionándola además, con los criterios de reducibilidad ya conocidos en s – variedades algebraicas y espacios s – simétricos.

Definición 1.5.11

($\Theta_1,\ldots,\Theta_n$) es un **sistema de valores propios reducible** si puede ser dividido en dos subsistemas ($\Theta_1,\ldots,\Theta_k$) y ($\Theta_{k+1},\ldots,\Theta_n$) de forma que

$$\Sigma(\Theta_1,\ldots,\Theta_n) = \Sigma(\Theta_1,\ldots,\Theta_k) \cup \Sigma(\Theta_{k+1},\ldots,\Theta_n).$$

Teorema 1.5.12

Cada s – variedad algebraica, (V, g_o, S_o, $\widetilde{R}_o$, $\widetilde{T}_o$), tal que S_o tenga un sistema de valores propios reducible, es reducible.

Demostración

Si se considera ($\Theta_1,\ldots,\Theta_n$), sistema de valores propios de S_o, y $\Sigma(\Theta_1,\ldots,\Theta_n)$ = $\Sigma(\Theta_1,\ldots,\Theta_k) \cup \Sigma(\Theta_{k+1},\ldots,\Theta_n)$, se tiene que la complexificación del espacio vectorial V, $V^{\mathbb{C}} = V \oplus_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, se puede descomponer como la suma de espacios propios $V^{\mathbb{C}} = V_1 + \cdots + V_r + V_{r+1} + \cdots + V_s$, donde $V_1,\ldots,V_r$ son los espacios propios correspondientes a los valores propios $\Theta_1,\ldots,\Theta_k$ y $V_{r+1},\ldots,V_s$ a $\Theta_{k+1},\ldots,$ Θ_n. Debido a la reducibilidad, se obtiene una descomposición ortogonal $V = V' + V''$, donde $V'^{\mathbb{C}} = V_1 + \cdots + V_r$ y $V''^{\mathbb{C}} = V_{r+1} + \cdots + V_s$, tal que V' y V'' son S_o – invariantes.

De las condiciones ii) y iii) del Teorema 1.3.2 se tiene

$$\tilde{T}_o(S_oU, S_oU') = S_o(\tilde{T}_o(U,U')),\ \tilde{R}_o(S_oU, S_oU') = \tilde{R}_o(U,U'),\ \tilde{R}_o(U,U')\cdot S_o = S_o\cdot\tilde{R}_o(U,U'),$$

para todo U, $U' \in V^{\mathbb{C}}$. Si $\Theta \in (\Theta_1,\ldots,\Theta_k)$ y $\Xi \in (\Theta_{k+1},\ldots,\Theta_n)$ entonces, la condición de reducibilidad quiere decir que $\Theta\Xi$ no es ni un valor propio ni *1*. Por tanto, para cualesquiera $U' \in V'^{\mathbb{C}}$ y $U'' \in V''^{\mathbb{C}}$ se tiene $\tilde{T}_o(U,U') = 0$ y $\tilde{R}_o(U,U') = 0$. También, si U', U'_1, U'_2, $\in V'^{\mathbb{C}}$ y U'', U''_1, U''_2, $\in V''^{\mathbb{C}}$ entonces $\tilde{T}_o(U'_1, U'_2) \in V'^{\mathbb{C}}$, $T_o(U''_1, U''_2) \in V''^{\mathbb{C}}$ y usando la primera identidad de Bianchi, se obtiene además $\tilde{R}_o(U'_1, U'_2)U' \in V'^{\mathbb{C}}$, $\tilde{R}_o(U'_1, U'_2)U'' = 0$ $\tilde{R}_o(U''_1, U''_2)U'' \in V''^{\mathbb{C}}$, $\tilde{R}_o(U''_1, U''_2)U'' = 0$. Así, $(V,\ g_o,\ S_o,\ \tilde{R}_o,\ \tilde{T}_o)$ se descompone en las dos s – variedades algebraicas siguientes:

$$(V',\ g',\ S',\ \tilde{R}',\ \tilde{T}') \text{ y } (V'',\ g'',\ S'',\ \tilde{R}'',\ \tilde{T}'').$$

Corolario 1.5.13

Cada espacio s – simétrico simplemente conexo G / H, que procede de un sistema de valores propios reducible, es reducible.

La demostración de este corolario es directa usando el Teorema 1.3.2.4.

2. CLASIFICACIÓN DE LOS ESPACIOS S – SIMÉTRICOS

Este capítulo está dedicado al estudio del artículo de O. Kowalski [K.2], cuyas técnicas serán de gran utilidad para el desarrollo de la clasificación de los espacios homogéneos naturalmente reductivos en la dimensión *6*.

2.1. CONSIDERACIONES PREVIAS

Veamos algunas consideraciones a la hora de realizar la clasificación de los espacios s – simétricos.

Teniendo en cuenta el Teorema 1.2.3.2 es razonable comenzar con espacios que sean simplemente conexos. Además, debido al Teorema 1.4.5, se sabe que es posible descomponer cualquier espacio s – simétrico simplemente conexo en componentes irreducibles; así, se puede limitar nuestro estudio a los espacios irreducibles simplemente conexos.

Finalmente, debido a la definición de espacio s – simétrico, parece natural clasificar primero las s – variedades regulares Riemannianas donde a la hora de abordar el problema de la clasificación es posible seguir las dos líneas siguientes:

A) Dado un orden k, encontrar todas las s – variedades Riemannianas regulares de ese orden.

B) Dada una dimensión n, encontrar en esa dimensión todas las s – variedades Riemannianas regulares.

Sin olvidar que lo que se quiere clasificar son los espacios s – simétricos, no se distinguirá entre s – variedades Riemannianas regulares isométricas que sólo puedan diferir en la correspondiente s – estructura regular.

Para resolver el problema indicado en B), lo más natural será comenzar con la dimensión $n = 2$ donde, aunque se sabe que los espacios s – simétricos son los espacios simétricos Riemannianos, es posible obtener el siguiente Teorema de clasificación cuya demostración puede verse en [K.1].

Teorema 2.1.1

Cualquier espacio Riemanniano simétrico generalizado de dimensión *2* es homotético a uno de los siguientes espacios:

– El plano Euclídeo E^2.
– El toro llano Riemanniano T^2.
– La esfera S^2.
– El plano proyectivo $\mathbb{R}P^2 = S^2/\{\pm I\}$.
– El plano hiperbólico H^2.

En particular, todos los espacios s – simétricos de dimensión *2* son espacios simétricos Riemannianos. Así, todo espacio s – simétrico de dimensión 2 tiene orden $k = 2$ y por tanto, es un espacio simétrico en el sentido de E. Cartan, cuya clasificación ya es conocida; por ello, estos espacios no son considerados en la clasificación estudiada por O. Kowalski.

Se usará el siguiente teorema, cuya demostración está desarrollada en el Teorema 9 de [K.1], para reconocer y evitar el estudio de los espacios simétricos en el sentido de E. Cartan.

Lema 2.1.2

Para el campo tensorial diferencia de dos conexiones $\mathcal{D} = \nabla - \tilde{\nabla}$ de una s – variedad regular Riemanniana (M,g) (en el sentido de la fórmula (1.1), apartado 1.3) se tiene:

$$2g(\mathcal{D}(X,Y),Z) = g(\tilde{T}(X,Y),Z) + g(\tilde{T}(X,Z),Y) + g(\tilde{T}(Y,Z),X).$$

Teorema 2.1.3

Sea (M,g) una s – variedad regular Riemanniana y $(\Theta_1,\ldots,\Theta_n)$ el sistema de valores propios de S. Entonces, cada una de las siguientes condiciones es suficiente para que (M,g) sea un espacio localmente simétrico:

i) $\nabla S = 0$,

ii) $\widetilde{T} = 0$,

iii) $\Theta_i \Theta_j \neq \Theta_k$ siempre que $i, j, k = 1, \ldots, n$, $i \neq j$.

Nota 2.1.4

Notar que, debido al teorema anterior, si $\widetilde{T} \neq 0$ entonces, se tiene al menos una relación de la forma $\Theta_i \Theta_j = \Theta_k$, $i \neq j$, entre los valores propios de S.

La clasificación realizada por Oldřich Kowalski proporciona la solución al problema B) para las dimensiones $n = 3$, 4 y 5. En los siguientes apartados nos centraremos en conocerla y desarrollarla.

2.2. Lista de la Clasificación

En este apartado, se presenta la lista completa de todos los espacios s – simétricos simplemente conexos irreducibles de dimensiones 3, 4 y 5, cuyo orden es mayor que 2. Para abreviar, se denominarán **espacios simétricos excepcionales**.

En cada caso, se describirá primero la variedad homogénea subyacente G/H y, entonces, se darán de una manera más explícita la familia de todas las métricas invariantes admisibles.

Dimensión $n = 3$

Todos los espacios excepcionales son de orden 4 y del siguiente tipo:

Como espacio homogéneo, M es el grupo formado por las matrices de la forma:

$$\begin{pmatrix} e^z & 0 & x \\ 0 & e^{-z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

También, M es el espacio $\mathbb{R}^3(x, y, z)$ con la métrica Riemanniana

$$g = e^{-2z}\, dx^2 + e^{2z}\, dy^2 + \lambda^2\, dz^2,$$

donde $\lambda > 0$ es una constante.

La simetría típica en el punto $(0, 0, 0)$ es la transformación dada por:

$$x' = -y, \quad y' = x, \quad z' = -z.$$

Dimensión $n = 4$

Todos los espacios excepcionales son de orden 3 y del siguiente tipo:

M es el espacio homogéneo

$$\begin{pmatrix} a & b & u \\ c & d & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg/ \begin{pmatrix} Cos(t) & Sen(t) & 0 \\ -Sen(t) & Cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde,

$$det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1 .$$

También, M es el espacio $\mathbb{R}^4(x, y, u, v)$ con la métrica Riemanniana

$$g = [-x + (x^2 + y^2 + 1)^{\frac{1}{2}}]\ du^2 + [x + (x^2 + y^2 + 1)^{\frac{1}{2}}]\ dv^2 - 2y\ du\ dv +$$

$$+ \frac{\lambda^2}{1 + x^2 + y^2}\ [(1 + y^2)\ dx^2 + (1 + x^2)\ dy^2 - 2xy\ dx\ dy]$$

donde, $\lambda > 0$ es una constante.

La simetría típica de orden 3 en el punto $(0, 0, 0, 0)$ es la transformación dada por:

$$u' = Cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cdot u - Sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cdot v, \quad v' = Sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cdot u + Cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cdot v,$$

$$x' = Cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\cdot x + Sen\left(\frac{4\pi}{3}\right)\cdot y, \quad y' = -Sen\left(\frac{4\pi}{3}\right)\cdot x + Cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\cdot y.$$

Dimensión $n = 5$

Todos los espacios excepcionales son de orden 4 ó 6, y de los siguientes 12 tipos:

Tipo 1)

Como espacio homogéneo, M es el grupo formado por las matrices de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & u \\ 0 & 1 & 0 & v \\ x & y & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

También, M es el espacio $\mathbb{R}^5(u, v, z, x, y)$ con la métrica Riemanniana

$$g = du^2 + dv^2 + dx^2 + dy^2 + \rho^2 (u\ dx + v\ dy - dz)^2,$$

donde, $\rho > 0$ es una constante.

La simetría típica en el punto $(0, 0, 0, 0, 0)$ es la transformación dada por:

$$u' = -v, \quad v' = u, \quad z' = -z, \quad x' = -y, \quad y' = x.$$

Tipo 2)

Como espacio homogéneo, M es el grupo formado por las matrices de la forma:

$$\begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & e^{-t\lambda_1} & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & e^{t\lambda_2} & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t\lambda_2} & w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

las cuales dependen de los parámetros λ_1 y λ_2.

También, M es el espacio $\mathbb{R}^5(x, y, z, w, t)$ con la métrica Riemanniana

$$\begin{aligned} g = {} & e^{-2t\lambda_1}\ dx^2 + e^{2t\lambda_1}\ dy^2 + e^{-2t\lambda_2}\ dz^2 + e^{2t\lambda_2}\ dw^2 + dt^2 + \\ & + 2\alpha\ [e^{-t(\lambda_1+\lambda_2)} dx\ dz + e^{t(\lambda_1+\lambda_2)} dy\ dw] + \\ & + 2\beta\ [e^{t(\lambda_1-\lambda_2)} dy\ dz - e^{t(\lambda_2-\lambda_1)} dx\ dw], \end{aligned}$$

donde, aquí ó $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, $\alpha^2 + \beta^2 < 1$, ó $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, $\alpha = 0$, $0 \leq \beta < 1$, ó $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 = 0$, $\alpha = 0$, $0 < \beta < 1$.

La simetría típica en el punto $(0, 0, 0, 0, 0)$ es la transformación dada por:

$$x' = -y, \quad y' = x, \quad z' = -w, \quad w' = z, \quad t' = -t.$$

Tipo 3)

M es el espacio homogéneo $SO(3,\mathbb{C})/SO(2)$, donde $SO(3,\mathbb{C})$ denota el grupo ortogonal complejo especial y $SO(2)$ denota el siguiente subgrupo de $SO(3,\mathbb{C})$

$$\left(\begin{array}{c:c} SO(2) & 0 \\ \hdashline 0 & 1 \end{array}\right).$$

La métrica g sobre M es inducida por las siguientes formas reales invariantes y semi-definidas positivas sobre el grupo $GL(3,\mathbb{C})$ de todas las matrices regulares complejas

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$\tilde{g} = \lambda^2 (w_1\overline{w}_1 + w_2\overline{w}_2) + \gamma(w_1)^2 + (\overline{w}_1)^2 + (w_2)^2 + (\overline{w}_2)^2) + \mu^2 \left(\frac{w_3 - \overline{w}_3}{i}\right)^2$$

donde,

$$w_1 = a_2\, da_3 + b_2\, db_3 + c_2\, dc_3,$$
$$w_2 = a_3\, da_1 + b_3\, db_1 + c_3\, dc_1, \qquad w_3 = a_1\, da_2 + b_1\, db_2 + c_1\, dc_2,$$

y λ, γ, μ son parámetros reales satisfaciendo $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $|2\gamma| < \lambda^2$.

La simetría típica en el origen de M es la inducida por la siguiente transformación sobre $GL(3,\mathbb{C})$:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \overline{b}_2 & -\overline{b}_1 & \overline{b}_3 \\ -\overline{a}_2 & \overline{a}_1 & -\overline{a}_3 \\ \overline{c}_2 & -\overline{c}_1 & \overline{c}_3 \end{pmatrix}.$$

Tipo 4)

Como espacio homogéneo, M es el grupo formado por las matrices complejas de la forma:

$$\begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 & z \\ 0 & e^{-t\lambda} & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

las cuales dependen del parámetro λ.

Aquí, z y w son variables complejas y t es una variable real.

También, M es el espacio $\mathbb{C}^2(z,w)\times \mathbb{R}^1(t)$ con una métrica Riemanniana real

$$g = e^{-t(\lambda+\overline{\lambda})}dzd\overline{z} + e^{t(\lambda+\overline{\lambda})}dwd\overline{w} + (dt)^2 + 2cv[e^{t(\overline{\lambda}-\lambda)}dzd\overline{w} + e^{t(\lambda-\overline{\lambda})}d\overline{z}dw] +$$
$$+ \alpha e^{-2t\lambda}(dz)^2 + \overline{\alpha} e^{-2t\overline{\lambda}}(d\overline{z})^2 - \alpha e^{2t\lambda}(dw)^2 - \overline{\alpha} e^{2t\overline{\lambda}}(d\overline{w})^2$$

donde, λ y α son parámetros complejos, c es un parámetro real y $\alpha\overline{\alpha}+c^2<$ ¼. Además, en el caso de que $\lambda+\overline{\lambda}=0$ se tiene que $\alpha = 0$ y $c \neq 0$.

La simetría típica en el punto $(0,\ 0;\ 0)$ es la transformación dada por:

$$z' = iw, \quad w' = iz, \quad t' = -t .$$

Tipos 5a), 5b)

M es el espacio homogéneo

$$\frac{SO(3)\times SO(3)}{SO(2)} \text{ ó } \frac{SO(2,1)\times SO(2,1)}{SO(2)},$$

donde $SO(2)$ denota el subgrupo

$$\begin{pmatrix} Cos(t) & -Sen(t) & 0 \\ Sen(t) & Cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Cos(t) & Sen(t) & 0 \\ -Sen(t) & Cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La métrica Riemanniana g es inducida por las siguientes formas reales invariantes y semi-definidas positivas sobre el grupo $GL(3,\mathbb{R})\times GL(3,\mathbb{R})$ de todos los pares de matrices regulares

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 & \tilde{a}_2 & \tilde{a}_3 \\ \tilde{b}_1 & \tilde{b}_2 & \tilde{b}_3 \\ \tilde{c}_1 & \tilde{c}_2 & \tilde{c}_3 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$\tilde{g} = \alpha^2[(w_1+\tilde{w}_2)^2 + (\tilde{w}_1+w_2)^2] + \beta^2[(w_1-\tilde{w}_2)^2 + (\tilde{w}_1-w_2)^2] + \gamma^2(w_3+\tilde{w}_3)^2$$

donde,

$$w_1 = a_2\, da_3 + b_2\, db_3 \pm c_2\, dc_3,$$
$$w_2 = a_3\, da_1 + b_3\, db_1 \pm c_3\, dc_1, \qquad w_3 = a_1\, da_2 + b_1\, db_2 \pm c_1\, dc_2,$$

y $\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2, \widetilde{w}_3$ son dados por análogas expresiones pero con $\widetilde{a}_i$, $\widetilde{b}_i$, $\widetilde{c}_i$, $d\widetilde{a}_i$, $d\widetilde{b}_i$, $d\widetilde{c}_i$, $\quad i = 1,\ 2,\ 3$.

Aquí, α, β y γ son parámetros reales positivos satisfaciendo, $\alpha \geq \beta$, y los signos **(+)** y **(–)** en $w_1, w_2, w_3, \widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2$ y $\widetilde{w}_3$ corresponden al **caso elíptico *5a*)** y al **caso hiperbólico *5b*)** respectivamente.

La simetría típica en el origen de M es la inducida por la siguiente transformación sobre $GL(3,\mathbb{R})\times GL(3,\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \widetilde{a}_1 & \widetilde{a}_2 & \widetilde{a}_3 \\ \widetilde{b}_1 & \widetilde{b}_2 & \widetilde{b}_3 \\ \widetilde{c}_1 & \widetilde{c}_2 & \widetilde{c}_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \widetilde{a}_1 & -\widetilde{a}_2 & -\widetilde{a}_3 \\ -\widetilde{b}_1 & \widetilde{b}_2 & \widetilde{b}_3 \\ -\widetilde{c}_1 & \widetilde{c}_2 & \widetilde{c}_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 & a_3 \\ -b_1 & b_2 & -b_3 \\ c_1 & -c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Tipos 6a), 6b)

M es el espacio homogéneo

$$SU(3)/SU(2) \text{ ó } SU(2,1)/SU(2).$$

También, M es la subvariedad de $\mathbb{C}^3(z^1, z^2, z^3)$ dada por la relación $z^1\bar{z}^1 + z^2\bar{z}^2 \pm z^3\bar{z}^3 = \pm 1$.

La métrica Riemanniana sobre M es inducida por la siguiente métrica hermítica sobre $\mathbb{C}^3$:

$$\tilde{g} = \lambda(dz^1 d\bar{z}^1 + dz^2 d\bar{z}^2 \pm dz^3 d\bar{z}^3) + \mu(z^1 d\bar{z}^1 + z^2 d\bar{z}^2 \pm z^3 d\bar{z}^3)(\bar{z}^1 dz^1 + \bar{z}^2 dz^2 \pm \bar{z}^3 dz^3),$$

donde, λ y μ son parámetros reales tales que $\lambda > 0$, $\mu \neq 0$ y $\mu \pm \lambda > 0$. Los signos **(**+**)** y **(**−**)** corresponden respectivamente al **caso elíptico *6a*)** y al **caso hiperbólico *6b*)**.

La simetría típica en el punto ($0, 0, 1$) de M es inducida por la siguiente transformación sobre $\mathbb{C}^3$:

$$z^{1\prime} = \bar{z}^2, \qquad z^{2\prime} = -\bar{z}^1, \qquad z^{3\prime} = \bar{z}^3.$$

Tipo 7)

Como espacio homogéneo, M es el grupo formado por las matrices reales del tipo

$$\begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & e^{-t\lambda} & 0 & 0 & y \\ te^{t\lambda} & 0 & e^{t\lambda} & 0 & u \\ 0 & -te^{-t\lambda} & 0 & e^{-t\lambda} & v \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

las cuales dependen del parámetro λ.

También, M es el espacio $\mathbb{R}^5(x, y, u, v, t)$ con la métrica Riemanniana

$$g = dt^2 + e^{-2\lambda t}(tdx - du)^2 + e^{2\lambda t}(tdy + dv)^2 + a^2(e^{-2\lambda t}dx^2 + e^{2\lambda t}dy^2) + 2\gamma(dydu - dxdv)$$

donde, λ, a y γ son parámetros reales tales que $\lambda \geq 0$, $a > 0$ y $\gamma^2 < a^2$.

La simetría típica en el punto $(0, 0, 0, 0, 0)$ de $\mathbb{R}^5$ es la transformación dada por:

$$x' = -y\,, \quad y' = x\,, \quad u' = -v\,, \quad v' = u\,, \quad t' = -t$$

Tipos 8a), 8b)

M es el espacio homogéneo

$$I^e(\mathbb{R}^3) \Big/ SO(2) \quad \text{ó} \quad I^h(\mathbb{R}^3) \Big/ SO(2),$$

donde $I^e(\mathbb{R}^3)$ ó $I^h(\mathbb{R}^3)$ denotan el grupo de todas las transformaciones afines positivas sobre el espacio $\mathbb{R}^3(x, y, z)$ que conservan la forma diferencial $dx^2 + dy^2 + dz^2$ ó $dx^2 + dy^2 - dz^2$ respectivamente; es decir, si se denota por $t(3)$ el grupo de las translaciones sobre $\mathbb{R}^3$, $I^e(\mathbb{R}^3)$ es el producto semidirecto de $SO(3)$ con $t(3)$ y $I^h(\mathbb{R}^3)$ lo es de $SO(2,1)$ con $t(3)$.

También, M es la subvariedad de $\mathbb{R}^6(x, y, z; \alpha, \beta, \gamma)$ dada por la relación $\alpha^2 + \beta^2 \pm \gamma^2 = \pm 1$.

La métrica Riemanniana sobre M es inducida por la siguiente forma cuadrática regular invariante sobre $\mathbb{R}^6$:

$$\tilde{g} = dx^2 + dy^2 \pm dz^2 + \lambda^2(d\alpha^2 + d\beta^2 \pm d\gamma^2) + [\mu^2 \pm (-1)](\alpha dx + \beta dy \pm \gamma dz)^2$$

donde, $\lambda > 0$ y $\mu > 0$ son parámetros reales. Los signos **(+)** y **(−)** corresponden respectivamente al **caso elíptico *8a*)** y al **caso hiperbólico *8b*)** y, además, en el caso elíptico $\mu \neq 1$.

La simetría típica en el punto $(0, 0, 0; 0, 0, 1) \in M$ está inducida por la siguiente transformación sobre $\mathbb{R}^6$ dada por:

$$x' = -y\,, \quad y' = x\,, \quad z' = -z\,, \quad \alpha' = \beta\,, \quad \beta' = -\alpha\,, \quad \gamma' = \gamma\,.$$

Notar que todos los espacios excepcionales anteriores son de orden *4*. Veamos a continuación el único tipo de espacio simétrico excepcional cuyo orden es *6*.

Tipo 9)

Como espacio homogéneo, M es el grupo formado por las matrices del tipo

$$\begin{pmatrix} e^{-(u+v)} & 0 & 0 & x \\ 0 & e^{u} & 0 & y \\ 0 & 0 & e^{v} & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

También, M es el espacio $\mathbb{R}^5(x,y,z,u,v)$ con la métrica Riemanniana

$$g = a^2(du^2 + dv^2 + dudv) + (b^2 + 1)(e^{2(u+v)}dx^2 + e^{-2u}dy^2 + e^{-2v}dz^2) + \\ +(b^2 - 2)(e^{v}dxdy + e^{u}dxdz - e^{-(u+v)}dydz),$$

donde $a > 0$ y $b > 0$.

La simetría típica en el punto $(0, 0, 0, 0, 0) \in M$ es la transformación dada por:

$$x' = y, \quad y' = -z, \quad z' = x, \quad u' = v, \quad v' = -(u+v).$$

Para concluir, se destacará el siguiente teorema que asegura la coherencia de la lista de la clasificación dada, cuya demostración puede verse en el Apartado 2.4.

Teorema 2.2.1

Dos espacios excepcionales pertenecientes a tipos distintos son no isométricos y, además, en cada tipo los parámetros correspondientes a la métrica Riemanniana son invariantes infinitesimales.

2.3. OBTENCIÓN DE LA LISTA DE LA CLASIFICACIÓN

2.3.1. Metodología a seguir

Para la obtención de todos los espacios excepcionales; es decir, espacios s – simétricos simplemente conexos de dimensiones *3*, *4* y *5* que además son irreducibles y no simétricos, se realizarán los siguientes pasos:

1. Por el Teorema 1.5.8, la Proposición 1.5.10, el Corolario 1.5.13 y a la Nota 2.1.4, dada una dimensión n se buscarán todos los sistemas de valores propios irreducibles y maximales satisfaciendo al menos una relación de la forma $\Theta_i\Theta_j = \Theta_k$, $i \neq j$.

2. Para cada sistema de valores propios encontrado, se construirán todas sus correspondientes s – variedades algebraicas (V, g_o, S_o, $\widetilde{R}_o$, $\widetilde{T}_o$) no isomorfas con $\widetilde{T}_o \neq 0$, así como el álgebra de Lie $\mathfrak{h}$.

   Para ello, siguiendo básicamente la demostración del Teorema 1.5.8, se elegirá un $(\Theta_1,\ldots,\Theta_n)$ y una permutación σ de $\{1,\ldots, n\}$ tal que $\sigma^2 = \mathrm{id}$ y $\Theta_{\sigma(i)} = \overline{\Theta}_i$. Considerando $U_1,\ldots,U_n$ base de V^C tal que $U_{\sigma(i)} = \overline{U}_i$, se define S_o: $V \to V$ mediante las relaciones $S_oU_i = \Theta_iU_i$, $i = 1,\ldots, n$. A continuación, se calcularán g_o y $\widetilde{T}_o$. Para ello, se expresarán como:

$$g_o(U_i,U_j) = \alpha_j\,, \quad \widetilde{T}_o(U_i,U_j) = \sum_k \beta_j^k U_k\,,$$

   para $i, j = 1, \ldots, n$ y, donde α_j, β_j^k son variables complejas arbitrarias.

   Ahora, con el objetivo de hallar el valor de estas variables se impondrá la condición iii) del Teorema 1.3.2, la propiedad de antisimetría asociada a $\widetilde{T}_o$ y, las condiciones de simetría y positividad asociadas a g_o; es decir:

$$S_o(g_o) = g_o\,,\ S_o(\widetilde{T}_o) = \widetilde{T}_o\,,\ \widetilde{T}_o(X,Y) = -\widetilde{T}_o(Y,X)\,,\ g_o(X,Y) = g_o(Y,X)\,.$$

   Entonces, se obtendrá: bien una contradicción ó que g_o y $\widetilde{T}_o$ todavía dependen de un cierto número de variables. Ahora, se intentará reducir g_o y $\widetilde{T}_o$ a sus expresiones canónicas; es decir, se intentará encontrar un posible cambio de base $U_1,\ldots,U_n$ tal que, a la vez, minimice el número de variables en ambas expresiones y, para ello, será necesario elegir entre un número finito de cambios de base que sean admisibles de los cuales se obtienen formas canónicas diferentes. De hecho, cada forma canónica define una familia de órbitas con respecto a un grupo G', el cual es la representación, en el espacio generado por todos los pares de tensores admisibles $(g_o,\tilde{T}_o)$, de un grupo $G \subset GL(V)$. Así, si se especifica el valor de todas las variables en la expresión de las formas canónicas de g_o y $\widetilde{T}_o$, se estará eligiendo una órbita en particular.

   Ahora, se considerará un tipo canónico, $(g_o,\tilde{T}_o)$, dependiendo de algunas variables y se calculará el álgebra de Lie $\mathfrak{k}$ de todos los endomorfismos A de V tales que $A(S_o) = A(g_o) = A(\widetilde{T}_o) = 0$. Entonces, puede ocurrir que el tipo canónico $(g_o,\tilde{T}_o)$ se divida en un número finito de subtipos con diferentes álgebras $\mathfrak{k}$.

   Finalmente, para cada subtipo $(g_o,\tilde{T}_o,\mathfrak{k})$ se calculará el tensor $\widetilde{R}_o$. Para ello, se expresará como

$$\widetilde{R}_o(U_i,U_j)U_k = \sum_l \gamma_{ijk}^l U_l$$

   donde, γ_{ijk}^l son variables complejas. Ahora, para calcular dichas variables se impondrá la condición de que $\widetilde{R}_o(U_i,U_j) \subset \mathfrak{k}^C$ para todo U_i, U_j, así como las condiciones ii) - vi) del Teorema 1.3.2. Entonces, se obtendrá una contradicción ó bien que $\widetilde{R}_o$ todavía depende de un cierto número de variables. Ahora, se intentará reducir $\widetilde{R}_o$ a su expresión canónica, es decir se intentará encontrar un posible cambio de base $U_1,\ldots,U_n$ como antes, aunque esta vez se impondrá la condición de que, a su vez, mantengan las formas canónicas obtenidas de g_o y $\widetilde{T}_o$. Por tanto, una vez más se deberán distinguir varios tipos de tensores $\widetilde{R}_o$ con diferentes formas canónicas.

Una vez elegido $\widetilde{R}_o$, se calculará la subálgebra de Lie $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{k}$ de todos los endomorfismos A de V pertenecientes a $\mathfrak{k}$ tales que, además, satisfacen la condición $A(\widetilde{R}_o) = 0$.

3. Para cada s – variedad algebraica obtenida (V, g_o, S_o, $\widetilde{R}_o$, $\widetilde{T}_o$) con $\widetilde{T}_o \neq 0$ se comprobará si el correspondiente espacio s – simétrico simplemente conexo (M,g) es ó no localmente simétrico. Para ello, se calculará el tensor diferencia $\mathcal{D}$ (en el punto inicial $o \in M$) usando g_o y $\widetilde{T}_o$ en la fórmula del Lema 2.1.2 y, así, se podrá calcular R_o usando la fórmula del Lema 1.2.1.9

$$R_o(X,Y) = \tilde{R}_o(X,Y) + [\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_Y] + \mathcal{D}_{\tilde{T}_o(X,Y)}, \text{ para todo } X,\ Y \in V.$$

Ahora, ya que se sabe, debido a [K-N], que *"un espacio es localmente simétrico, si y sólo si,* $\nabla R = \nabla T = 0$*"* y, en nuestro caso particular, debido a que ∇ es la conexión de Levi-Civita, siempre se tiene $\nabla T = 0$, para comprobar nuestro objetivo se aplicará el Teorema 1.2.1.13, el cual en particular decía que:

"$\nabla R \neq 0$ en el espacio Riemanniano (M,g), si y sólo si, $\mathcal{D}_X R_o \neq 0$ para algún $X \in V$."

Así, para cada espacio excepcional que se obtenga, se tendrá que existirán X, Y, Z, $U \in V$ tales que $\mathcal{D}_X R_o(Y,Z)U \neq 0$.

4. A continuación, se comprobará si cada s – variedad algebraica (V, g_o, S_o, $\widetilde{R}_o$, $\widetilde{T}_o$) con $\widetilde{T}_o \neq 0$, cuyo correspondiente espacio s – simétrico simplemente conexo (M,g) no es localmente simétrico, es o no reducible. Para ello, se verá si se verifica o no la Definición 1.3.2.3.

Con ello, se aplicarán el Teorema 1.3.2.4 y la Nota 1.4.4 para saber si el correspondiente espacio s – simétrico simplemente conexo es o no reducible.

5. Ahora, se considerará una s – variedad algebraica (V, g_o, S_o, $\widetilde{R}_o$, $\widetilde{T}_o$) cuyo correspondiente espacio s – simétrico simplemente conexo (M,g), no es ni localmente simétrico ni reducible, y de forma análoga a la demostración del Teorema 1.3.1.7, se obtendrá el álgebra de Lie $\mathfrak{g} = V \oplus \mathfrak{h}$ mediante el cálculo de la tabla de multiplicar dada por la fórmula (1.2) de dicha demostración.

Paralelamente, se calcularán las expresiones de g y S sobre elementos de V.

6. *Realización geométrica*

Finalmente, a partir de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ se construye el espacio homogéneo G/H (donde G es simplemente conexo y $H \subset G$ es cerrado), el cual es la variedad

M buscada. Se calcula la métrica G – invariante g y el campo tensorial de simetría G – invariante S sobre G/H. A partir de S, se calculará s_o, que es la "simetría típica" en el punto $o \in (G/H, g)$.

Para ello, se comprobará en primer lugar si el centro del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es nulo. Si lo es, se usará, si es conveniente, la representación adjunta para obtener la expresión de G y H como ciertos grupos matriciales sino, se usará otra serie de métodos que serán desarrollados en cada caso.

Además, se verá si el espacio homogéneo tiene una estructura topológica más simple, es decir, si es difeomorfo a $\mathbb{R}^n, S^n, \mathbb{R}^k \times S^{n-k}$ ó similares y, en ese caso, se dará una expresión más sencilla de todas las métricas admisibles.

En lo que sigue, se desarrollará este método en las dimensiones *3*, *4* y *5*, denotando las s – variedades algebraicas por (V, g, S, $\widetilde{R}$, $\widetilde{T}$) en lugar de (V, g_o, S_o, $\widetilde{R}_o$, $\widetilde{T}_o$) en aquellos casos en los que no pueda haber confusión.

2.3.2. Dimensión n = 3

Paso 1

Sea V un espacio vectorial real *3* – dimensional sobre $\mathbb{R}$ y sea ($\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$) un sistema de valores propios satisfaciendo al menos una relación de la forma $\Theta_k\Theta_l = \Theta_m$, $k \neq l$. Entonces, se puede suponer que $\Theta_3 = -1$, $\Theta_2 = \overline{\Theta_1}$ y que $\Theta_1\,\Theta_3 = \Theta_2$ ó $\Theta_2\,\Theta_3 = \Theta_1$. Por tanto, se tiene que $\Theta_1 = i$, $\Theta_2 = -i$ y $\Theta_3 = -1$, donde $i = \sqrt{-1}$.

Así, el único sistema de valores propios maximal e irreducible que satisface al menos una relación de la forma $\Theta_k\Theta_l = \Theta_m$, $k \neq l$, es

$$(\Theta_1 = i,\ \Theta_2 = -i,\ \Theta_3 = -1).$$

Paso 2

Sean $S\colon V \to V$ una transformación lineal con valores propios $i, -i, -1$, g un producto interior sobre V tal que $S(g) = g$ y $\widetilde{T} \neq 0$ un tensor de tipo (*1,2*) tal que $\widetilde{T}(X,Y) = -\widetilde{T}(Y,X)$, $S(\widetilde{T}) = \widetilde{T}$. Se denotarán con los mismos símbolos las extensiones lineales de S, g y $\widetilde{T}$ al espacio $V^{\mathbb{C}} = V \oplus_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Sea el vector propio complejo $U \in V^{\mathbb{C}}$ tal que $SU = iU$ y el vector propio real $W \in V$ tal que $SW = -W$. Entonces $S\overline{U} = -i\overline{U}$, ya que si $U = X + iY$ donde $X, Y \in V$, $iX - Y = iU = SU = SX + i\,SY$, se tiene que $SX = -Y$, $SY = X$ y, por tanto, $SU\,S\overline{U} = SX - iSY = -Y - iX = -i(X - iY) = i\overline{U}$.

Lema 2.3.2.1

La condición $S(g) = g$ significa que $g(SZ, SZ') = g(Z,Z')$ para cualesquiera $Z, Z' \in V^{\mathbb{C}}$. Si se aplica, se obtiene:

$$g(U,U)=g(\overline{U},\overline{U})=g(W,U)=g(W,\overline{U})=0,$$
$$g(U,\overline{U})=a^2>0 \quad \text{y} \quad g(W,W)=b^2>0,$$

donde a, b son variables reales.

Demostración

Si en $g(SZ,SZ') = g(Z,Z')$ se toma $Z=Z'=U$ y se aplica el valor conocido del campo tensorial de simetría S sobre U se obtiene que $g(U, U) = g(SU, SU) = g(iU, iU) = -g(U, U)$ y, así que $g(U, U) = 0$. Si $Z=Z'=\overline{U}$ se tiene que $g(\overline{U},\overline{U})=g(S\overline{U},S\overline{U})=g(-i\overline{U},-i\overline{U})=-g(\overline{U},\overline{U})$ y, así $g(\overline{U},\overline{U})=0$. Si ahora se toma $Z=W$ y $Z'=U$, se obtiene que $g(W,U)=g(SW,SU)=$ $=g(-W,iU)=-ig(W,U)$ y, así $g(W,U)=0$. De forma análoga se obtiene que $g(W,\overline{U})=0$.

Por otra parte, si $Z=U$ y $Z'=\overline{U}$ ó $Z=Z'=W$ la condición $S(g) = g$ es satisfecha ya que

$$g(U,\overline{U})=g(SU,S\overline{U})=g(iU,-i\overline{U})=g(U,\overline{U})$$
$$g(W,W)=g(SW,SW)=g(-W,-W)=g(W,W).$$

Además como $W\in V$, se puede afirmar que $g(W,W)=\|W\|^2=b^2>0$ y que $g(U,\overline{U})=a^2>0$, ya que en V^C se puede considerar una J – base $\{X, JX\}$ tal que $U=X-iJX$, $\overline{U}=X+iJX$ y, por tanto,

$$g(U,\overline{U})=g(X-iJX,X+iJX)=$$
$$=g(X,X)+g(JX,JX)+ig(X,JX)-ig(JX,X)=^{6}$$
$$=2g(X,X)=2\|X\|^2=a^2>0.$$

Aplicando además, la propiedad de antisimetría $\tilde{T}(X,Y)=-\tilde{T}(Y,X)$, se obtiene que $\tilde{T}(U,U)=\tilde{T}(\overline{U},\overline{U})=\tilde{T}(W,W)=0$.

Lema 2.3.2.2

Si se usa la propiedad $S(\tilde{T})=\tilde{T}$, cuyo significado es que $\tilde{T}(SZ, SZ') = S\tilde{T}(Z, Z')$ para cualesquiera $Z,Z'\in V^C$, se obtiene:

$$\tilde{T}(U,\overline{U})=0,\ \tilde{T}(U,W)=\alpha\overline{U} \ \text{y}\ \tilde{T}(\overline{U},W)=\overline{\alpha}U,$$

donde $\alpha \neq 0$ es una variable compleja.

[6] Usando la J-invarianza. Ver [K-N].

Demostración

Si en $\tilde{T}(SZ, SZ') = S(\tilde{T}(Z, Z'))$ se toman $Z = U$ y $Z' = \bar{U}$ y, se aplica el valor conocido del campo tensorial de simetría S sobre U y $\bar{U}$ respectivamente, se obtiene que $S(\tilde{T}(U,\bar{U})) = \tilde{T}(SU,S\bar{U}) = \tilde{T}(iU,-i\bar{U}) = \tilde{T}(U,\bar{U})$, lo que implica que $\tilde{T}(U,\bar{U})$ tiene el valor propio *1* ó es cero. Debido a la Nota 1.1.6 se sabe que no se tiene el valor propio *1* por tanto, $\tilde{T}(U,\bar{U}) = 0$.

Si ahora se considera que $Z = U$ y que $Z' = W$, como antes, se obtiene que $S(\tilde{T}(U,W)) = \tilde{T}(SU,SW) = \tilde{T}(iU,-W) = -i\tilde{T}(U,W)$ así, $\tilde{T}(U,W)$, al igual que $\bar{U}$, tiene asociado el valor propio $-i$ por tanto, existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\tilde{T}(U,W) = \alpha\bar{U}$.

Como $\tilde{T}(\bar{U},W) = \textbf{(2.1)} = \overline{\tilde{T}(U,W)} = \overline{\alpha\bar{U}} = \bar{\alpha}U$, se obtiene la relación que faltaba.

Además, como $\tilde{T} \neq 0$, necesariamente $\alpha \neq 0$.

Ahora, se buscará la expresión de la forma canónica para $(S,g,\tilde{T})$, $\tilde{T} \neq 0$. Para ello, considerando $\alpha = \rho e^{2i\psi}$ con $\rho > 0$, se definen $U' = (1/a)e^{-i\psi}U$ y $W' = (1/\rho)W$, entonces, aunque sin variar la notación, se reemplazan U por U' y W por W', obteniendo así que el valor de las variables a^2 y α es *1*. En efecto,

$$g(U',\overline{U'}) = g((1/a)e^{-i\psi}U,(1/a)e^{i\psi}\bar{U}) = (1/a^2)g(U,\bar{U}) = 1,$$

$$g(W',W') = g((1/\rho)W,(1/\rho)W) = (1/\rho^2)g(W,W) = b^2/\rho^2 = \lambda^2 > 0,$$

$$\tilde{T}(U',W') = \tilde{T}((1/a)e^{-i\psi}U,(1/\rho)W) = (1/a\rho e^{i\psi})\tilde{T}(U,W) = (1/a\rho e^{i\psi})\alpha\bar{U} = (1/a)\bar{U} = \overline{U'},$$

y ahora, aplicando (2.1) a esta última expresión se tiene que $\tilde{T}(\overline{U'},W') = U'$.

Así, se concluye que para cada *3* – tupla de tensores $(S,g,\tilde{T})$ cumpliendo las propiedades requeridas sobre V, existe una base $(U, \bar{U}, W)$ de $V^{\mathbb{C}}$ $(W \in V)$ tal que:

$$SU = iU,\ S\bar{U} = -i\bar{U}, \quad SW = -W,$$

$$g(U,U) = g(\bar{U},\bar{U}) = g(W,U) = g(W,\bar{U}) = 0,\ g(U,\bar{U}) = 1,\ g(W,W) = \lambda^2 > 0,$$

$$\tilde{T}(U,\bar{U}) = 0,\ \tilde{T}(U,W) = \bar{U},\ \tilde{T}(\bar{U},W) = U. \qquad \textbf{(2.2)}$$

Por tanto, se ha obtenido una forma canónica arbitraria y admisible para la *3* – tupla $(S,g,\tilde{T})$, $\tilde{T} \neq 0$.

Además, $\lambda > 0$ es un invariante de esta forma canónica. En efecto, si se consideran dos *3* – tuplas $(S_j,g_j,\tilde{T}_j)$, $j = 1, 2$, con diferentes valores de λ, se tienen dos métricas distintas sobre la misma variedad por tanto, no se pueden superponer mediante una transformación lineal $f: V \to V$.

Ahora, se calcula el álgebra de Lie $\mathfrak{k}$ de todos los endomorfismos A de V tales que $A(S) = A(g) = A(\widetilde{T}) = 0$ obteniendo que $\mathfrak{k} = (0)$.

Lema 2.3.2.3

La relación $A(S) = 0$ significa que $A \cdot S = S \cdot A$, de donde se obtiene que:

$$A\overline{U}= uU, \quad A\overline{U}=\overline{u}\overline{U}= \text{ y } AW = wW \ (w \text{ real}).$$

Demostración

Si se aplica esta relación y el valor conocido de S sobre W y U, se obtiene $S(A(W)) = (S \cdot A)(W) = (A \cdot S)(W) = A(S(W)) = A(-W) = -A(W)$, lo que implica que $A(W)$ tiene asociado, como W, el valor propio -1 y, así, existe $w \in \mathbb{R}$ tal que $AW = wW$ y que $S(A(U)) = (S \cdot A)(U) = (A \cdot S)(U) = A(S(U)) = A(iU) = iA(U)$; por tanto, $A(U)$ tiene asociado, al igual que U, el valor propio i y, así, existe $u \in \mathbb{C}$ tal que $A(U) = uU$. Si ahora se conjuga esta última expresión, se obtiene $A(\overline{U}) = \overline{u}\overline{U}$.

Por tanto, para calcular $\mathfrak{k}$ bastará con conocer el valor de u y w. Para ello, se usarán los dos lemas siguientes:

Lema 2.3.2.4

La relación $A(g) = 0$ significa que $g(AZ,Z') = g(Z,AZ')$ para cada $Z, Z' \in V^C$. Aplicándola, se obtiene que $u + \overline{u} = 0$ y $w = 0$.

Demostración

En efecto, si se toma en dicha relación $Z = U$, $Z' = \overline{U}$ y se aplican los valores conocidos de g y A sobre U y $\overline{U}$, se obtiene que

$$0 = g(AU,\overline{U}) + g(U, A\overline{U}) = g(uU,\overline{U}) + g(U,\overline{u}\overline{U}) = (u + \overline{u})g(U,\overline{U}) = u + \overline{u} .$$

Si ahora se toma $Z = Z' = W$, de forma análoga se obtiene que

$$0 = g(AW,W) + g(W, AW) = 2g(wW,W) = 2wg(W,W) = 2w\lambda^2$$

y, aplicando que $\lambda^2 > 0$, se concluye que $w = 0$.

Lema 2.3.2.5

De la relación $A(\widetilde{T}) = 0$, cuyo significado es que para cada $U,W \in V^C$ $A(\widetilde{T}(U,W)) = \widetilde{T}(AU,W) + \widetilde{T}(U,AW)$, se obtiene que $\overline{u} - u = w$.

Demostración

En efecto, si $A(\widetilde{T}(U,W)) = \widetilde{T}(AU,W) + \widetilde{T}(U,AW)$ se aplica sobre los elementos de la base, se obtiene que

$$A(\bar{U}) = \tilde{T}(uU,W) + \tilde{T}(U,wW),$$

$$\bar{u}\bar{U} = (u+w)\bar{U} \text{ y, así, } \bar{u} - u = w.$$

Por tanto, usando $u + \bar{u} = 0$, $w = 0$ y $\bar{u} - u = w$, se concluye que $\bar{u} = u = 0$.

Así, $\mathfrak{k} = (0)$.

Para calcular $\widetilde{R}$ bastará imponer las condiciones necesarias para que (V, g, S, $\widetilde{R}$, $\widetilde{T}$) sea una s – variedad algebraica. En efecto, si (V, g, S, $\widetilde{R}$, $\widetilde{T}$) es una s – variedad algebraica, con $\widetilde{T} \neq 0$, usando la condición ii) del Teorema 1.3.2, se puede ver que $\widetilde{R}(X,Y) \in \mathfrak{k}$ para cada $X, Y \in V$ y, así, $\widetilde{R} = 0$. Inversamente, cada colección (V, g, S, 0, $\widetilde{T}$) con tensores S, g y $\widetilde{T}$ satisfaciendo (2.2) es una s – variedad algebraica.

Así, toda s – variedad algebraica sobre V, con $\widetilde{T} \neq 0$, es de la forma (V, g, S, 0, $\widetilde{T}$) con tensores S, g y $\widetilde{T}$ satisfaciendo (2.2) y, dependiendo sólo de un parámetro real $\lambda > 0$. Además, se tiene que $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} = (0)$.

Paso 3

Debido al siguiente lema, se sabe que el correspondiente espacio s – simétrico simplemente conexo (M,g) no es localmente simétrico.

Lema 2.3.2.6

Para U y $\bar{U}$, elementos fijados de la base de V, se tiene que

$$(\mathcal{D}_U R)(U,\bar{U})U \neq 0.$$

Demostración

En efecto,

$$(\mathcal{D}_U R)(U,\bar{U})U = \mathcal{D}_U(R(U,\bar{U})U) - R(\mathcal{D}_U U,\bar{U})U - R(U,\mathcal{D}_U\bar{U})U - R(U,\bar{U})\mathcal{D}_U U = *$$

$$* = -\left(1/\lambda^2\right)R(W,\bar{U})U - \left(1/\lambda^2\right)R(U,\bar{U})W = \Diamond$$

$$\Diamond = \left(1/\lambda^4\right)W \neq 0.$$

Donde los cálculos relativos a $*$, son los siguientes:

En primer lugar, se ve que $\mathcal{D}_U U = \left(1/\lambda^2\right)W \neq 0$ y que $\mathcal{D}_U\bar{U} = 0$. Como $\mathcal{D}_U U = aU + b\bar{U} + cW$ y $\lambda^2 > 0$, calculando y sustituyendo el valor de a, b y c, se obtiene lo buscado. Para ello, se usa la fórmula del Lema 2.1.2. Como $a = g(\mathcal{D}_U U,U)$, $b = g(\mathcal{D}_U U,\bar{U})$ y $c\lambda^2 = g(\mathcal{D}_U U,W)$, se tiene que:

$$2a = 2g(\mathcal{D}_U U, U) = 3g(\tilde{T}(U,U),U) = 0\,,$$
$$2b = 2g(\mathcal{D}_U U, \bar{U}) = g(\tilde{T}(U,U),\bar{U}) + 2g(\tilde{T}(U,\bar{U}),U) = 0\,,$$
$$2c\lambda^2 = 2g(\mathcal{D}_U U, W) = g(\tilde{T}(U,U),W) + 2g(\tilde{T}(U,W),U) = 2$$

y, por tanto, $a = b = 0$ y $c = \left(1/_{\lambda^2}\right)$. Como $\mathcal{D}_U \bar{U} = aU + b\bar{U} + cW$, si se calcula el valor de *a*, *b*, *c* y se sustituye, se obtiene lo buscado. Para ello, se usa la fórmula del Lema 2.1.2. Como $a = g(\mathcal{D}_U \bar{U}, U)$, $b = g(\mathcal{D}_U \bar{U}, \bar{U})$ y $c\lambda^2 = g(\mathcal{D}_U \bar{U}, W)$, se tiene que:

$$2a = 2g(\mathcal{D}_U \bar{U}, U) = 2g(\tilde{T}(\bar{U},U),U) + g(\tilde{T}(U,U),\bar{U}) = 0\,,$$
$$2b = 2g(\mathcal{D}_U \bar{U}, \bar{U}) = g(\tilde{T}(\bar{U},U),\bar{U}) + g(\tilde{T}(\bar{U},\bar{U}),U) + g(\tilde{T}(U,\bar{U}),\bar{U}) = 0\,,$$
$$2c\lambda^2 = 2g(\mathcal{D}_U \bar{U}, W) = g(\tilde{T}(\bar{U},U),W) + g(\tilde{T}(\bar{U},W),U) + g(\tilde{T}(U,W),\bar{U}) = 0$$

y, por tanto, $a = b = c = 0$.

Ahora, se calcula el valor de $\mathcal{D}_U(R(U,\bar{U})U)$. Para ello, primero se comprueba que $\mathcal{D}_{\bar{U}} U = 0$ y $\mathcal{D}_{\bar{U}} W = -\bar{U}$. Como $\mathcal{D}_{\bar{U}} U = aU + b\bar{U} + cW$, calculando y sustituyendo el valor de *a*, *b* y *c*, se obtiene lo buscado. Para ello, se usa la fórmula del Lema 2.1.2. Como $a = g(\mathcal{D}_{\bar{U}} U, U)$, $b = g(\mathcal{D}_{\bar{U}} U, \bar{U})$ y $c\lambda^2 = g(\mathcal{D}_{\bar{U}} U, W)$, se obtiene que:

$$2a = 2g(\mathcal{D}_{\bar{U}} U, U) = g(\tilde{T}(U,\bar{U}),U) + g(\tilde{T}(U,U),\bar{U}) + g(\tilde{T}(\bar{U},U),U) = 0\,,$$
$$2b = 2g(\mathcal{D}_{\bar{U}} U, \bar{U}) = 2g(\tilde{T}(U,\bar{U}),\bar{U}) + g(\tilde{T}(\bar{U},\bar{U}),U) = 0\,,$$
$$2c\lambda^2 = 2g(\mathcal{D}_{\bar{U}} U, W) = g(\tilde{T}(U,\bar{U}),W) + g(\tilde{T}(U,W),\bar{U}) + g(\tilde{T}(\bar{U},W),U) = 0\,,$$

y, por tanto, $a = b = c = 0$. Y, como $\mathcal{D}_{\bar{U}} W = aU + b\bar{U} + cW$, calculando y sustituyendo el valor de *a*, *b* y *c*, se obtiene lo buscado. Para ello, se usa la fórmula del Lema 2.1.2. Como $a = g(\mathcal{D}_{\bar{U}} W, U)$, $b = g(\mathcal{D}_{\bar{U}} W, \bar{U})$ y $c\lambda^2 = g(\mathcal{D}_{\bar{U}} W, W)$, se obtiene que:

$$2a = 2g(\mathcal{D}_{\bar{U}} W, U) = g(\tilde{T}(W,\bar{U}),U) + g(\tilde{T}(W,U),\bar{U}) + g(\tilde{T}(\bar{U},U),W) = 0\,,$$
$$2b = 2g(\mathcal{D}_{\bar{U}} W, \bar{U}) = 2g(\tilde{T}(W,\bar{U}),\bar{U}) + g(\tilde{T}(\bar{U},\bar{U}),W) = -2\,,$$
$$2c\lambda^2 = 2g(\mathcal{D}_{\bar{U}} W, W) = g(\tilde{T}(W,\bar{U}),W) + g(\tilde{T}(W,W),\bar{U}) + g(\tilde{T}(\bar{U},W),W) = 0$$

y, por tanto, $a = c = 0$ y $b = -1$.

Y, así, ahora se obtiene que

$$\mathcal{D}_U(R(U,\bar{U})U) = \mathcal{D}_U(\tilde{R}(U,\bar{U})U + [\mathcal{D}_U, \mathcal{D}_{\bar{U}}]U + \mathcal{D}_{\tilde{T}(U,\bar{U})}U) =$$
$$= \mathcal{D}_U \mathcal{D}_U(\mathcal{D}_{\bar{U}} U) - \mathcal{D}_U \mathcal{D}_{\bar{U}}(\mathcal{D}_U U) = -\left(1/_{\lambda^2}\right)\mathcal{D}_U(\mathcal{D}_{\bar{U}} W) = \left(1/_{\lambda^2}\right)\mathcal{D}_U \bar{U} = 0$$

Ahora se realizan los cálculos relativos a $\lozenge$.

Para calcular $R(W,\bar{U})U$, se necesita ver que $\mathcal{D}_W U = 0$. Como $\mathcal{D}_W U = aU + b\bar{U} + cW$, calculando y sustituyendo el valor de *a*, *b* y *c*, se obtiene lo buscado. Para ello, se usa la fórmula del Lema 2.1.2. Como $a = g(\mathcal{D}_W U, U)$, $b = g(\mathcal{D}_W U, \bar{U})$ y $c\lambda^2 = g(\mathcal{D}_W U, W)$, se tiene que:

$$2a = 2g(\mathcal{D}_W U, U) = g(\tilde{T}(U,W),U) + g(\tilde{T}(U,U),W) + g(\tilde{T}(W,U),U) = 0,$$

$$2b = 2g(\mathcal{D}_W U, \bar{U}) = g(\tilde{T}(U,W),\bar{U}) + g(\tilde{T}(U,\bar{U}),W) + g(\tilde{T}(W,\bar{U}),U) = 0,$$

$$2c\lambda^2 = 2g(\mathcal{D}_W U, W) = 2g(\tilde{T}(U,W),W) + g(\tilde{T}(W,W),U) = 0$$

y, por tanto, $a = b = c = 0$.

Así,

$$R(W,\bar{U})U = \tilde{R}(W,\bar{U})U + [\mathcal{D}_W, \mathcal{D}_{\bar{U}}]U + \mathcal{D}_{\tilde{T}(W,\bar{U})}U =$$
$$= \mathcal{D}_W \mathcal{D}_{\bar{U}} U - \mathcal{D}_{\bar{U}} \mathcal{D}_W U - \mathcal{D}_U U = -\left(1/\lambda^2\right) W.$$

Y, para calcular $R(U,\bar{U})W$, se necesita además saber que $\mathcal{D}_U W = -U$. Como $\mathcal{D}_U W = aU + b\bar{U} + cW$, calculando y sustituyendo el valor de *a*, *b* y *c*, se obtiene lo buscado. Para ello, se usa la fórmula del Lema 2.1.2. Como $a = g(\mathcal{D}_U W, U)$, $b = g(\mathcal{D}_U W, \bar{U})$ y $c\lambda^2 = g(\mathcal{D}_U W, W)$, se obtiene que:

$$2a = 2g(\mathcal{D}_U W, U) = 2g(\tilde{T}(W,U),U) + g(\tilde{T}(U,U),W) = -2,$$

$$2b = 2g(\mathcal{D}_U W, \bar{U}) = g(\tilde{T}(W,U),\bar{U}) + g(\tilde{T}(W,\bar{U}),U) + g(\tilde{T}(U,\bar{U}),W) = 0,$$

$$2c\lambda^2 = 2g(\mathcal{D}_U W, W) = g(\tilde{T}(W,U),W) + g(\tilde{T}(W,W),U) + g(\tilde{T}(U,W),W) = 0$$

y, así, $b = c = 0$ y $a = -1$.

Por tanto,

$$R(U,\bar{U})W = \tilde{R}(U,\bar{U})W + [\mathcal{D}_U, \mathcal{D}_{\bar{U}}]W + \mathcal{D}_{\tilde{T}(U,\bar{U})}W =$$
$$= \mathcal{D}_U \mathcal{D}_{\bar{U}} W - \mathcal{D}_{\bar{U}} \mathcal{D}_U W = -\mathcal{D}_U \bar{U} + \mathcal{D}_{\bar{U}} U = 0.$$

Paso 4

Ahora se ve que la *s* - variedad algebraica (V, g, S, 0, $\tilde{T}$) con $\tilde{T} \neq 0$, no es reducible. Para ello se usará el lema siguiente.

Lema 2.3.2.7

Si se consideran $U=(X+iY)/\sqrt{2}$ y $Z = W$ donde $X, Y, Z \in V$, se obtiene

$$SX=-Y\ ,\ SY=X\ ,\ SZ=-Z\ ,$$

$$g(X,X)=g(Y,Y)=1\ ,\ g(Z,Z)=\lambda^2\ ,$$

$$\tilde{T}(X,Y)=0\ ,\ \tilde{T}(X,Z)=X\ ,\ \tilde{T}(Y,Z)=-Y\ ,$$

y, que X, Y, Z son ortogonales.

Demostración

En efecto, como $SZ=SW=-W=-Z$ y,

$$\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)(iX-Y)=iU=SU=S\left(\tfrac{X+iY}{\sqrt{2}}\right)=\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)(SX+iSY)\,,$$

se tiene que $SZ=-Z$, $SY=X$ y $SX=-Y$.

Por otra parte, como

$$0=g(U,U)=g(\tfrac{X+iY}{\sqrt{2}},\tfrac{X+iY}{\sqrt{2}})=\frac{1}{2}[g(X,X)+2ig(X,Y)-g(Y,Y)]\,,$$

$$1=g(U,\bar{U})=g(\tfrac{X+iY}{\sqrt{2}},\tfrac{X-iY}{\sqrt{2}})=\frac{1}{2}[g(X,X)+g(Y,Y)]\,,$$

se tiene que $g(X,X)=g(Y,Y)=1$ y $g(X,Y)=0$. De la expresión

$$0=g(W,U)=g(Z,\tfrac{X+iY}{\sqrt{2}})=\frac{1}{\sqrt{2}}[g(Z,X)+ig(Z,Y)]\,,$$

se obtiene que $g(Z,X)=0$, $g(Z,Y)=0$. Y, como $Z = W$, $\lambda^2=g(W,W)=g(Z,Z)$.

Además, de

$$0=\tilde{T}(U,\bar{U})=\tilde{T}(\tfrac{X+iY}{\sqrt{2}},\tfrac{X-iY}{\sqrt{2}})=\frac{1}{2}[\tilde{T}(X,X)+\tilde{T}(Y,Y)-i2\tilde{T}(X,Y)]\,,$$

$$\tfrac{X-iY}{\sqrt{2}}=\bar{U}=\tilde{T}(U,W)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\tilde{T}(X,W)+i\tilde{T}(Y,W)]=\frac{1}{\sqrt{2}}[\tilde{T}(X,Z)+i\tilde{T}(Y,Z)]\,,$$

se concluye que $\tilde{T}(X,Y)=0$, $\tilde{T}(X,Z)=X$ y $\tilde{T}(Y,Z)=-Y$.

Proposición 2.3.2.8

No existe una descomposición de $V=V_1\oplus V_2$ tal que $(V, g, S, 0, \tilde{T})$ verifique las condiciones dadas en la Definición 1.3.2.3.

Demostración

En efecto, como $V = \langle X, Y, Z \rangle$, se puede suponer que $Z \in V_1$. Puesto que $\tilde{T}(X,Z) = X$, se ve que la relación $\tilde{T}(X,Z) = \sum_{i=1}^{2} \tilde{T}^i(\pi_i X, \pi_i Z)$ es satisfecha, si y sólo si, $X \in V_1$. Por otra parte, debido a que $\tilde{T}(Y,Z) = -Y$, se tiene que la relación $\tilde{T}(Y,Z) = \sum_{i=1}^{2} \tilde{T}^i(\pi_i Y, \pi_i Z)$ se cumple, si y sólo si, $Y \in V_1$. Por tanto, $V = V_1$.

Así, se puede afirmar que el correspondiente espacio s – simétrico simplemente conexo (M, g) no es reducible.

Paso 5

Como $\widetilde{R} = 0$ y $\mathfrak{h} = (0)$ se tiene que la tabla de multiplicar del “álgebra de Nomizu” $\mathfrak{g}$ estará dada solamente por la fórmula $[X_1, X_2] = -\tilde{T}(X_1, X_2)$ para cualesquiera $X_1, X_2 \in V$. Al calcularla se obtiene

$$[X,Y] = 0, \ [X,Z] = -X \ \text{ y } \ [Y,Z] = Y,$$

donde $V = \langle X, Y, Z \rangle$. En efecto, usando lo calculado en el paso *4* se tiene que $[X,Y] = -\tilde{T}(X,Y) = 0$, $[X,Z] = -\tilde{T}(X,Z) = -X$ y $[Y,Z] = -\tilde{T}(Y,Z) = Y$.

Paso 6

Ya que $\mathfrak{h} = (0)$, para construir el espacio homogéneo buscado solamente será necesario calcular el grupo de Lie G asociado al álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Lema 2.3.2.9

Como el centro del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es nulo, se puede aplicar la representación adjunta, obteniendo así, que el grupo asociado G es el grupo formado por todas las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} e^z & 0 & x \\ 0 & e^{-z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ donde } x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Demostración

Se comenzará probando que el centro de $\mathfrak{g} = \langle X, Y, Z \rangle$ es nulo; es decir, se ve que $Z(\mathfrak{g}) = \{ A \in \mathfrak{g} : [A, X] = [A, Y] = [A, Z] = 0 \} = \{0\}$.

Sea $A = xX + yY + zZ$, donde $x, y, z \in \mathbb{R}$ entonces, usando el paso 5, se obtiene que $x = y = z = 0$. Veámoslo:

$$0 = [A, X] = [xX + yY + zZ, X] = z[Z, X] = zX,$$

$$0=[A,Y]=[xX+yY,X]=0\,,$$

$$0=[A,Z]=[xX+yY,Z]=x[X,Z]+y[Y,Z]=-xX+yY\,,$$

para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ entonces, $x=y=z=0$ ya que, X e Y son linealmente independientes.

Ahora, como $Z(\mathfrak{g})=(0)$ se puede usar la representación adjunta $ad:\mathfrak{g}\to End(\mathfrak{g})$ para calcular la representación matricial de $\mathfrak{g}$. Para ello, se comenzará calculando las matrices asociadas a las aplicaciones lineales $ad(X)$, $ad(Y)$ y $ad(Z)$. La aplicación $ad(X):\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$, está dada por:

$$\left.\begin{aligned} ad(X)(X)&=[X,X]=0\\ ad(X)(Y)&=[X,Y]=0\\ ad(X)(Z)&=[X,Z]=-X\end{aligned}\right\}\text{ así, su matriz asociada por columnas es}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

La aplicación $ad(Y):\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$, lo está por:

$$\left.\begin{aligned} ad(Y)(X)&=[Y,X]=0\\ ad(Y)(Y)&=[Y,Y]=0\\ ad(Y)(Z)&=[Y,Z]=Y\end{aligned}\right\}\text{ así, su matriz asociada por columnas es }\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Y $ad(Z):\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$, lo está por:

$$\left.\begin{aligned} ad(Z)(X)&=[Z,X]=X\\ ad(Z)(Y)&=[Z,Y]=-Y\\ ad(Z)(Z)&=[Z,Z]=0\end{aligned}\right\}\text{ así, su matriz asociada por columnas es }\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Por tanto, se tiene que la expresión matricial del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es:

$$\mathfrak{g}=\left\{a'\cdot\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+b\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+c\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}:a',b,c\in\mathbb{R}\right\},$$

donde, si se considera que $a=-a'$, se tiene que

$$\mathfrak{g}=\left\{\begin{pmatrix} c & 0 & a \\ 0 & -c & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a,b,c\in\mathbb{R}\right\}.$$

Ahora, usando la aplicación exponencial $\exp:\mathfrak{g}\to G$, se calcula la expresión matricial del grupo de Lie G.

Dada una matriz $A=\begin{pmatrix} c & 0 & a \\ 0 & -c & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\in\mathfrak{g}$, se sabe por [W] que:

$$\exp(A)=e^A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}=I+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\begin{pmatrix} c^n & 0 & ac^{n-1} \\ 0 & (-1)^n c^n & b(-1)^{n-1}c^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c^n}{n!} & 0 & a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c^n}{(n+1)!} \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n c^n}{n!} & b\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n c^n}{(n+1)!} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^c & 0 & a\left(\frac{e^c-1}{c}\right) \\ 0 & e^{-c} & b\left(\frac{e^{-c}+1}{c}\right) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^z & 0 & x \\ 0 & e^{-z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así, se tiene que el grupo de Lie G es:

$$G=\left\{\begin{pmatrix} e^z & 0 & x \\ 0 & e^{-z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x,y,z\in\mathbb{R}\right\}.$$

Claramente, se observa que cada matriz de G se puede identificar con la 3 – tupla $(x, y, z) \in\mathbb{R}^3$ por tanto, se tiene que G es difeomorfo al espacio euclídeo $\mathbb{R}^3(x,y,z)$.

Así, G es el grupo de Lie simplemente conexo buscado cuya álgebra de Lie es $\mathfrak{g}$.

A continuación se calcula la métrica G – invariante g.

Lema 2.3.2.10

X, Y, $Z\in\mathfrak{g}$ pueden ser identificados respectivamente con los campos vectoriales invariantes a izquierda sobre G

$$e^{z}\frac{\partial}{\partial x},\ e^{-z}\frac{\partial}{\partial y} \text{ y } \frac{\partial}{\partial z}.$$

Demostración

Se comenzará calculando los campos vectoriales invariantes a izquierda sobre G. Para ello, dado $A=\begin{pmatrix} e^{c} & 0 & a \\ 0 & e^{-c} & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\in G$, se tiene que la aplicación translación a izquierda asociada $L_A : G \to G$, dada por $L_A(g) = A\cdot g$, para todo $g\in G$, actúa de la siguiente forma:

$$L_A((x,y,z)) \cong L_A\left(\begin{pmatrix} e^{z} & 0 & x \\ 0 & e^{-z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = L_A(g) = A\cdot g = \begin{pmatrix} e^{z+c} & 0 & xe^{c}+a \\ 0 & e^{-(z+c)} & ye^{-c}+b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong$$

$$\cong (xe^{c}+a, ye^{-c}+b, z+c).$$

Se denotará por $e = Id \cong (0,0,0)$ el elemento identidad de G.

Así, la matriz asociada a la diferencial L_{A*_e} es $\begin{pmatrix} e^{c} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Y se tiene que

$$L_{A*_e}(e^{z}|_e \tfrac{\partial}{\partial x}|_e) = L_{A*_e}(\tfrac{\partial}{\partial x}|_e) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{c} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv e^{c}\tfrac{\partial}{\partial x}|_A = (e^{z}|_e \tfrac{\partial}{\partial x}|_e)\circ L_A,$$

$$L_{A*_e}(e^{-z}|_e \tfrac{\partial}{\partial y}|_e) = L_{A*_e}(\tfrac{\partial}{\partial y}|_e) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{c} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv e^{-c}\tfrac{\partial}{\partial y}|_A = (e^{-z}|_e \tfrac{\partial}{\partial y}|_e)\circ L_A,$$

y

$$L_{A*_e}(\tfrac{\partial}{\partial z}|_e) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{c} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \tfrac{\partial}{\partial z}|_A = (\tfrac{\partial}{\partial z}|_e)\circ L_A.$$

Así, $e^{z}\dfrac{\partial}{\partial x}$, $e^{-z}\dfrac{\partial}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial}{\partial z}$ son los campos vectoriales invariantes a izquierda buscados.

Además, se identificarán con X, Y y Z respectivamente, debido a que

$$0=[X,Y]=[e^{z}\tfrac{\partial}{\partial x},e^{-z}\tfrac{\partial}{\partial y}]=0,$$

$$-X=[X,Z]=[e^{z}\tfrac{\partial}{\partial x},\tfrac{\partial}{\partial z}]=-e^{z}\tfrac{\partial}{\partial x},$$

$$Y=[Y,Z]=[e^{-z}\tfrac{\partial}{\partial y},\tfrac{\partial}{\partial z}]=e^{-z}\tfrac{\partial}{\partial y}.$$

Por ello, se tiene que:

Lema 2.3.2.11

El producto interior g sobre $V=\mathfrak{g}$ induce la siguiente métrica Riemanniana invariante sobre $\mathbb{R}^3(x,y,z)$:

$$g=e^{-2z}dx^2+e^{2z}dy^2+\lambda^2dz^2,\ \lambda>0.$$

Demostración

En efecto, se sabe que $g(X,X)=g(Y,Y)=1$, $g(Z,Z)=\lambda^2$ y que el resto de relaciones son cero. Así, si se identifican $X\equiv e^{z}\dfrac{\partial}{\partial x}$, $Y\equiv e^{-z}\dfrac{\partial}{\partial y}$ y, se obtiene que:

$$1=g(X,X)=e^{2z}g(\tfrac{\partial}{\partial x},\tfrac{\partial}{\partial x}),\ \ 1=g(Y,Y)=e^{-2z}g(\tfrac{\partial}{\partial y},\tfrac{\partial}{\partial y}),$$

$$\lambda^2=g(Z,Z)=g(\tfrac{\partial}{\partial z},\tfrac{\partial}{\partial z}),$$

y, por tanto, $g(\tfrac{\partial}{\partial x},\tfrac{\partial}{\partial x})=e^{-2z}$, $g(\tfrac{\partial}{\partial y},\tfrac{\partial}{\partial y})=e^{2z}$, $g(\tfrac{\partial}{\partial z},\tfrac{\partial}{\partial z})=\lambda^2$ y que el resto de componentes son nulas.

Así, se tiene que

$$g=g(\tfrac{\partial}{\partial x},\tfrac{\partial}{\partial x})dx^2+g(\tfrac{\partial}{\partial y},\tfrac{\partial}{\partial y})dy^2+g(\tfrac{\partial}{\partial z},\tfrac{\partial}{\partial z})dz^2+2g(\tfrac{\partial}{\partial x},\tfrac{\partial}{\partial y})dxdy+2g(\tfrac{\partial}{\partial x},\tfrac{\partial}{\partial z})dxdz+$$

$$+2g(\tfrac{\partial}{\partial y},\tfrac{\partial}{\partial z})dydz=e^{-2z}dx^2+e^{2z}dy^2+\lambda^2dz^2,$$

donde $\lambda>0$. Evidentemente, g es una métrica Riemanniana G – invariante.

Finalmente, se tiene que:

Lema 2.3.2.12

La simetría típica s_o de orden 4 en el punto $o\equiv(0,0,0)$ de $\mathbb{R}^3(x,y,z)$ es la transformación dada por:

$$x'=-y,\ \ y'=x,\ \ z'=-z.$$

Demostración

Debido al paso *4*, se sabe que $S_o(X) = -Y$, $S_o(Y) = X$ y $S_o(Z) = -Z$.

Así, se tiene que la matriz asociada a S_o por columnas es $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Como lo que se quiere calcular es la simetría $s_o : M \to M$ definida por $s_o(x,y,z) = (x',y',z')$ y, cumpliendo $(s_o)_{*_o} = S_o$ y $s_o^{\,4} = Id.$, se usará lo anterior y la condición $(s_o)_{*_o} = S_o$ para obtener que:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial z'}{\partial x} \\ \frac{\partial x'}{\partial y} & \frac{\partial y'}{\partial y} & \frac{\partial z'}{\partial y} \\ \frac{\partial x'}{\partial z} & \frac{\partial y'}{\partial z} & \frac{\partial z'}{\partial z} \end{pmatrix},$$

de donde, $x' = -y$, $y' = x$, $z' = -z$.

Ahora, se comprobará que se satisface la segunda condición, $s_o^{\,4} = Id$. En efecto,

$$(x,y,z) \xrightarrow{s_o} (-y,x,-z) \xrightarrow{s_o} (-x,-y,z) \xrightarrow{s_o} (y,-x,-z) \xrightarrow{s_o} (x,y,z).$$

Así, la aplicación $s_o : M \to M$ definida por $s_o(x,y,z) = (-y,x,-z)$, es la simetría típica buscada.

2.3.3. Dimensión n = 4

Esta vez, no se calculan todos los sistemas de valores propios irreducibles y maximales satisfaciendo al menos una relación de la forma $\Theta_i\Theta_j = \Theta_k$, $i \neq j$, sino que se comienza dando una relación de todos los posibles sistemas de valores propios maximales y, después, para cada caso en particular, se irán imponiendo el resto de las condiciones.

Proposición 2.3.3.1

Los únicos sistemas de valores propios maximales para la dimensión $n = 4$, son los siguientes:

A) $(\Theta,\Theta^2,\Theta,\Theta^2)$ donde $\Theta = e^{2\pi i/3}$,

B) $(\Theta,\Theta^2,\Theta^3,\Theta^4)$ donde $\Theta = e^{2\pi i/5}$,

C) $(i,-i,-1,-1)$,

D) $(-1,-1,-1,-1)$.

Demostración

Debido a la Definición 1.5.1, se tiene que los únicos sistemas de valores propios posibles son ó los de la forma $(\Theta,\overline{\Theta},\Xi,\overline{\Xi})$ donde, $\Theta,\Xi\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, ó los de la forma $(\Theta,\overline{\Theta},-1,-1)$, con $\Theta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, ó $(-1,-1,-1,-1)$.

En el primer caso, se tiene que en su conjunto de relaciones características asociado Σ, sólo pueden aparecer las siguiente relaciones

$$\Theta\overset{(1)}{=}\Xi\,,\ \Theta\Xi\overset{(3)}{=}\overline{\Theta}\,,\ \Theta\overline{\Xi}\overset{(5)}{=}\Xi\,,$$
$$\overline{\Theta}\overset{(2)}{=}\Xi\,,\ \Theta\Xi\overset{(4)}{=}\overline{\Xi}\,,\ \Theta\overline{\Xi}\overset{(6)}{=}\overline{\Theta}\,,$$

y sus conjugadas. Ahora, a partir de estas relaciones, se calcularán cuales serán los conjuntos de relaciones características maximales asociados que se pueden obtener. Para ello, primero se considerarán los siguientes conjuntos:

$$\Sigma^1=\left\{\Theta\overset{(1)}{=}\Xi \text{ y su conjugada}\right\},\ \Sigma^2=\left\{\overline{\Theta}\overset{(2)}{=}\Xi \text{ y su conjugada}\right\},$$
$$\Sigma^3=\left\{\Theta\Xi\overset{(3)}{=}\overline{\Theta} \text{ y su conjugada}\right\},\ \Sigma^4=\left\{\Theta\Xi\overset{(4)}{=}\overline{\Xi} \text{ y su conjugada}\right\},$$
$$\Sigma^5=\left\{\Theta\overline{\Xi}\overset{(5)}{=}\Xi \text{ y su conjugada}\right\} \text{ y } \Sigma^6=\left\{\Theta\overline{\Xi}\overset{(6)}{=}\overline{\Theta} \text{ y su conjugada}\right\}.$$

A continuación, en cada Σ^i, $i=1,\ldots,6$, se irán añadiendo, una a una y mientras que éstas sean compatibles entre si, desde la relación (i+1) hasta la relación (6), i = 1,..., 6, obteniendo así todos los posibles conjuntos con dos, tres y, hasta como mucho, 6 relaciones.

En Σ^1, se observa que no se puede añadir ni la relación $\overline{\Theta}\overset{(2)}{=}\Xi$ ni $\Theta\overline{\Xi}\overset{(5)}{=}\Xi$ ni $\Theta\overline{\Xi}\overset{(6)}{=}\overline{\Theta}$ ya que, ninguna de las tres es compatible con la relación $\Theta\overset{(1)}{=}\Xi$. Sin embargo, las relaciones $\Theta\Xi\overset{(3)}{=}\overline{\Theta}$ y $\Theta\Xi\overset{(4)}{=}\overline{\Xi}$ sí que pueden ser añadidas. Así, si se añade la primera relación compatible, se tiene que

$$\Sigma^1=\left\{\Theta\overset{(1)}{=}\Xi,\Theta\Xi\overset{(3)}{=}\overline{\Theta} \text{ y sus conjugadas}\right\}$$

y, además, que es uno de los conjuntos maximales buscados ya que, si ahora se añade la relación compatible que queda $\Theta\Xi\overset{(4)}{=}\overline{\Xi}$, se tiene, debido a que esta puede ser obtenida fácilmente a partir de las relaciones (1) y (3), que:

$$\left\{\Theta\overset{(1)}{=}\Xi,\Theta\Xi\overset{(3)}{=}\overline{\Theta} \text{ y sus conjugadas}\right\}=\left\{\Theta\overset{(1)}{=}\Xi,\Theta\Xi\overset{(3)}{=}\overline{\Theta},\Theta\Xi\overset{(4)}{=}\overline{\Xi} \text{ y sus conjugadas}\right\}.$$

Ahora se ve que no es posible obtener ningún nuevo conjunto, si en vez de añadir primero $\Theta\Xi \overset{(3)}{=} \overline{\Theta}$, se añade $\Theta\Xi \overset{(4)}{=} \overline{\Xi}$. En efecto, para cualesquiera dos relaciones del conjunto $\left\{\Theta \overset{(1)}{=} \Xi, \Theta\Xi \overset{(3)}{=} \overline{\Theta}, \Theta\Xi \overset{(4)}{=} \overline{\Xi}\right\}$ fácilmente se obtiene la tercera. Así, se tiene que

$$\left\{\Theta \overset{(1)}{=} \Xi, \Theta\Xi \overset{(3)}{=} \overline{\Theta} \text{ y sus conjugadas}\right\} = \left\{\Theta \overset{(1)}{=} \Xi, \Theta\Xi \overset{(3)}{=} \overline{\Theta}, \Theta\Xi \overset{(4)}{=} \overline{\Xi} \text{ y sus conjugadas}\right\}$$

$$\|$$

$$\left\{\Theta \overset{(1)}{=} \Xi, \Theta\Xi \overset{(4)}{=} \overline{\Xi} \text{ y sus conjugadas}\right\} = \left\{\Theta \overset{(1)}{=} \Xi, \Theta\Xi \overset{(4)}{=} \overline{\Xi}, \Theta\Xi \overset{(3)}{=} \overline{\Theta} \text{ y sus conjugadas}\right\}$$

Si ahora se usan las dos relaciones de Σ^1 para calcular Θ y Ξ, se obtiene fácilmente que $\Theta^3 = 1$ y, así, que el sistema de valores propios maximal asociado a Σ^1 es el del apartado A.

Si ahora se supone que $\Theta \overset{\neg(1)}{\neq} \Xi$ y se estudia Σ^2, claramente se observa que no se puede añadir ni la relación $\Theta\Xi \overset{(3)}{=} \overline{\Theta}$ ni $\Theta\Xi \overset{(4)}{=} \overline{\Xi}$, ya que ninguna de las dos es compatible con la relación $\overline{\Theta} \overset{(2)}{=} \Xi$ y $\Theta \overset{\neg(1)}{\neq} \Xi$. Sin embargo, se tiene que las relaciones $\Theta\overline{\Xi} \overset{(5)}{=} \Xi$ y $\Theta\overline{\Xi} \overset{(6)}{=} \overline{\Theta}$ sí que lo son. Así, si se añade la primera relación compatible, se tiene que

$$\Sigma^2 = \left\{\overline{\Theta} \overset{(2)}{=} \Xi, \Theta\overline{\Xi} \overset{(5)}{=} \Xi \text{ y sus conjugadas}\right\}$$

y, además, que es uno de los conjuntos maximales buscados ya que, si ahora se añade la relación compatible que queda $\Theta\overline{\Xi} \overset{(6)}{=} \overline{\Theta}$, debido a que esta puede ser obtenida fácilmente a partir de las relaciones (*2*) y (*5*), se tiene que:

$$\left\{\overline{\Theta} \overset{(2)}{=} \Xi, \Theta\overline{\Xi} \overset{(5)}{=} \Xi \text{ y sus conjugadas}\right\} = \left\{\overline{\Theta} \overset{(2)}{=} \Xi, \Theta\overline{\Xi} \overset{(5)}{=} \Xi, \Theta\overline{\Xi} \overset{(6)}{=} \overline{\Theta} \text{ y sus conjugadas}\right\}.$$

Ahora se ve, que no es posible obtener ningún nuevo conjunto, si en vez de añadir primero $\Theta\overline{\Xi} \overset{(5)}{=} \Xi$, se añade $\Theta\overline{\Xi} \overset{(6)}{=} \overline{\Theta}$. En efecto, para cualesquiera dos relaciones del conjunto $\left\{\overline{\Theta} \overset{(2)}{=} \Xi, \Theta\overline{\Xi} \overset{(5)}{=} \Xi, \Theta\overline{\Xi} \overset{(6)}{=} \overline{\Theta}\right\}$ fácilmente se obtiene la tercera. Así, se tiene que

$$\left\{\overline{\Theta} \overset{(2)}{=} \Xi, \Theta\overline{\Xi} \overset{(5)}{=} \Xi \text{ y sus conjugadas}\right\} = \left\{\overline{\Theta} \overset{(2)}{=} \Xi, \Theta\overline{\Xi} \overset{(5)}{=} \Xi, \Theta\overline{\Xi} \overset{(6)}{=} \overline{\Theta} \text{ y sus conjugadas}\right\} =$$

$$=\left\{\overline{\Theta}\overset{(2)}{=}\Xi,\Theta\overline{\Xi}\overset{(6)}{=}\overline{\Theta}\text{ y sus conjugadas}\right\}=\left\{\overline{\Theta}\overset{(2)}{=}\Xi,\Theta\overline{\Xi}\overset{(6)}{=}\overline{\Theta},\Theta\overline{\Xi}\overset{(5)}{=}\Xi\text{ y sus conjugadas}\right\}$$

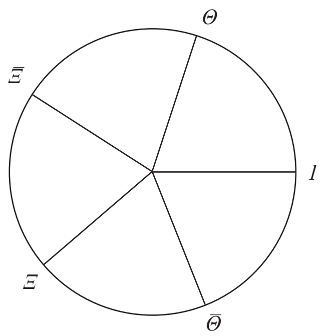
Si ahora se usan las dos relaciones de Σ^2 para calcular Θ y Ξ, se obtiene fácilmente que $\Theta^3=1$ y, así, que el sistema de valores propios maximal asociado a Σ^2 es también el del apartado A.

Para estudiar Σ^3, se supone además de la relación $\Theta\Xi\overset{(3)}{=}\overline{\Theta}$, que $\Theta\overset{\neg(1)}{\neq}\Xi$ y $\overline{\Theta}\overset{\neg(2)}{\neq}\Xi$, así, se observa claramente que no se puede añadir ni la relación $\Theta\Xi\overset{(4)}{=}\overline{\Xi}$ ni $\Theta\overline{\Xi}\overset{(6)}{=}\overline{\Theta}$, ya que ninguna de las dos es compatible con las relaciones anteriores. Sin embargo, $\Theta\overline{\Xi}\overset{(5)}{=}\Xi$ es una relación compatible y, si se añade, se tiene que

$$\Sigma^3=\left\{\Theta\Xi\overset{(3)}{=}\overline{\Theta},\Theta\overline{\Xi}\overset{(5)}{=}\Xi\text{ y sus conjugadas}\right\}.$$

Como ahora no se tienen más relaciones posibles para añadir, se concluye que Σ^3 es otro de los conjuntos maximales buscados.

Así, si ahora se usan las dos relaciones de Σ^3 para calcular Θ y Ξ, se obtiene fácilmente que $\overline{\Xi}=\Theta^2$, $\Xi=\Theta^3$, $\overline{\Theta}=\Theta^4$ y $\Theta^5=1$; es decir, se puede pensar que:



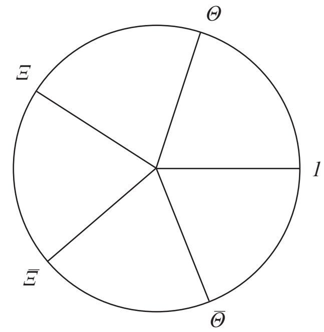
Por tanto, el sistema de valores propios maximal asociado a Σ^3 es el del apartado B.

Ahora para estudiar Σ^4, se supone que $\Theta\overset{\neg(1)}{\neq}\Xi$, $\overline{\Theta}\overset{\neg(2)}{\neq}\Xi$ y $\Theta\Xi\overset{\neg(3)}{\neq}\overline{\Theta}$. Así, claramente se observa que no se puede añadir la relación $\Theta\overline{\Xi}\overset{(5)}{=}\Xi$. Sin embargo, se tiene que la relación $\Theta\overline{\Xi}\overset{(6)}{=}\overline{\Theta}$ si que es compatible. Así, se tiene que

$$\Sigma^4=\left\{\Theta\Xi\overset{(4)}{=}\overline{\Xi},\Theta\overline{\Xi}\overset{(6)}{=}\overline{\Theta}\text{ y sus conjugadas}\right\}\cdot$$

Como no se tienen más relaciones posibles para añadir, Σ^4 es otro de los conjuntos maximales buscados.

Si ahora se usan las dos relaciones de Σ^4 para calcular Θ y Ξ, se obtiene fácilmente que $\bar{\Xi} = \Theta^3$, $\Xi = \Theta^2$, $\bar{\Theta} = \Theta^4$ y $\Theta^5 = 1$; es decir, se puede pensar que



Así, el sistema de valores propios maximal asociado a Σ^4 es el del apartado B.

Para estudiar Σ^5, se supone además de la relación $\Theta\bar{\Xi} \overset{(5)}{=} \Xi$, que $\Theta \overset{\neg(1)}{\neq} \Xi$, $\bar{\Theta} \overset{\neg(2)}{\neq} \Xi$, $\Theta\Xi \overset{\neg(3)}{\neq} \bar{\Theta}$ y $\Theta\Xi \overset{\neg(4)}{\neq} \bar{\Xi}$. Así, como no se puede añadir $\Theta\bar{\Xi} \overset{(6)}{=} \bar{\Theta}$, que es la única relación que queda,

$$\Sigma^5 = \left\{ \Theta\bar{\Xi} \overset{(5)}{=} \Xi \text{ y su conjugada} \right\}.$$

Como a partir de la relación (*5*) y su conjugada no se puede determinar Θ y Ξ, se tiene que Σ^5 no es un conjunto maximal de relaciones y, por tanto, no será considerado.

El conjunto Σ^6 tampoco será considerado ya que no quedan relaciones por añadir y de la relación (*6*) tampoco es posible determinar los valores de Θ y Ξ.

Si ahora se consideran los sistemas de valores propios de la forma $(\Theta, \bar{\Theta}, -1, -1)$, con $\Theta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, se tiene que la única posibilidad para el conjunto de relaciones es que $\Sigma = \left\{ \Theta(-1) = \bar{\Theta} \text{ y su conjugada} \right\}$. Así, a partir de la relación $\Theta(-1) = \bar{\Theta}$ se obtiene que $\Theta^2 = -1$ y, así, que $\Theta = i$ por tanto, se concluye que el conjunto de relaciones es maximal y que su sistema de valores propios asociado es el C.

Finalmente el sistema $(-1, -1, -1, -1)$ es también maximal.

Nota 2.3.3.2

A continuación, no se realiza el estudio del sistema D, ya que en él no es posible encontrar ninguna relación de la forma $\Theta_i\Theta_j = \Theta_k$, $i \neq j$; es decir, debido a que se satisface la condición iii) del Teorema 2.1.3. y, por tanto, los espacios Riemannianos que proporciona son localmente simétricos.

Ahora, se estudiarán por separado cada uno de los sistemas de valores propios maximales restantes.

2.3.3.1. Estudio del sistema de valores propios maximal A

Ahora, se desarrollará el estudio del sistema de valores propio maximal $(\Theta,\Theta^2,\Theta,\Theta^2)$ donde $\Theta = e^{2\pi i/3}$, debido a que, evidentemente, satisface al menos una relación de la forma $\Theta_k\Theta_l = \Theta_m$, $k \neq l$.

