UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

Facultad de Educación

Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas

# Los Ejemplos en Clase de Matemáticas de Secundaria como Referente del Conocimiento Profesional

## TESIS DOCTORAL

(Resumen)

Carlos Alberto Barros Pacheco Abrantes de Figueiredo

Badajoz, Septiembre de 2010

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA
Facultad de Educación

Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales
y de Las Matemáticas

# Los Ejemplos en Clase de Matemáticas de Secundaria como Referente del Conocimiento Profesional

(Resumen)

Tesis Doctoral presentada por Carlos Alberto Barros Pacheco Abrantes de Figueiredo para optar al grado de Doctor.

Dirigida por:
Dr. Lorenzo Jesús Blanco Nieto
Dr. Luis Carlos Contreras González

Badajoz, Septiembre de 2010

# Índice

# I INTRODUCCIÓN

> *"Existen múltiples evidencias de que los ejemplos tienen un papel central, tanto en el desarrollo de las matemáticas como disciplina, como en su enseñanza. Muchos argumentan que su uso es parte integrante de las matemáticas como disciplina y no solamente un recurso en el proceso de enseñanza y aprendizaje. […] Nosotros argumentamos que prestar atención a los ejemplos proporciona una perspectiva, simultáneamente útil en la práctica, y teóricamente importante en el diseño de actividades lectivas, en el análisis de la práctica de los alumnos y en el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas."*
>
> (Bills, Dreyfus, Mason, Tsamir, Watson e Zaslavsky, 2006)

Las matemáticas se enseñan, primordialmente, a través de los ejemplos (Mason y Watson, 2005), aprendiendo más de ellos que de las definiciones (Watson y Mason, 2002a; Zazkis y Leikin, 2007). De hecho, las definiciones adquieren algún significado a partir de los ejemplos, ya que el lenguaje técnico de las matemáticas describe clases de objetos o relaciones con las cuales los alumnos deben familiarizarse (Watson y Mason, 2002b). Es a través de los ejemplos que los profesores transmiten la esencia de los conceptos matemáticos y técnicas de cálculo (Tall y Vinner, 1981), constituyéndose en la base para las generalizaciones, abstracciones y razonamientos analógicos (Zaslavsky, Harel y Manaster, 2006). Los ejemplos son, pues, parte integrante de las matemáticas y un elemento importante en el conocimiento especializado (Rissland-Michener, 1978).

Además, desde la perspectiva de la enseñanza, existen varios aspectos pedagógicos del uso lectivo de los ejemplos que realzan su significado y muestran la complejidad de este elemento central de la enseñanza (Zaslavsky, 2010).

La mayoría de los profesores usa de una forma o de otra los ejemplos en su práctica docente, sea revelando un modo en particular de cómo se resuelve un problema, sea en la preparación de las clases (Chick y Harris, 2007). Charles (1980) afirma que la investigación efectuada, en la psicología educacional y en la educación matemática, muestra que existen muchas acciones que promueven la adquisición de los conceptos matemáticos pero, entre todas ellas, destaca como objetivo preferencial de estudio la ejemplificación de los profesores. Hazzan y Zazkis (1999) colocan dos cuestiones muy pertinentes: ¿Qué importancia tienen los ejemplos? ¿Podemos aprender y enseñar matemáticas sin ellos?

Las teorías clásicas de la psicología del aprendizaje destacan la habilidad que el ser humano tiene para distinguir y para identificar la semejanza y la diferencia, la homogeneidad y la diversidad, y, de ese modo, agrupar, separar y clasificar. La noción de clasificación nos permite concebir los elementos de una clase y, por consiguiente, los representantes de esa clase: los ejemplos (Bills, 1996). Las nociones de *clase* y de *miembro* nos transportan para las nociones de *general* y de *particular*. Lo que es particular presenta rasgos que son propios de un elemento de la clase, mientras que lo que es general presenta rasgos que son comunes a todos los miembros de la clase. Los ejemplos tienen estas dos particularidades. Cuando observamos un ejemplo podemos ver solamente los rasgos que lo diferencian de los otros ejemplos y lo tornan único. Sin embargo, también podemos focalizar nuestra atención en los otros aspectos que le hace pertenecer a una clase dada. Es decir, en aquellos aspectos que son compartidos por todos los que se integran en la clase y que permiten generalizar y abstraer. Las matemáticas son un mundo de ejemplos. La historia muestra que los ejemplos poseen un papel central en el desarrollo de las matemáticas como disciplina y también en su enseñanza (Bills *et al.*, 2006). Tanto es así, que desde siempre los alumnos han practicado las matemáticas recurriendo a los ejemplos (Mason y Watson, 2005). Según Watson y Mason (2005), el término *Ejemplificación* es usado para describir cualquier situación en que cualquier cosa específica es presentada como representante de una clase más general, fijando así la atención de los alumnos en una determinada dirección. Los objetos matemáticos son considerados ejemplos cuando son percibidos como "ejemplos de algo": conjeturas y conceptos, aplicaciones de métodos y técnicas, constructos de orden superior (como tipos de prueba), uso de diagramas, notaciones particulares u otros suportes, entre tantos otros. La idea fundamental es el acto de *ver algo como ejemplo de alguna "cosa"* (Goldenberg y Mason, 2008).

A su vez, en educación matemática, la palabra *Ejemplo* es utilizada con una amplia variedad de sentidos (Bills *et al.*, 2006). En el marco teórico y en el apartado de metodología se indica lo que entenderemos en este estudio como *ejemplo*: desde la particularización de una definición a la resolución de un problema, pasando por el procedimiento matemático para ser reproducido por los alumnos. En cualquiera de los sentidos, los ejemplos pueden ser vistos como herramientas culturalmente mediadoras entre los alumnos y los conceptos matemáticos, los teoremas y las técnicas. Además, la variación de los ejemplos presentados puede ayudar a los alumnos a distinguir lo esencial de los aspectos accidentales y observar, cuando están bien seleccionados, la variación en los mismos (Goldenberg y Mason, 2008).

Podemos encontrar en la bibliografía estudios sobre la ejemplificación centrados en diferentes contenidos, desde la Teoría de los Números (Zaslavsky y Peled, 1996; Zazkis, Liljedahl y Chernoff, 2008) hasta la Geometría (Charles, 1980, Peled y Zaslavsky, 1997; Zaslavsky, Harel y Manaster, 2006; Zazkis y Leikin, 2008) pasando por el Álgebra (Bills, 1995). No obstante, se puede identificar fácilmente que la ejemplificación de conceptos es el rasgo común a todos ellos y que el aspecto de la ejemplificación que presentan puede ser estudiado en cualquier otro contenido matemático. Conjuntamente, en la biografía sobre ejemplificación, también se encuentran estudios sobre la forma de ejemplificar de profesores, con y sin experiencia, y la relación que ella pueda tener con sus conocimientos sobre el contenido matemático (Rowland y colegas, 2003a; 2003b; 2003c; 2003d; 2004; 2005; Turner, 2005; Huntley, 2008; Rowland, 2008). Prestando atención a los ejemplos se obtiene, simultáneamente, una utilidad práctica y una importante perspectiva teórica en el esbozo de las actividades de enseñanza, en la observación de las experiencias de los alumnos y en el desarrollo profesional de los profesores (Bills *et al*., 2006).

El carácter cualitativo de esta investigación nos va a permitir observar los ejemplos e introducirlos en el contexto del aula sobre funciones, evidenciar su objetivo, señalar su eficacia. Y, en cierto modo, evaluar su efecto. Además, el propio contexto de creación o selección del ejemplo será un objetivo específico en lo que respecta al conocimiento que el profesor moviliza para crear y elegir ejemplos.

El conocimiento que el profesor necesita adquirir con el fin de seleccionar y construir ejemplos útiles en sus aulas de matemáticas implica un conocimiento sólido de matemática y un conocimiento profundo de la didáctica (Zaslavsky, 2008). Y, cuando ayuda a los alumnos a construir el conocimiento matemático, la selección que realiza de los ejemplos puede ser un indicador de una enseñanza eficaz desde el punto de vista del conocimiento del contenido y del conocimiento didáctico de ese contenido, como factores determinantes en el proceso de esa selección (Muir, 2007).