Sea V un espacio vectorial 4 – dimensional, $V^{\mathbb{C}}$ su espacio complexificado y sea $S: V \to V$ una transformación lineal real con valores propios Θ y $\Theta^2 = \overline{\Theta}$, ambos con multiplicidad dos. Además, sean g un producto interior sobre V tal que $S(g) = g$, y $\widetilde{T} \neq 0$ un tensor de tipo $(1,2)$ tal que $\widetilde{T}(X,Y) = -\widetilde{T}(Y,X)$ y $S(\widetilde{T}) = \widetilde{T}$. Si se denota con los mismos símbolos las extensiones lineales de S, g y $\widetilde{T}$ al espacio $V^{\mathbb{C}} = V^{\mathbb{C}} = V \oplus_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, se puede encontrar una base de vectores propios de S $(U_1,U_2,\overline{U}_1,\overline{U}_2)$ tal que $SU_1 = \Theta U_1$, $SU_2 = \Theta U_2$, $S\overline{U}_1 = \overline{\Theta}\overline{U}_1$, $S\overline{U}_2 = \overline{\Theta}\overline{U}_2$.

Lema 2.3.3.1.1

La condición $S(g) = g$ significa que $g(SZ,SZ') = g(Z,Z')$ para cualesquiera $Z, Z' \in V^{\mathbb{C}}$. Si se aplica, se obtiene:

$$g(U_1,\overline{U}_2) = \nu \in \mathbb{C},\ g(U_1,\overline{U}_1) = a^2 > 0,\ a \in \mathbb{R},\ g(U_2,\overline{U}_2) = b^2 > 0,\ b \in \mathbb{R},$$

y que el resto de relaciones posibles son cero.

Demostración

Si en $g(SZ, SZ') = g(Z, Z')$ se toman $Z = U_j$ y $Z' = U_k$, $j,k = 1,2$, y se aplica el valor conocido del campo tensorial de simetría S sobre U_j y U_k, se obtiene que

$$g(U_j,U_k) = g(SU_j,SU_k) = g(\Theta U_j,\Theta U_k) = \Theta^2 g(U_j,U_k),$$

de donde, $g(U_j,U_k) = 0,\ j,k = 1,2$. Si ahora se toman $Z = \overline{U}_j$ y $Z' = \overline{U}_k$, $j,k = 1,2$, se obtiene de forma análoga que $g(\overline{U}_j,\overline{U}_k) = 0,\ j,k = 1,2$.

Por otra parte, si $Z = U_j$ y $Z' = \overline{U}_k$, $j,k = 1,2$, la condición $S(g) = g$ es satisfecha, ya que $g(U_j,\overline{U}_k) = g(SU_j,S\overline{U}_k) = g(\Theta U_j,\overline{\Theta}\overline{U}_k) = g(U_j,\overline{U}_k)$, $j,k = 1,2$. Así, $g(U_1,\overline{U}_1) = a^2 > 0$ y $g(U_2,\overline{U}_2) = b^2 > 0$ debido a que en $V^{\mathbb{C}}$ se puede considerar una J – base $\{X, JX\}$ tal que $U_j = X - iJX$ y $\overline{U}_j = X + iJX$, $j = 1,2$ y, por tanto,

$$g(U_j,\overline{U}_j)=g(X-iJX,X+iJX)=$$
$$=g(X,X)+g(JX,JX)+ig(X,JX)-ig(JX,X)=^{7}$$
$$=2g(X,X)=2\|X\|^2>0,\quad g(U_1,\overline{U}_2)=\nu\in\mathbb{C}\,.$$

Además, aplicando la propiedad de antisimetría $\tilde{T}(X,Y)=-\tilde{T}(Y,X)$, se obtiene que $\tilde{T}(U_j,U_j)=\tilde{T}(\overline{U}_j,\overline{U}_j)=0$, $j=1,2$.

Lema 2.3.3.1.2

Si se usa la propiedad $S(\tilde{T})=\tilde{T}$, cuyo significado es que $\tilde{T}(SZ,\ SZ')$ = $S(\tilde{T}Z,\ Z')$ para cualesquiera $Z,Z'\in V^{\mathbb{C}}$, se obtiene:

$$\tilde{T}(U_1,U_2)=\alpha\overline{U}_1+\beta\overline{U}_2,\ \tilde{T}(\overline{U}_1,\overline{U}_2)=\overline{\alpha}U_1+\overline{\beta}U_2,\ \tilde{T}(U_j,\overline{U}_k)=0\,,\ \ j,k=1,2$$

donde $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ y no se anulan simultáneamente.

Demostración

Si en $\tilde{T}(SZ,SZ')$ = $S(Z,Z')$ se toman $Z=U_j$ y $Z'=\overline{U}_k$, $j,k=1,2$ y se aplica el valor conocido del campo tensorial de simetría S sobre U_j y $\overline{U}_k$, $j,k=1,2$, respectivamente, se obtiene que

$$S(\tilde{T}(U_j,\overline{U}_k))=\tilde{T}(SU_j,S\overline{U}_k)=\tilde{T}(\Theta U_j,\overline{\Theta}\overline{U}_k)=\tilde{T}(U_j,\overline{U}_k),\ \ j,k=1,2$$

lo que implica que $\tilde{T}(U_j,\overline{U}_k)$, $j,k=1,2$, tiene el valor propio 1 ó es cero. Debido a la Nota 2.1.6 se sabe que no se tiene el valor propio 1, por tanto $\tilde{T}(U_j,\overline{U}_k)=0,\ \ j,k=1,2$.

Si ahora se considera que $Z=U_1$ y que $Z'=U_2$, como antes, se obtiene que $S(\tilde{T}(U_1,U_2))=\tilde{T}(SU_1,SU_2)=\tilde{T}(\Theta U_1,\Theta U_2)=\overline{\Theta}\tilde{T}(U_1,U_2)$, así $\tilde{T}(U_1,U_2)$, al igual que $\overline{U}_1$ y $\overline{U}_2$, tiene asociado el valor propio $\overline{\Theta}$ por tanto, existen $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ tal que $\tilde{T}(U_1,U_2)=\alpha\overline{U}_1+\beta\overline{U}_2$.

Puesto que $\tilde{T}(\overline{U}_1,\overline{U}_2)=$ **(2.3)** $=\overline{\tilde{T}(U_1,U_2)}=\overline{\alpha\overline{U}_1+\beta\overline{U}_2}=\overline{\alpha}U_1+\overline{\beta}U_2$, se obtiene la relación que faltaba.

Además, como $\tilde{T}\neq 0$, necesariamente, α y β no pueden ser ambas cero a la vez.

Lema 2.3.3.1.3

Para cada 3 – tupla de tensores $(S,g,\tilde{T})$, cumpliendo las propiedades requeridas sobre V, existe una base $(U_1,U_2,\overline{U}_1,\overline{U}_2)$ de $V^{\mathbb{C}}$ tal que:

[7] Usando la J - invariancia. Ver [K-N].

$$SU_1 = \Theta U_1,\ SU_2 = \Theta U_2,\ S\bar{U}_1 = \bar{\Theta}\bar{U}_1,\ S\bar{U}_2 = \bar{\Theta}\bar{U}_2,\ g(U_1,\bar{U}_2) = g(\bar{U}_1,U_2) = 0,$$
$$g(U_j,U_k) = 0,\ \ j,k = 1,2,$$
$$g(U_1,\bar{U}_1) = 1,\ g(U_2,\bar{U}_2) = \frac{1}{\rho^2}, \tag{2.4}$$
$$\tilde{T}(U_j,\bar{U}_k) = 0,\ \ j,k = 1,2,\ \tilde{T}(U_1,U_2) = \bar{U}_1,\ \tilde{T}(\bar{U}_1,\bar{U}_2) = U_1.$$

La demostración está desarrollada en el Apartado B.1 del Anexo B.

Por tanto, se ha obtenido una forma canónica arbitraria y admisible para la 3 – tupla $(S,g,\widetilde{T})$, $\widetilde{T} \neq 0$.

Además, $\rho > 0$ es un invariante de esta forma canónica. En efecto, si se consideran dos 3 – tuplas $(S_j,g_j,\widetilde{T}_j)$, $j = 1, 2$, con diferentes valores de ρ, se tienen dos métricas distintas sobre la misma variedad, por tanto, no se pueden superponer mediante una transformación lineal $f\colon V \to V$.

Ahora, se calcula el álgebra de Lie $\mathfrak{k}$ de todos los endomorfismos reales A de V^C tales que $A(S) = A(g) = A(\widetilde{T}) = 0$.

Lema 2.3.3.1.4

La relación $A(S) = 0$ significa que $A \cdot S = S \cdot A$, de donde se obtiene que:

$$AU_j = \sum_{k=1}^{2} a_j^k U_k,\ \ j = 1,2 \ \text{ y } \ A\bar{U}_j = \sum_{k=1}^{2} \bar{a}_j^k \bar{U}_k,\ \ j = 1,2.$$

Demostración

Si se aplica esta relación y el valor conocido de S sobre U_j, $j = 1,2$, se obtiene

$$S(A(U_j)) = (S\cdot A)(U_j) = (A\cdot S)(U_j) = A(S(U_j)) = A(\Theta U_j) = \Theta A(U_j);$$

por tanto, $A(U_j)$, $j = 1,2$, tiene asociado, al igual que U_1 y U_2, el valor propio Θ, y así existen $a_j^k \in \mathbb{C}$, $j,k = 1,2$, tal que $AU_j = \sum_{k=1}^{2} a_j^k U_k$, $j = 1,2$. Si ahora se conjuga esta última expresión se obtiene $A\bar{U}_j = \sum_{k=1}^{2} \bar{a}_j^k \bar{U}_k$, $j = 1,2$.

Por tanto, para calcular $\mathfrak{k}$ bastará conocer el valor de a_j^k y $\bar{a}_j^k$, $j,k = 1,2$. Para ello, se usarán los dos lemas siguientes:

Lema 2.3.3.1.5

La relación $A(g) = 0$ significa que $g(AZ,SZ') = g(Z,AZ')$ para cada Z, $Z' \in V^C$. Aplicándola, se obtiene

$$a_1^1 + \overline{a}_1^1 = 0, \quad a_2^2 + \overline{a}_2^2 = 0 \text{ y } a_1^2 + \rho^2 \overline{a}_2^1 = 0.$$

Demostración

En efecto, si se toman en dicha relación $Z = U_1$ y $Z' = \overline{U}_1$ y, se aplican los valores conocidos de g y A sobre U_1 y $\overline{U}_1$, se obtiene que

$$0 = g(AU_1, \overline{U}_1) + g(U_1, A\overline{U}_1) = a_1^1 g(U_1, \overline{U}_1) + a_1^2 g(U_2, \overline{U}_1) + \overline{a}_1^1 g(U_1, \overline{U}_1) + \overline{a}_1^2 g(U_1, \overline{U}_2)$$

$$0 = a_1^1 + \overline{a}_1^1 .$$

Si ahora se toman $Z = U_2$ y $Z' = \overline{U}_2$ y, se aplican los valores conocidos de g y A sobre U_2 y $\overline{U}_2$, se obtiene que

$$0 = g(AU_2, \overline{U}_2) + g(U_2, A\overline{U}_2) = a_2^1 g(U_1, \overline{U}_2) + a_2^2 g(U_2, \overline{U}_2) + \overline{a}_2^1 g(U_2, \overline{U}_1) + \overline{a}_2^2 g(U_2, \overline{U}_2)$$

$$0 = \frac{1}{\rho^2}(a_2^2 + \overline{a}_2^2),$$

y, aplicando que $\rho^2 > 0$, se tiene $a_2^2 + \overline{a}_2^2 = 0$.

Ahora, si $Z = U_1$ y $Z' = \overline{U}_2$ y, se aplican los valores conocidos de g y A sobre U_1 y $\overline{U}_2$, se obtiene

$$0 = g(AU_1, \overline{U}_2) + g(U_1, A\overline{U}_2) = a_1^1 g(U_1, \overline{U}_2) + a_1^2 g(U_2, \overline{U}_2) + \overline{a}_2^1 g(U_1, \overline{U}_1) + \overline{a}_2^2 g(U_1, \overline{U}_2)$$

$$0 = \frac{1}{\rho^2} a_1^2 + \overline{a}_2^1$$

y, así, $a_1^2 + \rho^2 \overline{a}_2^1 = 0.$

Lema 2.3.3.1.6

De la relación $A(\tilde{T}) = 0$, cuyo significado es que para cada $U, W \in V^{\mathbb{C}}$ $A(\tilde{T}(U,W)) = \tilde{T}(AU,W) + \tilde{T}(U,AW)$, se obtiene

$$\overline{a}_1^1 = a_1^1 + a_2^2 \text{ y } \overline{a}_1^2 = 0.$$

Demostración

En efecto, si se toman $U = U_1$ y $W = U_2$,

$$A(\tilde{T}(U_1, U_2)) = \tilde{T}(AU_1, U_2) + \tilde{T}(U_1, AU_2),$$

$$A(\overline{U}_1) = \tilde{T}(a_1^1 U_1 + a_1^2 U_2, U_2) + \tilde{T}(U_1, a_2^1 U_1 + a_2^2 U_2),$$

$$\overline{a}_1^1 \overline{U}_1 + \overline{a}_1^2 \overline{U}_2 = a_1^1 \overline{U}_1 + a_2^2 \overline{U}_1$$

y, así, $\overline{a}_1^1 = a_1^1 + a_2^2$ y $\overline{a}_1^2 = 0$.

Se concluye que $a_1^2 = a_2^1 = 0$, $a_2^2 = -2a_1^1$ y $a_j^j + \overline{a}_j^j = 0$, $j = 1,2$. De donde, se pueden expresar a_j^k, $j,k = 1,2$, en función de a_2^2.

Así, $\mathfrak{k}$ = (B), donde el endomorfismo B satisface

$$BU_1 = iU_1,\ \ B\overline{U}_1 = -i\overline{U}_1,\ \ BU_2 = -2iU_2,\ \ B\overline{U}_2 = 2i\overline{U}_2.$$ [8]

Ahora se calcula $\widetilde{R}$. Para ello, sea (V, g, S, $\widetilde{R}$, $\widetilde{T}$) una s – variedad algebraica donde $\widetilde{T} \neq 0$, g y S satisfacen (2.4). Usando la condición ii) del Teorema 1.3.2, se puede ver que $\tilde{R}(X,Y) \in \mathfrak{k}$ para cada $X,Y \in V$ y que $\tilde{R}(Z,Z') \in \mathfrak{k} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ para cada $Z,Z' \in V^{\mathbb{C}}$ así, se tiene $\tilde{R}(U_i,U_j) = a_{i,j}B$ y $\tilde{R}(U_i,\overline{U}_j) = b_{i,j}B,\ i,j = 1,2$.

Como en $V^{\mathbb{C}}$, la primera identidad de Bianchi es

$$\mathfrak{S}(\tilde{R}(Z,Z')Z'') = \mathfrak{S}(\tilde{T}(\tilde{T}(Z,Z'),Z'')),$$

se tiene en particular que

$$\tilde{R}(U_1,U_2)\overline{U}_1 + \tilde{R}(U_2,\overline{U}_1)U_1 + \tilde{R}(\overline{U}_1,U_1)U_2 = 0, \tag{2.5}$$

$$\tilde{R}(U_1,U_2)\overline{U}_2 + \tilde{R}(U_2,\overline{U}_2)U_1 + \tilde{R}(\overline{U}_2,U_1)U_2 = U_1. \tag{2.6}$$

Y, así, se puede concluir

$$\begin{gathered}\tilde{R}(U_1,U_2) = \tilde{R}(\overline{U}_1,\overline{U}_2) = \tilde{R}(\overline{U}_1,U_2) = \tilde{R}(U_1,\overline{U}_2) = \tilde{R}(U_1,\overline{U}_1) = 0,\\ \tilde{R}(U_2,\overline{U}_2) = -iB.\end{gathered} \tag{2.7}$$

En efecto, si se sustituye en (2.5) y se aplica el endomorfismo B, se tiene

$$\begin{aligned}&a_{1,2}B\overline{U}_1 + b_{2,1}BU_1 + b_{1,1}BU_2 = 0,\\ &-ia_{1,2}\overline{U}_1 + ib_{2,1}U_1 - 2ib_{1,1}BU_2 = 0.\end{aligned}$$

Como U_1, $\overline{U}_1$ y U_2 son linealmente independientes, se concluye

$$\tilde{R}(U_1,U_2) = \tilde{R}(\overline{U}_1,\overline{U}_2) = \tilde{R}(\overline{U}_1,U_2) = \tilde{R}(U_1,\overline{U}_2) = \tilde{R}(U_1,\overline{U}_1) = 0.$$

Si ahora se usa (2.6) de forma análoga, se obtiene $\tilde{R}(U_2,\overline{U}_2) = -iB$.

Como $B(\tilde{R}) = 0$, de

$$B(\tilde{R}(U_1,U_2)Z) = (B\tilde{R})(U_1,U_2)Z + \tilde{R}(BU_1,U_2)Z + \tilde{R}(U_1,BU_2)Z + \tilde{R}(U_1,U_2)BZ$$

---

[8] Se obtiene fácilmente, dándole a a_1^1 el valor i y usando las relaciones anteriores para obtener el resto.

y de $\tilde{R}(U_1,U_2)=0$, se obtiene $(B\tilde{R})(U_1,U_2)Z=0$ para todo $Z\in V^C$; de forma análoga, se sigue que

$$(B\tilde{R})(\bar{U}_1,\bar{U}_2)Z=0, \quad (B\tilde{R})(\bar{U}_1,U_2)Z=0, \quad (B\tilde{R})(U_1,\bar{U}_2)Z=0, \quad (B\tilde{R})(U_1,\bar{U}_1)Z=0,$$

para todo $Z\in V^C$ y, por otra parte, de

$$B(\tilde{R}(U_2,\bar{U}_2)Z)=(B\tilde{R})(U_2,\bar{U}_2)Z+\tilde{R}(BU_2,\bar{U}_2)Z+\tilde{R}(U_2,B\bar{U}_2)Z+\tilde{R}(U_2,\bar{U}_2)BZ$$

y de $\tilde{R}(U_2,\bar{U}_2)=-iB$ se obtiene $-iB^2Z=(B\tilde{R})(U_2,\bar{U}_2)Z+2i^2BZ-2i^2BZ-iB^2Z$ y, así, también $(B\tilde{R})(U_2,\bar{U}_2)Z=0$ para todo $Z\in V^C$. En particular, $\tilde{R}(Z,Z')\tilde{R}=0$ para cualesquiera $Z,\ Z'\in V^C$. Además, $\mathfrak{S}(\tilde{R}(\tilde{T}(Z,Z'),Z''))=0$ para todo $Z,Z',Z''\in V^C$; es decir, se satisface la segunda identidad de Bianchi.

Así, (V, g, S, $\tilde{R}$, $\tilde{T}$) con $\tilde{T}\neq 0$, dada por (2.4) y (2.7) es una s – variedad algebraica sobre V para cada $\rho>0$ y, puesto que $\mathfrak{k}=(B)$, $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{k}$ y $B(\tilde{R})=0$, se concluye también que $\mathfrak{h}=\mathfrak{k}=(B)$.

Por otra parte, procediendo de forma análoga al Lema 2.3.2.6 se comprueba que $(\mathcal{D}_{U_1}R)(U_1,U_2)\bar{U}_1\neq 0$ para U_1, U_2 elementos fijados de la base de V^C y, así, el correspondiente espacio s – simétrico (M,g) no es localmente simétrico.

Además, aplicando D de [L – O, Pág. 458], se sabe que el orden del espacio s – simétrico correspondiente es $k = 3$.

Lema 2.3.3.1.7

Si se consideran $U_1=(X_1+iY_1)/\sqrt{2}$ y $U_2=(X_2+iY_2)/2$ donde $X_i,Y_i\in V$, $i=1,2$, se obtiene que (X_1,X_2,Y_1,Y_2) forman una base ortogonal de V verificando

$$SX_1=Cos\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)X_1-Sen\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)Y_1, \quad SY_1=Sen\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)X_1+Cos\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)Y_1,$$
$$SX_2=Cos\left(\tfrac{4\pi}{3}\right)X_2+Sen\left(\tfrac{4\pi}{3}\right)Y_2, \quad SY_2=Cos\left(\tfrac{4\pi}{3}\right)Y_2-Sen\left(\tfrac{4\pi}{3}\right)X_2,$$

$$g(X_1,X_1)=g(Y_1,Y_1)=1, \quad g(X_2,X_2)=g(Y_2,Y_2)=\frac{2}{\rho^2},$$

$$\tilde{T}(X_i,Y_i)=0,\ i=1,2, \quad \tilde{T}(X_1,X_2)=X_1, \quad \tilde{T}(X_2,Y_1)=Y_1,$$
$$\tilde{T}(Y_1,Y_2)=-X_1, \quad \tilde{T}(X_1,Y_2)=-Y_1,$$

y

$$\tilde{R}(X_1,Y_1)=\tilde{R}(X_2,Y_1)=\tilde{R}(X_1,Y_2)=\tilde{R}(X_1,X_2)=\tilde{R}(Y_1,Y_2)=0,$$
$$\tilde{R}(X_2,Y_2)=2B.$$

Demostración

En efecto, como $SU_1=\Theta U_1,\ S\bar{U}_2=\bar{\Theta}\bar{U}_2$, se tiene

$$\left(Cos\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)X_1-Sen\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)Y_1\right)+i\left(Sen\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)X_1+Cos\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)Y_1\right)=\Theta X_1+i\Theta Y_1=$$
$$=SU_1\sqrt{2}=SX_1+iSY_1,$$
$$\left(Cos\left(\tfrac{4\pi}{3}\right)X_2+Sen\left(\tfrac{4\pi}{3}\right)Y_2\right)+i\left(Cos\left(\tfrac{4\pi}{3}\right)Y_2-Sen\left(\tfrac{4\pi}{3}\right)X_2\right)=\bar{\Theta}X_2-i\bar{\Theta}Y_2=$$
$$=2S\bar{U}_2=SX_2-iSY_2.$$

Así, $SX_i,\ SY_i,\ i=1,2,$ son las expresiones del enunciado. Notar además, que son satisfechas las relaciones $SU_2=\Theta U_2$ y $S\bar{U}_1=\bar{\Theta}\bar{U}_1$, debido a que $Cos\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)=Cos\left(\tfrac{4\pi}{3}\right)$ y $Sen\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)=-Sen\left(\tfrac{4\pi}{3}\right)$.

Por otra parte, como

$$0=g(U_1,U_1)=g\left(\tfrac{X_1+iY_1}{\sqrt{2}},\tfrac{X_1+iY_1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}[g(X_1,X_1)-g(Y_1,Y_1)+ig(X_1,Y_1)],$$

$$0=g(U_1,\bar{U}_1)=g\left(\tfrac{X_1+iY_1}{\sqrt{2}},\tfrac{X_1-iY_1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}[g(X_1,X_1)+g(Y_1,Y_1)],$$

se tiene $g(X_1,X_1)=g(Y_1,Y_1)=1,\quad g(X_1,Y_1)=0.$ De

$$0=g(U_2,U_2)=g\left(\tfrac{X_2+iY_2}{2},\tfrac{X_2+iY_2}{2}\right)=\frac{1}{4}[g(X_2,X_2)-g(Y_2,Y_2)+i2g(X_2,Y_2)],$$

$$\frac{1}{\rho^2}=g(U_2,\bar{U}_2)=g\left(\tfrac{X_2+iY_2}{2},\tfrac{X_2-iY_2}{2}\right)=\frac{1}{4}[g(X_2,X_2)+g(Y_2,Y_2)],$$

se sigue $g(X_2,X_2)=g(Y_2,Y_2)=\dfrac{2}{\rho^2},\quad g(X_2,Y_2)=0.$ Y, por

$$0=g(U_1,U_2)=g\left(\tfrac{X_1+iY_1}{\sqrt{2}},\tfrac{X_2+iY_2}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}[g(X_1,X_2)-g(Y_1,Y_2)+ig(X_1,Y_2)+ig(Y_1,X_2)],$$

$$0=g(U_1,\bar{U}_2)=g\left(\tfrac{X_1+iY_1}{\sqrt{2}},\tfrac{X_2-iY_2}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}[g(X_1,X_2)+g(Y_1,Y_2)+ig(X_2,Y_1)-ig(X_1,Y_2)],$$

se obtiene $g(X_1,X_2)=g(Y_1,Y_2)=g(X_1,Y_2)=g(X_2,Y_1)=0.$

Si ahora se aplica el mismo método, usando los valores dados en (2.4) para la torsión y en (2.7) para la curvatura, se obtienen los resultados dados en el enunciado.

Puesto que, en este caso, $\dim\mathfrak{h}=1$, la tabla de multiplicar del “Álgebra de Nomizu” $\mathfrak{g}=V+\mathfrak{h}$ está dada por la fórmula

$$\begin{aligned}
&[X,Y]=-\tilde{T}(X,Y)-\tilde{R}(X,Y), && X,Y\in V\\
&[X,A]=-AX, && X\in V,\ A\in\mathfrak{h},
\end{aligned}$$

respecto a la base (X_1,Y_1,X_2,Y_2,B) y usando el Lema 2.3.3.1.7, se obtiene la siguiente tabla:

$$\begin{array}{llll}
[X_1,B]=Y_1, & [X_1,Y_1]=0, & [X_1,X_2]=-X_1, & [X_1,Y_2]=Y_1,\\
[Y_1,B]=-X_1, & [Y_1,X_2]=Y_1, & [Y_1,Y_2]=X_1, & \\
[X_2,B]=-2Y_2, & [X_2,Y_2]=-2B, & & \\
[Y_2,B]=2X_2. & & &
\end{array}$$

Realización geométrica

En primer lugar, debido a que $[X_2,Y_2]=-2B$, la suma de $\mathfrak{m}+\mathfrak{h}$ no es directa y, por tanto, no se puede considerar directamente el espacio vectorial $\mathfrak{m}$ sino que se deben analizar $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$.

Para ello, se considera la foliación dada por X_1 e Y_1. Puesto que la foliación es de dimensión 2, se toman

$$X_1=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad Y_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$X_2=\begin{pmatrix}x_1&x_2&0\\x_3&x_4&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad Y_2=\begin{pmatrix}y_1&y_2&0\\y_3&y_4&0\\0&0&0\end{pmatrix}\ \text{y}\ B=\begin{pmatrix}b_1&b_2&0\\b_3&b_4&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

donde $x_i,\ y_i,\ b_i\in\mathbb{R},\ i=1,2,3,4.$ Ahora, usando la tabla de multiplicar, se calculan los coeficientes indeterminados y se sigue

$$X_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad Y_2=\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\ \text{y}\ B=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Así, $\mathfrak{h}=\{\gamma B:\gamma\in\mathbb{R}\}$ y $\mathfrak{g}=\{\alpha X_1+\beta Y_1+aX_2+bY_2+cB:\alpha,\beta,a,b,c\in\mathbb{R}\}=$

$$=\left\{\begin{pmatrix} a & c-b & \alpha \\ -(c+b) & -a & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}:\alpha,\beta,a,b,c\in\mathbb{R}\right\}.$$

El siguiente paso es calcular los grupos de Lie H y G asociados a dichas álgebras. Para ello, se usará la aplicación exponencial $\exp:\mathfrak{g}\to G$ y $\exp:\mathfrak{h}\to H$.

Sea $A\in\mathfrak{g}$ entonces,

$$\exp(A)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}=I+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^{2n+1}}{(2n+1)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A^{2n}}{(2n)!}=$$

$$=\begin{pmatrix} a & c-b & \alpha \\ -(c+b) & -a & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{Sinh(\sqrt{d})}{\sqrt{d}}+\begin{pmatrix} Cosh(\sqrt{d}) & 0 & (a\alpha+(c-b)\beta)E \\ 0 & Cosh(\sqrt{d}) & ((\beta-a)-(c+b)\alpha)E \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a' & b' & \alpha' \\ c' & d' & \beta' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\in G,$$

donde $d=a^2-(c+b)(c-b)$, $E=\dfrac{Cosh(\sqrt{d})-1}{d}$ y, además, se prueba directamente que $a'd'-c'b'=1$. Por tanto, el grupo de Lie G es el grupo formado por todas las matrices de la forma

$$G=\left\{\begin{pmatrix} a & b & \alpha \\ c & d & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}:a,b,c,d,\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ ad-cb=1\right\}.$$

Sea $C\in\mathfrak{h}$, entonces

$$\exp(C)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C^n}{n!}=I+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C^{2n+1}}{(2n+1)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C^{2n}}{(2n)!}=\begin{pmatrix} Cos\gamma & Sen\gamma & 0 \\ -Sen\gamma & Cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\in H.$$

Por tanto, el grupo de Lie H es el grupo formado por todas las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} Cos\gamma & Sen\gamma & 0 \\ -Sen\gamma & Cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tales que $\gamma \in \mathbb{R}$.

A continuación se calcula la métrica G – invariante *g*.

Lema 2.3.3.1.8

Se puede representar la base del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, (X_1, Y_1, X_2, Y_2, B) por los campos vectoriales invariantes a izquierda siguientes

$$X_1 = a\frac{\partial}{\partial\alpha} + c\frac{\partial}{\partial\beta},\ \ Y_1 = b\frac{\partial}{\partial\alpha} + d\frac{\partial}{\partial\beta},\ \ X_2 = a\frac{\partial}{\partial a} - b\frac{\partial}{\partial b} + c\frac{\partial}{\partial c} - d\frac{\partial}{\partial d},$$

$$Y_2 = -\left(a\frac{\partial}{\partial b} + b\frac{\partial}{\partial a} + c\frac{\partial}{\partial d} + d\frac{\partial}{\partial c}\right) \text{ y } B = a\frac{\partial}{\partial b} - b\frac{\partial}{\partial a} + c\frac{\partial}{\partial d} - d\frac{\partial}{\partial c}.$$

Demostración

Se comienza calculando los campos vectoriales invariantes a izquierda sobre *G*. Para ello, dado $A = \begin{pmatrix} a_o & b_o & \alpha_o \\ c_o & d_o & \beta_o \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$, se tiene la aplicación translación a izquierda asociada $L_A : G \to G$, dada por $L_A(g) = A \cdot g$, para todo $g \in G$, que actúa de la siguiente manera:

$$L_A((\alpha,\beta,a,b,c,d)) \cong L_A\left(\begin{pmatrix} a & b & \alpha \\ c & d & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = L_A(g) = A \cdot g =$$

$$= \begin{pmatrix} a_o a + b_o c & a_o b + b_o d & a_o\alpha + b_o\beta + \alpha_o \\ c_o a + d_o c & c_o b + d_o d & c_o\alpha + d_o\beta + \beta_o \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong$$

$$\cong (a_o\alpha + b_o\beta + \alpha_o, c_o\alpha + d_o\beta + \beta_o, a_o a + b_o c, a_o b + b_o d, c_o a + d_o c, c_o b + d_o d).$$

Se denotará por $e = Id \cong (0,0,1,0,0,1)$, el elemento identidad de *G*.

Así, la matriz asociada a la diferencial L_{A*_e} es

$$D=\begin{pmatrix} a_o & c_o & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_o & d_o & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_o & 0 & c_o & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_o & 0 & c_o \\ 0 & 0 & b_o & 0 & d_o & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_o & 0 & d_o \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$L_{A*_e}(X_{1|_e})=L_{A*_e}(\tfrac{\partial}{\partial\alpha}|_e)\equiv\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot D\equiv a_{|_A}\tfrac{\partial}{\partial\alpha}|_A+c_{|_A}\tfrac{\partial}{\partial\beta}|_A=X_{1|_A},$$

$$L_{A*_e}(Y_{1|_e})=L_{A*_e}(\tfrac{\partial}{\partial\beta}|_e)\equiv\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot D\equiv b_{|_A}\tfrac{\partial}{\partial\alpha}|_A+d_{|_A}\tfrac{\partial}{\partial\beta}|_A=Y_{1|_A},$$

$$L_{A*_e}(W_{1|_e})=L_{A*_e}(\tfrac{\partial}{\partial a}|_e)\equiv\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot D\equiv a_{|_A}\tfrac{\partial}{\partial a}|_A+c_{|_A}\tfrac{\partial}{\partial c}|_A=W_{1|_A},$$

$$L_{A*_e}(W_{2|_e})=L_{A*_e}(\tfrac{\partial}{\partial b}|_e)\equiv\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot D\equiv a_{|_A}\tfrac{\partial}{\partial b}|_A+c_{|_A}\tfrac{\partial}{\partial d}|_A=W_{2|_A},$$

$$L_{A*_e}(W_{3|_e})=L_{A*_e}(\tfrac{\partial}{\partial c}|_e)\equiv\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot D\equiv b_{|_A}\tfrac{\partial}{\partial a}|_A+d_{|_A}\tfrac{\partial}{\partial c}|_A=W_{3|_A},$$

$$L_{A*_e}(W_{4|_e})=L_{A*_e}(\tfrac{\partial}{\partial d}|_e)\equiv\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot D\equiv b_{|_A}\tfrac{\partial}{\partial b}|_A+d_{|_A}\tfrac{\partial}{\partial d}|_A=W_{4|_A}.$$

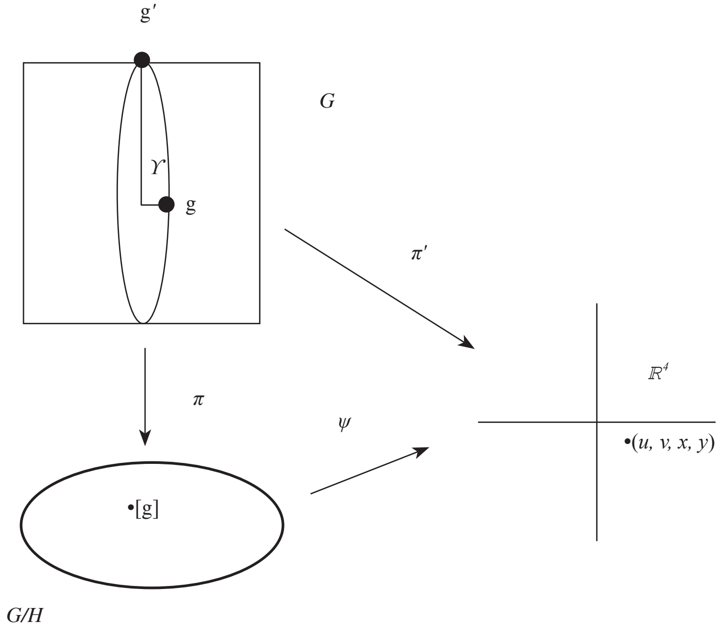
Así, X_1, Y_1, W_1, W_2, W_3 y W_4 son campos vectoriales invariantes a izquierda. Como la dimensión de nuestro espacio es 5, se tiene que estos no forman una base. Además, como $0=[X_1,Y_1]=[a\frac{\partial}{\partial\alpha}+c\frac{\partial}{\partial\beta},b\frac{\partial}{\partial\alpha}+d\frac{\partial}{\partial\beta}]=0,$ se identifican X_1, Y_1, con dos de los campos invariantes a izquierda buscados. Ahora, los tres campos restantes buscados tales que junto con X_1, Y_1, formen base, sean invariantes a izquierda y, satisfagan la tabla de multiplicar son $X_2=W_1-W_4$, $Y_2=-(W_2+W_3)$ y $B=W_2-W_3$. Estos campos se han obtenido imponiendo las condiciones correspondientes sobre W_1, W_2, W_3 y W_4.

Además, si se considera G como el espacio total, $\mathbb{R}^4$ como el espacio base, H como la fibra y la proyección $\pi':G\to\mathbb{R}^4$ dada por $\pi'(g)=(u,v,x,y)$ donde $u=\alpha$, $v=\beta$, $x=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2-d^2)$ e $y=ac+bd$, G es un fibrado principal sobre $\mathbb{R}^4$ con grupo H.

En efecto, debido a [P, Pág. 25], se sabe que G es un fibrado principal sobre G/H con grupo H donde $\pi:G\to G/H$ es la proyección canónica.

Sea $\Psi:G/H\to\mathbb{R}^4$ definida por $\Psi([g])=(\alpha,\beta,\dfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2},ac+bd)$ donde $g=\begin{pmatrix} a & b & \alpha \\ c & d & \beta \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in G$. Además, si $g'=hg$ donde $h\in H$ y $g\in G$ se tiene que $\Psi([g])=\Psi([g'])$.

Como $\dim(G/H) = \dim(\mathbb{R}^4) = 4$ y en la matriz Jacobiana de Ψ se tiene un menor 4x4 distinto de cero, aplicando el teorema de la función inversa Ψ es un difeomorfismo local. Como Ψ es inyectiva se concluye que Ψ es un difeomorfismo global.



Así, se define $\pi' = \Psi \circ \pi$, la cual es suprayectiva, C^∞ y, además, $\pi(H) = 0_{G/H}$, $\pi'(H) = (0,0,0,0)$.

Por tanto, G es un fibrado principal sobre $\mathbb{R}^4$ con grupo H.

Lema 2.3.3.1.9

Para cualquier $m \in G$, las proyecciones de los vectores tangentes X_1, Y_1, X_2, Y_2 sobre $G/H \cong \mathbb{R}^4$ en el punto $\pi'(m)$ son las siguientes:

$$\tilde{X}_1 = a\frac{\partial}{\partial u} + c\frac{\partial}{\partial v}, \quad \tilde{X}_2 = (a^2+d^2-b^2-c^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2(ac-bd)\frac{\partial}{\partial y}, \quad \tilde{Y}_1 = b\frac{\partial}{\partial u} + d\frac{\partial}{\partial v},$$

$$\tilde{Y}_2 = 2(cd-ab)\frac{\partial}{\partial x} - 2(ad+bc)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Demostración

Debido a $\pi'_*(X_i) = \tilde{X}_i$, $\pi'_*(Y_i) = \tilde{Y}_i$, $i = 1,2$ y puesto que la matriz asociada a la aplicación π'_* es

$$A=\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \alpha} & \frac{\partial v}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial u}{\partial \beta} & \frac{\partial v}{\partial \beta} & \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \\ \frac{\partial u}{\partial a} & \frac{\partial v}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} \\ \frac{\partial u}{\partial b} & \frac{\partial v}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial b} \\ \frac{\partial u}{\partial c} & \frac{\partial v}{\partial c} & \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial u}{\partial d} & \frac{\partial v}{\partial d} & \frac{\partial x}{\partial d} & \frac{\partial y}{\partial d} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \\ 0 & 0 & -c & a \\ 0 & 0 & -d & b \end{pmatrix},$$

se tiene

$$\pi'_*(X_1)=\pi'_*(a\frac{\partial}{\partial \alpha}+c\frac{\partial}{\partial \beta})\equiv(a,c,0,0,0,0)\cdot A=(a,c,0,0)\equiv a\frac{\partial}{\partial u}+c\frac{\partial}{\partial v}=\tilde{X}_1 .$$

De manera análoga, se obtienen las expresiones buscadas de $\tilde{Y}_1$, $\tilde{X}_2$ e $\tilde{Y}_2$.

Por otra parte, como los campos vectoriales son invariantes a izquierda, la métrica buscada g sobre $G/H \cong \mathbb{R}^4$ es G – invariante. Así, $g(\tilde{X}_i,\tilde{X}_j)$, $g(\tilde{Y}_i,\tilde{Y}_j)$, $g(\tilde{X}_i,\tilde{Y}_j)$, $i,j=1,2$, no dependen de la elección de $m\in G$. Además, debido a que π' es una sumersión Riemanniana se tiene que la métrica es una isometría sobre vectores ortogonales a la subvariedad *H*, ([D, Pág. 185-186]), por tanto,

$$g(\tilde{X}_1,\tilde{X}_1)=g(\tilde{Y}_1,\tilde{Y}_1)=1,\ \ g(\tilde{X}_2,\tilde{X}_2)=g(\tilde{Y}_2,\tilde{Y}_2)=\frac{2}{\rho^2}$$

y las restantes son cero. Si ahora, utilizando $\tilde{X}_1$, $\tilde{Y}_1$ se calculan $\frac{\partial}{\partial u}$, $\frac{\partial}{\partial v}$ y utilizando $\tilde{X}_2$, $\tilde{Y}_2$ se calculan $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, mediante unos sencillos cálculos se obtiene que la métrica Riemanniana invariante buscada sobre $\mathbb{R}^4(x,y,u,v)$ es

$$g=(-x+\sqrt{x^2+y^2+1})\ du^2+(x+\sqrt{x^2+y^2+1})\ dv^2-2y\ dudv+$$
$$+\frac{1}{\rho^2}\left[\frac{(1+y^2)\ dx^2+(1+x^2)\ dy^2-2xy\ dxdy}{1+x^2+y^2}\right]$$

donde, $\rho>0$.

Finalmente, se tiene:

Lema 2.3.3.1.10

La simetría típica s_o de orden 3 en el punto $o\equiv(0,0,0,0)$ de $\mathbb{R}^4(x,y,u,v)$ es la transformación dada por:

$$u' = Cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cdot u - Sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cdot v,\quad v' = Sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cdot u + Cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cdot v,$$

$$x' = Cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\cdot x + Sen\left(\frac{4\pi}{3}\right)\cdot y,\quad y' = -Sen\left(\frac{4\pi}{3}\right)\cdot x + Cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\cdot y \cdot$$

Demostración

Por el Lema 2.3.3.1.7, se sabe que

$$SX_1 = Cos\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)X_1 - Sen\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)Y_1,\quad SY_1 = Sen\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)X_1 + Cos\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)Y_1,$$
$$SX_2 = Cos\left(\tfrac{4\pi}{3}\right)X_2 + Sen\left(\tfrac{4\pi}{3}\right)Y_2,\quad SY_2 = Cos\left(\tfrac{4\pi}{3}\right)Y_2 - Sen\left(\tfrac{4\pi}{3}\right)X_2,$$

Así, la matriz asociada a S_o por columnas es

$$\begin{pmatrix} Cos\left(\tfrac{2\pi}{3}\right) & Sen\left(\tfrac{2\pi}{3}\right) & 0 & 0 \\ -Sen\left(\tfrac{2\pi}{3}\right) & Cos\left(\tfrac{2\pi}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Cos\left(\tfrac{4\pi}{3}\right) & -Sen\left(\tfrac{4\pi}{3}\right) \\ 0 & 0 & Sen\left(\tfrac{4\pi}{3}\right) & Cos\left(\tfrac{4\pi}{3}\right) \end{pmatrix}.$$

Ahora se calcula la simetría $s_o : M \to M$, definida por $s_o(u,v,x,y) = = (u',v',x',y')$ y, cumpliendo $(s_o)_{*_o} = S_o$ y $s_o^{\,3} = Id$.

Usando la condición $(s_o)_{*_o} = S_o$ se sigue:

$$\begin{pmatrix} Cos\left(\tfrac{2\pi}{3}\right) & Sen\left(\tfrac{2\pi}{3}\right) & 0 & 0 \\ -Sen\left(\tfrac{2\pi}{3}\right) & Cos\left(\tfrac{2\pi}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Cos\left(\tfrac{4\pi}{3}\right) & -Sen\left(\tfrac{4\pi}{3}\right) \\ 0 & 0 & Sen\left(\tfrac{4\pi}{3}\right) & Cos\left(\tfrac{4\pi}{3}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u'}{\partial u} & \frac{\partial v'}{\partial u} & \frac{\partial x'}{\partial u} & \frac{\partial y'}{\partial u} \\ \frac{\partial u'}{\partial v} & \frac{\partial v'}{\partial v} & \frac{\partial x'}{\partial v} & \frac{\partial y'}{\partial v} \\ \frac{\partial u'}{\partial x} & \frac{\partial v'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial x} \\ \frac{\partial u'}{\partial y} & \frac{\partial v'}{\partial y} & \frac{\partial x'}{\partial y} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{pmatrix}$$

de donde se obtiene:

$$u' = Cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cdot u - Sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cdot v,\quad v' = Sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cdot u + Cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cdot v,$$

$$x' = Cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\cdot x + Sen\left(\frac{4\pi}{3}\right)\cdot y,\quad y' = -Sen\left(\frac{4\pi}{3}\right)\cdot x + Cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\cdot y.$$

Ahora, como $(u',v',x',y') = s_o(u,v,x,y) = (u,v,x,y)A,$ donde

$$A=\begin{pmatrix} Cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & Sen\left(\frac{2\pi}{3}\right) & 0 & 0 \\ -Sen\left(\frac{2\pi}{3}\right) & Cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) & -Sen\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\ 0 & 0 & Sen\left(\frac{4\pi}{3}\right) & Cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) \end{pmatrix}$$

y $A^3 = Id.$, se satisface la segunda condición, $s_o{}^3 = Id$.

Así, la aplicación $s_o : M \to M$ es la simetría típica buscada.

2.3.3.2 Estudio del sistema de valores propios maximal B.

Ahora, se desarrollará el estudio del sistema de valores propios maximal $(\Theta,\Theta^2,\Theta^3,\Theta^4)$, donde $\Theta = e^{2\pi i/5}$, debido a que, evidentemente, satisface al menos una relación de la forma $\Theta_k\Theta_l = \Theta_m$, $k \neq l$.

Supongamos que $(V,S,g,\tilde{R},\tilde{T})$ es una s – variedad algebraica. Así, V es un espacio vectorial 4 – dimensional, $V^{\mathbb{C}}$ es su espacio complexificado y $S: V \to V$ es una transformación lineal real con valores propios Θ, $\bar{\Xi} = \Theta^2$, $\Xi = \Theta^3$, $\bar{\Theta} = \Theta^4$. Además, g es un producto interior sobre V tal que $S(g) = g$ y, $\tilde{T} \neq 0$ es un tensor de tipo $(1,2)$ tal que $\tilde{T}(X,Y) = -\tilde{T}(Y,X)$ y $S(\tilde{T}) = \tilde{T}$. Si se denota con los mismos símbolos las extensiones lineales de S, g y $\tilde{T}$ al espacio $V^{\mathbb{C}} = V \oplus_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, se encuentra una base de vectores propios de S, $(U_1,U_2,\bar{U}_1,\bar{U}_2)$ tal que $SU_1 = \Theta U_1$, $SU_2 = \Theta^3 U_2$, $S\bar{U}_1 = \Theta^4\bar{U}_1$, $S\bar{U}_2 = \Theta^2\bar{U}_2$.

A continuación, y de forma análoga a como se realizó en el Apartado 2.3.3.1, se aplican las propiedades asociadas a g y $\tilde{T}$.

La condición $S(g) = g$ significa que $g(SZ, SZ') = g(Z,Z')$ para cualesquiera Z, $Z' \in V^{\mathbb{C}}$. Así,

$$g(U_1,\bar{U}_1) = a^2 > 0,\ a \in \mathbb{R},\ g(U_2,\bar{U}_2) = b^2 > 0,\ b \in \mathbb{R},$$

y el resto de relaciones posibles son nulas.

Aplicando la propiedad de antisimetría $\tilde{T}(X,Y) = -\tilde{T}(Y,X)$, se sigue que $\tilde{T}(U_j,U_j) = \tilde{T}(\bar{U}_j,\bar{U}_j) = 0$, $j = 1,2$.

Si se usa la propiedad $S(\tilde{T}) = \tilde{T}$, cuyo significado es que para cualesquiera $Z,Z' \in V^{C}$, $\tilde{T}(SZ,SZ') = S(\tilde{T}(Z,Z'))$, se obtiene:

$$\tilde{T}(U_1,U_2) = \alpha\bar{U}_1,\ \tilde{T}(U_1,\bar{U}_2) = \beta U_2,\ \tilde{T}(\bar{U}_1,\bar{U}_2) = \bar{\alpha}U_1 \text{ y } \tilde{T}(\bar{U}_1,U_2) = \bar{\beta}\bar{U}_2$$

donde $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ y no se anulan simultáneamente.

Además, si ahora se realiza el cambio $U_1' = \frac{1}{a}U_1$, $U_2' = \frac{1}{b}U_2$, se observa que las relaciones relativas a S y $\widetilde{T}$ se mantienen intactas, sin embargo, las relativas a g son ahora las siguientes: [9]

$$g(U_1,\bar{U}_1) = 1,\ \ g(U_2,\bar{U}_2) = 1$$

y el resto de relaciones posibles son cero.

Se sabe, que el conjunto de relaciones características asociado a $(\Theta, \bar{\Theta} = \Theta^4, \Xi = \Theta^3, \bar{\Xi} = \Theta^2)$ es $\sum(\Theta,\Xi) = \left\{\Theta\Xi = \bar{\Theta}, \bar{\Theta}\bar{\Xi} = \Theta, \Theta\bar{\Xi} = \Xi, \bar{\Theta}\Xi = \bar{\Xi}\right\}$.

Si se considera el caso $\alpha \neq 0$ y $\beta = 0$ entonces, puesto que $\tilde{T}(U_1,\bar{U}_2) = 0$, el sistema reducido de relaciones características es $\Sigma^r = \left\{\Theta\Xi = \bar{\Theta}, \bar{\Theta}\bar{\Xi} = \Theta\right\}$. Como $S(\tilde{T}(U_1,\bar{U}_2)) = \Theta^3\tilde{T}(U_1,\bar{U}_2)$, se tiene que ambas condiciones son compatibles, si y sólo si, $\Theta^3 = 1$ ó análogamente, si y sólo si, $\bar{\Xi} = \Theta^2 = \bar{\Theta}$. Añadiendo al sistema reducido de relaciones características la condición $\bar{\Xi} = \bar{\Theta}$ y su conjugada, se sigue $\Sigma^r = \left\{\Theta^2 = \bar{\Theta} \text{ y su conjugada}\right\}$ y así, que el sistema de valores propios asociado es el sistema A), el cual ya ha sido analizado.

Supongamos que $\alpha = 0$ y $\beta \neq 0$, entonces, debido a que $\tilde{T}(U_1,U_2) = 0$, el sistema reducido de relaciones características es $\Sigma^r = \left\{\Theta\bar{\Xi} = \Xi, \bar{\Theta}\Xi = \bar{\Xi}\right\}$. Como además, $S(\tilde{T}(U_1,U_2)) = \Theta^4\tilde{T}(U_1,U_2)$, ambas condiciones son compatibles, si y sólo si, $\Theta^4 = 1$ ó análogamente, si y sólo si, $\Theta\Xi = 1$. Añadiendo al sistema reducido de relaciones características la condición $\Theta\Xi = 1$ y su conjugada, se obtiene $\Sigma^r = \left\{\Theta^2 = \bar{\Theta} \text{ y su conjugada}\right\}$ y, que el sistema de valores propios asociado es de nuevo el sistema A).

Así, de acuerdo con la Proposición 1.5.10, toda $s-$ variedad algebraica del tipo anterior, donde $\alpha\beta = 0$, proviene del sistema de valores propio maximal ya estudiado $(\Theta, \bar{\Theta} = \Theta^2, \Theta, \bar{\Theta} = \Theta^2)$, donde $\Theta = e^{2\pi i/3}$.

Ahora se supone $\alpha\beta \neq 0$ y se calcula el álgebra de Lie $\mathfrak{k}$ de todos los endomorfismos reales A de V^C tales que $A(S) = A(g) = A(\widetilde{T}) = 0$.

Las siguientes pruebas son omitidas ya que se realizan de forma análoga a las demostraciones desarrolladas en el Apartado 2.3.3.1.

La relación $A(S) = 0$ significa $A \cdot S = S \cdot A$, de donde:

$$AU_1 = \lambda U_1,\ \ A\bar{U}_1 = \bar{\lambda}\bar{U}_1,\ \ AU_2 = \mu U_2 \text{ y } A\bar{U}_2 = \bar{\mu}\bar{U}_2.$$

Por tanto, para calcular $\mathfrak{k}$ bastará conocer el valor de λ y μ. Para ello, se usaran las dos relaciones restantes.

La relación $A(g) = 0$ significa $g(AZ,Z') + g(Z,AZ')$ para cada $Z, Z' \in V^C$. Entonces, se obtiene $\lambda + \bar{\lambda} = 0$ y $\mu + \bar{\mu} = 0$.

[9] Notar, que no hay un cambio en la notación aunque se ha realizado el cambio de base.

De la relación $A(\widetilde{T})=0$, cuyo significado es que para cada $U,W\in V^C$ $A(\widetilde{T}(U,W)) = \widetilde{T}(AU,W) + \widetilde{T}(U,AW)$, se obtiene

$$\alpha(\overline{\lambda}-\lambda-\mu)=0 \text{ y } \beta(\mu-\lambda-\overline{\mu})=0.$$

Ahora, resolviendo el sistema se concluye que $\lambda=\mu=0$.

Así, $\mathfrak{k}$ = (0) y, por tanto, $\tilde{R}=0$.

Como se ha supuesto que se tiene una s – variedad algebraica, se satisface la primera identidad de Bianchi y, puesto que $\tilde{R}=0$, esta se convierte en $0=\mathfrak{S}(\tilde{T}(\tilde{T}(Z,Z'),Z''))$. En particular, se tiene

$$0=\mathfrak{S}(\tilde{T}(\tilde{T}(U_1,U_2),\overline{U}_1))=\beta\overline{\beta}U_2 \text{ y } 0=\mathfrak{S}(\tilde{T}(\tilde{T}(U_1,U_2),\overline{U}_2))=\alpha\overline{\alpha}U_1,$$

de donde, $\alpha=\beta=0$, lo cual es una contradicción con $\alpha\beta\neq 0$.

Así, en el estudio del sistema de valores propios maximal B no se puede encontrar una s – variedad algebraica distinta de las que ya han sido obtenidas con anterioridad.

2.3.3.3 Estudio del sistema de valores propios maximal C

Ahora, se desarrollará el estudio del sistema de valores propio maximal $(i,-i,-1,-1)$, debido a que, evidentemente, satisface al menos una relación de la forma $\Theta_k\Theta_l=\Theta_m$, $k\neq l$.

Supongamos que $(V,S,g,\tilde{R},\tilde{T})$ es una s – variedad algebraica. Así, V es un espacio vectorial 4 – dimensional, V^C es su espacio complexificado y $S\colon V\to V$ es una transformación lineal real con valores propios i, $-i$, -1. Además, g es un producto interior sobre V tal que $S(g) = g$ y, $\widetilde{T}\neq 0$ es un tensor de tipo $(1,2)$ tal que $\widetilde{T}(X,Y)=-\widetilde{T}(Y,X)$ y $S(\widetilde{T})=\widetilde{T}$. Se denotan con los mismos símbolos las extensiones lineales de S, g y $\widetilde{T}$ al espacio $V^C= V^C= V\oplus_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Sean U, $\overline{U}\in V^C$ vectores propios complejos de S, tales que $SU=iU$, $S\overline{U}=-i\overline{U}$. Sea H el espacio propio (real) en V correspondiente al valor propio -1, y sean V_1, $V_2\in H$ tales que $SV_j=(-1)V_j$, $j=1,2$ y $g(V_1,V_1)=g(V_2,V_2)=1$, $g(V_1,V_2)=0$.

A continuación, y de forma análoga a como se realizó en el Apartado 3.3.3.1, se aplican las propiedades asociadas a g y $\tilde{T}$.

La condición $S(g) = g$ significa que $g(SZ, SZ') = g(Z,Z')$ para cualesquiera Z, $Z'\in V^C$. Si se aplica sobre los vectores U, $\overline{U}\in V^C$, se obtiene:

$$g(U,U)=g(\overline{U},\overline{U})=0,\ g(U,\overline{U})=a^2>0,\ a\in\mathbb{R}.$$

Aplicando la propiedad de antisimetría $\tilde{T}(X,Y)=-\tilde{T}(Y,X)$, para todo $F\in\{U,\overline{U},V_1,V_2\}$ se obtiene $\tilde{T}(F,F)=0$.

Si se usa la propiedad $S(\widetilde{T})=\widetilde{T}$, se obtiene:

$$\tilde{T}(U,\bar{U})=0\,,\ \tilde{T}(V_1,V_2)=0\,,\ \tilde{T}(U,V_1)=\alpha\bar{U}\ \text{ y }\ \tilde{T}(U,V_2)=\beta\bar{U}$$

donde, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ y no son ambos cero a la vez ya que $\widetilde{T}\neq 0$.

Además, si se realiza el cambio $U'=\frac{1}{a}U$, las relaciones relativas a S y $\widetilde{T}$ se mantienen intactas, sin embargo, las relativas a g sobre los vectores $U,\ \bar{U}\in V^C$, son ahora: [10]

$$g(U,\bar{U})=1\,,\ g(U,U)=g(\bar{U},\bar{U})=0\,.$$

Calculando el álgebra de Lie $\mathfrak{k}$ de todos los endomorfismos reales A de V^C tales que $A(S)=A(g)=A(\widetilde{T})=0$, se sigue que:

- Si $\beta+i\alpha\neq 0$, la $s-$ variedad algebraica es reducible y $\tilde{R}=0$.
- Si $\beta+i\alpha=0$, se obtiene el mismo espacio simétrico generalizado que en el caso A.

2.3.4 Dimensión n = 5

Para calcular todos los sistemas de valores propios irreducibles y maximales que satisfacen al menos una relación de la forma $\Theta_i\Theta_j=\Theta_k,\ \ i\neq j$, se comienza dando una relación de todos los posibles sistemas de valores propios maximales y, después, para cada caso en particular, se irán imponiendo el resto de las condiciones.

Proposición 2.3.4.1

Los únicos sistemas de valores propios maximales para la dimensión n = 5, son los siguientes:

A) $(i,-i,i,-i,-1)$

B) $(\Theta,\Theta^2,\Theta^3,\Theta^4,\Theta^5)$ donde $\Theta=e^{2\pi i/6}$

C) $(e^{\pi i/4},e^{-\pi i/4},i,-i,-1)$

D) $(i,-i,-1,-1,-1)$

E) $(-1,-1,-1,-1,-1)$

[10] Notar, que no hay un cambio en la notación aunque se ha realizado el cambio de base.

Demostración

Por la Definición 1.5.1, se tiene que los únicos sistemas de valores propios posibles son ó de la forma $(\Theta,\bar{\Theta},\Xi,\bar{\Xi},-1)$, donde $\Theta,\Xi\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, ó de la forma $(\Theta,\bar{\Theta},-1,-1,-1)$, con $\Theta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, ó $(-1,-1,-1,-1,-1)$.

En el primer caso, se tiene que en su conjunto de relaciones características asociado Σ, sólo pueden aparecer las siguientes relaciones:

$$\Theta\overset{(1)}{=}\Xi\,,\ \Theta\Xi\overset{(3)}{=}\bar{\Theta}\,,\ \Theta\bar{\Xi}\overset{(6)}{=}\Xi\,,\ \Theta(-1)\overset{(9)}{=}\bar{\Theta}\,,$$

$$\bar{\Theta}\overset{(2)}{=}\Xi\,,\ \Theta\Xi\overset{(4)}{=}\bar{\Xi}\,,\ \Theta\bar{\Xi}\overset{(7)}{=}\bar{\Theta}\,,\ \Theta(-1)\overset{(10)}{=}\Xi\,,$$

$$\Theta\Xi\overset{(5)}{=}-1\,,\ \Theta\bar{\Xi}\overset{(8)}{=}-1\,,\ \Theta(-1)\overset{(11)}{=}\bar{\Xi}\,,$$

$$\Xi(-1)\overset{(12)}{=}\bar{\Xi}$$

y sus conjugadas.

Siguiendo el resto del análisis de este sistema utilizando el método de la Proposición 2.3.3.1, se obtienen los sistemas A, B y C.

Si ahora se consideran los sistemas de valores propios de la forma $(\Theta,\bar{\Theta},-1,-1)$, con $\Theta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, se tiene que la única posibilidad para el conjunto de relaciones es $\Sigma=\left\{\Theta(-1)=\bar{\Theta}\text{ y su conjugada}\right\}$. Como a partir de la relación $\Theta(-1)=\bar{\Theta}$, se obtiene $\Theta^2=-1$ y, así que $\Theta=i$, entonces se puede concluir que el conjunto de relaciones es maximal y que su sistema de valores propios asociado es el C.

Finalmente, el sistema $(-1,-1,-1,-1)$ es también maximal.

Nota 2.3.4.2

A continuación, no se realizan los estudios de los sistemas de valores propios maximales D y E, puesto que de D sólo es posible obtener s – variedades algebraicas reducibles; esto es, espacios simétricos Riemannianos generalizados reducibles y, de E no es posible encontrar ninguna relación de la forma $\Theta_i\Theta_j=\Theta_k$, $i\neq j$; es decir, se satisface la condición iii) del Teorema 2.1.3 y, por tanto, los espacios Riemannianos que proporciona son localmente simétricos.

Proposición 2.3.4.3

El estudio del sistema de valores propios maximal C, se reduce al estudio de los sistemas A y B.

Demostración

Sea $S:V^C \to V^C$ una transformación real cuyos valores propios son los del sistema C y sean U_1, $\bar{U}_1$, U_2, $\bar{U}_2$, W los correspondientes vectores propios (donde $W \in V$ es real); es decir:

$$SU_1 = e^{\pi i/4}U_1,\ SU_2 = iU_2,\ S\bar{U}_1 = e^{-\pi i/4}\bar{U}_1,\ S\bar{U}_2 = -i\bar{U}_2,\ SW = (-1)W \qquad \textbf{(2.8)}$$

Para cualquier tensor antisimétrico de tipo $(1,2)$, $\tilde{T} \neq 0$, tal que $\tilde{T}(SZ,SZ') = S(\tilde{T}(Z,Z'))$, se puede suponer

$$\tilde{T}(U_2,W) = \alpha\bar{U}_2,\ \tilde{T}(\bar{U}_2,W) = \bar{\alpha}U_2,\ \tilde{T}(U_1,\bar{U}_2) = \beta\bar{U}_1,\ \tilde{T}(\bar{U}_1,U_2) = \bar{\beta}U_1, \qquad \textbf{(2.9)}$$

y que el resto de combinaciones son nulas, donde $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ y, no son ambas cero a la vez puesto que $\tilde{T} \neq 0$.

Sea $(V,g,S,\tilde{R},\tilde{T})$ una s – variedad algebraica donde S y $\tilde{T}$ están dados por (2.8) y (2.9) respectivamente y, además, $g(U_1,\bar{U}_1) > 0$, $g(U_2,\bar{U}_2) > 0$ y $g(W,W) > 0$.[11]

Si $\alpha\beta \neq 0$ y se calcula el álgebra de Lie $\mathfrak{k}$ de todos los endomorfismos reales $A:V^C \to V^C$ los cuales, como derivación, anulan S, g y $\tilde{T}$, se obtiene $\mathfrak{k} = (0)$ y, por tanto, $\tilde{R} = 0$. Aplicando la primera identidad de Bianchi, $\mathfrak{S}[\tilde{T}(\tilde{T}(U_2,W),U_1)] = 0$ se obtiene $\alpha\beta\bar{U}_1 = 0$ y, por tanto, $\alpha = 0$ ó $\beta = 0$. Ello es una contradicción con $\alpha\beta \neq 0$, por tanto, sólo faltan por analizar los dos casos en los que α y β no se anulan simultáneamente.

Se sabe, por la demostración de la Proposición 2.3.4.1, que el conjunto de relaciones asociado al sistema de valores propios maximal C), $(e^{\pi i/4}, e^{-\pi i/4}, i, -i, -1)$, es $\Sigma_{C)} = \{\Xi(-1) = \bar{\Xi},\ \Theta\bar{\Xi} = \bar{\Theta} \text{ y sus conjugadas}\}$. Si ahora se considera que $\alpha = 0$ y $\beta \neq 0$, se obtiene que el sistema reducido de relaciones características es $\Sigma^r_{C)} = \{\Theta\bar{\Xi} = \bar{\Theta} \text{ y sus conjugadas}\} \subset \Sigma_{B)}$ y, así, aplicando la Proposición 1.5.10, se obtiene que es suficiente estudiar el sistema de valores propios maximal B), $(\Theta,\Theta^2,\Theta^3,\Theta^4,\Theta^5)$, donde $\Theta = e^{2\pi i/6}$. Sin embargo, si $\alpha \neq 0$ y $\beta = 0$ el sistema reducido de relaciones características es $\Sigma^r_{C)} = \{\Xi(-1) = \bar{\Xi} \text{ y sus conjugadas}\} \subset \Sigma_{A)}$ y, aplicando de nuevo la Proposición 1.5.10 se obtiene que es suficiente estudiar el sistema de valores propios maximal A), $(i,-i,i,-i,-1)$.

Así, a continuación, sólo nos centraremos en el estudio de los sistemas de valores propios maximales A y B.

---

[11] Es fácil probar esta última afirmación usando la J – base (X,JX,Y,JY) donde $U_1 = X - iJX$ y $U_2 = Y - iJY$.

2.3.4.1 Estudio del sistema de valores propios maximal A

Teoría General

Sea V un espacio vectorial de dimensión 4, $V^{\mathbb{C}}$ su complexificado y sea J una estructura compleja sobre V ([K-N], Capítulo IX, Pág. 117), la cual puede ser extendida sobre $V^{\mathbb{C}}$ por linealidad y denotada por J de nuevo. Entonces, $V^{\mathbb{C}} = V^{(i)} \oplus V^{(-i)}$ donde,

$$V^{(i)} = \{X - iJX : X \in V\} = \{Z \in V^{\mathbb{C}} : JZ = iZ\},$$
$$V^{(-i)} = \{X + iJX : X \in V\} = \{Z \in V^{\mathbb{C}} : JZ = -iZ\}.$$

Se sabe que la conjugación compleja es un isomorfismo real entre $V^{(i)}$ y $V^{(-i)}$, que $J(V^{(i)}) \subset V^{(i)}$, $J(V^{(-i)}) \subset V^{(-i)}$ y, que J conmuta con la conjugación compleja.

Lema 2.3.4.1.1

Para cada $Z \in V^{\mathbb{C}}$, Z y $J\overline{Z}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$.

Demostración

Supongamos que $aZ + bJ\overline{Z} = 0$. Si ahora se multiplica por J y se aplica la conjugación compleja se obtiene $\overline{a}J\overline{Z} - \overline{b}Z = 0$ que, junto con la anterior ecuación forman un sistema homogéneo cuyas variables Z y $J\overline{Z}$ no son nulas. Por tanto, su determinante, $a\overline{a} + b\overline{b} = |a|^2 + |b|^2$, es nulo y, así, $a = 0 = b$.

En lo que sigue, $A : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ será un endomorfismo real de forma que $A(V^{(i)}) \subset V^{(-i)}$ (y, consecuentemente que $A(V^{(-i)}) \subset V^{(i)}$).

Lema 2.3.4.1.2

Siempre se tiene que $A \circ J = -J \circ A$.

Demostración

Para cada $X \in V, (X - iJX) \in V^{(i)}$ y $A(X - iJX) \in V^{(-i)}$. Por tanto, $AX - iAJX = Y + iJY$ para algún $Y \in V$. Como A es real, se tiene que $AX = Y$, $AJX = -JAX$. Así, se tiene la relación $A \circ J = -J \circ A$ sobre V y, por linealidad se extiende sobre $V^{\mathbb{C}}$.

Lema 2.3.4.1.3

Cualquier relación de la forma $AZ = \lambda Z$ implica que

$$A\overline{Z} = \overline{\lambda}\overline{Z}, \ A(JZ) = -\lambda(JZ), \ A(J\overline{Z}) = -\overline{\lambda}(J\overline{Z}).$$

Demostración

La primera identidad se tiene de forma inmediata si $\overline{AZ} = A\overline{Z}$. Para probarlo, se separa la parte real y la parte imaginaria de Z y λ y, sustituyendo se tiene la igualdad. Así, $A\overline{Z} = \overline{AZ} = \overline{\lambda}\overline{Z}$.

La segunda identidad es clara usando el lema anterior; en efecto,

$$A(JZ) \overset{(Lema\ 2.3.4.1.3)}{=} -J(AZ) = -J\lambda Z = -\lambda(JZ).$$

Y la tercera identidad se tiene ya que

$$A(J\overline{Z}) \overset{(Lema\ 2.3.4.1.3)}{=} -J(A\overline{Z}) \overset{(1^a Identidad)}{=} -J\overline{\lambda}\overline{Z} = -\overline{\lambda}(J\overline{Z}).$$

Lema 2.3.4.1.4

Si el endomorfismo A tiene un valor propio complejo $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces $V^{\mathbb{C}}$ tiene una base de vectores propios correspondientes a los valores propios λ, $\overline{\lambda}$, $(-\lambda)$ y $(-\overline{\lambda})$.

Demostración

Sea $\lambda \neq \overline{\lambda}$ un valor propio de A y sea $Z \in V^{C}$ su correspondiente vector propio.

Si $\lambda + \overline{\lambda} \neq 0$ entonces, debido al Lema 2.3.4.1.3, λ, $\overline{\lambda}$, $(-\lambda)$ y $(-\overline{\lambda})$ son valores propios de A distintos entre si y $\{Z, \overline{Z}, JZ, J\overline{Z}\}$ es la correspondiente base de vectores propios.

Si $\lambda + \overline{\lambda} = 0$ entonces, aplicando los Lemas 2.3.4.1.1 y 2.3.4.1.3, Z y $J\overline{Z}$ son vectores propios independientes de λ y, $\overline{Z}$ y JZ son vectores propios independientes de $-\lambda$. Así, $\{Z, \overline{Z}, JZ, J\overline{Z}\}$ también es una base de vectores propios.

Lema 2.3.4.1.5

Si el endomorfismo A admite el valor propio nulo entonces, $A = 0$ ó $\dim(Ker(A)) = 2$.

Demostración

Notar que es suficiente probar el lema sobre el espacio real V. Como, para cualquier $X \in V$ tal que $AX = 0$ se tiene, usando el Lema 2.3.4.1.2, que $A(JX) = 0$; es decir, que si $X \in Ker(A)$ entonces $JX \in Ker(A)$, se concluye que ó $\dim(Ker(A)) = 2$ ó, $\dim(Ker(A)) = 4$ y $A = 0$.

Proposición 2.3.4.1.6

El endomorfismo A ó es el nulo ó admite una de las siguientes formas de Jordan (en el dominio complejo):

a) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{\lambda} \end{pmatrix}$ donde $\lambda \in \mathbb{C}$,

b) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_2 \end{pmatrix}$ donde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 \geq 0$,

c) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$ donde $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$.

Demostración

Si el endomorfismo A admite un valor propio complejo λ entonces, debido al Lema 2.3.4.1.4, A es diagonalizable y su correspondiente forma de Jordan es aquella que tiene los valores propios en la diagonal; es decir, la a).

Supongamos que todos los valores propios de A son reales. Entonces, se pueden distinguir los casos siguientes:

– Si existen dos valores propios no nulos λ y μ tales que $|\lambda| \neq |\mu|$. Entonces, debido al Lema 2.3.4.1.3, el resto de valores propios son $-\lambda$ y $-\mu$. Así, se tiene que los divisores elementales correspondientes son

$$\{(x-\lambda),\ (x-\mu),\ (x+\lambda),\ (x+\mu)\}.$$

Por tanto, si se identifica y se supone que $0 < \lambda \equiv \lambda_1$ y $0 < \mu \equiv \lambda_2$ la correspondiente forma canónica normal o de Jordan es la del apartado b).

– Si $\lambda \neq 0$ y $\mu = 0$ se tienen dos posibles conjuntos de divisores elementales:

1º $\{x^2,\ (x-\lambda),\ (x+\lambda)\}$

2º $\{x,\ (x-\lambda),\ (x+\lambda),\ x\}$.

La correspondiente forma de Jordan asociada al primero es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Esta, indica que $\dim(Ker(A)) = 1$ y, como esto contradice el Lema 2.3.4.1.5 no se considera. Sin embargo, en el segundo se sabe que un valor propio es cero y que $A \neq 0$ entonces, debido al Lema 2.3.4.1.5, $\dim(Ker(A)) = 2$ y, por tanto, se afirma que existen dos valores propios nulos y que la correspondiente forma de Jordan asociada es la del apartado b) cuando $0 < \lambda \equiv \lambda_1$ y $0 = \mu \equiv \lambda_2$.

– Supongamos que sólo se tienen dos valores propios reales $\lambda > 0$ y $-\lambda$. Aplicando el Lema 2.3.4.1.3 se sabe que si Z es el vector propio correspondiente a λ entonces, JZ es el vector propio correspondiente a $-\lambda$ y, viceversa. Por tanto, se tienen dos posibles conjuntos de divisores elementales:

$$1.^{\text{o}}\ \{(x-\lambda),\ (x-\lambda),\ (x+\lambda),\ (x+\lambda)\}$$
$$2.^{\text{o}}\ \{(x-\lambda)^2,\ (x+\lambda)^2\}.$$

La correspondiente forma de Jordan asociada al primero es la del apartado b) cuando $0 < \lambda \equiv \lambda_1 = \lambda_2$ y la asociada al segundo es la del apartado c) cuando $\lambda > 0$.

– Finalmente, si $A \neq 0$ y todos los valores propios son el cero, debido al Lema 2.3.4.1.5, $\dim(Ker(A)) = 2$. Además, se tienen tres posibles conjuntos de divisores elementales:

$$1.^{\text{o}}\ \{x, x, x, x\}$$
$$2^{\text{o}}\ \{x^2, x^2\}$$
$$3^{\text{o}}\ \{x^4\}.$$

La forma canónica de Jordan asociada al primero es la matriz nula, lo que indica que $A = 0$, pero como se sabe que $A \neq 0$ no se considera esta opción. La asociada al segundo es la del apartado c) cuando $\lambda = 0$ y la asociada al tercero es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

la cual indica que $\dim(Ker(A)) = 1$, lo que contradice el hecho de que $\dim(Ker(A)) = 2$ por tanto, tampoco se considera.

Proposición 2.3.4.1.7

Si $A \neq 0$ entonces, se tiene que en los casos a), b) y c) de la Proposición 2.3.4.1.6 se satisface respectivamente que:

a) Existen $U_1, U_2 \in V^{(i)}$ linealmente independientes tales que
$$AU_1 = \lambda \bar{U}_2, \quad AU_2 = \bar{\lambda} \bar{U}_1.$$
b) Existen $U_1, U_2 \in V^{(i)}$ linealmente independientes tales que
$$AU_1 = \lambda_1 \bar{U}_1, \quad AU_2 = \lambda_2 \bar{U}_2.$$
c) Existen $U_1, U_2 \in V^{(i)}$ linealmente independientes tales que
$$AU_1 = \lambda \bar{U}_1 + \bar{U}_2, \quad AU_2 = \lambda \bar{U}_2.$$

Demostración

En esta se desarrollará la prueba de cada apartado por separado. En efecto:

a) Dado $Z \in V^{C} = V^{(i)} \oplus V^{(-i)}$ tal que $AZ = \lambda Z$ es decir, un vector propio de λ, se tiene que $Z = Z_1 + \bar{Z}_2$ donde, $Z_1, Z_2 \in V^{(i)}$. Si ahora se aplica el endomorfismo A, se identifica $U_1 \equiv Z_1$ y $U_2 \equiv Z_2$, como $A(V^{(i)}) \subset V^{(-i)}$ y, consecuentemente $A(V^{(-i)}) \subset V^{(i)}$, se obtienen las relaciones buscadas. Además, U_1 y U_2 son linealmente independientes, en efecto, si no lo fueran, $U_2 = \nu U_1$ con $0 \neq \nu \in \mathbb{C}$ entonces, aplicando el endomorfismo A se obtiene que $\bar{\lambda} = \nu \bar{\nu} \lambda$ y, separando e igualando parte real y parte imaginaria que $\nu \bar{\nu} = 1$. Así, $\bar{\lambda} = \lambda \in \mathbb{R}$ es la contradicción buscada.

b) Debido a que se está en el apartado b) de la proposición anterior se tiene que existen $X_1, X_2 \in V$ linealmente independientes tales que $AX_1 = \lambda_1 X_1$ y $AX_2 = \lambda_2 X_2$. Entonces, tomando en $V^{(i)}$ $U_1 = X_1 - iJX_1$, $U_2 = X_2 - iJX_2$ y aplicando el Lema 2.3.4.1.2 se obtienen las relaciones buscadas. Además, U_1 y U_2 son linealmente independientes, en efecto, si no lo fueran, $U_2 = \nu U_1$ con $0 \neq \nu \in \mathbb{C}$ entonces, como $AU_1 = \lambda_1 \bar{U}_1$ y $AU_2 = \lambda_2 \bar{U}_2$, si se multiplica por $0 \neq \nu \in \mathbb{C}$ la primera relación y se aplica la hipótesis se obtiene que $\lambda_1 \nu = \lambda_2 \bar{\nu}$ donde $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 \geq 0$ y $\nu = a + ib$. Ahora, separando e igualando parte real y parte imaginaria de esta última relación se obtiene que $\nu \in \mathbb{R}$ y, por tanto, que $U_2 = \nu U_1$ con $0 \neq \nu \in \mathbb{R}$. Es decir, que $X_2 - iJX_2 = \nu X_1 - iJ\nu X_1$ y, así, que $X_2 = \nu X_1$, lo cual es la contradicción buscada debido a que X_1 y X_2 son linealmente independientes.

c) Debido al apartado c) de la proposición anterior se tiene que existen $X_1, X_2 \in V$ linealmente independientes tales que $AX_1 = \lambda X_1 + X_2$ y $AX_2 = \lambda X_2$. Entonces, tomando en $V^{(i)}$ $U_1 = X_1 - iJX_1$, $U_2 = X_2 - iJX_2$ y aplicando el Lema 2.3.4.1.2 se obtienen las relaciones buscadas. Además U_1 y U_2 son linealmente independientes, en efecto, si no lo fueran, $U_2 = \nu U_1$ con $0 \neq \nu \in \mathbb{C}$ entonces, como $AU_1 = \lambda \bar{U}_1 + \bar{U}_2$ y $AU_2 = \lambda \bar{U}_2$, se tiene que

$$AU_2 = \lambda\overline{U}_2 = \lambda\overline{\nu}\overline{U}_1,\ AU_2 = \nu AU_1 = \nu\lambda\overline{U}_1 + \nu\overline{U}_2 = \nu\lambda\overline{U}_1 + \nu\overline{\nu}\overline{U}_1 = (\nu\lambda + \nu\overline{\nu})\overline{U}_1.$$

Así, $\lambda(\overline{\nu} - \nu) = \nu\overline{\nu} \geq 0$ y, de aquí, tanto en el caso cuando λ es nulo, como cuando no lo es (debido a que $\lambda(\overline{\nu} - \nu)$ es complejo puro) se obtiene que $\nu = 0$, lo cual es una contradicción con nuestra anterior suposición.

Proposición 2.3.4.1.8

Sea $(V, g, S, \tilde{R}, \tilde{T})$ una s – variedad algebraica de dimensión 5 cuyo sistema de valores propios asociado es $(i, -i, i, -i, -1)$. Se denotan por $V^{(i)}$, $V^{(-i)}$ y $V^{(-1)}$ los correspondientes espacios propios de S en $V^{\mathbb{C}}$ tales que $V^{\mathbb{C}} = V^{(i)} + V^{(-i)} + V^{(-1)}$. Entonces, para cualquier base $\{U_1, U_2\}$ de $V^{(i)}$ y para cualquier $W \in V^{(-1)} \cap V$, el tensor $\tilde{T}$ satisface las relaciones

$$\tilde{T}(U_1, U_2) = \mu W,\ \ \tilde{T}(U_i, \overline{U}_j) = 0,\ \ i, j = 1, 2.$$

Además, la aplicación $\tilde{T} : V^{(i)} \times V^{(-1)} \to V^{\mathbb{C}}$ toma, para una elección adecuada de $U_1,\ U_2 \in V^{(i)}$ y $W \in V^{(-1)} \cap V$, exactamente una de las siguientes formas canónicas:

1. $\tilde{T}(U_i, W) = 0,\ \ i = 1, 2$,
2. $\tilde{T}(U_1, W) = \lambda_1\overline{U}_1,\ \ \tilde{T}(U_2, W) = \lambda_2\overline{U}_2,\ \ \lambda_1 > 0,\ \ \lambda_2 \geq 0,\ \ \lambda_1 \geq \lambda_2$,
3. $\tilde{T}(U_1, W) = \lambda\overline{U}_2,\ \ \tilde{T}(U_2, W) = \overline{\lambda}\overline{U}_1,\ \ \lambda \in \mathbb{C}$,
4. $\tilde{T}(U_1, W) = \lambda\overline{U}_1 + \overline{U}_2,\ \ \tilde{T}(U_2, W) = \lambda\overline{U}_2,\ \ \lambda \geq 0,\ \ \lambda \in \mathbb{R}$.

Demostración

La primera afirmación se sigue ya que, como $S(\tilde{T}(Z, Z')) = \tilde{T}(SZ, SZ')$ se tiene que $S(\tilde{T}(U_1, U_2)) = \tilde{T}(SU_1, SU_2) = -\tilde{T}(U_1, U_2)$ implica $\tilde{T}(U_1, U_2) = \mu W$ y que $S(\tilde{T}(U_i, \overline{U}_j)) = \tilde{T}(SU_i, S\overline{U}_j) = \tilde{T}(iU_i, -i\overline{U}_j) = \tilde{T}(U_i, \overline{U}_j)$ indica que $\tilde{T}(U_i, \overline{U}_j)$ tiene el valor propio uno y, por tanto, $\tilde{T}(U_i, \overline{U}_j) = 0$, donde $i, j = 1, 2$.

Además, la transformación S determina una estructura compleja sobre el subespacio $V^{\mathbb{C}'} = V^{(i)} + V^{(-i)}$ de $V^{\mathbb{C}} = V^{(i)} + V^{(-i)} + V^{(-1)}$.

Ahora, si se identifica S con J las hipótesis de las Proposiciones 2.3.4.1.6 y 2.3.4.1.7 son satisfechas y aplicables para obtener el resto de afirmaciones buscadas.

En efecto, si se supone que $A(Z) = \tilde{T}(Z, W)$ y que $Z \in V^{(i)}$ entonces, $S(A(Z)) = S(\tilde{T}(Z, W)) \overset{12}{=} \tilde{T}(SZ, SW) = \tilde{T}(iZ, -W) = -iA(Z)$ así, $A(Z) \in V^{(-i)}$ y, por tanto, $A(V^{(i)}) \subset V^{(-i)}$. Ahora se ve que A es real; es decir que $A(V^{\mathbb{C}'} \cap V) \subset V$

[12] Debido a la invariancia de $\tilde{T}$ por S.

donde $V^{C'} = V^{(i)} + V^{(-i)}$. En efecto, si $X \in V^{(i)}$ e $Y \in V^{(-i)}$ fácilmente se observa que entonces $\overline{A(X)} = A(\overline{X})$ y $\overline{A(Y)} = A(\overline{Y})$, por tanto, si $Z = X + Y \in V^{C'} \cap V$

$$A(Z) \overset{Z \in V}{=} A(\overline{Z}) = A(\overline{X} + \overline{Y}) = A(\overline{X}) + A(\overline{Y}) = \overline{A(X)} + \overline{A(Y)} = \overline{A(X) + A(Y)} = \overline{A(Z)}$$

y, así, $A(Z) \in V$.

Aplicando ahora las Proposiciones 2.3.4.1.6 y 2.3.4.1.7 se obtiene, en el caso de que el endomorfismo A sea el nulo, el apartado 1) y, cuando no lo es, los apartados 2), 3) y 4).

Proposición 2.3.4.1.9

Suponiendo que se tienen las mismas hipótesis que en la Proposición 2.3.4.1.8, sea la base $\{U_1,\ U_2\}$ de $V^{(i)}$ y $W \in V^{(-1)} \cap V$. Entonces

a) $g(U_i, U_j) = g(U_i, W) = 0, \quad i, j = 1,2,$

b) $g(Z, \overline{Z}) > 0$ para cualquier $Z \in V^C,\ Z \neq 0,$

c) $\tilde{R}(U_i, U_j) = \tilde{R}(U_i, W) = 0, \quad i, j = 1,2,$

d) $\tilde{R}(Z, Z')W = 0$ para cualesquiera $Z, Z' \in V^C$,

e) $\tilde{T}(\tilde{T}(U_i, W), \overline{U}_j) - \tilde{T}(\tilde{T}(\overline{U}_j, W), U_i) = 0,\ i = 1,2$.

Demostración

El apartado a) es claro si se aplica la propiedad $g(SZ, SZ') = g(Z, Z')$ cuando $Z \equiv U_i$ y $Z' \equiv U_j$, $i, j = 1,2$ y, cuando $Z \equiv U_i$ y $Z' \equiv W$, $i = 1,2$.

El apartado b) es obvio si se desarrolla la expresión.

Para obtener el apartado c) primero es necesario ver que $\tilde{R}(Z, Z') \circ S = S \circ \tilde{R}(Z, Z')$. En efecto,

$$\tilde{R}(Z, Z')(SV) = (\tilde{R}(Z, Z') \circ S)\ V + S(\tilde{R}(Z, Z')V)$$

y, como $\tilde{R}(Z, Z') \in \mathfrak{h}$, se sabe por la demostración del Teorema 1.3.1.7, que el primer sumando se anula.

Ahora, usando esta igualdad se prueba que $\tilde{R}(Z, Z') = \tilde{R}(SZ, SZ')$. En efecto, $\tilde{R}(Z, Z')SZ'' = S(\tilde{R}(Z, Z')Z'') \overset{13}{=} \tilde{R}(SZ, SZ')SZ''$ para todo SZ''.

Aplicando esta última igualdad cuando $Z \equiv U_i$ y $Z' \equiv U_j$, $i, j = 1,2$ y, cuando $Z \equiv U_i$ y $Z' \equiv W$, $i = 1,2$, se obtiene el apartado c).

A continuación se demuestra el apartado d). Como $\tilde{R}(Z, Z') \in \mathfrak{k}$ se sabe que $g(\tilde{R}(Z, Z')U, U')) + g(U, \tilde{R}(Z, Z')U') = 0$. Si en esta se considera que $U = W = U'$

[13] Debido a la S – invariancia de $\tilde{R}$.

se obtiene que $2g(\tilde{R}(Z,Z')W,W)\overset{\lozenge}{=}0$ y, como $\tilde{R}(Z,Z')W \in V^{(i)} + V^{(-i)} + \{W\}$, se tiene que $\tilde{R}(Z,Z')W = aU_1 + bU_2 + a'\bar{U}_1 + b'\bar{U}_2 + cW$ donde, además, debido a $\lozenge$ se sabe que $c=0$. Por otro lado, si Z y Z' son vectores propios de S entonces, $\tilde{R}(Z,Z')=0$ salvo cuando $Z\in V^{(i)}$ y $Z'\in V^{(-i)}$ ó, al contrario debido al apartado c). Así, sean $Z\in V^{(i)}$, $Z'\in V^{(-i)}$ y $W\in V^{(-1)}$, aplicando la $S-$ invariancia de $\tilde{R}$ sobre $\tilde{R}(Z,Z')W$ se obtiene que $\tilde{R}(Z,Z')W \in V^{(-1)}$; es decir, que a, a', b y b' son nulos como se buscaba.

Como se tiene una $s-$ variedad algebraica se sabe que es satisfecha la identidad de Bianchy $\mathfrak{S}\tilde{R}(Z,Z')W = \mathfrak{S}\tilde{T}(\tilde{T}(Z,Z'),W)$, para todo $Z,\ Z'\in V^{\mathbb{C}}$ y $W\in V$. Entonces, desarrollándola suponiendo que $Z\equiv U_i$, $Z'\equiv \bar{U}_j$, $i,j=1,2$ y, aplicando los apartados c), d) y, que $\tilde{T}(U_i,\bar{U}_j)=0$, $i,j=1,2$ por la Proposición anterior, se obtiene que $\tilde{T}(\tilde{T}(\bar{U}_j,W),U_i)+\tilde{T}(\tilde{T}(W,U_i),\bar{U}_j)=0$ como indica el apartado e).

En lo que sigue, se clasificará, por medio de la Proposición 2.3.4.1.8 todas las $s-$ variedades algebraicas $(V,\ g,\ S,\ \tilde{R},\ \tilde{T})$ cuyo sistema de valores propios es $(i,\ -i,\ i,\ -i,\ -1)$.

Primer Caso de la Proposición 2.3.4.1.8.

De manera análoga al desarrollo del Apartado 2.3.3.1, se puede elegir un vector unitario $W\in V^{(-1)}\cap V$ y una base $\{U_1,U_2\}$ de $V^{(i)}$ tal que

$$g(U_1,\bar{U}_2)=\nu\in\mathbb{C},\ \ g(U_1,\bar{U}_1)=a^2>0,\ \ a\in\mathbb{R},\ \ g(U_2,\bar{U}_2)=b^2>0,\ \ b\in\mathbb{R},$$

donde el resto de relaciones posibles, relativas a la métrica, son nulas y, además que

$$\tilde{T}(U_1,U_2)=\mu' W,\ \ \tilde{T}(U_j,W)=0\ \text{ y }\ \tilde{T}(U_j,\bar{U}_k)=0,\ \ j,k=1,2$$

donde, $\mu'\in\mathbb{C}$ no es nulo ya que $\tilde{T}\neq 0$. Ahora, siguiendo el método utilizado en la demostración del Lema 2.3.3.1.3 se obtiene que

$$g(U_1,\bar{U}_2)=0,\ \ g(U_1,\bar{U}_1)=1,\ \ g(U_2,\bar{U}_2)=1,$$

que el resto de relaciones posibles relativas a la métrica son nulas y, que

$$\tilde{T}(U_1,U_2)=\mu W,\ \ \tilde{T}(U_j,W)=0\ \text{ y }\ \tilde{T}(U_j,\bar{U}_k)=0,\ \ j,k=1,2,$$

donde, $\mu\in\mathbb{C}$ no es nulo. Si ahora se considera que $\mu=\rho e^{i\Psi}$ con $\rho>0$ y se remplaza U_2 por $U_2\cdot e^{i\Psi}$, se obtiene que la única relación modificada es $\tilde{T}(U_1,U_2)=\rho W$. Finalmente, remplazando el vector W por ρW, se obtiene que las únicas relaciones modificadas son $\tilde{T}(U_1,U_2)=W$ y $g(W,W)=\rho^2>0$. Entonces, se considerará que esta es la forma canónica común para $\tilde{T}$ y g y, que ρ es un invariante. Además, como, así consideradas, S, g, y $\tilde{T}$ junto con $\tilde{R}=0$ satisfacen las propiedades i) – vi) del Teorema 1.3.2., determinan una s – variedad algebraica.