La elección de ejemplos adecuados, es una tarea delicada, difícil y compleja, como lo es su uso para ilustrar de forma efectiva los principios generales. La necesidad de escoger representaciones ajustadas se revela particularmente importante (Rowland, 2005; Figueiredo, 2005; Chick y Harris, 2007). Estudios relacionados con la formación de conceptos subrayan el papel de una cuidadosa selección y secuenciación de los ejemplos y de los no ejemplos como suporte tanto en la distinción entre los aspectos que son críticos y los que no lo son, como en la construcción de conceptos y de conjuntos de ejemplos con ellos relacionados (Vinner, 1983; Zaslavsky y Peled, 1996).

Los estudios sobre el uso de los ejemplos y sobre cómo los alumnos aprenden con ellos muestran que una enseñanza eficaz debe incluir una multiplicidad de ejemplos, de varios tipos, que evidencien la estructura profunda [de los conceptos], en vez de desviar la atención de los aspectos superficiales (Atkinson *et al.*, 2000). La ejemplificación constituye la conexión entre el conocimiento del contenido del profesor y sus alumnos. La forma de ejemplificar es producto del conocimiento profesional del profesor, que puede ser adecuada o no; puede ayudar al alumno a comprender los contenidos que el profesor le quiere transmitir, o le puede inducir a error.

Analizar el modo como un profesor construye (o selecciona) los ejemplos que va a presentar a sus alumnos, sea para que los trabajen solos o con el auxilio del profesor, es el espejo de un conocimiento muy especifico del profesor de matemáticas. Estudiar la forma como un profesor ejemplifica, con qué ejemplos y en qué contextos, puede revelarse una metodología apropiada para profundizar en el conocimiento de los profesores. Por otra parte, el análisis más profundo del conocimiento de una profesora, puede contribuir para ampliar el conocimiento de muchos otros profesores.

El interés de profundizar en el conocimiento del profesor da sentido a esta investigación centrada en los ejemplos, como un instrumento particular que el profesor de matemáticas utiliza en sus clases con asiduidad. Los ejemplos siempre han tenido un papel central tanto en el desarrollo de las Matemáticas como en su enseñanza y aprendizaje. Consecuentemente ellos tienen, de algún modo, su lugar en muchas teorías sobre el aprendizaje de las matemáticas, ya sean utilizados como base para generalizaciones, ilustraciones de técnicas o conceptos, elementos de clases, o modelos genéricos estructurantes (Bills y Watson, 2008). Es el conocimiento del profesor, en particular, de cómo construir, elegir y utilizar los ejemplos, lo que hace de puente entre la teoría, aquello que es abstracto y general, y la práctica, que es concreta y particular. Y ayudar a los alumnos a aprender los conceptos matemáticos, las técnicas y los procedimientos que esta disciplina utiliza.

Muchos de los trabajos que se han publicado sobre didáctica de las matemáticas aparentan enfatizar los aspectos generales de las aulas, sin que se problematice sobre los ejemplos, su estructura y secuencia que, al final, es la esencia de la experiencia matemática de los alumnos; lo mismo ocurre con el material observable del aula (Bills y Watson, 2008). El interés de esta línea de investigación pudo ser constatado en el año 2006 en Praga, Republica Checa, cuando en el 30º Congreso del PME se incluyó un fórum de investigación dedicado exclusivamente al papel de los ejemplos en la educación matemática, donde se hizo una actualización sobre este asunto y se estableció la *Ejemplificación* como un área de investigación (Bills *et al.*, 2006).

El conocimiento que el profesor utiliza para enseñar matemáticas constituye, también, uno de los principales temas de investigación. Se trata de saber en qué consiste ese saber, su naturaleza, su desarrollo, la relación con la práctica profesional y la teoría educacional (Ponte, 2000). La observación del profesor y el análisis de su ejemplificación pueden añadir aportaciones didácticas para la formación inicial o permanente del profesor.