Si se considera $U_j=(X_j+iY_j)\big/\sqrt{2}$ para $j=1,2$ y, donde $X_j,Y_j\in V$, se obtiene, desarrollando las expresiones anteriores y resolviendo las ecuaciones, que (X_1,X_2,Y_1,Y_2,W) forman una base ortogonal de V, verificando

$$g(X_j,X_j)=g(Y_j,Y_j)=1,\quad g(W,W)=\rho^2,\ \ j=1,2,$$
$$\tilde{T}(X_1,X_2)=W,\quad \tilde{T}(Y_1,Y_2)=-W$$

y, que el resto de relaciones son nulas. Por tanto, la correspondiente “Álgebra de Nomizu” $\mathfrak{g}$ (ver fórmula 1.2) está completamente determinada por la tabla siguiente:

$$[X_1,X_2]=-W,\ \ [Y_1,Y_2]=W \ \text{ y el resto de relaciones nulas.}$$

Por otra parte, procediendo de forma análoga al Lema 2.3.2.6 se comprueba que $(\mathcal{D}_{\bar{U}_1}R)(U_1,U_2)U_1\neq 0$ para U_1, U_2 elementos fijados de la base de V^C; por ello, el correspondiente espacio s – simétrico (M,g) no es localmente simétrico.

Realización geométrica.

En primer lugar, notar que debido a que $\tilde{R}=0$, analizar el espacio vectorial $\mathfrak{m}$ es equivalente a analizar el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Como se prueba fácilmente, el centro de $\mathfrak{g}$ no es nulo; entonces, no se puede aplicar la representación adjunta. Por ello, se considera la foliación dada por X_1, Y_1 y W. Puesto que la foliación es de dimensión 3, se toman

$$X_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ \ Y_1=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ \ W=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$X_2=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&0\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&0\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ \ Y_2=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}&0\\b_{21}&b_{22}&b_{23}&0\\b_{31}&b_{32}&b_{33}&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

donde, $a_{ij},\ b_{ij} \in \mathbb{R},\ i,j = 1,2,3.$ Ahora, usando la tabla de multiplicar, se calculan los coeficientes indeterminados y se obtiene

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$\mathfrak{g} = \{aX_1 + bY_1 + cW + \alpha X_2 - \beta Y_2 : a,b,c,\alpha,\beta \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & b \\ \alpha & \beta & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a,b,c,\alpha,\beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

El siguiente paso es calcular el grupo de Lie G asociado a dicha álgebra. Para ello, se usará la aplicación exponencial $\exp : \mathfrak{g} \to G$.

Sea $A \in \mathfrak{g}$, entonces

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = I + A + \frac{A^2}{2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & b \\ \alpha & \beta & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a\alpha + b\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ \alpha & \beta & 1 & c + \frac{1}{2}a\alpha + \frac{1}{2}b\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & u \\ 0 & 1 & 0 & v \\ x & y & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G.$$

Por tanto, el grupo de Lie G es el grupo formado por todas las matrices de la forma

$$G=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0&u\\0&1&0&v\\x&y&1&z\\0&0&0&1\end{pmatrix}: u,v,x,y,z\in\mathbb{R}\right\}.$$

Además G es difeomorfo al espacio $\mathbb{R}^5(u,v,x,y,z)$ ya que claramente

$$\begin{pmatrix}1&0&0&u\\0&1&0&v\\x&y&1&z\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cong(u,v,x,y,z) \text{ para todo } u,v,x,y,z\in\mathbb{R}.$$

A continuación se calcula la métrica Riemanniana G – invariante g sobre $\mathbb{R}^5(u,v,x,y,z)$.

Lema 2.3.4.1.10

Se puede representar la base del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, (X_1,Y_1,X_2,Y_2,W) sobre $\mathbb{R}^5(u,v,x,y,z)$, por los campos vectoriales invariantes a izquierda siguientes:

$$X_1'=\frac{\partial}{\partial u},\quad Y_1'=\frac{\partial}{\partial v},\quad X_2'=\frac{\partial}{\partial x}+u\frac{\partial}{\partial z},\quad Y_2'=-\left(\frac{\partial}{\partial y}+v\frac{\partial}{\partial z}\right) \text{ y } W'=\frac{\partial}{\partial z}.$$

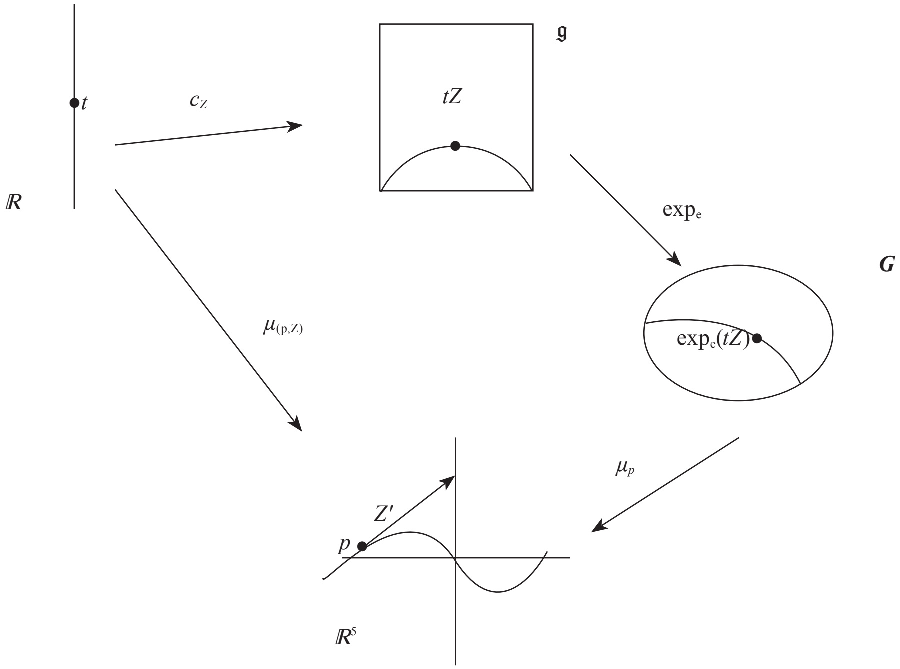
Demostración

En efecto, para cada $Z\in\mathfrak{g}$, se considera su correspondiente transformación infinitesimal sobre $\mathbb{R}^5(u,v,x,y,z)$. Para ello, dado $p\in\mathbb{R}^5(u,v,x,y,z)$ se considera su vector tangente $Z_p':=\mu_{p*}(Z_e)$ donde $e\equiv Id.\in G$ y $\mu_p:G\to\mathbb{R}^5$ es la aplicación dada por $g\to g\cdot p$.

Para poder aplicar esto y calcular los campos buscados se define la aplicación $\mu_{(p,Z)}=\mu_p\circ\exp_e\circ c_Z:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^5$ dada por $t\to\exp_e(tZ)\cdot p$ y se prueba que $Z_p':=\mu_{p*}(Z_e)$ es $\frac{d}{dt}\big|_{t=0}(\mu_{(p,Z)}(t))$. En efecto,

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\mu_{(p,Z)}(t))=\mu_{p*_p}\circ\exp_{*e=Id.}\circ\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}c_Z(t)=(\mu_{p*_p}\circ\exp_{*e=Id.})(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(tZ))=$$

$$=(\mu_{p*_p}\circ\exp_{*e=Id.})(Z)=\mu_{p*_p}(\exp_{*e=Id.}(Z))=\mu_{p*_p}(Z_e)=:Z_p'$$



Por tanto, para calcular $Z' \in \mathbb{R}^5(u,v,x,y,z)$, se calcula Z'_p para todo $p \in \mathbb{R}^5(u,v,x,y,z)$ mediante la siguiente aplicación:

$$\mu_{(p,Z)*_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^5$$
$$t \to \mu_{(p,Z)*_0}(t) = \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} (\mu_{(p,Z)}(t)) = Z'_p.$$

Ahora, aplicando el anterior desarrollo teórico a cada uno de los elementos de la base de $\mathfrak{g}$, (X_1, Y_1, X_2, Y_2, W), se obtienen los campos buscados. En efecto, dado $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}$, se calcula X'_{1_p} para todo $p \in \mathbb{R}^5(u,v,x,y,z)$ como sigue:

$$\exp_{Id.}(tX_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tX_1)^n}{n!} = I + tX_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dado $p=(u,v,z,x,y)\in\mathbb{R}^5$ se tiene

$$\exp_{Id.}(tX_1)\cdot p\cong\exp_{Id.}(tX_1)\cdot\begin{pmatrix}1&0&0&u\\0&1&0&v\\x&y&1&z\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&u+t\\0&1&0&v\\x&y&1&z\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cong(u+t,v,x,y,z),$$

así,

$$X'_{1_p}=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\mu_{(p,X_1)}(t))=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\exp_{Id.}(tX_1)\cdot p)=(1,0,0,0,0)\simeq\frac{\partial}{\partial u}\Big|_p$$

para todo $p=(u,v,x,y,z)\in\mathbb{R}^5$. Los campos restantes se calculan de forma análoga.

Ahora, usando el producto interior g sobre el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y el Lema 2.3.4.1.10 se obtiene resolviendo unas sencillas ecuaciones que la métrica Riemanniana invariante sobre G es de la forma:

$$g=du^2+dv^2+dx^2+dy^2+\rho^2(udx+vdy-dz)^2,$$

donde $\rho>0$.

Finalmente, se tiene:

Lema 2.3.4.1.11

La simetría típica s_o de orden 4 en el punto $o\equiv(0,0,0,0,0)$ de $\mathbb{R}^5(u,v,x,y,z)$ es la transformación dada por:

$$u'=-v,\ v'=u,\ x'=-y,\ y'=x,\ z'=-z.$$

Demostración

Se sabe que $SU_1=iU_1$, $SU_2=iU_2$, $SW=-W$ y $U_j=\frac{1}{\sqrt{2}}(X_j+iY_j)$ para $j=1,2$. Entonces, desarrollando y despejando se tiene que $SX_j=-Y_j$ y $SY_j=X_j$. Así, la matriz asociada a S_o por filas con respecto a la base $\{X_1,Y_1,X_2,Y_2,W\}$ de T_oM es

$$\begin{pmatrix}0&-1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Ahora, se calcula la simetría $s_o : M \to M$, la cual cumple que $(s_o)_{*_o} = S_o$, $s_o{}^4 = Id.$ y está definida por $s_o(u,v,x,y,z) = (u',v',x',y',z')$.

De la condición $(s_o)_{*_o} = S_o$ se sigue que la matriz asociada a S_o es

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u'}{\partial u} & \frac{\partial u'}{\partial v} & \frac{\partial u'}{\partial x} & \frac{\partial u'}{\partial y} & \frac{\partial u'}{\partial z} \\ \frac{\partial v'}{\partial u} & \frac{\partial v'}{\partial v} & \frac{\partial v'}{\partial x} & \frac{\partial v'}{\partial y} & \frac{\partial v'}{\partial z} \\ \frac{\partial x'}{\partial u} & \frac{\partial x'}{\partial v} & \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} & \frac{\partial x'}{\partial z} \\ \frac{\partial y'}{\partial u} & \frac{\partial y'}{\partial v} & \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} & \frac{\partial y'}{\partial z} \\ \frac{\partial z'}{\partial u} & \frac{\partial z'}{\partial v} & \frac{\partial z'}{\partial x} & \frac{\partial z'}{\partial y} & \frac{\partial z'}{\partial z} \end{pmatrix}$$

de donde se obtiene

$$u' = -v, \; v' = u, \; x' = -y, \; y' = x, \; z' = -z.$$

Ahora, como $(u',v',x',y',z') = s_o(u,v,x,y,z) = A \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y como $A^4 = Id.$, se satisface la segunda condición, $s_o{}^4 = Id.$

Por tanto, la aplicación $s_o : M \to M$ es la simetría típica buscada.

Así, se ha obtenido el tipo 1 de la lista de clasificación.

En lo que sigue, se prueba que no existe una s – variedad algebraica $(V, g, S, \tilde{R}, \tilde{T})$ donde $\tilde{R} \neq 0$ y, g y $\tilde{T}$ tengan la forma canónica anterior.

Para ello, primero se calcula el álgebra de Lie $\mathfrak{k}$ de todos los endomorfismos reales $A : V^C \to V^C$ tales que $A(S) = A(g) = A(\tilde{T}) = 0$. De forma análoga a los Lemas 2.3.3.1.4, 2.3.3.1.5 y 2.3.3.1.6 se obtiene con respecto a la base canónica $\{U_1, \overline{U}_1, U_2, \overline{U}_2, W\}$ que cada $A \in \mathfrak{k}$ se puede expresar de la forma siguiente:

$$AU_i = \sum_j a_i^j U_j, \quad A\overline{U}_i = \sum_j \overline{a}_i^j \overline{U}_j \text{ y } AW = 0,$$

donde $a_i^j + \overline{a}_j^i = 0$, para $i, j = 1,2$, y $a_1^1 + a_2^2 = 0$. Por tanto, el álgebra de Lie $\mathfrak{k}$ es isomorfa a $\mathfrak{su}(2)$.

Debido a la Proposición 2.3.4.1.9 se sabe que las transformaciones $\tilde{R}(Z,Z')$ para los vectores propios $Z,\ Z'$ son todas cero excepto posiblemente la transformación $\tilde{R}(U_i,\overline{U}_j),\ i,j=1,2$, la cual pertenece a $\mathfrak{k}^C = \mathfrak{k}\otimes \mathbb{C}$.

Lema 2.3.4.1.12

Existen endomorfismos $A^1,\dots,A^4 \in \mathfrak{k}$ tales que

$$\tilde{R}(U_1,\overline{U}_1) = iA^1,\ \tilde{R}(U_1,\overline{U}_2) = A^2 + iA^3,\ \tilde{R}(U_2,\overline{U}_1) = -A^2 + iA^3,\ \tilde{R}(U_2,\overline{U}_2) = iA^4 .$$

Demostración

En efecto, como $U_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_j + iY_j)$, $i,j=1,2$, desarrollando se obtiene que

$$\tilde{R}(U_1,\overline{U}_1) = \frac{1}{2}\left\{-2i\tilde{R}(X_1,Y_1)\right\} = iA^1,\ \ \tilde{R}(U_2,\overline{U}_2) = \frac{1}{2}\left\{-2i\tilde{R}(X_2,Y_2)\right\} = iA^4,$$

$$\tilde{R}(U_1,\overline{U}_2) = \frac{1}{2}\left\{\tilde{R}(X_1,X_2)+\tilde{R}(Y_1,Y_2)\right\} + i\frac{1}{2}\left\{-\tilde{R}(X_2,Y_1)-\tilde{R}(X_1,Y_2)\right\} = A^2 + iA^3,$$

$$\tilde{R}(U_1,\overline{U}_2) = \frac{1}{2}\left\{\tilde{R}(X_2,X_1)+\tilde{R}(Y_2,Y_1)\right\} + i\frac{1}{2}\left\{\tilde{R}(Y_1,X_2)+\tilde{R}(Y_2,X_1)\right\} = -A^2 + iA^3 .$$

Ahora, se desarrollan $\mathfrak{S}[\tilde{R}(U_1,\overline{U}_1)U_2]=0$ y $\mathfrak{S}\left[\tilde{R}(U_2,\overline{U}_2)U_1\right]=0$ (primera identidad de Bianchy) y, se obtiene

$$iA^1(U_2) + (A^2 - iA^3)U_1 = 0 \ \text{ y } \ iA^4(U_1) - (A^2 + iA^3)(U_2) = 0. \qquad \textbf{(2.10)}$$

Como $A^j \in \mathfrak{su}(2)$, $j=1,2,3,4$ se tiene que su correspondiente representación matricial es

$$A^j = \begin{pmatrix} it^j & a^j + ib^j \\ -a^j + ib^j & -it^j \end{pmatrix},\ \ j=1,2,3,4 .$$

Si ahora se desarrolla (2.10) usando las correspondientes representaciones matriciales, se obtiene fácilmente que

$$a^1 = -a^4 = t^2,\ \ b^1 = -b^4 = t^3,\ \ t^1 = -t^4 = -(a^2+b^3) \ \text{ y } \ b^2 = a^3 . \qquad \textbf{(2.11)}$$

Así, en particular $A^4 = -A^1$.

Si se denota por $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{k}$ a la subálgebra de Lie formada por todos los endomorfismos reales $A \in \mathfrak{k}$ tales que $A(\tilde{R}) = 0$ y se supone que $\tilde{R} \neq 0$ entonces, debido a que todas las transformaciones curvatura están en $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h} \neq (0)$.

Dado $A \in \mathfrak{h}$, sea $A = \begin{pmatrix} it & a+ib \\ -a+ib & -it \end{pmatrix}$ su representación matricial. Si ahora, utilizando el Lema 2.3.4.1.12 se desarrolla la relación conocida dada por

$$A(\tilde{R}(U_1,\bar{U}_1)Z) = \tilde{R}(AU_1,\bar{U}_1)Z + \tilde{R}(U_1, A\bar{U}_1)Z + \tilde{R}(U_1,\bar{U}_1)AZ\,,\ Z \in V^C\,,$$

se obtiene que $i(A^1 \circ A - A \circ A^1) = 2i(bA^2 - aA^3)$. Desarrollando esta última expresión utilizando las representaciones matriciales correspondientes se obtiene fácilmente que

$$ab^1 - ba^1 = 0,\ \ a(b^1 + t^3) - b(b^1 + t^2) = 0,$$
$$a(b^3 - t^1) + ta^1 - bb^2 = 0,\ \ b(a^2 - t^1) + tb^1 - aa^3 = 0. \qquad \textbf{(2.12)}$$

Para continuar el estudio, se consideran los dos casos siguientes:

a) Si $\mathfrak{h} = \mathfrak{k}$.

En este caso, debido a que $\dim(\mathfrak{su}(2)) = 3$, se tiene que *a*, *b* y *t* son variables linealmente independientes. Así, de (2.11) y (2.12) se obtiene fácilmente que $A^1 = A^2 = A^3 = A^4 = 0$ y, por tanto, que $\tilde{R} = 0$, lo cual es la contradicción buscada.

b) Si $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{k}$ y $\mathfrak{h} \neq (0)$.

Entonces, $\mathfrak{h}$ es una subálgebra propia de $\mathfrak{su}(2)$ y, por tanto, su dimensión será 1. Así, las matrices $A^j \in \mathfrak{h}$, $j = 1,2,3,4$, serán proporcionales.

Si $A^1 = -A^4 = 0$, entonces todos los parámetros de (2.11) se anulan excepto posiblemente a^2, b^2, a^3 y b^3 y, se obtienen las relaciones

$$a^2 = -b^3 \ \text{ y } \ a^3 = b^2. \qquad \textbf{(2.13)}$$

Aplicando (2.13) a (2.12) se obtiene que sus relaciones se reducen a $ab^3 - bb^2 = 0$ y $ba^2 - aa^3 = 0$ y, si se supone que $A = A^2$ entonces[14], se tiene que $a^2b^3 - b^2b^2 = 0$ y $b^2a^2 - a^2a^3 = 0$. Aplicando ahora (2.13) se obtiene que $(b^2)^2 + (b^3)^2 = 0$ y, de aquí, que todos los parámetros son cero. Lo cual es la contradicción buscada.

Si $A^1 = -A^4 \neq 0$ y se toman $A^2 = \lambda A^1$, $\lambda \neq 0$, y $A^3 = \mu A^1$, $\mu \neq 0$, se tiene que $t^2 = \lambda t^1$, $t^3 = \mu t^1$, $a^2 = \lambda a^1$ y $b^3 = \mu b^1$. Aplicando las dos primeras rela-

[14] Se puede suponer ya que $A, A^2 \in \mathfrak{k}$ y A es genérico.

ciones de (2.11) se consigue que $a^1 = \lambda t^1$ y $b^1 = \mu t^1$ y, entonces, de la tercera relación de (2.11) se obtiene $t^1 = 0$, en efecto,

$$t^1 = -t^4 = -(a^2 + b^3) = -(\lambda a^1 + \mu b^1) = -(\lambda)^2 t^1 - (\mu)^2 t^1 .$$

Por tanto, $a^1 = b^1 = 0$ y, entonces, $a^2 = b^3 = 0$. Así, todas las matrices $A^j \in \mathfrak{h}$, $j = 1,2,3,4,$ se anulan y se tiene la contradicción buscada.

Segundo Caso de la Proposición 2.3.4.1.8.

De manera análoga a la desarrollada en el primer caso de la Proposición 2.3.4.1.8 se puede elegir un vector unitario $W \in V^{(-1)} \cap V$ y una base $\{U_1, U_2\}$ de $V^{(i)}$ tal que

$$g(U_1,\bar{U}_1) = 1,\ g(U_2,\bar{U}_2) = 1,\ g(U_1,\bar{U}_2) = \nu \in \mathbb{C},\ \nu\bar{\nu} < 1, \qquad \textbf{(2.14)}$$

donde, el resto de relaciones posibles relativas a la métrica son nulas y, además que

$$\tilde{T}(U_1,U_2) = \mu W,\ \tilde{T}(U_j,\bar{U}_k) = 0,\ j,k = 1,2 \qquad \textbf{(2.15)}$$

$$\tilde{T}(U_1,W) = \lambda_1 \bar{U}_1,\ \tilde{T}(U_2,W) = \lambda_2 \bar{U}_2,\ \lambda_1 > 0,\ \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_1 \geq \lambda_2 .$$

Si ahora se aplica el apartado e) de la Proposición 2.3.4.1.9 cuando $j = 2$ e $i = 1$, se obtiene que $\lambda_1 \bar{\mu} + \lambda_2 \mu = 0$. Si ahora se estudia esta ecuación, se obtiene que se deben analizar los casos siguientes:

A) Si $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ y $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces $(-\lambda_1 / \lambda_2)\,\bar{\mu} = \mu$ y si se considera que $\mu = a + ib$, sustituyendo se obtiene que $a = 0 = b$ y, por tanto, que $\mu = 0$.

B) Si $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, entonces $\bar{\mu} + \mu = 0$ y, por tanto, $\mu = ib$.

C) Si $\lambda_1 > \lambda_2 = 0$, entonces $\lambda_1 \bar{\mu} = 0$ y, por tanto, $\mu = 0$.

Ahora se calcula el álgebra de Lie $\mathfrak{k}$ de todos los endomorfismos reales $A : V^C \to V^C$ tales que $A(S) = A(g) = A(\tilde{T}) = 0$. Para ello, de forma análoga a los obtenidos en los Lemas 2.3.3.1.4, 2.3.3.1.5 y 2.3.3.1.6 se tiene que, de $A(S) = 0$,

$$AU_i = \sum_{j=1,2} a_i^j U_j,\ A\bar{U}_i = \sum_{j=1,2} \bar{a}_i^j \bar{U}_j,\ AW = 0$$

para cualquier $A \in \mathfrak{k}$, de $A(g) = 0$,

$$a_1^1 + \bar{a}_1^1 + \nu \bar{a}_1^2 + \bar{\nu} a_1^2 = 0,\ \ a_2^2 + \bar{a}_2^2 + \nu a_2^1 + \bar{\nu} \bar{a}_2^1 = 0,\ \ (a_1^1 + \bar{a}_2^2)\nu + a_1^2 + \bar{a}_2^1 = 0, \textbf{(2.16)}$$

y, de $A(\tilde{T}) = 0$,

$$(a_1^1+\overline{a}_2^2)\mu=0,\ \ (a_1^1-\overline{a}_1^1)\lambda_1=0,\ \ (a_2^2-\overline{a}_2^2)\lambda_2=0,\ \ a_1^2\lambda_2-\overline{a}_1^2\lambda_1=0,\ \ a_2^1\lambda_1-\overline{a}_2^1\lambda_2=0. \quad \textbf{(2.17)}$$

Ahora, aplicando estos resultados particularmente en cada caso, se obtiene que:

A) $\lambda_1>\lambda_2>0$ y $\lambda_1\neq\lambda_2$. Entonces $\mu=0$ y se tiene el siguiente lema.

Lema 2.3.4.1.13

De las relaciones que provienen de $A(\tilde{T})=0$ se obtiene que

$$a_1^1=\overline{a}_1^1,\ \ a_2^2=\overline{a}_2^2\ \text{ y }\ a_1^2=a_2^1=0.$$

Y de las relaciones que provienen de $A(g)=0$ se obtiene que

$$a_i^i+\overline{a}_i^i=0\,.$$

Demostración

En efecto, debido a que $\mu=0$ y que $\lambda_1>\lambda_2>0$ se obtienen fácilmente las dos primeras relaciones. Ahora, si en $a_1^2\lambda_2-\overline{a}_1^2\lambda_1=0$, se considera que $a_1^2=a+ib$ y se desarrolla, se obtiene $a(\lambda_2-\lambda_1)=0$ y $b(\lambda_2+\lambda_1)=0$, por tanto, $a_1^2=0$. Si ahora, de forma análoga se estudia $a_2^1\lambda_1-\overline{a}_2^1\lambda_2=0$ se obtiene $a_2^1=0$.

La última relación, se obtiene directamente sustituyendo $a_1^2=a_2^1=0$ en $a_1^1+\overline{a}_1^1+\nu\overline{a}_1^2+\overline{\nu}a_1^2=0$ y $a_2^2+\overline{a}_2^2+\nu a_2^1+\overline{\nu}\overline{a}_2^1=0$.

Usando la relaciones obtenidas en el Lema anterior, fácilmente se tiene que $\mathfrak{k}=(0)$ y, así, que $\tilde{R}=0$. Por tanto, en este caso, cada colección $(V,\ g,\ S,\ 0,\ \tilde{T})$ donde g y $\tilde{T}$ están dados por (2.14) y (2.15), es una s – variedad algebraica (ya que se satisfacen las propiedades i) – vi) del Teorema 1.3.2.). Además, $\lambda_1,\ \lambda_2$ son invariantes reales y $\nu=\alpha+i\beta$ es un invariante complejo satisfaciendo que $\nu\overline{\nu}=\alpha^2+\beta^2<1$.

Considerando $U_j=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(X_j+iY_j)$, donde $X_j,\ Y_j\in V,\ \ j=1,2$, y desarrollando (de forma análoga a la hecha en el Lema 2.3.3.1.7) se obtiene que en la tabla de multiplicar del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ dada por la fórmula (1.2) los únicos corchetes no nulos son

$$[X_j,W]=-\lambda_jX_j,\ \ [Y_j,W]=\lambda_jY_j,\ \ j=1,2\,.$$

Además, también se obtiene (de forma análoga a la hecha en el Lema 2.3.3.1.7) que

$$g(X_j,X_j)=g(Y_j,Y_j)=g(W,W)=1,\ \ g(X_1,X_2)=g(Y_1,Y_2)=\alpha,$$

$$g(Y_1, X_2) = -g(X_1, Y_2) = \beta.$$

B) Si $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$. Entonces $\overline{\mu} + \mu = 0$ y, por tanto, $\mu = ib$. De (2.17) se obtiene que $\overline{a}_i^j = a_i^j$ para todo $i, j = 1,2$; es decir, que a_i^j son reales. Si ahora se remplazan U_1 y U_2 por $(U_1 + U_2)\big/\sqrt{(2+\nu+\overline{\nu})}$ y $(U_1 - U_2)\big/\sqrt{(2-\nu-\overline{\nu})}$ respectivamente, se obtiene que las relaciones básicas para $\tilde{T}$ y g resultan inalteradas a excepción de que μ es multiplicado por el factor negativo $-2\big/\sqrt{4-(\nu+\overline{\nu})^2}$ y el parámetro ν es remplazado por $\nu' = (\overline{\nu} - \nu)\big/\sqrt{4-(\nu+\overline{\nu})^2}$, el cual es imaginario puro ya que, si $\nu = \alpha + i\beta$ con $\beta \le 0$ (si no lo fuera cambiando U_1 por U_2 y viceversa en (2.14) se obtendría) se tiene $\nu' = i\left(-\beta\big/\sqrt{1-\alpha^2}\right) = i\beta'$ con $0 \le \beta' < 1$ ya que antes se ha supuesto $\beta \le 0$ y $\nu\overline{\nu} < 1$. Por tanto, se ha encontrado una base $\{U_1, U_2\} \in V^{(i)}$ tal que

$$g(W,W) = g(U_1, \overline{U}_1) = g(U_2, \overline{U}_2) = 1\,,\ \ g(U_1, \overline{U}_2) = i\beta',\ \ 0 \le \beta' < 1, \quad \textbf{(2.18)}$$

donde el resto de relaciones posibles relativas a la métrica son nulas y además, que

$$\tilde{T}(U_1, U_2) = \mu \frac{-2}{\sqrt{4-(\nu+\overline{\nu})^2}} W = itW\ ,\ t \in \mathbb{R}\,, \quad \textbf{(2.19)}$$

$$\tilde{T}(U_j, \overline{U}_k) = 0\,,\ \ j,k = 1,2\,,\ \ \tilde{T}(U_j, W) = \lambda \overline{U}_j,\ \ \lambda > 0\,.$$

Ahora, de (3.16) y usando los hechos conocidos $\nu' = i\beta'$ y $\overline{a}_i^j = a_i^j$ se obtiene que $a_1^1 = a_2^2 = 0$ y $a_1^2 + a_2^1 = 0$. Por tanto, el álgebra de Lie $\mathfrak{k}$ está generada por un único endomorfismo A_0 cuya matriz con respecto a la base $\{U_1, U_2\} \in V^{(i)}$ es

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para poder seguir el estudio se ha de tener en cuenta si t es cero o no. Por ello, se estudian los dos casos siguientes:

B1) Cuando $t = 0$. En este caso, usando (2.19) y el apartado c) de la Proposición 2.3.4.1.9 sobre la primera identidad de Bianchi desarrollada sobre $U_2, U_1, \overline{U}_1$ y sobre $U_1, U_2, \overline{U}_2$ se obtiene que:

$$\tilde{R}(U_1, \overline{U}_1)U_2 + \tilde{R}(\overline{U}_1, U_2)U_1 = 0 \ \text{ y } \ \tilde{R}(U_2, \overline{U}_2)U_1 + \tilde{R}(\overline{U}_2, U_1)U_2 = 0\,. \quad \textbf{(2.20)}$$

Como $\tilde{R}(U_i, \overline{U}_j) \in \mathfrak{k} \otimes \mathbb{C} = \langle A_0 \rangle$, se sabe que $\tilde{R}(U_i, \overline{U}_j) = a_{ij} A_0$, $i, j = 1,2$. Si se sustituye esto en (2.20) se obtiene $a_{11}A_0U_2 - a_{21}A_0U_1 = 0$ y $a_{22}A_0U_1 - a_{12}A_0U_2 = 0$. Como el endomorfismo A_0 es conocido, estas se reducen a $a_{11}U_1 + a_{21}U_2 = 0$ y $-a_{22}U_2 - a_{12}U_1 = 0$. Ahora, como U_1 y U_2 son linealmente independientes se obtiene $a_{11} = a_{22} = a_{21} = a_{12} = 0$, que junto con el apartado c) de la Proposición 2.3.4.1.9 implica que $\tilde{R} = 0$.

Así, tomando $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$ el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ puede ser expresada de la misma forma que en el caso A) aunque como el producto interior sobre $\mathfrak{g}$ satisface el hecho de que $\alpha = 0$, se tiene que λ y β son los únicos invariantes de la correspondiente s – variedad algebraica.

B2) Cuando $t \neq 0$. Se remplazan W, U_1 y U_2 por $(1/\lambda)W$, $\left(1/\sqrt{\lambda}\sqrt{|t|}\right)U_1$ y $\left(\operatorname{sgn}(t)/\sqrt{\lambda}\sqrt{|t|}\right)U_2$ respectivamente y, se denotan los nuevos vectores de nuevo por W, U_1 y U_2. Así, (2.18) y (2.19) se expresan como sigue:

$$g(U_1,\bar{U}_1) = g(U_2,\bar{U}_2) = a^2,\ g(W,W) = b^2,\ g(U_1,\bar{U}_2) = i\gamma \qquad \textbf{(2.21)}$$

donde $a = \left(1/\sqrt{\lambda}\sqrt{|t|}\right)$, $b = 1/\lambda$ y $\gamma = \beta'/\lambda t$, el resto de relaciones posibles relativas a la métrica son nulas y además,

$$\tilde{T}(U_1,U_2) = iW,\ \tilde{T}(U_1,W) = \bar{U}_1,\ \tilde{T}(U_2,W) = \bar{U}_2,\ \tilde{T}(U_j,\bar{U}_k) = 0,\ j,k = 1,2 \ \textbf{(2.22)}$$

Aquí, $a,b > 0$ junto con γ son los únicos invariantes de $(S,\ g,\ \tilde{T})$ y, además, $a^2 > |\gamma|$ ya que $\lambda > 0$ y $0 \leq \beta' < 1$.

Ahora, el siguiente paso es buscar el álgebra de Lie $\mathfrak{k}$. Para ello, siguiendo los pasos habituales; es decir, aplicando que $A(S) = A(g) = A(\tilde{T}) = 0$, se obtiene que $\mathfrak{k}$ está generada por el endomorfismo, que se denotará de nuevo por A_0, cuya matriz, con respecto a la nueva base $\{U_1,U_2\} \in V^{(i)}$, es

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, para cualquier s – variedad algebraica $(V,\ g,\ S,\ \tilde{R},\ \tilde{T})$ satisfaciendo (2.21), (2.22) y $\mathfrak{k} = \langle A_0 \rangle$, se tiene $\tilde{R}(U_i,\bar{U}_j) = \lambda_{ij}A_0$, $i,j = 1,2$, donde $\lambda_{ij} \in \mathbb{C}$. Ahora, al igual que en el apartado B1) la primera identidad de Bianchi implica que

$$\tilde{R}(U_1,\bar{U}_1)U_2 + \tilde{R}(\bar{U}_1,U_2)U_1 = \tilde{T}(\tilde{T}(U_2,U_1),\bar{U}_1) = iU_1$$
$$\tilde{R}(U_2,\bar{U}_2)U_1 + \tilde{R}(\bar{U}_2,U_1)U_2 = \tilde{T}(\tilde{T}(U_1,U_2),\bar{U}_2) = -iU_2.$$

Y, por tanto, calculando los valores de $\lambda_{ij} \in \mathbb{C}$, $i,j = 1,2$, de forma análoga a la utilizada en el apartado B1) se obtiene

$$\tilde{R}(U_1,\bar{U}_2) = \tilde{R}(\bar{U}_1,U_2) = 0 \ \text{y}\ \tilde{R}(U_1,\bar{U}_1) = \tilde{R}(U_2,\bar{U}_2) = iA_0. \qquad \textbf{(2.23)}$$

Así, la correspondiente colección $(V,\ g,\ S,\ \tilde{R},\ \tilde{T})$ satisfaciendo (3.21), (3.22) y lo anterior es siempre una s – variedad algebraica ya que fácilmente se comprueba que se satisfacen las condiciones i) – vi) del Teorema 1.3.2. Además, el álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ coincide con el álgebra de Lie $\mathfrak{k}$. En efecto, para que esto suceda, debido a la fórmula (1.2), sólo falta comprobar que $A_0(\tilde{R}) = 0$, es decir, que se satisface la siguiente relación

$$A_0(\tilde{R}(Z,Z')Z'') = \tilde{R}(A_0 Z,Z')Z'' + \tilde{R}(Z,A_0 Z')Z'' + \tilde{R}(Z,Z')A_0 Z''$$

para todo $Z, Z', Z'' \in V^C$. Así, utilizando el apartado c) de la Proposición 2.3.4.1.9 y (2.23) se comprueba que dicha relación es satisfecha cuando se aplica sobre $\tilde{R}(U_i,U_j)U_k$, $\tilde{R}(U_i,\bar{U}_j)U_k$ para $i = j$ e $i \neq j$ y, sobre $\tilde{R}(U_i,W)Z$ cuando $i, j,k = 1,2$, $W \in V$ y $Z \in V^C$.

Por tanto, el álgebra de Lie $\mathfrak{g} = V \oplus \mathfrak{h}$ está determinada por la siguiente tabla de multiplicar:

$$\begin{gathered}[U_1,\bar{U}_1] = [U_2,\bar{U}_2] = -iA_0,\ [U_1,U_2] = -iW,\ [U_1,W] = -\bar{U}_1, \\ [U_2,W] = -\bar{U}_2,\ [U_1,A_0] = U_2,\ [U_2,A_0] = -U_1.\end{gathered} \qquad \textbf{(2.24)}$$

Si ahora se realiza el siguiente cambio de base

$$Z_1 = \frac{(U_1 + i\bar{U}_2)}{2},\ Z_2 = \frac{(-U_2 + i\bar{U}_1)}{2} \text{ y } Z_3 = \frac{(A_0 + iW)}{2},$$

los vectores Z_1, $\bar{Z}_1$, Z_2, $\bar{Z}_2$, Z_3, $\bar{Z}_3$ forman una base real de $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$. Además, usando (2.21) y (2.24) se tiene que la tabla de multiplicar y la métrica se expresan de la forma siguiente:

$$[Z_i,\bar{Z}_j] = 0 \text{ para } j = 1,2,3,\ [Z_1,Z_2] = Z_3,\ [Z_2,Z_3] = Z_1 \text{ y } [Z_3,Z_1] = Z_2,$$

y,

$$g(Z_1,\bar{Z}_1) = g(Z_2,\bar{Z}_2) = \frac{a^2}{2},\ g(Z_1,\bar{Z}_2) = 0,\ g(W,W) = b^2,$$

$$g(Z_1,Z_1) = g(Z_2,Z_2) = \frac{-\gamma}{2} \text{ y } g(Z_1,Z_2) = 0.$$

C) Si $\lambda_1 > \lambda_2 = 0$. Entonces $\mu = 0$ y, así, si se realiza el cambio de base consistente en multiplicar el vector U_2 por una unidad compleja z, se obtiene fácilmente que las relaciones para $\tilde{T}$ y g no cambian a excepción de que ahora el parámetro ν es multiplicado por $\bar{z}$. Además, se tiene el siguiente Lema cuya demostración puede ser vista en el Apartado B.1 del Anexo B.

Lema 2.3.4.1.14

Es posible elegir z de forma que $g(U_1,\bar{U}_2) = \bar{z}\nu = i\beta'$, $0 \leq \beta' < 1$.

Así, de la misma forma que antes en el Lema 2.3.4.1.13, de las relaciones que provienen de $A(\tilde{T})=0$ se obtiene que $a_1^1=\overline{a}_1^1$ y $a_1^2=a_2^1=0$ y, de las relaciones que provienen de $A(g)=0$ que $a_1^1=0$, $a_2^2+\overline{a}_2^2=0$ y $\beta' a_2^2=0$.

Notar, que si el valor de $\beta'\neq 0$, entonces $a_2^2=0$ y, por tanto, que $\mathfrak{k}=(0)$ y $\tilde{R}=0$. Así, para analizar el caso C) se consideran los dos subcasos siguientes:

C1) Si $\tilde{R}=0$. En este caso, se tiene que la tabla de multiplicar de $\mathfrak{g}$ y el producto interior g sobre $V=\mathfrak{g}$ son los mismos que los del caso A), si en este se consideran $\lambda_2=0$ y $\alpha=0$.

Si ahora se realiza el cambio de base dado por $U_1=\left(1/\sqrt{2}\right)(X_1+iY_1)$ y $U_2=\left(1/\sqrt{2}\right)(X_2+iY_2)$ se obtiene que $\mathfrak{g}$ está determinada por

$$[X_1,W]=-\lambda_1 X_1 \quad \text{y} \quad [Y_1,W]=\lambda_1 Y_1$$

y, que g está dada por

$$g(X_1,X_2)=g(Y_1,Y_2)=0,\ g(X_1,Y_2)=-g(Y_1,X_2)=\beta',$$
$$g(X_j,X_j)=g(Y_j,Y_j)=g(W,W)=1.$$

Así, se tiene que en este caso, el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es ahora reducible (en el apartado A) no lo era) con la descomposición $\mathfrak{g}=(X_1,Y_1,W)\oplus(X_2,Y_2)$. Pero ello, no implica que la $s-$variedad algebraica $(V,\ g,\ S,\ 0,\ \tilde{T})$ sea reducible. En efecto, aplicando metódicamente la Definición 1.3.2.3 se obtiene que si $\beta'\neq 0$ entonces no es reducible y, por tanto, su interpretación geométrica se realiza de forma análoga al caso A).

C2) Si $\tilde{R}\neq 0$. Entonces $\beta'=0$ y el álgebra de Lie $\mathfrak{k}$ está generada por el endomorfismo A_0 cuya matriz asociada respecto de la base $\{U_1,U_2\}$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Como $\tilde{R}(Z,Z')\in\mathfrak{k}$ y debido a la Proposición 2.3.4.1.9 se tiene que los únicos elementos no nulos son $\tilde{R}(U_i,\overline{U}_j)=\lambda_{ij}A_0$, $i,j=1,2$ donde $\lambda_{ij}\in\mathbb{C}$, $A_0U_1=0$ y $A_0U_2=iU_2$. Por tanto, en particular se tiene que $\tilde{R}(U_i,\overline{U}_j)U_1=0$ y que para $\lambda_{ij}\in\mathbb{C}$ e $i,j=1,2$, $\tilde{R}(U_i,\overline{U}_j)U_2=i\lambda_{ij}U_2$.

Desarrollando ahora la Primera Identidad de Bianchi como en los anteriores apartados se obtiene

$$\tilde{R}(U_1,\overline{U}_1)U_2+\tilde{R}(\overline{U}_1,U_2)U_1=0 \ \text{ y } \ \tilde{R}(U_2,\overline{U}_2)U_1+\tilde{R}(\overline{U}_2,U_1)U_2=0.$$

Y sustituyendo lo anterior

$$\tilde{R}(U_1,\bar{U}_1)=\tilde{R}(U_1,\bar{U}_2)=\tilde{R}(U_2,\bar{U}_1)=0 \text{ y } \tilde{R}(U_2,\bar{U}_2)=itA_0,$$

donde $t\neq 0$ es un parámetro real.

Además, igual que en el caso B2), se tiene que el álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ coincide con $\mathfrak{k}$. Ahora, se puede comprobar que la s – variedad algebraica $(V,\, g,\, S,\, \tilde{R},\, \tilde{T})$ es reducible sobre la descomposición $\mathfrak{g}=(X_1,Y_1,W)\oplus((X_2,Y_2)+\mathfrak{h})$. En efecto, para comprobar esto, primero se toma la base real de V, $\{X_1,Y_1,X_2,Y_2,W\}$, que se obtiene al realizar el cambio dado por $U_1=\left(1/\sqrt{2}\right)(X_1+iY_1)$ y $U_2=\left(1/\sqrt{2}\right)(X_2+iY_2)$ y, se calcula $\tilde{T}$ y $\tilde{R}$ en esta base. Con ello se obtiene la tabla de multiplicar de $\mathfrak{g}$, sobre la cual se observa que $\mathfrak{g}=(X_1,Y_1,W)\oplus((X_2,Y_2)+\mathfrak{h})$. Así, se obtiene que el candidato para ver que la s – variedad algebraica $(V,\, g,\, S,\, \tilde{R},\, \tilde{T})$ sea reducible es $V=(X_1,Y_1,W)+(X_2,Y_2)$. Para comprobarlo, se calcula la expresión de g y S en la base real y se comprueba que $V=V_1+V_2$ y que, si $\pi_i:V\to V_i$, $g^i=g_{|V_i}$, $S^i=S_{|V_i}$, $R^i=R_{|V_i}$ y $T^i=T_{|V_i}$, $i=1,2$, se cumplen las propiedades expresadas en la Definición 1.3.2.3.

Por otra parte, procediendo de forma análoga al Lema 2.3.2.6 se comprueba que en todos los casos A), B) y C), $(\mathcal{D}_{U_1}R)(U_1,\bar{U}_1)U_1\neq 0$ para U_1 elemento fijado de la base de V^C, por ello, las correspondientes s – variedades Riemannianas (M,g) no son localmente simétricas.

A continuación, se desarrollan las realizaciones geométricas correspondientes a los casos A), B1), C1) y B2).

Realización geométrica de los casos A), B1) y C1).

Debido a que $\mathfrak{h}=(0)$, para construir el espacio homogéneo buscado solamente será necesario calcular el grupo de Lie G asociado al álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Aunque el centro del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es nulo en los casos A) y B1), no lo es en el caso C1), por ello, en vez de aplicar la representación adjunta (sólo aplicable en los casos A) y B1)) se aplica el método de las foliaciones.

Para ello, se toma la mayor foliación posible (la cual coincide en los tres casos), que es la dada por $\{X_1,Y_1,X_2,Y_2\}$. Puesto que la foliación es de dimensión 4, se toman

$$X_1=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\ Y_1=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\ X_2=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & w_{14} & 0 \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & w_{24} & 0 \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} & w_{34} & 0 \\ w_{41} & w_{42} & w_{43} & w_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde $w_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1,2,3,4$. Ahora, usando la tabla de multiplicar, se calculan los coeficientes indeterminados y se sigue que

$$W = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Así,

$$\mathfrak{g} = \{x'X_1 + y'Y_1 + z'X_2 + w'Y_2 + tW : x', y', z', w', t \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 t & 0 & 0 & 0 & x' \\ 0 & -\lambda_1 t & 0 & 0 & y' \\ 0 & 0 & \lambda_2 t & 0 & z' \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_2 t & w' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : x', y', z', w', t \in \mathbb{R} \right\}.$$

A continuación, usando la aplicación exponencial $exp: \mathfrak{g} \to G$, se calcula la expresión matricial del grupo de Lie G.

Dada una matriz $A \in \mathfrak{g}$, por [W] se sabe que:

$$exp(A) = e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & e^{-\lambda_1 t} & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda_2 t} & w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así, se tiene que el grupo de Lie G es:

$$G=\left\{\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & e^{-\lambda_1 t} & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda_2 t} & w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x,y,z,w,t\in\mathbb{R}\right\}.$$

Claramente, se observa que cada matriz de G se puede identificar con la 5 – tupla $(x, y, z, w, t)\in\mathbb{R}^5$, por tanto, se tiene que G es difeomorfo al espacio euclídeo $\mathbb{R}^5(x,y,z,w,t)$.

Así, G es el grupo de Lie simplemente conexo buscado, cuya álgebra de Lie es $\mathfrak{g}$.

A continuación, se calcula la métrica G – invariante g. Para ello, de forma análoga al desarrollo de los Lemas 2.3.2.10 y 2.3.2.11 se obtiene que $X_1,Y_1,X_2,Y_2,W\in\mathfrak{g}$ pueden ser identificados respectivamente con los campos vectoriales invariantes a izquierda sobre G

$$e^{\lambda_1 t}\frac{\partial}{\partial x},\ e^{-\lambda_1 t}\frac{\partial}{\partial y},\ e^{\lambda_2 t}\frac{\partial}{\partial z},\ e^{-\lambda_2 t}\frac{\partial}{\partial w}\ \text{ y }\ \frac{\partial}{\partial t}.$$

Y, así, que el producto interior g sobre $V=\mathfrak{g}$ induce la siguiente métrica Riemanniana invariante sobre $\mathbb{R}^5(x,y,z,w,t)$:

$$\begin{aligned} g = {} & e^{-2\lambda_1 t}dx^2+e^{2\lambda_1 t}dy^2+e^{-2\lambda_2 t}dz^2+e^{2\lambda_2 t}dw^2+dt^2+ \\ & +2\alpha[e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}dxdz+e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}dydw]+ \\ & +2\beta[e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}dydz-e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}dxdw], \end{aligned}$$

donde, ó $\lambda_1>\lambda_2>0$, $\alpha^2+\beta^2<1$, ó $\lambda_1=\lambda_2>0$, $\alpha=0$, $0\le\beta<1$, ó $\lambda_1<0$, $\lambda_2=0$, $\alpha=0$, $0<\beta<1$.

Así, se ha obtenido el tipo 2 de la lista de clasificación.

Finalmente, de forma análoga al lema 2.3.4.1.11, se tiene que la simetría típica s_o de orden 4 en el punto $o\equiv(0,0,0,0,0)$ de $\mathbb{R}^5(x,y,z,w,t)$ es la transformación dada por:

$$x'=-y,\ y'=x,\ z'=-w,\ w'=z,\ t'=-t.$$

Realización geométrica del caso B2).

Dada la base compleja $\{Z_1, Z_2, Z_3\}$ de $\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}$ y la tabla de multiplicar

$$[Z_1,Z_2]=Z_3,\ [Z_2,Z_3]=Z_1\ \text{ y }\ [Z_3,Z_1]=Z_2,$$

se comprueba fácilmente que el centro de $\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}$ es nulo. Así, se puede aplicar la representación adjunta, al igual que en el Lema 2.3.2.9, del cual se obtiene que se puede identificar

$$Z_1 \; con \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \; Z_2 \; con \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } Z_3 \; con \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es decir, con la base compleja del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$. En consecuencia, el grupo de Lie asociado es el grupo especial ortogonal complejo $SO(3,\mathbb{C})$ y así, siguiendo la notación de [H.1], $\mathfrak{g}=(\mathfrak{so}(3,\mathbb{C}))^{\mathbb{R}}$ y, por tanto $G=SO(3,\mathbb{C})$. Por otra parte, $\mathfrak{h}=(A_0)$ genera el subgrupo H de $SO(3,\mathbb{C})$ de todas las matrices de la forma:

$$\exp\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} Cost & -Sent & 0 \\ Sent & Cost & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde $t\in\mathbb{R}$.

Para calcular ahora la métrica Riemanniana G – invariante sobre el espacio homogéneo G/H, se considera el grupo $G'=GL(3,\mathbb{C})$ de todas las matrices complejas no singulares de la forma

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Así, el grupo $G=SO(3,\mathbb{C})$ es un subgrupo de Lie y, en particular, una subvariedad de $G'=GL(3,\mathbb{C})$. Los vectores $\{Z_1, Z_2, Z_3\}$ de $\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}$ pueden ser representados, de forma análoga a como se desarrolla el Lema 2.3.3.1.8, por los siguientes campos vectoriales complejos invariantes sobre $G'=GL(3,\mathbb{C})$:

$$Z_i = a_j\frac{\partial}{\partial a_k} - a_k\frac{\partial}{\partial a_j} + b_j\frac{\partial}{\partial b_k} - b_k\frac{\partial}{\partial b_j} + c_j\frac{\partial}{\partial c_k} - c_k\frac{\partial}{\partial c_j} \qquad \textbf{(2.25)}$$

donde, los índices $[i, j, k]$ recorren las permutaciones cíclicas del triplete $[1, 2, 3]$. Así, las restricciones de los campos vectoriales complejos Z_1, Z_2, Z_3, $\overline{Z}_1$, $\overline{Z}_2$, $\overline{Z}_3$ de la subvariedad $G\subset G'$ son tangentes a G y G – invariantes. Por tanto, generan el álgebra de Lie real de G.

Por otro lado, resolviendo los sistemas de ecuaciones $w'_i(Z_j)=\delta_{ij}$, $i,j=1,2,3$, se calculan las formas diferenciales lineales complejas sobre G', obteniendo que:

$$w'_i = a_j da_k + b_j db_k + c_j dc_k\,,$$

donde, los índices [i, j, k] recorren las permutaciones cíclicas del triplete [1, 2, 3]. Así, si se denotan por w_i, $i=1,2,3$ las correspondientes formas inducidas sobre G, se tiene que w_1, w_2, w_3, $\overline{w}_1$, $\overline{w}_2$, $\overline{w}_3$, son las formas diferenciales lineales complejas invariantes sobre G, las cuales son duales a los campos vectoriales complejos Z_1, Z_2, Z_3, $\overline{Z}_1$, $\overline{Z}_2$, $\overline{Z}_3$ de G, es decir, que $w_i(Z_j)=\overline{w}_i(\overline{Z}_j)=\delta_{ij}$, $w_i(\overline{Z}_j)=0$, $i,j=1,2,3$ a lo largo de la variedad G. (Notar, que las formas w'_i no son invariantes sobre G').

Debido a que la imagen de A_0 se encuentra en la isotropía y que

$$g(Z_1,\overline{Z}_1)=g(Z_2,\overline{Z}_2)=\frac{a^2}{2},\ g(Z_1,\overline{Z}_2)=0,\ g(W,W)=b^2,$$

$$g(Z_1,Z_1)=g(Z_2,Z_2)=\frac{-\gamma}{2}\ \text{ y }\ g(Z_1,Z_2)=0\,.$$

Se obtiene, en primer lugar, que la expresión de la métrica es:

$$g=a^2(w_1\overline{w}_1+w_2\overline{w}_2)-\frac{\gamma}{2}[(w_1)^2+(\overline{w}_1)^2+(w_2)^2+(\overline{w}_2)^2]+b^2w^2$$

donde, $|\gamma|<a^2$ y, w es la forma diferencial lineal tal que $w(W)=1$ y $w(Z_i)=0$, $i=1,2,3$. Además, como $W=-i(Z_3-\overline{Z}_3)$, se tiene que $w=(i/2)(w_3-\overline{w}_3)$ y así, sustituyendo en la anterior expresión de g, se concluye que

$$g=a^2(w_1\overline{w}_1+w_2\overline{w}_2)-\frac{\gamma}{2}[(w_1)^2+(\overline{w}_1)^2+(w_2)^2+(\overline{w}_2)^2]+\frac{b^2}{4}\left[\frac{w_3-\overline{w}_3}{i}\right]^2$$

donde, $|\gamma|<a^2$.

Entonces, g es una forma real sobre G, G – invariante y semidefinida positiva, las relaciones métricas del apartado B2) son satisfechas por los campos vectoriales Z_i dados por (3.25) ya que, $W=-i(Z_3-\overline{Z}_3)$ y, como la forma g es también $Ad(H)$ - invariante, ésta induce una métrica Riemanniana G – invariante sobre el espacio homogéneo G/H, la cual se denota de nuevo por g.

Así, se ha obtenido el tipo 3 de la lista de clasificación.

Si ahora se considera el automorfismo Φ de G' dado por

$$\Phi : \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \overline{b}_2 & -\overline{b}_1 & \overline{b}_3 \\ -\overline{a}_2 & \overline{a}_1 & -\overline{a}_3 \\ \overline{c}_2 & -\overline{c}_1 & \overline{c}_3 \end{pmatrix},$$

se comprueba que $\Phi^4 = Id.$, Φ conserva el subgrupo $G = SO(3,\mathbb{C})$ y el subgrupo H. Consecuentemente, Φ induce el difeomorfismo Ψ de la variedad G/H en si misma. Además, el conjunto de puntos fijos de Φ en G se separa en dos componentes una de las cuales es el subgrupo H y, como $\Phi^*(w_1) = \overline{w}_2$, $\Phi^*(w_2) = -\overline{w}_1$ y $\Phi^*(w_3) = \overline{w}_3$, se tiene que $\Phi^*(g) = g$. Así, se concluye que Ψ es una simetría de orden 4 de la variedad Riemanniana $(G/H, g)$ en el origen.

Tercer Caso de la Proposición 2.3.4.1.8.

De manera análoga al desarrollo del primer caso de la Proposición 2.3.4.1.8 se puede elegir un vector unitario $W \in V^{(-1)} \cap V$ y una base $\{U_1, U_2\}$ de $V^{(i)}$ tal que

$$g(U_1,\overline{U}_1) = 1,\ g(U_2,\overline{U}_2) = b^2,\ g(U_1,\overline{U}_2) = \nu \in \mathbb{C},\ \nu\overline{\nu} < b^2, \qquad \mathbf{(2.26)}$$

donde el resto de relaciones posibles relativas a la métrica son nulas y, además que

$$\tilde{T}(U_1,U_2) = \mu W,\ \tilde{T}(U_j,\overline{U}_k) = 0,\ j,k = 1,2 \qquad \mathbf{(2.27)}$$

$$\tilde{T}(U_1,W) = \lambda\overline{U}_2,\ \tilde{T}(U_2,W) = \overline{\lambda}\overline{U}_1,\ 0 \neq \lambda = a + ib \in \mathbb{C},\ b \neq 0 .$$

Si se aplica el apartado e) de la Proposición 2.3.4.1.9 cuando $i = j = 1$ y cuando $i = j = 2$, se obtiene que $\overline{\lambda}\mu - \lambda\overline{\mu} \overset{(1)}{=} 0$ y que $\overline{\lambda}\overline{\mu} - \lambda\mu \overset{(2)}{=} 0$. Ahora, se considera el parámetro $f = \lambda^2 - \overline{\lambda}^2 = (\lambda + \overline{\lambda})(\lambda - \overline{\lambda})$ y, se tiene $(\lambda + \overline{\lambda}) = 2a$ y $(\lambda - \overline{\lambda}) = i2b \neq 0$. Por tanto, si se supone que $f \neq 0$, inmediatamente $a \neq 0$ y, considerando $\mu = c + id$ y sustituyendo en (1) y (2), se obtiene que $ad - bc = 0$ y $ad + bc = 0$ y, de esto, que $\mu = 0$. Sin embargo, si se supone que $\mu \neq 0$, se tiene que $f = 0$ y, como $(\lambda - \overline{\lambda}) = i2b \neq 0$ entonces $a = 0$. Aplicando esto junto con (1) y (2) se obtiene que, $c = 0$, es decir que $\mu + \overline{\mu} = 0$. Así, se deben diferenciar los casos siguientes:

A) $f \neq 0$; es decir, cuando $(\lambda + \overline{\lambda}) \neq 0$.

B) $f = 0$ y $\mu = 0$; es decir, cuando $(\lambda + \overline{\lambda}) = 0$ y $\mu = 0$.

C) $f = 0$, $\mu \neq 0$ y $\mu + \overline{\mu} = 0$; es decir, cuando $(\lambda + \overline{\lambda}) = 0$, $\mu \neq 0$ y $\mu + \overline{\mu} = 0$.

Ahora se calcula el álgebra de Lie $\mathfrak{k}$ de todos los endomorfismos reales $A : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ tales que $A(S) = A(g) = A(\tilde{T}) = 0$. Para ello, de forma análoga a como se obtuvieron los resultados en los Lemas 2.3.3.1.4, 2.3.3.1.5 y 2.3.3.1.6 se obtiene que de $A(S)=0$,

$$AU_i = \sum_{j=1,2} a_i^j U_j,\quad A\overline{U}_i = \sum_{j=1,2} \overline{a}_i^j \overline{U}_j,\quad AW = 0$$

para cualquier $A \in \mathfrak{k}$, de $A(g)=0$,

$$a_1^1 + \overline{a}_1^1 + \nu \overline{a}_1^2 + \overline{\nu} a_1^2 \overset{(3)}{=} 0,\quad (a_2^2 + \overline{a}_2^2) b^2 + \nu a_2^1 + \overline{\nu}\,\overline{a}_2^1 \overset{(4)}{=} 0,$$
$$(a_1^1 + \overline{a}_2^2)\nu + a_1^2 b^2 + \overline{a}_2^1 \overset{(5)}{=} 0, \qquad \textbf{(2.28)}$$

y, de $A(\tilde{T})=0$,

$$(a_1^1 + a_2^2)\mu \overset{(6)}{=} 0,\quad (a_1^1 - \overline{a}_2^2)\lambda \overset{(7)}{=} 0,\quad a_1^2 \overline{\lambda} - \overline{a}_2^1 \lambda \overset{(8)}{=} 0,\quad a_1^2 \lambda - \overline{a}_2^1 \overline{\lambda} \overset{(9)}{=} 0. \qquad \textbf{(2.29)}$$

Ahora, aplicando estos resultados particularmente en cada caso, se obtiene que:

A) Si $(\lambda + \overline{\lambda}) \neq 0$. Entonces $\mu = 0$ y se tiene el siguiente lema:

Lema 2.3.4.1.15

De las relaciones que provienen de $A(\tilde{T})=0$ se obtiene que

$$a_1^1 - \overline{a}_2^2 = 0 \text{ y } a_1^2 = a_2^1 = 0.$$

Y de las relaciones que provienen de $A(g)=0$ se obtiene que

$$a_1^1 + \overline{a}_1^1 = 0,\ a_2^2 + \overline{a}_2^2 = 0 \text{ y } (a_1^1 + \overline{a}_2^2)\nu = 0.$$

Demostración

Debido a que $\lambda \neq 0$ de (7) se obtiene que $a_1^1 - \overline{a}_2^2 = 0$, de (8)+(9) que $a_1^2 = \overline{a}_2^1$, de (8)-(9) que $a_1^2 = -\overline{a}_2^1$ y, por tanto, que $a_1^2 = a_2^1 = 0$. Por otra parte, sustituyendo estos últimos resultados en (3), (4) y (5) y, como $b \neq 0$, se obtiene de (3) $a_1^1 + \overline{a}_1^1 = 0$, de (4) $a_2^2 + \overline{a}_2^2 = 0$ y de (5) $(a_1^1 + \overline{a}_2^2)\nu = 0$.

Así, si $\nu \neq 0$ el álgebra de Lie $\mathfrak{k}$ es cero y por tanto $\tilde{R} = 0$ y, si $\nu = 0$ el álgebra de Lie $\mathfrak{k}$ está generada por el endomorfismo A_0 cuya matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

En este caso, usando (2.27) y el apartado c) de la Proposición 2.3.4.1.9 sobre la primera identidad de Bianchi desarrollada sobre $U_2, U_1, \bar{U}_i$, $i = 1,2$, se obtiene que:

$$\tilde{R}(U_2,\bar{U}_i)U_1 + \tilde{R}(\bar{U}_i,U_1)U_2 = 0\,,\ i = 1,2\,. \tag{2.30}$$

Como $\tilde{R}(U_i,\bar{U}_j) \in \mathfrak{k} \otimes \mathbb{C} = \langle A_0 \rangle$, se sabe que $\tilde{R}(U_i,\bar{U}_j) = \lambda_{ij} A_0$, $\lambda_{ij} \in \mathbb{C}$, $i, j = 1,2$. Si se sustituye esto en (2.30) cuando $i = 1$ se obtiene que $-\lambda_{11}A_0U_2 + \lambda_{21}A_0U_1 = 0$ y cuando $i = 2$ que $\lambda_{22}A_0U_1 - \lambda_{12}A_0U_2 = 0$. Como el endomorfismo A_0 es conocido, estas se reducen a $i\lambda_{11}U_2 + i\lambda_{21}U_1 = 0$ y a $i\lambda_{22}U_1 + i\lambda_{12}U_2 = 0$. Ahora, como U_1 y U_2 son linealmente independientes se obtiene $\lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda_{21} = \lambda_{12} = 0$ que, junto con el apartado c) de la Proposición 2.3.4.1.9, implica que $\tilde{R} = 0$. Así, para cualquier valor de ν, $(V, g, S, 0, \tilde{T})$ satisfaciendo (2.26) y (2.27) es la única s – variedad algebraica posible (se comprueba fácilmente que se satisfacen las condiciones i) – vi) del Teorema 1.3.2.).

Además, procediendo de forma análoga al Lema 2.3.2.6 se comprueba que $(\mathcal{D}_{\bar{U}_1}R)(U_1,U_2)U_1 \neq 0$ para U_1, U_2 elementos fijados de la base de $V^{\mathbb{C}}$; por ello, las correspondientes s – variedades Riemannianas (M, g) no son localmente simétricas.

Por tanto, el álgebra de Lie $\mathfrak{g} = V$ está determinada por la tabla de multiplicar:

$$[U_i,\bar{U}_j] = 0\,,\ i,j = 1,2\,,\ [U_1,U_2] = 0\,,\ [U_1,W] = -\lambda\bar{U}_2\,,\ [U_2,W] = -\bar{\lambda}\bar{U}_1 \tag{2.31}$$

y por el producto interior g sobre $\mathfrak{g} = V$ dado por (2.26).

Así, λ, b y ν son invariantes de estas s – variedades algebraicas.

B) Si $(\lambda + \bar{\lambda}) = 0$ y $\mu = 0$. Entonces, $\lambda = i\rho$ con $0 \neq \rho \in \mathbb{R}$. Además, se prueba fácilmente que las transformaciones de $V^{(i)}$ que conservan las relaciones $\tilde{T}(U_1,W) = \lambda\bar{U}_2$, $\tilde{T}(U_2,W) = \bar{\lambda}\bar{U}_1 = -\lambda\bar{U}_1$ son aquellas de la forma $U_1' = \alpha U_1 + \beta U_2$ y $U_2' = -\bar{\beta}U_1 + \bar{\alpha}U_2$. Así, si en particular se toma el cambio de base dado por $U_1' = (U_1 + \beta U_2)/r$ y $U_2' = (U_2 - \bar{\beta}U_1)/r$, donde β es una raíz de la ecuación $\bar{\nu}\beta^2 - (b^2 - 1)\beta - \nu = 0$ y $r = \sqrt{|1 + \bar{\beta}\nu + \beta\bar{\nu} + \beta\bar{\beta}b^2|} \in \mathbb{R}$, se tiene además que $g(U_1',\bar{U}_1') = 1$ (debido al valor de r) y que $g(U_1',\bar{U}_2') = 0$ (debido al valor dado a β).

Por tanto, se puede elegir un vector unitario $W \in V^{(-1)} \cap V$ y una base $\{U_1, U_2\}$ de $V^{(i)}$ tal que

$$g(U_1,\bar{U}_1) = 1\,,\ g(U_2,\bar{U}_2) = b'^2\,,\ g(U_1,\bar{U}_2) = 0 \tag{2.32}$$

donde el resto de relaciones posibles, relativas a la métrica, son nulas y, además que

$$\tilde{T}(U_1,U_2)=0\,,\ \tilde{T}(U_j,\overline{U}_k)=0\,,\ j,k=1,2 \tag{2.33}$$
$$\tilde{T}(U_1,W)=\lambda\overline{U}_2\,,\ \tilde{T}(U_2,W)=-\lambda\overline{U}_1\,,\ \lambda=i\rho\in\mathbb{C}\,,\ 0\neq\rho\in\mathbb{R}\,.$$

Se tiene el siguiente resultado:

Lema 2.3.4.1.16

De las relaciones que provienen de $A(\tilde{T})=0$ se obtiene que

$$a_1^1-\overline{a}_2^2=0 \text{ y } a_1^2+\overline{a}_2^1=0.$$

Y de las relaciones que provienen de $A(g)=0$ se obtiene que

$$a_1^1+\overline{a}_1^1=0\,,\ a_2^2+\overline{a}_2^2=0 \text{ y } (b'^2-1)a_1^2=0\,.$$

La demostración es sencilla si se desarrolla de manera análoga al Lema 2.3.4.1.15 pero imponiendo las nuevas condiciones de este apartado.

A partir de estas relaciones se observa que, dependiendo del valor de b'^2 hay que analizar los dos casos siguientes:

B1) Si $b'^2\neq 1$. Entonces, debido a $(b'^2-1)a_1^2=0$ y $a_1^2+\overline{a}_2^1=0$ se tiene que $a_1^2=a_2^1=0$ y, por $a_1^1-\overline{a}_2^2=0$, $a_1^1+\overline{a}_1^1=0$ y $a_2^2+\overline{a}_2^2=0$ se sabe que a_1^1, $a_2^2\in\mathbb{C}$ son imaginarios y que, $a_1^1=-a_2^2$. Así, el álgebra de Lie $\mathfrak{k}$ está generada por el endomorfismo A_0 cuya matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

En este caso, usando (2.33) y el apartado c) de la Proposición 2.3.4.1.9 sobre la primera identidad de Bianchi desarrollada sobre $U_1,U_2,\overline{U}_i$, $i=1,2$, se obtiene que:

$$\tilde{R}(U_2,\overline{U}_i)U_1+\tilde{R}(\overline{U}_i,U_1)U_2=0\,,\ i=1,2\,. \tag{2.34}$$

Como $\tilde{R}(U_i,\overline{U}_j)\in\mathfrak{k}\otimes\mathbb{C}=\langle A_0\rangle$, se sabe que $\tilde{R}(U_i,\overline{U}_j)=\lambda_{ij}A_0$, $\lambda_{ij}\in\mathbb{C}$, $i,j=1,2$. Si se sustituye esto en (2.34) se obtiene que $\lambda_{2i}A_0U_1-\lambda_{1i}A_0U_2=0$, $i=1,2$. Como el endomorfismo A_0 es conocido, ésta se reduce a $\lambda_{2i}iU_1+i\lambda_{1i}U_2=0$. Ahora, como U_1 y U_2 son linealmente independientes se obtiene $\lambda_{11}=\lambda_{22}=\lambda_{21}=\lambda_{12}=0$ que, junto con el apartado c) de la Proposición 2.3.4.1.9 implica que $\tilde{R}=0$. Así, $(V,\ g,\ S,\ 0,\ \tilde{T})$ satisfaciendo (2.32) y (2.33), es s – variedad algebraica ya que se comprueba fácilmente que se satisfacen las condiciones i) – vi) del Teorema 1.3.2.

Además, procediendo de forma análoga al Lema 2.3.2.6 se comprueba que $(\mathcal{D}_{\bar{U}_1}R)(U_1,U_2)U_1 \neq 0$ para U_1, U_2 elementos fijados de la base de V^C, por ello, las correspondientes s – variedades Riemannianas (M,g) no son localmente simétricas.

Por tanto, el álgebra de Lie $\mathfrak{g} = V$ y el producto interior g sobre ésta, tienen la misma forma que en el caso A) salvo que ahora $\lambda = i\rho$ y $\nu = 0$.

Así, b' y ρ son los únicos invariantes de la s – variedad algebraica.

B2) Si $b'^2 = 1$. Entonces, debido a los siguientes lemas, se obtiene que la correspondiente s – variedad Riemanniana es un espacio euclídeo E^5. Por tanto, este caso no será estudiado.

Lema 2.3.4.1.17

El álgebra de Lie $\mathfrak{k}$ es $\mathfrak{su}(2)$.

Demostración

Para el desarrollo de ésta se utilizarán las relaciones del Lema 2.3.4.1.16.

Como $b'^2 = 1$, de $(b'^2 - 1)a_1^2 = 0$ no se obtiene información; de $a_1^1 - \bar{a}_2^2 = 0$, $a_1^1 + \bar{a}_1^1 = 0$ y $a_2^2 + \bar{a}_2^2 = 0$ se tiene que $a_1^1, a_2^2 \in \mathbb{C}$ son imaginarios, y que $a_1^1 = -a_2^2$ y, de $a_1^2 + \bar{a}_2^1 = 0$ que $a_1^2 = -\bar{a}_2^1$ y que $a_2^1 = -\bar{a}_1^2$. Por tanto, el álgebra de Lie $\mathfrak{k}$ está generada por el endomorfismo A_0 cuya matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} i\gamma & a_1^2 \\ -\bar{a}_1^2 & -i\gamma \end{pmatrix}, \ \gamma \in \mathbb{R}.$$

Así, $\mathfrak{k} = \mathfrak{su}(2)$.

Lema 2.3.4.1.18

$\tilde{R} = 0$ y, por tanto, $(V, g, S, 0, \tilde{T})$ satisfaciendo (2.32) y (2.33) es s – variedad algebraica.

Demostración

En efecto, si $\tilde{R} = 0$, entonces se satisfacen las condiciones i) – vi) del Teorema 1.3.2 y, por tanto, $(V, g, S, 0, \tilde{T})$ satisfaciendo (2.32) y (2.33) es s – variedad algebraica.

Si ahora, se supone que $\tilde{R} \neq 0$ y se sigue exactamente el mismo procedimiento que en el desarrollo del primer caso de la Proposición 2.3.4.1.8, se prueba que no existe una s – variedad algebraica $(V,g,S,\tilde{R},\tilde{T})$ donde, $\tilde{R} \neq 0$ y, g y $\tilde{T}$ tengan la forma canónica anterior (en este caso la dada por (2.32) y (2.33)), ya que se obtienen las mismas contradicciones. Por tanto, $\tilde{R} = 0$.

Finalmente se enuncia, el siguiente lema cuya demostración puede ser consultada en el Apartado B.1 del Anexo B.

Lema 2.3.4.1.19

$R=0$ y, por tanto, la correspondiente s – variedad Riemanniana es un espacio euclídeo E^5.

Realización geométrica de los casos A) y B1).

Debido a que $\mathfrak{h}=(0)$, para construir el espacio homogéneo buscado solamente será necesario calcular el grupo de Lie G asociado al álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Para ello, considerando sobre (2.26) y (2.31), el cambio de base dado por $Z_1=(U_1+\bar{U}_2)\big/\sqrt{(2+2b^2)}$ y $Z_2=(U_1-\bar{U}_2)\big/\sqrt{(2+2b^2)}$, se obtiene que:

$$[Z_i,Z_j]=[Z_i,\bar{Z}_j]=0,\ i,j=1,2,\ [Z_1,W]=-\lambda Z_1,\ [Z_2,W]=\lambda Z_2 \qquad \textbf{(2.35)}$$

y

$$\begin{gathered} g(Z_1,Z_1)=\nu\big/(1+b^2)=\alpha,\ g(Z_2,Z_2)=-\nu\big/(1+b^2)=-\alpha, \\ g(Z_1,Z_2)=0,\ g(Z_1,\bar{Z}_1)=g(Z_2,\bar{Z}_2)=\frac{1}{2}, \\ g(Z_1,\bar{Z}_2)=\frac{1-b^2}{2(1+b^2)}=c,\ g(Z_i,W)=0,\ i=1,2, \end{gathered} \qquad \textbf{(2.36)}$$

donde la condición $\nu\bar{\nu}<b^2$, toma la forma $\alpha\bar{\alpha}+c^2<\frac{1}{4}$.

Como el centro del álgebra de Lie $\mathfrak{g}\times\mathbb{C}=\langle Z_1,Z_2,W\rangle$ es nulo en los casos A) y B1), se puede aplicar la representación adjunta de manera análoga al Lema 2.3.2.9, obteniendo así, que la expresión matricial del álgebra de Lie $\mathfrak{g}\times\mathbb{C}$ es:

$$\mathfrak{g}\times\mathbb{C}=\left\{z'\cdot\begin{pmatrix}0&0&-\lambda\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+w'\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&\lambda\\0&0&0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&-\lambda&0\\0&0&0\end{pmatrix}:\ z',w'\in\mathbb{C},\ t\in\mathbb{R}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}\lambda t&0&-\lambda z'\\0&-\lambda t&\lambda w'\\0&0&0\end{pmatrix}:z',w'\in\mathbb{C},\ t\in\mathbb{R}\right\}.$$

Ahora, usando la aplicación exponencial $exp:\mathfrak{g}\times\mathbb{C}\to G$, se obtiene, de forma análoga al Lema 2.3.2.9, que el grupo de Lie G es el grupo formado por todas las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 & z \\ 0 & e^{-\lambda t} & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $z = \dfrac{z'}{t}(1-e^{\lambda t})$, $w = \dfrac{w'}{t}(1-e^{-\lambda t}) \in \mathbb{C}$ y $t \in \mathbb{R}$.

Si $\lambda + \overline{\lambda} \neq 0$; es decir, se está en el caso A), entonces el grupo *G* es difeomorfo a $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}$. En efecto, si se calcula el Jacobiano de la aplicación $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R} \to G$ dada por $(z,w,t) \to \left(\dfrac{z}{t}(1-e^{\lambda t}), \dfrac{w}{t}(1-e^{-\lambda t}), e^{-\lambda t} \right)$, se obtiene que su expresión es $\left(\dfrac{1-e^{\lambda t}}{t} \right) \cdot \left(\dfrac{1-e^{-\lambda t}}{t} \right) \cdot (\lambda e^{\lambda t})$. Como $\lambda \neq 0$, se tiene que si *t* tiende a cero, el Jacobiano tiende a $-\lambda^3 \neq 0$ y, que si $t \neq 0$, el Jacobiano se anula si y sólo si $e^{\lambda t} = 1$ y, tomando $\lambda = a + ib$, si y sólo si $bt = k\pi$, $k \neq 0$, y, $a = 0$ ó $t = 0$, lo cual es una contradicción con $\lambda + \overline{\lambda} \neq 0$ y $t \neq 0$. Así, aplicando el teorema de la función inversa, se sabe que el difeomorfismo es local y, además, como la aplicación es inyectiva, es global.

Si $\lambda + \overline{\lambda} = 0$, es decir, se está en el caso B1), entonces $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}$ es un cubrimiento por abiertos (formado por un solo abierto) del grupo *G*. En efecto, si se calcula el Jacobiano de la aplicación $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R} \to G$ dada por

$$(z,w,t) \to \left(\frac{z}{t}(1-e^{\lambda t}), \frac{w}{t}(1-e^{-\lambda t}), e^{-\lambda t} \right),$$

se obtiene que su expresión es $\left(\dfrac{1-e^{\lambda t}}{t} \right) \cdot \left(\dfrac{1-e^{-\lambda t}}{t} \right) \cdot (\lambda e^{\lambda t})$. Como $\lambda \neq 0$, se tiene que si *t* tiene a cero, el Jacobiano tiende a $-\lambda^3 \neq 0$ y, que si $t \neq 0$, el Jacobiano se anula si y sólo si $e^{\lambda t} = 1$ y, como $\lambda = i\gamma$, $\gamma \neq 0$, si y sólo si $\gamma t = 2k\pi$, $0 \neq k \in \mathbb{Z}$. Por tanto, lo que se tiene es que la aplicación $(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}) \setminus A \to G \setminus \{Id\}$ es un difeomorfismo donde,

$$A = \{(z,w,t) / \lambda t = i2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}^*\} = \{(z,w,\frac{2k\pi}{\gamma}) /\ k \in \mathbb{Z}^*\}.$$

Así, en ambos casos $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}$ es un recubrimiento por abiertos simplemente conexo (formado por un solo abierto) del grupo *G*. Además, $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}$ puede ser identificado con $\mathbb{R}^5$.

A continuación se calcula la métrica *G* – invariante *g*.

De manera análoga al desarrollo del Lema 2.3.2.10, en este caso se obtiene que $Z_1, Z_2, W \in \mathfrak{g} \times \mathbb{C}$ pueden ser identificados respectivamente con los campos vectoriales invariantes a izquierda sobre *G*

$$e^{\lambda t}\frac{\partial}{\partial z},\ e^{-\lambda t}\frac{\partial}{\partial w} \text{ y } \frac{\partial}{\partial t}.$$

Por ello, se tiene que el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ puede ser representada por la siguiente transformación infinitesimal del espacio $\mathbb{C}^2(z,w)\times\mathbb{R}(t)$:

$$Z_1 = e^{\lambda t}\frac{\partial}{\partial z},\ \overline{Z}_1 = e^{\overline{\lambda} t}\frac{\partial}{\partial \overline{z}},\ Z_2 = e^{-\lambda t}\frac{\partial}{\partial w},\ \overline{Z}_2 = e^{-\overline{\lambda} t}\frac{\partial}{\partial \overline{w}} \text{ y } W = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Así, de forma análoga al Lema 2.3.2.11, el producto interior g sobre $V=\mathfrak{g}$ induce una métrica Riemanniana invariante sobre $\mathbb{R}^5(z,\overline{z},w,\overline{w},t)$ mediante la siguiente forma diferencial compleja sobre $\mathbb{C}^2(z,w)\times\mathbb{R}(t)$:

$$g = \alpha e^{-2\lambda t}(dz)^2 + \overline{\alpha}e^{-2\overline{\lambda}t}(d\overline{z})^2 - \alpha e^{2\lambda t}(dw)^2 - \overline{\alpha}e^{2\overline{\lambda}t}(d\overline{w})^2 +$$

$$+2c[e^{-(\lambda-\overline{\lambda})t}dzd\overline{w} + e^{(\lambda-\overline{\lambda})t}d\overline{z}dw] + e^{-(\lambda+\overline{\lambda})t}dzd\overline{z} + e^{(\lambda+\overline{\lambda})t}dwd\overline{w} + (dt)^2$$

donde λ, α son parámetros complejos, c es un parámetro real y $\alpha\overline{\alpha}+c^2<1/4$. En el caso $\lambda+\overline{\lambda}=0$ se tiene que $\alpha=0$ y que $c\neq 0$ ya que, si c fuese cero, la correspondiente métrica Riemanniana sería la euclídea y correspondería al caso B2).

Finalmente, se demuestra de forma análoga al Lema 2.3.2.12 que la simetría típica s_o de orden 4 en el punto $o\equiv(0,0,0,0,0)$ de $\mathbb{R}^5$ es la transformación dada por:

$$z' = iw,\ \ w' = iz,\ \ t' = -t.$$

Así, se ha obtenido el tipo 4 de la lista de clasificación.

C) Si $(\lambda+\overline{\lambda})=0$, $\mu\neq 0$ y $\mu+\overline{\mu}=0$. Entonces, $\lambda = i\rho$ con $0\neq\rho\in\mathbb{R}$ y $\mu = it$ con $0\neq t\in\mathbb{R}$. Así, se puede elegir un vector unitario $W\in V^{(-1)}\cap V$ y una base $\{U_1,U_2\}$ de $V^{(i)}$ de forma que ahora (2.27) se expresa de la forma siguiente:

$$\tilde{T}(U_1,U_2) = itW,\ \tilde{T}(U_j,\overline{U}_k) = 0,\ \ j,k=1,2$$

$$\tilde{T}(U_1,W) = i\rho\overline{U}_2,\ \tilde{T}(U_2,W) = -i\rho\overline{U}_1,\ 0\neq\rho\in\mathbb{R},\ 0\neq t\in\mathbb{R}.$$

Realizando ahora el cambio de base dado por $W^* = W/\rho$, $U_1^* = -iU_1\big/\sqrt{|t\rho|}$ y $U_2^* = U_2\big/\sqrt{|t\rho|}$ se tiene que

$$\tilde{T}(U_1^*,U_2^*) = \operatorname{sgn}(t\rho)W^*,\ \tilde{T}(U_j^*,\overline{U}_k^*) = 0,\ \ j,k=1,2$$

$$\tilde{T}(U_1^*,W^*) = \overline{U}_2^*,\ \tilde{T}(U_2^*,W^*) = -\overline{U}_1^*,\ 0\neq\rho\in\mathbb{R},\ 0\neq t\in\mathbb{R}.$$

Si ahora se buscan U'_1 y U'_2 como combinación lineal de U^*_1 y U^*_2 y, de forma que $\tilde{T}(U'_1,W^*)=\bar{U}'_2$ y $\tilde{T}(U'_2,W^*)=-\bar{U}'_1$, se obtiene que $U'_1=\alpha U^*_1+\beta U^*_2$, $U'_2=-\bar{\beta}U^*_1+\bar{\alpha}U^*_2$ y $\tilde{T}(U'_1,U'_2)=\mathrm{sgn}(t\rho)(\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta})W^*$. Así, el coeficiente de W^* no cambia de signo. Realizando ahora el cambio dado por $U_1=U'_1\big/\sqrt{(\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta})}$, $U_2=U'_2\big/\sqrt{(\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta})}$ y $W=W^*$, se obtiene

$$\tilde{T}(U_1,U_2)=\pm W\,,\ \tilde{T}(U_j,\bar{U}_k)=0\,,\ j,k=1,2 \qquad \textbf{(2.37)}$$
$$\tilde{T}(U_1,W)=\bar{U}_2\,,\ \tilde{T}(U_2,W)=-\bar{U}_1,\ 0\neq\rho\in\mathbb{R}\,,\ 0\neq t\in\mathbb{R}$$

donde, además, los casos $(+)$ y $(-)$ no son equivalentes.

Aplicando los cambios anteriores sobre g se obtiene que:

$$g(U_1,\bar{U}_1)=a^2\,,\ g(U_2,\bar{U}_2)=b'^2\,,\ g(W,W)=c^2\,,\ g(U_1,\bar{U}_2)=\nu'\in\mathbb{C},$$

y que el resto de relaciones posibles son nulas.

Ahora, manteniendo (2.27), se puede reducir el parámetro ν' a cero. Para ello, se remplazan U_1 y U_2 (aunque sin cambiar la notación) por los vectores $(U_1+\beta U_2)\big/\sqrt{(1+\beta\bar{\beta})}$ y $(U_1+\beta U_2)\big/\sqrt{(1+\beta\bar{\beta})}$ respectivamente, donde β es raíz de la ecuación $\bar{\nu}'\beta^2+(a^2-b'^2)\beta-\nu'=0$. Así, las relaciones (2.37) permanecen inalteradas y se tiene que:

$$g(U_1,\bar{U}_1)=a'^2\,,\ g(U_2,\bar{U}_2)=b''^2\,,\ g(W,W)=c^2\,,\ g(U_1,\bar{U}_2)=0,$$

y que el resto de relaciones posibles son nulas.

Además, para cualquier cambio de base que se realice imponiendo que se satisfagan las condiciones (2.37) y $g(U_1,\bar{U}_2)=0,$ se tiene que se conservan todos los parámetros a', b'' y c ó que se intercambian a' con b''.

En consecuencia, se puede afirmar que se ha encontrado una base U_1, U_2, W tal que satisface (2.37) y

$$g(U_1,\bar{U}_1)=a^2\,,\ g(U_2,\bar{U}_2)=b^2\,,\ g(W,W)=c^2\,,\ g(U_1\,\bar{U}_2)=0 \qquad \textbf{(2.38)}$$

donde, $a\geq b>0$, $c>0$ y el resto de relaciones posibles son nulas. Más aún, a, b y c son invariantes de $(S,\,g,\,\tilde{T})$.

Para cualquier s – variedad algebraica $(V,\,g,\,S,\,\tilde{R},\,\tilde{T})$ satisfaciendo (2.37) y (2.38) se tiene que $\tilde{R}\neq 0$. En efecto, si $\tilde{R}=0$ se tendría que la primera Identidad de Bianchi no es satisfecha ya que $\mathfrak{S}(\tilde{T}(\tilde{T}(U_1,U_2),\bar{U}_1)=\mp U_2\neq 0$.

A continuación, de manera análoga a como se desarrolló en los casos anteriores, se calcula al álgebra de Lie $\mathfrak{k}$.

Sea $A\in\mathfrak{k}$, entonces, a partir de la condición $A(S)=0$ se sabe que

$$AU_i = \sum_{j=1,2} a_i^j U_j\ ,\ i = 1,2\ ,\ A\overline{U}_i = \sum_{j=1,2} \overline{a}_i^j \overline{U}_j\ ,\ i = 1,2\ ,\ AW = 0\ ,$$

de $A(g) = 0$ se obtiene que

$$a_1^1 + \overline{a}_1^1 \overset{(1)}{=} 0\ ,\ a_2^2 + \overline{a}_2^2 \overset{(2)}{=} 0\ ,\ a_1^2(b)^2 + \overline{a}_2^1(a)^2 \overset{(3)}{=} 0$$

y de $A(\tilde{T}) = 0$ que

$$a_1^1 + a_2^2 \overset{(4)}{=} 0\ ,\ a_1^2 + \overline{a}_2^1 \overset{(5)}{=} 0\ .$$

Así, de (1), (2) y (4) se obtiene que

$$a_1^1 = -a_2^2 = i\gamma\ ,\ \gamma \in \mathbb{R}$$

y, de (3) y (5) que

$$a_1^2(b^2 - a^2) \overset{(6)}{=} 0\ .$$

Por tanto, hay que analizar por separado los casos en los que a y b son iguales ó distintos.

Si $a \neq b$, entonces, por (6) y (5) $a_1^2 = a_2^1 = 0$. Así, el álgebra de Lie $\mathfrak{k}$ es uno dimensional y está generada por el endomorfismo B cuya matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Si $a = b$, entonces, por (5) $-\overline{a}_1^2 = a_2^1 = 0$. Así, el álgebra de Lie $\mathfrak{k}$ es dos dimensional y está generada por las matrices del tipo

$$\begin{pmatrix} i\gamma & a_1^2 \\ -\overline{a}_1^2 & -i\gamma \end{pmatrix},\ \gamma \in \mathbb{R}\ ,\ a_1^2 \in \mathbb{C}\ ;$$

es decir, $\mathfrak{k} = \mathfrak{su}(2)$.

Ahora, hay que ver las posibilidades que se tienen para el álgebra de Lie $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{k}$. Como $\tilde{R} \neq 0$ se sabe que $\mathfrak{h} \neq (0)$, por tanto, $\mathfrak{h}$ será uno ó dos dimensional.

Si $a \neq b$, la $\dim \mathfrak{k} = 1$ y $\mathfrak{k} = \langle B \rangle$ entonces, $\mathfrak{h} = \langle B \rangle$.