De un modo general. Profundizar sobre el papel de los ejemplos es "*explorar las formas por las cuales los ejemplos contribuyen para la transformación de los niños en matemáticos y de los matemáticos en profesores de matemáticas. En cada nivel de este desarrollo de la creación y el uso* ***de****, y la reflexión* ***sobre****, los ejemplos es vista como parte integral del aprendizaje."* (Bills y Watson, 2008, p. 79).

# II FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Este capítulo está dedicado al marco teórico y tiene tres apartados: el concepto de función, el Conocimiento Didáctico del Contenido del profesor y la utilización de ejemplos en la enseñanza del concepto de función.

Sobre el concepto de función se muestra, en términos generales, su evolución histórica y la importancia que las diversas representaciones del concepto de función tuvieron a lo largo de su desarrollo. Asimismo, en el ámbito de este trabajo, el papel de las representaciones es crucial dado que la ejemplificación del concepto de función tiene que pasar por alguna de ellas. De hecho, la correcta construcción del concepto de función se basa en todas ellas y en las relaciones que se establecen entre unas y otras.

## II.1. Funciones

**La importancia de las representaciones del concepto de función. Terminología sobre funciones utilizada en la investigación**

El concepto de función es visto como un elemento fundamental en la organización del edificio matemático. Yerushalmy y Schwartz acreditan que "… la función es un objeto fundamental del álgebra y obligatoriamente está presente en una gran variedad de representaciones desde el inicio de la enseñanza y aprendizaje del algebra" (1993, p. 41). Y, el concepto de función ha sido uno de los focos principales de atención en la investigación en educación matemática desde los años 80 (DeMarois y Tall, 1996).

En el ámbito de la enseñanza y aprendizaje del concepto de función, en los niveles básico y secundario (alumnos entre 12 y 18 años), las tres representaciones que más frecuentemente se utilizan, que constan en las programaciones oficiales, y que permiten la construcción del concepto son: las tablas numéricas, las representaciones gráficas y las representaciones algebraicas. Es curioso verificar que la representación verbal del lenguaje natural, tan utilizada como las otras representaciones, no asume un papel individualizado en el trabajo cotidiano de alumnos y profesores. De todos modos, la necesidad de que los alumnos interconecten estas representaciones es incuestionable, puesto que la tendencia que los alumnos presentan para compartimentar y desconectar las diferentes representaciones no ayuda a la resolución de situaciones que impliquen este concepto (Ryan, 1994). La introducción del concepto de función, en el nivel pre-algebraico, acostumbra a basarse en la relación entre dos cantidades a través del lenguaje natural y en las tablas numéricas pero, rápidamente, la construcción del concepto se centra en las representaciones geométricas y algebraicas. Esta forma de introducción y desarrollo del concepto de función es compatible con la perspectiva de su evolución histórica.

Abstrayéndonos de la importancia de cada una de las representaciones del concepto de función, el tratamiento del concepto en clase de matemáticas implica casi siempre las representaciones geométrica y algebraica. El uso de unas u otras depende del objetivo perseguido por el profesor, por eso podemos pensar que estas dos representaciones tienen naturalezas didácticas diferentes. Schwartz y Yerushalmy (1992) argumentan que la representación simbólica es relativamente más eficaz para resaltar las características de la función como proceso, mientras que la representación gráfica es más eficaz para destacar la esencia de la función como entidad. Le cabe al profesor no dejar que el alumno asuma que las representaciones están separadas y son autónomas; tal y como señalan Dubinsky y Harel (1992), las dos representaciones están intrínsecamente ligadas. La dependencia natural (o aprendida) entre dos representaciones puede constituir una de las razones para las dificultades presentadas por los alumnos en el proceso de conexión entre representaciones. Es propio de nuestra experiencia como profesores encontrarnos inesperadamente con las confusiones de los alumnos en lo que respecta a la representación algebraica, cuando la representación geométrica resolvería el problema de forma estratégicamente más eficiente.