Si $a = b$, la $\dim \mathfrak{k} = 2$ y $\mathfrak{k} = \mathfrak{su}(2)$ entonces, ó bien la $\dim \mathfrak{h} = 2$ y $\mathfrak{h} = \mathfrak{su}(2)$ ó bien $\dim \mathfrak{h} = 1$ y $\mathfrak{h}$ está generada por $B = \begin{pmatrix} it & u+iv \\ -u+iv & -it \end{pmatrix}$ expresada en la base U_1, U_2. Si en este último caso se calculan los valores propios de B, se obtiene que son $\lambda_\pm = \pm i\sqrt{t^2 + u^2 + v^2}$. Además, si $U_1^* = \alpha U_1 + \beta U_2$ es el vector propio asociado al valor propio λ_+ entonces, $U_2^* = -\overline{\beta} U_1 + \overline{\alpha} U_2$ es el vector propio asociado al valor propio λ_- (notar que se siguen manteniendo las relaciones

(2.37) y (2.38)). En efecto, si se toman α y β de forma que $BU_1^* = \lambda_+ U_1^*$; es decir, que $(B - \lambda_+ I)U_1^* = 0$ ó equivalentemente que

$$\left.\begin{array}{r} it\lambda_+\alpha + (u+iv)\beta = 0 \\ (-u-iv)\overline{\alpha} + it\lambda_-\overline{\beta} = 0 \end{array}\right\},$$

se aplica el conjugado a este sistema, se tiene en cuenta que $\overline{\lambda_+} = \lambda_-$, se cambia de signo la segunda ecuación y se arregla la primera, se obtiene que

$$\left.\begin{array}{r} -(-u+iv)\overline{\beta} - it\lambda_-\overline{\alpha} = 0 \\ -it\lambda_-\overline{\beta} + (u+iv)\overline{\alpha} = 0 \end{array}\right\};$$

es decir, que $(B - \lambda_- I)U_2^* = 0$. Por tanto, U_2^* es el vector propio asociado a λ_-. En esta nueva base se puede suponer que $\alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} = 1$, ya que se obtiene realizando un nuevo cambio de base dado por $U_j^{**} = \left(1\big/\sqrt{\alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta}}\right)U_j^*$, $j = 1,2$, el cual sigue satisfaciendo las condiciones (2.37), (2.38) y el hecho de que U_j^{**}, $j = 1,2$, sean los vectores propios asociados a los valores propios λ_+, λ_-. Así, B en la base U_1^*, U_2^*, es

$$\begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix},$$

y, así, se concluye que en este caso $\mathfrak{h}$ está generada por

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Por tanto, habrá que distinguir y analizar los dos casos siguientes:

C1) Si $\dim\mathfrak{h} = 1$ entonces, $a \geq b$ y $\mathfrak{h} = \langle B \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \right\rangle$.

C2) Si $\dim\mathfrak{h} = 2$ entonces, $a = b$ y $\mathfrak{h} = \mathfrak{su}(2)$.

C1) Si $\dim\mathfrak{h} = 1$ entonces, $a \geq b$ y $\mathfrak{h} = \langle B \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \right\rangle$. En este caso, usando (2.37) y el apartado c) de la Proposición 2.3.4.1.9 sobre la primera identidad de Bianchi desarrollada sobre $U_1, U_2, \overline{U}_j$, $j = 1,2$, se obtiene que:

$$\tilde{R}(U_2, \overline{U}_j)U_1 + \tilde{R}(\overline{U}_j, U_1)U_2 = \mp\tilde{T}(\overline{U}_j, W),\ \ j = 1,2. \qquad \textbf{(2.39)}$$

Como $\tilde{R}(U_i, \overline{U}_j) \in \mathfrak{h} = \langle B \rangle$, se sabe que $\tilde{R}(U_i, \overline{U}_j) = \lambda_{ij}B$, $\lambda_{ij} \in \mathbb{C}$, $i, j = 1,2$. Si se sustituye esto en (2.39) cuando $j = 1$ se obtiene que $-\lambda_{11}BU_2 + \lambda_{21}BU_1 = \mp U_2$ y cuando $j = 2$ que $\lambda_{22}BU_1 - \lambda_{12}BU_2 = \pm U_1$. Como el endomorfismo B es conocido, estas se reducen a $-i\lambda_{11}U_2 - i\lambda_{21}U_1 = \pm U_2$ y a $i\lambda_{22}U_1 + i\lambda_{12}U_2 = \pm U_1$. Ahora, como U_1 y U_2 son linealmente independientes se obtiene $\lambda_{11} = \pm i$, $\lambda_{22} = \mp i$ y $\lambda_{21} = \lambda_{12} = 0$. Así, se concluye que:

$$\tilde{R}(U_1,\bar{U}_1) = \pm iB\,,\ \tilde{R}(U_2,\bar{U}_2) = \mp iB\,,\ \tilde{R}(U_1,\bar{U}_2) = \tilde{R}(U_2,\bar{U}_1) = 0\,,$$
$$BU_1 = iU_1\,,\ BU_2 = -iU_2\,. \tag{2.40}$$

Entonces, para poder realizar las distintas interpretaciones geométricas habrá que distinguir de nuevo dos casos:

C1A) Caso elíptico. Cuando se considera el signo inferior en (2.37) y (2.40).

C1B) Caso hiperbólico. Cuando se considera el signo superior en (2.37) y (2.40).

Notar, que en ambos casos (2.37), (2.38) y (2.40) definen una s – variedad algebraica ya que satisfacen las condiciones i) – vi) del Teorema 1.3.2. Además, si $a > b$ entonces, $\mathfrak{h} = \mathfrak{k}$ pero, si $a = b$ entonces, $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{k}$.

Tanto en el caso elíptico como en el hiperbólico se tiene que las correspondientes s – variedades Riemannianas no son localmente simétricas. En efecto, en el caso elíptico es fácil comprobar que $(\mathcal{D}_{\bar{U}_1}R)(U_1,U_2)U_1 \neq 0$ y en el caso hiperbólico que $(\mathcal{D}_{U_2}R)(U_1,\bar{U}_1)U_1 \neq 0$.

Realización geométrica de los casos C1A) y C1B).

C1A) *Caso elíptico.*

Para construir el espacio homogéneo buscado es necesario calcular el grupo de Lie G asociado al álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y el grupo de Lie H asociado al álgebra de Lie $\mathfrak{h}$.

Para ello, considerando sobre (2.37) y (2.40), el cambio de base dado por $Z_1 = (1/2)(U_1 + i\bar{U}_2)$ y $Z_2 = (1/2)(-U_2 + i\bar{U}_1)$, se obtiene que:

$$\tilde{T}(Z_1,\bar{Z}_1) = \tilde{T}(Z_2,\bar{Z}_2) = iW/2\,,\ \tilde{R}(Z_1,\bar{Z}_1) = -\tilde{R}(Z_2,\bar{Z}_2) = -iB/2\,,$$
$$\tilde{T}(Z_1,W) = -iZ_1\,,\ \tilde{T}(Z_2,W) = -iZ_2\,,\ BZ_1 = iZ_1\,,\ BZ_2 = -iZ_2\,,$$
$$\tilde{T}(Z_1,Z_2) = \tilde{T}(Z_1,\bar{Z}_2) = \tilde{T}(\bar{Z}_1,Z_2) = \tilde{R}(Z_1,Z_2) = \tilde{R}(Z_1,\bar{Z}_2) = \tilde{R}(\bar{Z}_1,Z_2) = 0\,.$$

Si ahora se considera el cambio de base $W' = (1/2)(W - B)$ y $B' = (1/2)(W + B)$, se tiene que la tabla de multiplicar asociada a $\mathfrak{g}$ es

$$[Z_1,Z_2] = [Z_1,\bar{Z}_2] = 0\,,\ [Z_1,\bar{Z}_1] = -iW'\,,\ [Z_2,\bar{Z}_2] = -iB'$$
$$[Z_1,W'] = iZ_1\,,\ [Z_1,B'] = 0\,,\ [Z_2,W'] = 0\,,\ [Z_2,B'] = iZ_2\,.$$

Si finalmente se considera el cambio de base dado por $Z_j = \left(1/\sqrt{2}\right)(X'_j + iY'_j)$, $j = 1,2$, donde X'_j, $Y'_j \in V$ se obtiene que la tabla de multiplicar asociada a $\mathfrak{g}$ es ahora la dada por:

$$[X'_1, Y'_1] = W',\ [X'_1, W'] = -Y'_1,\ [Y'_1, W'] = X'_1,$$
$$[X'_2, Y'_2] = B',\ [X'_2, B'] = -Y'_2,\ [Y'_2, B'] = X'_2 \qquad \textbf{(2.41)}$$

donde, el resto de relaciones posibles son cero. Así, se obtiene que

$$\mathfrak{g} = (X'_1, Y'_1, W') \oplus (X'_2, Y'_2, B') \cong \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$$

y que la subálgebra $\mathfrak{h} = \langle B \rangle = \langle B' - W' \rangle = \langle B' \rangle \oplus \langle -W' \rangle$.

Ahora, usando la aplicación exponencial se obtiene que el grupo de Lie G es $SO(3) \times SO(3)$ y que $H = \exp(B') \times \exp(-W')$ donde, como

$$B' = W' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ entonces, } \exp(B') = -\exp(-W') = \begin{pmatrix} Cost & -Sent & 0 \\ Sent & Cost & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Según los cambios de base anteriormente realizados, se tiene que las relaciones correspondientes a la métrica toman la forma siguiente:

$$g(X'_j, X'_j) = g(Y'_j, Y'_j) = (a^2 + b^2)/4,\ g(X'_1, Y'_2) = g(Y'_1, X'_2) = (a^2 - b^2)/4,$$
$$g(X'_1, X'_2) = g(Y'_1, Y'_2) = g(X'_1, Y'_1) = g(X'_2, Y'_2) = 0,\ g(W, W) = c^2, \qquad \textbf{(2.42)}$$

donde $W = W' + B'$.

Así, para calcular ahora la métrica Riemanniana G – invariante sobre el espacio homogéneo G/H, se considera el producto directo $GL(3,\mathbb{R}) \times GL(3,\mathbb{R})$ de todos los pares de matrices no singulares de la forma

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 & \tilde{a}_2 & \tilde{a}_3 \\ \tilde{b}_1 & \tilde{b}_2 & \tilde{b}_3 \\ \tilde{c}_1 & \tilde{c}_2 & \tilde{c}_3 \end{pmatrix},$$

donde, a_i, b_i, c_i, $\tilde{a}_i$, $\tilde{b}_i$, $\tilde{c}_i$, $i = 1,2,3$, son variables reales. Los vectores $\{X'_1$, X'_2, Y'_1, Y'_2, W', $B'\}$ de $\mathfrak{g}$ pueden ser representados, de forma similar a como se desarrolla el Lema 2.3.3.1.8, por los siguientes campos vectoriales invariantes sobre $GL(3,\mathbb{R}) \times GL(3,\mathbb{R})$:

$$X_{ij} = a_i \frac{\partial}{\partial a_j} - a_j \frac{\partial}{\partial a_i} + b_i \frac{\partial}{\partial b_j} - b_j \frac{\partial}{\partial b_i} + c_i \frac{\partial}{\partial c_j} - c_j \frac{\partial}{\partial c_i},$$

$$\tilde{X}_{ij} = \tilde{a}_i \frac{\partial}{\partial \tilde{a}_j} - \tilde{a}_j \frac{\partial}{\partial \tilde{a}_i} + \tilde{b}_i \frac{\partial}{\partial \tilde{b}_j} - \tilde{b}_j \frac{\partial}{\partial \tilde{b}_i} + \tilde{c}_i \frac{\partial}{\partial \tilde{c}_j} - \tilde{c}_j \frac{\partial}{\partial \tilde{c}_i},$$

para los índices $(i, j) = (1,2),(2,3),(3,1)$ y, donde, $X_1' = X_{23}$, $Y_1' = X_{31}$, $W' = X_{12}$, $X_2' = \tilde{X}_{23}$, $Y_2' = \tilde{X}_{31}$, $B' = \tilde{X}_{12}$, forman una representación del álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$.

Así, a partir de los campos vectoriales $X_{ij}, \tilde{X}_{ij}$ se obtiene el subgrupo de Lie $G = SO(3)\times SO(3)$ de $GL(3,\mathbb{R})\times GL(3,\mathbb{R})$ y a partir del campo vectorial $\tilde{X}_{12} - X_{12}$ el subgrupo de Lie *H*; es decir, dado el par de álgebras de Lie $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ se ha obtenido su correspondiente variedad homogénea simplemente conexa G/H.

Además, a partir de X_{ij}, $\tilde{X}_{ij}$, campos vectoriales invariantes sobre $GL(3,\mathbb{R})\times GL(3,\mathbb{R})$, se obtiene que sus formas diferenciales duales asociadas son:

$$w_{ij}' = a_i da_j + b_i db_j + c_i dc_j \ \text{ y } \ \tilde{w}_{ij}' = \tilde{a}_i d\tilde{a}_j + \tilde{b}_i d\tilde{b}_j + \tilde{c}_i d\tilde{c}_j .$$

Denotando por w_{ij}' y $\tilde{w}_{ij}'$ para $(i, j) = (1,2),(2,3),(3,1)$ las correspondientes formas inducidas sobre *G*, se tiene exactamente que

$$w_{12}(W') = w_{23}(X_1') = w_{31}(Y_1') = 1, \ \tilde{w}_{12}(B') = \tilde{w}_{23}(X_2') = \tilde{w}_{31}(Y_2') = 1$$

y que el resto de posibilidades son cero sobre *G*. Así, usando (2.42) se sabe que:

$$g = \frac{a^2}{4}[(w_{23} + \tilde{w}_{31})^2 + (\tilde{w}_{23} + w_{31})^2] + \frac{b^2}{4}[(w_{23} - \tilde{w}_{31})^2 + (\tilde{w}_{23} - w_{31})^2] +$$
$$+ \frac{c^2}{4}(w_{12} + \tilde{w}_{12})^2$$

es *G* – invariante y semi-definida positiva sobre *G*. Además, como es $Ad(H)$ – invariante se tiene que *g* induce una métrica Riemanniana *G* - invariante sobre el cociente G/H, a la cual se denotará de nuevo por *g*. En efecto, como usando (2.41) se tiene que

$$[B, X_1'] = -Y_1', \ [B, Y_1'] = X_1', \ [B, X_2'] = Y_2' \ \text{ y } \ [B, Y_2'] = -X_2'$$

entonces, se comprueba fácilmente que

$$Ad(H)g(X_1', X_1') = g(Ad(H)X_1', Ad(H)X_1') = g([B, X_1'],[B, X_1']) = g(X_1', X_1')$$

y, de manera análoga, que:

$$Ad(H)g(Y_1', Y_1') = g(Y_1', Y_1'), \ Ad(H)g(X_2', X_2') = g(X_2', X_2'),$$
$$Ad(H)g(Y_2', Y_2') = g(Y_2', Y_2'), \ Ad(H)g(X_i', Y_j') = g(X_i', Y_j'), \ i, j = 1,2,$$
$$Ad(H)g(X_1', X_2') = g(X_1', X_2'), \ Ad(H)g(Y_1', Y_2') = g(Y_1', Y_2').$$

Pero, para comprobar que g es $Ad(H)$-invariante hace falta verificar también que, $Ad(H)g(W,W)=g(W,W)$. Para ello, se sigue el método desarrollado en [Go – H, Pág. 82 - 83]. En efecto, como la suma es directa y el producto es el cartesiano,

$$Ad(H)W = Ad(H)(W'+B') = (H_1\times H_2)(W'+B')(H_1\times H_2)^{-1} =$$
$$= H_1W'H_1^{-1} + H_2B'H_2^{-1}.$$

Y, como se sabe que

$$H_1 = H_2^{-1} = \begin{pmatrix} Cost & -Sent & 0 \\ Sent & Cost & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ H_2 = H_1^{-1} = \begin{pmatrix} Cost & Sent & 0 \\ -Sent & Cost & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$W' = B' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces, $Ad(H)W = W$ y, así, $Ad(H)g(W,W)=g(W,W)$.

Así, se ha obtenido el tipo *5a*) de la lista de clasificación.

Si ahora se considera el automorfismo Φ de $GL(3,\mathbb{R})\times GL(3,\mathbb{R})$ dado por

$$\Phi: \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \tilde a_1 & \tilde a_2 & \tilde a_3 \\ \tilde b_1 & \tilde b_2 & \tilde b_3 \\ \tilde c_1 & \tilde c_2 & \tilde c_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \tilde a_1 & -\tilde a_2 & -\tilde a_3 \\ -\tilde b_1 & \tilde b_2 & \tilde b_3 \\ -\tilde c_1 & \tilde c_2 & \tilde c_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 & a_3 \\ -b_1 & b_2 & -b_3 \\ c_1 & -c_2 & c_3 \end{pmatrix},$$

se comprueba que $\Phi^4 = Id.$, Φ conserva el subgrupo $G = SO(3)\times SO(3)$ y el subgrupo *H*. En consecuencia, Φ induce el difeomorfismo Ψ de la variedad G/H en si misma. Además, el conjunto de puntos fijos de Φ en *G* se separa en dos componentes una de las cuales es el subgrupo *H*. Y, como $\Phi^*(w_{23}) = \tilde w_{23}$, $\Phi^*(w_{31}) = -\tilde w_{31}$, $\Phi^*(w_{12}) = -\tilde w_{12}$, $\Phi^*(\tilde w_{23}) = -w_{23}$, $\Phi^*(\tilde w_{31}) = -w_{31}$, y $\Phi^*(\tilde w_{12}) = -w_{12}$, se tiene que $\Phi^*(g) = g$. Así, se concluye que Ψ es una simetría de orden 4 de la variedad Riemanniana $(G/H, g)$ en el origen.

C1B) *Caso hiperbólico.*

Por un procedimiento similar al del caso C1A) se obtiene que la tabla de multiplicar asociada a $\mathfrak{g}$ es la dada por:

$$[X_1', Y_1'] = -W',\ [X_1', W'] = -Y_1',\ [Y_1', W'] = X_1',$$
$$[X_2', Y_2'] = -B',\ [X_2', B'] = -Y_2',\ [Y_2', B'] = X_2'$$

donde, el resto de relaciones posibles son cero. Así, se obtiene que

$$\mathfrak{g} = (X'_1, Y'_1, W') \oplus (X'_2, Y'_2, B') \cong \mathfrak{so}(2,1) \oplus \mathfrak{so}(2,1)$$

y que la subálgebra $\mathfrak{h} = \langle B \rangle = \langle B' - W' \rangle = \langle B' \rangle \oplus \langle -W' \rangle$.

Continuando con el método utilizado en el caso anterior se obtienen los campos vectoriales invariantes sobre $GL(3,\mathbb{R}) \times GL(3,\mathbb{R})$

$$X_{12} = a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} - a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + b_1 \frac{\partial}{\partial b_2} - b_2 \frac{\partial}{\partial b_1} + c_1 \frac{\partial}{\partial c_2} - c_2 \frac{\partial}{\partial c_1},$$

$$X_{ij} = a_i \frac{\partial}{\partial a_j} + a_j \frac{\partial}{\partial a_i} + b_i \frac{\partial}{\partial b_j} + b_j \frac{\partial}{\partial b_i} + c_i \frac{\partial}{\partial c_j} + c_j \frac{\partial}{\partial c_i},$$

$$\tilde{X}_{12} = \tilde{a}_1 \frac{\partial}{\partial \tilde{a}_2} - \tilde{a}_2 \frac{\partial}{\partial \tilde{a}_1} + \tilde{b}_1 \frac{\partial}{\partial \tilde{b}_2} - \tilde{b}_2 \frac{\partial}{\partial \tilde{b}_1} + \tilde{c}_1 \frac{\partial}{\partial \tilde{c}_2} - \tilde{c}_2 \frac{\partial}{\partial \tilde{c}_1},$$

$$\tilde{X}_{ij} = \tilde{a}_i \frac{\partial}{\partial \tilde{a}_j} + \tilde{a}_j \frac{\partial}{\partial \tilde{a}_i} + \tilde{b}_i \frac{\partial}{\partial \tilde{b}_j} + \tilde{b}_j \frac{\partial}{\partial \tilde{b}_i} + \tilde{c}_i \frac{\partial}{\partial \tilde{c}_j} + \tilde{c}_j \frac{\partial}{\partial \tilde{c}_i},$$

para los índices $(i,j) = (2,3),(3,1)$ y, donde, $X'_1 = X_{23}$, $Y'_1 = X_{31}$, $W' = X_{12}$, $X'_2 = \tilde{X}_{23}$, $Y'_2 = \tilde{X}_{31}$, $B' = \tilde{X}_{12}$, forman una representación del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Así, a partir de los campos vectoriales X_{ij}, $\tilde{X}_{ij}$ se obtiene el subgrupo de Lie $G = SO(2,1) \times SO(2,1)$ de $GL(3,\mathbb{R}) \times GL(3,\mathbb{R})$ y, a partir del campo vectorial $\tilde{X}_{12} - X_{12}$ el subgrupo de Lie *H*, que es el mismo que el del caso elíptico; es decir, que dado el par de álgebras de Lie $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ se ha obtenido que su correspondiente variedad homogénea es G/H.

El resto del estudio no varía con respecto al caso anterior.

Así, se ha obtenido el tipo *5b*) de la lista de clasificación.

C2) Si $\dim \mathfrak{h} = 2$ entonces, $a = b$ y $\mathfrak{h} = \mathfrak{su}(2)$. Si ahora, al igual que en el Lema 2.3.4.1.12 se considera que

$$\tilde{R}(U_1,\bar{U}_1) = iA^1,\ \tilde{R}(U_1,\bar{U}_2) = A^2 + iA^3,\ \tilde{R}(U_2,\bar{U}_1) = -A^2 + iA^3,$$
$$\tilde{R}(U_2,\bar{U}_2) = iA^4 \qquad \textbf{(2.43)}$$

donde, $A^1,\ldots,A^4 \in \mathfrak{su}(2)$, se tiene que la primera identidad de Bianchi implica

$$\tilde{R}(U_1,\bar{U}_1)U_2 + \tilde{R}(\bar{U}_1,U_2)U_1 = \tilde{T}(\tilde{T}(U_2,U_1),\bar{U}_1),$$
$$\tilde{R}(U_2,\bar{U}_2)U_1 + \tilde{R}(\bar{U}_2,U_1)U_2 = \tilde{T}(\tilde{T}(U_1,U_2),\bar{U}_2)$$

y, por tanto, que

$$iA^1(U_2) + (A^2 - iA^3)U_1 = \pm U_2 \text{ y } iA^4(U_1) - (A^2 + iA^3)(U_2) = \pm U_1 \qquad \textbf{(2.44)}$$

Recordar que aquí los signos $(\pm)$ provienen de (2.37).

Como $A^j \in \mathfrak{su}(2)$, $j = 1,2,3,4$ se tiene que su correspondiente representación matricial es

$$A^j = \begin{pmatrix} it^j & a^j + ib^j \\ -a^j + ib^j & -it^j \end{pmatrix}, \ \ j = 1,2,3,4 \ .$$

Si ahora se desarrolla (2.44) usando las correspondientes representaciones matriciales, se obtiene fácilmente que

$$A^4 = -A^1, \ a^1 = t^2, \ b^1 = t^3, \ t^1 + a^2 + b^3 = \pm 1 \ \text{y} \ b^2 = a^3 . \qquad \textbf{(2.45)}$$

Recordar que cada endomorfismo $A \in \mathfrak{h} = \mathfrak{su}(2)$ anula el tensor $\tilde{R}$. Así, si dado un elemento arbitrario $A = \begin{pmatrix} it & a+ib \\ -a+ib & -it \end{pmatrix} \in \mathfrak{su}(2)$ se desarrolla la relación $(A\tilde{R})(U_1, \overline{U}_1) = 0$ y se utiliza (2.43), se tiene que de

$$A(\tilde{R}(U_1,\overline{U}_1)Z) = \tilde{R}(AU_1,\overline{U}_1)Z + \tilde{R}(U_1, A\overline{U}_1)Z + \tilde{R}(U_1,\overline{U}_1)AZ, \ \ Z \in V^C,$$

se obtiene $i(A^1 \circ A - A \circ A^1) = 2i(bA^2 - aA^3)$. Desarrollando esta última expresión, utilizando las representaciones matriciales correspondientes, se tiene fácilmente que

$$a(b^3 - t^1) + ta^1 - bb^2 = 0, \ \ b(a^2 - t^1) + tb^1 - aa^3 = 0. \qquad \textbf{(2.46)}$$

Como *a*, *b* y *t* son variables arbitrarias y linealmente independientes, se consigue a partir de (2.45) y de (2.46) que

$$t^1 = a^2 = b^3 = \pm\frac{1}{3}, \ t^4 = \mp\frac{1}{3}, \ a^1 = a^3 = a^4 = b^1 = b^2 = b^4 = t^2 = t^3 = 0 .$$

Es decir, que

$$A^1 = -A^4 = \pm\begin{pmatrix} \frac{1}{3}i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}i \end{pmatrix}, \ A^2 = \pm\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}, \ A^3 = \pm\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3}i \\ \frac{1}{3}i & 0 \end{pmatrix}$$

y, por tanto, que

$$\tilde{R}(U_1,\overline{U}_1) = -\tilde{R}(U_2,\overline{U}_2) = \pm\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \qquad \textbf{(2.47)}$$

$$\tilde{R}(U_1,\overline{U}_2) = \pm\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}, \ \tilde{R}(\overline{U}_1,U_2) = \pm\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como, además, se satisface la segunda identidad de Bianchi y la relación $A(\tilde{R})=0$ para todo $A\in\mathfrak{su}(2)$, se tiene que (2.37), (2.38) y (2.47) determinan una s – variedad algebraica.

Ahora, para poder realizar las distintas interpretaciones geométricas habrá que distinguir de nuevo dos casos:

C2A) Caso elíptico. Cuando se considera el signo inferior en (2.37) y (2.47).

C2B) Caso hiperbólico. Cuando se considera el signo superior en (2.37) y (2.47).

Como en el caso hiperbólico siempre se tiene que $\mathcal{D}R\neq 0$ y en el caso elíptico se tiene salvo cuando $a^2=(\frac{3}{4})c^2$ en (2.38), las correspondientes s – variedades Riemannianas no son localmente simétricas.

Realización geométrica de los casos C2A) y C2B).

C2A) Caso elíptico

Para construir el espacio homogéneo buscado es necesario calcular el grupo de Lie G asociado al álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y el grupo de Lie H asociado al álgebra de Lie $\mathfrak{h}$.

Para ello, considerando el cambio de base dado por $A_j=-3A^j$, $j=1,2,3,4$, $U'_i=\sqrt{3}U_i$, $i=1,2$, se obtiene a partir de (2.37) y (2.47) que las únicas relaciones no nulas son:

$$\tilde{T}(U'_1,U'_2)=-3W\,,\ \tilde{T}(U'_1,W')=\bar{U}'_2,\ \tilde{T}(U'_2,W')=-\bar{U}'_1, \tag{2.48}$$

$$\tilde{R}(U'_1,\bar{U}'_1)=-\tilde{R}(U'_2,\bar{U}'_2)=-iA_1,\ \tilde{R}(U'_1,\bar{U}'_2)=-\left(A_2+iA_3\right) \tag{2.49}$$

donde,

$$A_1=\begin{pmatrix} i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix} 0 & i\\ i & 0\end{pmatrix},$$

forman una base de $\mathfrak{h}$.

Si finalmente se considera el cambio de base dado por $U'_j=\left(1/\sqrt{2}\right)(X_j+iY_j)$, $j=1,2$, donde X_j, $Y_j\in V$, se obtiene, desarrollando en (2.48) y (2.49), que la tabla de multiplicar, asociada al álgebra de Nomizu $\mathfrak{g}=V+\mathfrak{h}$ y dada por la fórmula (1.2), es:

$$[X_1,Y_1]=-A_1,\ [X_1,X_2]=A_2+3W\,,\ [X_1,Y_2]=-A_3,\ [Y_1,X_2]=A_3,$$
$$[Y_1,Y_2]=A_2-3W\,,\ [X_2,Y_2]=A_1,\ [X_1,W]=-X_2,\ [Y_1,W]=Y_2,\ [X_2,W]=X_1,$$
$$[Y_2,W]=-Y_1,\ [W,A_1]=[W,A_2]=[W,A_3]=0, \tag{2.50}$$

$$[X_1,A_1]=Y_1,\ [Y_1,A_1]=-X_1,\ [X_2,A_1]=-Y_2,\ [Y_2,A_1]=X_2,\ [X_1,A_2]=-X_2,$$

$$[Y_1, A_2] = -Y_2\,,\ [X_2, A_2] = X_1\,,\ [Y_2, A_2] = Y_1\,,\ [X_1, A_3] = Y_2\,,\ [Y_1, A_3] = -X_2\,,$$
$$[X_2, A_3] = Y_1\,,\ [Y_2, A_3] = -X_1\,.$$

Según los cambios de base anteriormente realizados, se tiene que las relaciones correspondientes a la métrica (2.38) se expresan ahora como:

$$g(X_j, X_j) = g(Y_j, Y_j) = 3a^2\,,\ \ j = 1,2\,,\ \ g(W,W) = c^2\,. \qquad \textbf{(2.51)}$$

Se sabe que $\mathfrak{h} = \langle A_1, A_2, A_3\rangle = \mathfrak{su}(2)$ y, si se identifican X_1, X_2, Y_1, Y_2, W, A_1, A_2 y A_3, con una base adecuada del álgebra de Lie $\mathfrak{su}(3)$, de la forma siguiente:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$W = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix},\ X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathrm{V}}\ X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},\ Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

se tiene que la tabla de multiplicar (2.50) es satisfecha. Así, se concluye que el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es isomorfa al álgebra de Lie $\mathfrak{su}(3)$.

Por tanto, dado el par de álgebras de Lie $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ se ha obtenido que su correspondiente variedad homogénea es $SU(3)/SU(2)$, la cual es difeomorfa a la subvariedad S^5 del espacio complejo $\mathbb{C}^3(z^1, z^2, z^3)$ dada por la relación $z^1\overline{z}^1 + z^2\overline{z}^2 + z^3\overline{z}^3 = 1$ ([W], Pág. 125-127). Si se elige el punto $o = (0,0,1) \in \mathbb{C}^3$ como el origen de S^5, se tiene que el grupo $G = SU(3)$ actúa sobre S^5 efectivamente a la izquierda.

A continuación se calcula la métrica Riemanniana $G-$invariante g sobre S^5.

Lema 2.3.4.1.20

La base del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, $(X_1, Y_1, X_2, Y_2, W, A_1, A_2, A_3)$, se puede representar por los campos vectoriales invariantes a izquierda sobre S^5 siguientes:

$$A_1^* = i\left(z^1\frac{\partial}{\partial z^2} + z^2\frac{\partial}{\partial z^1} - \overline{z}^1\frac{\partial}{\partial \overline{z}^2} - \overline{z}^2\frac{\partial}{\partial \overline{z}^1}\right),\ \ A_2^* = i\left(z^2\frac{\partial}{\partial z^2} - z^1\frac{\partial}{\partial z^1} - \overline{z}^2\frac{\partial}{\partial \overline{z}^2} + \overline{z}^1\frac{\partial}{\partial \overline{z}^1}\right),$$

$$A_3^* = z^2 \frac{\partial}{\partial z^1} - z^1 \frac{\partial}{\partial z^2} - \overline{z}^2 \frac{\partial}{\partial \overline{z}^1} + \overline{z}^1 \frac{\partial}{\partial \overline{z}^2},$$

$$W^* = \frac{1}{3} i \left(-z^1 \frac{\partial}{\partial z^1} - z^2 \frac{\partial}{\partial z^2} + 2z^3 \frac{\partial}{\partial z^3} + \overline{z}^1 \frac{\partial}{\partial \overline{z}^1} + \overline{z}^2 \frac{\partial}{\partial \overline{z}^2} - 2\overline{z}^3 \frac{\partial}{\partial \overline{z}^3} \right),$$

$$X_1^* = z^1 \frac{\partial}{\partial z^3} - z^3 \frac{\partial}{\partial z^1} + \overline{z}^1 \frac{\partial}{\partial \overline{z}^3} - \overline{z}^3 \frac{\partial}{\partial \overline{z}^1},$$

$$X_2^* = i \left(z^3 \frac{\partial}{\partial z^1} + z^1 \frac{\partial}{\partial z^3} - \overline{z}^3 \frac{\partial}{\partial \overline{z}^1} - \overline{z}^1 \frac{\partial}{\partial \overline{z}^3} \right),$$

$$Y_1^* = i \left(z^3 \frac{\partial}{\partial z^2} + z^2 \frac{\partial}{\partial z^3} - \overline{z}^3 \frac{\partial}{\partial \overline{z}^2} - \overline{z}^2 \frac{\partial}{\partial \overline{z}^3} \right), \; Y_2^* = z^2 \frac{\partial}{\partial z^3} - z^3 \frac{\partial}{\partial z^2} + \overline{z}^2 \frac{\partial}{\partial \overline{z}^3} - \overline{z}^3 \frac{\partial}{\partial \overline{z}^2}.$$

Demostración

En efecto, para cada $Z \in \mathfrak{g}$, se considera su correspondiente transformación infinitesimal Z^* sobre S^5. Para ello, dado $p \in S^5$ se considera su vector tangente $Z_p^* := \mu_{p*}(Z_e)$ donde $e \equiv Id. \in G$ y $\mu_p : G \to S^5$ es la aplicación dada por $g \to g \cdot p$.

Para aplicar esto y calcular los campos buscados, se define la aplicación $\mu_{(p,Z)} = \mu_p \circ \exp_e \circ c_Z : \mathbb{R} \to S^5$ dada por $t \to \exp_e(tZ) \cdot p$. Debido a la demostración desarrollada en la prueba del Lema 2.3.4.1.10 se sabe que $Z_p^* := \mu_{p*}(Z_e)$ es $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} (\mu_{(p,Z)}(t))$.

Para calcular $Z^* \in S^5$, se calcula Z_p^* para todo $p \in S^5$ mediante la siguiente aplicación:

$$\mu_{(p,Z)*_0} : \mathbb{R} \to S^5$$
$$t \to \mu_{(p,Z)*_0}(t) = \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} (\mu_{(p,Z)}(t)) = Z_p^*.$$

Ahora, aplicando el anterior desarrollo teórico a cada uno de los elementos de la base de $\mathfrak{g}$, $(X_1, Y_1, X_2, Y_2, W, A_1, A_2, A_3)$, se obtienen los campos buscados.

En efecto, dado $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}$, se calcula $X_{1_p}^*$ para todo $p \in S^5$ como sigue:

$$\exp_{Id.}(tX_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tX_1)^n}{n!} = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(tX_1)^{2k}}{2k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tX_1)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \begin{pmatrix} Cost & 0 & -Sent \\ 0 & 1 & 0 \\ Sent & 0 & Cost \end{pmatrix}$$

y su representación real es

$$\exp_{Id.}(tX_1)=A+iB=\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Cost & 0 & -Sent & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Sent & 0 & Cost & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Cost & 0 & -Sent \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Sent & 0 & Cost \end{pmatrix}.$$

Sea $p\in S^5$, como $S^5\subset \mathbb{C}^3(z^1,z^2,z^3)\cong \mathbb{R}^6(x^1,x^2,x^3,y^1,y^2,y^3)$ donde $z^j=x^j+iy^j$, $j=1,2,3$, se considera que $p=(x_0^1,x_0^2,x_0^3,y_0^1,y_0^2,y_0^3)\in S^5$. Así, se tiene que

$$\exp_{Id.}(tX_1)\cdot p^t=\begin{pmatrix} (Cost)x_0^1-(Sent)x_0^3 \\ x_0^2 \\ (Sent)x_0^1+(Cost)x_0^3 \\ (Cost)y_0^1-(Sent)y_0^3 \\ y_0^2 \\ (Sent)y_0^1+(Cost)y_0^3 \end{pmatrix}$$

y, por ello, que

$$X^*_{1_p}=\tfrac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\mu_{(p,X_1)}(t))=\tfrac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\exp_{Id.}(tX_1)\cdot p^t)=(-x_0^3,0,x_0^1,-y_0^3,0,y_0^1)^t\simeq$$

$$\simeq -x_0^3\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p+x_0^1\frac{\partial}{\partial x^3}\Big|_p-y_0^3\frac{\partial}{\partial y^1}\Big|_p+y_0^1\frac{\partial}{\partial y^3}\Big|_p$$

para todo $p\in S^5$. Por tanto, la expresión real del campo X_1^* es:

$$X_1^*=-x^3\frac{\partial}{\partial x^1}+x^1\frac{\partial}{\partial x^3}-y^3\frac{\partial}{\partial y^1}+y^1\frac{\partial}{\partial y^3}.$$

Como $z^j=x^j+iy^j$ y $\overline{z}^j=x^j-iy^j$, $j=1,2,3$, se tiene que $x^j=\frac{1}{2}(z^j+\overline{z}^j)$ e $y^j=\frac{-i}{2}(z^j-\overline{z}^j)$, $j=1,2,3$, y, como $\frac{\partial}{\partial z^j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}-i\frac{\partial}{\partial y^j}\right)$ y $\frac{\partial}{\partial \overline{z}^j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}+i\frac{\partial}{\partial y^j}\right)$, $j=1,2,3$, se obtiene que $\frac{\partial}{\partial x^j}=\frac{\partial}{\partial z^j}+\frac{\partial}{\partial \overline{z}^j}$ y $\frac{\partial}{\partial y^j}=i\left(\frac{\partial}{\partial z^j}-\frac{\partial}{\partial \overline{z}^j}\right)$, $j=1,2,3$. Así, sustituyendo en la expresión real del campo X_1^* se obtiene su expresión real expresada en coordenadas complejas

$$X_1^*=z^1\frac{\partial}{\partial z^3}-z^3\frac{\partial}{\partial z^1}+\overline{z}^1\frac{\partial}{\partial \overline{z}^3}-\overline{z}^3\frac{\partial}{\partial \overline{z}^1}.$$

La expresión de los campos restantes se calcula de forma análoga.

Finalmente, si se denota la proyección natural por $\pi : SU(3) \to S^5$ y, o denota el origen de S^5 entonces, $Z_o^* = \pi_*(Z_e)$ para cada $Z \in \mathfrak{g}$. Así, en el origen $o = (0,0,1) \in S^5$, se tiene que:

$$\left(A_1^*\right)_o = \left(A_2^*\right)_o = \left(A_3^*\right)_o = 0\,,\; W_o^* = \frac{2}{3} i\left(\frac{\partial}{\partial z^3} - \frac{\partial}{\partial \overline{z}^3}\right),\; \left(X_1^*\right)_o = -\left(\frac{\partial}{\partial z^1} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}^1}\right),$$

$$\left(X_2^*\right)_o = i\left(\frac{\partial}{\partial z^1} - \frac{\partial}{\partial \overline{z}^1}\right),\; \left(Y_2^*\right)_o = -\left(\frac{\partial}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}^2}\right).$$

Ahora, la correspondiente métrica Riemanniana G – invariante g sobre S^5 está únicamente determinada por el hecho de que las relaciones métricas expresadas en (2.51) deben ser satisfechas por los vectores W_o^*, $\left(X_j^*\right)_o$, $\left(Y_j^*\right)_o$, $j = 1,2$. Entonces, se puede encontrar g de una manera indirecta. En efecto, claramente la forma cuadrática

$$g = \lambda \sum_{i=1,2,3} dz^i d\overline{z}^i + \mu\left(\sum_{i=1,2,3} z^i d\overline{z}^i\right)\left(\sum_{j=1,2,3} \overline{z}^j dz^j\right),\; \lambda > 0,\; \lambda + \mu > 0, \quad \mathbf{(2.52)}$$

es una métrica Hermítica $SU(3)$ - invariante sobre $\mathbb{C}^3$. Si se denota también por g la métrica Riemanniana inducida sobre S^5 (esto puede ser considerado ya que $S^5 \cong {}^{SU(3)}\!/_{SU(2)}$, [W], Pág. 125-127) entonces, se obtiene evaluando en el origen $o = (0,0,1) \in S^5$ que

$$g_o = \lambda \sum_{i=1,2,3} dz^i d\overline{z}^i + \mu dz^3 d\overline{z}^3,$$

$$g_o(X_j^*, X_j^*) = g_o(Y_j^*, Y_j^*) = \lambda,\; j = 1,2,\; g_o(W^*, W^*) = \left(\tfrac{4}{9}\right)(\lambda + \mu).$$

Por otro lado, al imponer que las relaciones de (2.51) sean satisfechas, se tiene que $\lambda = 3a^2$ y $\mu = \left(\tfrac{9}{4}\right)c^2 - 3a^2$. Entonces, como en el caso de que $\mu = 0$ se tiene la esfera Riemanniana estándar S^5 con curvatura positiva y constante, se supondrá que $a^2 \neq \left(\tfrac{3}{4}\right)c^2$; es decir que $\mu \neq 0$.

Así, se ha obtenido el tipo 6a) de la lista de clasificación.

Claramente, la transformación $z^{1\prime} = \overline{z}^2$, $z^{2\prime} = -\overline{z}^1$, $z^{3\prime} = \overline{z}^3$ sobre $\mathbb{C}^3$ induce una simetría de orden 4 en el origen o de la variedad (S^5, g). Y, en el caso de que $a^2 = \left(\tfrac{3}{4}\right)c^2$, $\mu = 0$ se tiene que la s – estructura regular inducida por esta simetría dada en el origen no es paralela. Además, notar que no existen s – estructuras no paralelas sobre los espacios S^2, S^3 y S^4 debido al Teorema 2.5.2 y al Teorema 2.5.4, que serán demostrados más adelante en el Apartado 2.5.

C2B) ***El caso hiperbólico***

Sea $\{A_1, A_2, A_3, W, X_1, Y_1, X_2, Y_2\}$ la base del álgebra de Lie $\mathfrak{su}(3)$ que satisface la tabla de multiplicar (2.50). Si ahora se sustituyen X_j por iX_j, Y_j por iY_j, $j = 1,2$, en (2.50), se obtiene la tabla de multiplicar correspondiente al caso hiperbólico. Además, identificando X_1, X_2, Y_1, Y_2, W, A_1, A_2 y A_3, con una base adecuada del álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2,1)$, se tiene que la nueva tabla de multiplicar es satisfecha. Por tanto, el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es isomorfa al álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2,1)$.

Así, dado el par de álgebras de Lie $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ se ha obtenido que su correspondiente variedad homogénea es $SU(2,1)/SU(2)$, la cual es difeomorfa a la subvariedad M del espacio complejo $\mathbb{C}^3(z^1, z^2, z^3)$ dada por la relación $z^1\bar{z}^1 + z^2\bar{z}^2 - z^3\bar{z}^3 = -1$. En efecto, como $SU(2,1)$ se define como el grupo de las matrices en $SL(3,\mathbb{C})$ las cuales dejan invariante la forma Hermítica $-z^1\bar{z}^1 - z^2\bar{z}^2 + z^3\bar{z}^3$ entonces, procediendo de forma análoga a como en [W] Pág. 125-127 se desarrolla el difeomorfismo entre $S^{2n-1} \cong {}^{SU(n)}\!/_{SU(n-1)}$, se obtiene el difeomorfismo buscado.

Continuando ahora de la misma forma que en el caso elíptico, se obtiene el tipo 6b) de la lista de clasificación.

Cuarto Caso de la Proposición 2.3.4.1.8

Se sabe que en este caso existe una base $\{U_1, U_2\}$ de $V^{(i)}$ y un vector $W \in V^{(-1)} \cap V$ tal que

$$\tilde{T}(U_1,U_2) = \mu W\,,\ \tilde{T}(U_1,W) = \lambda\bar{U}_1 + \bar{U}_2\,,\ \tilde{T}(U_2,W) = \lambda\bar{U}_2\,,\ \lambda \geq 0$$

$$g(U_1,\bar{U}_1) = a^2\,,\ g(U_2,\bar{U}_2) = b^2\,,\ g(W,W) = c^2\,,\ g(U_1,\bar{U}_2) = \nu \in \mathbb{C},$$

con el resto de relaciones cero.

Si ahora se realizan, aunque sin cambio en la notación, los tres cambios de base dados por:

1º. $U_1' = \frac{1}{a}U_1$, $U_2' = \frac{1}{ac}U_2$, $W' = \frac{1}{c}W$,
2º. $U_1'' = \frac{1}{b'}U_1'$, $U_2'' = \frac{1}{b'}U_2'$, $W'' = W'$ donde, $g(U_2',\bar{U}_2') = b'^2$,
3º. $U_1''' = U_1'' - (\mathrm{Re}\,\alpha)U_2''$, $U_2''' = U_2''$, $W''' = W''$ donde $g(U_1'',\bar{U}_2'') = \alpha \in \mathbb{C}$,

se obtiene que

$$g(U_1,\bar{U}_1) = a^2\,,\ g(U_2,\bar{U}_2) = g(W,W) = 1\,,\ g(U_1,\bar{U}_2) = \gamma i;\ \gamma^2 < a^2\,, \tag{2.53}$$

donde $\gamma = \mathrm{Im}\,\alpha$, $g(U_1'',\bar{U}_1'') = a'^2$, $a^2 = a'^2 - (\mathrm{Re}\,\alpha)^2$, el resto de relaciones posibles relativas a la métrica son nulas y,

$$\tilde{T}(U_1,U_2) = \mu W\,,\ \tilde{T}(U_j,\bar{U}_k) = 0\,,\ j,k = 1,2 \tag{2.54}$$

$$\tilde{T}(U_1,W)=\lambda\overline{U}_1+\overline{U}_2,\ \tilde{T}(U_2,W)=\lambda\overline{U}_2,\ \lambda\geq 0.$$

Notar que las relaciones relativas a $\tilde{T}$ no han sido modificadas.

Ahora se calcula el álgebra de Lie $\mathfrak{k}$ de todos los endomorfismos reales $A:V^C\to V^C$ tales que $A(S)=A(g)=A(\tilde{T})=0$. Para ello, de forma análoga a como se obtuvieron los resultados en los Lemas 2.3.3.1.4, 2.3.3.1.5 y 2.3.3.1.6 se obtiene que para cualquier $A\in\mathfrak{k}$, de $A(S)=0$,

$$AU_i=\sum_{j=1,2}a_i^jU_j,\ \ A\overline{U}_i=\sum_{j=1,2}\overline{a}_i^j\overline{U}_j,\ \ AW=0,$$

de $A(g)=0$,

$$a^2(a_1^1+\overline{a}_1^1)+i\gamma(\overline{a}_1^2-a_1^2)\overset{(1)}{=}0,\ \ a_2^2+\overline{a}_2^2+i\gamma(a_2^1+\overline{a}_2^1)\overset{(2)}{=}0,$$

$$(a_1^1+\overline{a}_2^2)i\gamma+a_1^2+a^2\overline{a}_2^1\overset{(3)}{=}0, \qquad \textbf{(2.55)}$$

y, de $A(\tilde{T})=0$,

$$(a_1^1+a_2^2)\mu\overset{(4)}{=}0,\ (a_2^1-\overline{a}_2^1)\lambda\overset{(5)}{=}0,\ (a_1^1-\overline{a}_1^1)\lambda\overset{(6)}{=}\overline{a}_2^1,\ (\overline{a}_2^2-a_2^2)\lambda\overset{(7)}{=}a_2^1,$$

$$(a_1^1-\overline{a}_2^2)+\lambda(a_1^2-\overline{a}_1^2)\overset{(8)}{=}0 \qquad \textbf{(2.56)}$$

Para continuar el estudio se diferenciarán dos casos dependiendo de si $\lambda>0$ ó $\lambda=0$.

A) Si $\lambda>0$. Entonces se tiene el siguiente lema:

Lema 2.3.4.1.21

De las relaciones que provienen de $A(\tilde{T})=0$ y de $A(g)=0$ se obtiene

$$a_1^2=a_2^1=a_1^1=a_2^2=0.$$

Y, por tanto, $\mathfrak{k}=(0)$ y para cada s – variedad algebraica dada por (2.53), (2.54), $\tilde{R}=0$.

Demostración

Debido a que $\lambda\neq 0$ de (5) se obtiene que $a_2^1=\overline{a}_2^1$ y, así, igualando (6) y (7) que $a_1^1-\overline{a}_1^1,\ a_2^2-\overline{a}_2^2\in\mathbb{R}$ pero como ambos son complejos puros, se concluye que $a_1^1,\ a_2^2\in\mathbb{R}$.

Por otra parte, aplicando todo esto en (2), se obtiene que $a_2^2=0$. Así, de (8) $a_1^2\in\mathbb{R}$ y $a_1^1=0$ y, entonces, de (6) $\overline{a}_2^1=0$. Por tanto, a partir de (3), $a_1^2=0$.

Así, $\mathfrak{k}=(0)$ y $\tilde{R}=0$.

Si, ahora, se desarrolla la primera identidad de Bianchi sobre $(U_1, U_2, \bar{U}_2)$ y se usa (2.54), se obtiene que $\lambda\mu = 0$ y, así, que $\mu = 0$.

Así, $(V,\ g,\ S,\ 0,\ \tilde{T})$ satisfaciendo (2.53) y (2.54) con $\mu = 0$ es una $s-$variedad algebraica (fácilmente se comprueba que se satisfacen las condiciones i) – vi) del Teorema 1.3.2.) con invariantes $\lambda,\ a,\ \gamma$.

Además, procediendo de forma análoga al Lema 2.3.2.6 se comprueba que siempre se tiene ó $(\mathcal{D}_{\bar{U}_1}R)(U_1,U_2)U_1 \neq 0$ ó $(\mathcal{D}_{U_1}R)(U_1,W)\bar{U}_1 \neq 0$ para $U_1,\ U_2$ elementos fijados de la base de $V^{\mathbb{C}}$ y $W \in V$, por ello, $\mathcal{D}R \neq 0$ y las correspondientes $s-$variedades Riemannianas (M,g) no son localmente simétricas.

Considerando que $U_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_j + iY_j)$, donde $X_j,\ Y_j \in V,\ \ j = 1,2$, utilizando (2.54) y desarrollando de forma análoga a la hecha en el Lema 2.3.3.1.7, se obtiene que la tabla de multiplicar del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ dada por la fórmula (1.2) y en este caso caracterizada por $[X,Y] = -\tilde{T}(X,Y),\ \ X,Y \in V$ es

$$[X_1,X_2] = [Y_1,Y_2] = [X_i,Y_j] = 0,\ i,j = 1,2,$$

$$[X_1,W] = -\lambda X_1 - X_2,\ \ [X_2,W] = -\lambda X_2,\ \ [Y_1,W] = \lambda Y_1 + Y_2,\ \ [Y_2,W] = \lambda Y_2.$$

Además, también se obtiene como en el Lema 2.3.3.1.7 que ahora (2.53) toma la forma:

$$g(X_1,X_1) = g(Y_1,Y_1) = a^2,\ \ g(X_2,X_2) = g(Y_2,Y_2) = g(W,W) = 1,$$

$$g(X_1,X_2) = g(Y_1,Y_2) = 0,\ \ g(Y_1,X_2) = -g(X_1,Y_2) = \gamma,\ \ g(X_1,Y_1) = g(X_2,Y_2) = 0.$$

B) Si $\lambda = 0$. Entonces (2.54) toma la forma

$$\tilde{T}(U_1,U_2) = \mu W,\ \ \tilde{T}(U_j,\bar{U}_k) = 0,\ \ j,k = 1,2 \qquad \textbf{(2.57)}$$
$$\tilde{T}(U_1,W) = \bar{U}_2,\ \ \tilde{T}(U_2,W) = 0.$$

Si ahora se realizan, aunque sin cambio en la notación, los tres cambios de base dados por:

1º. $U_1' = \frac{1}{a}U_1,\ U_2' = \frac{1}{ac}U_2,\ W' = \frac{1}{c}W$,

2º. $U_1'' = \frac{1}{b'}U_1',\ U_2'' = \frac{1}{b'}U_2',\ W'' = W'$ donde, $g(U_2',\bar{U}_2') = b'^2$,

3º. $U_1''' = U_1'' - \alpha U_2'',\ U_2''' = U_2'',\ W''' = W''$ donde $g(U_1'',\bar{U}_2'') = \alpha \in \mathbb{C}$,

se obtiene que (2.57) no ha sido modificada y que ahora (2.53) es

$$g(U_1,\bar{U}_1) = a^2,\ \ g(U_2,\bar{U}_2) = g(W,W) = 1,\ \ g(U_1,\bar{U}_2) = 0, \qquad \textbf{(2.58)}$$

donde, si $g(U_1'',\bar{U}_1'') = a'^2$ entonces, $a^2 = a'^2 - \alpha\bar{\alpha}$. Notar, que así se ha conseguido que $\gamma = 0$ en (2.53).

Las relaciones para calcular el álgebra de Lie $\mathfrak{k}$, (2.55) y (2.56), se basan en (2.53) y (2.54). Ahora es preciso calcularlas sobre (2.57) y (2.58) que no son más que (2.54) con $\lambda = 0$ y (2.53) con $\gamma = 0$. Por tanto, (2.55) y (2.56) se transforman ahora en

$$(a_1^1 + \overline{a}_1^1) \overset{(1')}{=} 0, \quad a_2^2 + \overline{a}_2^2 \overset{(2')}{=} 0, \quad a_1^2 + a^2\overline{a}_2^1 \overset{(3')}{=} 0,$$

$$(a_1^1 + a_2^2)\mu \overset{(4')}{=} 0, \quad a_2^1 \overset{(6',7')}{=} 0, \quad a_1^1 - \overline{a}_2^2 \overset{(8')}{=} 0. \qquad \textbf{(2.59)}$$

Por tanto, siguiendo la demostración del Lema 2.3.4.1.21, se obtiene que $a_1^2 = 0 = a_2^1$, $a_1^1 + a_2^2 = 0$ y que a_1^1, a_2^2 son números complejos puros. Así, el álgebra de Lie $\mathfrak{k}$ está generada por un único endomorfismo B cuya matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Procediendo de forma análoga al Lema 2.3.2.6 se comprueba que siempre se tiene $(\mathcal{D}_{\overline{U}_1} R)(U_1, U_2)U_1 \neq 0$ donde, U_1, U_2 son elementos fijados de la base de V^C, por ello, $\mathcal{D}R \neq 0$ y las correspondientes s – variedades Riemannianas (M, g) no son localmente simétricas.

Para continuar el estudio se distinguirán dos subcasos dependiendo de si $\tilde{R}$ es igual ó distinta de cero.

B1) $\tilde{R} = 0$. Si en este caso se desarrolla la primera identidad de Bianchi sobre $(U_1, U_2, \overline{U}_1)$ y se usa (2.57), se obtiene que $\mu = 0$. Así, $(V,\ g,\ S,\ 0,\ \tilde{T})$ satisfaciendo (2.57) y (2.58) con $\mu = 0$ es una s – variedad algebraica (fácilmente se comprueba que se satisfacen las condiciones i) – vi) del Teorema 1.3.2.) donde el parámetro a es el único invariante. Es decir, se obtiene el mismo tipo de s – variedades algebraicas que en el caso A) pero con $\lambda = \gamma = 0$.

Realización geométrica de los casos A) y B1)

En primer lugar, notar que debido a que $\tilde{R} = 0$, analizar el espacio vectorial $\mathfrak{m}$ es equivalente a analizar el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Se prueba fácilmente que, aunque el centro de $\mathfrak{g}$ es nulo en el caso A), no lo es en el caso B1) entonces, no se puede aplicar la representación adjunta para resolver ambos casos a la vez. Por ello, se considera la foliación dada por $X_1,\ Y_1,\ X_2,\ Y_2$. Puesto que la foliación es de dimensión 4, se toman

$$X_1=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix},\ Y_1=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix},\ X_2=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

$$Y_2=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, W=\begin{pmatrix} w_{11}&w_{12}&w_{13}&w_{14}&0\\ w_{21}&w_{22}&w_{23}&w_{24}&0\\ w_{31}&w_{32}&w_{33}&w_{34}&0\\ w_{41}&w_{42}&w_{43}&w_{44}&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

donde, $w_{ij}\in\mathbb{R},\ i,j=1,2,3,4.$ Ahora, usando la tabla de multiplicar, se calculan los coeficientes indeterminados y se obtiene

$$W=\begin{pmatrix} \lambda&0&0&0&0\\ 0&-\lambda&0&0&0\\ 1&0&\lambda&0&0\\ 0&-1&0&-\lambda&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$\mathfrak{g}=\{x'X_1+y'Y_1+u'X_2+v'Y_2+tW : x',y',u',v',t\in\mathbb{R}\}=$$

$$=\left\{\begin{pmatrix} t\lambda&0&0&0&x'\\ 0&-t\lambda&0&0&y'\\ t&0&t\lambda&0&u'\\ 0&-t&0&-t\lambda&v'\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} : t,x',y',u',v'\in\mathbb{R}\right\}.$$

El siguiente paso es calcular el grupo de Lie G asociado a dicha álgebra. Para ello, se usará la aplicación exponencial $\exp:\mathfrak{g}\to G$ como en los casos anteriores.

Sea $A\in\mathfrak{g}$, entonces

$$\exp(A)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}=\begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & e^{-t\lambda} & 0 & 0 & y \\ te^{t\lambda} & 0 & e^{t\lambda} & 0 & u \\ 0 & -te^{-t\lambda} & 0 & e^{-t\lambda} & v \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\in G .$$

Por tanto, el grupo de Lie G es el grupo formado por todas las matrices de la forma

$$G=\left\{\begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & e^{-t\lambda} & 0 & 0 & y \\ te^{t\lambda} & 0 & e^{t\lambda} & 0 & u \\ 0 & -te^{-t\lambda} & 0 & e^{-t\lambda} & v \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : x,y,u,v,t\in \mathbb{R}\right\}.$$

Además, G es difeomorfo al espacio $\mathbb{R}^5(x,y,u,v,t)$.

A continuación se calcula la métrica Riemanniana G – invariante g sobre $\mathbb{R}^5(x,y,u,v,t)$. Para ello, de forma análoga al Lema 2.3.2.10 o al Lema 2.3.4.1.10, se puede representar la base del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{R}^5(x,y,u,v,t)$, (X_1,Y_1,X_2,Y_2,W) por los campos vectoriales invariantes a izquierda

$$X_1=e^{\lambda t}\left(\frac{\partial}{\partial x}+t\frac{\partial}{\partial y}\right),\;\; Y_1=e^{-\lambda t}\left(\frac{\partial}{\partial y}-t\frac{\partial}{\partial v}\right),\;\; X_2=e^{\lambda t}\frac{\partial}{\partial u},$$

$$Y_1=e^{-\lambda t}\frac{\partial}{\partial v}\ \text{y}\ W=\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \textbf{(2.60)}$$

los cuales satisfacen (2.53).

Ahora, a partir de (2.60) se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial x}=e^{-\lambda t}\left(X_1-tX_2\right),\;\; \frac{\partial}{\partial y}=e^{\lambda t}\left(Y_1+tY_2\right),\;\; \frac{\partial}{\partial u}=e^{-\lambda t}X_2,\;\; \frac{\partial}{\partial v}=e^{\lambda t}Y_2,\;\; \frac{\partial}{\partial t}=W,$$

y usando el producto interior g sobre el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, resolviendo unas sencillas ecuaciones, se obtiene que la métrica Riemanniana invariante sobre G con respecto a las coordenadas $x,\ y,\ u,\ v,\ t$, es de la forma:

$$g=dt^2+e^{-2\lambda t}(tdx-du)^2+e^{2\lambda t}(tdy+dv)^2+a^2(e^{-2\lambda t}dx^2+e^{2\lambda t}dy^2)+2\gamma(dydu-dxdv)$$

donde, λ, a y γ son parámetros reales tales que $\lambda \geq 0$, $a > 0$ y $\gamma^2 < a^2$.

Finalmente, se tiene de forma análoga al Lema 2.3.4.1.11 que la simetría típica s_o de orden 4 en el punto $o \equiv (0,0,0,0,0)$ de $\mathbb{R}^5(x,y,u,v,t)$ es la transformación dada por:

$$x' = -y\,,\ y' = x\,,\ u' = -v\,,\ v' = u\,,\ t' = -t\,.$$

Así, se ha obtenido el tipo 7) de la lista de clasificación.

B2) $\tilde{R} \neq 0$. Es decir, $\tilde{R}(U_i,\bar{U}_j) = \lambda_{ij}B$ para $i,j = 1,2$ donde $\lambda_{ij} \in \mathbb{C}$. Entonces, $\mu \neq 0$. En efecto, si se supone que $\mu = 0$ entonces,

$$\tilde{T}(\tilde{T}(U_1,U_2),\bar{U}_1) = \mu\tilde{T}(W,\bar{U}_1) = -\mu U_2 = 0$$

y, de la primera identidad de Bianchi desarrollada sobre $(U_1,U_2,\bar{U}_i)$ para $i = 1,2$ se obtiene que para $i = 1$, $\lambda_{11} = \lambda_{21} = 0$ y para $i = 2$, $\lambda_{12} = \lambda_{22} = 0$, por tanto, $\tilde{R} = 0$, lo cual es la contradicción buscada. Por otra parte, tomando $i = j = 1$ en el apartado e) de la Proposición 2.3.4.1.9, se obtiene que $\mu - \bar{\mu} = 0$. Así, $\mu \in \mathbb{R}$ y $\mu \neq 0$.

Además, se puede ver fácilmente que cualquier base $\{U_1^*,U_2^*\}$ de $V^{(i)}$ que conserve las relaciones $\tilde{T}(U_1,W) = \bar{U}_2$, $\tilde{T}(U_2,W) = 0$ sólo puede ser de la forma:

$$U_1^* = aU_1 + bU_2\,,\ U_2^* = \bar{a}U_2\,.$$

Entonces, como el signo de μ no varía en (2.57) al realizar el cambio, este es un invariante de $(S,\ g,\ \tilde{T})$. Así, para continuar el estudio habrá que considerar los dos casos siguientes y no equivalentes:

B2A) Caso elíptico. Cuando $\mu < 0$.

B2B) Caso hiperbólico. Cuando $\mu > 0$.

En lo que sigue se desarrollará el caso elíptico ya que, el caso hiperbólico se estudia de forma similar.

Entonces se supone que $\mu = -c^2 < 0$ y se remplazan los vectores U_1 y W por U_1/c y cW. Entonces, en lugar de las relaciones (2.57) y (2.58) se tiene

$$\tilde{T}(U_1,U_2) = -W\,,\ \tilde{T}(U_j,\bar{U}_k) = 0\,,\ j,k = 1,2\ \ \tilde{T}(U_1,W) = \bar{U}_2\,,\ \tilde{T}(U_2,W) = 0\,, \quad \textbf{(2.61)}$$

$$g(U_1,\bar{U}_1) = b^2\,,\ g(U_2,\bar{U}_2) = 1\,,\ g(W,W) = c^2\,,\ g(U_1,\bar{U}_2) = 0, \qquad \textbf{(2.62)}$$

donde $b^2 = a^2/c^2$.

Desarrollando ahora la primera identidad de Bianchi sobre $(U_2,U_1,\bar{U}_1)$ y $(U_1,U_2,\bar{U}_2)$ y, aplicando la Proposición 2.3.4.1.9, se tiene que

$$\tilde{R}(U_1,\bar{U}_1)U_2 + \tilde{R}(\bar{U}_1,U_2)U_1 = \tilde{T}(\tilde{T}(U_2,U_1),\bar{U}_1) = -U_2\,,$$

$$\tilde{R}(U_2,\bar{U}_2)U_1 + \tilde{R}(\bar{U}_2,U_1)U_2 = \tilde{T}(\tilde{T}(U_1,U_2),\bar{U}_2) = 0\,.$$

Y, por tanto,

$$\lambda_{11}BU_2 - \lambda_{21}BU_1 = -U_2\,,\ \ \lambda_{22}BU_1 - \lambda_{12}BU_2 = 0\,,$$

donde, $BU_1 = iU_1$, $BU_2 = -iU_2$. En consecuencia, $\lambda_{11} = -i$, $\lambda_{21} = \lambda_{22} = \lambda_{12} = 0$ y, por tanto, se obtiene que

$$\tilde{R}(U_1,\bar{U}_1) = -iB\,,\ \ \tilde{R}(U_2,\bar{U}_2) = 0\,,\ \ \tilde{R}(U_i,\bar{U}_j) = 0\,,\ \ i \neq j\,,\ \ i,j = 1,2\,. \quad \textbf{(2.63)}$$

Así, $(V,\ g,\ S,\ \tilde{R},\ \tilde{T})$ satisfaciendo (2.61), (2.62) y (2.63) es una *s* – variedad algebraica (fácilmente se comprueba que se satisfacen las condiciones i) – vi) del Teorema 1.3.2.) donde b y c son invariantes y $\mathfrak{h} = \mathfrak{k}$ (se comprueba viendo que $B(\tilde{R}) = 0$). Además, $\mathcal{D}R \neq 0$ excepto cuando $c^2 = 1$. Por tanto, cuando $c^2 \neq 1$ las correspondientes *s* – variedades Riemannianas no son localmente simétricas.

Considerando que $U_j = {}^{1}\!/_{\sqrt{2}}(X_j + iY_j)$, donde $X_j,\ Y_j \in V$, $j = 1,2$, utilizando (2.61), (2.63) y desarrollando de forma análoga a la hecha en el Lema 2.3.3.1.7, se obtiene que la tabla de multiplicar del álgebra de Lie $\mathfrak{g} = V + \mathfrak{h}$ dada por la fórmula (1.2) es

$$[X_1,Y_1] = -B\,,\ [X_1,X_2] = W\,,\ [X_1,Y_2] = 0\,,\ [Y_1,X_2] = 0\,,\ [Y_1,Y_2] = -W\,,\ [X_2,Y_2] = 0\,,$$

$$[X_1,W] = -X_2,\ \ [Y_1,W] = Y_2,\ \ [X_2,W] = 0\,,\ \ [Y_2,W] = 0\,,$$

$$[X_1,B] = Y_1,\ \ [Y_1,B] = -X_1,\ \ [X_2,B] = -Y_2\,,\ \ [Y_2,B] = X_2\,,\ \ [W,B] = 0\,.$$

Además, también se demuestra, como en el Lema 2.3.3.1.7, que ahora (2.62) toma la forma:

$$g(X_1,X_1) = g(Y_1,Y_1) = b^2\,,\ \ g(X_2,X_2) = g(Y_2,Y_2) = 1,\ \ g(W,W) = c^2\,, \textbf{(2.64)}$$

$$g(X_1,X_2) = g(Y_1,Y_2) = 0,\ \ g(Y_1,X_2) = g(X_1,Y_2) = 0\,,\ \ g(X_1,Y_1) = g(X_2,Y_2) = 0\,.$$

Realización geométrica

Para su desarrollo se considera la foliación dada por X_2, Y_2 y *W*. Puesto que esta es de dimensión 3, se toman

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \ Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \ W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_1=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & 0\\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & 0\\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ Y_1=\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & 0\\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & 0\\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\ \text{y}\ B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0\\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0\\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

donde, $x_{ij}, y_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1,2,3.$ Ahora, usando la tabla de multiplicar, se calculan los coeficientes indeterminados y se obtiene

$$X_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ Y_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\ \text{y}\ B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Así,

$$\mathfrak{g}=\left\{\left(\begin{array}{ccc|c} & & & x\\ & \mathfrak{so}(3) & & y\\ & & & z\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) : x, y, z \in \mathbb{R}\right\}.$$

El siguiente paso es calcular el grupo de Lie G asociado a dicha álgebra de Lie. Para ello, se usará la aplicación exponencial $\exp : \mathfrak{g} \to G$. Sea $A \in \mathfrak{g}$, entonces

$$\exp(A)=\left(\begin{array}{ccc|c} & & & x'\\ & SO(3) & & y'\\ & & & z'\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \in G .$$

Por tanto, el grupo de Lie G es el formado por todas las matrices de la forma

$$G=\left\{\left(\begin{array}{ccc|c} & & & x'\\ & SO(3) & & y'\\ & & & z'\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) : x', y', z' \in \mathbb{R}\right\}.$$

Además, como de forma análoga a la desarrollada en el Lema 2.3.4.1.10, se tiene que

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial x},\ Y_2 = \frac{\partial}{\partial y},\ W = \frac{\partial}{\partial z},\ X_1 = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z},$$

$$Y_1 = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y},\ \text{y}\ B = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y},$$

se puede representar $\mathfrak{g} = V + \mathfrak{h}$ mediante transformaciones infinitesimales del espacio Cartesiano $\mathbb{R}^3(x, y, z)$. Así, el correspondiente grupo de Lie $\tilde{G}$, consiste en todos los movimientos euclídeos de $\mathbb{R}^3$ que conservan la orientación (giros y translaciones) y el subgrupo $\tilde{H}$, correspondiente a la subálgebra de Lie $\mathfrak{h}$, está formado por todos los giros alrededor del eje *z*.

A continuación se calcula la métrica Riemanniana *G* – invariante *g* sobre *M*. Para ello, se considera el grupo G' de todas las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & x \\ b_1 & b_2 & b_3 & y \\ c_1 & c_2 & c_3 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde,

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \neq 0 \cdot$$

Entonces, $\tilde{G}$ es isomorfo al subgrupo *G* de G' caracterizado por la condición

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \in SO(3)$$

y $\tilde{H}$ es isomorfo al subgrupo de todas las matrices de la forma

$$\exp(tB) = \begin{pmatrix} Cost & -Sent & 0 & 0 \\ Sent & Cost & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así, de forma análoga a la desarrollada en el Lema 2.3.3.1.8 se obtiene que el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y su subálgebra $\mathfrak{h}$ pueden ser ahora representadas por los campos vectoriales G'-invariantes.

$$X_1=-\left(a_1\frac{\partial}{\partial a_3}+b_1\frac{\partial}{\partial b_3}+c_1\frac{\partial}{\partial c_3}\right)+\left(a_3\frac{\partial}{\partial a_1}+b_3\frac{\partial}{\partial b_1}+c_3\frac{\partial}{\partial c_1}\right),$$

$$Y_1=a_3\frac{\partial}{\partial a_2}+b_3\frac{\partial}{\partial b_2}+c_3\frac{\partial}{\partial c_2}-\left(a_2\frac{\partial}{\partial a_3}+b_2\frac{\partial}{\partial b_3}+c_2\frac{\partial}{\partial c_3}\right),$$

$$B=a_2\frac{\partial}{\partial a_1}+b_2\frac{\partial}{\partial b_1}+c_2\frac{\partial}{\partial c_1}-\left(a_1\frac{\partial}{\partial a_2}+b_1\frac{\partial}{\partial b_2}+c_1\frac{\partial}{\partial c_2}\right),$$

$$X_2=a_1\frac{\partial}{\partial x}+b_1\frac{\partial}{\partial y}+c_1\frac{\partial}{\partial z},\ \ Y_2=a_2\frac{\partial}{\partial x}+b_2\frac{\partial}{\partial y}+c_2\frac{\partial}{\partial z},\ \ W=a_3\frac{\partial}{\partial x}+b_3\frac{\partial}{\partial y}+c_3\frac{\partial}{\partial z},$$

los cuales son tangentes a *G* a lo largo de *G* ya que, al satisfacer la anterior tabla de multiplicar pertenecen a $\mathfrak{g}$.

Por otra parte, de forma análoga a como se hizo en la interpretación geométrica del caso B2) del estudio del segundo caso de la Proposición 2.3.4.1.8, se calculan formas diferenciales lineales sobre G', obteniendo que:

$$w_1'=a_3da_2+b_3db_2+c_3dc_2,\ \ w_2'=a_3da_1+b_3db_1+c_3dc_1,$$

$$w_3'=a_2da_1+b_2db_1+c_2dc_1,\ \ \eta_1'=a_1dx+b_1dy+c_1dz,$$

$$\eta_2'=a_2dx+b_2dy+c_2dz,\ \ \eta_3'=a_3dx+b_3dy+c_3dz\,.$$

Así, si se denotan por w_i, η_i, $i=1,2,3$ las correspondientes formas inducidas sobre *G*, se tiene que w_i, η_i, $i=1,2,3$ son las formas diferenciales lineales invariantes sobre *G*, las cuales son duales a los campos vectoriales X_j, Y_j, W, B de *G*, $j=1,2$; es decir, que

$$\eta_1(X_2)=\eta_2(Y_2)=\eta_3(W)=1,\ \ w_1(Y_1)=w_2(X_1)=w_3(B)=1,$$

y el resto de combinaciones son cero a lo largo de la variedad *G*. (Notar, que las formas w_i' no son invariantes sobre G').

Debido a que la imagen de B se encuentra en la isotropía y a (2.64) se obtiene, la forma diferencial

$$\tilde{g}=b^2((w_1)^2+(w_2)^2)+(\eta_1)^2+(\eta_2)^2+c^2(\eta_3)^2,$$

la cual es semidefinida positiva, *G* – invariante y $Ad(H)$- invariante. Por ello, esta induce una métrica Riemanniana *G* – invariante *g* sobre el espacio homogéneo G/H, la cual satisface las relaciones métricas (2.64).

Si se denota por $t(3)$ el grupo de las translaciones de $\mathbb{R}^3(x,y,z)$ y por $|\times$ el producto semidirecto entonces, $G=t(3)|\times SO(3)$. Además, *M* denota el fibrado de la esfera unidad sobre $\mathbb{R}^3(x,y,z)$; es decir, $M=\mathbb{R}^3(x,y,z)\times S^2$, donde $S^2=\{[\alpha,\beta,\gamma]\in\mathbb{R}^3:\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1\}$. En efecto, si se consideran las acciones

$$\rho_1 : (t(3) |\times SO(3)) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \text{ y } \rho_2 : SO(3) \times S^2 \to S^2$$

dadas por:

$$\rho_1((\tilde{g},(a,b,c,1))) = \rho_1\left(\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & x \\ b_1 & b_2 & b_3 & y \\ c_1 & c_2 & c_3 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},(a,b,c,1)\right)\right) = \tilde{g}\cdot(a,b,c,1)^t,$$

$$\rho_2((g,(\alpha,\beta,\gamma))) = \rho_2\left(\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix},(\alpha,\beta,\gamma)\right)\right) = g\cdot(\alpha,\beta,\gamma)^t$$

entonces, se tiene que $\rho : G\times M \to M$ dada por

$$\rho(\tilde{\tilde{g}}\ ; p) = \rho((\tilde{g},g)\ ;((a,b,c,1),(\alpha,\beta,\gamma))) = (\tilde{g}\cdot(a,b,c,1)^t; g\cdot(\alpha,\beta,\gamma)^t) =$$
$$= (\rho_1((\tilde{g},(a,b,c,1))); \rho_2((g,(\alpha,\beta,\gamma)))) = \tilde{\tilde{g}}\cdot p$$

es una acción transitiva a la izquierda. Sea $p_o = ((0,0,0,1);(0,0,1)) \cong$ $\cong (0,0,0\ ;\ 0,0,1) \in M$. Como fácilmente se prueba que H es el grupo de isotropía en p_o, se puede aplicar el Teorema 3.62 de [W] y, así, obtener que la aplicación $\mu : G/H \to M$ dada por

$$\mu(\tilde{\tilde{g}}H) = \rho_{\tilde{\tilde{g}}}(p_o) = \rho(\tilde{\tilde{g}},p_o) = \tilde{\tilde{g}}\cdot p_o = ((x,y,z,1);(a_3,b_3,c_3)) \cong (x,y,z;a_3,b_3,c_3)$$

es un difeomorfismo. Además, como $g\in SO(3)$ se tiene que $(a_3)^2+(b_3)^2+(c_3)^2=1$ y, así, al poder identificar $a_3,\ b_3,\ c_3$ con $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ se asegura que se está ante el difeomorfismo buscado.

Por otra parte, como $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \in SO(3)$ se tienen las siguientes propiedades asociadas al grupo G:

$$(a_1)^2+(a_2)^2+(a_3)^2=1,\ a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0,$$
$$(b_1)^2+(b_2)^2+(b_3)^2=1,\ a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3=0,$$
$$(c_1)^2+(c_2)^2+(c_3)^2=1,\ b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3=0$$

y

$$(a_1)^2+(b_1)^2+(c_1)^2=1,\ a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0,$$
$$(a_2)^2+(b_2)^2+(c_2)^2=1,\ a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3=0,$$

$$(a_3)^2 + (b_3)^2 + (c_3)^2 = 1, \ a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = 0.$$

Así, aplicando las seis primeras propiedades del grupo *G*, fácilmente se tiene que

$$(\eta_1)^2 + (\eta_2)^2 + c^2 (\eta_3)^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + (c^2 - 1)(a_3 dx + b_3 dy + c_3 dz)^2.$$

Si ahora se derivan $(a_3)^2 + (b_3)^2 + (c_3)^2 = 1$, $a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 = 0$, $a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = 0$, se obtiene

$$2a_3 da_3 + 2b_3 db_3 + 2c_3 dc_3 \overset{(1)}{=} 0, \ a_3 da_1 + b_3 db_1 + c_3 dc_1 \overset{(2)}{=} -(a_1 da_3 + b_1 db_3 + c_1 dc_3),$$

$$a_3 da_2 + b_3 db_2 + c_3 dc_2 \overset{(3)}{=} -(a_2 da_3 + b_2 db_3 + c_2 dc_3)$$

y, así, se tiene que

$$(w_1)^2 + (w_2)^2 = (a_3 da_2 + b_3 db_2 + c_3 dc_2)^2 + (a_3 da_1 + b_3 db_1 + c_3 dc_1)^2 \overset{(1)(2)(3)}{=}$$

$$\overset{(1)(2)(3)}{=} (-a_2 da_3 - b_2 db_3 - c_2 dc_3)^2 + (-a_1 da_3 - b_1 db_3 - c_1 dc_3)^2 + (a_3 da_3 + b_3 db_3 + c_3 dc_3)^2 =$$

$$= (da_3)^2 + (db_3)^2 + (dc_3)^2.$$

Entonces, la correspondiente métrica Riemanniana sobre *M* es inducida por la siguiente forma diferencial cuadrática sobre $\mathbb{R}^6$:

$$g = dx^2 + dy^2 + dz^2 + b^2(d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2) + (c^2 - 1)(\alpha dx + \beta dy + \gamma dz)^2.$$

Por tanto, se ha obtenido el tipo 8a) de la lista de clasificación. Notar, que para $c^2 = 1$ lo que se tiene es el producto estándar Riemanniano $E^3 \times S^2$, el cual es localmente simétrico.

Procediendo en el caso hiperbólico de forma similar al caso elíptico, se obtiene el tipo 8b) de la lista de clasificación. Pero en este caso, a diferencia del caso elíptico, no hay ningún espacio que sea localmente simétrico.

Finalmente, en ambos casos se tiene, de forma análoga al Lema 2.3.4.1.11, que la simetría típica s_o de orden 4 en el punto $(0, 0, 0; 0, 0, 1) \in M$ está inducida por la siguiente transformación sobre $\mathbb{R}^6$ dada por:

$$x' = -y, \ y' = x, \ z' = -z, \ \alpha' = \beta, \ \beta' = -\alpha, \ \gamma' = \gamma.$$

2.3.4.2. Estudio del sistema de valores propios maximal B.

Sea *V* un espacio vectorial 5 – dimensional, V^C su espacio complexificado y sea $S: V^C \to V^C$ una transformación lineal real cuyo sistema de valores propios es $(\Theta, \Theta^2, \Theta^3, \Theta^4, \Theta^5)$ donde $\Theta = e^{2\pi i/6}$. También se puede decir que el sistema de valores propios es de la forma $(\Theta_1, \bar{\Theta}_1, \Theta_2, \bar{\Theta}_2, -1)$ donde, $\Theta_1 = \Theta^2$, $\Theta_2 = \Theta$.

Además, sean g un producto interior sobre V tal que $S(g) = g$ y, $\tilde{T} \neq 0$ un tensor de tipo $(1,2)$ tal que $\tilde{T}(X,Y) = -\tilde{T}(Y,X)$ y $S(\tilde{T}) = \tilde{T}$. Si se denotan con los mismos símbolos las extensiones lineales de S, g y $\tilde{T}$ al espacio $V^C = V \oplus_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, se puede encontrar una base de vectores propios de S, $(U_1, U_2, \bar{U}_1, \bar{U}_2, W)$ en V^C donde, $W \in V$ y $SU_1 = \Theta_1 U_1$, $SU_2 = \Theta_2 U_2$, $S(W) = -W$.

La condición $S(g) = g$ significa que $g(SZ, SZ') = g(Z,Z')$ para cualesquiera $Z, Z' \in V^C$. Si se aplica, se obtiene, de forma análoga al Lema 2.3.3.1.1:

$$g(U_1,\bar{U}_1) = a^2,\ g(U_2,\bar{U}_2) = b^2,\ g(W,W) = c^2 \tag{2.65}$$

donde, $a,b,c \in \mathbb{R}$ y el resto de relaciones posibles son cero.

Además, aplicando la propiedad de antisimetría $\tilde{T}(X,Y) = -\tilde{T}(Y,X)$, se obtiene que $\tilde{T}(U_j,U_j) = \tilde{T}(\bar{U}_j,\bar{U}_j) = 0$, $j = 1,2$. Y, si se usa la propiedad $S(\tilde{T}) = \tilde{T}$, cuyo significado es que $\tilde{T}(SZ,SZ') = S(\tilde{T}(Z,Z'))$ para cualesquiera $Z, Z' \in V^C$, se obtiene de forma análoga al Lema 2.3.3.1.2:

$$\tilde{T}(U_1,U_2) = \alpha W,\ \tilde{T}(U_1,W) = \beta \bar{U}_2,\ \tilde{T}(U_2,W) = \gamma \bar{U}_1,\ \tilde{T}(U_1,\bar{U}_2) = \delta U_2 \tag{2.66}$$

donde, $\delta \neq 0$ y al menos uno de los parámetros α, β, γ no es cero. En efecto, si $\delta = 0$ en (2.66) entonces, el sistema reducido de relaciones características Σ_B^r asociado al sistema de valores propios maximal B no contiene la relación $\Theta_1 \cdot \bar{\Theta}_2 = \Theta_2$ ya que, $\tilde{T}(SU_1, S\bar{U}_2) = \Theta_1\bar{\Theta}_2\tilde{T}(U_1,\bar{U}_2) = \Theta_2\tilde{T}(U_1,\bar{U}_2) = S\tilde{T}(U_1,\bar{U}_2)$; es decir, ya que es la relación asociada a $\tilde{T}(U_1,\bar{U}_2)$ y, como tomando $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta$ en Σ_B^r se obtiene Σ_A, por la Proposición 1.5.10 se concluye que realizar el estudio del sistema B cuando $\delta = 0$ es equivalente a realizar el estudio del sistema A, que ya ha sido analizado en el Apartado 2.3.4.1. Si ahora se supone que $\alpha = \beta = \gamma = 0$ en (2.66) entonces, Σ_B^r no contiene las relaciones $\Theta_1 \cdot \Theta_2 = -1$, $\Theta_1 \cdot (-1) = \bar{\Theta}_2$ y $\Theta_2 \cdot (-1) = \bar{\Theta}_1$; entonces, tomando $\Theta_1 = -1$, $\Theta_2 = i$ en Σ_B^r, se obtiene Σ_D y, así, por la Proposición 1.5.10 se concluye que realizar el estudio del sistema B cuando $\alpha = \beta = \gamma = 0$ es equivalente a realizar el estudio del sistema D, que ya ha sido analizado. Notar que, como eliminar una de las tres relaciones ($\Theta_1 \cdot \Theta_2 = -1$ ó $\Theta_1 \cdot (-1) = \bar{\Theta}_2$ ó $\Theta_2 \cdot (-1) = \bar{\Theta}_1$) implica eliminar las tres entonces, suponer que uno de los parámetros (α ó β ó γ) es cero implica que los otros dos también lo son. Por tanto, ha concluido el estudio de los parámetros de la torsión.

Ahora se calcula el álgebra de Lie $\mathfrak{k}$ de todos los endomorfismos reales $A : V^C \to V^C$ tales que $A(S) = A(g) = A(\tilde{T}) = 0$. Para ello, de forma análoga a como se obtuvieron los resultados en los Lemas 2.3.3.1.4, 2.3.3.1.5 y 2.3.3.1.6 se obtiene, para cualquier $A \in \mathfrak{k}$ que, de $A(S) = 0$,

$$AU_i = a_i U_i,\quad A\bar{U}_i = \bar{a}_i \bar{U}_i,\quad AW = wW,$$

de $A(g) = 0$,

$$a_i + \overline{a}_i \overset{(1)}{=} 0, \quad w = 0,$$

y, de $A(\tilde{T}) = 0$,

$$(a_1 + a_2)\alpha \overset{(2)}{=} 0, \quad (a_1 - \overline{a}_2)\beta \overset{(3)}{=} 0, \quad (a_2 - \overline{a}_1)\gamma \overset{(4)}{=} 0, \quad (a_1 + \overline{a}_2 - a_2)\delta \overset{(5)}{=} 0 .$$

En consecuencia, si a (5) se le impone (1), se obtiene $(a_1 - 2a_2)\delta \overset{(6)}{=} 0$ así, como $\delta \neq 0$, $a_1 - 2a_2 \overset{(7)}{=} 0$. Por otra parte, como $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$, de (2) ó (3) ó (4) se obtiene que $a_1 + a_2 \overset{(8)}{=} 0$. Ahora, de (7) y (8), se tiene que $a_1 = a_2 = 0$, que junto con $w = 0$ indica que $\mathfrak{k} = 0$. Por tanto, $\tilde{R} = 0$ para cualquier s – variedad algebraica que satisfaga (2.65) y (2.66).

Si se desarrolla la primera identidad de Bianchi sobre $(U_1, U_2, \overline{U}_1)$, $(U_1, U_2, \overline{U}_2)$ y $(U_1, \overline{U}_2, W)$ y, se usa (2.66), se sigue $(-\alpha\overline{\beta} + \delta\overline{\delta})U_2 = 0$, $\alpha\gamma U_1 = 0$ y $\delta\gamma = 0$ respectivamente. Así, se obtiene que $\gamma = 0$ y $\alpha\overline{\beta} = \delta\overline{\delta} > 0$. Por tanto, $\alpha\overline{\beta} = \rho^2$ donde, $\rho = |\,\delta\,|$ es un número real positivo.

Reemplazando U_2 por $\overline{\beta}U_2$ se obtiene que (2.65) y (2.66) son ahora:

$$\tilde{T}(U_1, U_2) = \alpha\overline{\beta}W = \rho^2 W, \ \tilde{T}(U_1, W) = \overline{U}_2, \ \tilde{T}(U_2, W) = \gamma\overline{U}_1,$$

$$\tilde{T}(U_1, \overline{U}_2) = \left(\delta\beta \middle/ \overline{\beta}\right) U_2 = \rho e^{i\varphi} U_2,$$

y

$$g(U_1, \overline{U}_1) = a^2, \ g(U_2, \overline{U}_2) = \beta\overline{\beta}b^2 = b'^2, \ g(W, W) = c^2$$

además, de la última relación relativa a la torsión se sigue que $\left|\delta\beta / \overline{\beta}\right| = |\,\delta\,| = \rho$.

Volviendo a realizar un nuevo cambio de base pero reemplazando ahora U_1 y U_2 por $(1/\rho)e^{-i\varphi/3}U_1$ y $(1/\rho)e^{i\varphi/3}U_2$ respectivamente, se obtiene

$$\tilde{T}(U_1, U_2) = W, \ \tilde{T}(U_1, W) = \overline{U}_2, \ \tilde{T}(U_2, W) = 0, \ \tilde{T}(U_1, \overline{U}_2) = U_2 \qquad \textbf{(2.67)}$$

y

$$g(U_1, \overline{U}_1) = \frac{1}{\rho^2}a^2 = a'^2, \ g(U_2, \overline{U}_2) = \frac{1}{\rho^2}b'^2 = b''^2, \ g(W, W) = c^2 .$$

Por último, reemplazando U_2 y W por $(1/c)U_2$ y $(1/c)W$ respectivamente, se obtiene que las relaciones (2.67) permanecen inalteradas y que

$$g(U_1, \overline{U}_1) = a'^2, \ g(U_2, \overline{U}_2) = \frac{1}{c^2}b''^2 = b^2, \ g(W, W) = 1 . \qquad \textbf{(2.68)}$$

Así, $(V, g, S, 0, \tilde{T})$ satisfaciendo (2.67) y (2.68) es una s – variedad algebraica (fácilmente se comprueba que se satisfacen las condiciones i) – vi) del Teorema 1.3.2.) y los parámetros a, b son invariantes.

Además, procediendo de forma análoga al Lema 2.3.2.6 se comprueba que $(\mathcal{D}_{\bar{U}_1} R)(U_1,U_2)\bar{U}_1 \neq 0$ para U_1, U_2 elementos fijados de la base de V^C y, así, las correspondientes s – variedades Riemannianas (M, g) no son localmente simétricas.

Así, se tiene que la tabla de multiplicar del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es:

$$[U_1,U_2] = -W\ ,\ [U_1,W] = -\bar{U}_2,\ [U_1,\bar{U}_2] = -U_2,\ [U_2,W] = 0,\ [U_i,\bar{U}_i] = 0,\ i = 1,2\,.$$

Considerando ahora que $U_j = X_j + iY_j$, donde $X_j,\ Y_j \in V,\ \ j = 1,2$, y desarrollando en la tabla anterior, se obtiene que la tabla de multiplicar del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ dada por la fórmula (1.2) es:

$$[X_1,X_2] = -\tfrac{1}{2}(X_2 + W),\ [X_1,Y_2] = \tfrac{1}{2}Y_2,\ [X_1,W] = -X_2,$$
$$[Y_1,X_2] = -\tfrac{1}{2}Y_2,\ [Y_1,Y_2] = \tfrac{1}{2}(W - X_2),\ [Y_1,W] = Y_2,$$
$$[X_1,Y_1] = 0,\ [X_2,Y_2] = [X_2,W] = [Y_2,W] = 0\,.$$

Además, también se obtiene (de forma análoga a la hecha en el Lema 2.3.3.1.7) que

$$g(X_1,X_1) = g(Y_1,Y_1) = \tfrac{1}{2}a^2,\ \ g(X_2,X_2) = g(Y_2,Y_2) = \tfrac{1}{2}b^2,\ \ g(W,W) = 1$$

y el resto de relaciones son cero.

Considerando un nuevo cambio dado por $X_1' = X_1 - Y_1/\sqrt{3}$, $Y_1' = X_1 + Y_1/\sqrt{3}$, $X_2' = 2X_2 + W$, $Y_2' = X_2 - \sqrt{3}Y_2 - W$, $W' = X_2 + \sqrt{3}Y_2 - W$, se obtiene que

$$[X_1',X_2'] = -X_2',\ [X_1',Y_2'] = 0,\ [X_1',W'] = W',$$
$$[Y_1',X_2'] = -X_2',\ [Y_1',Y_2'] = Y_2',\ [Y_1',W'] = 0,$$
$$[X_1',Y_1'] = 0,\ [X_2',Y_2'] = [X_2',W'] = [Y_2',W'] = 0$$

y, que

$$g(X_1',X_1') = g(Y_1',Y_1') = \tfrac{2}{3}a^2,\ \ g(X_2',X_2') = g(Y_2',Y_2') = g(W',W') = 2b^2 + 1,$$
$$g(X_1',Y_1') = \tfrac{1}{3}a^2,\ \ g(X_2',Y_2') = g(X_2',W') = b^2 - 1,\ \ g(Y_2',W') = 1 - b^2 \quad \textbf{(2.69)}$$

donde, el resto de relaciones son cero.

Realización geométrica

En primer lugar, notar que debido a que $\tilde{R} = 0$, analizar el espacio vectorial $\mathfrak{m}$ es equivalente a analizar el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Aunque, se prueba fácilmente que el centro de $\mathfrak{g}$ es nulo, no se aplicará la representación adjunta. Así, se considera la foliación dada por X_2', Y_2' y W'. Puesto que la foliación es de dimensión 3, se toman

$$X_2' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ Y_2' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ W' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_1' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } Y_1' = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde, $a_{ij},\ b_{ij} \in \mathbb{R},\ i,j = 1,2,3.$ Ahora, usando la tabla de multiplicar, se calculan los coeficientes indeterminados y se obtiene

$$X_1' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } Y_1' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} -(u+v) & 0 & 0 & x' \\ 0 & u & 0 & y' \\ 0 & 0 & v & z' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : u, v, x', y', z' \in \mathbb{R} \right\}.$$

El siguiente paso es calcular el grupo de Lie G asociado a dicha álgebra. Para ello, se usará la aplicación exponencial $\exp : \mathfrak{g} \to G$.

Sea $A \in \mathfrak{g}$, entonces

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \begin{pmatrix} e^{-(u+v)} & 0 & 0 & x'e^{-(u+v)} \\ 0 & e^u & 0 & y'e^u \\ 0 & 0 & e^v & z'e^v \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-(u+v)} & 0 & 0 & x \\ 0 & e^u & 0 & y \\ 0 & 0 & e^v & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G.$$

Por tanto, el grupo de Lie G es el grupo formado por todas las matrices de la forma

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} e^{-(u+v)} & 0 & 0 & x \\ 0 & e^{u} & 0 & y \\ 0 & 0 & e^{v} & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : u, v, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Además G es difeomorfo al espacio $\mathbb{R}^5(u,v,x,y,z)$ ya que claramente

$$\begin{pmatrix} e^{-(u+v)} & 0 & 0 & x \\ 0 & e^{u} & 0 & y \\ 0 & 0 & e^{v} & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong (u,v,x,y,z) \text{ para todo } u,v,x,y,z \in \mathbb{R}.$$

A continuación, se calcula la métrica G – invariante g sobre $\mathbb{R}^5(u,v,x,y,z)$. Para ello, de forma análoga al desarrollo de los Lemas 2.3.2.10 y 2.3.2.11 se obtiene que $X_1', Y_1', X_2', Y_2', W' \in \mathfrak{g}$ pueden ser identificados respectivamente con los campos vectoriales invariantes a izquierda sobre G

$$X_1' = \frac{\partial}{\partial v},\ Y_1' = \frac{\partial}{\partial u},\ X_2' = e^{-(u+v)}\frac{\partial}{\partial x},\ Y_2' = e^{u}\frac{\partial}{\partial y},\ W' = e^{v}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Y, así, a partir de (2.69) se obtiene que el producto interior g sobre $V = \mathfrak{g}$ induce la siguiente métrica Riemanniana invariante sobre $\mathbb{R}^5(u,v,x,y,z)$:

$$g = \tfrac{2}{3}a^2(du^2 + dudv + dv^2) + (2b^2+1)(e^{2(u+v)}dx^2 + e^{-2u}dy^2 + e^{-2v}dz^2) +$$
$$+2(b^2-1)(e^{v}dxdy + e^{u}dxdz - e^{-(u+v)}dydz).$$

Finalmente, de forma análoga al Lema 2.3.4.1.11, se tiene que la simetría típica s_o de orden 6 en el punto $o \equiv (0,0,0,0,0)$ de $\mathbb{R}^5(u,v,x,y,z)$ es la transformación dada por:

$$u' = v,\ v' = -(u+v),\ x' = y,\ y' = -z,\ z' = x.$$

Más tarde, en el Corolario 2.4.3.2 se prueba que no hay simetrías de orden 4 sobre este espacio.

Así, se ha obtenido la lista de clasificación para la dimensión $n = 5$.

2.4. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.2.1

2.4.1. El Álgebra de las Isometrías

Sea $(V, g, S, \tilde{R}, \tilde{T})$ una s – variedad algebraica, $\mathfrak{g} = V + \mathfrak{h}$ el álgebra de Lie estándar definida por (1.2) y $M = G/H$ la correspondiente s – variedad

Riemanniana simplemente conexa. Identificando V con el espacio tangente T_pM donde p es el punto inicial de M, se denotará por $\mathfrak{I}(M)$ el grupo de las isometrías de M, [K-N, Vol. I, Págs. 161, 239] y por $\mathfrak{I}(M,p)$ el grupo de isotropía de $\mathfrak{I}(M)$ en p, [W, Pág.123]. Finalmente, se denotará por $\hat{H}$ el grupo de isotropía lineal en p, obtenido a partir de la representación lineal α de $\mathfrak{I}(M,p)$ en $V=T_pM$. Además, como esta representación lineal es fiel, $\hat{H}$ es isomorfo a $\mathfrak{I}(M,p)$, [W, Pág.123].

Ahora, considerando el tensor diferencia $\mathcal{D}$ y el tensor curvatura Riemanniano R sobre V dados por la fórmula del Lema 2.1.2 y por la fórmula del Lema 1.2.1.9 respectivamente se tienen las proposiciones y teoremas siguientes.

Proposición 2.4.1.1

$\hat{H}$ es el grupo de todas las transformaciones lineales de V conservando los tensores g, R y $\mathcal{D}^nR$ para $n=1,2,...$ Además, el grupo L de todas las transformaciones lineales de V conservando g, $\tilde{R}$ y $\tilde{T}$ es un subgrupo de $\hat{H}$.

Demostración

Como M es simplemente conexa, completa y analítica, la primera afirmación se sigue de los resultados de [K-N, Capítulo VI] teniendo en cuenta que $\mathcal{D}^nR=\nabla^nR$ para $n=1,2,...$ debido ello al Lema 1.2.1.10. En efecto, aplicando el Corolario 7.3 y el Teorema 3.6 de dicho capítulo y como la conexión de Levi-Civita no tiene torsión, se sigue que existe un único isomorfismo afín $f\in\mathfrak{U}(M)=\mathfrak{I}(M)$, tal que $f(p)=p$.

Ahora, la segunda afirmación se sigue de aplicar la fórmula del Lema 2.1.2 y la fórmula del Lema 1.2.1.9. En efecto, si una transformación $P\in GL(V)$ conserva g y $\tilde{T}$ entonces, también conserva $\mathcal{D}$ debido a la fórmula del Lema 2.1.2. Más aún, si P conserva $\tilde{R}$ entonces, también conserva R, $\mathcal{D}R$, $\mathcal{D}^2R$,... debido a la fórmula del Lema 1.2.1.9.

Proposición 2.4.1.2

El álgebra de Lie $\hat{\mathfrak{h}}$ de $\hat{H}$ está formada por todos los endomorfismos $A\in\mathfrak{gl}(V)$ que anulan g, R y $\mathcal{D}^nR$ para $n=1,2,...$. Además, el álgebra de Lie

$$\mathfrak{l}=\{B\in\mathfrak{gl}(V):B(g)=B(\tilde{T})=B(\tilde{R})=0\}$$

es una subálgebra de $\hat{\mathfrak{h}}$ y, en consecuencia, $\mathfrak{h}\subset\hat{\mathfrak{h}}$.

Proposición 2.4.1.3

Si $\hat{\mathfrak{h}}=\mathfrak{l}$ entonces, el álgebra de Lie asociada a $\mathfrak{I}(M)$ es isomorfa al álgebra de Lie $\hat{\mathfrak{g}}=V+\mathfrak{l}$ (descomposición como subespacios vectoriales) con la multiplicación dada por las reglas:

$$[X,Y] = (-\tilde{T}(X,Y), -\tilde{R}(X,Y)), \quad X,Y \in V, \ [A,X] = AX, \quad A \in \mathfrak{l}, \quad X \in V,$$
$$[A,B] = AB - BA, \quad A,B \in \mathfrak{l}.$$

Demostración

Por un lado, es inmediato ver que $\hat{\mathfrak{g}}$ es efectivamente un álgebra de Lie.

Por otra parte, se denota por $\hat{G}$ el grupo de Lie simplemente conexo con álgebra de Lie $\hat{\mathfrak{g}}$ y por L^o el subgrupo conexo de $\hat{G}$ determinado por $\mathfrak{l}$. Obsérvese que en realidad, L^o es isomorfo a la componente unidad del grupo L. Entonces, de forma análoga a la demostración del Teorema 8 de [K.1] ó a la demostración del Teorema 1.3.17, se puede ver que $\hat{G}/L^o$ es un espacio homogéneo reductivo con una métrica Riemanniana $\hat{G}$ - invariante y más aún, que este espacio homogéneo Riemanniano es isométrico a (M,g). Por tanto, se puede suponer que $\hat{G}$ actúa sobre (M,g) a la izquierda y $\hat{G} \subset \mathfrak{I}(M)$. Además, como $\hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{l}$ se obtiene que el subgrupo de isotropía L^o es isomorfo a la componente de la unidad del grupo $\hat{H}$ y, por tanto, que también lo es a la componente de la unidad del grupo $\mathfrak{I}(M,p)$ ya que α es un isomorfismo. Así, se deduce que $\hat{G}$ es isomorfo a la componente de la unidad del grupo $\mathfrak{I}(M)$ y, por tanto, que sus álgebras de Lie asociadas son isomorfas.

Proposición 2.4.1.4

Denotando para $k = 0,1,\ldots$

$$\hat{\mathfrak{h}}_k = \{A \in \mathfrak{gl}(V) : A(g) = A(R) = A(\mathcal{D}R) = \cdots = A(\mathcal{D}^k R) = 0\}$$

se tiene que si $\hat{\mathfrak{h}}_k = \mathfrak{l}$ para algún *k* entonces, $\hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{l}$.

La demostración es obvia ya que para cada *k* fijo se tiene que $\hat{\mathfrak{h}}_k \supset \hat{\mathfrak{h}} \supset \mathfrak{l}$.

Los resultados que se enuncian en los siguientes Teoremas han sido obtenidos tras realizar unos cálculos que aunque rutinarios son muy largos y tediosos. Por este motivo, sus demostraciones no serán completamente desarrolladas.

Teorema 2.4.1.5

Las subálgebras de Lie $\hat{\mathfrak{h}}$ y $\mathfrak{l}$ coinciden en todos los espacios simétricos generalizados de dimensión 3 y 4 de la lista de la clasificación. Más específicamente:

1. Para los espacios de dimensión 3 y orden 4 se obtiene que

$$\hat{\mathfrak{h}}_0 = \mathfrak{l} = (0).$$

2. Para los espacios de dimensión 4 y orden 3 se obtiene que

$$\hat{\mathfrak{h}}_0 \supset \hat{\mathfrak{h}}_1 = \mathfrak{l} \cong \mathfrak{so}(2).$$

Proposición 2.4.1.6

Excepto en ciertos subespacios excepcionales de las correspondientes variedades parametrizadas donde $\hat{\mathfrak{h}}_0 \neq \mathfrak{l}$ y $\hat{\mathfrak{h}}_1 = \mathfrak{l}$, en cada tipo de espacios de dimensión 5 de la lista de la clasificación, se obtiene que $\hat{\mathfrak{h}}_0 = \mathfrak{l}$.

Como consecuencia, las subálgebras de Lie $\hat{\mathfrak{h}}$ y $\mathfrak{l}$ siempre coinciden.

Para expresar explícitamente el álgebra de Lie $\hat{\mathfrak{h}}$ sobre V se usará la base canónica de V^C, $\{U_1, \bar{U}_1, U_2, \bar{U}_2, W\}$; es decir, la misma base para la cual los tensores asumían la forma canónica. Así, se tiene que:

Teorema 2.4.1.7

Las subálgebras de las s – variedades algebraicas de dimensión 5 están dadas explícitamente por:

Tipo 1) $\hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{so}(2) \approx \mathfrak{u}(2)$ ya que, dado $A \in \hat{\mathfrak{h}}$ se tiene que

$$AU_1 = \sum_{j=1,2} a_1^j U_j + s\bar{U}_2, \quad AU_2 = \sum_{j=1,2} a_2^j U_j - s\bar{U}_1, \quad AW = 0$$

donde, $\left(a_i^j\right) \in \mathfrak{su}(2)$, $s \in \mathbb{R}$.

Tipo 2)

A) Si $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$ entonces $\hat{\mathfrak{h}} = (0)$.

B) Si $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, $\beta > 0$ entonces $\hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{so}(2)$ ya que, dado $A \in \hat{\mathfrak{h}}$ se tiene que

$$AU_1 = rU_2, \quad AU_2 = -rU_1, \quad AW = 0$$

donde, $r \in \mathbb{R}$.

C) Si $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, $\beta = 0$ entonces $\hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{so}(2)$ ya que, dado $A \in \hat{\mathfrak{h}}$ se tiene que

$$AU_1 = rU_2 + s\bar{U}_2, \quad AU_2 = -rU_1 - s\bar{U}_1, \quad AW = 0$$

donde, $r, s \in \mathbb{R}$.

Tipo 3) $\hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{so}(2)$ ya que, dado $A \in \hat{\mathfrak{h}}$ se tiene que

$$AU_1 = rU_2, \quad AU_2 = -rU_1, \quad AW = 0$$

donde, $r \in \mathbb{R}$.

Tipo 4)

A) Si $\lambda + \bar{\lambda} \neq 0$, $\nu \neq 0$ entonces $\hat{\mathfrak{h}} = (0)$.

B) Si $\lambda+\bar{\lambda}=0$, $\nu=0$, $b'^2\neq 1$ entonces $\hat{\mathfrak{h}}=\mathfrak{so}(2)$ ya que, dado $A\in\hat{\mathfrak{h}}$ se tiene que

$$AU_1=irU_1,\ AU_2=-irU_2,\ AW=0$$

donde, $r\in\mathbb{R}$.

C) Si $\lambda+\bar{\lambda}\neq 0$, $\nu=0$, $b'^2=1$ entonces $\hat{\mathfrak{h}}=\mathfrak{so}(2)\oplus\mathfrak{so}(2)$ ya que, dado $A\in\hat{\mathfrak{h}}$ se tiene que

$$AU_1=riU_1+si\bar{U}_2,\ AU_2=-riU_2-si\bar{U}_1,\ AW=0$$

donde, $r,s\in\mathbb{R}$.

Tipo 5)

A) Si $a\neq b$ entonces $\hat{\mathfrak{h}}=\mathfrak{so}(2)$ ya que, dado $A\in\hat{\mathfrak{h}}$ se tiene que

$$AU_1=irU_1,\ AU_2=-irU_2,\ AW=0$$

donde, $r\in\mathbb{R}$.

B) Si $a=b$, entonces $\hat{\mathfrak{h}}=\mathfrak{so}(2)\oplus\mathfrak{so}(2)$ ya que, dado $A\in\hat{\mathfrak{h}}$ se tiene que

$$AU_1=riU_1+si\bar{U}_2,\ AU_2=-riU_2-si\bar{U}_1,\ AW=0$$

donde, $r,s\in\mathbb{R}$.

Tipo 6) El resultado coincide con el del *tipo 1).*

Tipo 7)

A) Si $\lambda\neq 0$ entonces $\hat{\mathfrak{h}}=(0)$.

B) Si $\lambda=0$ entonces $\hat{\mathfrak{h}}=\mathfrak{so}(2)$ ya que, dado $A\in\hat{\mathfrak{h}}$ se tiene que

$$AU_1=irU_1,\ AU_2=-irU_2,\ AW=0$$

donde, $r\in\mathbb{R}$.

Tipo 8) $\hat{\mathfrak{h}}=\mathfrak{so}(2)$ ya que, dado $A\in\hat{\mathfrak{h}}$ se tiene que

$$AU_1=irU_1,\ AU_2=-irU_2,\ AW=0$$

donde, $r\in\mathbb{R}$.

Tipo 9) $\hat{\mathfrak{h}}=(0)$.

Demostración

Como ya se indicó anteriormente, los cálculos a realizar para la obtención de los resultados enunciados, aunque metódicos, son largos y tediosos, por ello, sólo se desarrollará la obtención del *tipo 4)* B).

Como en este caso $\tilde{R}=0$, se tiene que

$$\hat{\mathfrak{h}} \overset{Prop.\ 2.4.1.6}{=} \mathfrak{l} = \{A \in \mathfrak{gl}(V) : A(g) = A(\tilde{T}) = A(\tilde{R}) = 0\} = \{A \in \mathfrak{gl}(V) : A(g) = A(\tilde{T}) = 0\}.$$

Suponiendo que $W = U_3$ y dado $A \in \hat{\mathfrak{h}}$, para $i = 1,2,3$, $j = 1,2$ se expresa como

$$AU_i = a_1^i U_1 + a_2^i U_2 + a_3^i \bar{U}_1 + a_4^i \bar{U}_2 + a_5^i U_3,\ \ A\bar{U}_j = \overline{AU_j},$$

donde, $a_5^i \in \mathbb{R}$, $a_k^i \in \mathbb{C}$, $k = 1,2,3,4$.

Ahora, aplicando la condición $A(g) = 0$, de la misma forma que en el Apartado 2.3, se obtiene que

$$AU_1 = a_1^1 U_1 + a_5^1 U_3,\ \ AU_2 = a_2^2 U_2 + b^2 a_5^1 U_3,\ \ AU_3 = -a_5^1 (U_1 + b^2 U_2 + \bar{U}_1 + \bar{U}_2).$$

Y, aplicando la condición $A(\tilde{T}) = 0$, siguiendo también el método usado en el Apartado 2.3, se concluye que

$$AU_1 = irU_1,\ \ AU_2 = -irU_2,\ \ AU_3 = AW = 0.$$

2.4.2. Irreducibilidad

En lo que sigue, $\mathfrak{I}^o(M)$ denotará la componente unidad del grupo de las isometrías $\mathfrak{I}(M)$.

A partir del Teorema 3.5 de [K-N, Capítulo VI] y del Teorema 1.4.5 se obtiene el teorema siguiente.

Teorema 2.4.2.1

Si $M = M_0 \times M_1 \times \cdots \times M_k$ es la descomposición de De Rham de un espacio simétrico Riemanniano generalizado simplemente conexo *M* entonces, los factores de la descomposición de De Rham también son espacios simétricos generalizados y

$$\mathfrak{I}^o(M) \approx \mathfrak{I}^o(M_0) \times \mathfrak{I}^o(M_1) \times \cdots \times \mathfrak{I}^o(M_k).$$

Proposición 2.4.2.2

Los espacios simétricos generalizados de dimensión 3 y orden 4 de la lista de la clasificación son irreducibles.

Demostración

Debido al Teorema 10 de [K.1] ó al Teorema 2.1.1 se sabe que los espacios simétricos generalizados de dimensión menor que 3 son todos localmente simétricos. Por tanto, se tiene que cualquier espacio simétrico generalizado reducible de dimensión 3 debe ser localmente simétrico y, así, se tiene la contradicción buscada.

Proposición 2.4.2.3

Los espacios simétricos generalizados de dimensión 4 y orden 3 de la lista de la clasificación son irreducibles.

Demostración

Sea M (simplemente conexa) un espacio de esta clase tal que $M = M_1 \times M_2$.

Aplicando el Teorema 2.4.1.5 y la Proposición 2.4.1.3 se obtiene que $\dim \mathfrak{T}^o(M) = 5$.

Como M no es localmente simétrica, M_1 y M_2 no pueden tener dimensión 2. Así, se supondrá que $\dim M_1 = 3$ y $\dim M_2 = 1$. Por tanto, M_1 es de orden 4 y aplicando el Teorema 2.4.1.5 y la Proposición 2.4.1.3 se obtiene que $\dim \mathfrak{T}^o(M_1) = 3$.

Por otro lado, como $\dim \mathfrak{T}^o(M_2) = 1$ y debido al Teorema 2.4.2.1 se sabe que $\mathfrak{T}^o(M) \approx \mathfrak{T}^o(M_1) \times \mathfrak{T}^o(M_2)$, se obtiene que $\dim \mathfrak{T}^o(M) = 4$ y así, se sigue la contradicción buscada.

Proposición 2.4.2.4

Un espacio simétrico generalizado M reducible y simplemente conexo de dimensión 5 siempre satisface que $\dim \mathfrak{T}^o(M) = 6$ ó, equivalentemente, que $\hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{so}(2)$.

Demostración

Sea M un espacio de esta clase tal que $M = M_1 \times M_2$.

Debido al Teorema 2.4.2.1 se sabe que $\mathfrak{T}^o(M) \approx \mathfrak{T}^o(M_1) \times \mathfrak{T}^o(M_2)$.

Si se supone que $\dim M_1 = 3$ y $\dim M_2 = 2$ entonces, el orden de M_1 es 4 y M_2 es un espacio simétrico. Por tanto, como en la demostración anterior $\dim \mathfrak{T}^o(M_1) = 3$. Además, usando el Teorema 2.1.1 ó el Teorema 10 de [K.1], se prueba fácilmente que $\dim \mathfrak{T}^o(M_2) = 3$.

Si se supone que $\dim M_1 = 4$ y $\dim M_2 = 1$ entonces, el orden de M_1 es 3 y, como en la demostración anterior, $\dim \mathfrak{T}^o(M_1) = 5$ y $\dim \mathfrak{T}^o(M_2) = 1$.

Además, como el álgebra de Lie $\hat{\mathfrak{g}}$ puede poseer una descomposición $\hat{\mathfrak{g}} = \hat{\mathfrak{g}}_1 \oplus \hat{\mathfrak{g}}_2$, se tiene la proposición siguiente.

Proposición 2.4.2.5

Todos los espacios simétricos generalizados de dimensión 5 de la lista de clasificación son irreducibles.

Demostración

Debido a la Proposición 2.4.2.4 sólo será necesario analizar los tipos 2B), 3), 4B), 5A), 7B) y 8) del Teorema 2.4.1.7.

Siguiendo el desarrollo realizado en el Apartado 2.3 para obtener los diferentes tipos de espacios, se observa fácilmente que

para el tipo 3): $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$,

para el tipo 5A): $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$ ó $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(2,1) \oplus \mathfrak{so}(2,1)$,

para el tipo 8): $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(3) | \oplus\, t(3)$ ó $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(2,1) | \oplus\, t(3)$ ($|\oplus$ indica suma semi-directa)

y, que para los tipos 2B), 4B) y 7B), si se calcula el álgebra de Lie $\hat{\mathfrak{g}}$ mediante la Proposición 2.4.1.3, se comprueba que $\hat{\mathfrak{g}}$ no posee una descomposición en suma directa de la forma indicada en la prueba de la Proposición 2.4.2.3.

2.4.3. Los Diferentes Espacios Simétricos Generalizados no son Isométricos

Teorema 2.4.3.1

En dimensión 5, dos espacios simétricos generalizados cualesquiera pertenecientes a tipos diferentes de la lista de la clasificación son siempre no isométricos.

Demostración

Una condición necesaria para que dos espacios M y M' de la lista de la clasificación sean isométricos es que $\mathfrak{T}^{o}(M) \approx \mathfrak{T}^{o}(M')$ ó que $\hat{\mathfrak{g}} \approx \hat{\mathfrak{g}}'$ y $\hat{\mathfrak{h}} \approx \hat{\mathfrak{h}}'$.

Así, si $\hat{\mathfrak{h}} \not\approx \hat{\mathfrak{h}}'$ en la tabla dada en el Teorema 2.4.1.7, necesariamente los tipos correspondientes no son isométricos. Si en dicha tabla se tiene que $\hat{\mathfrak{h}} \approx \hat{\mathfrak{h}}'$ entonces, calculando por medio de la Proposición 2.4.1.3 las correspondientes álgebras $\hat{\mathfrak{g}}$ y $\hat{\mathfrak{g}}'$, se comprueba directamente que $\hat{\mathfrak{g}} \not\approx \hat{\mathfrak{g}}'$.

Corolario 2.4.3.2

Los espacios simétricos generalizados de dimensión 5 y del Tipo 9 de la lista de la clasificación son de orden 6 ya que no pueden ser de orden 4.

Ahora, hay que probar que dos espacios simétricos generalizados pertenecientes al mismo tipo pero con diferentes parámetros nunca son isométricos. Desafortunadamente, probar esto implicaría afrontar unas dificultades técnicas enormes. Por ello, el estudio será limitado a la obtención del resultado siguiente: "*excepto en cada clase canónica, los parámetros son "invariantes infinitesimales" de la "variedad Riemanniana"* "; es decir, que dos espacios simétricos generalizados del mismo tipo con parámetros infinitesimales "cerrados" nunca son isométricos. A continuación, se aclarará el significado exacto de esta afirmación.

Sea $\mathfrak{T}$ una clase canónica de un espacio simétrico generalizado en particular. En ésta, la variedad subyacente M es la misma para todos los espacios de $\mathfrak{T}$ y se tienen sobre M varias métricas g dependiendo de un cierto número de parámetros $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$. Debido a su construcción, los espacios de la clase $\mathfrak{T}$ están en correspondencia inyectiva con ciertas s – variedades algebraicas dadas sobre el espacio T_oM y además se puede suponer que todas estas s – variedades algebraicas tienen en común una base canónica $\{Z_1,\ldots,Z_n\}$ en el espacio complexificado de T_oM.

En lo que sigue, se denota por $Diff(M,o)$ el conjunto de todos los difeomorfismos $\sigma : M \to M$ que mantienen fijo el punto o y se elige un elemento $(M,g)\in\mathfrak{T}$.

Definición 2.4.3.3

Se denomina **deformación de (M,g)** a la familia (M,g_t,σ_t), $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ donde, $(M,g_t)\in\mathfrak{T}$, $\sigma_t\in Diff(M,o)$ y se satisfacen las condiciones siguientes:

a) Existen $\lambda_1(t),\ldots,\lambda_k(t)$ funciones diferenciables tales que para cada t, g_t es la métrica correspondiente a los parámetros $\lambda_1(t),\ldots,\lambda_k(t)$ y $g_o=g$.

b) σ_o es la identidad y para cada t, σ_t es una isometría de (M,g) sobre (M,g_t).

c) La aplicación $t\to\sigma_{t*_o}$ es un camino diferenciable en $GL(T_oM)$.

Nota 2.4.3.4

Si $h_t=\sigma_{t*_o}$ para cada t, se consideran los campos vectoriales g_t, R_t, $(\nabla R)_t,\ldots,etc$ sobre la variedad (M,g_t) y se denotan de la misma forma sus valores en el punto inicial o. Como $(\nabla R)_t$, $(\nabla^2 R)_t,\ldots,etc$ son iguales a $(\mathcal{D}R)_t$, $(\mathcal{D}^2R)_t,\ldots,etc$, debido al Lema 1.2.1.10, y (M,g_t,σ_t) es una deformación, se tiene que h_t es un camino diferenciable en $GL(T_oM)$ y que

$$h_t(g)=g_t,\ \ h_t(R)=R_t,\ \ h_t(\nabla R)=(\nabla R)_t,\ldots,etc. \qquad \textbf{(2.70)}$$

Así, se puede enunciar y demostrar el Teorema siguiente.

Teorema 2.4.3.5

Para cada clase $\mathfrak{T}$ del Teorema de clasificación, los correspondientes parámetros son invariantes infinitesimales de la estructura Riemanniana en el sentido siguiente: dado un espacio $(M,g)\in\mathfrak{T}$ con parámetros iniciales $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ y una deformación (M,g_t,σ_t), se tiene que las funciones $\lambda_1(t),\ldots,\lambda_k(t)$ son constantes.

Demostración

Dada una base canónica $\{Z_1,\ldots,Z_n\}\in T_o^C M$ para cada s – variedad algebraica $(T_oM,\ g_t,\ S_t,\ \tilde{R}_t,\ \tilde{T}_t)$ correspondiente a los parámetros $\lambda_1(t),\ldots,\lambda_k(t)$, se escriben las relaciones que expresan $g_t,\ R_t,\ \mathcal{D}R_t,\ldots$ en términos de la base $\{Z_1,\ldots,Z_n\}$. Obsérvese que éstas involucran a los parámetros $\lambda_1(t),\ldots,\lambda_k(t)$.

Debido a (2.70) se obtienen estas mismas relaciones si se expresan los tensores $g_t,\ R_t,\ \mathcal{D}R_t,\ldots$ con respecto a la base $\{h_t^{-1}Z_1,\ldots,h_t^{-1}Z_n\}$.

Derivando ahora estas últimas relaciones, se tienen nuevas fórmulas en función de los vectores $h_t^{-1}Z_i$, sus derivadas $dh_t^{-1}Z_i/dt$, los parámetros $\lambda_i(t)$ y sus derivadas $d\lambda_i(t)/dt$.

Entonces, realizando unos cálculos, metódicos pero extensos, se obtiene para cada tipo canónico por separado, que las relaciones que expresan g y R con respecto a $\{h_t^{-1}Z_1,\ldots,h_t^{-1}Z_n\}$ y las derivadas de éstas, implican $(d\lambda_i(t)/dt)=0$ para $i=1,\ldots,k$.

2.5. S – ESTRUCTURAS NO PARALELAS SOBRE ESPACIOS SIMÉTRICOS

A lo largo de este apartado se probará que es cierta la conjetura enunciada en la Nota de [K.1, Pág. 147].

Definición 2.5.1

Una ***s* – estructura regular** $\{s_x\}$ sobre una variedad Riemanniana (M,g) se dice **paralela** si $\nabla S=0$ y **no paralela** si $\nabla S\neq 0$.

Como se indica en la Nota 1.4.3 y la Nota 1.2.1.2, todo espacio simétrico Riemanniano (M,g) tiene una *s* – estructura paralela; la dada por las familias de simetrías geodésicas.

Por otro lado, el Teorema 2.1.3 dice que un espacio (M,g) admitiendo una *s* – estructura paralela es siempre localmente simétrico.

Todo esto motiva la conjetura enunciada en [K.1] que afirma:

"Existen s – estructuras no paralelas sobre variedades simétricas Riemannianas"

Para probar que esta conjetura es cierta se debe encontrar algún ejemplo. Para ello, se irán analizando la obtención de los distintos espacios simétricos generalizados de dimensión 2, 3, 4 y 5.

A partir del Teorema 2.1.1, la Nota 1.4.3, la Nota 1.2.1.2, el Teorema 1.5.8 y que el único sistema de valores propios maximal para la dimensión 2 es $(-1,-1)$, se concluye el teorema siguiente. (El sistema $(-1,-1)$ se ha obtenido utilizando el método aplicado en la Proposición 2.3.3.1).

Teorema 2.5.2

Los espacios simétricos Riemannianos de dimensión 2 sólo admiten s – estructuras regulares paralelas.

Así, será necesario buscar ejemplos en las dimensiones 3, 4 y 5. Para ello, se aplicarán los resultados siguientes.

Como se indica en el Teorema 1.2.3.9 y la Nota 1.2.3.10, cada variedad simétrica Riemanniana (M,g) con una s – estructura no paralela, tiene la propiedad de que su variedad cubrimiento universal asociada $(\tilde{M},\tilde{g})$ es simétrica y tiene una s – estructura no paralela. Así, se puede limitar el estudio a los espacios simplemente conexos.

Además, dada $(M,g,\{s_x\})$ una s – variedad Riemanniana reducible y simplemente conexa donde, (M,g) es simétrico y $\{s_x\}$ no es paralelo; es decir,

$$(M,g,\{s_x\})=(M_1,g_1,\{s_u^1\})\times(M_2,g_2,\{s_v^2\}),$$

se tiene que (M_1,g_1) y (M_2,g_2) son espacios simétricos y al menos una de las s – estructuras $\{s_u^1\}$, $\{s_v^2\}$ no es paralela. Por tanto, las s – variedades Riemannianas reducibles y las s – variedades algebraicas reducibles no serán esenciales en este estudio.

Nota 2.5.3

Existen s – variedades Riemannianas irreducibles que son reducibles como variedades Riemannianas. Sirva de ejemplo, la variedad $E^3\times S^2(r)$ que será desarrollada en el Teorema 2.5.5.

Así mismo, por el Teorema 1.5.8 se sabe que si un espacio simplemente conexo (M,g) admite una s – estructura no paralela $\{s_x\}$ entonces, también admite una s – estructura no paralela $\{s'_x\}$ correspondiente a un sistema de valores propios maximal.

En consecuencia, todos los espacios simétricos esenciales admitiendo s – estructuras no paralelas surgen de un sistema de valores propios irreducible y maximal diferente de $(-1,\dots,-1)$.

Así, no se analizarán los casos eliminados en el Apartado 2.3 debido a la obtención de s – variedades algebraicas reducibles, y sí se revisarán aquellos en los que la s – variedad Riemanniana correspondiente no es paralela y se eliminó algún caso por ser localmente simétrico.

Los distintos casos a analizar, aparecen sólo en la dimensión 5 y en conexión con los tipos 4), 6a) y 8a) de la lista de la clasificación. En particular, son el caso B2 y el caso C2A cuando $\mu = 0$ correspondientes al estudio del tercer caso de la Proposición 2.3.4.1.8 y el caso B2A cuando $c^2 = 1$ correspondiente al estudio del cuarto caso de la Proposición 2.3.4.1.8. Así, se concluye que:

Teorema 2.5.4

Los espacios simétricos Riemannianos de dimensión 3 y 4 sólo admiten s – estructuras regulares paralelas.

Teorema 2.5.5

Todos los espacios simétricos Riemannianos simplemente conexos de dimensión 5 admitiendo s – estructuras regulares no paralelas son E^5, $S^5(r)$ y $E^3 \times S^2(r)$. Más específicamente:

a) Sobre el espacio E^5 se obtienen s – estructuras regulares no paralelas $\{s_x^\rho\}$ de orden 4 dependiendo de un parámetro real $\rho > 0$, de la forma siguiente:

Si se identifica E^5 con el espacio $\mathbb{C}^2(z,w) \times \mathbb{R}(t)$ se obtiene, como en el tipo 4 de la lista de la clasificación, una simetría σ_o en el punto $o = (0,0;0)$ dada por las relaciones

$$z' = iw, \quad w' = iz, \quad t' = -t .$$

Además, si para cada $\rho > 0$ se considera el grupo de las transformaciones transitivo y simplemente conexo G_ρ dado por las relaciones

$$z' = e^{i\rho t_o} z + z_o, \quad w' = e^{-i\rho t_o} w + w_o, \quad t' = t + t_o ,$$

se tiene que el conjunto $\{s_x^\rho : x \in E^5\}$ coincide con el conjunto $\{g \circ \sigma_o \circ g^{-1} : g \in G_\rho\}$.

b) Sobre el espacio $S^5(r)$ se obtiene una s – estructura regular no paralela $\{s_x\}$ de orden 4, de la forma siguiente:

Si se identifica $S^5(r)$ con la subvariedad del espacio euclídeo complejo $\mathbb{C}^3(z^1, z^2, z^3)$ que satisface la relación $z^1\overline{z}^1 + z^2\overline{z}^2 + z^3\overline{z}^3 = r^2$ se obtiene, como en el tipo 6a de la lista de la clasificación, una simetría σ_o en el punto inicial $o = (0,0,r) \in S^5(r)$ dada por las relaciones

$$z^1{}' = \overline{z}^2, \quad z^2{}' = -\overline{z}^1, \quad z^3{}' = \overline{z}^3 .$$

Además, como $S^5(r) = SU(3)/SU(2)$ se tiene que el conjunto $\{s_x : x \in S^5(r)\}$ coincide con el conjunto $\{g \circ \sigma_o \circ g^{-1} : g \in SU(3)\}$.

c) Sobre el espacio $E^3 \times S^2(r)$ se obtiene una s – estructura regular no paralela $\{s_x\}$ de orden 4, de la forma siguiente:

Se identifica $E^3 \times S^2(r)$ con el fibrado de las esferas sobre el espacio base $E^3(x,y,z)$ determinado como el conjunto de los pares $(m,\mathfrak{t})$, donde $m \in E^3$ y $\mathfrak{t} \in T_m(E^3)$, $|\mathfrak{t}| = r$. Se considera el grupo de todos los movimientos euclídeos en E^3 que conservan la orientación, $I^e(E^3)$, y su primer grupo de prolongación $J^1(I^e(E^3))$ actuando sobre el fibrado de las esferas $E^3 \times S^2(r)$. Entonces, identificando de una manera natural el fibrado tangente $T(E^3)$ con el espacio $E^6(x,y,z;\alpha,\beta,\gamma)$, se puede identificar el espacio $E^3 \times S^2(r)$ con la subvariedad de E^6 dada por la relación $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = r^2$. Finalmente, considerando como en el tipo 8a de la lista de la clasificación, la transformación sobre E^6 dada por las relaciones

$$x' = -y, \quad y' = x, \quad z' = -z, \quad \alpha' = \beta, \quad \beta' = -\alpha, \quad \gamma' = \gamma,$$

se tiene que la transformación inducida σ_o sobre $E^3 \times S^2(r)$ es una simetría de orden 4 de esta subvariedad en el punto $(0,0,0;0,0,r)$. Por tanto, la s – estructura buscada $\{s_x : x \in E^3 \times S^2(r)\}$ coincide con el conjunto $\{g \circ \sigma_o \circ g^{-1} : g \in J^1(I^e(E^3))\}$.

3. CLASIFICACIÓN DE LOS ESPACIOS HOMOGÉNEOS NATURALMENTE REDUCTIVOS DE DIMENSIÓN 5

Este capítulo está dedicado al estudio del artículo de O. Kowalski y L. Vanhecke [K-V.3], cuyas técnicas serán de gran utilidad para el desarrollo de la clasificación de los espacios de la misma naturaleza en la dimensión *6*.

3.1. INTRODUCCIÓN

Los espacios homogéneos naturalmente reductivos han sido estudiados por numerosos autores como una generalización natural de los espacios simétricos Riemannianos. Así, D'Atri y Ziller en [D'A-Z] han desarrollado una teoría general con muchos ejemplos y, D'Atri y Nickerson han probado que todos los espacios naturalmente reductivos son espacios cuyas simetrías locales geodésicas conservan el volumen (ver [D'A] y [D'A-Ni]).

Otros autores, han dirigido su atención al estudio de la relación existente entre los espacios naturalmente reductivos y los espacios Riemannianos Conmutativos (en el sentido de I. M. Gelfand), que también generalizan los espacios simétricos. Para estudiar su geometría, estos comenzaron realizando la clasificación de los espacios naturalmente reductivos en bajas dimensiones. Así, los espacios naturalmente reductivos de dimensión 3 han sido clasificados por F. Tricerri y L. Vanhecke en [T-V]. Además, O. Kowalski en [K.4] encontró la misma clasificación, aunque en un contexto diferente, y además, probó que los espacios naturalmente reductivos y los espacios conmutativos forman la misma clase en dimensión 3. Por otra parte, O. Kowalski y L. Vanhecke en [K-V.1] y [K-V.2] dan la clasificación de los espacios naturalmente reductivos y de los espacios conmutativos en dimensión 4, donde, de nuevo, se ve que ambas clases vuelven a ser la misma.

En [K-V.3] los autores dan una clasificación (local) de los espacios naturalmente reductivos en dimensión cinco y, además, prueban que todo espacio naturalmente reductivo de dimensión cinco es un espacio conmutativo en el sentido de I. M. Gelfand. Este hecho, da una nueva evidencia de que la conjetura general "*Todo espacio naturalmente reductivo es un espacio de Gelfand*", es cierta. Sin embargo, el recíproco de esta conjetura no es cierto debido a la existencia de un grupo de Heisenberg generalizado, el cual es un espacio de Gelfand de dimensión seis pero no un espacio naturalmente reductivo. ([T-V, Pág. 104], [Ka])

Para realizar el estudio de [K-V.3] se recordaran primero ciertas definiciones y resultados relativos de espacios reductivos y naturalmente reductivos y, posteriormente se desarrollará la clasificación. Finalmente, se probará la conmutatividad de cada uno de los espacios del Teorema de la Clasificación.

3.2. PRELIMINARES

Sea (M,g) una variedad homogénea Riemanniana tal que el grupo de las isometrías $\mathfrak{I}(M)$ actúa transitivamente sobre *M*. Como se sabe que el subgrupo de isotropía de $\mathfrak{I}(M)$ en $0 \in M$ es compacto; entonces, si $G \subset \mathfrak{I}(M)$ es cualquier subgrupo de Lie conexo actuando transitivamente sobre *M*, se tiene que el grupo de isotropía *H* es cerrado en *G* y, que el grupo adjunto $Ad_G H$ tiene clausura compacta en $GL(\mathfrak{g})$. Entonces, si *G* actúa de manera efectiva sobre el espacio de clases G/H por [P, Pág. 213] *g* es considerada como una métrica Riemanniana $G-$invariante sobre G/H.

Como el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de *G* admite un producto interior positivo $Ad_G(H)$-invariante se puede considerar la descomposición ortogonal $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} + \mathfrak{h}$, donde $\mathfrak{h}$ es el álgebra de Lie de *H* y $\mathfrak{m} = (\mathfrak{h})^{\perp}$ es su complemento ortogonal en $\mathfrak{g}$. Además, se supondrá que esta descomposición es reductiva; es decir, que $Ad(H)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$.

Definición 3.2.1

El espacio homogéneo G/H satisfaciendo estas condiciones será denominado **espacio homogéneo reductivo** (con respecto a una descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} + \mathfrak{h}$ dada).

En general, se puede tener más de una representación del espacio (M,g) en la forma $M = G/H$ y un espacio de clases fijado G/H puede admitir más de una descomposición reductiva.

Si se denota por $\tilde{\nabla}$ la conexión canónica del espacio homogéneo reductivo (fijado) $(M,g)=G/H$ ([K-N], T. II, Pág. 193) entonces, usando la identificación canónica $\mathfrak{m}\equiv T_oM$ vía la proyección $\pi : G\to G/H$, en el origen $o\in M$ se tienen las siguientes fórmulas para los tensores torsión $\tilde{T}$ y curvatura $\tilde{R}$ sobre $\tilde{\nabla}$:

$$\tilde{T}(X,Y)_o=-[X,Y]_{\mathfrak{m}}, \qquad \tilde{R}(X,Y)_o=-ad([X,Y]_{\mathfrak{h}}), \tag{3.1}$$

donde, $X,Y\in\mathfrak{m}$. Además, debido a que cualquier campo tensorial G – invariante sobre M es paralelo con respecto a la conexión $\tilde{\nabla}$, se tiene que

$$\tilde{\nabla}g=\tilde{\nabla}\tilde{T}=\tilde{\nabla}\tilde{R}=0. \tag{3.2}$$

Sea $\mathfrak{k}\subset\mathfrak{h}$ la subálgebra generada por todas las proyecciones $[X,Y]_{\mathfrak{h}}$, $X,Y\in\mathfrak{m}$. Entonces, $\mathfrak{k}$ puede también ser considerada como el álgebra generada por todas las transformaciones curvatura $\tilde{R}(X,Y)_o$ sobre el espacio tangente T_oM. (En efecto, recordando que la representación lineal de isotropía de H en T_oM es fiel, se sabe que $\mathfrak{k}$ es isomorfo a la restricción del endomorfismo que va del álgebra $ad_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$ al subespacio $\mathfrak{m}\subset\mathfrak{g}$. A partir de (3.1) se obtiene el resto de la demostración.)

Según (3.2), se sabe que $A\in\mathfrak{k}$ actúa como una derivación sobre el álgebra tensorial de $\mathfrak{m}\equiv T_oM$ por tanto,

$$A\cdot g=A\cdot\tilde{T}=A\cdot\tilde{R}=0 \tag{3.3}$$

Además, a partir de (3.1), la identidad de Jacobi sobre $\mathfrak{g}$ y (3.2), se obtienen las identidades de Bianchi reducidas

$$\mathfrak{S}(\tilde{R}(X,Y)Z)=\mathfrak{S}(\tilde{T}(\tilde{T}(X,Y),Z)) \tag{3.4}$$

$$\mathfrak{S}(\tilde{R}(\tilde{T}(X,Y),Z))=0 \tag{3.5}$$

donde, $X,Y,Z\in T_oM$ y $\mathfrak{S}$ denota suma cíclica con respecto a *X*, *Y*, *Z*.

Se denominará **álgebra de transvección** del espacio homogéneo reductivo G/H ó de la variedad afinmente conexa $(M,\tilde{\nabla})$, a la subálgebra de Lie $\hat{\mathfrak{g}}\subset\mathfrak{g}$ donde, $\hat{\mathfrak{g}}=\mathfrak{m}+\mathfrak{k}$ y, **grupo de transvección** del mismo espacio, al correspondiente subgrupo de Lie $\hat{G}\subset G$, [K.3, Pág. 37].

Así, se tiene una nueva representación $(M,g)=\hat{G}/K$, mediante un nuevo espacio homogéneo reductivo con la misma conexión canónica $\tilde{\nabla}$ y donde, K es isomorfo al grupo de holonomía restringido de $(M,\tilde{\nabla})$ en el origen.

Otro hecho a tener en cuenta es que dadas la torsión $\tilde{T}$ y la curvatura $\tilde{R}$ canónicas, es posible calcular el tensor curvatura Riemanniano R de (M,g) en el espacio tangente T_oM a partir de la fórmula

$$R(X,Y) = \tilde{R}(X,Y) + [\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_Y] + \mathcal{D}_{\tilde{T}(X,Y)} \quad \textbf{(3.6)}$$

donde, $\mathcal{D}_X$ denota la diferencia, $\nabla_X - \tilde{\nabla}_X$, entre la derivada covariante Riemanniana y la canónica. Además, $\mathcal{D}$ es un campo tensorial (también G – invariante) el cual puede ser calculado a partir de la fórmula

$$2g(\mathcal{D}_Y X, Z) = g(\tilde{T}(X,Y), Z) + g(\tilde{T}(X,Z), Y) + g(\tilde{T}(Y,Z), X) \quad \textbf{(3.7)}$$

(ver, [K.3]). Otro hecho a destacar es que (3.6) y (3.7) tienen la misma forma para cualquier representación reductiva del espacio homogéneo Riemanniano G/H.

Si se considera una variedad Riemanniana simplemente conexa (M,g) con una representación reductiva $M = G/H$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} + \mathfrak{h}$, se sabe que conociendo sólo esta última estructura de álgebra de Lie junto con el producto interior g sobre $\mathfrak{m}$, se puede reconstruir la variedad homogénea (M,g) de una manera estándar.

Además, también se puede remplazar la estructura de álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} + \mathfrak{h}$ por los tensores torsión $\tilde{T}$ y curvatura $\tilde{R}$ dados sobre $\mathfrak{m}$ por la fórmula (3.1). Así, (3.4) y (3.5) deben ser satisfechos y (3.3) se tiene para todo $A \in \mathfrak{k}$ donde, $\mathfrak{k}$ es el álgebra (de holonomía) generada por las transformaciones curvatura $\tilde{R}(X,Y)$. Inversamente, si $\tilde{T}$ y $\tilde{R}$ son conocidos, se puede reconstruir el álgebra de transvección, $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m} + \mathfrak{k}$, mediante las siguientes fórmulas debidas a Nomizu [N, Pág. 62]:

$$\left.\begin{array}{l} [X,Y] = (-\tilde{T}(X,Y), -\tilde{R}(X,Y)) \quad (X,Y \in \mathfrak{m}), \\ [A,X] = AX \quad (A \in \mathfrak{k}, X \in \mathfrak{m}), \\ [A,B] = AB - BA \quad (A,B \in \mathfrak{k}). \end{array}\right\} . \quad \textbf{(3.8)}$$

Esta última construcción es usada en problemas de clasificación en una cierta dimensión tales como la clasificación que se desarrolla en este Capítulo. Para aplicarla, se comenzará con la clasificación de ciertas estructuras abstractas dadas sobre un espacio vectorial $(\tilde{R}, \tilde{T}, g)$, las cuales satisfacen las condiciones naturales de antisimetría, las identidades de Bianchi (3.4) y (3.5) y, la condición (3.3) en la cual el álgebra $\mathfrak{k}$ está generada por las transformaciones curvatura abstractas. Así, para cualquier estructura fijada, $(\tilde{R}, \tilde{T}, g)$, se aplicará la construcción (3.8) obteniendo un álgebra de Lie 'reductiva', $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m} + \mathfrak{k}$, con un producto interior sobre $\mathfrak{m}$. Ahora, construyendo el grupo de Lie simplemente conexo $\hat{G}$, su subgrupo K y comprobando que éste es un subgrupo cerrado de $\hat{G}$, (hay que realizar esta comprobación debido a que no puede ser demostrada en el caso abstracto), se obtiene un espacio homogéneo reductivo de una dimensión dada y provisto de una métrica invariante.

Este método junto con varias técnicas y algunos resultados computacionales de [K.2][15], es el utilizado para obtener la clasificación buscada.

A continuación, se enuncian las propiedades de los espacios que se van a clasificar.

Definición 3.2.2

Una variedad homogénea Riemanniana (M,g) se dice que es **naturalmente reductiva** si existe una representación de la forma $(M,g)=G/H$, $\mathfrak{g}=\mathfrak{m}+\mathfrak{h}$, satisfaciendo la identidad ([K-N], T. II)

$$\left\langle [X,Y]_{\mathfrak{m}},Z\right\rangle+\left\langle [X,Z]_{\mathfrak{m}},Y\right\rangle=0 \qquad \textbf{(3.9)}$$

donde, $X,Y,Z\in\mathfrak{m}$ y $\langle\ ,\ \rangle$ denota la métrica inducida sobre $\mathfrak{m}$.

Si esta última identidad se expresa en términos de la conexión canónica, se obtiene:

$$g(\tilde{T}(X,Y),Z)+g(\tilde{T}(X,Z),Y)=0 \qquad \textbf{(3.10)}$$

donde, X,Y,Z son vectores arbitrarios sobre T_oM.

Así, cualquier descomposición reductiva $\mathfrak{g}=\mathfrak{m}+\mathfrak{h}$ satisfaciendo (3.9) (ó cualquier conexión $\tilde{\nabla}$ satisfaciendo (3.10)) se denominará **adaptada**. Notar, que la misma variedad homogénea Riemanniana (M,g) puede tener más de una estructura naturalmente reductiva y, así, más de una conexión canónica adaptada $\tilde{\nabla}$.

Lema 3.2.3

Sea $(M,g)=G/H$ un espacio naturalmente reductivo y $\tilde{\nabla}$ alguna de sus conexiones canónicas adaptadas. Entonces, el espacio (M,g) es localmente simétrico si el tensor curvatura $\tilde{R}$ ó el tensor torsión $\tilde{T}$ se anulan.

Demostración

Véase la fórmula (12) de [K-V.1].

Lema 3.2.4

Sea $(M,g)=G/H$ un espacio naturalmente reductivo simplemente conexo con una conexión canónica adaptada $\tilde{\nabla}$. Si se supone que el espacio tangente T_oM en el origen admite una descomposición ortogonal $T_oM=V_1\oplus V_2$ tal que:

[15] Este artículo ha sido analizado a lo largo de todo el Capítulo 2.

$$\pi_i(\tilde{T}(X,Y)) = \tilde{T}(\pi_i X, \pi_i Y), \qquad i = 1,2$$

$$\pi_i(\tilde{R}(X,Y)Z) = \tilde{R}(\pi_i X, \pi_i Y)\pi_i Z, \qquad i = 1,2$$

donde, X, Y, $Z \in T_o M$ y π_1, π_2 denotan las proyecciones canónicas. Entonces, el espacio M se descompone como producto directo

$$(M,g) = (M_1,g_1) \times (M_2,g_2)$$

con $\dim M_i = \dim V_i$, $i = 1,2$ y, donde, los factores (M_i,g_i), $i = 1,2$ son de nuevo naturalmente reductivos.

Demostración

Véanse las Proposiciones 3 y 4 de [K-V.1].

El siguiente lema, es un Teorema muy conocido de álgebra lineal.

Lema 3.2.5

Sea V un espacio vectorial n – dimensional con un producto interior positivo y sea $A: V \to V$ un endomorfismo antisimétrico. Entonces, el rango de A es un número par $2k \leq n$, hay una base ortonormal de V, $\{X_1,\ldots,X_n\}$, y existen $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ números reales tales que:

$$\left.\begin{array}{l} AX_1 = \lambda_1 X_2, \quad AX_2 = -\lambda_1 X_1, \\ \ldots \\ AX_{2k-1} = \lambda_k X_{2k}, \quad AX_{2k} = -\lambda_k X_{2k-1}, \\ AX_{2k+1} = \ldots = AX_n = 0. \end{array}\right\} \qquad \textbf{(3.11)}$$

Así, $\pm i\lambda_j$, $j = 1,\ldots,k$ son los valores propios no nulos del endomorfismo A y $U_j = X_{2j-1} + iX_{2j}$, $\bar{U}_j = X_{2j-1} - iX_{2j}$, $j = 1,\ldots,k$ son los correspondientes vectores propios. ($i = \sqrt{-1}$ denota la unidad compleja).

3.3. ENUNCIADO DE LA CLASIFICACIÓN DE LOS ESPACIOS HOMOGÉNEOS NATURALMENTE REDUCTIVOS DE DIMENSIÓN 5

Notación 3.3.1

El grupo $SL(2,\mathbb{R})$ será siempre representado como un subgrupo de $SL(3,\mathbb{R})$; es decir, como el grupo formado por las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde, $ad - cb = 1$.

Teorema 3.3.2 (Teorema de la Clasificación)

Una variedad Riemanniana *1* – conexa y naturalmente reductiva de dimensión 5 es simétrica ó descomponible ó localmente isométrica a algún miembro de los siguientes tipos de familias de espacios:

Tipo I. Las variedades homogéneas fundamentales son

$$\frac{SO(3)\times SO(3)}{SO(2)_r}, \quad \frac{SO(3)\times SL(2,\mathbb{R})}{SO(2)_r}, \quad \frac{SL(2,\mathbb{R})\times SL(2,\mathbb{R})}{SO(2)_r}$$

donde, $SO(2)_r$ denota el subgrupo de todos los productos de matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} Cost & -Sent & 0 \\ Sent & Cost & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Cosrt & -Senrt & 0 \\ Senrt & Cosrt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde, $t \in \mathbb{R}$ y r es un número racional. Además, sobre cada espacio fundamental hay una familia de métricas invariantes naturalmente reductivas dependiendo de los parámetros reales λ, ρ.

Así, cada uno de los 3 subtipos de toda la familia de espacios localmente no isométricos depende de dos parámetros reales y uno racional.

Tipo II. Las variedades homogéneas fundamentales son

$$\frac{H_3\times SO(3)}{SO(2)^{(r)}} \text{ y } \frac{H_3\times SL(2,\mathbb{R})}{SO(2)^{(r)}}$$

donde, H_3 denota el grupo de Heisenberg de dimensión 3

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y $SO(2)^{(r)}$ denota el subgrupo de todos los productos de matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Cosrt & -Senrt & 0 \\ Senrt & Cosrt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde, $t \in \mathbb{R}$ y r es un número racional. Además, sobre cada espacio fundamental hay una familia de métricas invariantes naturalmente reductivas dependiendo de dos parámetros reales.

Así, cada uno de los 2 subtipos de toda la familia de espacios localmente no isométricos depende de dos parámetros reales y uno racional.

Tipo III. La variedad homogénea fundamental es el grupo de Heisenberg de dimensión 5; es decir, el grupo formado por las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ u & v & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donde, las métricas naturalmente reductivas e invariantes a izquierda forman una familia 2 – paramétrica sobre él.

Más explícitamente, toda la familia puede ser descrita como el espacio cartesiano $\mathbb{R}^5(x, y, z, u, v)$ con la familia de métricas dada por:

$$g = \frac{1}{\rho}(du^2 + dx^2) + \frac{1}{\lambda}(dv^2 + dy^2) + (udx + vdy - dz)^2$$

donde $\lambda, \rho > 0$ son parámetros reales.

Tipo IV. Las variedades homogéneas fundamentales son

$$\frac{SU(3)}{SU(2)} \text{ y } \frac{SU(2,1)}{SU(2)}.$$

Donde, sobre cada espacio hay una familia de métricas invariantes naturalmente reductivas que dependen de dos parámetros reales.

Además, como un caso especial, se obtienen esferas geodésicas en un espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}P^3(\lambda)$ ó en un espacio hiperbólico complejo $\mathbb{C}H^3(-\lambda)$, $\lambda > 0$.

3.4. DEMOSTRACIÓN DE LA CLASIFICACIÓN

Para el desarrollo de este apartado, primero se clasificarán las estructuras abstractas $(\tilde{R},\tilde{T},g)$ naturalmente reductivas (es decir, de forma que se satisfaga la condición (3.10)) sobre un espacio vectorial V de dimensión 5, obteniendo un número finito de tipos. Entonces, procediendo sobre cada tipo como se indicó en el Apartado 3.2, se obtienen las familias de espacios naturalmente reductivos de la lista enunciada anteriormente.

Puesto que sólo interesa el estudio de los espacios no simétricos, debido al Lema 3.2.3, se supondrá que $\tilde{T}\neq 0$ y que $\tilde{R}\neq 0$. Además, usando el Lema 3.2.4, se irán eliminando los casos descomponibles que vayan apareciendo a lo largo de la demostración.

Así, sea V un espacio vectorial real de dimensión 5 con un producto interior positivo g, un tensor torsión $\tilde{T}\neq 0$ y un tensor curvatura $\tilde{R}\neq 0$ tales que, (3.3), (3.4), (3.5) y (3.10) son satisfechas.

3.4.1. Clasificación de $\tilde{T}$ y Propiedades sobre $\tilde{R}$

Lema 3.4.1.1

Si $\{X_1,\ldots,X_5\}$ es una base ortonormal de V, aplicando la condición (3.10), se obtiene la siguiente expresión general para el tensor torsión $\tilde{T}$:

$$\left.\begin{array}{l}
\tilde{T}(X_1,X_2)= a_3X_3+a_4X_4+a_5X_5\\
\tilde{T}(X_1,X_3)= -a_3X_2+b_4X_4+b_5X_5\\
\tilde{T}(X_1,X_4)= -a_4X_2-b_4X_3+c_5X_5\\
\tilde{T}(X_1,X_5)= -a_5X_2-b_5X_3-c_5X_4\\
\tilde{T}(X_2,X_3)=a_3X_1+c_4X_4+d_5X_5\\
\tilde{T}(X_2,X_4)=a_4X_1-c_4X_3+g_5X_5\\
\tilde{T}(X_2,X_5)=a_5X_1-d_5X_3-g_5X_4\\
\tilde{T}(X_3,X_4)=b_4X_1+c_4X_2+h_5X_5\\
\tilde{T}(X_3,X_5)=b_5X_1+d_5X_2-h_5X_4\\
\tilde{T}(X_4,X_5)=c_5X_1+g_5X_2+h_5X_3
\end{array}\right\}. \qquad \textbf{(3.12)}$$

La demostración está desarrollada en el Apartado B.2 del Anexo B.

Ahora, como $\tilde{R}\neq 0$ y cada transformación curvatura $\tilde{R}(X,Y):V\to V$ es antisimétrica, aplicando el Lema 3.2.5 se obtienen las dos posibilidades siguientes (las cuales no son mutuamente excluyentes):

(A) Existe una transformación curvatura $\tilde{R}(X,Y)$ de rango 2.

(B) Existe una transformación curvatura $\tilde{R}(X,Y)$ de rango 4.

A continuación, se discuten ambos casos por separado.

Caso A (Rango 2)

En este caso, para una elección adecuada de la base ortonormal se sabe que, existe una transformación curvatura $\tilde{R}(X,Y)$ de la forma A_{12} donde,

$$A_{12}X_1 = X_2\,, \quad A_{12}X_2 = -X_1\,, \quad A_{12}X_3 = A_{12}X_4 = A_{12}X_5 = 0\,. \qquad \textbf{(3.13)}$$

Entonces, utilizando (3.3), se sabe que $A_{12}\cdot\tilde{T}=0$; es decir

$$A_{12}(\tilde{T}(X_i,X_j)) = \tilde{T}(A_{12}X_i,X_j)+\tilde{T}(X_i,A_{12}X_j)\,, \quad i,j=1,\ldots,5\,.$$

Lema 3.4.1.2

Si $\{X_1,\ldots,X_5\}$ es una base ortonormal de *V*, a partir de (3.13) y de la condición $A_{12}\cdot\tilde{T}=0$ se obtiene que (3.12) es:

$$\left.\begin{array}{l}
\tilde{T}(X_1,X_2) = a_3X_3 + a_4X_4 + a_5X_5 \\
\tilde{T}(X_1,X_3) = -a_3X_2 \\
\tilde{T}(X_1,X_4) = -a_4X_2 \\
\tilde{T}(X_1,X_5) = -a_5X_2 \\
\tilde{T}(X_2,X_3) = a_3X_1 \\
\tilde{T}(X_2,X_4) = a_4X_1 \\
\tilde{T}(X_2,X_5) = a_5X_1 \\
\tilde{T}(X_3,X_4) = +h_5X_5 \\
\tilde{T}(X_3,X_5) = -h_5X_4 \\
\tilde{T}(X_4,X_5) = h_5X_3
\end{array}\right\}. \qquad \textbf{(3.14)}$$

La demostración está desarrollada en el Apartado B.2 del Anexo B.

Ahora, para estudiar (3.14) se diferenciarán dos subcasos:

(A.1) Si $a_3 = a_4 = a_5 = 0$.

(A.2) Si $\rho = (a_3{}^2 + a_4{}^2 + a_5{}^2)^{\frac{1}{2}} > 0$.

Subcaso A.1

Sustituyendo el valor de los parámetros en (3.14), para $i = 3,4,5$ se obtiene que

$$\tilde{T}(X_1, X_i) = \tilde{T}(X_2, X_i) = 0 .$$

Análogamente a como se procedió en el Capítulo 2, se desarrolla la segunda identidad de Bianchi (3.5) sobre los tripletes (X_3, X_4, X_j), (X_3, X_5, X_j) y (X_4, X_5, X_j), $j = 1,2$ y, utilizando (3.14) para $i = 3,4,5$, se obtiene que

$$\tilde{R}(X_1, X_i) = \tilde{R}(X_2, X_i) = 0 . \qquad \textbf{(3.15)}$$

También se desarrolla la primera identidad de Bianchi (3.4), sobre los tripletes (X_i, X_j, X_1), (X_i, X_j, X_2) y (X_1, X_2, X_i), $i, j = 3,4,5$ y, utilizando (3.14) y (3.15) se sigue que

$$\tilde{R}(X_i, X_j)X_1 = \tilde{R}(X_i, X_j)X_2 = \tilde{R}(X_1, X_2)X_i = 0 , \quad i, j = 3,4,5 . \qquad \textbf{(3.16)}$$

Así, debido a la nueva expresión de (3.14), (3.15) y (3.16) se tiene que las hipótesis del Lema 3.2.4 son satisfechas y nuestro espacio naturalmente reductivo *M* se descompone como $M^3 \times M^2$. En efecto, suponiendo que $V_1 = \langle X_1, X_2 \rangle$ y $V_2 = \langle X_3, X_4, X_5 \rangle$, se comprueban fácilmente las condiciones de descomponibilidad sobre la torsión y la curvatura.

Subcaso A.2

Ahora, se realiza el cambio de base ortonormal dado por

$$X'_1 = X_1 , \quad X'_2 = X_2 , \quad X'_5 = \frac{1}{\rho}(a_3 X_3 + a_4 X_4 + a_5 X_5) ,$$

$$X'_3 = \alpha X_3 + \beta X_4 + \gamma X_5 , \quad X'_4 = \alpha' X_3 + \beta' X_4 + \gamma' X_5$$

de forma que los parámetros α, β, γ, α', β', γ' están determinados por la condición que X'_3, X'_4 y X'_5 sean ortonormales entre si. Así, sin realizar cambios en la notación con respecto a los elementos de la base, pero denotando el parámetro h_5 por λ, se sigue que ahora (3.14) se expresa:

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{T}(X_1,X_2)= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \rho X_5 \\ \tilde{T}(X_1,X_3)=0 \\ \tilde{T}(X_1,X_4)=0 \\ \tilde{T}(X_1,X_5)= \qquad -\rho X_2 \\ \tilde{T}(X_2,X_3)=0 \\ \tilde{T}(X_2,X_4)=0 \\ \tilde{T}(X_2,X_5)=\rho X_1 \\ \tilde{T}(X_3,X_4)= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \lambda X_5 \\ \tilde{T}(X_3,X_5)= \qquad\qquad\qquad\qquad -\lambda X_4 \\ \tilde{T}(X_4,X_5)= \qquad\qquad\qquad \lambda X_3 \end{array}\right\}. \tag{3.17}$$

El método utilizado para realizar el cambio de base es el aplicado en el Capítulo 4. (Ver en el Apartado 4.2 el estudio del Subcaso A.1.2).

Ahora, para finalizar el estudio de este caso basta analizar (3.17) y comprobar que nuestra transformación curvatura original $P = A_{12}$ conserva la forma (3.13) con respecto a la nueva base.

Para analizar (3.17) bastará con ver que ocurre cuando λ es o no nulo. Si se supone que $\lambda \neq 0$, se ve fácilmente que la condición de descomponibilidad sobre la torsión del Lema 3.2.4 no es satisfecha, por tanto, no se puede asegurar que este caso sea descomponible. Sin embargo, si se supone que $\lambda = 0$, y, de forma análoga a la realizada en el *Caso A.1*, se calcula la expresión de la curvatura utilizando las identidades de Bianchi, se tiene que, tomando $V_1 = \langle X_1, X_2, X_5 \rangle$ y $V_2 = \langle X_3, X_4 \rangle$, las condiciones necesarias para aplicar el Lema 3.2.4 son satisfechas y, por tanto, este caso es descomponible.

Nuestra transformación curvatura original $P = A_{12}$ conserva la forma (3.13) con respecto a la nueva base ya que

$$A_{12}X_1' = A_{12}X_1 = X_2 = X_2', \quad A_{12}X_2' = A_{12}X_2 = -X_1 = -X_1',$$
$$A_{12}X_3' = A_{12}(\alpha X_3 + \beta X_4 + \gamma X_5) = \alpha A_{12}X_3 + \beta A_{12}X_4 + \gamma A_{12}X_5 = 0,$$
$$A_{12}X_4' = A_{12}(\alpha' X_3 + \beta' X_4 + \gamma' X_5) = \alpha' A_{12}X_3 + \beta' A_{12}X_4 + \gamma' A_{12}X_5 = 0,$$
$$A_{12}X_5' = \frac{1}{\rho}(a_3 A_{12}X_3 + a_4 A_{12}X_4 + a_5 A_{12}X_5).$$

Caso B. (Rango 4)

En este caso, se sabe que, para una elección adecuada de la base ortonormal, existe una transformación curvatura de la forma,

$$\tilde{R}(X,Y) = \alpha A_{12} + \beta A_{34}, \quad \alpha\beta \neq 0$$

donde A_{12} está dado por la fórmula (3.13) y A_{34} por

$$A_{34}X_1 = A_{34}X_2 = 0, \quad A_{34}X_3 = X_4, \quad A_{34}X_4 = -X_3, \quad A_{34}X_5 = 0. \quad \textbf{(3.18)}$$

Entonces, de (3.3) se tiene la condición $(\alpha A_{12} + \beta A_{34}) \cdot \tilde{T} = 0$, que, aplicada sobre (3.12) de forma análoga al Lema 3.4.1.2 da

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha c_4 = \alpha b_4 = 0, & \beta a_3 = \beta a_4 = 0, \\ \alpha d_5 + \beta c_5 = 0, & \alpha g_5 - \beta b_5 = 0, \\ \alpha c_5 + \beta d_5 = 0, & \alpha b_5 - \beta g_5 = 0, \end{array}\right\}. \quad \textbf{(3.19)}$$

Ahora, para continuar el estudio habrá que diferenciar dos subcasos:

(B.1) Cuando $\alpha^2 \neq \beta^2$.

(B.2) Cuando $\alpha = \beta \neq 0$ (notar que el caso $\alpha = -\beta$ se obtiene al intercambiar X_3 con X_4).

Subcaso B.1

A partir de (3.19), resolviendo los sistemas se obtiene que $a_3 = a_4 = b_4 = b_5 = 0$ y que $c_4 = c_5 = d_5 = g_5 = 0$. Por tanto, sustituyendo en (3.12) se sigue directamente (3.17) donde, λ, ρ son respectivamente a_5, h_5.

Subcaso B.2

Se considera $P = A_{12} + A_{34}$ y, así, los parámetros α, β quedan libres.

Resolviendo los sistemas de (3.19) se tiene que

$$a_3 = a_4 = b_4 = c_4 = 0, \qquad d_5 = -c_5, \qquad g_5 = b_5$$

y, sustituyendo en (3.12) se sigue

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{T}(X_1,X_2)= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_5X_5\\ \tilde{T}(X_1,X_3)= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad b_5X_5\\ \tilde{T}(X_1,X_4)= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad c_5X_5\\ \tilde{T}(X_1,X_5)= \qquad -a_5X_2-b_5X_3-c_5X_4\\ \tilde{T}(X_2,X_3)= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -c_5X_5\\ \tilde{T}(X_2,X_4)= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad b_5X_5\\ \tilde{T}(X_2,X_5)=a_5X_1 \qquad\quad +c_5X_3-b_5X_4\\ \tilde{T}(X_3,X_4)= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad h_5X_5\\ \tilde{T}(X_3,X_5)=b_5X_1-c_5X_2 \qquad\quad -h_5X_4\\ \tilde{T}(X_4,X_5)=c_5X_1+b_5X_2+h_5X_3\end{array}\right\}. \tag{3.20}$$

Nota 3.4.1.3

Si $\alpha=-\beta$ entonces, resolviendo (3.19), sustituyendo lo obtenido en (3.12) e intercambiando X_3 con X_4 se obtiene (3.20).

Si se observa (3.20), se puede definir *F*, una transformación antisimétrica del subespacio $V'=(X_1,\ldots,X_4)\subset V$, dada por $FX_i=\tilde{T}(X_i,X_5)$, para $i=1,2,3,4$, donde, su matriz asociada,

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_5 & -b_5 & -c_5\\ a_5 & 0 & c_5 & -b_5\\ b_5 & -c_5 & 0 & -h_5\\ c_5 & b_5 & h_5 & 0\end{pmatrix},$$

es antisimétrica.

Ahora, para continuar el estudio, se complexifica V' y sobre $V'^C=V+iV$ se consideran

$$U_1=X_1+iX_2,\quad U_2=X_3+iX_4. \tag{3.21}$$

Así, sobre el subespacio $(U_1,U_2)\subset V'^C$ se tiene que F es la transformación dada por

$$\left.\begin{array}{l}FU_1=ia_5U_1-\overline{\gamma}U_2,\\ FU_2=\gamma U_1+ih_5U_2,\end{array}\right\} \tag{3.22}$$

donde $\gamma=b_5+ic_5$ y los valores propios asociados son

$$\mu_1 = \tfrac{1}{2}[i(a_5+h_5)+(-4\gamma\overline{\gamma}-(a_5-h_5)^2)^{\frac{1}{2}}] = \tfrac{1}{2}i[(a_5+h_5)+(4\gamma\overline{\gamma}+(a_5-h_5)^2)^{\frac{1}{2}}],$$

$$\mu_2 = \tfrac{1}{2}[i(a_5+h_5)-(-4\gamma\overline{\gamma}-(a_5-h_5)^2)^{\frac{1}{2}}] = \tfrac{1}{2}i[(a_5+h_5)-(4\gamma\overline{\gamma}+(a_5-h_5)^2)^{\frac{1}{2}}]$$

los cuales, al ser imaginarios puros, se denotarán por $\mu_1 = i\rho$, $\mu_2 = i\lambda$.

Nota 3.4.1.4

Sobre el subespacio $(\overline{U}_1,\overline{U}_2) \subset V'^{\mathbb{C}}$ los valores propios serían $-i\rho$, $-i\lambda$.

Se diferencian dos nuevos subcasos para continuar el estudio:

(B.2.1) Si $\rho = \lambda$.

(B.2.2) Si $\rho \neq \lambda$.

Subcaso B.2.1

Resolviendo la ecuación

$$(a_5+h_5)+(4\gamma\overline{\gamma}+(a_5-h_5)^2)^{\frac{1}{2}} = (a_5+h_5)-(4\gamma\overline{\gamma}+(a_5-h_5)^2)^{\frac{1}{2}},$$

se obtiene $a_5 = h_5$ y $b_5 = c_5 = 0$. Al sustituir esta expresión en (3.12) se obtiene directamente (3.17) con $\lambda = \rho$.

Subcaso B.2.2

Aquí se pueden considerar

$$U_i^* = \alpha_i U_1 + \beta_i U_2 \text{ tal que } |\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2 = 1 \qquad \textbf{(3.23)}$$

para $i = 1,2$, como los correspondientes vectores propios complejos de μ_1 y μ_2 respectivamente. En efecto, si $U_i' = a_i U_1 + b_i U_2$, tal que $F(U_i') = \mu_i U_i'$ y $|a_i|^2 + |b_i|^2 \neq 1$, $i = 1,2$, al normalizar se obtiene

$$U_i^* = \frac{1}{\sqrt{|a_i|^2+|b_i|^2}} U_i' = \frac{a_i}{\sqrt{|a_i|^2+|b_i|^2}} U_1 + \frac{b_i}{\sqrt{|a_i|^2+|b_i|^2}} U_2 = \alpha_i U_1 + \beta_i U_2,$$

donde, $F(U_i^*) = \mu_i U_i^*$ y $|\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2 = 1$ para $i = 1,2$. Así, (3.21) se expresa como:

$$FU_1^* = i\rho U_1^*, \qquad FU_2^* = i\lambda U_2^*. \qquad \textbf{(3.24)}$$

Ahora, suponiendo que

$$U_1^* = X_1^* + iX_2^*, \qquad U_2^* = X_3^* + iX_4^*, \qquad \textbf{(3.25)}$$

se verá que $\{X_1^*,\ldots,X_4^*\}$ es una base ortonormal. Para ello, se necesitará el lema siguiente:

Lema 3.4.1.5

Si $W_1 = Y_1 + iY_2$, $W_2 = Y_3 + iY_4$ donde, $\{Y_1,\ldots,Y_4\}$ es base de V^* y $\{W_1, W_2\}$ es base de V^{*C}, entonces, $\{Y_1,\ldots,Y_4\}$ es una base ortonormal de V^* si y sólo si se satisface el siguiente sistema de condiciones:

$$\left.\begin{array}{l} \langle W_1, \overline{W}_1\rangle = \langle W_2, \overline{W}_2\rangle = 2, \\ \langle W_1, W_1\rangle = \langle W_2, W_2\rangle = \langle W_1, W_2\rangle = \langle W_1, \overline{W}_2\rangle = 0. \end{array}\right\} \qquad \textbf{(3.26)}$$

La demostración está desarrollada en el Apartado B.2 del Anexo B.

Así, $\{X_1^*,\ldots,X_4^*\}$ es una base ortonormal. En efecto, como se sabe que $\{X_1,\ldots,X_4\}$ es base ortonormal de V' y que $U_1 = X_1 + iX_2$, $U_2 = X_3 + iX_4$ son elementos de V'^C, aplicando el Lema 3.4.1.5 se tiene que la relación (3.26) es satisfecha para los vectores U_1, U_2. Ahora, debido a (3.23) y desarrollando unos sencillos cálculos se tiene que $\{U_1^*, U_2^*\}$ también satisface (3.26) y, por tanto, aplicando de nuevo el Lema 3.4.1.5 se obtiene que $\{X_1^*,\ldots,X_4^*\}$ es una base ortonormal, como se quiere demostrar.

Además, a partir de (3.25), (3.23) y (3.21) se obtiene que

$$\begin{aligned} X_1^* &= a_1X_1 - b_1X_2 + c_1X_3 - d_1X_4, \\ X_2^* &= b_1X_1 + a_1X_2 + d_1X_3 + c_1X_4, \\ X_3^* &= a_2X_1 - b_2X_2 + c_2X_3 - d_2X_4, \\ X_4^* &= b_2X_1 + a_2X_2 + d_2X_3 + c_2X_4, \end{aligned}$$

donde $\alpha_j = a_j + ib_j$, $\beta_j = c_j + id_j$, $j = 1, 2$ en (4.23). Ahora, tomando $X_5^* = X_5$, se tiene que $\{X_i^*\}_{i=1}^5$ es una nueva base ortonormal de V.

Lema 3.4.1.6

La expresión de $\tilde{T}$ en la nueva base ortonormal de V, $\{X_i^*\}_{i=1}^5$, es de nuevo (3.17).

Demostración

Tomando la expresión real de (3.24), dada por:

$$FX_1^* = -\rho X_2^*, \quad FX_2^* = \rho X_1^*, \quad FX_3^* = -\lambda X_4^*, \quad FX_4^* = \lambda X_3^*,$$

se sabe que

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{T}(X_1^*,X_5^*)= \qquad -\rho X_2^* \\ \tilde{T}(X_2^*,X_5^*)=\rho X_1^* \\ \tilde{T}(X_3^*,X_5^*)= \qquad\qquad\qquad -\lambda X_4^* \\ \tilde{T}(X_4^*,X_5^*)= \qquad\qquad \lambda X_3^*\end{array}\right\}.$$

Para calcular el resto de componentes de la torsión se sustituye la expresión de X_i^*, $i=1,2,3,4,5$, como combinaciones reales de los X_j, $j=1,2,3,4,5$, en el conjunto de relaciones (3.20), obteniendo que $\tilde{T}(X_1^*,X_2^*)=SX_5^*$, $\tilde{T}(X_1^*,X_3^*)=TX_5^*$, $\tilde{T}(X_1^*,X_4^*)=UX_5^*$, $\tilde{T}(X_2^*,X_3^*)=VX_5^*$, $\tilde{T}(X_2^*,X_4^*)=WX_5^*$, $\tilde{T}(X_3^*,X_4^*)=ZX_5^*$ donde, $S, T, U, V, W, Z \in \mathbb{R}$. Ahora, aplicando (3.10) se obtiene que $T=U=V=W=0$, $S=\rho$ y $Z=\lambda$ y, así, que la expresión de $\tilde{T}$ es de nuevo (3.17).

Finalmente, como el operador curvatura $P=A_{12}+A_{34}$ satisface que $PU_1=-iU_1$, $PU_2=-iU_2$ ya que,

$$\begin{array}{l}PU_1=P(X_1+iX_2)=X_2-iX_1=-i(X_1+iX_2)=-iU_1, \\ PU_2=P(X_3+iX_4)=X_4-iX_3=-i(X_3+iX_4)=-iU_2\end{array}$$

entonces, también se tiene que $PU_1^*=-iU_1^*$, $PU_2^*=-iU_2^*$; en efecto,

$$\begin{array}{l}PU_1^*=P(\alpha_1U_1+\beta_1U_2)=-i(\alpha_1U_1+\beta_1U_2)=-iU_1^*, \\ PU_2^*=P(\alpha_2U_1+\beta_2U_2)=-i(\alpha_2U_1+\beta_2U_2)=-iU_2^*.\end{array}$$

De lo anterior se sigue que $PX_1^*=X_2^*$, $PX_2^*=-X_1^*$, $PX_3^*=X_4^*$, $PX_4^*=-X_3^*$, $PX_5^*=0$; es decir, que P conserva su forma de actuación con respecto a la nueva base ortonormal $\{X_i^*\}_{i=1}^5$ de V y por tanto, $P=A_{12}^*+A_{34}^*$.

Nota 3.4.1.7

En lugar de usar el Lema 3.2.5 se ha utilizado este método, un poco más complicado, para poder asegurar que el operador curvatura conservaba su forma de actuación con respecto a la nueva base ortonormal $\{X_i^*\}_{i=1}^5$ de V.

Ahora, se puede concluir lo siguiente:

Proposición 3.4.1.8

Dados un espacio naturalmente reductivo $(M,g)=G/H$ de dimensión 5 y una conexión canónica adaptada $\tilde{\nabla}$ con tensor curvatura $\tilde{R}$ y tensor torsión $\tilde{T}$, existe una base ortonormal $\{X_1,\ldots,X_5\}$ en $V=T_oM$ (llamada base adaptada) para la cual $\tilde{T}$ adopta la forma (3.17). Más aún, existe una transformación curvatura

$$\tilde{R}(X,Y):V \to V$$

de la forma $P = A_{12}$ ó de la forma $P = \alpha A_{12} + \beta A_{34}$, $\alpha\beta \neq 0$, con respecto a alguna base adaptada.

Además, se tiene que:

Proposición 3.4.1.9

Bajo las hipótesis de la Proposición 3.4.1.8 siempre se satisfacen las siguientes identidades para el tensor curvatura canónico $\tilde{R}$:

$$\tilde{R}(X_i, X_5) = 0, \quad i = 1,2,3,4 \tag{3.27}$$

$$\left.\begin{array}{l} \rho\tilde{R}(X_2,X_3) + \lambda\tilde{R}(X_1,X_4) = 0, \\ \lambda\tilde{R}(X_2,X_3) + \rho\tilde{R}(X_1,X_4) = 0, \\ \rho\tilde{R}(X_1,X_3) - \lambda\tilde{R}(X_2,X_4) = 0, \\ \lambda\tilde{R}(X_1,X_3) - \rho\tilde{R}(X_2,X_4) = 0, \end{array}\right\}, \tag{3.28}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \mathfrak{S}(\tilde{R}(X_1,X_2),X_3) = \lambda\rho X_4, & \mathfrak{S}(\tilde{R}(X_1,X_2),X_4) = -\lambda\rho X_3, \\ \mathfrak{S}(\tilde{R}(X_1,X_3),X_4) = \lambda\rho X_2, & \mathfrak{S}(\tilde{R}(X_2,X_3),X_4) = -\lambda\rho X_1, \end{array}\right\}. \tag{3.29}$$

Demostración

De la 2ª Identidad de Bianchi (3.5) aplicada sucesivamente a (1,2,3), (1,2,4), (1,3,4), (2,3,4) y usando la fórmula (3.17) se sigue (3.27).

Así mismo, de (3.5) aplicada sucesivamente a (1,3,5), (2,4,5), (2,3,5), (1,4,5) y usando la fórmula (3.17) se sigue (3.28).

Además, (3.29) es una consecuencia inmediata de aplicar la 1ª Identidad de Bianchi (3.4) sobre (1,2,3), (1,2,4), (1,3,4), (2,3,4) y usar de nuevo la fórmula (3.17).

3.4.2. Obtención de las Álgebras de Lie $\mathfrak{k}$ y de los Espacios M Naturalmente Reductivos 5-dimensionales.

Dada una base $\{X_1,\ldots,X_5\}$, se introducen los operadores A_{ij}, $i,j = 1,2,3,4$, $i \neq j$, dados por

$$A_{ij}X_i = X_j, \quad A_{ij}X_j = -X_i, \quad A_{ij}X_k = 0, \quad k = 1,2,3,4,5, \quad k \neq i,j \tag{3.30}$$

los cuales son compatibles con (3.13) y (3.18).

Denotando por $\mathfrak{k}$ el álgebra de Lie generada por todos los $A \in End(V)$ tales que $A \cdot g = A \cdot \tilde{T} = 0$, se tiene que:

Proposición 3.4.2.1

Sea, como en la Proposición 3.4.1.8, una base adaptada $\{X_1, \ldots, X_5\}$. Entonces, si $\lambda \neq \rho$ en (3.17), $\mathfrak{h} = (A_{12}, A_{34})$ y, si $\lambda = \rho$ en (3.17), $\mathfrak{h} = (A_{12}, A_{34}, B, C)$ donde, $B = A_{13} + A_{24}$ y $C = A_{14} + A_{32}$.

La demostración está desarrollada en el Apartado B.2 del Anexo B.

Proposición 3.4.2.2

La tabla de multiplicar asociada al álgebra de Lie $\mathfrak{h} = (A_{12}, A_{34}, B, C)$ es

$$\left.\begin{array}{ll} [A_{12}, A_{34}] = 0, & [B, C] = 2(A_{34} - A_{12}), \\ [B, A_{12}] = C, & [B, A_{34}] = -C, \\ [C, A_{12}] = -B, & [C, A_{34}] = B. \end{array}\right\} \quad \textbf{(3.31)}$$

La demostración está desarrollada en el Apartado B.2 del Anexo B.

Ahora, denotando por $\mathfrak{k}$ el álgebra de Lie generada por todas las transformaciones curvatura $\tilde{R}(X, Y)$, $X, Y \in V$, se sabe por (3.3), que $\mathfrak{k}$ es una subálgebra de $\mathfrak{h}$. Entonces, se tiene el resultado siguiente:

Proposición 3.4.2.3

Bajo las hipótesis de la Proposición 3.4.1.8 existe una base ortonormal adaptada $\{X_1, \ldots, X_5\}$ de $V = T_oM$ tal que el álgebra $\mathfrak{k}$, tiene una de las formas siguientes:

(A) $\mathfrak{k} = (A_{12})$ ó $\mathfrak{k} = (\alpha A_{12} + \beta A_{34})$ donde $\alpha\beta \neq 0$,

(B) $\mathfrak{k} = (A_{12}, A_{34})$,

(C) $\mathfrak{k} = (A_{34} - A_{12}, B, C)$,

(D) $\mathfrak{k} = (A_{12}, A_{34}, B, C)$.

Demostración

Si $\dim \mathfrak{k} = 1$, el resultado se sigue de la última parte de la Proposición 3.4.1.8. Así, se ha obtenido (A).

Si $\dim \mathfrak{k} > 1$, se considerarán los dos subcasos siguientes:

i) Cuando $\lambda \neq \rho$ en (3.17), suponiendo que $A_{12} \in \mathfrak{k}$ ó $\alpha A_{12} + \beta A_{34} \in \mathfrak{k}$, se elige una base fija adaptada $\{X_1, \ldots, X_5\}$. Entonces, debido a que $\mathfrak{k}$ es una subálgebra de $\mathfrak{h}$ y a la Proposición 3.4.2.1 se sigue (B).

ii) Cuando $\lambda = \rho$ en (3.17), suponiendo que $A_{12} \in \mathfrak{k}$ ó $\alpha A_{12} + \beta A_{34} \in \mathfrak{k}$ y que $\mathfrak{k} \neq (A_{12}, A_{34})$, también se elige una base fija adaptada $\{X_1, \ldots, X_5\}$. Entonces, debido a que $\mathfrak{k}$ es una subálgebra de $\mathfrak{h}$ y a la Proposición 3.4.2.1, existe un endomorfismo $S \in \mathfrak{k}$ de la forma

$$S = aA_{12} + a'A_{34} + bB + cC$$

donde, $b^2 + c^2 > 0$. Ahora se diferenciarán estos dos nuevos subcasos:

iia) Si $A_{12} \in \mathfrak{k}$. Usando la tabla de multiplicar (3.31) se tiene que $[A_{12}, S] = cB - bC \in \mathfrak{k}$ y que $[cB - bC, A_{12}] = cC + bB \in \mathfrak{k}$ y, por tanto, como $\mathfrak{k}$ es álgebra de Lie, $B,\ C \in \mathfrak{k}$. Además, como por (3.31) también se tiene que $A_{34} = \frac{1}{2}[B, C] + A_{12} \in \mathfrak{k}$, se obtiene (D).

iib) Si $P = \alpha A_{12} + \beta A_{34} \in \mathfrak{k}$ donde, $\alpha\beta \neq 0$. Usando la tabla de multiplicar (3.31) se tiene que $[P, S] = (\alpha - \beta)(cB - bC) \in \mathfrak{k}$. Por tanto, si se supone que $\alpha \neq \beta$, procediendo como en el subcaso anterior, se obtiene sucesivamente que $B, C \in \mathfrak{k}$ y que $A_{34} - A_{12} \in \mathfrak{k}$ y, así, (C) ó (D) (hay que considerar (C) ya que (D) sólo se tiene en el caso de que $\alpha \neq \pm\beta$). En efecto, como $\alpha \neq \beta$, $[[P, S], P] = (\alpha - \beta)^2 (bB + cC) \in \mathfrak{k}$ entonces, $cB - bC \in \mathfrak{k}$, $bB + cC \in \mathfrak{k}$ y, por tanto, $B,\ C \in \mathfrak{k}$. Así, $[B, C] = 2(A_{34} - A_{12}) \in \mathfrak{k}$ y se obtiene (C). Ahora, como $\alpha\beta \neq 0$, también se tiene que $\Lambda = \alpha(A_{34} - A_{12}) \in \mathfrak{k}$ y $\Omega = \beta(A_{34} - A_{12}) \in \mathfrak{k}$ y por tanto, $P + \Lambda \in \mathfrak{k}$, $\Omega - P \in \mathfrak{k}$ de donde si $\alpha \neq \pm\beta$ se sigue (D).