La relación de los alumnos con las representaciones del concepto de función parece ser más fácil que la relación que consiguen mantener con la propia definición de función. Por otra parte, el sentido que los alumnos consiguen percibir en la definición se revela más claro a medida que toman contacto con sus representaciones. Muchas veces, cuando preguntamos a un alumno lo qué es una función, o no entiende que lo que se le pregunta es que defina el concepto o, si es consciente del sentido de la pregunta, su respuesta puede ser algo así como: "- ¡Yo sé lo que es, pero no sé explicarlo!"

Ante esta respuesta muchos profesores menos experimentados pensarán que, al no conocer la definición, no estarán en condiciones de responder correctamente a cualquier situación que implique el concepto de función. Por el contrario, los profesores más experimentados saben bien que, aunque sin saber reproducir la definición de forma correcta, muchos alumnos consiguen resolver de forma adecuada los ejercicios, y solucionar problemas que hayan trabajado.

La razón por la cual los alumnos pueden resolver situaciones que se les presentan, aunque no consigan dar la definición del concepto de función, es que poseen una estructura conceptual relativa al concepto de función que no depende de la formulación verbal de la definición. Tall y Vinner (1981) explicaron muy bien lo que se acaba de describir con la introducción de las nociones de *Concept Image* y *Concept Definition*. En general, la imagen que el alumno formó del concepto le es suficiente para abordar determinadas situaciones. Sin embargo, a lo largo de su formación, el alumno será confrontado con alguna situación que le pondrá en conflicto con su imagen del concepto. En ese momento, la imagen que él tiene del concepto necesitará ser reconsiderada para poder abordar de modo coherente la situación que produjo el conflicto. El recurso a la definición es, normalmente, la forma de superar aquél conflicto.

En las últimas décadas, el concepto de función ha sido considerado fundamental en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Fundamentalmente en lo que respecta a las dificultades de adquisición del concepto por parte de los alumnos y a diferentes obstáculos y concepciones alternativas que muestran. Una gran parte de las investigaciones sobre la adquisición de conceptos y evolución de estructuras cognitivas en los alumnos se han basado en este concepto. Un número muy significativo de investigadores ha dedicado su atención y ha publicado profusamente sobre el concepto de función y con aspectos relacionados con él. Por referir tan sólo algunos, podemos considerar los trabajos de Azcárate (1995, 1997), Tall (1981, 1989), Vinner (1991), Demarois (1996, 1999), Sierpinska (1988), Dubinsky (1996, 2001), Sfard (1992) o Gray (1994) cuyas aportaciones sobre construcción de conceptos se basan casi siempre en el concepto de función.

En 1996, Phill DeMarois y David Tall presentaron su visión sobre la forma como los alumnos construyen el concepto de función, así como el modo de describir como ese concepto va siendo comprendido. El modelo presentado se fundamenta en los términos *camadas* y *facetas*. El término *facetas* se destina a describir la dimensión relativa a la *amplitud* del concepto de función, mientras que el término *camada* se destina a describir la dimensión relativa a la *profundidad* con que el concepto es construido por el alumno. Las facetas que son presentadas se dividen en *notación* del concepto de función (incluye el significado de $f(x)$), el uso coloquial de la máquina de funciones como caja de Input-Output, la *simbología* estándar (fórmula algebraica), *numérica* (tablas) y *geométrica* (gráficos) (DeMarois y Tall, 1999).