Sin embargo, si se supone que $\alpha = \beta$, normalizando se puede suponer que existe un endomorfismo $S \in \mathfrak{k}$ de la forma

$$S = aA_{12} + a'A_{34} + bB + cC$$

donde, $b^2 + c^2 = 1$. Ahora, realizando el cambio de base adaptada dado por

$$X'_1 = cX_1 + bX_2, \quad X'_2 = -bX_1 + cX_2, \quad X'_i = X_i, \quad i = 3, 4, 5$$

se obtiene, con respecto a la nueva base, que $P = A'_{12} + A'_{34}$ y $S = aA'_{12} + a'A'_{34} + C'$ donde $C' = A'_{14} + A'_{32}$. Además, se puede expresar S como

$$S = \frac{1}{2}(a + a')(A'_{12} + A'_{34}) + \frac{1}{2}(a' - a)(A'_{34} - A'_{12}) + C'$$

y, así, $\mathfrak{k}$ contiene un endomorfismo de la forma

$$Q = Cos\Phi(A'_{34} - A'_{12}) + Sen\Phi C'$$

donde, $Sen\Phi \neq 0$. En efecto, como $P, S \in \mathfrak{k}$ se tiene que

$$Q = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}(a'-a)^2}} S - \frac{\frac{1}{2}(a+a')}{\sqrt{1+\frac{1}{4}(a'-a)^2}} P \right) =$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{2}(a'-a)}{\sqrt{1+\frac{1}{4}(a'-a)^2}} (A'_{34} - A'_{12}) + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}(a'-a)^2}} C' \right) \in \mathfrak{k}$$

y, como

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}(a'-a)^2}} \in \left]0, 1\right], \qquad \frac{\frac{1}{2}(a+a')}{\sqrt{1+\frac{1}{4}(a'-a)^2}} \in \left[0, 1\right[,$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}(a'-a)^2}} \right)^2 + \left(\frac{\frac{1}{2}(a+a')}{\sqrt{1+\frac{1}{4}(a'-a)^2}} \right)^2 = 1,$$

se sabe que existe $\Phi \in \left]0, 2\pi\right[$ tal que

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}(a'-a)^2}} = Sen\Phi \neq 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\frac{1}{2}(a+a')}{\sqrt{1+\frac{1}{4}(a'-a)^2}} = Cos\Phi \; .$$

Considerando una nueva base adaptada $\{X_1^*, \ldots, X_5^*\}$ dada por

$$X_1^* + iX_3^* = e^{i\frac{\Phi}{2}}(X_1' + iX_3'), \quad X_2^* + iX_4^* = e^{i\frac{\Phi}{2}}(X_2' + iX_4'), \quad X_5^* = X_5'.$$

Es decir, tal que

$$\left.\begin{array}{llllll}
X_1^* = & Cos\frac{\Phi}{2} X_1' & & -Sen\frac{\Phi}{2} X_3' & & \\
X_2^* = & & Cos\frac{\Phi}{2} X_2' & & -Sen\frac{\Phi}{2} X_4' & \\
X_3^* = & Sen\frac{\Phi}{2} X_1' & & +Cos\frac{\Phi}{2} X_3' & & \\
X_4^* = & & Sen\frac{\Phi}{2} X_2' & & +Cos\frac{\Phi}{2} X_4' & \\
X_5^* = & & & & & X_5'
\end{array}\right\}.$$

Y, realizando el cambio, se obtiene con respecto a la nueva base que $P = A_{12}^* + A_{34}^* \in \mathfrak{k}$ y $Q = A_{34}^* - A_{12}^* \in \mathfrak{k}$. Por tanto, como $Q + P = 2A_{34}^* \in \mathfrak{k}$ y $Q - P = -2A_{12}^* \in \mathfrak{k}$, se tiene que $(A_{12}^*, A_{34}^*) \subset \mathfrak{k}$. Realizando ahora el mismo estudio que en *iia)* pero en esta nueva base, se obtienen (B), (C) ó (D).

Así, ya se puede comenzar con la clasificación de una manera sistemática. Para ello, se irán analizando por separado cada uno de los casos de la Proposición 3.4.2.3.

Análisis del Caso A de la Proposición 3.4.2.3

Aquí se tiene que $\mathfrak{k} = (P) = (\alpha A_{12} + \beta A_{34})$ donde $\alpha \neq 0$. Entonces, denotando $\tilde{R}(X_i, X_j) = a_{ij}P$, $i, j = 1,\ldots,4$ y sustituyendo en (3.29) se obtiene que

$$\beta a_{12} = \lambda\rho\,,\ \ \alpha a_{13} = \alpha a_{14} = \alpha a_{23} = \alpha a_{24} = 0\,,\ \ \alpha a_{34} = \lambda\rho$$

y, por tanto, que

$$\tilde{R}(X_1, X_3) = \tilde{R}(X_1, X_4) = \tilde{R}(X_2, X_3) = \tilde{R}(X_2, X_4) = 0 \qquad \textbf{(3.32)}$$

y

$$\tilde{R}(X_1, X_2) = uP\,, \qquad \tilde{R}(X_3, X_4) = vP \qquad \textbf{(3.33)}$$

donde, por el Lema 3.2.3, u, v no pueden ser cero simultáneamente. Además, como $\beta \neq 0$ (ya que si no lo fuera, de la primera relación de (3.29) se obtendría que $\lambda\rho = 0$ y, por tanto, que el espacio sería descomponible) se puede suponer además de $\lambda > 0$ y $\rho > 0$, que $u = {}^{\lambda\rho}\!/_{\beta} \neq 0$, $v = {}^{\lambda\rho}\!/_{\alpha} \neq 0$ y $P = \alpha A_{12} + \beta A_{34}$ donde $\alpha\beta \neq 0$.

Así, sustituyendo (3.32) y (3.33) en (3.29), se obtiene

$$u\beta = v\alpha = \lambda\rho > 0\,. \qquad \textbf{(3.34)}$$

Además, si

$$d = \lambda\alpha - \rho\beta\,, \qquad \textbf{(3.35)}$$

utilizando (3.34), multiplicando a ambos lados por $-\rho\beta^{-1}$ y por $\lambda\alpha^{-1}$ se obtiene respectivamente

$$\rho^2 - u\alpha = -\rho\beta^{-1}d \ \text{ y } \ \lambda^2 - v\beta = \lambda\alpha^{-1}d\,. \qquad \textbf{(3.36)}$$

Ahora, a partir de (3.1), (3.8), (3.17), (3.27), (3.32) y (3.33) se calcula la tabla de multiplicar asociada al álgebra de Lie $\hat{\mathfrak{g}} = V + \mathfrak{k}$ obteniendo

$$\left.\begin{array}{c} [X_1,X_2]=-\rho X_5-uP, \quad [X_3,X_4]=-\lambda X_5-vP, \\ [X_1,X_3]=[X_1,X_4]=[X_2,X_3]=[X_2,X_4]=0, \\ [X_1,X_5]=\rho X_2, \qquad [X_2,X_5]=-\rho X_1, \\ [X_3,X_5]=\lambda X_4, \qquad [X_4,X_5]=-\lambda X_3, \\ [P,X_1]=\alpha X_2, \qquad [P,X_2]=-\alpha X_1, \\ [P,X_3]=\beta X_4, \qquad [P,X_4]=-\beta X_3, \\ [P,X_5]=0. \end{array}\right\} \qquad \textbf{(3.37)}$$

Nota 3.4.2.4

Obsérvese a partir de (3.37) que esta es un álgebra de Lie reductiva; es decir, que $[\mathfrak{k},V]\subset V$ donde, $\mathfrak{k}=(P)$.

Para continuar el análisis de este caso se distinguirán dos nuevos subcasos dependiendo del valor de *d*.

Subcaso A.1 ($d=0$)

En este caso, se tiene que (3.36) se reduce a

$$\rho^2-u\alpha=0 \ \text{ y } \ \lambda^2-v\beta=0\,. \qquad \textbf{(3.38)}$$

Y, además, multiplicando $\rho^2-u\alpha=0$ por *v* y utilizando (3.34) se sigue que

$$\rho v-\lambda u=0\,. \qquad \textbf{(3.39)}$$

Así, reemplazando el vector X_5 por $W=X_5+u\rho^{-1}P$ se define una nueva descomposición reductiva (observar que no es naturalmente reductiva)

$$\hat{\mathfrak{g}}=(X_1,X_2,X_3,X_4,W)\oplus(P)=\hat{V}\oplus\mathfrak{k}$$

ya que, a partir de (3.37) se tiene que

$$\left.\begin{array}{c} [P,X_1]=\alpha X_2, \qquad [P,X_2]=-\alpha X_1, \\ [P,X_3]=\beta X_4, \qquad [P,X_4]=-\beta X_3, \\ [P,W]=0. \end{array}\right\}$$

y, que $\hat{V}$ es álgebra de Lie con la siguiente tabla de multiplicar:

$$\left.\begin{array}{c} [X_1,X_2]=-\rho W, \quad [X_3,X_4]=-\lambda W, \\ [X_1,X_3]=[X_1,X_4]=[X_2,X_3]=[X_2,X_4]=0, \\ [X_1,W]=[X_2,W]=[X_3,W]=[X_4,W]=0. \end{array}\right\} \qquad \textbf{(3.40)}$$

Ahora, identificando canónicamente $\hat{V}$ con T_oM vía la proyección canónica $\pi : G \to G/H$ se obtiene un producto interior sobre $\hat{V}$ con el cual la base es ortonormal. Así, siguiendo el mismo procedimiento que en el Primer Caso de la Proposición 2.3.4.1.8, se tiene que el espacio (M,g) es un grupo y puede ser identificado con el grupo de Lie

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ u & v & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x,y,z,u,v \in \mathbb{R} \right\},$$

el cual tiene una métrica invariante a izquierda dependiendo de los parámetros λ y ρ. Por tanto, G puede ser identificado con el producto cartesiano $\mathbb{R}^5(x,y,z,u,v)$ donde cualquiera de las métricas es de la forma

$$g = \frac{1}{\rho}(du^2 + dx^2) + \frac{1}{\lambda}(dv^2 + dy^2) + (udx + vdy - dz)^2 .$$

Así, se ha obtenido el Tipo III del Teorema de la Clasificación.

Nota 3.4.2.5

Obsérvese que si $\lambda = \rho$ se obtiene, al igual que en el Primer Caso de la Proposición 2.3.4.1.8 y en [K.3], la familia de los espacios 4 – simétricos de Tipo 1.

Subcaso A.2 (d $\neq 0$)

Aquí, debido a que el determinante de la matriz del cambio de base $\rho v - \lambda u \neq 0$, reemplazando X_5 y P por $W_1 = \rho X_5 + uP$ y $W_2 = \lambda X_5 + vP$ se obtiene que $\{X_1, X_2, X_3, X_4, W_1, W_2\}$ es una nueva base del álgebra de Lie $\hat{\mathfrak{g}} = V \oplus \mathfrak{k}$.

Así, a partir de (3.37), (3.34), (3.35) y (3.36), se sigue que la tabla de multiplicar asociada al álgebra de Lie $\hat{\mathfrak{g}}$ en la nueva base es

$$\left.\begin{array}{l} [X_1,X_2] = -W_1,\ [X_1,W_1] = (\rho^2 - u\alpha)X_2,\ [X_2,W_1] = -(\rho^2 - u\alpha)X_1, \\ [X_3,X_4] = -W_2,\ [X_3,W_2] = (\lambda^2 - v\beta)X_4,\ [X_4,W_2] = -(\lambda^2 - v\beta)X_3. \end{array}\right\} \qquad \textbf{(3.41)}$$

Lema 3.4.2.6

A partir de (3.41) se obtiene que el álgebra de Lie $\hat{\mathfrak{g}}$ puede ser identificada con:

a) $\hat{\mathfrak{g}} \cong \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$ si $\rho^2 - u\alpha > 0$ y $\lambda^2 - v\beta > 0$,

b) $\hat{\mathfrak{g}} \cong \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ si $(\rho^2 - u\alpha)(\lambda^2 - v\beta) < 0$,

c) $\hat{\mathfrak{g}} \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ si $\rho^2 - u\alpha < 0$ y $\lambda^2 - v\beta < 0$.

Demostración

En los tres casos se realizará un cambio de base de forma que los coeficientes de (3.41) sean $+1$, -1 y 0, para poder identificar la tabla obtenida con alguna de las ya conocidas debido a la Clasificación de las álgebras de Lie de Cartan. [H.1, Capítulos III, X]

Así, si se supone que $\rho^2 - u\alpha > 0$ y $\lambda^2 - v\beta > 0$ y, se realiza el cambio de base dado por

$$\left.\begin{array}{ll} X_1^* = (\rho^2 - u\alpha)^{-1/2} X_1, & X_2^* = (\rho^2 - u\alpha)^{-1/2} X_2, \\ X_3^* = (\lambda^2 - v\beta)^{-1/2} X_3, & X_4^* = (\lambda^2 - v\beta)^{-1/2} X_4, \\ W_1^* = (\rho^2 - u\alpha)^{-1} W_1, & W_2^* = (\lambda^2 - v\beta)^{-1} W_2, \end{array}\right\} \quad \textbf{(3.42)}$$

se obtiene que (3.41) es ahora

$$\left.\begin{array}{l} [X_1^*, X_2^*] = -W_1^*,\ [X_1^*, W_1^*] = X_2^*,\ [X_2^*, W_1^*] = -X_1^*, \\ [X_3^*, X_4^*] = -W_2^*,\ [X_3^*, W_2^*] = X_4^*,\ [X_4^*, W_2^*] = -X_3^*. \end{array}\right\} \quad \textbf{(3.43)}$$

Por otra parte, se sabe que

$$\mathfrak{so}(3) = \left\langle E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

y su tabla de multiplicar asociada es

$$[E_1, E_2] = -E_3,\ [E_1, E_3] = E_2,\ [E_2, E_3] = -E_1.$$

Por tanto, identificando $E_1 \equiv W_1^* \equiv W_2^*$, $E_2 \equiv X_1^* \equiv X_3^*$ y $E_3 \equiv X_2^* \equiv X_4^*$, se obtiene que en este caso $\hat{\mathfrak{g}} \cong \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$.

En el caso de que $(\rho^2 - u\alpha)(\lambda^2 - v\beta) < 0$, se supone $\rho^2 - u\alpha > 0$ y $\lambda^2 - v\beta < 0$ (ya que el análisis del caso contrario se desarrollaría de forma análoga) y, realizando el cambio de base dado por

$$\left.\begin{array}{ll} X_1^* = (\rho^2 - u\alpha)^{-1/2} X_1, & X_2^* = (\rho^2 - u\alpha)^{-1/2} X_2, \\ X_3^* = (-\lambda^2 + v\beta)^{-1/2} X_3, & X_4^* = (-\lambda^2 + v\beta)^{-1/2} X_4, \\ W_1^* = (\rho^2 - u\alpha)^{-1} W_1, & W_2^* = (-\lambda^2 + v\beta)^{-1} W_2, \end{array}\right\} \quad \textbf{(3.44)}$$

se obtiene que (3.41) toma la forma

$$\left.\begin{array}{l} [X_1^*, X_2^*] = -W_1^*,\ [X_1^*, W_1^*] = X_2^*,\ [X_2^*, W_1^*] = -X_1^*, \\ [X_3^*, X_4^*] = -W_2^*,\ [X_3^*, W_2^*] = -X_4^*,\ [X_4^*, W_2^*] = X_3^*. \end{array}\right\} \quad \textbf{(3.45)}$$

Como además de lo dicho en el caso anterior sobre el espacio $\mathfrak{so}(3)$ se sabe que [H.1, Pág. 519]

$$\mathfrak{so}(2,1) = \left\langle E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \approx \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$$

y que su tabla de multiplicar asociada es

$$[E_4, E_5] = -E_6,\ [E_4, E_6] = E_5,\ [E_5, E_6] = E_4,$$

identificando $E_1 \equiv W_1^*$, $E_2 \equiv X_1^*$ y $E_3 \equiv X_2^*$, $E_4 \equiv W_2^*$, $E_5 \equiv X_4^*$ y $E_6 \equiv X_3^*$ se obtiene que $\hat{\mathfrak{g}} \cong \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$.

Por último, si $\rho^2 - u\alpha < 0$ y $\lambda^2 - v\beta < 0$, se realiza el cambio de base dado por

$$\left.\begin{array}{ll} X_1^* = (-\rho^2 + u\alpha)^{-1/2} X_1, & X_2^* = (-\rho^2 + u\alpha)^{-1/2} X_2, \\ X_3^* = (-\lambda^2 + v\beta)^{-1/2} X_3, & X_4^* = (-\lambda^2 + v\beta)^{-1/2} X_4, \\ W_1^* = (-\rho^2 + u\alpha)^{-1} W_1, & W_2^* = (-\lambda^2 + v\beta)^{-1} W_2, \end{array}\right\} \quad \textbf{(3.46)}$$

obteniendo que la expresión de (3.41) es

$$\left.\begin{array}{l} [X_1^*, X_2^*] = -W_1^*,\ [X_1^*, W_1^*] = -X_2^*,\ [X_2^*, W_1^*] = X_1^*, \\ [X_3^*, X_4^*] = -W_2^*,\ [X_3^*, W_2^*] = -X_4^*,\ [X_4^*, W_2^*] = X_3^*. \end{array}\right\} \quad \textbf{(3.47)}$$

Así, por lo dicho en el caso anterior sobre el espacio $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, si se identifica $E_4 \equiv W_1^* \equiv W_2^*$, $E_5 \equiv X_2^* \equiv X_4^*$ y $E_6 \equiv X_1^* \equiv X_3^*$ se obtiene que $\hat{\mathfrak{g}} \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$.

Por otra parte, se sabe que la subálgebra de isotropía $\mathfrak{k}$ está generada por P. Y, debido a $W_1 = \rho X_5 + uP$ y $W_2 = \lambda X_5 + vP$, se obtiene despejando que

$$P = (\lambda u - \rho v)^{-1}(\lambda W_1 - \rho W_2)\,. \qquad \textbf{(3.48)}$$

Ahora se analiza cada caso del Lema 3.4.2.6.

En el caso ***a)***, a partir de (3.48) y como $W_1 = \rho X_5 + uP$, con respecto a la nueva base (3.42) se tiene que

$$P = (\lambda u - \rho v)^{-1}(\lambda W_1 - \rho W_2) = (\lambda u - \rho v)^{-1}\left(\lambda \frac{(\rho^2 - u\alpha)^{-1}}{(\rho^2 - u\alpha)^{-1}} W_1 - \rho \frac{(\lambda^2 - v\beta)^{-1}}{(\lambda^2 - v\beta)^{-1}} W_2\right) =$$
$$= (\lambda u - \rho v)^{-1}\lambda(\rho^2 - u\alpha)W_1 - (\lambda u - \rho v)^{-1}\rho(\lambda^2 - v\beta)W_2 \overset{(4.34)}{=} -\alpha W_1^* - \beta W_2^*,$$

$$X_5 = \frac{1}{\rho}(W_1 - uP) = \frac{1}{\rho}((\rho^2 - u\alpha)W_1^* - u(-\alpha W_1^* - \beta W_2^*)) = \qquad \textbf{(3.49)}$$
$$= \frac{1}{\rho}(\rho^2 W_1^* + u\beta W_2^*)) \overset{(4.34)}{=} \rho W_1^* + \lambda W_2^*.$$

A continuación, se desarrolla la *Realización geométrica* correspondiente a este caso *a)*

Como se sabe que $\hat{\mathfrak{g}} \cong \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$, utilizando la aplicación exponencial $\exp : \hat{\mathfrak{g}} \to \hat{G}$ se obtiene que $\hat{G} = SO(3) \times SO(3)$. Para calcular el grupo de Lie K asociado al álgebra de isotropía $\mathfrak{k}$, se sigue la realización geométrica realizada en el Apartado 2.3.3.1. En este caso, debido a la demostración del Lema 3.4.2.6 y (3.49) se sabe que

$$\mathfrak{k} = \{tP : t \in \mathbb{R}\} = \{t(-\alpha W_1^* - \beta W_2^*) : t \in \mathbb{R}, \alpha\beta \neq 0\} =$$
$$= \{-t(W_1^* + rW_2^*) : t \in \mathbb{R}\bar{A}, r = {}^{\beta}\!/_{\alpha} \neq 0\} = \{-tE_1 - r \cdot tE_1 : t \in \mathbb{R}, r \neq 0\} =$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -t & 0 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -r\cdot t & 0 \\ r\cdot t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}, r \neq 0 \right\}$$

y, por tanto, utilizando la aplicación exponencial $\exp : \mathfrak{k} \to K$ se obtiene que K es el subgrupo $SO(2)_r$ de todos los productos de matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} Cost & -Sent & 0 \\ Sent & Cost & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Cos(rt) & -Sen(rt) & 0 \\ Sen(rt) & Cos(rt) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde, $t \in \mathbb{R}$ y $r = {}^{\beta}\!/_{\alpha} \neq 0$.

Además, se considerará que *r* es un número racional ya que en otro caso el subgrupo *K* no sería cerrado en $\hat{G}$. En efecto, como fijado *r*,

$$S^1 \times S_r^1 \cong \left\{ \begin{pmatrix} Cost & -Sent & 0 \\ Sent & Cost & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Cos(rt) & -Sen(rt) & 0 \\ Sen(rt) & Cos(rt) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : t \in [0, 2\pi] \right\}$$

se tiene que $SO(2)_r \cong S^1 \times S_r^1$ es un subespacio del toro para cada *r*. Por tanto, se sigue la tesis ya que, cualquier subespacio del toro es cerrado si y sólo si tiene ángulo racional.

A continuación se calcula la métrica G – invariante *g*. Para ello, utilizando el mismo método que en el Lema 2.3.4.1.10 se obtiene que se puede representar la base del álgebra de Lie $\hat{\mathfrak{g}}$, $(X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*, W_1^*, W_2^*)$ sobre $\mathbb{R}^6(x_j, y_j)$, $j = 1, 2, 3$, por la siguiente base de campos vectoriales invariantes a izquierda:

$$W_1^* = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad X_1^* = x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad X_2^* = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3},$$

$$W_2^* = y_1 \frac{\partial}{\partial y_2} - y_2 \frac{\partial}{\partial y_1}, \qquad X_3^* = y_2 \frac{\partial}{\partial y_3} - y_3 \frac{\partial}{\partial y_2}, \qquad X_4^* = y_3 \frac{\partial}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial}{\partial y_3}.$$

Ahora, a partir de (3.42) y realizando unos sencillos cálculos se sabe que la nueva base es ortogonal y que

$$g(X_1^*, X_1^*) = g(X_2^*, X_2^*) = (\rho^2 - u\alpha)^{-1}, \quad g(X_3^*, X_3^*) = g(X_4^*, X_4^*) = (\lambda^2 - v\beta)^{-1},$$
$$g(W_1^*, W_1^*) = (\rho^2 - u\alpha)^{-2}, \quad g(W_2^*, W_2^*) = (\lambda^2 - v\beta)^{-2}.$$

Entonces, resolviendo unas sencillas ecuaciones como en el capítulo anterior y, utilizando que a partir de (3.36), (3.35) y tomando $r = \beta/\alpha$ se tiene que

$$\rho^2 - u\alpha = \rho^2 - \rho\lambda r^{-1} \text{ y } \lambda^2 - v\beta = \lambda^2 - \rho\lambda r,$$

para un *r* fijado se obtienen las posibles métricas Riemannianas dependiendo sólo de los parámetros reales ρ, λ.

Además, debido al siguiente lema cuya demostración puede ser consultada en el Apartado B.2 del Anexo B, se puede concluir que los parámetros *r*, ρ, λ son esenciales; es decir, que todos los espacios localmente isométricos a esta familia de espacios tienen estos parámetros.

Lema 3.4.2.7

Calculando el tensor de Ricci y las curvaturas seccionales de nuestro espacio (M, g) se obtiene que hay dos raíces de Ricci dobles, $\frac{1}{2}\rho^2 - \rho\lambda r^{-1}$ y

$\frac{1}{2}\lambda^2 - \rho\lambda r$, una raíz de Ricci simple, $\frac{1}{2}(\lambda^2 + \rho^2)$ y, dos curvaturas seccionales a distinguir, $\frac{1}{4}\rho^2$ y $\frac{1}{4}\lambda^2$.

Por tanto, se puede modelizar nuestro espacio (M,g) (salvo una isometría local) como un espacio homogéneo $M = \hat{G}/K$ donde, $\hat{G} = SO(3)\times SO(3)$, $K = SO(2)_r$, $r \in \mathbb{Q}$ y la familia de métricas invariantes naturalmente reductivas, g, dependen de los parámetros reales λ, ρ.

Realizando de forma análoga el estudio de los casos ***b)*** y ***c)*** del Lema 3.4.2.6 se obtienen los espacios

$$\frac{SO(3)\times SL(2,\mathbb{R})}{SO(2)_r} \quad \text{y} \quad \frac{SL(2,\mathbb{R})\times SL(2,\mathbb{R})}{SO(2)_r}$$

donde, $r \in \mathbb{Q}$ y la familia de métricas invariantes naturalmente reductivas, g, dependen de los parámetros reales λ, ρ.

Así, se ha obtenido el Tipo I del Teorema de la Clasificación dada en el Apartado 3.3 donde, cada uno de los 3 subtipos de toda la familia de espacios localmente no isométricos depende de dos parámetros reales y uno racional.

Análisis del Caso B de la Proposición 3.4.2.3

Aquí, se tiene que $\mathfrak{k} = (A_{12}, A_{34})$. Entonces, se denota por

$$\tilde{R}(X_i, X_j) = a_{ij}A_{12} + b_{ij}A_{34}, \qquad i,j = 1,\ldots,5$$

donde, $\{X_1,\ldots,X_5\}$ es una base ortonormal adaptada. Como se puede comprobar fácilmente que A_{12} y A_{34} conmutan con $\tilde{R}(X_i, X_j)$ para todo i, j, se pueden expresar las condiciones $A_{12}\cdot\tilde{R} = 0$ y $A_{34}\cdot\tilde{R} = 0$ de la forma:

$$\tilde{R}(A_{12}X_i, X_j) + \tilde{R}(X_i, A_{12}X_j) = 0,$$
$$\tilde{R}(A_{34}X_i, X_j) + \tilde{R}(X_i, A_{34}X_j) = 0.$$

Por tanto, además de (3.27), se obtiene que

$$\tilde{R}(X_1, X_3) = \tilde{R}(X_2, X_3) = \tilde{R}(X_1, X_4) = \tilde{R}(X_2, X_4) = 0. \qquad \textbf{(3.50)}$$

Así, las transformaciones

$$\tilde{R}(X_1, X_2) = a_{12}A_{12} + b_{12}A_{34}, \quad \tilde{R}(X_3, X_4) = a_{34}A_{12} + b_{34}A_{34} \qquad \textbf{(3.51)}$$

generan $\mathfrak{k}$ y como $\dim\mathfrak{k} = 2$, estas son las únicas transformaciones no nulas y linealmente independientes.

Desarrollando (3.29) y aplicando (3.50), (3.51), se obtiene que $b_{12} = a_{34} = \lambda\rho$. Por tanto, tomando $a_{12} = \alpha$ y $b_{34} = \beta$, se tiene que

$$\tilde{R}(X_1, X_2) = \alpha A_{12} + \lambda\rho A_{34}, \quad \tilde{R}(X_3, X_4) = \lambda\rho A_{12} + \beta A_{34} \tag{3.52}$$

donde, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\lambda^2\rho^2 \neq \alpha\beta$ (por ser linealmente independientes).

Así, aplicando (3.17), (3.27), (3.50) y (3.52) sobre (3.8) se tiene que la tabla de multiplicar asociada al álgebra de Lie $\hat{\mathfrak{g}} = V \oplus \mathfrak{k} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) \oplus (A_{12}, A_{34})$ es:

$$\left.\begin{array}{c}
[X_1, X_2] = -\rho X_5 - \alpha A_{12} - \lambda\rho A_{34}, \quad [X_3, X_4] = -\lambda X_5 - \lambda\rho A_{12} - \beta A_{34}, \\
[X_1, X_3] = [X_1, X_4] = [X_2, X_3] = [X_2, X_4] = 0, \\
[X_1, X_5] = \rho X_2, \quad [X_2, X_5] = -\rho X_1, \quad [X_3, X_5] = \lambda X_4, \quad [X_4, X_5] = -\lambda X_3, \\
[A_{12}, X_1] = X_2, \ [A_{12}, X_2] = -X_1, \ [A_{12}, X_3] = [A_{12}, X_4] = [A_{12}, X_5] = 0, \\
[A_{34}, X_1] = [A_{34}, X_2] = 0, \ [A_{34}, X_3] = X_4, \ [A_{34}, X_4] = -X_3, \ [A_{34}, X_5] = 0, \\
[A_{12}, A_{34}] = 0.
\end{array}\right\} \tag{3.53}$$

Ahora, con el fin de simplificarla, se consideran

$$\left.\begin{array}{l}
W_1 = \rho X_5 + \alpha A_{12} + \lambda\rho A_{34}, \\
W_2 = \lambda X_5 + \lambda\rho A_{12} + \beta A_{34},
\end{array}\right\} \tag{3.54}$$

$$\left.\begin{array}{l}
W = \tfrac{1}{2}(\rho^{-1}W_1 + \lambda^{-1}W_2) = X_5 + \tfrac{1}{2}(\rho + \alpha\rho^{-1})A_{12} + \tfrac{1}{2}(\lambda + \beta\lambda^{-1})A_{34}, \\
A = \tfrac{1}{2}(\lambda^{-1}W_2 - \rho^{-1}W_1) = \tfrac{1}{2}(\rho - \alpha\rho^{-1})A_{12} + \tfrac{1}{2}(\beta\lambda^{-1} - \lambda)A_{34}.
\end{array}\right\} \tag{3.55}$$

Por un lado, se obtiene una subálgebra $\hat{\hat{\mathfrak{g}}}$ de $\hat{\mathfrak{g}}$ generada por los vectores X_1, X_2, X_3, X_4, W_1, W_2 con la tabla de multiplicar siguiente (calculada a partir de (3.53) y (3.54)):

$$\left.\begin{array}{c}
[X_1, X_2] = -W_1, \ [X_1, W_1] = (\rho^2 - \alpha)X_2, \ [X_2, W_1] = -(\rho^2 - \alpha)X_1, \\
[X_3, X_4] = -W_2, \ [X_3, W_2] = (\lambda^2 - \beta)X_4, \ [X_4, W_2] = -(\lambda^2 - \beta)X_3 \\
\textit{y el resto de relaciones nulas,}
\end{array}\right\} \tag{3.56}$$

y por otro lado se obtiene la descomposición

$$\hat{\hat{\mathfrak{g}}} = \hat{V} \oplus \hat{\mathfrak{k}} = (X_1, X_2, X_3, X_4, W) \oplus (A) \tag{3.57}$$

que es reductiva, ya que $[\hat{\mathfrak{k}}, \hat{V}] \subset \hat{V}$, pero no naturalmente reductiva debido a que la relación (3.9) no es satisfecha si se toman $X = X_1$, $Y = X_3$ y $Z = W$.

Además, en concordancia con (3.55), se tiene que $\{X_1, X_2, X_3, X_4, W\}$ puede ser considerada como una base ortonormal de $\hat{V}$.

A continuación, se desarrolla la *Realización geométrica* asociada a este caso.

Con el objetivo de determinar en este Caso B la variedad Riemanniana simplemente conexa y naturalmente reductiva (M, g), se tiene en primer lugar la representación naturalmente reductiva obtenida $(M, g) = \hat{G}/K$ donde $\hat{G}$ es el grupo correspondiente al álgebra de Lie $\hat{\mathfrak{g}}$ que actúa sobre (M, g) como un grupo de isometrías.

Sean $\hat{\hat{G}}$ y $\hat{K}$ los subgrupos de $\hat{G}$ correspondientes a las subálgebras $\hat{\hat{\mathfrak{g}}}$ y $\hat{\mathfrak{k}}$ de $\hat{\mathfrak{g}}$ respectivamente. Entonces, como $\hat{\hat{G}}$ actúa transitivamente sobre $(M, g) = \hat{G}/K$ y $\hat{K} \subset K$ es el subgrupo de isotropía de $\hat{\hat{G}}$ en el origen, se tiene que $\hat{K}$ es cerrado en $\hat{\hat{G}}$ y, por tanto, que $(M, g) = \hat{\hat{G}}/\hat{K}$ es una nueva representación reductiva (que no es naturalmente reductiva en general).

Así, los espacios buscados (M, g) en este Caso B, pueden ser reconstruidos a partir de la descomposición reductiva (3.57) en la forma $(M, g) = \hat{\hat{G}}/\hat{K}$.

Por otro lado, la descomposición (3.57) proporciona ese tipo de espacio si y sólo si eligiendo un grupo de Lie simplemente conexo (ó con grupo fundamental finito) $\hat{\hat{G}}$ de $\hat{\hat{\mathfrak{g}}}$, el correspondiente subgrupo $\hat{K} \subset \hat{\hat{G}}$ es cerrado.

Para obtener ahora los espacios buscados, se divide el estudio en dos subcasos.

Subcaso B.1 ($(\rho^2 - \alpha)(\lambda^2 - \beta) \neq 0$ en (3.56))

En este caso, comparando (3.56) con (3.41) se ve que tomando $(\rho^2 - \alpha)$ y $(\lambda^2 - \beta)$ como los parámetros reales, $r = (\lambda^2 - \beta)\rho\lambda^{-1}(\rho^2 - \alpha)^{-1}$ como el parámetro racional y siguiendo el método aplicado en el *Subcaso A.2*, se obtiene de nuevo el Tipo I del Teorema de la Clasificación.

Nota 3.4.2.8

Se considera que $r = (\lambda^2 - \beta)\rho\lambda^{-1}(\rho^2 - \alpha)^{-1}$ es el parámetro racional ya que, en el *Subcaso A.2* se tenía que $\mathfrak{k}$ estaba generado por $P = A_{12} + r\, A_{34}$ y, aquí, a partir de (3.55) se obtiene que $\mathfrak{k}$ está generado por A donde:

$$A = A_{12} + (\lambda^2 - \beta)\rho\lambda^{-1}(\rho^2 - \alpha)^{-1}\, A_{34}.$$

Subcaso B.2 ((ρ^2–α)(λ^2–β) = 0 en (3.56))

En este otro caso, se puede suponer que $(\rho^2-\alpha)=0$ y $(\lambda^2-\beta)\neq 0$ ya que, si se analiza el caso contrario se obtiene el mismo resultado y, debido a (3.52), no se puede suponer que $(\rho^2-\alpha)=0=(\lambda^2-\beta)$.

Entonces, utilizando los métodos usuales seguidos en el *Caso A* y en el Capítulo 2, se obtiene que el álgebra $\hat{\hat{\mathfrak{g}}}$ puede ser representada dependiendo del signo de $(\lambda^2-\beta)$ por $H_3\times SO(3)$ ó $H_3\times SL(2,\mathbb{R})$ donde, H_3 denota el grupo de Heisenberg de dimensión 3 y el correspondiente subgrupo $\hat{K}\subset\hat{\hat{G}}$ generado por el endomorfismo $\rho W_2-\lambda W_1$ es el subgrupo $SO(2)^{(r)}$ de todos los productos de matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} Cos(rt) & -Sen(rt) & 0 \\ Sen(rt) & Cos(rt) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde, $t\in\mathbb{R}$ y $r={}^{\rho}\!/_{\lambda}\neq 0$.

Además, como en el *Caso A*, se tiene que $SO(2)^{(r)}\simeq\hat{K}$ es cerrado en $\hat{\hat{G}}$ si y sólo si *r* es un número racional y, que para un *r* fijado, todas las métricas admisibles dependen de los parámetros reales ρ y $(\lambda^2-\beta)$.

Así, se ha obtenido el Tipo II del Teorema de la Clasificación.

Nota 3.4.2.9

Aunque $SO(2)^{(r)}$ no es un grupo compacto por si mismo ya que $t\in\mathbb{R}$, su representación adjunta si lo es (y, además, isomorfa a $SO(2)$).

Esto puede ser explicado por el hecho de que $\hat{\hat{G}}$ no actúa efectivamente sobre $\hat{\hat{G}}/\hat{K}$ aunque si casi – efectivamente ya que, la representación efectiva tiene la forma

$$(M,g)=\frac{\hat{\hat{G}}/N}{\hat{K}/N}$$

donde, *N* es un subgrupo discreto de $SO(2)^{(r)}$ (para $t=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$), [P, Pág. 211].

Análisis del Caso C de la Proposición 3.4.2.3

Aquí, se tiene que $\mathfrak{k}=(A_{34}-A_{12},B,C)$ donde, $B=A_{13}+A_{24}$, $C=A_{14}+A_{32}$ y, que $\lambda=\rho$. Entonces, realizando el cambio de base dado por $X_i^*=\frac{1}{\rho}X_i$, $i=1,\ldots,5$, se obtiene, sin realizar cambios en la notación, que $\{X_i\}_{i=1}^5$ es una base ortogonal con $\|X_i\| = \rho^{-1}$, $i = 1,\dots,5$ y, en lugar de (3.17) la siguiente expresión para el tensor torsión $\tilde{T}$:

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{T}(X_1,X_2) = X_5,\ \tilde{T}(X_1,X_5) = -X_2,\ \tilde{T}(X_2,X_5) = X_1, \\ \tilde{T}(X_1,X_3) = \tilde{T}(X_1,X_4) = \tilde{T}(X_2,X_3) = \tilde{T}(X_2,X_4) = 0, \\ \tilde{T}(X_3,X_4) = X_5,\ \tilde{T}(X_3,X_5) = -X_4,\ \tilde{T}(X_4,X_5) = X_3 \end{array}\right\}. \tag{3.58}$$

Así, se denotará $\tilde{R}(X_i,X_j) = a_{ij}(A_{12} - A_{34}) + b_{ij}B + c_{ij}C$, $i,j = 1,\dots,4$.

Aplicando (3.28) y teniendo en cuenta que $\lambda = \rho$, se obtiene que

$$\tilde{R}(X_2,X_4) = \tilde{R}(X_1,X_3), \qquad \tilde{R}(X_2,X_3) = -\tilde{R}(X_1,X_4). \tag{3.59}$$

Más aún, para cada endomorfismo P de V, para todo $X,\ Y \in V$ $\ P\cdot\tilde{R} = 0$ es equivalente a

$$[P,\tilde{R}(X,Y)] = \tilde{R}(PX,Y) + \tilde{R}(X,PY).$$

Así, la identidad $(A_{12} - A_{34})\cdot\tilde{R} = 0$ implica

$$[A_{12} - A_{34},\tilde{R}(X_1,X_2)] = 0, \quad [A_{12} - A_{34},\tilde{R}(X_3,X_4)] = 0$$

y las identidades $B\cdot\tilde{R} = C\cdot\tilde{R} = 0$ dan

$$[B,\tilde{R}(X_1,X_3)] = [C,\tilde{R}(X_1,X_4)] = 0.$$

Desarrollando estas últimas identidades utilizando (3.31), se obtiene que

$$b_{12} = c_{12} = 0, \quad b_{34} = c_{34} = 0, \quad a_{13} = c_{13} = 0, \quad a_{14} = b_{14} = 0.$$

Así,

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{R}(X_1,X_2) = a_{12}(A_{12} - A_{34}), \\ \tilde{R}(X_3,X_4) = a_{34}(A_{12} - A_{34}), \\ \tilde{R}(X_1,X_3) = b_{13}B, \\ \tilde{R}(X_1,X_4) = c_{14}C \end{array}\right\}. \tag{3.60}$$

Ahora, utilizando (3.31) como antes y, además, (3.59) y (3.60) para $i = 1,\dots,5$ se obtiene que $a_{12} = c_{14}$ a partir de $(B\cdot\tilde{R})(X_1,X_2)X_i = 0$, que $a_{34} = -c_{14}$ a partir de $(B\cdot\tilde{R})(X_3,X_4)X_i = 0$ y que $a_{12} = b_{13}$ a partir de $(C\cdot\tilde{R})(X_1,X_2)X_i = 0$.

Además, si se calcula la expresión de (3.29) en la nueva base y, se desarrollan las identidades obtenidas utilizando (3.60) y las condiciones conocidas sobre a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, $i, j = 1,\dots,4$, se obtiene que $a_{12} = -\frac{1}{3}$.

Por tanto, junto con (3.27) se tiene que la expresión exacta de $\tilde{R}$ es:

$$\left.\begin{array}{r} \tilde{R}(X_1, X_2) = -\frac{1}{3}(A_{12} - A_{34}), \quad \tilde{R}(X_3, X_4) = \frac{1}{3}(A_{12} - A_{34}), \\ \tilde{R}(X_1, X_3) = -\frac{1}{3}B = \tilde{R}(X_2, X_4), \\ \tilde{R}(X_1, X_4) = -\frac{1}{3}C = -\tilde{R}(X_2, X_3). \end{array}\right\} \qquad \textbf{(3.61)}$$

Ahora, utilizando (3.8), (3.58) y (3.61), se calcula la tabla de multiplicar asociada al álgebra de Lie $\hat{\mathfrak{g}} = V + \mathfrak{k}$ obteniendo:

$[\downarrow, \rightarrow]$	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	A	B	C
X_1	0	$-X_5 - \frac{1}{3}A$	$\frac{1}{3}B$	$\frac{1}{3}C$	X_2	X_2	$-X_3$	$-X_4$
X_2	$X_5 + \frac{1}{3}A$	0	$-\frac{1}{3}C$	$\frac{1}{3}B$	$-X_1$	$-X_1$	$-X_4$	X_3
X_3	$-\frac{1}{3}B$	$\frac{1}{3}C$	0	$-X_5 + \frac{1}{3}A$	X_4	$-X_4$	X_1	$-X_2$
X_4	$-\frac{1}{3}C$	$-\frac{1}{3}B$	$X_5 - \frac{1}{3}A$	0	$-X_3$	X_3	X_2	X_1
X_5	$-X_2$	X_1	$-X_4$	X_3	0	0	0	0
A	$-X_2$	X_1	X_4	$-X_3$	0	0	$2C$	$-2B$
B	X_3	X_4	$-X_1$	$-X_2$	0	$-2C$	0	$2A$
C	X_4	$-X_3$	X_2	$-X_1$	0	$2B$	$-2A$	0

(3.62)

donde, por simplificar, se denota $A_{34} - A_{12}$ por A.

Realizando el cambio de base dado por:

$$X_1^* = -\sqrt{3}X_1, \quad X_2^* = \sqrt{3}X_2, \quad Y_1^* = \sqrt{3}X_3, \quad Y_2^* = \sqrt{3}X_4, \quad W = X_5,$$

$$A_2 = A, \quad A_1 = B, \quad A_3 = C$$

y, escribiendo X_1, X_2, Y_1, Y_2 en lugar de X_1^*, X_2^*, Y_1^*, Y_2^* se obtiene la tabla de multiplicar (2.50) que se encuentra en [K.2, Pág. 42]. Entonces, en este caso se obtiene la familia de espacios 4 – simétricos del Tipo 6a descrito en [K.2] ó en [K.3] y, que ha sido desarrollado en el Caso C2A) del estudio del Tercer Caso de la Proposición 2.3.4.1.8 del Apartado 2.3.4.1. Más específicamente, se obtiene la variedad subyacente $S^5 = SU(3)/SU(2)$ con una familia paramétrica de métricas $SU(3)$ - invariantes. Además, estos espacios son isométricos a las esferas geodésicas del espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}P^3$ ó a las esferas geodésicas del espacio hiperbólico complejo $\mathbb{C}H^3$.

Posteriormente, se verá que esta familia es un caso especial de una clase de espacios más general, que se denominará Tipo IV en el Teorema de la Clasificación.

Análisis del Caso D de la Proposición 3.4.2.3

En este caso, se tiene que $\mathfrak{k}=(A_{12},A_{34},B,C)$ donde, $B=A_{13}+A_{24}$, $C=A_{14}+A_{32}$ y, que $\lambda=\rho$. Entonces, como en el Caso C se tiene una base ortogonal $\{X_i\}_{i=1}^{5}$ con $\|X_i\|=\rho^{-1}$, $i=1,\ldots,5$, donde la expresión para el tensor torsión $\tilde{T}$ es (3.58).

Así, se considerará $\tilde{R}(X_i,X_j)=a_{ij}A_{12}+a'_{ij}A_{34}+b_{ij}B+c_{ij}C$, $i,j=1,\ldots,4$ y como en el caso anterior, se tiene (3.59).

Además, utilizando el mismo método que en el Caso C, respectivamente a partir de $A_{12}\cdot\tilde{R}=A_{34}\cdot\tilde{R}=0$ se obtiene que

$$[A_{12},\tilde{R}(X_1,X_2)]=0 \text{ y } [A_{34},\tilde{R}(X_3,X_4)]=0,$$

desarrollándolas utilizando (3.31), se sigue también respectivamente

$$b_{12}=c_{12}=0 \text{ y } b_{34}=c_{34}=0$$

es decir, que

$$\tilde{R}(X_1,X_2)=a_{12}A_{12}+a'_{12}A_{34}, \quad \tilde{R}(X_3,X_4)=a_{34}A_{12}+a'_{34}A_{34}. \qquad \textbf{(3.63)}$$

A partir de $B\cdot\tilde{R}=C\cdot\tilde{R}=0$ se tiene

$$[B,\tilde{R}(X_1,X_2)]=\tilde{R}(X_3,X_2)+\tilde{R}(X_1,X_4)=2\tilde{R}(X_1,X_4),$$
$$[C,\tilde{R}(X_1,X_2)]=-2\tilde{R}(X_1,X_3)$$

respectivamente y, desarrollándolas también utilizando (3.31) y (3.63) se sigue que

$$\tilde{R}(X_1,X_4)=\frac{1}{2}(a_{12}-a'_{12})C, \quad \tilde{R}(X_1,X_3)=\frac{1}{2}(a_{12}-a'_{12})B. \qquad \textbf{(3.64)}$$

Como a partir de $C\cdot\tilde{R}=0$ también se tiene que

$$[C,\tilde{R}(X_1,X_3)]=\tilde{R}(X_1,X_2)-\tilde{R}(X_3,X_4),$$

desarrollando esta fórmula utilizando (3.31),(3.63) y (3.64) se obtiene que $a'_{12} = a_{34}$, $a'_{34} = a_{12}$.

Así, por ahora, se sabe que

$$\left.\begin{aligned} \tilde{R}(X_1,X_2) &= a_{12}A_{12} + a'_{12}A_{34}, \\ \tilde{R}(X_3,X_4) &= a'_{12}A_{12} + a_{12}A_{34}, \\ \tilde{R}(X_1,X_3) &= \tilde{R}(X_2,X_4) = \frac{1}{2}(a_{12} - a'_{12})B, \\ \tilde{R}(X_1,X_4) &= -\tilde{R}(X_2,X_3) = \frac{1}{2}(a_{12} - a'_{12})C. \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(3.65)}$$

Además, si se calcula la expresión de (3.29) en la nueva base (es decir, se supone que $\lambda = \rho = 1$) y se desarrollan las identidades obtenidas utilizando (3.65), se obtiene que $2a'_{12} - a_{12} = 1$.

Por tanto, junto con (3.27), se tiene que la expresión exacta de $\tilde{R}$ es:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{R}(X_1,X_2) &= (1-4\alpha)A_{12} + (1-2\alpha)A_{34}, \\ \tilde{R}(X_3,X_4) &= (1-2\alpha)A_{12} + (1-4\alpha)A_{34}, \\ \tilde{R}(X_1,X_3) &= \tilde{R}(X_2,X_4) = -\alpha B, \\ \tilde{R}(X_1,X_4) &= -\tilde{R}(X_2,X_3) = -\alpha C \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(3.66)}$$

donde, $\alpha \neq 0$ ya que si no lo fuera $\dim \mathfrak{k} = 1$.

Reemplazando ahora X_5 por $W = X_5 + (1-4\alpha)A_{12} + (1-2\alpha)A_{34}$ y denotando $A_{34} - A_{12}$ por *A*, utilizando (3.8), (3.58) y (3.66), se calcula la tabla de multiplicar asociada al álgebra de Lie $\hat{\mathfrak{g}} = V + \mathfrak{k}$ obteniendo:

$[\downarrow,\rightarrow]$	X_1	X_2	X_3	X_4	W	A	B	C
X_1	0	$-W$	αB	αC	$4\alpha X_2$	X_2	$-X_3$	$-X_4$
X_2	W	0	$-\alpha C$	αB	$-4\alpha X_1$	$-X_1$	$-X_4$	X_3
X_3	$-\alpha B$	αC	0	$-W+2\alpha A$	$2\alpha X_4$	$-X_4$	X_1	$-X_2$
X_4	$-\alpha C$	$-\alpha B$	$W-2\alpha A$	0	$-2\alpha X_3$	X_3	X_2	X_1
W	$-4\alpha X_2$	$4\alpha X_1$	$-2\alpha X_4$	$2\alpha X_3$	0	0	$2\alpha C$	$-2\alpha B$
A	$-X_2$	X_1	X_4	$-X_3$	0	0	$2C$	$-2B$
B	X_3	X_4	$-X_1$	$-X_2$	$-2\alpha C$	$-2C$	0	$2A$
C	X_4	$-X_3$	X_2	$-X_1$	$2\alpha B$	$2B$	$-2A$	0

Finalmente, se realiza el cambio de base dado por:

$$X_i^* = (3|\alpha|)^{-\frac{1}{2}} X_i, \quad i = 1,\dots,4, \qquad X_5^* = (3\alpha)^{-1}(W - \alpha A).$$

Entonces, si $\alpha > 0$, denotando X_i^* por X_i, $i = 1,\dots,5$, se obtiene la tabla de multiplicar (3.62) del *Caso C* aunque, en este caso, se tiene una familia dos paramétrica de métricas invariantes sobre $SU(3)/SU(2)$ dependiendo de ρ y α. Esto coincide con toda la familia de espacios *4* – simétricos del Tipo 6a descrito en [K.2] ó en [K.3] y, que ha sido desarrollado en el Caso C2A) del estudio del Tercer Caso de la Proposición 2.3.4.1.8.

Sin embargo, si $\alpha < 0$, se obtiene el espacio $SU(2,1)/SU(2)$ con una familia dos paramétrica de métricas invariantes; es decir, se obtiene la familia de espacios *4* – simétricos del Tipo 6b descrito en [K.2] ó en [K.3] y que ha sido desarrollado en el Caso C2B) del estudio del Tercer Caso de la Proposición 2.3.4.1.8.

Nota 3.4.2.10

En este último caso se ha reducido la representación original $M = U(3)/U(2)$ (ó $M = U(2,1)/U(2)$) a la representación $M = SU(3)/SU(2)$ (ó $M = SU(2,1)/SU(2)$) cambiando la descomposición naturalmente reductiva dada por (3.58) y (3.66) por una descomposición reductiva (la cual no es naturalmente reductiva en general). Además, observar que sólo cuando $\alpha = \frac{1}{3}$ se obtiene el mismo resultado que en el *Caso C*.

Así, se han obtenido las familias correspondientes al Tipo IV del Teorema de la Clasificación.

3.5. LA CONMUTATIVIDAD

El objetivo de este apartado es probar la conmutatividad de las Familias de Espacios del Tipo I al IV del Teorema de la Clasificación. Para ello, en primer lugar se realizará un breve resumen de los conceptos teóricos necesarios acerca de los espacios conmutativos y se indicará la metodología a seguir.

Para profundizar en la comprensión de la teoría aquí utilizada, en el Anexo A se han desarrollado algunos conceptos sobre Operadores Diferenciales.

3.5.1. Introducción Teórica

Sea *M* una variedad diferenciable, se representa por $C^\infty(M)$ el álgebra de las funciones diferenciales sobre *M* y por *G* un grupo de Lie actuando efectivamente sobre *M*. Entonces, un **operador diferencial** $D : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ se dice invariante con respecto al grupo *G* (ó ***G* – invariante**) si

$$D(f \circ \Phi_g) = (Df) \circ \Phi_g$$

para cualquier $f \in C^\infty(M)$ y cualquier $g \in G$ donde, Φ_g denota la acción de $g \in G$ sobre *M*.

Por el Teorema A.3.2.10 y el Corolario A.3.2.11, se obtiene el resultado siguiente:

Teorema 3.5.1.1

Sea G/H un espacio homogéneo reductivo donde *H* es conexo y compacto y *G* actúa a la izquierda sobre G/H. Entonces, el álgebra $D(G/H)$ de todos los operadores diferenciales *G* – invariantes sobre G/H, tiene un número finito de generadores.

Sea ahora, $(M,g) = G/H$ un espacio Riemanniano homogéneo donde $G = \mathfrak{I}_0(M)$ es el grupo conexo maximal de isometrías sobre (M,g). Entonces, si el álgebra $D(G/H)$ es conmutativa, al **espacio** (M,g) se le denomina **conmutativo** (ó espacio de Gelfand).

Por otra parte, debido a un teorema muy conocido de Gelfand se sabe que cualquier espacio Riemanniano globalmente simétrico es un espacio conmutativo [Li].

Aunque en principio, mediante un cálculo directo se puede comprobar si un espacio homogéneo Riemanniano (M,g) es conmutativo ó no, frecuentemente, será conveniente trabajar con un subgrupo $\hat{G} \subset \mathfrak{I}_0(M)$ el cual actúe transitivamente sobre *M* y, tomar $M = \hat{G}/\hat{H}$ puesto que, de esta manera, si se consigue demostrar que el álgebra $D(\hat{G}/\hat{H})$ es conmutativa entonces, se tendrá que el álgebra $D(G/H)$ también lo es.

Para demostrar que el álgebra $D(\hat{G}/\hat{H})$ es conmutativa, en primer lugar es necesario encontrar un conjunto finito de generadores de $D(\hat{G}/\hat{H})$. Para ello, se considera una descomposición reductiva $\hat{\mathfrak{g}} = V + \hat{\mathfrak{h}}$, del álgebra $\hat{\mathfrak{g}}$, una base $\{X_1, \ldots, X_n\}$ de *V* y se define la aplicación del correspondiente anillo de polinomios sobre $\mathbb{R}$ en el álgebra envolvente universal de $\hat{\mathfrak{g}}$, $\mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}})$,

$$\lambda : \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n] \to \mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}}),$$

de la forma siguiente: dada una secuencia finita $Y_1, \ldots, Y_k$, de elementos de $\{X_1, \ldots, X_n\}$ se define

$$\lambda(Y_1 Y_2 \cdots Y_k) = \frac{1}{k!} \sum_\sigma Y_{\sigma(1)} \bullet Y_{\sigma(2)} \bullet \cdots \bullet Y_{\sigma(k)} \in \mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}})$$

donde, la suma es sobre todas las permutaciones de los índices y la multiplicación en el álgebra envolvente, $\mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}})$, es representada por $\bullet$. Ahora, usando la linealidad de λ, se extiende esta definición sobre $\mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]$.

Sea $\mathbb{R}^{\mathcal{I}}[X_1,\ldots,X_n]\subset\mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]$ el subanillo consistente en todos los polinomios $Ad_{\hat{G}}(\hat{H})$ - invariantes de $\mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]$ y sea $\{P_1,\ldots,P_r\}$ un sistema generador de $\mathbb{R}^{\mathcal{I}}[X_1,\ldots,X_n]$. Entonces, se puede probar, como en [H.1], que siempre existe tal conjunto finito de generadores y que las imágenes, $\lambda(P_1)$, …, $\lambda(P_r)$, en $\mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}})$ determinan un sistema generador de $D(\hat{G}/\hat{H})$. (Véase la Nota 3.5.1.2.)

Ahora, si $\lambda(P_1)$, …, $\lambda(P_r)$ conmutan como elementos del álgebra universal $\mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}})$, se habría probado la conmutatividad de $D(\hat{G}/\hat{H})$.

Aunque éste es un criterio un poco especial, será suficiente para probar la conmutatividad de las familias de espacios del Tipo I al IV del Teorema de la Clasificación. (Para tener un criterio más general ver la Proposición 2 de [K–V.2]).

Nota 3.5.1.2

El uso de esta metodología tiene sentido ya que, siguiendo [H.1] y [H.2], se sabe que

$$D(\hat{G}/\hat{H}) \overset{\text{Teorema } A.3.2.11}{\approx} I(\mathfrak{m})\subset I(\hat{\mathfrak{g}}) \overset{\text{Corolario } A.3.2.7}{\approx} Z(\hat{G})\subset D(\hat{G}) \overset{([H.1],\text{Pag.}108,\text{Prop.}1.9)}{\approx} \mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}}).$$

Además, debido a la Nota A.3.2.2, se puede considerar que $S(\mathfrak{m})$ es $\mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]$ e $I(\mathfrak{m})$ es $\mathbb{R}^{\mathcal{I}}[X_1,\ldots,X_n]$.

3.5.2. Demostración de la Conmutatividad de las familias de espacios del Tipo I al IV del Teorema de la Clasificación.

El desarrollo de este apartado será subdividido a su vez en dos. Así, en primer lugar, se demostrará la conmutatividad de las familias de espacios del Tipo I al III del Teorema de la Clasificación y después, la de la familia de espacios de Tipo IV.

Tipos I, II y III

Aquí, el espacio Riemanniano (M,g) puede ser representado como $M=G/H$ donde, $\mathfrak{g}=V+\mathfrak{h}$ es una descomposición naturalmente reductiva en la cual $V=(X_1,\ldots,X_5)$, $\mathfrak{h}=(A_{12},A_{34})$. Además, el tensor torsión $\tilde{T}$ está dado por (3.17) y las únicas transformaciones curvatura no triviales son $\tilde{R}(X_1,X_2)$ y $\tilde{R}(X_3,X_4)$.

En primer lugar, con el objetivo de calcular el anillo de los polinomios $Ad(H)$ – invariantes, será necesario conocer $Ad(H)$.

Lema 3.5.2.1

$Ad(H)$, correspondiente al álgebra $\mathfrak{h}$, actúa sobre *V* de la manera siguiente:

$$X_1' = Cos\Phi X_1 - Sen\Phi X_2, \qquad X_3' = Cos\Psi X_3 - Sen\Psi X_4, \qquad X_5' = X_5,$$

$$X_2' = Sen\Phi X_1 + Cos\Phi X_2, \qquad X_4' = Sen\Psi X_3 + Cos\Psi X_4$$

donde Φ, $\Psi \in \mathbb{R}$.

Demostración

Como tanto A_{12}, A_{34} como X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 pueden ser considerados endomorfismos de *V*, se tiene que $\mathfrak{g} = V + \mathfrak{h} \subset End(V)$ y así, al hacer actuar la exponencial, $G \subset Aut(V)$. Por tanto, se puede aplicar la Teoría general ([W], Pág. 114, Fórmula (9)) como se indica a continuación.

Por una parte, por [H.2, Pág. 284] se sabe que $Ad_G(h)$ sobre *V* se corresponde con $L_{h^*_0}$ sobre $T_0(G/H)$ y, así, en nuestro caso, se tiene

$$Ad_B(C) = \frac{d}{dt}\{a_B(\exp tC)\}_{t=0} = \frac{d}{dt}\{Be^{tC}B^{-1}\}_{t=0} = \frac{d}{dt}\{Be^{tC}\}_{t=0} = BC$$

donde, $B \in Aut(V)$, $C \in End(V)$.

Por otra parte, como la descomposición $\mathfrak{g} = V + \mathfrak{h}$ es reductiva para todo $h \in H$ se sigue que $Ad_G(h)V \subset V$. Además, como $\mathfrak{h} = (A_{12}, A_{34})$, un elemento $\mathrm{h} \in \mathfrak{h}$ se puede expresar de la forma

$$\mathrm{h} = \begin{pmatrix} 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ -t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & -s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $t, s \in \mathbb{R}$. Entonces, haciendo actuar la aplicación exponencial, se obtiene que los elementos de *H* son de la forma

$$h = \exp(\mathrm{h}) = \begin{pmatrix} Cos\Phi & -Sen\Phi & 0 & 0 & 0 \\ Sen\Phi & Cos\Phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Cos\Psi & -Sen\Psi & 0 \\ 0 & 0 & Sen\Psi & Cos\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H .$$

Como los elementos de H pertenecen a $Aut(V)$, se puede concluir que $Ad_G(h) \in Aut(End(V))$.

Entonces, si se restringe $Ad_G(h) \in Aut(End(V))$ al subespacio generado por los endomorfismos de *V*, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, también denotado por *V*, por ser $Ad_G(h)$ automorfismo, se sigue que la imagen de los elementos de la base de *V* proporciona la base del espacio $Ad_G(h)V$ y, por tanto, las filas de la matriz asociada a $Ad_G(h)$ son las imágenes de los elementos de la base de *V*. Así, como

$$Ad_G(h)X_i = hX_i = X_i'$$

para $i = 1,\ldots,5$, se tiene que

$$\begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \\ X_3' \\ X_4' \\ X_5' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ad_G(h)X_1 \\ Ad_G(h)X_2 \\ Ad_G(h)X_3 \\ Ad_G(h)X_4 \\ Ad_G(h)X_5 \end{pmatrix} = h \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Cos\Phi X_1 - Sen\Phi X_2 \\ Sen\Phi X_1 + Cos\Phi X_2 \\ Cos\Psi X_3 - Sen\Psi X_4 \\ Sen\Psi X_3 + Cos\Psi X_4 \\ X_5 \end{pmatrix}$$

donde Φ, $\Psi \in \mathbb{R}$.

Además, usando la complexificación de *V*; $V^{\mathbb{C}}$, se puede ver que el subanillo $\mathbb{R}^{\mathcal{I}}[X_1,\ldots,X_n]$ de todos los polinomios $Ad(H)$ - invariantes en $\mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]$ coincide con el anillo de polinomios $\mathbb{R}[X_1^2+X_2^2, X_3^2+X_4^2, X_5]$; es decir, $X_1^2+X_2^2$, $X_3^2+X_4^2$ y X_5 son los generadores de $\mathbb{R}^{\mathcal{I}}$.

Las correspondientes λ – imágenes en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ son los operadores $X_1 \bullet X_1 + X_2 \bullet X_2$, $X_3 \bullet X_3 + X_4 \bullet X_4$ y X_5. En efecto,

$$\lambda(X_i^2+X_j^2) = \lambda(X_i^2) + \lambda(X_j^2) = \frac{1}{2!}(X_i \bullet X_i + X_i \bullet X_i ,) + \frac{1}{2!}(X_j \bullet X_j + X_j \bullet X_j ,) =$$
$$= X_i \bullet X_i + X_j \bullet X_j$$

para $i = 1,3$, $j = 2,4$.

A continuación, se probará que estos operadores conmutan en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Todos los corchetes de Lie sobre *V*, a excepción de $[X_1, X_2]$, $[X_3, X_4]$ (que no son necesarios), son conocidos y están dados por la fórmula $[X_i, X_j] = -\tilde{T}(X_i, X_j)$ y (3.17). Así, los dos primeros operadores conmutan; es decir, el conmutador

$$D_1 = [X_1 \bullet X_1 + X_2 \bullet X_2, X_3 \bullet X_3 + X_4 \bullet X_4] = 0 .$$

Para finalizar, se calcula el valor del resto de los conmutadores obteniendo

$$\begin{aligned} D_2 = [X_1 \bullet X_1 + X_2 \bullet X_2, X_5] &= X_1 \bullet X_1 \bullet X_5 - X_5 \bullet X_1 \bullet X_1 + X_2 \bullet X_2 \bullet X_5 - X_5 \bullet X_2 \bullet X_2 = \\ &= X_1 \bullet [X_1, X_5] + [X_1, X_5] \bullet X_1 + X_2 \bullet [X_2, X_5] + [X_2, X_5] \bullet X_2 = \\ &= X_1 \bullet \rho X_2 + \rho X_2 \bullet X_1 - X_2 \bullet \rho X_1 - \rho X_1 \bullet X_2 = 0 \end{aligned}$$

y, de forma análoga, se prueba que

$$D_3 = [X_3 \bullet X_3 + X_4 \bullet X_4, X_5] = 0 .$$

Tipo IV

Aquí, el espacio Riemanniano (M, g) puede ser representado como $M = \hat{G}/K$ donde, $\hat{\mathfrak{g}} = V + \mathfrak{k}$ es una descomposición reductiva en la cual $V = (X_1, \ldots, X_5)$.

Suponiendo que $\tilde{T}$ y $\tilde{R}$ están dados por (3.58) y (3.61) respectivamente; es decir, considerando que $M = SU(3)/SU(2)$, se tiene que $\hat{\mathfrak{g}} = V + \mathfrak{k}$ es el álgebra descrita en (3.62) y $\mathfrak{k} = (A_{34} - A_{12}, A_{13} + A_{24}, A_{14} + A_{32})$.

Con el objetivo de calcular el anillo de los polinomios $Ad(K)$ - invariantes, se probará en primer lugar, que el grupo *K* generado por la subálgebra $\mathfrak{k}$ actúa transitivamente sobre la esfera unidad $S^3 \subset (X_1, \ldots, X_4) \subset V$. En efecto, como se tiene la descomposición reductiva $\mathfrak{so}(4) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{so}(3)$ donde, $\mathfrak{so}(3) = (A_{12}, A_{23}, A_{31})$, se puede identificar $\mathfrak{k}$ con el espacio tangente $T_0 S^3$ vía la proyección fibrada

$$\pi : SO(4) \to \frac{SO(4)}{SO(3)} = S^3$$

y, por tanto, el correspondiente subgrupo $K \subset SO(4)$ actúa sobre S^3 transitivamente. (De hecho, *K* no es más que el grupo de los cuaterniones unitarios $Sp(1)$).

En consecuencia, los únicos polinomios independientes y $Ad(K)$ - invariantes en $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_5]$ y, por tanto, generadores de $\mathbb{R}^{\mathcal{I}}[X_1, \ldots, X_5]$, son $\sum_{i=1}^{4} (X_i)^2$ y X_5.

Como las correspondientes λ - imágenes en $\mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}})$ son los operadores $\sum_{i=1}^{4} X_i \bullet X_i \quad X_5$, y los corchetes de Lie sobre V que serán necesarios están dados por la fórmula $[X_i, X_5] = -\tilde{T}(X_i, X_5)$, $i = 1,2,3,4$, usando (3.58) se demuestra fácilmente, que estos operadores conmutan en el álgebra envolvente $\mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}})$.

Nota 3.5.2.2

El caso hiperbólico, $M = SU(2,1)/SU(2)$, se desarrolla de forma análoga.

4. CLASIFICACIÓN DE LOS ESPACIOS HOMOGÉNEOS NATURALMENTE REDUCTIVOS DE DIMENSIÓN 6

En este capítulo, se clasifica la estructura abstracta y naturalmente reductiva $\tilde{T}$ sobre un espacio vectorial V de dimensión 6 que, según el método general (ver [AM]), es el primer paso a seguir para demostrar el Teorema de clasificación buscado.

Así, a lo largo de todo el capítulo se tendrán en cuenta los apartados Introducción y Preliminares del Capítulo 3.

Por otro lado, como sólo interesa en el estudio de los espacios no simétricos, debido al Lema 3.2.3, se puede suponer que $\tilde{T} \neq 0$ y $\tilde{R} \neq 0$. Además, aplicando el Lema 3.2.4, se irán eliminando los casos descomponibles que vayan apareciendo a lo largo de la demostración.

4.1. ENUNCIADO DE LA CLASIFICACIÓN DE $\tilde{T}$

Dados un espacio naturalmente reductivo $(M, g) = G/H$ de dimensión 6 y una conexión canónica adaptada $\tilde{\nabla}$ con tensor curvatura $\tilde{R}$ y tensor torsión $\tilde{T}$, existe una base ortonormal $\{X_1, \dots, X_6\}$ en $V = T_oM$ (llamada base adaptada) para la cual:

A) Si existe una transformación curvatura $\tilde{R}(X,Y): V \to V$ de la forma $P = A_{12}$ con respecto a alguna base adaptada, entonces, $\tilde{T}$ adopta la forma (4.9).

B) Si existe una transformación curvatura $\tilde{R}(X,Y): V \to V$ de la forma $P = \alpha A_{12} + \beta A_{34}$, $\alpha\beta \neq 0$, con respecto a alguna base adaptada, entonces, $\tilde{T}$ adopta una y sólo una de las formas (4.9), (4.23), (4.24), (4.25), (4.26).

C) Si existe una transformación curvatura $\tilde{R}(X,Y):V \to V$ de la forma $P = \alpha A_{12} + \beta A_{34} + \gamma A_{56}$, $\alpha\beta\gamma \neq 0$, con respecto a alguna base adaptada, entonces, $\tilde{T}$ adopta la forma (4.32).

Donde,

$$\left.\begin{array}{l}
\tilde{T}(X_1,X_2)=\rho X_6\\
\tilde{T}(X_1,X_3)=0\\
\tilde{T}(X_1,X_4)=0\\
\tilde{T}(X_1,X_5)=0\\
\tilde{T}(X_1,X_6)=-\rho X_2\\
\tilde{T}(X_2,X_3)=0\\
\tilde{T}(X_2,X_4)=0\\
\tilde{T}(X_2,X_5)=0\\
\tilde{T}(X_2,X_6)=\rho X_1\\
\tilde{T}(X_3,X_4)=\alpha X_5+\tau X_6\\
\tilde{T}(X_3,X_5)=-\alpha X_4\\
\tilde{T}(X_3,X_6)=-\tau X_4\\
\tilde{T}(X_4,X_5)=\alpha X_3\\
\tilde{T}(X_4,X_6)=\tau X_3\\
\tilde{T}(X_5,X_6)=0
\end{array}\right\}$$

$$\rho>0,\ \alpha>0,\ \tau>0 \qquad (4.9)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\tilde{T}(X_1,X_2)=\Phi X_6\\
\tilde{T}(X_1,X_3)=0\\
\tilde{T}(X_1,X_4)=T''^{5}_{1,4}X_5\\
\tilde{T}(X_1,X_5)=-T''^{5}_{1,4}X_4\\
\tilde{T}(X_1,X_6)=-\Phi X_2\\
\tilde{T}(X_2,X_3)=-T''^{5}_{1,4}X_5\\
\tilde{T}(X_2,X_4)=0\\
\tilde{T}(X_2,X_5)=+T''^{5}_{1,4}X_3\\
\tilde{T}(X_2,X_6)=\Phi X_1\\
\tilde{T}(X_3,X_4)=\mu X_6\\
\tilde{T}(X_3,X_5)=-T''^{5}_{1,4}X_2\\
\tilde{T}(X_3,X_6)=-\mu X_4\\
\tilde{T}(X_4,X_5)=T''^{5}_{1,4}X_1\\
T(X_4,X_6)=\mu X_3\\
\tilde{T}(X_5,X_6)=0
\end{array}\right\}$$

$$T''^{5}_{1,4}>0,\ \Phi>0,\ \Phi\neq\mu\neq0 \qquad (4.23)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\tilde{T}(X_1,X_2)=\tau' X_5+\Phi X_6\\
\tilde{T}(X_1,X_3)=0\\
\tilde{T}(X_1,X_4)=T''^{5}_{1,4}X_5\\
\tilde{T}(X_1,X_5)=-\tau' X_2-T''^{5}_{1,4}X_4\\
\tilde{T}(X_1,X_6)=-\Phi X_2\\
\tilde{T}(X_2,X_3)=-T''^{5}_{1,4}X_5\\
\tilde{T}(X_2,X_4)=0\\
\tilde{T}(X_2,X_5)=\tau' X_1+T''^{5}_{1,4}X_3\\
T(X_2,X_6)=\Phi X_1\\
\tilde{T}(X_3,X_4)=\mu X_6\\
\tilde{T}(X_3,X_5)=-T''^{5}_{1,4}X_2\\
\tilde{T}(X_3,X_6)=-\mu X_4\\
\tilde{T}(X_4,X_5)=T''^{5}_{1,4}X_1\\
\tilde{T}(X_4,X_6)=\mu X_3\\
\tilde{T}(X_5,X_6)=0
\end{array}\right\}$$

$$T''^{5}_{1,4}>0,\ \tau'\neq0,\ \Phi>0,\ \Phi\neq\mu\neq0 \qquad (4.24)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\tilde{T}(X_1,X_2)=\Phi X_6\\
\tilde{T}(X_1,X_3)=0\\
\tilde{T}(X_1,X_4)=T''^{5}_{1,4}X_5\\
\tilde{T}(X_1,X_5)=-T''^{5}_{1,4}X_4\\
\tilde{T}(X_1,X_6)=-\Phi X_2\\
\tilde{T}(X_2,X_3)=-T''^{5}_{1,4}X_5\\
\tilde{T}(X_2,X_4)=0\\
\tilde{T}(X_2,X_5)=T''^{5}_{1,4}X_3\\
\tilde{T}(X_2,X_6)=\Phi X_1\\
\tilde{T}(X_3,X_4)=\Theta' X_5+\mu X_6\\
\tilde{T}(X_3,X_5)=-T''^{5}_{1,4}X_2-\Theta' X_4\\
\tilde{T}(X_3,X_6)=-\mu X_4\\
\tilde{T}(X_4,X_5)=T''^{5}_{1,4}X_1+\Theta' X_3\\
\tilde{T}(X_4,X_6)=\mu X_3\\
\tilde{T}(X_5,X_6)=0
\end{array}\right\}$$

$$T''^{5}_{1,4}>0,\ \Theta'\neq0,\ \Phi>0,\ \Phi\neq\mu\neq0 \qquad (4.25)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\tilde{T}(X_1,X_2)=\tau' X_5+\Phi X_6\\
\tilde{T}(X_1,X_3)=0\\
\tilde{T}(X_1,X_4)=T''^5_{1,4}X_5\\
\tilde{T}(X_1,X_5)=-\tau' X_2-T''^5_{1,4}X_4\\
\tilde{T}(X_1,X_6)=-\Phi X_2\\
\tilde{T}(X_2,X_3)=-T''^5_{1,4}X_5\\
\tilde{T}(X_2,X_4)=0\\
\tilde{T}(X_2,X_5)=\tau' X_1+T''^5_{1,4}X_3\\
T(X_2,X_6)=\Phi X_1\\
\tilde{T}(X_3,X_4)=\Theta' X_5+\mu X_6\\
\tilde{T}(X_3,X_5)=-T''^5_{1,4}X_2-\Theta' X_4\\
\tilde{T}(X_3,X_6)=-\mu X_4\\
\tilde{T}(X_4,X_5)=T''^5_{1,4}X_1+\Theta' X_3\\
\tilde{T}(X_4,X_6)=\mu X_3\\
\tilde{T}(X_5,X_6)=0
\end{array}\right\}$$

$$T''^5_{1,4}>0,\ \tau'\neq 0,\ \Theta'\neq 0,\ \Phi>0,\ \Phi\neq\mu\neq 0 \quad (4.26)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\tilde{T}(X_1,X_2)=0\\
\tilde{T}(X_1,X_3)=\rho X_6\\
\tilde{T}(X_1,X_4)=\rho X_5\\
\tilde{T}(X_1,X_5)=-\rho X_4\\
\tilde{T}(X_1,X_6)=-\rho X_3\\
\tilde{T}(X_2,X_3)=-\rho X_5\\
\tilde{T}(X_2,X_4)=\rho X_6\\
\tilde{T}(X_2,X_5)=\rho X_3\\
\tilde{T}(X_2,X_6)=-\rho X_4\\
\tilde{T}(X_3,X_4)=0\\
\tilde{T}(X_3,X_5)=-\rho X_2\\
\tilde{T}(X_3,X_6)=\rho X_1\\
\tilde{T}(X'_4,X'_5)=\rho X_1\\
\tilde{T}(X'_4,X'_6)=\rho X_2\\
\tilde{T}(X'_5,X'_6)=0
\end{array}\right\}$$

$$\rho>0 \quad (4.32)$$

4.2. DEMOSTRACIÓN DE LA CLASIFICACIÓN DE $\tilde{T}$

En efecto, sea V un espacio vectorial real de dimensión 6 con un producto interior positivo g, un tensor torsión $\tilde{T}\neq 0$ y un tensor curvatura $\tilde{R}\neq 0$ tales que, (3.3), (3.4), (3.5) y (3.10) son satisfechas. Entonces, si $\{X_1,\ldots,X_6\}$ es una base ortonormal de V, aplicando la condición (3.10), se obtiene, de forma análoga al Lema 3.4.1.1, la siguiente expresión general para el tensor torsión $\tilde{T}$:

$$\left.\begin{array}{l}
\tilde{T}(X_1,X_2)=T^3_{1,2}X_3+T^4_{1,2}X_4+T^5_{1,2}X_5+T^6_{1,2}X_6\\
\tilde{T}(X_1,X_3)=-T^3_{1,2}X_2+T^4_{1,3}X_4+T^5_{1,3}X_5+T^6_{1,3}X_6\\
\tilde{T}(X_1,X_4)=-T^4_{1,2}X_2-T^4_{1,3}X_3+T^5_{1,4}X_5+T^6_{1,4}X_6\\
\tilde{T}(X_1,X_5)=-T^5_{1,2}X_2-T^5_{1,3}X_3-T^5_{1,4}X_4+T^6_{1,5}X_6\\
\tilde{T}(X_1,X_6)=-T^6_{1,2}X_2-T^6_{1,3}X_3-T^6_{1,4}X_4-T^6_{1,5}X_5\\
\tilde{T}(X_2,X_3)=T^3_{1,2}X_1+T^4_{2,3}X_4+T^5_{2,3}X_5+T^6_{2,3}X_6\\
\tilde{T}(X_2,X_4)=T^4_{1,2}X_1-T^4_{2,3}X_3+T^5_{2,4}X_5+T^6_{2,4}X_6\\
\tilde{T}(X_2,X_5)=T^5_{1,2}X_1-T^5_{2,3}X_3-T^5_{2,4}X_4+T^6_{2,5}X_6\\
\tilde{T}(X_2,X_6)=T^6_{1,2}X_1-T^6_{2,3}X_3-T^6_{2,4}X_4-T^6_{2,5}X_5\\
\tilde{T}(X_3,X_4)=T^4_{1,3}X_1+T^4_{2,3}X_2+T^5_{3,4}X_5+T^6_{3,4}X_6\\
\tilde{T}(X_3,X_5)=T^5_{1,3}X_1+T^5_{2,3}X_2-T^5_{3,4}X_4+T^6_{3,5}X_6\\
\tilde{T}(X_3,X_6)=T^6_{1,3}X_1+T^6_{2,3}X_2-T^6_{3,4}X_4-T^6_{3,5}X_5\\
\tilde{T}(X_4,X_5)=T^5_{1,4}X_1+T^5_{2,4}X_2+T^5_{3,4}X_3+T^6_{4,5}X_6\\
\tilde{T}(X_4,X_6)=T^6_{1,4}X_1+T^6_{2,4}X_2+T^6_{3,4}X_3-T^6_{4,5}X_5\\
\tilde{T}(X_5,X_6)=T^6_{1,5}X_1+T^6_{2,5}X_2+T^6_{3,5}X_3+T^6_{4,5}X_4
\end{array}\right\} \quad \textbf{(4.1)}$$

Ahora, como $\tilde{R} \neq 0$ y cada transformación curvatura $\tilde{R}(X,Y): V \to V$ es antisimétrica, aplicando el Lema 3.2.5 se obtienen las tres posibilidades siguientes (las cuales no son mutuamente excluyentes):

A) Existe una transformación curvatura $\tilde{R}(X,Y)$ de rango 2.
B) Existe una transformación curvatura $\tilde{R}(X,Y)$ de rango 4.
C) Existe una transformación curvatura $\tilde{R}(X,Y)$ de rango 6.

En lo que sigue, se discuten separadamente los tres casos.

4.2.1. Análisis del Caso A (Rango 2)

En este caso, se sabe que, para una elección adecuada de la base ortonormal, existe una transformación curvatura $\tilde{R}(X,Y)$ de la forma A_{12}, donde

$$A_{12}X_1 = X_2\,,\;\; A_{12}X_2 = -X_1\,,\;\; A_{12}X_3 = A_{12}X_4 = A_{12}X_5 = A_{12}X_6 = 0\,. \qquad \textbf{(4.2)}$$

Entonces, utilizando (3.3), se sabe que $A_{12} \cdot \tilde{T} = 0$; es decir,

$$A_{12}(\tilde{T}(X_i, X_j)) = \tilde{T}(A_{12}X_i, X_j) + \tilde{T}(X_i, A_{12}X_j)\,, \quad i,j = 1,\ldots,6\,.$$

Así, procediendo de forma análoga al Lema 3.4.1.2, se tiene que si $\{X_1,\ldots,X_6\}$ es una base ortonormal de V, a partir de (4.2) y de la condición $A_{12} \cdot \tilde{T} = 0$ se obtiene que (4.1) se puede escribir como:

$$\left.\begin{array}{ll}
\tilde{T}(X_1,X_2) = & T^3_{1,2}X_3 + T^4_{1,2}X_4 + T^5_{1,2}X_5 + T^6_{1,2}X_6 \\
\tilde{T}(X_1,X_3) = & -T^3_{1,2}X_2 \\
\tilde{T}(X_1,X_4) = & -T^4_{1,2}X_2 \\
\tilde{T}(X_1,X_5) = & -T^5_{1,2}X_2 \\
\tilde{T}(X_1,X_6) = & -T^6_{1,2}X_2 \\
\tilde{T}(X_2,X_3) = & T^3_{1,2}X_1 \\
\tilde{T}(X_2,X_4) = & T^4_{1,2}X_1 \\
\tilde{T}(X_2,X_5) = & T^5_{1,2}X_1 \\
\tilde{T}(X_2,X_6) = & T^6_{1,2}X_1 \\
\tilde{T}(X_3,X_4) = & +T^5_{3,4}X_5 + T^6_{3,4}X_6 \\
\tilde{T}(X_3,X_5) = & -T^5_{3,4}X_4 + T^6_{3,5}X_6 \\
\tilde{T}(X_3,X_6) = & -T^6_{3,4}X_4 - T^6_{3,5}X_5 \\
\tilde{T}(X_4,X_5) = & T^5_{3,4}X_3 + T^6_{4,5}X_6 \\
\tilde{T}(X_4,X_6) = & T^6_{3,4}X_3 - T^6_{4,5}X_5 \\
\tilde{T}(X_5,X_6) = & T^6_{3,5}X_3 + T^6_{4,5}X_4
\end{array}\right\}. \qquad \textbf{(4.3)}$$

Ahora, para estudiar (4.3) se diferenciarán dos subcasos:

A.1) Si $T_{1,2}^{3} = T_{1,2}^{4} = T_{1,2}^{5} = T_{1,2}^{6} = 0$.

A.2) Si $\rho = ((T_{1,2}^{3})^2 + (T_{1,2}^{4})^2 + (T_{1,2}^{5})^2 + (T_{1,2}^{6})^2)^{\frac{1}{2}} > 0$.

Estudio del Subcaso A.1.

Sustituyendo el valor de estos parámetros en (4.3) para $i = 2,\ldots,6,\ \ j = 3,\ldots,6$, se obtiene que

$$\tilde{T}(X_1, X_i) = \tilde{T}(X_2, X_j) = 0 .$$

Entonces, aplicando el Lema 3.2.5 a la matriz antisimétrica formada por $\tilde{T}(X_3, X_6)$, $\tilde{T}(X_4, X_6)$ y $\tilde{T}(X_5, X_6)$, se sigue que la matriz torsión en la nueva base ortonormal es

$$\left.\begin{array}{l}
\tilde{T}(X_1', X_i') = \tilde{T}(X_2', X_j') = 0,\ i = 2,\ldots,6,\ j = 3,\ldots,6 \\
\tilde{T}(X_3', X_4') = T_{3,4}'^{5} X_5' + T_{3,4}'^{6} X_6' \\
\tilde{T}(X_3', X_5') = -T_{3,4}'^{5} X_4' \\
\tilde{T}(X_3', X_6') = -T_{3,4}'^{6} X_4' \\
\tilde{T}(X_4', X_5') = T_{3,4}'^{5} X_3' \\
\tilde{T}(X_4', X_6') = T_{3,4}'^{6} X_3' \\
\tilde{T}(X_5', X_6') = 0
\end{array}\right\} . \qquad \textbf{(4.4)}$$

Para continuar el estudio de (4.4) se diferenciaran dos nuevos subcasos:

A.1.1) Si $T_{3,4}'^{5} = T_{3,4}'^{6} = 0$, al sustituir el valor de estos parámetros en (4.4), se obtiene que $\tilde{T} = 0$. Por tanto, por el Lema 3.2.3, se puede concluir que en este caso, el espacio naturalmente reductivo asociado es simétrico.

A.1.2) Si $\rho = ((T_{3,4}'^{5})^2 + (T_{3,4}'^{6})^2)^{\frac{1}{2}} > 0$ se busca aplicar un cambio de base ortonormal de forma que no afecte a la forma de actuación del endomorfismo A_{12}. Así, se realiza el cambio de base ortonormal dado por

$$X_i^* = X_i', \quad i = 1,2,3,4, \quad X_6^* = \frac{1}{\rho}(T_{3,4}'^{5} X_5' + T_{3,4}'^{6} X_6'), \quad X_5^* = a_5 X_5' + a_6 X_6'$$

de forma que los parámetros a_5, a_6 están determinados por la condición que $\{X_5^*, X_6^*\}$ sea un conjunto ortonormal. Así, se obtiene que (4.4) es ahora:

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{T}(X_1^*,X_i^*)=\tilde{T}(X_2^*,X_j^*)=0,\ i=2,\ldots,6,\ j=3,\ldots,6\\ \tilde{T}(X_3^*,X_4^*)=\rho X_6^*\\ \tilde{T}(X_3^*,X_5^*)=0\\ \tilde{T}(X_3^*,X_6^*)=-\rho X_4^*\\ \tilde{T}(X_4^*,X_5^*)=0\\ \tilde{T}(X_4^*,X_6^*)=\rho X_3^*\\ \tilde{T}(X_5^*,X_6^*)=0\end{array}\right\}. \qquad \textbf{(4.5)}$$

Para calcularla se ha usado (3.10) y el hecho de que $\{X_i^*\}_{i=1}^6$ sea una base ortonormal.

De forma análoga a como se ha procedido en el Capítulo 2, se desarrolla la segunda identidad de Bianchi (3.5), sobre los tripletes (X_3,X_4,X_j), (X_3,X_6,X_j) y (X_4,X_6,X_j), $j=1,2,5$ y, utilizando (4.5) se obtiene que

$$\tilde{R}(X_j,X_6)=\tilde{R}(X_j,X_4)=\tilde{R}(X_j,X_3)=0\,,\quad j=1,2,5\,. \qquad \textbf{(4.6)}$$

Desarrollando también la primera identidad de Bianchi (3.4), sobre los tripletes (X_i,X_j,X_l), (X_i,X_j,X_2) y (X_1,X_2,X_i), $i,j=3,4,5$ y, utilizando (4.5) y (4.6) se sigue que

$$\tilde{R}(X_i,X_j)X_k=\tilde{R}(X_k,X_l)X_i=0\,,\quad i,j=1,2,5\,,\quad k,l=3,4,6\,. \qquad \textbf{(4.7)}$$

Así, debido a la nueva expresión de (4.5), (4.6) y (4.7) se tiene que las hipótesis del Lema 3.2.4 son satisfechas y, por tanto, que nuestro espacio naturalmente reductivo M se descompone como $M^3\times M^3$. En efecto, suponiendo que $V_1=\langle X_1^*,X_2^*,X_5^*\rangle$ y $V_2=\langle X_3^*,X_4^*,X_6^*\rangle$, se comprueba fácilmente la condición de descomponibilidad sobre la torsión y la curvatura.

Estudio del Subcaso A.2.