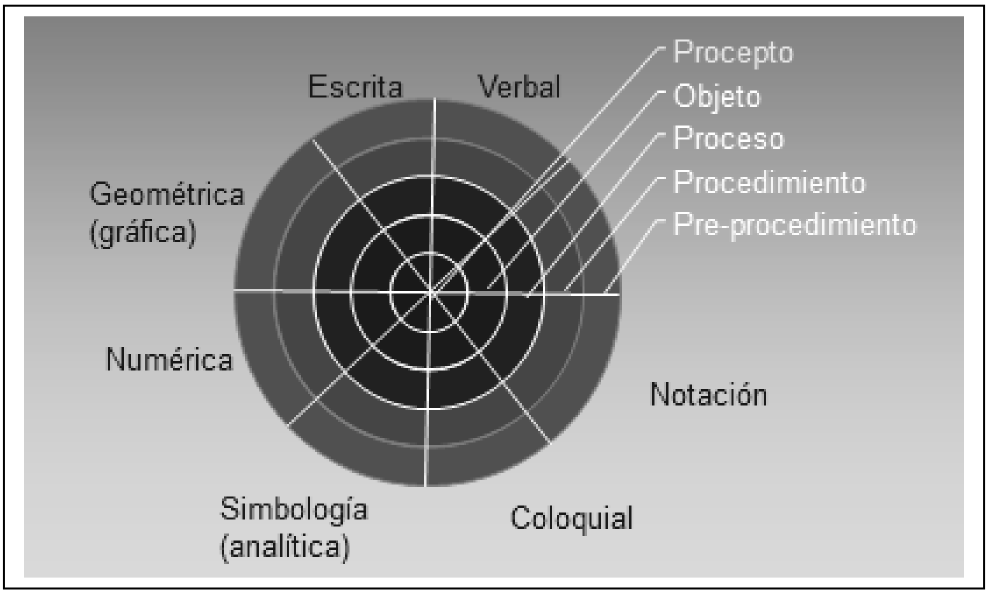


Figura 1: El modelo de Phill DeMarois y David Tall

**La construcción del Concepto de Función**

"*Para un matemático, la noción de función es un modelo sencillo. ¿Qué podría ser más sencillo que la idea de que «tenemos dos conjuntos y cada elemento del primero le corresponde un elemento del segundo? La definición, no es solamente matemáticamente sencilla para un matemático, además permite acceder a un enorme número de ideas complejas en matemáticas.*" (Akkoç y Tall, 2002, p. 25).

Algunos estudiantes pueden implicarse con esta sutil combinación entre lo que es sencillo y lo que es complejo; para otros, sin embargo, la situación es muy diferente (Akkoç y Tall, 2002).

De cualquier modo, para todos ellos, cuando confrontados por primera vez con una definición matemática es prácticamente inevitable que únicamente contacten con una pequeña amplitud de posibilidades que puedan concebir sus imágenes del concepto, de tal suerte que podrá originar futuros conflictos cognitivos (Tall, 1992). Por la misma razón, igual sucede con la definición de función mencionada.

Las dificultades de los alumnos radican, muchas veces, en factores que les son externos. En otras palabras, la deficiente construcción de la imagen del concepto de función en los alumnos y la dificultad con que usan y aplican el concepto, no pueden ser imputados únicamente a sus características propias. Todo el trabajo del alumno con el concepto de función está influenciado por su profesor, por su libro de texto y por los currículos. Otro factor más lejano, pero de notable importancia, tiene que ver con las aportaciones de la investigación sobre el tema y la forma como influye en los factores anteriores.

## II.2. Conocimiento Didáctico del Contenido

En la memoria presentamos una revisión histórica del desarrollo del Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC). Son numerosos los investigadores que profundizaron en este concepto, aunque en nuestro trabajo hemos considerado aquellas aportaciones que por sus características tienen más afinidad con la investigación que se describe en la memoria (Shulman, 1986, 1887; Grossman, 1990; Marcelo, 1993 citado por Bolívar, 2005; Blanco, Mellado e Ruiz, 1995; Ball, 2000; Ball, Bass, Sleep y Thames, 2005; Chick, 2007). De una forma breve, se da cuenta de una tendencia emergente hacia la caracterización del conocimiento del profesor, a través de la aparición de instrumentos con ese propósito específico. También hacemos referencia a un nuevo aspecto del CDC, el Conocimiento Didáctico del Contenido Tecnológico, vinculado con las nuevas tecnologías de la información y de la comunicación, que cada vez más se muestra preponderante en las aulas de Matemáticas.

Para cualquier profesor, la finalidad de su actividad profesional es que sus alumnos aprendan los contenidos programados. Sin embargo, la calidad de los aprendizajes depende, entre otros factores, de quien enseña y de quien aprende. Si bien, en la bibliografía se establecen diferencias entre alumnos más dotados y alumnos con más dificultades, también es cierto que los profesores pueden ser diferenciados por sus capacidades profesionales. A este respecto, son numerosos e importantes los trabajos que señalan la diferencia entre profesores expertos y noveles, y entre profesores con más o menos eficacia. Claramente, estas diferencias entre profesores pueden ser relacionadas con los rendimientos que, en general, obtienen sus alumnos, lo que está fuertemente ligado a su saber profesional. Este saber profesional obliga a "*un conocimiento pedagógico general, relacionado con la enseñanza, con sus principios generales, con el aprendizaje y con los alumnos, así como con el tiempo académico de aprendizaje, el tiempo de espera, la enseñanza en pequeños grupos, la gestión de la clase, etc. Incluye, también, el conocimiento sobre técnicas didácticas, estructura de las clases, planificación de la enseñanza, teorías del desarrollo humano, procesos de planificación curricular, evaluación, cultura social e influencias en el contexto de la enseñanza, historia y filosofía de la educación, aspectos legales de la educación, etc. Además del conocimiento pedagógico, los profesores tienen que poseer un conocimiento sobre los contenidos que enseñan. […] Cuando el formador no domina los conocimientos adecuados acerca de la estructura de la asignatura que enseña, puede presentar los contenidos, a sus alumnos, de forma errónea. El conocimiento que los formadores poseen del contenido a enseñar también influye en el* ***qué*** *y en el* ***cómo*** *enseñan. El Conocimiento Didáctico del Contenido aparece como uno de los elementos centrales del saber del formador. Representa la combinación adecuada entre el conocimiento del contenido a enseñar y el correspondiente conocimiento pedagógico y didáctico necesario para hacerlo"* (Marcelo, 2009, p. 19).

De hecho, el CDC está relacionado con las creencias, actitudes, ánimos y sentimientos de los profesores con respecto a los contenidos que enseñan y cómo estos aspectos influyen en la selección de los contenidos y la forma de enseñarlos, en los temas preferidos y en los temas a que no les gusta enseñar a los profesores, así como en el autoconcepto relativo a las capacidades de enseñar una determinada asignatura (Acevedo, 2009).

La memoria describe algunos modelos y conceptualizaciones que enmarcan, de alguna forma, el conocimiento que los profesores traen al aula para enseñar. De este modo, es más fácil entender con qué tipo de conocimiento estamos tratando cuando analizamos la forma en que la profesora que observamos enseñó el concepto de función a sus alumnos. Estos y otros modelos sirven de marco de referencia para los estudios que nos permitieron obtener resultados sobre el conocimiento profesional del profesor.

Estos resultados son presentados como aportación directa a la formación inicial y permanente de profesores, con el objetivo que en una o en otra se pueda mejorar la labor del profesor en sus quehaceres diarios con sus alumnos.