Ahora, se realiza el cambio de base ortonormal, el cual no modifica la forma de actuación del endomorfismo A_{12}, dado por

$$X_1'=X_1\,,\quad X_2'=X_2\,,\quad X_6'=\frac{1}{\rho}(T_{1,2}^3X_3+T_{1,2}^4X_4+T_{1,2}^5X_5+T_{1,2}^6X_6)\,,$$

$$X_3'=a_3^3X_3+a_3^4X_4+a_3^5X_5+a_3^6X_6\,,\quad X_4'=a_4^3X_3+a_4^4X_4+a_4^5X_5+a_4^6X_6\,,$$

$$X_5'=a_5^3X_3+a_5^4X_4+a_5^5X_5+a_5^6X_6$$

de forma que los parámetros a_i^j, $i=3,4,5$, $j=3,4,5,6$ están determinados por la condición que X_3', X_4', X_5' y X_6' sean ortonormales entre sí. Así, se sigue que ahora (4.3) se expresa:

$$\left.\begin{array}{l}
\tilde{T}(X_1',X_2') = \rho X_6' \\
\tilde{T}(X_1',X_3') = 0 \\
\tilde{T}(X_1',X_4') = 0 \\
\tilde{T}(X_1',X_5') = 0 \\
\tilde{T}(X_1',X_6') = -\rho X_2' \\
\tilde{T}(X_2',X_3') = 0 \\
\tilde{T}(X_2',X_4') = 0 \\
\tilde{T}(X_2',X_5') = 0 \\
\tilde{T}(X_2',X_6') = \rho X_1' \\
\tilde{T}(X_3',X_4') = \lambda X_5' + \mu X_6' \\
\tilde{T}(X_3',X_5') = -\lambda X_4' + \nu X_6' \\
\tilde{T}(X_3',X_6') = -\mu X_4' - \nu X_5' \\
\tilde{T}(X_4',X_5') = \lambda X_3' + \eta X_6' \\
\tilde{T}(X_4',X_6') = \mu X_3' - \eta X_5' \\
\tilde{T}(X_5',X_6') = \nu X_3' + \eta X_4'
\end{array}\right\}. \qquad \mathbf{(4.8)}$$

En efecto, para calcularla se utiliza (3.10) y el hecho de que $\{X_i'\}_{i=1}^6$ sea una base ortonormal. Así, la expresión de $\tilde{T}(X_1',X_i')$, $\tilde{T}(X_2',X_j')$, $i=2,\ldots,6$, $j=3,\ldots,6$ se calcula simplemente sustituyendo y teniendo en cuenta que la base es ortonormal. Para la obtención de $\tilde{T}(X_3',X_i')$, $\tilde{T}(X_4',X_j')$, $\tilde{T}(X_5',X_6')$, $i=4,5,6$, $j=5,6$ se tendrá en cuenta que, como $\{X_3', X_4', X_5', X_6'\}$ es un conjunto ortonormal, el sistema de Cramer que forman tiene determinante 1 y, por tanto, existe la inversa y se puede expresar $\{X_3, X_4, X_5, X_6\}$ en función de $\{X_3', X_4', X_5', X_6'\}$. Así,

$$\tilde{T}(X_3',X_4') = f^3X_3 + f^4X_4 + f^5X_5 + f^6X_6 = g^3X_3' + g^4X_4' + \lambda X_5' + \mu X_6',$$
$$\tilde{T}(X_3',X_5') = g^5X_3' + g^6X_4' + g^7X_5' + \nu X_6',$$
$$\tilde{T}(X_3',X_6') = g^8X_3' + g^9X_4' + g^{10}X_5' + g^{11}X_6',$$
$$\tilde{T}(X_4',X_5') = g^{12}X_3' + g^{13}X_4' + g^{14}X_5' + \eta X_6',$$
$$\tilde{T}(X_4',X_6') = g^{15}X_3' + g^{16}X_4' + g^{17}X_5' + g^{18}X_6',$$
$$\tilde{T}(X_5',X_6') = g^{19}X_3' + g^{20}X_4' + g^{21}X_5' + g^{22}X_6',$$

aplicando ahora (3.10), se obtiene que

$$g^{3}=g^{4}=g^{5}=g^{7}=g^{8}=g^{11}=g^{13}=g^{14}=g^{16}=g^{18}=g^{21}=g^{22}=0\,,$$
$$g^{6}=-\lambda=-g^{12}\,,\quad g^{9}=-\mu=-g^{15}\,,\quad g^{10}=-\nu=-g^{19}\,,\quad g^{17}=-\eta=-g^{20}\,.$$

Aplicando entonces el Lema 3.2.5 a la matriz antisimétrica formada a partir de $\tilde{T}(X'_3,X'_6)$, $\tilde{T}(X'_4,X'_6)$ y $\tilde{T}(X'_5,X'_6)$, realizando el correspondiente cambio de base ortonormal, el cual conserva la forma de actuación del endomorfismo A_{12}, y utilizando (3.10), se obtiene que

$$\left.\begin{array}{l}
\tilde{T}(X_1^*,X_2^*)=\rho X_6^*\\
\tilde{T}(X_1^*,X_3^*)=0\\
\tilde{T}(X_1^*,X_4^*)=0\\
\tilde{T}(X_1^*,X_5^*)=0\\
\tilde{T}(X_1^*,X_6^*)=-\rho X_2^*\\
\tilde{T}(X_2^*,X_3^*)=0\\
\tilde{T}(X_2^*,X_4^*)=0\\
\tilde{T}(X_2^*,X_5^*)=0\\
\tilde{T}(X_2^*,X_6^*)=\rho X_1^*\\
\tilde{T}(X_3^*,X_4^*)=\alpha X_5^*+\tau X_6^*\\
\tilde{T}(X_3^*,X_5^*)=-\alpha X_4^*\\
\tilde{T}(X_3^*,X_6^*)=-\tau X_4^*\\
\tilde{T}(X_4^*,X_5^*)=\alpha X_3^*\\
\tilde{T}(X_4^*,X_6^*)=\tau X_3^*\\
\tilde{T}(X_5^*,X_6^*)=0
\end{array}\right\} \quad \textbf{(4.9)}$$

donde, $\tau=(\nu^2+\mu^2+\eta^2)^{1/2}$ y $\alpha=\alpha(\lambda,\mu,\nu,\eta)$. Ahora, para finalizar el desarrollo de este caso, basta realizar el análisis de (4.9). Para ello, como $\rho>0$ solamente será necesario ver que ocurre cuando α, τ son ó no nulos. Así, será preciso distinguir los casos siguientes:

a) Si $\tau=0$ y, $\alpha=0$ ó $\alpha\neq 0$. Este es un caso descomponible donde

$$T_pM=(X_1,X_2,X_6)\oplus(X_3,X_4,X_5)\,.$$

En efecto, usando la segunda identidad de Bianchi (3.5) se obtiene

$$\tilde{R}(X_u,X_i)=0\,,\quad u=3,4,5,\quad i=1,2,6$$

y, usando la primera identidad de Bianchi (3.4) se sabe que

$$\tilde{R}(X_u, X_k)X_i = 0, \quad \tilde{R}(X_i, X_j)X_u = 0, \quad u,k = 3,4,5, \quad i,j = 1,2,6 .$$

Por tanto, aplicando el Lema 3.2.4 se concluye que el espacio correspondiente a este caso es descomponible.

b) Si $\tau \neq 0$ y $\alpha = 0$, este también es un caso descomponible donde

$$T_pM = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_6) \oplus (X_5) .$$

En efecto, usando la segunda identidad de Bianchi (3.5) se obtiene

$$\tilde{R}(X_u, X_5) = 0, \quad u = 1,2,3,4,6 .$$

Y, usando la primera identidad de Bianchi (3.4) se sabe que

$$\tilde{R}(X_u, X_k)X_5 = 0, \quad u,k = 1,2,3,4,6 .$$

Por tanto, aplicando el Lema 3.2.4 se concluye que el espacio correspondiente a este caso es descomponible.

Así, se puede suponer que en (4.9), $\rho > 0$, $\tau > 0$ y $\alpha > 0$. En efecto, si $\tau < 0$ entonces, cambiando de signo X_1^* y X_6^* se obtendría que $\tau' = -\tau > 0$ y, si $\alpha < 0$ cambiando de signo X_5^* se obtendría que $\alpha' = -\alpha > 0$.

Nota 4.2.1.1

Todos los cambios de base realizados a lo largo de todo el desarrollo del Caso *A*, siempre conservan la actuación de la transformación curvatura $P = A_{12}$.

4.2.2. Análisis del Caso B (Rango 4)

En este caso, se sabe que, para una elección adecuada de la base ortonormal, existe una transformación curvatura de la forma,

$$\tilde{R}(X,Y) = \alpha A_{12} + \beta A_{34}, \quad \alpha\beta \neq 0$$

donde A_{12} está dado por la fórmula (4.2) y A_{34} por

$$A_{34}X_1 = A_{34}X_2 = 0, \quad A_{34}X_3 = X_4, \quad A_{34}X_4 = -X_3, \quad A_{34}X_5 = A_{34}X_6 = 0. \quad \textbf{(4.9)}$$

Entonces, de (3.3), se tiene la condición $(\alpha A_{12} + \beta A_{34}) \cdot \tilde{T} = 0$ que aplicada sobre (4.1), de forma análoga al Lema 3.4.1.2, proporciona el valor nulo de los siguientes coeficientes,

$$T_{1,2}^{3}=T_{1,2}^{4}=T_{2,3}^{4}=T_{2,5}^{6}=T_{1,3}^{4}=T_{1,5}^{6}=T_{4,5}^{6}=T_{3,5}^{6}=0\,, \tag{4.10}$$

y los siguientes sistemas homogéneos de condiciones adicionales:

$$\left.\begin{array}{r}\beta T_{1,4}^{5}+\alpha T_{2,3}^{5}=0\\ \alpha T_{1,4}^{5}+\beta T_{2,3}^{5}=0\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{r}\beta T_{1,4}^{6}+\alpha T_{2,3}^{6}=0\\ \alpha T_{1,4}^{6}+\beta T_{2,3}^{6}=0\end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{r}-\beta T_{1,3}^{6}+\alpha T_{2,4}^{6}=0\\ \alpha T_{1,3}^{6}-\beta T_{2,4}^{6}=0\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{r}-\beta T_{1,3}^{5}+\alpha T_{2,4}^{5}=0\\ \alpha T_{1,3}^{5}-\beta T_{2,4}^{5}=0\end{array}\right\}. \tag{4.11}$$

Así, aplicando (4.10) sobre (4.1) se sigue que

$$\left.\begin{array}{llll}
\tilde{T}(X_1,X_2)= & & & T_{1,2}^{5}X_5+T_{1,2}^{6}X_6\\
\tilde{T}(X_1,X_3)= & & & T_{1,3}^{5}X_5+T_{1,3}^{6}X_6\\
\tilde{T}(X_1,X_4)= & & & T_{1,4}^{5}X_5+T_{1,4}^{6}X_6\\
\tilde{T}(X_1,X_5)= & -T_{1,2}^{5}X_2-T_{1,3}^{5}X_3-T_{1,4}^{5}X_4 & & \\
\tilde{T}(X_1,X_6)= & -T_{1,2}^{6}X_2-T_{1,3}^{6}X_3-T_{1,4}^{6}X_4 & & \\
\tilde{T}(X_2,X_3)= & & & T_{2,3}^{5}X_5+T_{2,3}^{6}X_6\\
\tilde{T}(X_2,X_4)= & & & T_{2,4}^{5}X_5+T_{2,4}^{6}X_6\\
\tilde{T}(X_2,X_5)=T_{1,2}^{5}X_1 & -T_{2,3}^{5}X_3-T_{2,4}^{5}X_4 & & \\
\tilde{T}(X_2,X_6)=T_{1,2}^{6}X_1 & -T_{2,3}^{6}X_3-T_{2,4}^{6}X_4 & & \\
\tilde{T}(X_3,X_4)= & & & T_{3,4}^{5}X_5+T_{3,4}^{6}X_6\\
\tilde{T}(X_3,X_5)=T_{1,3}^{5}X_1+T_{2,3}^{5}X_2 & -T_{3,4}^{5}X_4 & & \\
\tilde{T}(X_3,X_6)=T_{1,3}^{6}X_1+T_{2,3}^{6}X_2 & -T_{3,4}^{6}X_4 & & \\
\tilde{T}(X_4,X_5)=T_{1,4}^{5}X_1+T_{2,4}^{5}X_2+T_{3,4}^{5}X_3 & & & \\
\tilde{T}(X_4,X_6)=T_{1,4}^{6}X_1+T_{2,4}^{6}X_2+T_{3,4}^{6}X_3 & & & \\
\tilde{T}(X_5,X_6)=0 & & &
\end{array}\right\}. \tag{4.12}$$

Ahora, para poder aplicar (4.11) sobre (4.12) habrá que diferenciar nuevamente los casos siguientes:

B.1 Cuando $\alpha\neq\pm\beta$.

B.2 Cuando $\alpha=\beta$.

B.3 Cuando $\alpha=-\beta$.

Caso B.1 ($\alpha \neq \pm\beta$).

A partir de (4.11) resolviendo los sistemas se obtiene fácilmente que la única solución posible es la nula. Por tanto, sustituyendo esto en (4.12) se sigue

$$\left.\begin{array}{l}
\tilde{T}(X_1,X_2) = T^5_{1,2}X_5 + T^6_{1,2}X_6 \\
\tilde{T}(X_1,X_3) = 0 \\
\tilde{T}(X_1,X_4) = 0 \\
\tilde{T}(X_1,X_5) = -T^5_{1,2}X_2 \\
\tilde{T}(X_1,X_6) = -T^6_{1,2}X_2 \\
\tilde{T}(X_2,X_3) = 0 \\
\tilde{T}(X_2,X_4) = 0 \\
\tilde{T}(X_2,X_5) = T^5_{1,2}X_1 \\
\tilde{T}(X_2,X_6) = T^6_{1,2}X_1 \\
\tilde{T}(X_3,X_4) = T^5_{3,4}X_5 + T^6_{3,4}X_6 \\
\tilde{T}(X_3,X_5) = -T^5_{3,4}X_4 \\
\tilde{T}(X_3,X_6) = -T^6_{3,4}X_4 \\
\tilde{T}(X_4,X_5) = T^5_{3,4}X_3 \\
\tilde{T}(X_4,X_6) = T^6_{3,4}X_3 \\
\tilde{T}(X_5,X_6) = 0
\end{array}\right\} . \qquad \textbf{(4.13)}$$

Para continuar con el estudio de esta matriz se distinguirán los siguientes subcasos:

B.1.1) Si se supone que $T^5_{1,2} = T^6_{1,2} = 0$. Entonces, se vuelven a distinguir dos nuevos subcasos:

B.1.1.a) Cuando se considera que $\rho = ((T^5_{3,4})^2 + (T^6_{3,4})^2)^{1/2} > 0$. Entonces, al igual que en el desarrollo del *Subcaso A.1.2*, se realiza el cambio de base ortonormal dado por

$$X'_i = X_i\ , \quad i = 1,2,3,4\ , \quad X'_6 = \frac{1}{\rho}(T^5_{3,4}X_5 + T^6_{3,4}X_6)\ , \quad X'_5 = a_5X_5 + a_6X_6$$

de forma que los parámetros a_5, a_6 están determinados por la condición que $\{X'_5, X'_6\}$ sea un conjunto ortonormal. Así, se sigue que (4.13) tiene la misma forma que (4.5). Por tanto, el espacio asociado es descomponible con

$$T_pM = (X'_1, X'_2, X'_5) \oplus (X'_3, X'_4, X'_6).$$

B.1.1.b) Cuando se considera que $T^5_{3,4} = T^6_{3,4} = 0$ se sigue que, $\tilde{T} = 0$ y por el Lema 3.2.3, el espacio asociado es simétrico.

B.1.2) Si se supone que $\rho = ((T^5_{1,2})^2 + (T^6_{1,2})^2)^{1/2} > 0$, se realiza el cambio de base ortonormal dado por

$$X'_i = X_i, \quad i = 1,2,3,4, \quad X'_6 = \frac{1}{\rho}(T^5_{3,4}X_5 + T^6_{3,4}X_6), \quad X'_5 = a_5X_5 + a_6X_6$$

de forma que los parámetros a_5, a_6 están determinados por la condición que $\{X'_5, X'_6\}$ sea un conjunto ortonormal. Así, se sigue que (4.13) toma la misma forma que (4.9).

Caso B.2 ($\alpha = \beta$).

Ahora, se considera que $P = A_{12} + A_{34}$ y, así, los parámetros α, β quedan libres.

Resolviendo los sistemas de (4.11) se obtiene fácilmente que

$$T^5_{1,4} = -T^5_{2,3}, \quad T^6_{1,4} = -T^6_{2,3}, \quad T^6_{1,3} = T^6_{2,4}, \quad T^5_{1,3} = T^5_{2,4}$$

y, sustituyendo en (4.12) se obtiene

$$\left.\begin{array}{l}
\tilde{T}(X_1,X_2)= T^5_{1,2}X_5+T^6_{1,2}X_6\\
\tilde{T}(X_1,X_3)= T^5_{1,3}X_5+T^6_{1,3}X_6\\
\tilde{T}(X_1,X_4)= T^5_{1,4}X_5+T^6_{1,4}X_6\\
\tilde{T}(X_1,X_5)= -T^5_{1,2}X_2-T^5_{1,3}X_3-T^5_{1,4}X_4\\
\tilde{T}(X_1,X_6)= -T^6_{1,2}X_2-T^6_{1,3}X_3-T^6_{1,4}X_4\\
\tilde{T}(X_2,X_3)= -T^5_{1,4}X_5-T^6_{1,4}X_6\\
\tilde{T}(X_2,X_4)= T^5_{1,3}X_5+T^6_{1,3}X_6\\
\tilde{T}(X_2,X_5)= T^5_{1,2}X_1+T^5_{1,4}X_3-T^5_{1,3}X_4\\
\tilde{T}(X_2,X_6)= T^6_{1,2}X_1+T^6_{1,4}X_3-T^6_{1,3}X_4\\
\tilde{T}(X_3,X_4)= T^5_{3,4}X_5+T^6_{3,4}X_6\\
\tilde{T}(X_3,X_5)= T^5_{1,3}X_1-T^5_{1,4}X_2-T^5_{3,4}X_4\\
\tilde{T}(X_3,X_6)= T^6_{1,3}X_1-T^6_{1,4}X_2-T^6_{3,4}X_4\\
\tilde{T}(X_4,X_5)= T^5_{1,4}X_1+T^5_{1,3}X_2+T^5_{3,4}X_3\\
\tilde{T}(X_4,X_6)= T^6_{1,4}X_1+T^6_{1,3}X_2+T^6_{3,4}X_3\\
\tilde{T}(X_5,X_6)= 0
\end{array}\right\}. \qquad \textbf{(4.13)}$$

Si se observa (4.13), se ve que para $i=1,2,3,4$ se pueden extraer dos endomorfismos antisimétricos $F(X_i)=\tilde{T}(X_i,X_5)$ y $G(X_i)=\tilde{T}(X_i,X_6)$.

Ahora, lo que se busca es diagonalizar F y G como indica Lema 3.2.5. Si fueran simultáneamente diagonalizables, bastaría con realizar un cambio de base, pero como se prueba fácilmente que no lo son, lo que se hará será diagonalizar primero F y obtener la nueva forma de (4.13) y, después, se diagonalizará la nueva G.

Evidentemente, al diagonalizar los diversos endomorfismos es necesario que se siga conservando la actuación de la transformación curvatura P sobre la nueva base ortonormal $\{X_i^*\}_{i=1}^6$; es decir, que su expresión en esta nueva base sea $P=A_{12}^*+A_{34}^*$. En todo el proceso se seguirá el método usado por Kowalski y Vanhecke en [K-V.3], desarrollado y ampliado en el siguiente lema, cuya demostración puede ser consultada en el Apartado B.3 del Anexo B.

Lema 4.2.2.1

Dada la representación real de la matriz asociada a un endomorfismo en la base ortonormal $\{X_i\}_{i=1}^4$ de V',

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_5 & -b_5 & -c_5 \\ a_5 & 0 & c_5 & -b_5 \\ b_5 & -c_5 & 0 & -h_5 \\ c_5 & b_5 & h_5 & 0 \end{pmatrix},$$

existe una nueva base ortonormal $\{X_i^*\}_{i=1}^4$ de V' de forma que se conserva la actuación de la transformación curvatura P y la representación real de la matriz asociada a dicho endomorfismo se expresa ahora como

$$\begin{pmatrix} 0 & -\rho & 0 & 0 \\ \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

donde, $\rho \neq 0$ y $\lambda \neq 0$.

Por tanto, para diagonalizar F se considera

$$\begin{pmatrix} 0 & -T_{1,2}^5 & -T_{1,3}^5 & -T_{1,4}^5 \\ T_{1,2}^5 & 0 & T_{1,4}^5 & -T_{1,3}^5 \\ T_{1,3}^5 & -T_{1,4}^5 & 0 & -T_{3,4}^5 \\ T_{1,4}^5 & T_{1,3}^5 & T_{3,4}^5 & 0 \end{pmatrix}$$

que es la representación real de la matriz asociada al endomorfismo F en la base ortonormal $\{X_i\}_{i=1}^4$ y, aplicando el Lema 4.2.2.1, se sigue que F en esta nueva base es

$$\begin{pmatrix} 0 & -\tau & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Theta \\ 0 & 0 & \Theta & 0 \end{pmatrix}$$

donde, $\tau \neq 0$, $\Theta \neq 0$ y, la expresión de la transformación curvatura P sobre la nueva base ortonormal $\{X_i^*\}_{i=1}^4$ es $P = A_{12}^* + A_{34}^*$.

Por tanto, tomando $X_5^* = X_5$ y $X_6^* = X_6$ se tiene que $\{X_i^*\}_{i=1}^6$ es la base ortonormal de V buscada y, que respecto a ella, procediendo de forma análoga al Lema 3.4.1.6, (4.13) toma la forma

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{T}(X_1^*,X_2^*)= \tau X_5^* + T'^6_{1,2}X_6^*\\
&\tilde{T}(X_1^*,X_3^*)= T'^6_{1,3}X_6^*\\
&\tilde{T}(X_1^*,X_4^*)= T'^6_{1,4}X_6^*\\
&\tilde{T}(X_1^*,X_5^*)= -\tau X_2^*\\
&\tilde{T}(X_1^*,X_6^*)= -T'^6_{1,2}X_2^* - T'^6_{1,3}X_3^* - T'^6_{1,4}X_4^*\\
&\tilde{T}(X_2^*,X_3^*)= -T'^6_{1,4}X_6^*\\
&\tilde{T}(X_2^*,X_4^*)= T'^6_{1,3}X_6^*\\
&\tilde{T}(X_2^*,X_5^*)= \tau X_1^*\\
&\tilde{T}(X_2^*,X_6^*)= T'^6_{1,2}X_1^* + T'^6_{1,4}X_3^* - T'^6_{1,3}X_4^*\\
&\tilde{T}(X_3^*,X_4^*)= \Theta X_5^* + T'^6_{3,4}X_6^*\\
&\tilde{T}(X_3^*,X_5^*)= -\Theta X_4^*\\
&\tilde{T}(X_3^*,X_6^*)= T'^6_{1,3}X_1^* - T'^6_{1,4}X_2^* - T'^6_{3,4}X_4^*\\
&\tilde{T}(X_4^*,X_5^*)= \Theta X_3^*\\
&\tilde{T}(X_4^*,X_6^*)= T'^6_{1,4}X_1^* + T'^6_{1,3}X_2^* + T'^6_{3,4}X_3^*\\
&\tilde{T}(X_5^*,X_6^*)= 0
\end{aligned}\right\}. \qquad \textbf{(4.14)}$$

Además, como $PX_5^* = 0$ y $PX_6^* = 0$ en la base $\{X_i^*\}_{i=1}^6$, se sigue conservando la actuación de la transformación curvatura *P*.

Nota 4.2.2.2

Es conveniente recordar que, por la demostración del Lema 4.2.2.1, si $\tau = \Theta$ entonces (4.13) ya sería de la forma de (4.14) y, por tanto, no habría sido preciso diagonalizar *F*.

Ahora se considera el endomorfismo $G(X_i^*) = \tilde{T}(X_i^*, X_6^*)$, $i = 1,2,3,4$ y se procederá a diagonalizarlo. Para ello, se considera la representación real de la matriz asociada al endomorfismo *G* en la base ortonormal $\{X_i^*\}_{i=1}^4$ que es

$$\begin{pmatrix} 0 & -T'^6_{1,2} & -T'^6_{1,3} & -T'^6_{1,4}\\ T'^6_{1,2} & 0 & T'^6_{1,4} & -T'^6_{1,3}\\ T'^6_{1,3} & -T'^6_{1,4} & 0 & -T'^6_{3,4}\\ T'^6_{1,4} & T'^6_{1,3} & T'^6_{3,4} & 0 \end{pmatrix}$$

y, aplicando el Lema 4.2.2.1, se obtiene que G en la nueva base ortonormal $\{X_i^{**}\}_{i=1}^{4}$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & -\Phi & 0 & 0 \\ \Phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu \\ 0 & 0 & \mu & 0 \end{pmatrix}$$

donde, $\Phi \neq 0$, $\mu \neq 0$. Obsérvese que la expresión de la transformación curvatura P sobre la nueva base ortonormal $\{X_i^{**}\}_{i=1}^{4}$ es $P = A_{12}^{**} + A_{34}^{**}$.

Por tanto, tomando $X_5^{**} = X_5^{*}$ y $X_6^{**} = X_6^{*}$ se tiene que $\{X_i^{**}\}_{i=1}^{6}$ es la nueva base ortonormal de V buscada y, que respecto a ella, procediendo de forma análoga al Lema 3.4.1.6, (4.14) toma la forma

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{T}(X_1^{**}, X_2^{**}) &= \tau' X_5^{**} + \Phi X_6^{**} \\
\tilde{T}(X_1^{**}, X_3^{**}) &= \mathrm{T}_{1,3}^{\prime\prime 5} X_5^{**} \\
\tilde{T}(X_1^{**}, X_4^{**}) &= \mathrm{T}_{1,4}^{\prime\prime 5} X_5^{**} \\
\tilde{T}(X_1^{**}, X_5^{**}) &= -\tau' X_2^{**} - \mathrm{T}_{1,3}^{\prime\prime 5} X_3^{**} - \mathrm{T}_{1,4}^{\prime\prime 5} X_4^{**} \\
\tilde{T}(X_1^{**}, X_6^{**}) &= -\Phi X_2^{**} \\
\tilde{T}(X_2^{**}, X_3^{**}) &= -\mathrm{T}_{1,4}^{\prime\prime 5} X_5^{**} \\
\tilde{T}(X_2^{**}, X_4^{**}) &= \mathrm{T}_{1,3}^{\prime\prime 5} X_5^{**} \\
\tilde{T}(X_2^{**}, X_5^{**}) &= \tau' X_1^{**} + \mathrm{T}_{1,4}^{\prime\prime 5} X_3^{**} - \mathrm{T}_{1,3}^{\prime\prime 5} X_4^{**} \\
\tilde{T}(X_2^{**}, X_6^{**}) &= \Phi X_1^{**} \\
\tilde{T}(X_3^{**}, X_4^{**}) &= \Theta' X_5^{**} + \mu X_6^{**} \\
\tilde{T}(X_3^{**}, X_5^{**}) &= \mathrm{T}_{1,3}^{\prime\prime 5} X_1^{**} - \mathrm{T}_{1,4}^{\prime\prime 5} X_2^{**} - \Theta' X_4^{**} \\
\tilde{T}(X_3^{**}, X_6^{**}) &= -\mu X_4^{**} \\
\tilde{T}(X_4^{**}, X_5^{**}) &= T_{1,4}^{\prime\prime 5} X_1^{**} + T_{1,3}^{\prime\prime 5} X_2^{**} + \Theta' X_3^{**} \\
\tilde{T}(X_4^{**}, X_6^{**}) &= \mu X_3^{**} \\
\tilde{T}(X_5^{**}, X_6^{**}) &= 0
\end{aligned}\right\} \quad \textbf{(4.15)}$$

Además, como $PX_5^{**} = 0$ y $PX_6^{**} = 0$ en la base $\{X_i^{**}\}_{i=1}^{6}$, se sigue conservando la actuación de la transformación curvatura P.

Nota 4.2.2.3

Si $\Phi = \mu$, debido a la demostración del Lema 4.2.2.1, (4.14) ya sería de la forma de (4.15) y, por tanto, no habría hecho falta diagonalizar *G*.

Nota 4.2.2.4

En lugar de usar el Lema 3.2.5 se ha utilizado este método, que es un poco más complicado, para poder asegurar que el operador curvatura *P* conservaba su forma de actuación original respecto a la nueva base ortonormal $\{X_i^{**}\}_{i=1}^{6}$ de *V*.

En el Apartado B.3 del Anexo B se prueba el siguiente lema.

Lema 4.2.2.5

Si $\Phi \neq \mu$ y se supone que los parámetros correspondientes a la diagonalización de *G*, $d_1^* = d_2^* = 0$ (para entender la naturaleza de estos parámetros ver la demostración del Lema 4.2.2.1) entonces, analizando los elementos de (4.15) se sigue que $T''^{5}_{1,3} = 0$. Si además $\tau = \Theta$ entonces, también se tiene que $T''^{5}_{1,4} = 0$, $\tau' = \tau \neq 0$ y $\Theta' = \Theta \neq 0$.

Así, debido al Lema 4.2.2.5, para continuar el estudio se distinguirán los casos siguientes:

B.2.1) Cuando $\tau = \Theta$ y $\Phi = \mu$.

B.2.2) Cuando $\tau = \Theta$ y $\Phi \neq \mu$.

B.2.3) Cuando $\tau \neq \Theta$ y $\Phi = \mu$.

B.2.4) Cuando $\tau \neq \Theta$ y $\Phi \neq \mu$.

Caso B.2.1 ($\tau = \Theta$ y $\Phi = \mu$).

En este caso, debido a la Nota 4.2.2.2 y la Nota 4.2.2.3, (4.13) ya sería de la forma:

$$\left.\begin{array}{ll}\tilde{T}(X_1, X_2) = & \tau X_5 + \Phi X_6 \\ \tilde{T}(X_1, X_3) = 0 & \\ \tilde{T}(X_1, X_4) = 0 & \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\tilde{T}(X_1,X_5) = -\tau X_2 \\
\tilde{T}(X_1,X_6) = -\Phi X_2 \\
\tilde{T}(X_2,X_3) = 0 \\
\tilde{T}(X_2,X_4) = 0 \\
\tilde{T}(X_2,X_5) = \tau X_1 \\
\tilde{T}(X_2,X_6) = \Phi X_1 \\
\tilde{T}(X_3,X_4) = \tau X_5 + \Phi X_6 \\
\tilde{T}(X_3,X_5) = -\tau X_4 \\
\tilde{T}(X_3,X_6) = -\Phi X_4 \\
\tilde{T}(X_4,X_5) = \tau X_3 \\
\tilde{T}(X_4,X_6) = \Phi X_3 \\
\tilde{T}(X_5,X_6) = 0
\end{array}\right\}. \qquad \mathbf{(4.16)}$$

Ahora, como $\Phi \neq 0$, $\tau \neq 0$ se define $\rho = (\tau^2 + \Phi^2)^{1/2} > 0$ y entonces, al igual que en el desarrollo del *Subcaso A.1.2*, se realiza el cambio de base ortonormal dado por

$$X'_i = X_i\,, \quad i = 1,2,3,4\,, \quad X'_6 = \frac{1}{\rho}(\tau X_5 + \Phi X_6)\,, \quad X'_5 = a_5 X_5 + a_6 X_6$$

de forma que los parámetros a_5, a_6 son determinados por la condición que $\{X'_5\,, X'_6\}$ sea un conjunto ortonormal. Así, se obtiene que (4.16) tiene la misma forma que la expresión de la torsión asociada al *Caso b)* del Estudio de (4.9) aunque con un sólo parámetro ρ. Por tanto, el espacio asociado se descompone de la forma

$$T_pM = (X'_1, X'_2, X'_3, X'_4, X'_6) \oplus (X'_5)\,.$$

Caso B.2.2 ($\tau = \Theta$ *y* $\Phi \neq \mu$)

Como $\tau = \Theta$, aplicando la Nota 4.2.2.2 se tiene que (4.13) ya es de la forma de (4.14) y, ahora, como $\Phi \neq \mu$ se aplica el análisis desarrollado anteriormente para el endomorfismo *G*, suponiendo que α_1^*, β_1^*, α_2^*, β_2^* se toman de forma que

$$|\alpha_1^*|^2+|\beta_1^*|^2=1,\ \ \beta_1^*\in\mathbb{R}\ (d_1^*=0),\ \ |\alpha_2^*|^2+|\beta_2^*|^2=1,\ \ \beta_2^*\in\mathbb{R}\ (d_2^*=0).$$

Por tanto, aplicando el Lema 4.2.2.5 se tiene que $T''^5_{1,3}=0$, $T''^5_{1,4}=0$, $\tau'=\tau\neq 0$, $\Theta'=\Theta\neq 0$ y, así, (4.15) es

$$\left.\begin{array}{l}
\tilde{T}(X_1^*,X_2^*)=\tau X_5^*+\Phi X_6^* \\
\tilde{T}(X_1^*,X_3^*)=0 \\
\tilde{T}(X_1^*,X_4^*)=0 \\
\tilde{T}(X_1^*,X_5^*)=-\tau X_2^* \\
\tilde{T}(X_1^*,X_6^*)=-\Phi X_2^* \\
\tilde{T}(X_2^*,X_3^*)=0 \\
\tilde{T}(X_2^*,X_4^*)=0 \\
\tilde{T}(X_2^*,X_5^*)=\tau X_1^* \\
\tilde{T}(X_2^*,X_6^*)=\Phi X_1^* \\
\tilde{T}(X_3^*,X_4^*)=\tau X_5^*+\mu X_6^* \\
\tilde{T}(X_3^*,X_5^*)=-\tau X_4^* \\
\tilde{T}(X_3^*,X_6^*)=-\mu X_4^* \\
\tilde{T}(X_4^*,X_5^*)=\tau X_3^* \\
\tilde{T}(X_4^*,X_6^*)=\mu X_3^* \\
\tilde{T}(X_5^*,X_6^*)=0
\end{array}\right\}. \qquad \textbf{(4.17)}$$

Ahora, como $\Phi\neq 0$, $\tau\neq 0$ se define $\rho=(\tau^2+\Phi^2)^{1/2}>0$ y entonces, procediendo como en el desarrollo del *Subcaso A.1.2*, se realiza el cambio de base ortonormal dado por

$$X_i'=X_i^*,\quad i=1,2,3,4,\quad X_6'=\frac{1}{\rho}(\tau X_5^*+\Phi X_6^*),\quad X_5'=a_5X_5^*+a_6X_6^*$$

de forma que los parámetros a_5, a_6 están determinados por la condición que $\{X_5',X_6'\}$ sea un conjunto ortonormal. Así, (4.17) en esta nueva base ortonormal es

$$\left.\begin{array}{l}
\tilde{T}(X_1',X_2') = \rho X_6' \\
\tilde{T}(X_1',X_3') = 0 \\
\tilde{T}(X_1',X_4') = 0 \\
\tilde{T}(X_1',X_5') = 0 \\
\tilde{T}(X_1',X_6') = -\rho X_2' \\
\tilde{T}(X_2',X_3') = 0 \\
\tilde{T}(X_2',X_4') = 0 \\
\tilde{T}(X_2',X_5') = 0 \\
\tilde{T}(X_2',X_6') = \rho X_1' \\
\tilde{T}(X_3',X_4') = AX_5' + BX_6' \\
\tilde{T}(X_3',X_5') = -AX_4' \\
\tilde{T}(X_3',X_6') = -BX_4' \\
\tilde{T}(X_4',X_5') = AX_3' \\
\tilde{T}(X_4',X_6') = BX_3' \\
\tilde{T}(X_5',X_6') = 0
\end{array}\right\} . \qquad \mathbf{(4.18)}$$

En el transcurso del cálculo de la matriz torsión (4.18) se obtuvo que $A = (\tau/\rho)(\Phi - \mu) \neq 0$; así, tanto ρ como A son no nulos. Ahora, para terminar el análisis de la torsión en este subcaso basta distinguir los dos casos siguientes que dependen del valor del parámetro B:

- Si $B = 0$ entonces (4.18) tiene la misma forma que la expresión de la torsión asociada al *Caso c)* del Estudio de (4.9). Por tanto, el espacio asociado se descompone de la forma

$$T_pM = (X_1', X_2', X_6') \oplus (X_3', X_4', X_5') .$$

- Si $B \neq 0$ entonces (4.18) es del tipo de (4.9) y, como se vio en el Estudio de (4.9), se puede suponer que $\rho > 0$, $A > 0$ y $B > 0$.

Caso B.2.3 ($\tau \neq \Theta$ *y* $\Phi = \mu$).

El estudio de este caso es análogo al del *Caso B.2.2* teniendo en cuenta que el estudio general se desarrolla sobre el endomorfismo *F*. Además, el resultado que se obtiene es exactamente el mismo que en dicho caso.

Caso B.2.4 ($\tau \neq \Theta$ *y* $\Phi \neq \mu$)

Aquí, se considerará que los parámetros correspondientes a la diagonalización de G son nulos; es decir, $d_1^* = d_2^* = 0$. (Para entender la naturaleza de estos parámetros ver la demostración del Lema 4.2.2.1.)

Así, debido al Lema 4.2.2.5, se puede asegurar que $T''^5_{1,3} = 0$, $\Phi \neq 0$ y $\mu \neq 0$ en (4.15). Y, por tanto, para continuar con el estudio se diferenciarán los subcasos siguientes:

B.2.4.a) Cuando $T''^5_{1,4} = 0$, $\Theta' = 0$ y $\tau' = 0$.

B.2.4.b) Cuando $T''^5_{1,4} = 0$, $\Theta' = 0$ y $\tau' \neq 0$.

B.2.4.c) Cuando $T''^5_{1,4} = 0$, $\Theta' \neq 0$ y $\tau' = 0$.

B.2.4.d) Cuando $T''^5_{1,4} = 0$, $\Theta' \neq 0$ y $\tau' \neq 0$.

B.2.4.e) Cuando $T''^5_{1,4} \neq 0$, $\Theta' = 0$ y $\tau' = 0$.

B.2.4.f) Cuando $T''^5_{1,4} = 0$, $\Theta' \neq 0$ y $\tau' \neq 0$.

B.2.4.g) Cuando $T''^5_{1,4} \neq 0$, $\Theta' = 0$ y $\tau' \neq 0$.

B.2.4.h) Cuando $T''^5_{1,4} \neq 0$, $\Theta' \neq 0$ y $\tau' = 0$.

B.2.4.i) Cuando $T''^5_{1,4} \neq 0$, $\Theta' \neq 0$ y $\tau' \neq 0$.

Subcaso B.2.4.a ($T''^5_{1,4} = 0$, $\Theta' = 0$ y $\tau' = 0$)

Se obtiene que (4.15) tiene la misma forma que la expresión de la torsión asociada al *Caso b)* del Estudio de (4.9). Por tanto, el espacio asociado se descompone de la forma

$$T_pM = (X_1^{**}, X_2^{**}, X_3^{**}, X_4^{**}, X_6^{**}) \oplus (X_5^{**}).$$

Subcaso B.2.4.b ($T''^5_{1,4} = 0$, $\Theta' = 0$ y $\tau' \neq 0$)

En este caso, se tiene que (4.15) es

$$
\left.\begin{array}{l}
\tilde{T}(X_1^{**},X_2^{**}) = \tau' X_5^{**} + \Phi X_6^{**} \\
\tilde{T}(X_1^{**},X_3^{**}) = 0 \\
\tilde{T}(X_1^{**},X_4^{**}) = 0 \\
\tilde{T}(X_1^{**},X_5^{**}) = -\tau' X_2^{**} \\
\tilde{T}(X_1^{**},X_6^{**}) = -\Phi X_2^{**} \\
\tilde{T}(X_2^{**},X_3^{**}) = 0 \\
\tilde{T}(X_2^{**},X_4^{**}) = 0 \\
\tilde{T}(X_2^{**},X_5^{**}) = \tau' X_1^{**} \\
\tilde{T}(X_2^{**},X_6^{**}) = \Phi X_1^{**} \\
\tilde{T}(X_3^{**},X_4^{**}) = \mu X_6^{**} \\
\tilde{T}(X_3^{**},X_5^{**}) = 0 \\
T(X_3^{**},X_6^{**}) = -\mu X_4^{**} \\
\tilde{T}(X_4^{**},X_5^{**}) = 0 \\
\tilde{T}(X_4^{**},X_6^{**}) = \mu X_3^{**} \\
\tilde{T}(X_5^{**},X_6^{**}) = 0
\end{array}\right\}. \qquad \textbf{(4.19)}
$$

Ahora, como $\Phi \neq 0$, $\tau' \neq 0$ se define $\rho = (\tau'^2 + \Phi^2)^{1/2} > 0$ y entonces, al igual que en el desarrollo del *Subcaso A.1.2*, se realiza el cambio de base ortonormal dado por

$$
X_i' = X_i^{**}, \quad i = 1,2,3,4, \quad X_6' = \frac{1}{\rho}(\tau' X_5^{**} + \Phi X_6^{**}), \quad X_5' = a_5 X_5^{**} + a_6 X_6^{**}
$$

de forma que los parámetros a_5, a_6 están determinados por la condición que $\{X_5', X_6'\}$ sea un conjunto ortonormal. Así, se obtiene que (4.19) en esta nueva base ortonormal es

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{T}(X'_1,X'_2)= && && && \rho X'_6\\
&\tilde{T}(X'_1,X'_3)=0\\
&\tilde{T}(X'_1,X'_4)=0\\
&\tilde{T}(X'_1,X'_5)=0\\
&\tilde{T}(X'_1,X'_6)= && -\rho X'_2\\
&\tilde{T}(X'_2,X'_3)=0\\
&\tilde{T}(X'_2,X'_4)=0\\
&\tilde{T}(X'_2,X'_5)=0\\
&\tilde{T}(X'_2,X'_6)=\rho X'_1\\
&\tilde{T}(X'_3,X'_4)= && && && AX'_5+BX'_6\\
&\tilde{T}(X'_3,X'_5)= && && -AX'_4\\
&\tilde{T}(X'_3,X'_6)= && && -BX'_4\\
&\tilde{T}(X'_4,X'_5)= && AX'_3\\
&\tilde{T}(X'_4,X'_6)= && BX'_3\\
&\tilde{T}(X'_5,X'_6)=0
\end{aligned}\right\}. \qquad \mathbf{(4.20)}$$

Durante el cálculo de la matriz torsión (4.20) se sigue que $A=-(\tau'/\rho)\mu\neq 0$ y $B=(\Phi/\rho)\mu\neq 0$; por tanto, (4.20) es del tipo de (4.9) y, como se vio en el Estudio de (4.9), se puede suponer que $\rho>0$, $A>0$ y $B>0$.

Subcaso B.2.4.c ($T''^{5}_{1,4}=0$, $\Theta'\neq 0$ y $\tau'=0$)

Es inmediato ver que (4.15) es directamente del tipo de (4.9).

Subcaso B.2.4.d ($T''^{5}_{1,4}=0$, $\Theta'\neq 0$ y $\tau'\neq 0$)

En este caso, se tiene que (4.15) toma la forma

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{T}(X_1^{**},X_2^{**})= && && \tau' X_5^{**}+\Phi X_6^{**}\\
&\tilde{T}(X_1^{**},X_3^{**})=0\\
&\tilde{T}(X_1^{**},X_4^{**})=0\\
&\tilde{T}(X_1^{**},X_5^{**})= && -\tau' X_2^{**}\\
&T(X_1^{**},X_6^{**})= && -\Phi X_2^{**}
\end{aligned}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{T}(X_2^{**},X_3^{**})=0\\ \tilde{T}(X_2^{**},X_4^{**})=0\\ \tilde{T}(X_2^{**},X_5^{**})=\tau' X_1^{**}\\ \tilde{T}(X_2^{**},X_6^{**})=\Phi X_1^{**}\\ \tilde{T}(X_3^{**},X_4^{**})= \qquad\qquad\qquad\qquad \Theta' X_5^{**}+\mu X_6^{**}\\ \tilde{T}(X_3^{**},X_5^{**})= \qquad\qquad -\Theta' X_4^{**}\\ \tilde{T}(X_3^{**},X_6^{**})= \qquad\qquad -\mu X_4^{**}\\ \tilde{T}(X_4^{**},X_5^{**})= \qquad \Theta' X_3^{**}\\ \tilde{T}(X_4^{**},X_6^{**})= \qquad \mu X_3^{**}\\ \tilde{T}(X_5^{**},X_6^{**})=0\end{array}\right\}. \qquad \textbf{(4.21)}$$

donde, como $\Phi \neq 0$, $\tau' \neq 0$ se define $\rho=(\tau'^2+\Phi^2)^{1/2}>0$ y procediendo de manera análoga a la del desarrollo del *Subcaso A.1.2*, se realiza el cambio de base ortonormal dado por

$$X_i' = X_i^{**}, \quad i=1,2,3,4, \quad X_6' = \frac{1}{\rho}(\tau' X_5^{**}+\Phi X_6^{**}), \quad X_5' = a_5 X_5^{**}+a_6 X_6^{**}$$

de forma que los parámetros a_5, a_6 están determinados por la condición que $\{X_5', X_6'\}$ sea un conjunto ortonormal. Ahora, (4.21) en esta nueva base ortonormal es

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{T}(X_1',X_2')= \qquad\qquad\qquad\qquad \rho X_6'\\ \tilde{T}(X_1',X_3')=0\\ \tilde{T}(X_1',X_4')=0\\ \tilde{T}(X_1',X_5')=0\\ \tilde{T}(X_1',X_6')= \quad -\rho X_2'\\ \tilde{T}(X_2',X_3')=0\\ \tilde{T}(X_2',X_4')=0\\ \tilde{T}(X_2',X_5')=0\\ \tilde{T}(X_2',X_6')=\rho X_1'\\ \tilde{T}(X_3',X_4')= \qquad\qquad\qquad\qquad AX_5'+BX_6'\\ \tilde{T}(X_3',X_5')= \qquad\qquad -AX_4'\\ \tilde{T}(X_3',X_6')= \qquad\qquad -BX_4'\\ \tilde{T}(X_4',X_5')= \qquad AX_3'\\ \tilde{T}(X_4',X_6')= \qquad BX_3'\\ \tilde{T}(X_5',X_6')=0\end{array}\right\}. \qquad \textbf{(4.22)}$$

Así, (4.22) es del tipo de (4.9) y, como se vio en el Estudio de (4.9), se puede suponer que $\rho > 0$, $A > 0$ y $B > 0$.

Subcaso B.2.4.e ($T''^{5}_{1,4} \neq 0$, $\Theta' = 0$ y $\tau' = 0$).

Ahora (4.15) es de la forma

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{T}(X_1^{**}, X_2^{**}) &= \Phi X_6^{**}\\
\tilde{T}(X_1^{**}, X_3^{**}) &= 0\\
\tilde{T}(X_1^{**}, X_4^{**}) &= T''^{5}_{1,4} X_5^{**}\\
\tilde{T}(X_1^{**}, X_5^{**}) &= -T''^{5}_{1,4} X_4^{**}\\
\tilde{T}(X_1^{**}, X_6^{**}) &= -\Phi X_2^{**}\\
\tilde{T}(X_2^{**}, X_3^{**}) &= -T''^{5}_{1,4} X_5^{**}\\
\tilde{T}(X_2^{**}, X_4^{**}) &= 0\\
\tilde{T}(X_2^{**}, X_5^{**}) &= +T''^{5}_{1,4} X_3^{**}\\
\tilde{T}(X_2^{**}, X_6^{**}) &= \Phi X_1^{**}\\
\tilde{T}(X_3^{**}, X_4^{**}) &= \mu X_6^{**}\\
\tilde{T}(X_3^{**}, X_5^{**}) &= -T''^{5}_{1,4} X_2^{**}\\
\tilde{T}(X_3^{**}, X_6^{**}) &= -\mu X_4^{**}\\
\tilde{T}(X_4^{**}, X_5^{**}) &= T''^{5}_{1,4} X_1^{**}\\
T(X_4^{**}, X_6^{**}) &= \mu X_3^{**}\\
\tilde{T}(X_5^{**}, X_6^{**}) &= 0
\end{aligned}\right\} \quad \textbf{(4.23)}$$

donde, $T''^{5}_{1,4} \neq 0$ y $0 \neq \mu \neq \Phi \neq 0$. Además, se puede suponer que $T''^{5}_{1,4} > 0$, ya que si no lo fuera, cambiando de signo X_5^{**} si lo sería y que $\Phi > 0$ ya que si no lo fuera, cambiando de signo X_6^{**} se obtendría (obsérvese que al hacer este último cambio de base ortonormal también cambiaría el signo de μ).

Subcaso B.2.4.f ($T''^{5}_{1,4} = 0$, $\Theta' \neq 0$ y $\tau' \neq 0$)

Ahora (4.15) es

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{T}(X_1^{**},X_2^{**}) = \tau' X_5^{**} + \Phi X_6^{**}\\
&\tilde{T}(X_1^{**},X_3^{**}) = 0\\
&\tilde{T}(X_1^{**},X_4^{**}) = \mathrm{T}''^{5}_{1,4} X_5^{**}\\
&\tilde{T}(X_1^{**},X_5^{**}) = -\tau' X_2^{**} - \mathrm{T}''^{5}_{1,4} X_4^{**}\\
&\tilde{T}(X_1^{**},X_6^{**}) = -\Phi X_2^{**}\\
&\tilde{T}(X_2^{**},X_3^{**}) = -T''^{5}_{1,4} X_5^{**}\\
&\tilde{T}(X_2^{**},X_4^{**}) = 0\\
&\tilde{T}(X_2^{**},X_5^{**}) = \tau' X_1^{**} + T''^{5}_{1,4} X_3^{**}\\
&T(X_2^{**},X_6^{**}) = \Phi X_1^{**}\\
&\tilde{T}(X_3^{**},X_4^{**}) = \mu X_6^{**}\\
&\tilde{T}(X_3^{**},X_5^{**}) = -T''^{5}_{1,4} X_2^{**}\\
&\tilde{T}(X_3^{**},X_6^{**}) = -\mu X_4^{**}\\
&\tilde{T}(X_4^{**},X_5^{**}) = T''^{5}_{1,4} X_1^{**}\\
&\tilde{T}(X_4^{**},X_6^{**}) = \mu X_3^{**}\\
&\tilde{T}(X_5^{**},X_6^{**}) = 0
\end{aligned}\right\} \quad \textbf{(4.24)}$$

donde, $T''^{5}_{1,4} \neq 0$, $\tau' \neq 0$ y $0 \neq \mu \neq \Phi \neq 0$. Además, se puede suponer que $T''^{5}_{1,4} > 0$ ya que si no lo fuera, cambiando de signo X_5^{**}, si lo sería (obsérvese que al hacer este cambio de base ortonormal también cambiaría el signo de τ') y que $\Phi > 0$ ya que si no lo fuera, cambiando de signo X_6^{**} se obtendría (obsérvese que al hacer este último cambio de base ortonormal también cambiaría el signo de μ).

Subcaso B.2.4.g ($T''^{5}_{1,4} \neq 0$, $\Theta' = 0$ y $\tau' \neq 0$)

Ahora (4.15) es

$$\left.\begin{array}{l}
\tilde{T}(X_1^{**},X_2^{**}) = \Phi X_6^{**} \\
\tilde{T}(X_1^{**},X_3^{**}) = 0 \\
\tilde{T}(X_1^{**},X_4^{**}) = \mathrm{T}_{1,4}^{\prime\prime 5} X_5^{**} \\
\tilde{T}(X_1^{**},X_5^{**}) = -\mathrm{T}_{1,4}^{\prime\prime 5} X_4^{**} \\
\tilde{T}(X_1^{**},X_6^{**}) = -\Phi X_2^{**} \\
\tilde{T}(X_2^{**},X_3^{**}) = -\mathrm{T}_{1,4}^{\prime\prime 5} X_5^{**} \\
\tilde{T}(X_2^{**},X_4^{**}) = 0 \\
\tilde{T}(X_2^{**},X_5^{**}) = \mathrm{T}_{1,4}^{\prime\prime 5} X_3^{**} \\
\tilde{T}(X_2^{**},X_6^{**}) = \Phi X_1^{**} \\
\tilde{T}(X_3^{**},X_4^{**}) = \Theta' X_5^{**} + \mu X_6^{**} \\
\tilde{T}(X_3^{**},X_5^{**}) = -\mathrm{T}_{1,4}^{\prime\prime 5} X_2^{**} - \Theta' X_4^{**} \\
\tilde{T}(X_3^{**},X_6^{**}) = -\mu X_4^{**} \\
\tilde{T}(X_4^{**},X_5^{**}) = T_{1,4}^{\prime\prime 5} X_1^{**} + \Theta' X_3^{**} \\
\tilde{T}(X_4^{**},X_6^{**}) = \mu X_3^{**} \\
\tilde{T}(X_5^{**},X_6^{**}) = 0
\end{array}\right\} \quad \textbf{(4.25)}$$

donde, $T_{1,4}^{\prime\prime 5} \neq 0$, $\Theta' \neq 0$ y $0 \neq \mu \neq \Phi \neq 0$. Además, se puede suponer que $T_{1,4}^{\prime\prime 5} > 0$ ya que si no lo fuera, cambiando de signo X_5^{**} si lo sería (obsérvese que al hacer este cambio de base ortonormal también cambiaría el signo de Θ') y que $\Phi > 0$ ya que si no lo fuera, cambiando de signo X_6^{**} se obtendría (obsérvese que al hacer este último cambio de base ortonormal también cambiaría el signo de μ).

Subcaso B.2.4.h ($T_{1,4}^{\prime\prime 5} \neq 0$, $\Theta' \neq 0$ y $\tau' = 0$)

Ahora (4.15) es

$$
\left.\begin{array}{l}
\tilde{T}(X_1^{**},X_2^{**}) = \tau' X_5^{**} + \Phi X_6^{**} \\
\tilde{T}(X_1^{**},X_3^{**}) = 0 \\
\tilde{T}(X_1^{**},X_4^{**}) = T''^{5}_{1,4} X_5^{**} \\
\tilde{T}(X_1^{**},X_5^{**}) = -\tau' X_2^{**} - T''^{5}_{1,4} X_4^{**} \\
\tilde{T}(X_1^{**},X_6^{**}) = -\Phi X_2^{**} \\
\tilde{T}(X_2^{**},X_3^{**}) = -T''^{5}_{1,4} X_5^{**} \\
\tilde{T}(X_2^{**},X_4^{**}) = 0 \\
\tilde{T}(X_2^{**},X_5^{**}) = \tau' X_1^{**} + T''^{5}_{1,4} X_3^{**} \\
T(X_2^{**},X_6^{**}) = \Phi X_1^{**} \\
\tilde{T}(X_3^{**},X_4^{**}) = \Theta' X_5^{**} + \mu X_6^{**} \\
\tilde{T}(X_3^{**},X_5^{**}) = -T''^{5}_{1,4} X_2^{**} - \Theta' X_4^{**} \\
\tilde{T}(X_3^{**},X_6^{**}) = -\mu X_4^{**} \\
\tilde{T}(X_4^{**},X_5^{**}) = T''^{5}_{1,4} X_1^{**} + \Theta' X_3^{**} \\
\tilde{T}(X_4^{**},X_6^{**}) = \mu X_3^{**} \\
\tilde{T}(X_5^{**},X_6^{**}) = 0
\end{array}\right\} \qquad \textbf{(4.26)}
$$

donde, $T''^{5}_{1,4} \neq 0$, $\tau' \neq 0$, $\Theta' \neq 0$ y $0 \neq \mu \neq \Phi \neq 0$. Además, se puede suponer que $T''^{5}_{1,4} > 0$ ya que si no lo fuera entonces, cambiando de signo X_5^{**} si lo sería (obsérvese que al hacer este cambio de base ortonormal también cambiaría el signo de τ' y de Θ') y que $\Phi > 0$ ya que si no lo fuera, cambiando de signo X_6^{**} se obtendría (obsérvese que al hacer este último cambio de base ortonormal también cambiaría el signo de μ).

Nota 4.2.2.6

Todos los cambios de base realizados a lo largo de todo el desarrollo del *Caso B.2*, siempre conservan la actuación de la transformación curvatura $P = A_{12} + A_{34}$.

Caso B.3 ($\alpha = -\beta$).

Este caso ya ha sido analizado en el *Caso B.2* debido a que, resolviendo (4.11), sustituyendo lo obtenido en (4.12) e intercambiando X_3 con X_4, se obtiene (4.13).

4.2.3. Análisis del Caso C (Rango 6)

Ahora, se sabe que para una elección adecuada de la base ortonormal, existe una transformación curvatura de la forma,

$$\tilde{R}(X,Y)=\alpha A_{12}+\beta A_{34}+\gamma A_{56}\,,\quad \alpha\beta\gamma\neq 0$$

donde A_{12} y A_{34} están dados por las fórmulas (4.2) y (4.9) respectivamente y A_{56} por

$$A_{56}X_1=A_{56}X_2=A_{56}X_3=A_{56}X_4=0\,,\quad A_{56}X_5=X_6\,,\quad A_{56}X_6=-X_5\,. \quad \textbf{(4.27)}$$

De acuerdo con (3.3), se tiene la condición $(\alpha A_{12}+\beta A_{34}+\gamma A_{56})\cdot\tilde{T}=0$ que aplicada sobre (4.1) de forma análoga al Lema 3.4.1.2, se obtiene

$$T_{1,2}^{3}=T_{1,2}^{4}=T_{1,2}^{5}=T_{1,2}^{6}=T_{2,3}^{4}=T_{2,5}^{6}=T_{1,3}^{4}=T_{1,5}^{6}=T_{3,4}^{5}=T_{3,4}^{6}=T_{4,5}^{6}=T_{3,5}^{6}=0 \quad \textbf{(4.28)}$$

y los siguientes sistemas homogéneos de condiciones adicionales:

$$\left.\begin{array}{r}\gamma T_{1,3}^{6}+\beta T_{1,4}^{5}+\alpha T_{2,3}^{5}=0\\ \alpha T_{1,4}^{5}+\beta T_{2,3}^{5}-\gamma T_{2,4}^{6}=0\\ -\beta T_{1,3}^{6}-\gamma T_{1,4}^{5}+\alpha T_{2,4}^{6}=0\\ \alpha T_{1,3}^{6}+\gamma T_{2,3}^{5}-\beta T_{2,4}^{6}=0\end{array}\right\}(A)\,,\quad \left.\begin{array}{r}\beta T_{1,4}^{6}+\alpha T_{2,3}^{6}-\gamma T_{1,3}^{5}=0\\ \gamma T_{2,3}^{6}+\alpha T_{1,3}^{5}-\beta T_{2,4}^{5}=0\\ \alpha T_{1,4}^{6}+\beta T_{2,3}^{6}+\gamma T_{2,4}^{5}=0\\ \gamma T_{1,4}^{6}-\beta T_{1,3}^{5}+\alpha T_{2,4}^{5}=0\end{array}\right\}(B) \quad \textbf{(4.29)}$$

donde, $\det A=\det B=(\alpha-\beta-\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)$.

Así, aplicando (4.28) sobre (4.1) se sigue que

$$\left.\begin{array}{ll}\tilde{T}(X_1,X_2)=0 & \\ \tilde{T}(X_1,X_3)= & \mathrm{T}_{1,3}^{5}X_5+\mathrm{T}_{1,3}^{6}X_6\\ \tilde{T}(X_1,X_4)= & \mathrm{T}_{1,4}^{5}X_5+\mathrm{T}_{1,4}^{6}X_6\\ \tilde{T}(X_1,X_5)= & -\mathrm{T}_{1,3}^{5}X_3-\mathrm{T}_{1,4}^{5}X_4\\ \tilde{T}(X_1,X_6)= & -\mathrm{T}_{1,3}^{6}X_3-\mathrm{T}_{1,4}^{6}X_4\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{lll}
\tilde{T}(X_2,X_3)= & & T^5_{2,3}X_5+T^6_{2,3}X_6 \\
\tilde{T}(X_2,X_4)= & & T^5_{2,4}X_5+T^6_{2,4}X_6 \\
\tilde{T}(X_2,X_5)= & -T^5_{2,3}X_3-T^5_{2,4}X_4 & \\
\tilde{T}(X_2,X_6)= & -T^6_{2,3}X_3-T^6_{2,4}X_4 & \\
\tilde{T}(X_3,X_4)=0 & & \\
\tilde{T}(X_3,X_5)=T^5_{1,3}X_1+T^5_{2,3}X_2 & & \\
\tilde{T}(X_3,X_6)=T^6_{1,3}X_1+T^6_{2,3}X_2 & & \\
\tilde{T}(X_4,X_5)=T^5_{1,4}X_1+T^5_{2,4}X_2 & & \\
\tilde{T}(X_4,X_6)=T^6_{1,4}X_1+T^6_{2,4}X_2 & & \\
\tilde{T}(X_5,X_6)=0 & &
\end{array}\right\}. \qquad \textbf{(4.30)}$$

Ahora, para poder aplicar (4.29) a (4.12) habrá que diferenciar los casos siguientes:

C.1) Cuando $\det A \neq 0$ se obtiene que la única solución de los sistemas A y B es la solución trivial; por tanto, $\tilde{T}=0$ y aplicando el Lema 3.2.3, se concluye que el espacio asociado es simétrico.

C.2) Si $\det A = 0$, será necesario analizar las diferentes posibilidades de obtener que el determinante sea cero. Así, se distinguirán los casos siguientes:

C.2.1) Si $\alpha=\beta+\gamma$.

C.2.2) Si $\alpha=-(\beta+\gamma)$.

C.2.3) Si $\alpha=\beta-\gamma$.

C.2.4) Si $\alpha=-(\beta-\gamma)$.

Caso C.2.1 ($\alpha=\beta+\gamma$).

A partir de (4.29), resolviendo los sistemas se obtiene fácilmente que $T^6_{1,3}=T^5_{1,4}=T^6_{2,4}=-T^5_{2,3}$ y que $-T^6_{1,4}=T^6_{2,3}=T^5_{1,3}=T^5_{2,4}$. Así, sustituyendo en (4.30), se sigue

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{T}(X_1,X_2)=0\\
&\tilde{T}(X_1,X_3)= T^5_{2,4}X_5+T^6_{2,4}X_6\\
&\tilde{T}(X_1,X_4)= T^6_{2,4}X_5-T^5_{2,4}X_6\\
&\tilde{T}(X_1,X_5)= -T^5_{2,4}X_3-T^6_{2,4}X_4\\
&\tilde{T}(X_1,X_6)= -T^6_{2,4}X_3+T^5_{2,4}X_4\\
&\tilde{T}(X_2,X_3)= -T^6_{2,4}X_5+T^5_{2,4}X_6\\
&\tilde{T}(X_2,X_4)= T^5_{2,4}X_5+T^6_{2,4}X_6\\
&\tilde{T}(X_2,X_5)= T^6_{2,4}X_3-T^5_{2,4}X_4\\
&\tilde{T}(X_2,X_6)= -T^5_{2,4}X_3-T^6_{2,4}X_4\\
&\tilde{T}(X_3,X_4)=0\\
&\tilde{T}(X_3,X_5)= T^5_{2,4}X_1-T^6_{2,4}X_2\\
&\tilde{T}(X_3,X_6)= T^6_{2,4}X_1+T^5_{2,4}X_2\\
&\tilde{T}(X_4,X_5)= T^6_{2,4}X_1+T^5_{2,4}X_2\\
&\tilde{T}(X_4,X_6)= -T^5_{2,4}X_1+T^6_{2,4}X_2\\
&\tilde{T}(X_5,X_6)=0
\end{aligned}\right\}. \quad \textbf{(4.31)}$$

Para continuar con el estudio de esta matriz, se debe de realizar un cambio de base ortonormal de forma que se conserve la actuación del operador $P=\alpha A_{12}+\beta A_{34}+\gamma A_{56}$, $\alpha\beta\gamma\neq 0$. Por ello, sólo se pueden realizar cambios de base que entremezclen X_5 con X_6, X_3 con X_4 y X_1 con X_2. Por ello, se distinguirán los casos:

C.2.1.a) Si se supone que $T^5_{2,4}=T^6_{2,4}=0$, entonces, $\tilde{T}=0$ y por el Lema 3.2.3, el espacio asociado es simétrico.

C.2.1.b) Si se supone que $\rho=((T^5_{2,4})^2+(T^6_{2,4})^2)^{1/2}>0$, se realiza el cambio de base ortonormal (obsérvese que sólo entremezcla X_5 con X_6) dado por

$$X'_i=X_i\,,\quad i=1,2,3,4\,,\quad X'_6=\frac{1}{\rho}(T^5_{2,4}X_5+T^6_{2,4}X_6)\,,\quad X'_5=a_5X_5+a_6X_6$$

de forma que los parámetros a_5, a_6 están determinados por la condición que $\{X'_5\,,X'_6\}$ sea un conjunto ortonormal y $P(X'_5)=\gamma X'_6$, $P(X'_6)=-\gamma X'_5$. Así, resolviendo el sistema, se sigue que $a_5=T^6_{2,4}/\rho$, $a_6=-T^5_{2,4}/\rho$ y realizando el cambio de base ortonormal utilizando (3.10), se sigue que (4.31) en esta nueva base toma la forma

$$\left.\begin{array}{l}
\tilde{T}(X_1', X_2') = 0 \\
\tilde{T}(X_1', X_3') = \rho X_6' \\
\tilde{T}(X_1', X_4') = \rho X_5' \\
\tilde{T}(X_1', X_5') = -\rho X_4' \\
\tilde{T}(X_1', X_6') = -\rho X_3' \\
\tilde{T}(X_2', X_3') = -\rho X_5' \\
\tilde{T}(X_2', X_4') = \rho X_6' \\
\tilde{T}(X_2', X_5') = \rho X_3' \\
\tilde{T}(X_2', X_6') = -\rho X_4' \\
\tilde{T}(X_3', X_4') = 0 \\
\tilde{T}(X_3', X_5') = -\rho X_2' \\
\tilde{T}(X_3', X_6') = \rho X_1' \\
\tilde{T}(X_4', X_5') = \rho X_1' \\
\tilde{T}(X_4', X_6') = \rho X_2' \\
\tilde{T}(X_5', X_6') = 0
\end{array}\right\}. \qquad \textbf{(4.32)}$$

Caso C.2.2 ($\alpha = -(\beta + \gamma)$)

Este caso está incluido en el anterior ya que, si se resuelve (4.29), se sustituye lo obtenido en (4.30) y se intercambia X_1 con X_2 se obtiene (4.31).

Caso C.2.3 ($\alpha = \beta - \gamma$)

Este caso también está incluido en el *Caso C.2.1* ya que, si se resuelve (4.29), se sustituye lo obtenido en (4.30) y se intercambia X_5 con X_6 también se obtiene (4.31).

Caso C.2.4 ($\alpha = -(\beta - \gamma)$)

Este último caso también está incluido en el *Caso C.2.1* ya que, si también se resuelve (4.29), se sustituye lo obtenido en (4.30) y se intercambia X_3 con X_4, se obtiene (4.31).

ANEXO A.
OPERADORES DIFERENCIALES INVARIANTES

Para el desarrollo de este apartado se sigue [H.2, Pág. 233-287].

A.1. FUNCIONES DIFERENCIALES SOBRE $\mathbb{R}^n$

En primer lugar, es necesario establecer la notación. Así, sea $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ tal que $|x|=(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{1/2}$. Si $V\subset\mathbb{R}^n$ es un subespacio abierto, se denota por $\mathcal{E}(V)$ el espacio de las funciones diferenciables valuadas complejas sobre V y por $\mathcal{D}(V)$ el espacio de las funciones en $\mathcal{E}(V)$ con soporte compacto y contenido en V.

Nota A.1.1

Aunque el principal interés es el estudio del espacio $\mathcal{E}(V)$, será más conveniente trabajar con el espacio $\mathcal{D}(V)$ puesto que, si $U\subset V\subset\mathbb{R}^n$ entonces, $\mathcal{D}(U)\subset\mathcal{D}(V)$.

Además, si ∂_i denota $\partial/\partial x_i$ y $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ es una $n-$tupla de enteros $\alpha_i\geq 0$, se consideran las notaciones de multi-índice siguientes:

$$D^\alpha=\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_n^{\alpha_n},\qquad x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n},\qquad |\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n,\qquad \alpha!=\alpha_1!\cdots\alpha_n!$$

y, si $\alpha\leq\beta$, donde $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ es otra $n-$tupla de enteros positivos tal que $\beta_j\leq\alpha_j$ para todo j, se consideran

$$\alpha-\beta=(\alpha_1-\beta_1,\ldots,\alpha_n-\beta_n),\qquad \binom{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}.$$

Y, así, se tiene que la regla de Leibniz generalizada para la diferenciabilidad del producto de dos funciones f y g es:

$$D^{\alpha}(fg) = \sum_{\mu+\nu=\alpha} \binom{\alpha}{\nu} (D^{\nu} f)(D^{\mu} g). \tag{A.1}$$

Definición A.1.2

Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio abierto. Se dice que un ***operador diferencial sobre V*** es una aplicación lineal $\boldsymbol{D} : \mathcal{D}(V) \to \mathcal{D}(V)$ de forma que para cada conjunto abierto relativamente compacto $U \subset V$ tal que $\bar{U} \subset V$, existe una familia finita de funciones $a_{\alpha} \in \mathcal{E}(V)$ donde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+$, tal que

$$D\Phi = \sum_{\alpha} a_{\alpha} D^{\alpha} \Phi, \tag{A.2}$$

para todo $\Phi \in \mathcal{D}(U)$.

Debido a esta definición, un operador diferencial D sobre V satisface para todo $\Psi \in \mathcal{D}(V)$ que

$$sop(D\Psi) \subset sop(\Psi), \tag{A.3}$$

Así, D puede ser extendido a un operador lineal (también denotado por D) de $\mathcal{E}(V)$ en $\mathcal{E}(V)$ mediante

$$(Df)(x) = (D\Phi)(x) \tag{A.4}$$

dónde $x \in V$, $f \in \mathcal{E}(V)$ son arbitrarios y, Φ es cualquier función en $\mathcal{D}(V)$ que coincide con f en un entorno de x.

Por tanto, se obtiene el resultado siguiente cuya demostración puede ser consultada en [H.2, Pág.236].

Teorema A.1.3

$D : \mathcal{D}(V) \to \mathcal{D}(V)$ es un operador diferencial si y sólo si D es una aplicación lineal satisfaciendo la condición (A.3).

A.2. OPERADORES DIFERENCIALES SOBRE VARIEDADES

Sea M una variedad diferenciable. Entonces, motivados por el Teorema A.1.3 se tiene:

Definición A.2.1

Un ***operador diferencial sobre M***, es una aplicación lineal $\boldsymbol{D}: C_c^\infty(M) \to C_c^\infty(M)$ tal que:

$$sop(Df) \subset sop(f),$$

para todo $f \in C_c^\infty(M)$.

Si (U, Φ) es un sistema coordenado local sobre *M*, la aplicación

$$D^\Phi : F \to (D(F \circ \Phi)) \circ \Phi^{-1}, \tag{A.5}$$

donde $F \in C_c^\infty(\Phi(U))$, satisface la propiedad (A.3). Así, usando (A.2) se obtiene para cada conjunto abierto relativamente compacto $W \subset U$ con $\overline{W} \subset U$, una familia finita de funciones $a_\alpha \in C^\infty(W)$ donde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+$, tal que

$$Df = \sum_\alpha a_\alpha (D^\alpha (f \circ \Phi^{-1})) \circ \Phi, \tag{A.6}$$

donde $f \in C_c^\infty(W)$.

Así, análogamente a (A.4), se puede extender la definición de operador diferencial sobre $C^\infty(M)$.

Siguiendo la notación de Schwartz, se considera que

$$\boldsymbol{\mathcal{D}(M)} = C_c^\infty(M), \qquad \boldsymbol{\mathcal{E}(M)} = C^\infty(M),$$

y, si $K \subset M$ es cualquier subespacio compacto, $\boldsymbol{\mathcal{D}_K(M)}$ denota el conjunto de las funciones en $\mathcal{D}(M)$ con soporte en *K*.

En adelante, se supondrá que *M* tiene una base numerable de abiertos y se seguirá la notación siguiente. Se denota por ***E*(*M*)** el conjunto de todos los operadores diferenciales sobre *M* y si $f \in \mathcal{E}(M)$ y $D \in E(M)$, el valor de Df en *p* denotado por $(Df)(p)$, a veces, será denotado por $(D_p(f(p))$. Además, la composición de dos operadores diferenciales D_1 y D_2 será denotada por $D_1 \circ D_2$. Y, si *M* y *N* son variedades diferenciales y, $\Phi: M \to N$ es una aplicación diferenciable, se denota por $d\Phi_p$ a la diferencial de Φ en $p \in M$, la cual aplica T_pM en $T_{\Phi(p)}N$.

Notación A.2.2

Si $\Phi: M \to N$ es un difeomorfismo, $f \in \mathcal{D}(N)$, $g \in \mathcal{E}(N)$ y $D \in E(M)$, se considera

$$g^{\Phi^{-1}} = g \circ \Phi, \qquad D^{\Phi}(g) = (D(g^{\Phi^{-1}}))^{\Phi} . \tag{A.7}$$

Entonces, $g^{\Phi^{-1}} \in \mathcal{E}(M)$ y D^{Φ} es un operador diferencial sobre N denominado ***la imagen de D por*** Φ.

Definición A.2.3

Si Φ es un difeomorfismo de M en si mismo, se dirá que ***D es invariante por*** Φ si y sólo si $D^{\Phi} = D$; es decir, si y sólo si para todo $g \in \mathcal{E}(M)$ se tiene que

$$Dg = (D(g \circ \Phi)) \circ \Phi^{-1} .$$

A.3. OPERADORES DIFERENCIALES INVARIANTES SOBRE GRUPOS DE LIE Y ESPACIOS HOMOGÉNEOS

A.3.1. Introducción

Sea M una variedad diferenciable y $\Phi : M \to M$ un difeomorfismo de M sobre si misma. Se considerará, como en el apartado anterior que

$$f^{\Phi} = f \circ \Phi^{-1},$$

para $f \in \mathcal{E}(M)$ y, que si D es un operador diferencial sobre M, D^{Φ} se define mediante

$$D^{\Phi} : f \to (Df^{\Phi^{-1}})^{\Phi} = (D(f \circ \Phi)) \circ \Phi^{-1}, \qquad f \in \mathcal{E}(M).$$

Además, por la Definición A.2.1, se sabe que D^{Φ} es otro operador diferencial.

En este apartado, al operador D se le dirá invariante bajo Φ si $D^{\Phi} = D$; es decir, $D(f \circ \Phi) = (Df) \circ \Phi$ para todo $f \in \mathcal{E}(M)$. Además, esta notación está justificada ya que

$$D^{\Phi} f^{\Phi} = (D(f^{\Phi})^{\Phi^{-1}})^{\Phi} = (D(f^{\Phi} \circ \Phi)) \circ \Phi^{-1} =$$
$$= (D(f \circ \Phi^{-1} \circ \Phi)) \circ \Phi^{-1} = (D(f)) \circ \Phi^{-1} = (Df)^{\Phi} .$$

Para aplicar las ventajas del concepto de invariancia, seguidamente se estudiará la invariancia de los operadores diferenciales bajo un grupo transitivo de difeomorfismos.

Definición A.3.1.1

Sea G un grupo de Lie, $H \subset G$ un subgrupo cerrado de este y G/H la variedad de las clases a izquierda, gH $(g \in G)$. Se define $\boldsymbol{D(G/H)}$ como el **álgebra** de todos los **operadores diferenciales sobre** $\boldsymbol{G/H}$ los cuales son **invariantes a izquierda**; es decir, aquellos operadores diferenciales que son invariantes bajo todas las transformaciones $\tau(g): xH \to gxH$ de G/H en si mismo.

Notación A.3.1.2

Se denotará por $D(G)$ el álgebra $D(G/\{e\})$.

Definición A.3.1.3

Sea L un grupo localmente compacto, V un espacio vectorial topológico y $Aut(V)$ el grupo de los homomorfismos de V en si mismo. Una **representación π de L sobre V** es un homomorfismo $\pi: L \to Aut(V)$ tal que la aplicación, $(l,v) \to \pi(l)v$ de $L \times V$ en V, es continua.

Además, se dice que π es **irreducible** si $\{0\}$ y V son los únicos subespacios cerrados de V invariantes bajo $\pi(L)$.

A.3.2. El Álgebra D(G/H)

Ahora, dado el espacio de las clases G/H, el objetivo es describir los operadores en $D(G/H)$. Para ello, primero se considera el caso $H = \{e\}$.

Definición A.3.2.1

Si V es un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$, el **álgebra simétrica $S(V)$ sobre V** es definida como el álgebra de las funciones polinomiales sobre V^* valuadas complejas. Así, si $X_1, \ldots, X_n$ es una base de V, $S(V)$ puede ser identificada con el álgebra (conmutativa) de los polinomios

$$\sum_{(k)} a_{k_1 \cdots k_n} X_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n}.$$

Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de G y $\exp: \mathfrak{g} \to G$ la aplicación exponencial que aplica la recta $\mathbb{R}X$ que pasa por 0 en $\mathfrak{g}$ sobre el subgrupo uniparamétrico $t \to \exp tX$ de G. Si $X \in \mathfrak{g}$, se denota por $\tilde{X}$ el campo vectorial sobre G dado por

$$(\tilde{X}f)(g) = X(f \circ L_g)(e) = \left\{ \frac{d}{dt} f(g \exp tX) \right\}_{t=0}, \qquad \textbf{(A.8)}$$

donde, $f \in \mathcal{E}(G)$, $g \in G$ y L_g denota la translación a izquierda de G en si mismo, $x \to gx$. Así denotado, $\tilde{X}$ es un operador diferencial sobre G y, si $h \in G$, entonces

$$(\tilde{X}^{L_h} f)(g) = ((\tilde{X}(f \circ L_h)) \circ L_{h^{-1}})(g) = (\tilde{X}(f \circ L_h))(h^{-1}g) =$$

$$= \left\{ \frac{d}{dt}(f \circ L_h)(h^{-1} g \exp tX) \right\}_{t=0} = \left\{ \frac{d}{dt} f(g \exp tX) \right\}_{t=0} = (\tilde{X}f)(g) \, ;$$

es decir, $\tilde{X}^{L_h} = \tilde{X}$ y, por tanto, $\tilde{X} \in D(G)$. Más aún, el corchete sobre $\mathfrak{g}$ está definido como

$$\widetilde{[X,Y]} = \tilde{X} \circ \tilde{Y} - \tilde{Y} \circ \tilde{X} = \tilde{X}\tilde{Y} - \tilde{Y}\tilde{X},$$

donde $X, Y \in \mathfrak{g}$.

El siguiente resultado, el cual relaciona $S(\mathfrak{g})$ y $D(G)$, muestra en particular que $D(G)$ está generado por $\tilde{X}$ $(X \in \mathfrak{g})$.

Nota A.3.2.2

Con excepción de los escalares, que ahora se consideran complejos, este resultado hace que $D(G)$ coincida con el álgebra ya introducida, e igual denotada, en el Capítulo II, §1, No. 4 de [H.1].

Teorema A.3.2.3

Sea G cualquier grupo de Lie con álgebra $\mathfrak{g}$ y $S(\mathfrak{g})$ el álgebra simétrica sobre $\mathfrak{g}$. Entonces, existe una única biyección lineal

$$\lambda : S(\mathfrak{g}) \to D(G)$$

tal que $\lambda(X^m) = \tilde{X}^m$ $(X \in \mathfrak{g},\ m \in \mathbb{Z}^+)$. Además, si $X_1, \ldots, X_n$ es cualquier base de $\mathfrak{g}$ y $P \in S(\mathfrak{g})$, entonces

$$(\lambda(P)f)(g) = \left\{ P(\partial_1, \ldots, \partial_n) f(g \exp(t_1 X_1 + \cdots + t_n X_n)) \right\}_{t=0}, \qquad \textbf{(A.9)}$$

donde $f \in \mathcal{E}(G)$, $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial t_i}$ y $t = (t_1, \ldots, t_n)$.

Demostración

Fijada una base $X_1, \ldots, X_n$ de $\mathfrak{g}$, la aplicación

$$g \exp(t_1 X_1 + \cdots + t_n X_n) \to (t_1, \ldots, t_n)$$

es un sistema de coordenadas sobre un entorno de g en G. Así, (A.9) define un operador diferencial $\lambda(P)$ sobre G.

Evidentemente, $\lambda(P)$ es invariante a la izquierda $\left((\lambda(P))^{L_h} = \lambda(P) \right)$ y, por (A.8) $\lambda(X_i) = \tilde{X}_i$, $i = 1, \ldots, n$, así, por linealidad $\lambda(X) = \tilde{X}$ para $X \in \mathfrak{g}$. También,

$$(\tilde{X}^2 f)(g) = \tilde{X}(\tilde{X}f)(g) = \left\{\frac{d}{dt}(\tilde{X}f)(g\exp tX)\right\}_{t=0} =$$

$$= \left\{\frac{d}{dt}\left\{\frac{d}{ds}f(g\exp tX\exp sX)\right\}_{s=0}\right\}_{t=0} = \left\{\frac{d^2}{dz^2}f(g\exp zX)\right\}_{z=s+t=0} = (\lambda(X^2)f)(g),$$

donde, si $X = \sum_{i=1}^{n} x_i X_i$, se obtiene que

$$\sum_{i,j} x_i x_j (\lambda(X_i X_j)f)(g) = (\lambda(X^2)f)(g).$$

De forma análoga, para $X \in \mathfrak{g}, m \in \mathbb{Z}^+$ se tiene que

$$\lambda(X^m) = \tilde{X}^m. \tag{A.10}$$

Para un $m \in \mathbb{Z}^+$ fijo, las potencias X^m $(X \in \mathfrak{g})$ generan el subespacio $\boldsymbol{S^m(\mathfrak{g})} \subset S(\mathfrak{g})$ de los polinomios homogéneos de grado *m*. Así, (A.10) muestra que la definición de λ no depende de la base elegida.

Seguidamente se prueba la inyectividad de λ. Suponiendo que $\lambda(P) = 0$ con $P \neq 0$, sea $aX_1^{m_1} \cdots X_n^{m_n}$, el mayor término en *P* y sea *f* una función diferenciable sobre un entorno de *e* en *G* tal que:

$$f(\exp(t_1 X_1 + \cdots + t_n X_n)) = t_1^{m_1} \cdots t_n^{m_n}$$

para un *t* pequeño. Entonces, $(\lambda(P)f)(e) \neq 0$ contradice el hecho que $\lambda(P) = 0$.

Ahora, se prueba que λ es suprayectiva. En efecto, λ aplica $S(\mathfrak{g})$ sobre $D(G)$. De hecho, si $u \in D(G)$, usando (A.6) existe un polinomio *P* tal que

$$(uf)(e) = \{P(\partial_1, \ldots, \partial_n) f \exp(t_1 X_1 + \cdots + t_n X_n)\}_{t=0} = (\lambda(P)f)(g).$$

Entonces, debido a la invariancia a la izquierda de *u*, se tiene que la igualdad anterior se satisface para todo $g \in G$. Así, $u = \lambda(P)$.

Definición A.3.2.4

A la aplicación $\boldsymbol{\lambda}$ se la denomina ***simetrización***.

Proposición A.3.2.5

Si $Y_1, \ldots, Y_p \in \mathfrak{g}$, entonces

$$\lambda(Y_1,\dots,Y_p)=\frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\tilde{Y}_{\sigma(1)}\cdots\tilde{Y}_{\sigma(p)} \tag{A.11}$$

donde $\mathfrak{S}_p$ denota el grupo simétrico de p letras.

Demostración

Este resultado se obtiene aplicando (A.10) sobre $(t_1Y_1+\cdots+t_pY_p)^p$, usando la conmutatividad de $S(V)$ y, entonces, igualando los coeficientes asociados a $t_1\dots t_p$.

A continuación, se resaltan algunos hechos correspondientes a la representación adjunta de G, Ad ó Ad_G y a la representación adjunta de $\mathfrak{g}$, ad ó $ad_{\mathfrak{g}}$.

Recordar que, si $g\in G$, la aplicación $x\to gxg^{-1}$ es un automorfismo de G y el correspondiente automorfismo en $\mathfrak{g}$ es denotado por $Ad(g)$. Además, en [W, Pág.114] se demuestra que

$$\exp Ad(g)X=g\exp Xg^{-1}, \tag{A.12}$$

para $X\in\mathfrak{g},\ g\in G,$ siendo la aplicación $g\to Ad(g)$ una representación de G sobre $\mathfrak{g}$, la cual induce una representación de $\mathfrak{g}$ sobre $\mathfrak{g}$ denotada por ad (Capítulo II, §5, [H.1]). Así, por definición

$$Ad(\exp X)=e^{ad\,X}, \tag{A.13}$$

donde, $X\in\mathfrak{g}$ y si A es una transformación lineal, e^A denota $\sum_{n=0}^{\infty}(1/n!)A^n$. De (A.12) y (A.13), se deduce que para $X,Y\in\mathfrak{g}$, ([W, Pág.115]),

$$ad\;X(Y)=[X,Y]. \tag{A.14}$$

Ahora, estas operaciones pueden ser extendidas sobre operadores diferenciales. Para ello, se calculará $\widetilde{(Ad(g)X)}$ denotando respectivamente las translaciones a izquierda y a derecha por

$$L_g:x\to gx \quad \text{y} \quad R_g:x\to xg.$$

Así, para $f\in\mathcal{E}(G)$ se tiene

$$[\widetilde{(Ad(g)X)}f](x)=\left\{\frac{d}{dt}f(x\exp(tAd(g)X))\right\}_{t=0}=$$

$$=\left\{\frac{d}{dt}f(xg\exp(tX)g^{-1})\right\}_{t=0}=\left\{\frac{d}{dt}f^{R_g}(xg\exp tX)\right\}_{t=0}=(\tilde{X}f^{R_g})(xg)=(\tilde{X}f^{R_g})^{R_{g^{-1}}}(x)$$

y, por tanto,

$$\widetilde{(Ad(g)X)} = \tilde{X}^{R_{g^{-1}}}.$$

Finalmente, para $D \in D(G)$ se define

$$\boldsymbol{Ad(g)}D = D^{R_{g^{-1}}}. \tag{A.15}$$

Así definido, $Ad(g)$ es un automorfismo de $D(G)$.

Puesto que

$$\widetilde{(ad(X)(Y))} = \tilde{X}\tilde{Y} - \tilde{Y}\tilde{X},$$

para $D \in D(G)$ se define

$$(\boldsymbol{ad\ X})(D) = \tilde{X}D - D\tilde{X}, \tag{A.16}$$

entonces, $ad\ X$ es una derivación del álgebra $D(G)$. En efecto:

$$(ad\ X)(D_1D_2) = \tilde{X}(D_1D_2) - (D_1D_2)\tilde{X} = (\tilde{X}\ D_1)D_2 - (D_1\tilde{X})D_2 + D_1(\tilde{X}\ D_2) - D_1(D_2\tilde{X}) =$$
$$= ((ad\ X)(D_1))D_2 + D_1((ad\ X)(D_2)).$$

Asimismo, como por (A.15), $(ad\ X)^n(D)$ es un operador diferencial de orden menor o igual que el orden de D para $D \in D(G)$ se define

$$\boldsymbol{e^{ad\ X}}(D) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(ad\ X)^n(D), \tag{A.17}$$

ya que no hay problemas de convergencia puesto que todos los términos de la serie (A.16) pertenecen a un espacio vectorial finito dimensional.

Usando la fórmula de Leibniz (A.1), se obtiene la siguiente propiedad:

$$e^{ad\ X}(D_1D_2) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(ad\ X)^n(D_1D_2) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{\substack{0\le i,j\le n\\ i+j=n}}\frac{n!}{i!\,j!}(ad\ X)^i(D_1)(ad\ X)^j(D_2) =$$
$$= \sum_{0\le i,j\le\infty}\frac{(ad\ X)^i(D_1)}{i!}\ \frac{(ad\ X)^j(D_2)}{j!} = e^{ad\ X}(D_1)\ e^{ad\ X}(D_2).$$

Así, $Ad(\exp X)$ y $e^{ad\ X}$ son automorfismos de $D(G)$ los cuales coinciden sobre $\tilde{\mathfrak{g}}$, por tanto, debido al Teorema A.3.2.3, estos coinciden sobre todo $D(G)$. Consecuentemente, para $D \in D(G)$,

$$Ad(\exp X)D = e^{ad\ X}(D). \tag{A.18}$$

Lema A.3.2.6

Sean $X \in \mathfrak{g}$ y $D \in D(G)$. Entonces,

$$\tilde{X}D = D\tilde{X} \text{ si y sólo si } D^{R_{\exp tX}} = D$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demostración

Haciendo uso de (A.15)-(A.18), se sigue que

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(D^{R_{\exp(-tX)}} - D) \overset{(A.15)}{=} \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(Ad(\exp tX)D - D) \overset{(A.18)}{=} \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(e^{ad(tX)}(D) - D) =$$

$$\overset{(A.17)}{=} \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}ad(tX)^n(D) - D\right) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(t\; ad(X)(D) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n ad(X)^n(D)\right) =$$

$$= ad(X)(D) \overset{(A.16)}{=} \tilde{X}D - D\tilde{X}.$$

Así, si $D^{R_{\exp tX}} = D$ entonces, $\tilde{X}D = D\tilde{X}$.

Por otro lado, si $\tilde{X}D = D\tilde{X}$ entonces, $ad(X)(D) = 0$ y, en consecuencia,

$$D^{R_{\exp(-tX)}} \overset{(A.15)}{=} Ad(\exp tX)(D) \overset{(A.18)}{=} e^{ad(tX)}(D) \overset{(A.17)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}ad(tX)^n(D) =$$

$$= D + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n ad(X)^{n-1}(ad(X)(D)) = D.$$

Corolario A.3.2.7

Si se supone que G es conexo, se denota por $Z(G)$ el centro de $D(G)$ y por $I(\mathfrak{g}) \subset S(\mathfrak{g})$ el conjunto de los polinomios $Ad(G)$-invariantes, entonces se tiene que

$$\lambda(I(\mathfrak{g})) = Z(G) \tag{A.19}$$

Más aún, $Z(G)$ es el conjunto de los operadores diferenciales invariantes a la derecha de $D(G)$; es decir, que es el conjunto de los operadores diferenciales bi - invariantes sobre G.

Demostración

Puesto que G es conexo, si se aplica el Lema A.3.2.5 se obtiene que

$$Z(G) = \{D \in D(G) : [D, \tilde{X}] = 0 \;\; para\ todo\ \tilde{X}\ que\ genere\ D(G)\} =$$

$$= \{D \in D(G) : D^{R_g} = D \;\; para\ todo\;\; g \in G\} =$$

$$= \{D \in D(G) : D^{R_g} = D,\;\; D^{L_g} = D \;\; para\ todo\;\; g \in G\}.$$

Así, $Z(G)$ es el conjunto de los operadores diferenciales bi – invariantes sobre G.

Como $\widetilde{Ad(g)X} = \tilde{X}^{R_{g^{-1}}} =^{16} Ad(g)\tilde{X}$, se tiene para todo $P \in S(\mathfrak{g})$ que

$$\lambda(Ad(g)P) = Ad(g)\lambda(P),$$

Entonces, si $P \in I(\mathfrak{g})$ se sigue que $Ad(g)P = P$ y que $\lambda(P) = Ad(g)\lambda(P)$, por tanto, $\lambda(P)$ es bi – invariante, $\lambda(P) \in Z(G)$ y así, se satisface (A.18).

Seguidamente, se realiza el estudio del álgebra de operadores $D(G/H)$.

Sea G un grupo de Lie conexo y $H \subset G$ un subgrupo cerrado. Sean $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h}$ sus respectivas álgebras de Lie y $\mathfrak{m}$ el subespacio complementario, $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$. Sean $(X_1, \ldots, X_r)$ y $(X_{r+1}, \ldots, X_n)$ bases de $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{h}$ respectivamente y, $\pi : G \to G/H$ la proyección natural. Entonces, si $g \in G$, la aplicación

$$(x_1, \ldots, x_r) \to \pi(g \exp(x_1 X_1 + \cdots + x_r X_r)) \qquad \textbf{(A.20)}$$

es un difeomorfismo de un entorno de 0 en $\mathfrak{m}$ sobre un entorno de $\pi(g)$ en G/H y, la aplicación inversa de (A.20) es un sistema de coordenadas local alrededor de $\pi(g)$, el cual hace que G/H sea variedad. ([H.2], Capítulo II, Apartado 4)

Además, se sabe que $\mathfrak{h}$ es el núcleo de la diferencial de la aplicación π, $\pi_* : \mathfrak{g} \to T_o(G/H)$ donde $o = \{H\} \in G/H$, que la translación $\tau(g)$, que aplica xH en gxH, satisface $\pi \circ L_g = \tau(g) \circ \pi$ y, que como $\pi \circ R_h = \pi$,

$$Ad_G(g)X = R_{g^{-1}*} \circ L_{g*}(X).$$

Por tanto, se tiene que

$$\pi_* \circ Ad_G(h)X = \tau(h)_{*o} \circ \pi_*(X), \qquad X \in \mathfrak{g}.$$

Así, bajo el isomorfismo

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \simeq T_o(G/H) \qquad \textbf{(A.21)}$$

la transformación lineal $Ad_G(h)$ de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ se corresponde con la transformación lineal $\tau(h)_{*o}$ de $T_o(G/H)$.

El espacio G/H se dice *reductivo* si el subespacio $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ puede ser elegido de forma que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h} \ \text{ y } \ Ad_G(h)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m} \ \text{ para todo } \ h \in H.$$

---

16 Como $\tilde{X} \in D(G)$ es invariante a izquierda.

Si H es compacto (ó si solamente $Ad_G(h)$ es compacto), entonces G/H es reductivo. De hecho, $\mathfrak{g}$ tendrá una forma cuadrática invariante definida positiva bajo $Ad_G(h)$ y se podrá tomar por $\mathfrak{m}$ el complemento ortogonal de $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{g}$. [P, Pág.220]

Sea $D_H(G)=\{D\in D(G):\ D^{R_h}=D \quad para\ todo\ \ h\in H\}$ y f una función sobre G/H entonces, se denota el levantamiento de f por $\tilde{f}=f\circ\pi$.

Así, se tiene una descripción de $D(G/H)$ mediante álgebras de Lie, cuando G/H es reductivo.

Teorema A.3.2.8

Si G/H es reductivo, entonces la aplicación $\mu: u\to D_u$, dónde

$$\widetilde{(D_u f)}=u\tilde{f}, \qquad f\in\mathcal{E}(G/H),$$

es un homomorfismo de $D_H(G)$ sobre $D(G/H)$. Como su núcleo es

$$D_H(G)\cap D(G)\mathfrak{h},$$

se obtiene el siguiente isomorfismo

$$D_H(G)/(D_H(G)\cap D(G)\mathfrak{h})\cong D(G/H).$$

Demostración

Sea $u\in D_H(G)$ y $f\in\mathcal{D}(G/H)$. Entonces, $u\tilde{f}$ es invariante a la derecha bajo H. En efecto, por [W, Pág.258, Ej.23], se sabe que $u\tilde{f}$ es invariante a la derecha bajo H si y sólo si $u\tilde{f}\circ R_h=u\tilde{f}$, para todo $h\in H$. Como $u\in D_H(G)$, $u^{R_h}=u$ y, así

$$u^{R_h}(\tilde{f})=u\tilde{f},\ \ u(\tilde{f}\circ R_h)\circ R_{h^{-1}}=u\tilde{f},\ \ u(\tilde{f}\circ R_h)=u\tilde{f}\circ R_h$$

y, como por otra parte

$$u(\tilde{f}\circ R_h)=u(f\circ\pi\circ R_h)=u(f\circ\pi)=u\tilde{f},$$

se obtiene lo buscado.

Así, $\tilde{f}_1=u\tilde{f}$ y $f_1=D_u f$ pertenecen a $\mathcal{D}(G/H)$, donde D_u es la aplicación $f\to f_1$.

Como $sop(f_1)\subset sop(f)$, D_u es un operador diferencial. Además, es G – invariante ya que:

$$\widetilde{D_u^{\tau(g)}f}=\widetilde{(D_u f^{\tau(g)^{-1}})^{\tau(g)}}=(D_u f^{\tau(g)^{-1}})\circ\tau(g)^{-1}\circ\pi=(D_u f^{\tau(g^{-1})})\circ\pi\circ L_{g^{-1}}=$$

$$= \widetilde{(D_u f^{\tau(g^{-1})})}^{L_g} = \left(u\widetilde{(f^{\tau(g^{-1})})}\right)^{L_g} = (u(f\circ\tau(g)\circ\pi))\circ L_{g^{-1}} =$$

$$= (u(f\circ\pi\circ L_g))\circ L_{g^{-1}} = u(\tilde{f}\circ L_g)\circ L_{g^{-1}} = u^{L_g}(\tilde{f}) = u\tilde{f} = \widetilde{D_u f},$$

así, $D_u^{\tau(g)} = D_u$ y por tanto, $D_u \in D(G/H)$. También, $u \to D_u$ es un homomorfismo; en efecto, como $\widetilde{D_{u\cdot v}f} = (u\cdot v)\tilde{f} = u(v\tilde{f}) = u(\widetilde{D_v f}) = \widetilde{D_u(D_v f)} = \widetilde{D_u D_v(f)}$ entonces $D_{u\cdot v} = D_u \cdot D_v$.

La aplicación es suprayectiva ya que, dado $E \in D(G/H)$, existe un polinomio P tal que

$$(Ef)(o) = \left[P\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_r}\right) f(\pi(\exp(x_1X_1+\cdots+x_rX_r)))\right](o). \qquad \textbf{(A.22)}$$

Debido a la G – invariancia,

$$(Ef)(g\cdot o) = ((Ef)\circ\tau(g))(o) = E^{\tau(g^{-1})}(f\circ\tau(g))(o) = E(f^{\tau(g^{-1})})(o) =$$

$$= \left[P\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_r}\right) f^{\tau(g^{-1})}(\pi(\exp(x_1X_1+\cdots+x_rX_r)))\right](o) =$$

$$\stackrel{17}{=} \left\{P\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_r}\right) \tilde{f}(g\cdot\exp(x_1X_1+\cdots+x_rX_r))\right\}_{x_i=0}.$$

En particular, si se toma $g = h \in H$, entonces

$$(Ef)(o) = \left\{P\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_r}\right) \tilde{f}(h\cdot\exp(x_1X_1+\cdots+x_rX_r))\right\}_{x_i=0} =$$

$$= \left\{P\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_r}\right) f(\pi(h\cdot\exp(x_1X_1+\cdots+x_rX_r)\cdot h^{-1})\right\}_{x_i=0} =$$

$$\stackrel{(A.12)}{=} \left\{P\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_r}\right) \tilde{f}(\exp Ad(h)(x_1X_1+\cdots+x_rX_r))\right\}_{x_i=0}. \qquad \textbf{(A.23)}$$

Por tanto, P es $Ad(H)$- invariante; en efecto, como

$$(Ef)(o) \stackrel{(A.22)}{=} \lambda(P)(\tilde{f})(o) \quad \text{y} \quad (Ef)(o) \stackrel{(A.23)}{=} \lambda(Ad(h)P)(\tilde{f})(o)$$

entonces, $\lambda(P) = \lambda(Ad(h)P)$ y $P = Ad(h)P$ ya que λ es inyectiva.

---

17 $f^{\tau(g^{-1})}\circ\pi = f\circ\tau(g)\circ\pi = f\circ\pi\circ L_g = \tilde{f}\circ L_g$.

Si $u = \lambda(P) \in D(G)$, entonces

$$u^{R_{h^{-1}}} \overset{(A.15)}{=} Ad(h)\, u = Ad(h)\, \lambda(P) = \lambda(Ad(h)\, P) = \lambda(P) = u,$$

así, $u \in D_H(G)$. También,

$$(u\tilde{f})(g) = (\lambda(P)\tilde{f})(g) = \left\{ P\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_r}\right)\tilde{f}(g\cdot \exp(x_1X_1+\cdots+x_rX_r))\right\}_{x_i=0} =$$

$$= \widetilde{Ef}(g) = (Ef\circ\pi)(g) = (Ef)(g\cdot o).$$

Así, $D_u = E$ ya que $\widetilde{D_u f} = u\tilde{f} = \widetilde{Ef}$. Por tanto, la aplicación es suprayectiva.

Ahora se demostrará que $D_u = 0$ si y sólo si $u \in D_H(G) \cap D(G)\mathfrak{h}$. Para ello serán necesarios el lema y el corolario siguientes.

En notación, para cada $d \geq 0$ se considera $\boldsymbol{D^d(G)} = \lambda(\sum_{e\leq d} S^e(\mathfrak{g}))$.

Lema A.3.2.9

$$D(G) = D(G)\mathfrak{h} \oplus \lambda(S(\mathfrak{m})).$$

Más aún, si $D \in D^d(G)$ y se descompone $D = D_1 + D_2$, entonces $D_1, D_2 \in D^d(G)$.

Demostración

Como $\lambda(S(\mathfrak{g})) = D(G)$, dado $P \in S(\mathfrak{g})$ se demuestra por inducción que existe $Q \in S(\mathfrak{m})$ de grado menor o igual que el grado de P tal que $\lambda(P-Q) \in D(G)\mathfrak{h}$.

En efecto, si el grado de P es 1, P es un campo. Por tanto, la afirmación es cierta ya que los campos se descomponen en parte vertical y parte horizontal.

Ahora se supone que la afirmación es cierta para los $P \in S(\mathfrak{g})$ de grado menor que d y se prueba para un P de grado d.

En términos de las bases $X_1,\ldots,X_r$ de $\mathfrak{m}$ y $X_{r+1},\ldots,X_n$ de $\mathfrak{h}$ se supone que $P = X_1^{e_1}\ldots X_n^{e_n}$.

Si $e_{r+1}+\cdots+e_n = 0$, se tiene $Q = P$.

Si $e_{r+1}+\cdots+e_n > 0$, $\lambda(P)$ es una combinación lineal en términos de $\tilde{X}_{\alpha_1}\cdots\tilde{X}_{\alpha_d}$, donde $X_{\alpha_i} \in \mathfrak{h}$ para algún i. Entonces, si a $\lambda(P)$ se le restan los términos de grado d donde algún $X_{\alpha_i} \in \mathfrak{h}$ (es decir, los elementos de $D(G)\mathfrak{h}$), como $e_{r+1}+\cdots+e_n > 0$ se obtiene que todos los términos de grado d se cancelan y así, se tiene un elemento de $D^{d-1}(G)$; por tanto,

$$\lambda(P) - D \in D(G)\mathfrak{h} \text{ para algún } D \in D^{d-1}(G).$$

Aplicando la hipótesis de inducción a D, se sigue que existe $Q \in S(\mathfrak{m})$ de grado menor o igual que $d-1$ tal que $\lambda(Q) - D \in D(G)\mathfrak{h}$; así,

$$\lambda(P) - D - \lambda(Q) + D = \lambda(P - Q) \in D(G)\mathfrak{h}$$

y se obtiene la descomposición buscada.

Ahora se probará que la suma es directa. Para ello, sea $P \in S(\mathfrak{m})$ distinto de 0. Por (A.11) $\lambda(P) \notin D(G)\mathfrak{h}$ y, por otro lado, existe una función $\hat{f}(x_1, \ldots, x_r)$ tal que

$$\left(P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_r} \right) \hat{f} \right)(0) \neq 0 .$$

Entonces, eligiendo $f \in C^\infty(G/H)$ tal que

$$f(\pi(\exp(x_1 X_1 + \cdots + x_r X_r))) = \hat{f}(x_1, \ldots, x_r)$$

para x_i suficientemente pequeño, se tiene

$$\lambda(P)(f \circ \pi)(e) = \lambda(P)(\tilde{f})(e) = \left\{ P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_r} \right) \tilde{f}(\exp(x_1 X_1 + \cdots + x_r X_r)) \right\}_{x_i = 0} =$$

$$= \left\{ P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_r} \right) \hat{f}(x_1, \ldots, x_r) \right\}_{x_i = 0} = \left(P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_r} \right) \hat{f} \right)(0) \neq 0 .$$

Puesto que, $D(G)\mathfrak{h}$ y $\lambda(S(\mathfrak{m}))$ son invariantes por $Ad_G(H)$, debido a la reductividad se deduce que:

Corolario A.3.2.10

Si $I(\mathfrak{m})$ es el conjunto formado por los elementos de $S(\mathfrak{m})$ que son $Ad_G(H)$ -invariantes, entonces

$$D_H(G) = (D_H(G) \cap D(G)\mathfrak{h}) \oplus \lambda(I(\mathfrak{m})).$$

Demostración

En efecto,

$$D_H G = D_H G \cap D(G) = (D(G)\mathfrak{h} \oplus \lambda(S(\mathfrak{m}))) \cap D_H G = (D_H G \cap D(G)\mathfrak{h}) \oplus \lambda(I(\mathfrak{m})).$$

Ahora se puede finalizar la demostración del Teorema A.3.2.8. En efecto, sea $u \in D_H(G)$ tal que $D_u = 0$. Aplicando el Corolario A.3.2.10, se tiene que $u = u_1 + u_2$ donde $u_2 = \lambda(P_2)$ con $P_2 \in I(\mathfrak{m})$. Además, por ser la suma directa $D_{u_1} = 0$ y $D_{u_2} = 0$.

Por reducción al absurdo, se ve que $u_2 = 0$. Si no lo fuera, existiría $f \in \mathcal{E}(G/H)$ tal que $u_2\tilde{f} \neq 0$, entonces $\widetilde{(D_{u_2}f)} \neq 0$ y, por tanto, $D_{u_2} \neq 0$, lo cual contradice la afirmación anterior.

Así, $u_2 = 0$ y $u = u_1 \in D_H G \cap D(G)\mathfrak{h}$. En particular, $u \in D(G)\mathfrak{h}$ y como $D_u \in D(G/H)$, se obtiene que $D_u = 0$.

Usando el Teorema A.3.2.8 y el Corolario A.3.2.10, se obtiene el resultado siguiente:

Teorema A.3.2.11

Sea G/H un espacio homogéneo reductivo. Entonces, la aplicación $Q \to D_{\lambda(Q)}$ es una biyección lineal de $I(\mathfrak{m})$ sobre $D(G/H)$. Más explícitamente, si $Q \in I(\mathfrak{m})$,

$$(D_{\lambda(Q)}f)(g \cdot o) = \left[Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_r} \right) \tilde{f}(g \exp(x_1 X_1 + \cdots + x_r X_r)) \right](0).$$

Además, aunque la aplicación $Q \to D_{\lambda(Q)}$ no es en general multiplicativa (salvo cuando $D(G/H)$ es un álgebra conmutativa), se tiene que

$$D_{\lambda(P_1 P_2)} = D_{\lambda(P_1)} D_{\lambda(P_2)} + D_{\lambda(Q)},$$

donde $Q \in I(\mathfrak{m})$ es de menor ó igual grado que la suma de los grados de P_1 y P_2.

Además, a partir de este Teorema y utilizando el método de inducción se obtiene:

Corolario A.3.2.12

Si $I(\mathfrak{m})$ tiene un sistema de generadores finito $P_1, \ldots, P_l$ y se denota por D_i el operador $D_{\lambda(P_i)}$, entonces, cada $D \in D(G/H)$ puede ser escrito como:

$$D = \sum_{(n)} a_{n_1 \cdots n_l} D_1^{n_1} \cdots D_l^{n_l}.$$

ANEXO B.
CÁLCULOS RELATIVOS A LOS CAPÍTULOS 2, 3 Y 4

El objetivo de este apéndice es desarrollar las pruebas que han sido omitidas a lo largo de los capítulos 2, 3 y 4 con el propósito de facilitar la lectura de este libro.

B.1. CÁLCULOS CORRESPONDIENTES AL CAPÍTULO 2

Demostración del Lema 2.3.3.1.3

Dado el sistema de valores propio maximal $(\Theta,\Theta^2,\Theta,\Theta^2)$, donde $\Theta = e^{2\pi i/3}$, $\bar{\Theta}=\Theta^2$ y, tal que $SU_1=\Theta U_1$, $SU_2=\Theta U_2$, $S\bar{U}_1=\bar{\Theta}\bar{U}_1$ y $S\bar{U}_2=\bar{\Theta}\bar{U}_2$, se sabe que los únicos cambios de base que conservan ésta propiedad sólo pueden ser de tres tipos: proporcionalidad ó combinación lineal de U_1 y U_2 ó combinación lineal de $\bar{U}_1$ y $\bar{U}_2$.

Recordar que debido a los Lemas 2.3.3.1.1 y 2.3.3.1.2, se tiene

$$g(U_1,\bar{U}_2)=\nu\in\mathbb{C},\quad g(U_1,\bar{U}_1)=a^2>0,\ a\in\mathbb{R},\quad g(U_2,\bar{U}_2)=b^2>0,\ b\in\mathbb{R},$$

que el resto de relaciones posibles son cero y,

$$\tilde{T}(U_1,U_2)=\alpha\bar{U}_1+\beta\bar{U}_2,\quad \tilde{T}(\bar{U}_1,\bar{U}_2)=\bar{\alpha}U_1+\bar{\beta}U_2\quad \text{y}\quad \tilde{T}(U_j,\bar{U}_k)=0,\ j,k=1,2$$

donde $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ no se anulan simultáneamente.

Si se realiza primero el cambio de proporcionalidad dado por

$$U_1'=\tfrac{1}{a}U_1,\qquad U_2'=\tfrac{1}{b}U_2$$

se obtiene fácilmente que

$$g(U_1',\bar{U}_1')=1, \qquad g(U_2',\bar{U}_2')=1, \qquad g(U_1',\bar{U}_2')=\tfrac{\nu}{ab}=\nu'\in\mathbb{C},$$
$$\tilde{T}(U_1',U_2')=\tfrac{1}{ab}(\alpha\bar{U}_1+\beta\bar{U}_2)=\tfrac{\alpha}{b}\bar{U}_1'+\tfrac{\beta}{a}\bar{U}_2'=\alpha'\bar{U}_1'+\beta'\bar{U}_2'$$

y, que el resto de relaciones siguen siendo cero.

Si ahora se realiza el cambio dado por

$$U_1''=\frac{\bar{\alpha}'U_1'+\bar{\beta}'U_2'}{\rho}, \qquad U_2''=\frac{-\beta'U_1'+\alpha'U_2'}{\rho^2},$$

donde $\rho^2=\alpha'\bar{\alpha}'+\beta'\bar{\beta}'>0$, se sigue de manera inmediata

$$g(U_1'',\bar{U}_1'')=1, \qquad g(U_2'',\bar{U}_2'')=\frac{1}{\rho^2}, \qquad \tilde{T}(U_1'',U_2'')=\bar{U}_1'',$$

y que el resto de relaciones son nulas. Si para finalizar se denota U_i'' por U_i, $i=1,2$, se obtiene el resultado buscado.

$g(U_1'',\bar{U}_2'')=0$ ya que, $g(U_1'',\bar{U}_2'')=\dfrac{1}{\rho^3}(\bar{\alpha}'^2\nu'-\bar{\beta}'^2\bar{\nu}')$ y así, cuando $\nu=0$, como $\nu'=\dfrac{\nu}{ab}$, se obtiene $\nu'=0$ y, por tanto $g(U_1'',\bar{U}_2'')=0$.

Sin embargo, si $\nu\neq 0$ hay que ver que existen α' y β' tales que $\bar{\alpha}'^2\nu'-\bar{\beta}'^2\bar{\nu}'=0$. En efecto, si $\alpha'=\alpha_1+i\alpha_2$, $\beta'=\beta_1+i\beta_2$, y $\nu'=a'+ib'$, analizando el sistema

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1^2a'-\alpha_2^2a'+2b'\alpha_1\alpha_2-\beta_1^2a'+\beta_2^2a'+2b'\beta_1\beta_2=0\\ \alpha_1^2b'-\alpha_2^2b'-2a'\alpha_1\alpha_2+\beta_1^2b'-\beta_2^2b'+2a'\beta_1\beta_2=0\end{aligned}\right\}$$

con Mathematica©, se obtiene:

- Solución 1.

$$\alpha_1=\frac{a'\sqrt{a'^2+b'^2}\,\alpha_2-(a'^2+b'^2)\beta_2}{b'\sqrt{a'^2+b'^2}}, \qquad \beta_1=\frac{\sqrt{a'^2+b'^2}\,\alpha_2-a'\beta_2}{b'},$$

- Solución 2.

$$\alpha_1=\frac{a'\sqrt{a'^2+b'^2}\,\alpha_2+(a'^2+b'^2)\beta_2}{b'\sqrt{a'^2+b'^2}}, \qquad \beta_1=-\frac{\sqrt{a'^2+b'^2}\,\alpha_2+a'\beta_2}{b'},$$

- Solución 3.

$$\alpha_1 = -\frac{a'b'\alpha_2^2 + \sqrt{-a'^2(a'^2+b'^2)\alpha_2^2}\,\beta_2}{a'^2\alpha_2}, \qquad \beta_1 = \frac{-\sqrt{-a'^2(a'^2+b'^2)\alpha_2^2} + a'b'\beta_2}{a'^2},$$

- Solución 4.

$$\alpha_1 = \frac{-a'b'\alpha_2^2 + \sqrt{-a'^2(a'^2+b'^2)\alpha_2^2}\,\beta_2}{a'^2\alpha_2}, \qquad \beta_1 = \frac{\sqrt{-a'^2(a'^2+b'^2)\alpha_2^2} + a'b'\beta_2}{a'^2},$$

Como $v' = a' + ib' \neq 0$, se analizan los casos siguientes:

- $a' = 0$ y $b' \neq 0$. En este caso, para cualesquiera α_2 y β_2, usando la solución 1 ó la 2, se obtiene el valor de α_1 y β_1. Así, existen α' y β' tales que $\bar{\alpha}'^2 v' - \bar{\beta}'^2 \bar{v}' = 0$.
- $a' \neq 0$ y $b' = 0$. En este caso, para cualesquiera $\alpha_2 \neq 0$ y β_2, usando la solución 3 ó la 4, se obtienen α_1 y β_1. Así, existen α' y β' tales que $\bar{\alpha}'^2 v' - \bar{\beta}'^2 \bar{v}' = 0$.
- $a' \neq 0$ y $b' \neq 0$. En este caso se puede aplicar cualquiera de las dos situaciones anteriores. Así, existen α' y β' tales que $\bar{\alpha}'^2 v' - \bar{\beta}'^2 \bar{v}' = 0$.

Por tanto, $g(U_1'', \bar{U}_2'') = 0$.

Demostración del Lema 2.3.4.1.14

En efecto, se puede encontrar z ya que:

– Si $v = 0$, no se modificaría ni $\tilde{T}$ ni g al tomar cualquier $z \in \mathbb{C}$.

– Si $v = i\beta$ donde $\beta < 0$ y $v\bar{v} < 1$; es decir, $-1 < \beta < 0$ y, se busca $z = a + ib$ tal que $\bar{z}v = i\beta'$, $0 \leq \beta' < 1$ y $|z| = 1$, se tiene que, como

$$\bar{z}v = ia\beta + b\beta = i\beta', \text{ si y sólo si, } a\beta = \beta' \text{ y } b\beta = 0,$$

que $b = 0$ y $a = \pm 1$. Y, como si $a = 1$, entonces $\beta' < 0$, se tiene que $z = -1$.

– Si $v = \alpha \neq 0 \in \mathbb{R}$ donde $v\bar{v} < 1$; es decir, $-1 < \alpha < 1$ y, se busca $z = a + ib$ tal que $\bar{z}v = i\beta'$, $0 \leq \beta' < 1$ y $|z| = 1$, se tiene que, como

$$\bar{z}v = a\alpha - ib\alpha = i\beta', \text{ si y sólo si, } a\alpha = 0 \text{ y } -b\alpha = \beta',$$

que $a = 0$ y $b = \pm 1$. Y, como si $-1 < \alpha < 0$ y $b = -1$, entonces $\beta' < 0$, se tiene que si $-1 < \alpha < 0$, $z = i$. Sin embargo, como en el caso de que $0 < \alpha < 1$ y $b = 1$, se tiene que $\beta' < 0$, se concluye que si $0 < \alpha < 1$, $z = -i$.

– Si $v = \alpha + i\beta$ donde $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ y $v\bar{v} < 1$; es decir, $\alpha^2 + \beta^2 < 1$ y $-1 < \beta < 0$ y, se busca $z = a + ib$ tal que $\bar{z}v = i\beta'$, $0 \leq \beta' < 1$ y $|z| = 1$, se tiene que, como

$$\bar{z}\nu = (a\alpha + b\beta) + i(a\beta - b\alpha) = i\beta'$$

si y sólo si

$$a\alpha + b\beta \overset{(1)}{=} 0 \qquad \text{y} \qquad a\beta - b\alpha \overset{(2)}{=} \beta',$$

que, ahora, hay que encontrar *a* y *b* tales que satisfagan (1), (2) y $a^2 + b^2 \overset{(3)}{=} 1$. De (3) se sabe que $a = Cos\Psi$ y $b = Sen\Psi$ y, aplicando esto sobre (1) se obtiene que

$$\frac{b}{a} = Tg\Psi = \frac{Sen\Psi}{Cos\Psi} = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

Por tanto, si $a = 0$ ó $b = 0$, se tiene que $\beta = 0$ ó $\alpha = 0$, lo cual no puede ser. Así, $a \neq 0$ y $b \neq 0$ y, por (3), $b \neq \pm 1$ y $a \neq \pm 1$, por tanto, $\Psi \neq k\frac{\pi}{2}$, $k = 0, 1, \ldots$ Así, se cumple (1) y (3), ahora se ve cuando se cumple (2). Si en (2) se toman *a* y *b* tales que $b/a = -\alpha/\beta$ se obtiene que $(\beta^2 + \alpha^2)a = \beta\beta'$. Ahora, como $0 < (\beta^2 + \alpha^2) < 1$ y se puede tomar $-1 < a < 0$ (en efecto, si Ψ es tal que $Tg\Psi = -\frac{\alpha}{\beta}$ y $Cos\Psi > 0$, entonces $\Psi + \pi$ cumple que $Tg(\Psi + \pi) = -\frac{\alpha}{\beta}$ y $Cos(\Psi + \pi) < 0$, así, se tomaría como Ψ a $\Psi' = \Psi + \pi$), se obtiene que $-1 < (\beta^2 + \alpha^2)a < 0$ y, así, que $-1 < \beta\beta' < 0$. Como $-1 < \beta < 0$, se concluye que $0 < \beta' < 1$ como se quería. Concluyendo, en este caso se toma $z = a + ib$ tal que $b/a = -\alpha/\beta$, $-1 < a < 0$ y, tal que $a = Cos\Psi$, $b = Sen\Psi$ y $Tg\Psi = -\frac{\alpha}{\beta}$.

Demostración del Lema 2.3.4.1.19

Como $\tilde{R} = 0$ se ve que $R = 0$. Para ello, se usan las identidades del Lema 1.2.1.9 y del Lema 2.1.3, que son:

$$R_o(X,Y) = \tilde{R}_o(X,Y) + [\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_Y] + \mathcal{D}_{\tilde{T}_o(X,Y)}, \tag{B.1}$$

y

$$2g_o(\mathcal{D}_Y X, Z) = g_o(\tilde{T}_o(X,Y),Z) + g_o(\tilde{T}_o(X,Z),Y) + g_o(\tilde{T}_o(Y,Z),X) \tag{B.2}$$

para todo $X, Y, Z \in V$. Además, se tiene que $\tilde{R}_o(X,Y) = 0$, para todo $X, Y \in V$ y, que si $\tilde{T}_o(X,Y) = 0$ para todo $X, Y \in V$, entonces $\mathcal{D}_{\tilde{T}_o(X,Y)} = 0$ para todo $X, Y \in V$.

Si se considera $U_j = (1/\sqrt{2})(X_j + iY_j)$, $j = 1, 2$, se tiene, que si se quiere calcular, usando (B.1), $R(X,Y)$ para $X, Y \in V = \langle X_1, Y_1, X_2, Y_2, W \rangle$, $X \neq Y$, en primer lugar se necesita conocer la expresión de *g* y $\tilde{T}$ en función de la nueva base y, el valor de $\mathcal{D}_{X_j}, \mathcal{D}_{Y_j}$, $j = 1, 2$.

Sustituyendo y desarrollando el valor de U_j, $j=1,2$, en (2.32) y (2.33), fácilmente se obtiene que:

$$\begin{gathered}\tilde{T}(X_1,X_2)=\tilde{T}(Y_1,Y_2)=\tilde{T}(X_1,Y_2)=\tilde{T}(Y_1,X_2)=0,\\ \tilde{T}(X_j,Y_j)=0,\ \ j=1,2,\quad \tilde{T}(X_1,W)=\rho Y_2,\\ \tilde{T}(Y_1,W)=\rho X_2,\quad \tilde{T}(X_2,W)=-\rho Y_1,\quad \tilde{T}(Y_2,W)=-\rho X_1,\end{gathered}\tag{B.3}$$

y

$$\begin{gathered}g(X_1,X_2)=g(Y_1,Y_2)=g(X_1,Y_2)=g(Y_1,X_2)=0,\quad g(W,W)=1,\\ g(X_j,Y_j)=0,\ \ j=1,2,\quad g(X_j,W)=g(Y_j,W)=0,\ \ j=1,2,\\ g(X_1,X_1)=g(Y_1,Y_1)=1/2,\quad g(X_2,X_2)=g(Y_2,Y_2)=b'^2/2=1/2,\end{gathered}\tag{B.4}$$

Por otra parte, usando (B.2), se obtiene que:

$$\mathcal{D}_{X_1}=\mathcal{D}_{Y_1}=\mathcal{D}_{X_2}=\mathcal{D}_{Y_2}=0.\tag{B.5}$$

En efecto, si se tienen en cuenta (B.3) y (B.4) y, se desarrolla (B.2) tomando los valores $Y=X_1$, $X=X_j$, $j=1,2$ y $Z\in V=\langle X_1,Y_1,X_2,Y_2,W\rangle$, se obtiene que $\mathcal{D}_{X_1}X_j=0$, $j=1,2$, si se vuelve a desarrollar con $Y=X_1$, $X=Y_j$, $j=1,2$ y $Z\in V=\langle X_1,Y_1,X_2,Y_2,W\rangle$, se obtiene que $\mathcal{D}_{X_1}Y_j=0$, $j=1,2$ y, desarrollándolo por última vez con los valores $Y=X_1$, $X=W$, y $Z\in V=\langle X_1,Y_1,X_2,Y_2,W\rangle$, se obtiene que $\mathcal{D}_{X_1}W=0$. Así, se concluye que $\mathcal{D}_{X_1}=0$. El resto se demuestran de manera análoga.

Por tanto, desarrollando (B.1), para los distintos $X,Y\in V=\langle X_1,Y_1,X_2,Y_2,W\rangle$ tales que $X\neq Y$ y, sustituyendo los valores dados por (B.4) y (B.5), se obtiene que $R(X,Y)=0$ para todo $X,Y\in V=\langle X_1,Y_1,X_2,Y_2,W\rangle$, tal que $X\neq Y$.

B.2. CÁLCULOS CORRESPONDIENTES AL CAPÍTULO 3

Demostración del Lema 3.4.1.1

En efecto, si se supone que $\tilde{T}(X_1,X_2)=a_1X_1+a_2X_2+a_3X_3+a_4X_4+a_5X_5$ y se aplica (3.10) entonces,

$$\begin{gathered}a_1=g(\tilde{T}(X_1,X_2),X_1)\overset{(3.10)}{=}-g(\tilde{T}(X_1,X_1),X_2)=0\\ a_2=g(\tilde{T}(X_1,X_2),X_2)\overset{(3.10)}{=}-g(\tilde{T}(X_1,X_2),X_2)\end{gathered}$$

y, por tanto, $\tilde{T}(X_1,X_2)=a_3X_3+a_4X_4+a_5X_5$. De forma análoga, si se supone $\tilde{T}(X_1,X_3)=b_1X_1+b_2X_2+b_3X_3+b_4X_4+b_5X_5$ y se vuelve a utilizar (3.10) entonces,

$$b_1 = g(\tilde{T}(X_1,X_3),X_1) \overset{(3.10)}{=} -g(\tilde{T}(X_1,X_1),X_3) = 0$$

$$b_2 = g(\tilde{T}(X_1,X_3),X_2) \overset{(3.10)}{=} -g(\tilde{T}(X_1,X_2),X_3) = -a_3$$

$$b_3 = g(\tilde{T}(X_1,X_3),X_3) \overset{(3.10)}{=} -g(\tilde{T}(X_1,X_3),X_3)$$

y, así, $\tilde{T}(X_1,X_3) = -a_3X_2 + b_4X_4 + b_5X_5$. Análogamente, actuando sobre $\tilde{T}(X_1,X_4)$, $\tilde{T}(X_1,X_5)$, $\tilde{T}(X_2,X_3)$, $\tilde{T}(X_2,X_4)$, $\tilde{T}(X_2,X_5)$, $\tilde{T}(X_3,X_4)$, $\tilde{T}(X_3,X_5)$ y $\tilde{T}(X_4,X_5)$ se obtiene (3.12).

Demostración del Lema 3.4.1.2

Si se aplica (3.3) sobre (3.12) se obtiene, por una parte que

$$A_{12}(\tilde{T}(X_1,X_2)) = \tilde{T}(A_{12}X_1,X_2) + \tilde{T}(X_1,A_{12}X_2) = 0$$

y, por otra, que

$$A_{12}(\tilde{T}(X_1,X_2)) = A_{12}(a_3X_3 + a_4X_4 + a_5X_5) = 0.$$

En este caso, no se obtiene ninguna condición sobre los parámetros a_i, $i = 3,4,5$, pero si se aplica este procedimiento sobre $\tilde{T}(X_1,X_3)$, debido a la ortogonalidad, se obtiene que $c_4 = d_5 = 0$ ya que, por una parte

$$A_{12}(\tilde{T}(X_1,X_3)) = \tilde{T}(A_{12}X_1,X_3) + \tilde{T}(X_1,A_{12}X_3) = \tilde{T}(X_2,X_3) = a_3X_1 + c_4X_4 + d_5X_5$$

y, por otra,

$$A_{12}(\tilde{T}(X_1,X_3)) = A_{12}(-a_3X_2 + b_4X_4 + b_5X_5) = a_3X_1.$$

Análogamente, actuando sobre $\tilde{T}(X_1,X_4)$, $\tilde{T}(X_1,X_5)$, $\tilde{T}(X_2,X_3)$, $\tilde{T}(X_2,X_4)$, $\tilde{T}(X_2,X_5)$, $\tilde{T}(X_3,X_4)$, $\tilde{T}(X_3,X_5)$ y $\tilde{T}(X_4,X_5)$ se sigue también que $b_4 = b_5 = c_5 = g_5 = 0$.

Por tanto, sustituyendo en (3.12) el nuevo valor de estos parámetros se obtiene (3.14).

Demostración del Lema 3.4.1.5

Como $\langle W_1, \bar{W}_1 \rangle = \langle Y_1 + iY_2, Y_1 - iY_2 \rangle = \|Y_1\|^2 + \|Y_2\|^2$ se tiene que

$$\langle W_1, \bar{W}_1 \rangle = 2 \text{ si y sólo si } \|Y_1\|^2 = 1 = \|Y_2\|^2. \qquad \textbf{(B.6)}$$

Como $\langle W_2, \bar{W}_2 \rangle = \langle Y_3 + iY_4, Y_3 - iY_4 \rangle = \|Y_3\|^2 + \|Y_4\|^2$ se tiene que

$$\langle W_2, \bar{W}_2 \rangle = 2 \text{ si y sólo si } \|Y_3\|^2 = 1 = \|Y_4\|^2. \qquad \textbf{(B.7)}$$

Como $\langle W_1, W_1\rangle = \|Y_1\|^2 + 2i\langle Y_1, Y_2\rangle - \|Y_2\|^2 \overset{(B.6)}{=} 2i\langle Y_1, Y_2\rangle$ se tiene que

$$\langle W_1, W_1\rangle = 0 \text{ si y sólo si } \langle Y_1, Y_2\rangle = 0 .$$

Como $\langle W_2, W_2\rangle = \|Y_3\|^2 + 2i\langle Y_3, Y_4\rangle - \|Y_4\|^2 \overset{(B.7)}{=} 2i\langle Y_3, Y_4\rangle$ se tiene que

$$\langle W_2, W_2\rangle = 0 \text{ si y sólo si } \langle Y_4, Y_3\rangle = 0 .$$

Y, como

$$\langle W_1, W_2\rangle = \langle Y_1 + iY_2, Y_3 + iY_4\rangle = \langle Y_1, Y_3\rangle - \langle Y_2, Y_4\rangle + i\left(\langle Y_2, Y_3\rangle + \langle Y_1, Y_4\rangle\right),$$
$$\langle W_1, \overline{W}_2\rangle = \langle Y_1 + iY_2, Y_3 - iY_4\rangle = \langle Y_1, Y_3\rangle + \langle Y_2, Y_4\rangle + i\left(\langle Y_2, Y_3\rangle - \langle Y_1, Y_4\rangle\right)$$

se tiene que

$$\langle W_1, W_2\rangle = 0 \text{ si y sólo si } \left.\begin{array}{l}\langle Y_1, Y_3\rangle - \langle Y_2, Y_4\rangle = 0\\ \langle Y_2, Y_3\rangle + \langle Y_1, Y_4\rangle = 0\end{array}\right\}, \qquad \textbf{(B.8)}$$

$$\langle W_1, \overline{W}_2\rangle = 0 \text{ si y sólo si } \left.\begin{array}{l}\langle Y_1, Y_3\rangle + \langle Y_2, Y_4\rangle = 0\\ \langle Y_2, Y_3\rangle - \langle Y_1, Y_4\rangle = 0\end{array}\right\}, \qquad \textbf{(B.9)}$$

donde, resolviendo los sistemas de ecuaciones que se obtienen a partir de las ecuaciones (B.8) y (B.9) se tiene que

$$\langle W_1, W_2\rangle = \langle W_1, \overline{W}_2\rangle = 0 \text{ si y sólo si } \langle Y_1, Y_3\rangle = \langle Y_1, Y_4\rangle = \langle Y_2, Y_3\rangle = \langle Y_2, Y_4\rangle = 0 .$$

Demostración del Lema 3.4.2.1

Esta demostración se realiza de una manera sistemática. Se comienza analizando los endomorfismos de rango 2 y después se extiende el estudio a los de rango 4.

Así, se comienza realizando el estudio sobre los endomorfismos A_{ij}, $i \neq j$, $i, j = 1,2,3,4$.

Como

$$A_{12}(\tilde{T}(X_i, X_j)) = \tilde{T}(A_{12}X_i, X_j) + \tilde{T}(X_i, A_{12}X_j),\ i \neq j,\ i,j = 1,2,3,4,5 ,$$
$$A_{12}(g(X_i, X_j)) = g(A_{12}X_i, X_j) + g(X_i, A_{12}X_j),\ i,j = 1,2,3,4,5 ,$$

se verifica $A_{12} \cdot \tilde{T} = A_{12} \cdot g = 0$ y, por tanto, $A_{12} \in \mathfrak{h}$.

Como

$$\lambda X_5 = A_{13}(\tilde{T}(X_1, X_4)) \neq \tilde{T}(A_{13}X_1, X_4) + \tilde{T}(X_1, A_{13}X_4) = 0\,,$$

se tiene que $A_{13} \cdot \tilde{T} \neq 0$. Y, si se buscan los posibles endomorfismos de rango 4 de la forma $A_{13} + A_{ij}$, $i \neq j$, $i = 2,3,4$, $j = 1,2,4$ tales que paralelicen la torsión y la métrica, se obtiene que $(A_{13} + A_{24}) \cdot \tilde{T} = (A_{13} + A_{24}) \cdot g = 0$ si y sólo si $\lambda = \rho$ en (3.17) y, que el resto de posibles endomorfismos siguen sin satisfacer las propiedades buscadas. Por tanto, $B = A_{13} + A_{24} \in \mathfrak{h}$ si y sólo si $\lambda = \rho$ en (3.17).

Como

$$-\lambda X_5 = A_{14}(\tilde{T}(X_1, X_3)) \neq \tilde{T}(A_{14}X_1, X_3) + \tilde{T}(X_1, A_{14}X_3) = 0\,,$$

se sigue que $A_{14} \cdot \tilde{T} \neq 0$. Y, si se buscan ahora los posibles endomorfismos de rango 4 de la forma $A_{14} + A_{ij}$, $i \neq j$, $i = 2,3,4$, $j = 1,2,3$ tales que paralelicen la torsión y la métrica, se obtiene que $(A_{14} + A_{32}) \cdot \tilde{T} = (A_{14} + A_{32}) \cdot g = 0$ si y sólo si $\lambda = \rho$ en (3.17) y, que el resto de posibles endomorfismos siguen sin satisfacer las propiedades buscadas. Por tanto, $C = A_{14} + A_{32} \in \mathfrak{h}$ si y sólo si $\lambda = \rho$ en (3.17).

Como

$$\lambda X_5 = A_{23}(\tilde{T}(X_2, X_4)) \neq \tilde{T}(A_{23}X_2, X_4) + \tilde{T}(X_2, A_{23}X_4) = 0\,,$$

se tiene que $A_{23} \cdot \tilde{T} \neq 0$. Si se buscan los posibles endomorfismos de rango 4 de la forma $A_{23} + A_{ij}$, $i \neq j$, $i = 1,3,4$, $j = 1,2,4$ tales que paralelicen la torsión y la métrica, se obtiene que $(A_{23} + A_{41}) \cdot \tilde{T} = (A_{23} + A_{41}) \cdot g = 0$ si y sólo si $\lambda = \rho$ en (3.17) y, que el resto de posibles endomorfismos siguen sin satisfacer las propiedades buscadas. Pero, a diferencia de los endomorfismos anteriores, en este caso no se añade ningún endomorfismo nuevo a $\mathfrak{h}$ ya que, $A_{23} + A_{41} = -(A_{32} + A_{14})$ y este último ya ha sido considerado.

Como

$$-\lambda X_5 = A_{24}(\tilde{T}(X_2, X_3)) \neq \tilde{T}(A_{24}X_2, X_3) + \tilde{T}(X_2, A_{24}X_3) = 0\,,$$

se tiene que $A_{24} \cdot \tilde{T} \neq 0$. Si se buscan los posibles endomorfismos de rango 4 de la forma $A_{24} + A_{ij}$, $i \neq j$, $i = 1,3,4$, $j = 1,2,3$ tales que paralelicen la torsión y la métrica, se obtiene que $(A_{24} + A_{13}) \cdot \tilde{T} = (A_{24} + A_{13}) \cdot g = 0$ si y sólo si $\lambda = \rho$ en (3.17) y, que el resto de posibles endomorfismos siguen sin satisfacer las propiedades buscadas. Pero, como este endomorfismo ha sido obtenido anteriormente, como en el caso anterior, no se añadirá ningún endomorfismo nuevo a $\mathfrak{h}$.

Como

$$A_{34}(\tilde{T}(X_i,X_j)) = \tilde{T}(A_{34}X_i,X_j) + \tilde{T}(X_i,A_{34}X_j)\,,\ i<j\,,\ i,j=1,2,3,4,5\,,$$
$$A_{34}(g(X_i,X_j)) = g(A_{34}X_i,X_j) + g(X_i,A_{34}X_j)\,,\ i\le j\,,\ i,j=1,2,3,4,5\,,$$

se sigue $A_{34}\cdot\tilde{T} = A_{34}\cdot g = 0$ y, por tanto, $A_{34}\in\mathfrak{h}$.

Demostración del Lema 3.4.2.2

Para calcular la tabla de multiplicar de $\mathfrak{h}=(A_{12},A_{34},B,C)$ donde, $B=A_{13}+A_{24}$ y $C=A_{14}+A_{32}$, se considerará en primer lugar que

$$\left.\begin{array}{l}
[A_{12},A_{34}] = a_1A_{12}+a_2A_{34}+a_3B+a_4C,\ \ a_i\in\mathbb{R},\ \ i=1,\dots,4,\\
[B,A_{12}] = b_1A_{12}+b_2A_{34}+b_3B+b_4C,\ \ b_i\in\mathbb{R},\ \ i=1,\dots,4,\\
[C,A_{12}] = c_1A_{12}+c_2A_{34}+c_3B+c_4C,\ \ c_i\in\mathbb{R},\ \ i=1,\dots,4,\\
[B,A_{34}] = d_1A_{12}+d_2A_{34}+d_3B+d_4C,\ \ d_i\in\mathbb{R},\ \ i=1,\dots,4,\\
[C,A_{34}] = e_1A_{12}+e_2A_{34}+e_3B+e_4C,\ \ e_i\in\mathbb{R},\ \ i=1,\dots,4,\\
[B,C] = f_1A_{12}+f_2A_{34}+f_3B+f_4C,\ \ f_i\in\mathbb{R},\ \ i=1,\dots,4.
\end{array}\right\}$$

y seguidamente, aplicando las identidades anteriores a los diferentes elementos de la base ortonormal se irá obteniendo el valor de los coeficientes indeterminados. En efecto, de

$$[A_{12},A_{34}](X_1) = (a_1A_{12}+a_2A_{34}+a_3B+a_4C)(X_1) = a_1X_2+a_3X_3+a_4X_4\,,$$
$$[A_{12},A_{34}](X_1) = (A_{12}A_{34}-A_{34}A_{12})(X_1) = 0$$

se tiene que, como la base es ortonormal, $a_1=a_3=a_4=0$ y, de

$$[A_{12},A_{34}](X_3) = (a_2A_{34})(X_3) = a_2X_4\,,\ [A_{12},A_{34}](X_3) = (A_{12}A_{34}-A_{34}A_{12})(X_3) = 0$$

se obtiene que $a_2=0$. Así, $[A_{12},A_{34}]=0$.

Continuando con este método se obtienen el resto de valores indeterminados y, por tanto, (3.31).

Demostración del Lema 3.4.2.7

Dada la base ortonormal $\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}$ de T_oM, se necesitan los resultados intermedios siguientes para calcular las curvaturas seccionales y las raíces de Ricci buscadas.

Lema B.2.1

Si $\mathcal{D}$ denota el tensor diferencia entre la conexión Riemanniana y la canónica $\nabla-\tilde{\nabla}$, se tiene que

$$\mathcal{D}_{X_i}X_i = 0,\quad i=1,2,3,4,5,\quad \mathcal{D}_{X_1}X_2 = -\rho/2\, X_5 = -\mathcal{D}_{X_2}X_1,\quad \mathcal{D}_{X_1}X_3 = 0 = \mathcal{D}_{X_3}X_1,$$
$$\mathcal{D}_{X_1}X_4 = 0 = \mathcal{D}_{X_4}X_1,\quad \mathcal{D}_{X_1}X_5 = \rho/2\, X_2 = -\mathcal{D}_{X_5}X_1,\quad \mathcal{D}_{X_2}X_3 = 0 = \mathcal{D}_{X_3}X_2,$$
$$\mathcal{D}_{X_2}X_4 = 0 = \mathcal{D}_{X_4}X_2,\quad \mathcal{D}_{X_2}X_5 = -\rho/2\, X_1 = -\mathcal{D}_{X_5}X_2,\quad \mathcal{D}_{X_3}X_4 = -\lambda/2\, X_5 = -\mathcal{D}_{X_4}X_3,$$
$$\mathcal{D}_{X_3}X_5 = \lambda/2\, X_4 = -\mathcal{D}_{X_5}X_3,\quad \mathcal{D}_{X_4}X_5 = -\lambda/2\, X_3 = -\mathcal{D}_{X_5}X_4 .$$

Demostración

A partir de la fórmula (3.7),

$$2g(\mathcal{D}_Y X, Z) = g(\tilde{T}(X,Y),Z) + g(\tilde{T}(X,Z),Y) + g(\tilde{T}(Y,Z),X),$$

y haciendo uso de la expresión de la torsión $\tilde{T}$ dada en (3.17) se calculan las expresiones indicadas en el enunciado de la forma siguiente.

Para cada par de índices fijos i, j se sabe que $\mathcal{D}_{X_j}X_i = \sum_{k=1}^{5}\alpha_k X_k$ y

$$\alpha_k = g(\mathcal{D}_{X_j}X_i, X_k) \overset{(3.7)}{=} \tfrac{1}{2} g(\tilde{T}(X_i,X_j),X_k) + g(\tilde{T}(X_i,X_k),X_j) + g(\tilde{T}(X_j,X_k),X_i) .$$

Entonces, aplicando (3.17) se obtiene α_k, $k=1,\ldots,5$ y así, el valor indicado de $\mathcal{D}_{X_j}X_i$.

Lema B.2.2

Si R denota el tensor curvatura Riemanniano, se tiene que

$$R(X_1,X_2)X_2 = (-u\alpha + \tfrac{\rho^2}{4})X_1,\quad R(X_1,X_3)X_3 = 0 = R(X_1,X_4)X_4,$$
$$R(X_1,X_5)X_5 = \tfrac{\rho^2}{4}X_1,\quad R(X_2,X_3)X_3 = 0 = R(X_2,X_4)X_4,\quad R(X_2,X_5)X_5 = \tfrac{\rho^2}{4}X_2,$$
$$R(X_3,X_4)X_4 = (-v\beta + \tfrac{\lambda^2}{4})X_3,\quad R(X_3,X_5)X_5 = \tfrac{\lambda^2}{4}X_3,\quad R(X_4,X_5)X_5 = \tfrac{\lambda^2}{4}X_4,$$
$$R(X_3,X_1)X_2 = -\tfrac{\rho\lambda}{4}X_4,\quad R(X_4,X_1)X_2 = \tfrac{\rho\lambda}{4}X_3,\quad R(X_5,X_1)X_2 = 0,$$
$$R(X_2,X_1)X_3 = (u\beta + \tfrac{\rho\lambda}{4})X_4,\quad R(X_4,X_1)X_3 = -\tfrac{\rho\lambda}{4}X_2,\quad R(X_5,X_1)X_3 = 0,$$
$$R(X_2,X_1)X_4 = (u\beta - \tfrac{\rho\lambda}{2})X_3,\quad R(X_3,X_1)X_4 = \tfrac{\rho\lambda}{4}X_2,\quad R(X_5,X_1)X_4 = 0,$$
$$R(X_j,X_1)X_5 = 0,\quad j=2,3,4,\quad R(X_1,X_2)X_3 = (u\beta + \tfrac{\lambda\rho}{2})X_4,\quad R(X_4,X_2)X_3 = \tfrac{\lambda\rho}{4}X_1,$$
$$R(X_5,X_2)X_3 = 0,\quad R(X_3,X_2)X_4 = -\tfrac{\rho\lambda}{4}X_1,\quad R(X_5,X_2)X_4 = 0,\quad R(X_3,X_2)X_5 = 0,$$
$$R(X_4,X_2)X_5 = 0,\quad R(X_5,X_3)X_4 = 0,\quad R(X_2,X_3)X_5 = 0,\quad R(X_4,X_3)X_5 = 0 .$$

Demostración

Para obtener estos resultados se aplica metódicamente la fórmula (3.6),

$$R(X,Y) = \tilde{R}(X,Y) + [\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_Y] + \mathcal{D}_{\tilde{T}(X,Y)},$$

la expresión obtenida para $\tilde{R}$ dada en (3.32) y (3.33), la expresión de la torsión $\tilde{T}$ dada en (3.17) y los resultados del Lema B.2.1.

Recordar que según [K-N] dado $\sigma_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$ un plano dos dimensional de T_oM generado por una base ortonormal, se define la curvatura seccional de este por

$$K(\sigma_{ij}) = g(R(X_i, X_j)X_j, X_i)\,.$$

Así, utilizando el Lema B.2.2 se obtiene que las curvaturas seccionales en este caso son:

$$K(\sigma_{12}) = g(R(X_1, X_2)X_2, X_1) \overset{Lema\ B.2.2}{=} -u\alpha + \tfrac{\rho^2}{4}, \quad K(\sigma_{13}) = 0 = K(\sigma_{14}), \quad K(\sigma_{15}) = \tfrac{\rho^2}{4},$$
$$K(\sigma_{23}) = 0 = K(\sigma_{24}), \quad K(\sigma_{25}) = \tfrac{\rho^2}{4}, \quad K(\sigma_{34}) = -v\beta + \tfrac{\lambda^2}{4}, \quad K(\sigma_{35}) = \tfrac{\lambda^2}{4}, \quad K(\sigma_{45}) = \tfrac{\lambda^2}{4}\,.$$

Por otra parte, denotando por S el tensor de Ricci, se denominan raíces de Ricci a los valores propios del endomorfismo diagonalizable $\mathsf{s}: T_oM \to T_oM$ satisfaciendo para cada $X, Y \in T_oM$ que

$$\mathsf{S}(X,Y) = \langle \mathsf{s}X, Y \rangle = \mathsf{S}(Y,X)\,.$$

Así, para calcular las raíces de Ricci, en primer lugar habrá que hallar la expresión de la matriz $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, 5$ asociada a s y luego diagonalizarla. Para ello, utilizando el Lema B.2.2, las propiedades usuales asociadas a la curvatura R y las curvaturas seccionales anteriores, se calcula cada componente de la matriz A mediante

$$a_{ij} = \langle \mathsf{s}X_i, X_j \rangle = \mathsf{S}(X_i, X_j) = \sum_{k=1}^{5} R(X_k, X_j, X_k, X_i) = \sum_{k=1}^{5} g(R(X_k, X_i)X_j, X_k)\,.$$

Entonces, se obtiene que los elementos de la diagonal de A son

$$a_{11} = \sum_{k=1}^{5} g(R(X_k, X_1)X_1, X_k) = 0 + K(\sigma_{12}) + K(\sigma_{13}) + K(\sigma_{14}) + K(\sigma_{15}) = \tfrac{\rho^2}{2} - u\alpha\,,$$
$$a_{22} = K(\sigma_{12}) + 0 + K(\sigma_{23}) + K(\sigma_{24}) + K(\sigma_{25}) = \tfrac{\rho^2}{2} - u\alpha = \tfrac{\rho^2}{2} - \rho\lambda r^{-1}\,,$$
$$a_{33} = K(\sigma_{13}) + K(\sigma_{23}) + 0 + K(\sigma_{34}) + K(\sigma_{35}) = \tfrac{\lambda^2}{2} - v\beta = \tfrac{\lambda^2}{2} - \rho\lambda r\,,$$
$$a_{44} = K(\sigma_{14}) + K(\sigma_{24}) + K(\sigma_{34}) + 0 + K(\sigma_{35}) = \tfrac{\lambda^2}{2} - v\beta = \tfrac{\lambda^2}{2} - \rho\lambda r\,,$$
$$a_{55} = K(\sigma_{15}) + K(\sigma_{25}) + K(\sigma_{35}) + K(\sigma_{45}) + 0 = \tfrac{1}{2}(\lambda^2 + \rho^2)$$

y, que el resto de las componentes de A son todas nulas. Por tanto, la matriz A ya está diagonalizada y se concluye que los valores propios de esta son $\tfrac{\rho^2}{2} - \rho\lambda r^{-1}$ y $\tfrac{\lambda^2}{2} - \rho\lambda r$ con multiplicidad dos y $\tfrac{1}{2}(\lambda^2 + \rho^2)$ con multiplicidad uno.

B.3. CÁLCULOS CORRESPONDIENTES AL CAPÍTULO 4

Demostración del Lema 4.2.2.1

En efecto, bajo las hipótesis de este caso y dada la representación real de la matriz antisimétrica asociada a un endomorfismo F en la base ortonormal $\{X_i\}_{i=1}^4$ de V', se tiene

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_5 & -b_5 & -c_5 \\ a_5 & 0 & c_5 & -b_5 \\ b_5 & -c_5 & 0 & -h_5 \\ c_5 & b_5 & h_5 & 0 \end{pmatrix},$$

se considera $V'^C = V + iV$ y

$$U_1 = X_1 + iX_2, \qquad U_2 = X_3 + iX_4. \qquad \textbf{(B.10)}$$

Así, sobre el subespacio $(U_1, U_2) \subset V'^C$, se tiene que F, denotada por F^C, es la transformación dada por

$$\left.\begin{aligned} F^C U_1 &= ia_5 U_1 - \bar{\gamma} U_2, \\ F^C U_2 &= \gamma U_1 + ih_5 U_2, \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(B.11)}$$

donde $\gamma = b_5 + ic_5$ y los valores propios asociados son

$$\mu_1 = \tfrac{1}{2}[i(a_5 + h_5) + (-4\gamma\bar{\gamma} - (a_5 - h_5)^2)^{\frac{1}{2}}] = \tfrac{1}{2} i[(a_5 + h_5) + (4\gamma\bar{\gamma} + (a_5 - h_5)^2)^{\frac{1}{2}}],$$
$$\mu_2 = \tfrac{1}{2}[i(a_5 + h_5) - (-4\gamma\bar{\gamma} - (a_5 - h_5)^2)^{\frac{1}{2}}] = \tfrac{1}{2} i[(a_5 + h_5) - (4\gamma\bar{\gamma} + (a_5 - h_5)^2)^{\frac{1}{2}}]$$

los cuales, al ser imaginarios puros se expresarán como $\mu_1 = i\rho$, $\mu_2 = i\lambda$.

Nota B.3.1

Sobre el subespacio $(\bar{U}_1, \bar{U}_2) \subset V'^C$ los valores propios serían $-i\rho$, $-i\lambda$.

Se diferenciarán dos casos para continuar el estudio:

a) Si $\rho = \lambda$, resolviendo la ecuación

$$(a_5 + h_5) + (4\gamma\bar{\gamma} + (a_5 - h_5)^2)^{\frac{1}{2}} = (a_5 + h_5) - (4\gamma\bar{\gamma} + (a_5 - h_5)^2)^{\frac{1}{2}},$$

se obtiene $a_5 = h_5$ y $b_5 = c_5 = 0$. Y, por tanto, la matriz asociada a F ya sería de la forma buscada.

b) Si $\rho \neq \lambda$, como en el *Subcaso B.2* del Apartado 3.4.1, se considera

$$U_i^* = \alpha_i U_1 + \beta_i U_2 \text{ tal que } |\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2 = 1 \tag{B.12}$$

para $i = 1,2$, como los correspondientes vectores propios complejos de μ_1 y μ_2 respectivamente. A continuación se analizará la forma exacta de los parámetros α_i, β_i, $i = 1,2$. Para ello, primero habrá que calcular exactamente los vectores propios U_1^*, U_2^* asociados a μ_1 y μ_2 respectivamente.

- Para calcular U_1^* hay que resolver el sistema

$$(F^C - \mu_1 Id.)(U_1^*) = 0,$$

el cual tiene solución distinta de la trivial si y sólo si

$$\rho = (1/2)((a_5 + h_5) \pm (4\gamma\bar{\gamma} + (a_5 - h_5)^2)^{1/2}).$$

Como ρ es de esa forma, si se considera el signo $+$, resolviendo el sistema se obtiene que

$$\alpha_1 = (-i\beta_1/2\gamma)((h_5 - a_5) - (4\gamma\bar{\gamma} + (a_5 - h_5)^2)^{1/2}) = (i\beta_1/2\gamma)A_1$$

donde, $A_1 = -((h_5 - a_5) - (4\gamma\bar{\gamma} + (a_5 - h_5)^2)^{1/2}) > 0$. Como $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{C}$, $\alpha_1 = a_1 + ib_1$, $\beta_1 = c_1 + id_1$ calculando a_1, b_1, c_1, d_1 de manera que $|\alpha_1|^2 + |\beta_1|^2 = 1$ se obtiene que

$$a_1 = \frac{1}{2\gamma\bar{\gamma}}(A_1c_1c_5 - A_1d_1b_5), \quad b_1 = \frac{1}{2\gamma\bar{\gamma}}(A_1c_1b_5 + A_1d_1c_5), \quad c_1^2 = \frac{1 - d_1^2(1 + A_1^2/4\gamma\bar{\gamma})}{(1 + A_1^2/4\gamma\bar{\gamma})}. \tag{B.13}$$

Por tanto, dado d_1 se puede conocer c_1, a_1 y b_1. Pero, no todas las elecciones de d_1 son válidas ya que, como $c_1 \in \mathbb{R}$ y $c_1^2 > 0$ entonces,

$$d_1 \in \left] -\frac{1}{(1 + A_1^2/4\gamma\bar{\gamma})^{1/2}}, \frac{1}{(1 + A_1^2/4\gamma\bar{\gamma})^{1/2}} \right[.$$

- Para calcular U_2^* es preciso resolver el sistema

$$(F^C - \mu_2 Id.)(U_2^*) = 0.$$

el cual tiene solución distinta de la trivial si y sólo si $\lambda = (1/2)((a_5 + h_5) \mp (4\gamma\bar{\gamma} + (a_5 - h_5)^2)^{1/2})$. Considerando entonces el signo $-$ en λ y, resolviendo el sistema, se obtiene que

$$\alpha_2 = (-i\beta_2/2\gamma)((h_5 - a_5) + (4\gamma\bar{\gamma} + (a_5 - h_5)^2)^{1/2}) = (i\beta_2/2\gamma)A_2$$

donde, $A_2 = -((h_5 - a_5) + (4\gamma\bar{\gamma} + (a_5 - h_5)^2)^{1/2}) < 0$. Como $\alpha_2,\ \beta_2 \in \mathbb{C}$, $\alpha_2 = a_2 + ib_2$, $\beta_2 = c_2 + id_2$ y, así, calculando $a_2,\ b_2,\ c_2,\ d_2$ de manera que $|\alpha_2|^2 + |\beta_2|^2 = 1$ se obtiene que

$$a_2 = \frac{1}{2\gamma\bar{\gamma}}(A_2c_2c_5 - A_2d_2b_5),\quad b_2 = \frac{1}{2\gamma\bar{\gamma}}(A_2c_2b_5 + A_2d_2c_5),\quad c_2^2 = \frac{1 - d_2^2(1 + A_2^2/4\gamma\bar{\gamma})}{(1 + A_2^2/4\gamma\bar{\gamma})}. \quad \textbf{(B.14)}$$

Por tanto, dado d_2 se puede conocer c_2, a_2 y b_2. Pero, no todas las elecciones de d_2 son válidas ya que, como $c_2 \in \mathbb{R}$ y $c_2^2 > 0$ entonces,

$$d_2 \in \left]-\frac{1}{(1 + A_2^2/4\gamma\bar{\gamma})^{1/2}}, \frac{1}{(1 + A_2^2/4\gamma\bar{\gamma})^{1/2}}\right[.$$

Nota B.3.2

El cambio de base ortonormal se puede elegir con la propiedad de que $d_1 = 0$, $d_2 = 0$; es decir, suponiendo que $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. Así, en esta nueva base, las relaciones de (B.11) se expresan como:

$$F^C U_1^* = i\rho U_1^*, \qquad F^C U_2^* = i\lambda U_2^*. \quad \textbf{(B.15)}$$

Ahora, suponiendo

$$U_1^* = X_1^* + iX_2^*, \qquad U_2^* = X_3^* + iX_4^*, \quad \textbf{(B.16)}$$

se sabe que $\{X_1^*, \ldots, X_4^*\}$ es una base ortonormal, debido a la aplicación del Lema 3.4.1.5 como se realizó en el *Subcaso B.2* del Apartado 3.4.1., y, también, que respecto a ella nuestra matriz F tiene la forma deseada

$$\begin{pmatrix} 0 & -\rho & 0 & 0 \\ \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

donde, $\rho \neq 0$ y $\lambda \neq 0$.

Además, a partir de (B.10), (B.12) y (B.16) se sigue

$$\begin{aligned} X_1^* &= a_1X_1 - b_1X_2 + c_1X_3 - d_1X_4, \\ X_2^* &= b_1X_1 + a_1X_2 + d_1X_3 + c_1X_4, \\ X_3^* &= a_2X_1 - b_2X_2 + c_2X_3 - d_2X_4, \\ X_4^* &= b_2X_1 + a_2X_2 + d_2X_3 + c_2X_4, \end{aligned} \quad \textbf{(B.17)}$$

donde $\alpha_j = a_j + ib_j$, $\beta_j = c_j + id_j$, $j = 1,2$ en (B.12) y, además, se pueden expresar los elementos $\{X_i\}_{i=1}^{4}$ en función de los elementos $\{X_i^*\}_{i=1}^{4}$ ya que, $\{X_1^*, \ldots, X_4^*\}$ es una base ortonormal.

Finalmente, teniendo en cuenta que

$$PU_1 = P(X_1 + iX_2) = X_2 - iX_1 = -i(X_1 + iX_2) = -iU_1,$$
$$PU_2 = P(X_3 + iX_4) = X_4 - iX_3 = -i(X_3 + iX_4) = -iU_2,$$

el operador curvatura $P = A_{12} + A_{34}$ satisface que $PU_1 = -iU_1$, $PU_2 = -iU_2$ entonces, también se tiene $PU_1^* = -iU_1^*$, $PU_2^* = -iU_2^*$; en efecto,

$$PU_1^* = P(\alpha_1 U_1 + \beta_1 U_2) = -i(\alpha_1 U_1 + \beta_1 U_2) = -iU_1^*,$$
$$PU_2^* = P(\alpha_2 U_1 + \beta_2 U_2) = -i(\alpha_2 U_1 + \beta_2 U_2) = -iU_2^*$$

y, como a partir de lo anterior se obtiene que $PX_1^* = X_2^*$, $PX_2^* = -X_1^*$, $PX_3^* = X_4^*$, $PX_4^* = -X_3^*$ entonces, P también conserva su forma con respecto a la nueva base ortonormal $\{X_i^*\}_{i=1}^{4}$ de V y se denota por $P = A_{12}^* + A_{34}^*$.

Demostración del Lema 4.2.2.5

Si $\Phi \neq \mu$ y se supone que $d_1^* = d_2^* = 0$, como $\{X_i^{**}\}_{i=1}^{6}$ es una base ortonormal, usando (B.17) y (4.14) se tiene que $T''^{5}_{1,3} = 0$ ya que,

$$T''^{5}_{1,3} X_5^{**} = \tilde{T}(X_1^{**}, X_3^{**}) \overset{(B.17),(4.14)}{=} [(a_2^* b_1^* - a_1^* b_2^*)\tau + (c_2^* d_1^* - c_1^* d_2^*)\Theta] X_5^{**} =$$
$$\overset{d_1^*=d_2^*=0}{=} [(a_2^* b_1^* - a_1^* b_2^*)\tau] X_5^{**} \overset{(B.17)}{=} \left\langle X_3^{**}, X_2^{**} \right\rangle \tau X_5^{**} = 0.$$

Si, además, se supone que $\tau = \Theta$ entonces, $T''^{5}_{1,4} = 0$ pues

$$T''^{5}_{1,4} X_5^{**} = \tilde{T}(X_1^{**}, X_4^{**}) \overset{(B.17),(4.14)}{=} [(a_1^* a_2^* + b_1^* b_2^*)\tau + (c_1^* c_2^* + d_1^* d_2^*)\Theta] X_5^{**} =$$
$$\overset{d_1^*=d_2^*=0}{=} [(a_1^* a_2^* + b_1^* b_2^*)\tau + (c_1^* c_2^*)\Theta] X_5^{**} \overset{(B.13),(B.14)}{=} [-(c_1^* c_2^*)\tau + (c_1^* c_2^*)\Theta] X_5^{**} \overset{\tau=\Theta}{=} 0,$$

$\tau' = \tau \neq 0$ (en este caso sin suponer que $d_1^* = d_2^* = 0$) puesto que

$$\tau' X_5^{**} + \Phi X_6^{**} = \tilde{T}(X_1^{**}, X_2^{**}) \overset{(B.17),(4.14)}{=} [((a_1^*)^2 + (b_1^*)^2)\tau + ((c_1^*)^2 + (d_1^*)^2)\Theta] X_5^{**} + \Phi X_6^{**} =$$
$$\overset{(B.17),(\Theta=\tau)}{=} \left\langle X_1^{**}, X_1^{**} \right\rangle \tau X_5^{**} + \Phi X_6^{**} = \tau X_5^{**} + \Phi X_6^{**} \overset{(\tau\neq 0)}{\neq} 0$$

y, $\Theta' = \Theta \neq 0$ (en este caso tampoco se supone que $d_1^* = d_2^* = 0$) debido al hecho que

$$\Theta' X_5^{**} + \mu X_6^{**} = \tilde{T}(X_3^{**}, X_4^{**}) \overset{(B.17),(4.14)}{=} [((a_2^*)^2 + (b_2^*)^2)\tau + ((c_2^*)^2 + (d_2^*)^2)\Theta] X_5^{**} + \mu X_6^{**} =$$

$$\overset{(B.17),(\Theta=\tau)}{=} \left\langle X_4^{**}, X_4^{**} \right\rangle \Theta X_5^{**} + \Phi X_6^{**} = \Theta X_5^{**} + \mu X_6^{**} \overset{(\Theta=\tau\neq 0)}{\neq} 0 .$$

NOTACIONES BÁSICAS

Las principales notaciones utilizadas a lo largo de este libro son:

∇	La conexión de Levi-Civita sobre *M*.
$\tilde{\nabla}$	La conexión canónica sobre *M*.
$\|X\|$	La norma del vector $X \in V$.
$\oplus$	La suma directa.
$\vert\times$	El producto semidirecto.
ad, $ad_{\mathfrak{g}}$	La representación adjunta del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.
Ad, Ad_G	La representación adjunta del grupo de Lie *G*.
$Ad_G H$	El grupo adjunto.
$A(M,\nabla)$	El grupo de Lie de todas las transformaciones afines de (M,∇) en si mismo.
$Aut(V)$	El grupo de todos los automorfismos de *V*.
C^∞	De clase infinitamente diferenciable.
$C^\infty(M)$	El álgebra de las funciones diferenciales sobre *M*.
$\mathbb{C}P^n$	Espacio proyectivo complejo n - dimensional.
$\mathbb{C}H^n$	Espacio hiperbólico complejo n - dimensional.
$\mathfrak{D}(M)$	El álgebra de Lie de todas las derivaciones de grado cero actuando sobre $\mathfrak{I}(M)$.
$\mathcal{D}$	El campo tensorial diferencia de las conexiones $\nabla - \tilde{\nabla}$.

$\mathcal{D}(V)$	El espacio de las funciones en $\mathcal{E}(V)$ con soporte compacto y contenido en *V*.
D	Operador diferencial.
$\mathcal{D}(M)$	El álgebra de las funciones diferenciales sobre *M* con soporte compacto; es decir $C_c^\infty(M)$.
$\mathcal{D}_K(M)$	El conjunto de las funciones en $\mathcal{D}(M)$ con soporte en *K*, cuando $K \subset M$ es subespacio compacto.
$D(G/H)$	El álgebra de todos los operadores diferenciales G – invariantes sobre G/H.
$D(G)$	El álgebra $D(G/\{e\})$.
$D_H(G)$	El conjunto $\{D \in D(G):\ D^{R_h} = D \quad para\ todo\ \ h \in H\}$.
$D(G)\mathfrak{h}$	El conjunto $(P): P = X_1^{e_1} \cdots X_n^{e_n} \in S(\mathfrak{g}), X_1, \ldots, X_r \in \mathfrak{m}, X_{r+1}, \ldots, X_n \in \mathfrak{h}, r \neq.$
$D^d(G)$	El conjunto $\lambda(\sum_{e \leq d} S^e(\mathfrak{g}))$ para cada $d \geq 0$.
$Diff(M,o)$	El conjunto de los difeomorfismos $\sigma : M \to M$ que mantienen fijo el punto *o*.
e	El elemento neutro del grupo de Lie *G*.
exp	La aplicación exponencial.
e^A, $\exp(A)$	Denota $\sum_{n=0}^{\infty}(1/n!)A^n$ si $A \in \mathfrak{g}$ es una transformación lineal.
E^n	El espacio $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclídea.
$End(V)$	El conjunto de los endomorfismos de *V*.
$\mathcal{E}(V)$	El espacio de las funciones diferenciables valuadas complejas sobre *V*.
$\mathcal{E}(M)$	El álgebra de las funciones diferenciales valuadas reales sobre *M*; es decir $C^\infty(M)$.
$E(M)$	El conjunto de los operadores diferenciales sobre *M*.
f_{*_p}	Diferencial de $f : M \to N$, aplicación entre variedades diferen- ciales en $p \in M$.
f^*	Transpuesta de f_{*_p}.
$F(M)$	El anillo de las funciones diferenciables valuadas reales sobre *M*.
F	Transformación antisimétrica del subespacio $V' = (X_1, \ldots, X_4) \subset V$, dada por $FX_i = \tilde{T}(X_i, X_5)$, para $i = 1, 2, 3, 4$.
$F^{\mathbb{C}}$	Transformación *F* sobre el subespacio $(U_1, U_2) \subset V'^{\mathbb{C}}$.
Φ_g	La acción de $g \in G$ sobre *M*.
g	Métrica Riemanniana.

G	Transformación antisimétrica del subespacio $V' = (X_1,\dots,X_4) \subset V$, dada por $GX_i = \tilde{T}(X_i, X_6)$, para $i = 1,2,3,4$.
$\hat{G}$	Grupo de transvección.
G/H	Variedad Riemanniana homogénea.
$GL(V)$	El conjunto de las matrices asociadas a los endomorfismos de *V*.
$GL(n,\mathbb{R})$	El Grupo General Lineal actuando sobre $\mathbb{R}^n$.
$\mathfrak{g}$	Álgebra de Lie del grupo de Lie *G*. Además, $\mathfrak{g} = V \oplus \mathfrak{h}$.
$\mathfrak{gl}(V)$	Álgebra de Lie de $GL(V)$.
$\hat{\mathfrak{g}}$	Álgebra de transvección. Además, $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m} + \mathfrak{k}$.
$\mathfrak{S}$	Suma cíclica.
$\mathfrak{S}_p$	El grupo simétrico de *p* letras.
$\hat{H}$	Grupo de isotropía lineal en $p \in G$.
H^n	El plano hiperbólico *n* - dimensional.
H_n	Grupo de Heisenberg de dimensión *n*.
$\mathfrak{h}$	El álgebra de Lie del grupo de Lie *H*.
$\hat{\mathfrak{h}}_k$	Para $k = 0,1,\dots$, denota el conjunto $\{A \in \mathfrak{gl}(V) : A(g) = A(R) = A(DR) = \cdots = A(D^k R) = 0\}$
$Id.$	La identidad.
$I(\mathfrak{g})$	El conjunto de los polinomios $Ad(G)$ – invariantes de $S(\mathfrak{g})$.
$I^e(E^3)$	Grupo de todos los movimientos euclídeos en E^3 que conservan la orientación.
$I^e(\mathbb{R}^3)$	Grupo de todas las transformaciones afines positivas sobre el espacio $\mathbb{R}^3(x,y,z)$ que conservan la forma diferencial $dx^2 + dy^2 + dz^2$
$I^h(\mathbb{R}^3)$	Grupo de todas las transformaciones afines positivas sobre el espacio $\mathbb{R}^3(x,y,z)$ que conservan la forma diferencial $dx^2 + dy^2 - dz^2$.
$\mathfrak{I}(M)$	El grupo de las isometrías sobre (M, g).
$\mathfrak{I}_0(M)$	El grupo conexo maximal de las isometrías sobre (M, g).
$\mathfrak{I}(M,p)$	El grupo de isotropía de $\mathfrak{I}(M)$ en *p*.
$\mathfrak{I}^o(M)$	La componente unidad del grupo de las isometrías $\mathfrak{I}(M)$.
$\mathfrak{I}$	Clase canónica de un espacio simétrico generalizado.
J	La estructura compleja sobre *V*.
$J^1(I^e(E^3))$	El primer grupo de prolongación de $I^e(E^3)$ actuando sobre el fibrado de las esferas $E^3 \times S^2(r)$.
$Ker(A)$	El núcleo asociado al endomorfismo *A*.

$K(\sigma_{ij})$	La curvatura seccional asociada al plano σ_{ij}.
$\mathfrak{k}$	El álgebra de Lie formada por todos los endomorfismos A de V que paralelizan la métrica y, los tensores de simetría y torsión.
λ	La aplicación simetrización en los apartados relacionados con Operadores Diferenciales.
L_g	La translación a izquierda por $g \in G$.
M	Variedad diferenciable.
(M,g)	Variedad Riemanniana.
(M,∇)	Variedad afín.
(M,g_t,σ_t)	Una deformación.
$\mathfrak{m}$	El complemento ortogonal de $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{g}$. Además, $\mathfrak{m} \equiv T_o M$.
o	El origen de la variedad homogénea $M = G/H$.
P	Transformación curvatura original.
π	La proyección canónica de G en ${}^{G}\!/_{H}$.
π_i	Las proyecciones canónicas de V en V_i.
R	Campo tensorial curvatura asociado a la conexión ∇.
$\widetilde{R}$	Campo tensorial curvatura asociado a la conexión $\tilde{\nabla}$.
R_g	La translación a derecha por $g \in G$.
$\mathbb{R}P^n$	El plano proyectivo n - dimensional.
$\mathbb{R}^n$	El espacio de las n – tuplas de números reales.
$\mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]$	Anillo de polinomios.
$\mathbb{R}^{\mathcal{I}}[X_1,\ldots,X_n]$	El subanillo de $\mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]$ consistente en todos los polino- mios $Ad_{\hat{G}}(\hat{H})$ - invariantes.
$sop(\Psi)$	Soporte de la función $\Psi \in \mathcal{D}(V)$.
s_x	Simetría Riemanniana en x.
S	El campo tensorial de simetría.
S^n	La esfera n – dimensional.
$S(V)$	El álgebra simétrica sobre V.
$S^m(V)$	El subespacio de $S(V)$ formado por los polinomios homogéneos de grado m.
$SL(n,\mathbb{R})$	El grupo especial lineal real n-dimensional.
$SL(n,\mathbb{C})$	El grupo especial lineal complejo n-dimensional.
$SO(p,q)$	El grupo de matrices en $SL(p+q,\mathbb{R})$ las cuales dejan invariante $-\sum_{i=1}^{p} x_i^2 + \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i^2$.

$SO(n,\mathbb{C})$	El grupo ortogonal especial complejo n-dimensional.
$SO(n)$	El grupo ortogonal especial real n-dimensional.
$SO(2)_r$	El grupo de todos los productos de matrices de la forma $\begin{pmatrix} Cost & -Sent & 0 \\ Sent & Cost & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Cosrt & -Senrt & 0 \\ Senrt & Cosrt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donde, $t \in \mathbb{R}$ y r es un número racional.
$SO(2)^{(r)}$	El grupo de todos los productos de matrices de la forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Cosrt & -Senrt & 0 \\ Senrt & Cosrt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donde, $t \in \mathbb{R}$ y r es un número racional.
$Sp(1)$	El grupo de los cuaterniones unitarios.
$SU(p,q)$	El grupo de matrices en $SL(p+q,\mathbb{C})$ las cuales dejan invariante $-\sum_{i=1}^{p} z^i \overline{z}^i + \sum_{i=p+1}^{p+q} z^i \overline{z}^i$.
$SU(n)$	El grupo especial unitario n - dimensional.
$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$	Álgebra de Lie de $SL(n,\mathbb{R})$.
$\mathfrak{so}(n)$	Álgebra de Lie de $SO(n)$.
$\mathfrak{so}(p,q)$	Álgebra de Lie de $SO(p,q)$.
$\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$	Álgebra de Lie de $SO(n,\mathbb{C})$.
$\mathfrak{su}(p,q)$	Álgebra de Lie de $SU(p,q)$.
$\mathfrak{su}(n)$	Álgebra de Lie de $SU(n)$.
s	Endomorfismo diagonalizable de T_oM asociado a S.
S	El tensor de Ricci.
σ_{ij}	Plano dos dimensional de T_oM generado por la base ortonormal $\langle X_i, X_j \rangle$.
$\Sigma(\Theta_i)$	El conjunto de relaciones características asociado a (Θ_i).
Σ_B	El conjunto de relaciones características asociado al sistema de valores propios denominado B.
Σ^r	Sistema reducido de relaciones características, asociado a una s – variedad algebraica.

Σ_B^r	Sistema reducido de relaciones características, asociado al sistema de valores propios denominado B y a una s – variedad algebraica.
$t(n)$	El grupo de las translaciones sobre $\mathbb{R}^n$.
T	Campo tensorial torsión asociado a la conexión ∇.
$\tilde{T}$	Campo tensorial torsión asociado a la conexión $\tilde{\nabla}$.
T^2	El toro llano Riemanniano de dimensión dos.
$T(M)$	El fibrado tangente asociado a *M*.
$T_p(M)$	El espacio tangente asociado a $p \in M$.
$\Im^{(p,q)}(M)$	El módulo sobre $F(M)$ de todos los campos tensoriales diferenciables de orden contravariante p y orden covariante q.
$\Im(M)$	El álgebra tensorial; es decir, $\sum_{p,q=0}^{\infty} \Im^{(p,q)}(M)$.
$U_1,\ldots,U_n$	La base de $V^{\square}$.
$U(p,q)$	El grupo de matrices en $GL(p+q,\mathbb{C})$ las cuales dejan invariante $-\sum_{i=1}^{p} z^i\overline{z}^i + \sum_{i=p+1}^{p+q} z^i\overline{z}^i$.
$U(n)$	El grupo unitario n – dimensional.
$\mathfrak{u}(n)$	Álgebra de Lie de $U(n)$.
$\mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}})$	El álgebra envolvente universal de $\hat{\mathfrak{g}}$.
$\mathfrak{A}(M)$	El grupo de las transformaciones afines de *M*.
V	Espacio vectorial.
$V^{\mathbb{C}}$	Espacio vectorial complexificado.
$(V, g, S, \tilde{R}, \tilde{T})$	s – variedad algebraica.
$V^{(\Theta_i)}$	Espacio propio de S en $V^{\mathbb{C}}$ asociado al valor propio Θ_i.
(Θ_i)	Sistema de valores propios de *S*.
$Z(\mathfrak{g})$	El centro del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.
$Z(G)$	El centro de $D(G)$.

BIBLIOGRAFÍA

[AM] ARIAS-MARCO, T.
About the classification of naturally reductive homogeneous spaces in small dimensions.
Matemàtiques, 4, (2007), 71-90.

[B - U] BARROS, M.-URBANO, F.
Differential geometry of $U(p+q+r)/U(p)\times U(q)\times U(r)$.
Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, Tomo XXX, (1981), 83-96.

[C] CARTAN, E.
Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, nouveau tirage.
Gauthier-Villars, Paris, 1951.

[D] DO CARMO, M. P.
Riemannian Geometry.
Birkhäuser, Boston, 1992.

[D'A] D'ATRI, J. E.
Geodesic spheres and symmetries in naturally reductive homogeneous spaces.
Michigan Math. J., 22, (1975), 71-76.

[D'A -Ni] D'ATRI, J. E.-NICKERSON, H. K.
Geodesic symmetries in spaces with special curvature tensor.
J. Differential Geometry, 9, (1974), 251-262.

[D'A -Z] D'ATRI, J. E.-ZILLER, W.
Naturally Reductive Metrics and Einstein Metrics on Compact Lie groups.
Mem. Amer. Math. Soc., 18, (1979), no. 215.

[dG] de GRAAF, W. A.
Constructing faithful matrix representations of Lie algebras.
Proceedings of the 1997 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (kihei, HI), ACM, New York, (1997), 54-59.

[G.1] GRAY, A.
Nearly Kaehler manifolds.
J. of Diff. Geom., 4, (1970), 283-309.

[G.2] GRAY, A.
The structures of Nearly Kaehler manifolds.
Math. Ann., 223, (1976), 233-248.

[G - L] GRAHAM, P. J.-LEDGER, A. J.
s – Regular Manifolds.
Differential Geometry, in honor of K. Yano Kinokuniya, Tokio, (1972), 133-144.

[Go - H] GONZALEZ, F.-HELGASON, S.
Invariant Differential Operators on Grassmann Manifolds.
Advances in Mathematics, 60, (1986), 81-91.

[H.1] HELGASON, S.
Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces.
Academic Press, INC., London, 1978.

[H.2] HELGASON, S.
Groups and Geometric Analysis.
Academic Press, INC., London, 1984.

[Ka] KAPLAN, A.
On the geometry of groups of Heisenberg type.
Bull. London Math., Soc. 15, (1983), 35-42.

[K.1] KOWALSKI, O.
Riemannian Manifolds with General Symmetries.
Math. Z., 136, (1974), 137-150.

[K.2] KOWALSKI, O.
Classification of generalized symmetric Riemannian spaces of dimension $n \leq 5$.
"Rozpravy ČSAV", Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1975.

[K.3] KOWALSKI, O.
Generalized Symmetric Spaces.
Lectures Notes in Mathematics, vol. 805. Springer-Verlag, 1980.

[K.4] KOWALSKI, O.
Spaces with volume - preserving symmetries and related classes of Riemannian manifolds.
Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino 1983, Special Issue, (1984), 131-158.

[K - N] KOBAYASHI, S.-NOMIZU, K.
Foundations of Differential Geometry, I, II.
Interscience, New York, 1963, 1969.

[K –V.1] KOWALSKI, O.-VANHECKE, L.
Four dimensional naturally reductive homogeneos spaces.
Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino 1983, Special Issue, (1984), 223-232.

[K –V.2] KOWALSKI, O.-VANHECKE, L.
Classification of four-dimensional commutative spaces.
Quart. J. Math. Oxford (2), 35, (1984), no. 139, 281-291.

[K –V.3] KOWALSKI, O.-VANHECKE, L.
Classification of five-dimensional naturally reductive spaces.
Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 97, (1985), 445-463.

[L] LEDGER, A. J.
Espaces de Riemann symétriques généralisés.
C. R. Acad. Sc. Paris, 264, (1967), 947-959.

[L -O] LEDGER, A. J.-OBATA, M.
Affine and Riemannian s-Manifolds.
J. Differential Geometry, 2, (1968), 451-459.

[Li] LICHNEROWICZ, A.
Opérateurs différentiels invariants sur un espace symétrique.
Ann. Sc. Ecole Norm. Sup., 81, (1964), 341-385.

[M] MILNOR, J.
Morse Theory.
Annals of Mathematic Studies, Number 51. Princenton University Press, New Jersey, 1969.

[N] NOMIZU, K.
Invariant Affine Connections on Homogeneous spaces.
Amer. J. Math., 76, (1954), 33-65.

[P] POOR, W. A.
Differential Geometric Structure.
Mc. Graw-Hill, New York, 1981.

[T -V] TRICERRI, F.-VANHECKE, L.
Homogeneous Structures on Riemannian Manifolds.
London Math. Soc. Lecture Note Series, vol. 83, Cambridge Univ. Press, 1983.

[W] WARNER, F.W.
Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups.
Scott, Foresman and Company, London, 1971.

[Wo –G.1] WOLF, J. A.-GRAY, A.
Homogeneous spaces defined by Lie Groups automorphisms I.
Journal of Differential Geometry, 2, (1968), 77-114.

[Wo –G.2] WOLF, J. A.-GRAY, A.
Homogeneous spaces defined by Lie Groups automorphisms II.
Journal of Differential Geometry, 2, (1968), 115-159.