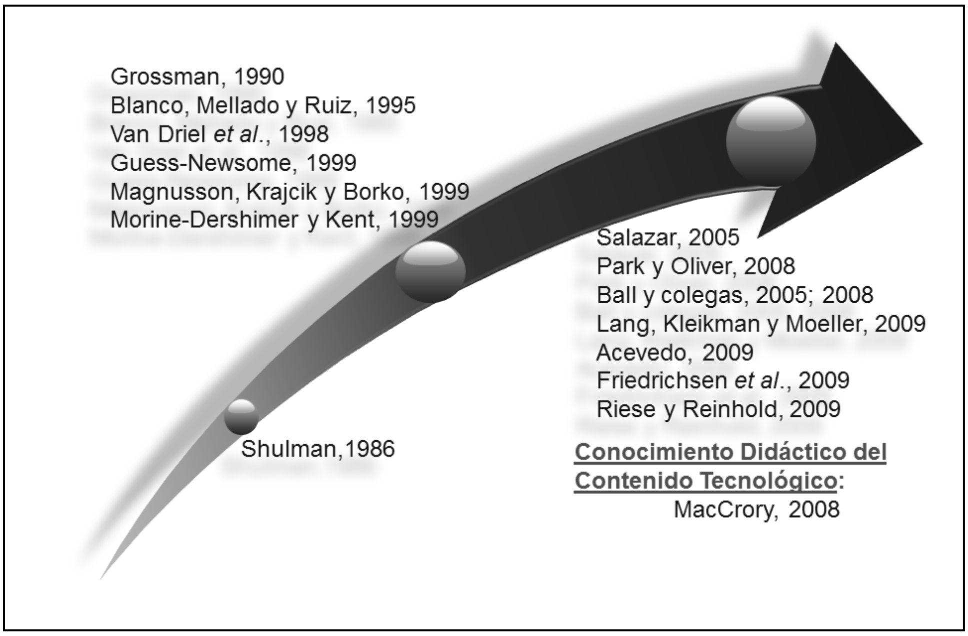


Figura 2: Modelos y conceptualizaciones del CDC

De los modelos de análisis del conocimiento del profesor referidos en el inicio de esta investigación, escogimos aquel que mejor se adaptaba a las características del estudio (Chick y Harris, 2007; Chick, 2007). Este modelo permite entender el Conocimiento Didáctico del Contenido a través de las evidencias que el profesor presenta. El modelo fue fácilmente adaptado debido a la claridad de los autores en su trabajo, por los resultados que produjo y por las características intrínsecas del sistema de categorías. Chick y Harris (2007) y Chick (2007) analizaron el Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC) de profesores con experiencia. Los tópicos matemáticos que estuvieron presentes en el estudio fueron las fracciones y la razón entre dos números naturales (Chick y Harris, 2007) y en las fracciones, las probabilidades y las áreas y perímetros (Chick, 2007). El sistema de categorías adoptado ya había sido utilizado en estudios anteriores, pero sin haber abordado los ejemplos utilizados por profesores en situación de aula. Chich, Baker, Pham y Cheng (2006) analizaron el CDC sobre los números decimales de varios profesores utilizando un cuestionario y, por su parte, Baker y Chick (2006) analizaron en aula el CDC de dos profesores con quince e veinte años de experiencia.

Estos estudios tienen en común el sistema de categorías utilizado, que está dividido en tres grandes áreas: (a) CPC ([1]), incluye aquellos aspectos que más claramente son una mezcla entre contenido y pedagogía; (b) Conocimiento del Contenido en un Contexto Pedagógico, incluye todos los aspectos del aula relacionados directamente con el contenido; (c) Conocimiento Pedagógico en un Contexto de Contenido, incluye todos aquellos aspectos relacionados directamente con la pedagogía (Chick, 2007).

| Categorías del CPC | Evidentes cuando el profesor… |
|---|---|
| **Claramente CPC** | |
| Estrategias de Enseñanza | Discute y usa estrategias o abordajes generales o específicos para enseñar una técnica y un concepto matemático. |
| Pensamiento del Estudiante | Discute y establece con el estudiante modos de pensar acerca de un concepto, o reconoce niveles típicos de comprensión. |
| Pensamiento del Estudiante: Concepciones Alternativas | Discute y se refiere a las concepciones alternativas del estudiante. |
| Exigencias Cognitivas de una Tarea. | Identifica aspectos de una tarea que influyen en su complejidad. |
| Representaciones Detalladas y Apropiadas de los Conceptos | Describe o exhibe formas de modelar o ilustrar los conceptos (puede incluir materiales o diagramas). |
| Explicaciones | Explica un tópico, concepto o procedimiento. |
| Conocimiento de Ejemplos | Usa uno. |
| Conocimiento de Recursos | Discute/usa los recursos disponibles para auxiliar la enseñanza. |
| Conocimiento del Curriculum | Analiza la forma en que los contenidos integran el currículo. |
| Objetivo del Conocimiento del Contenido | Analiza las razones por las cuales un contenido es incluido en el currículo o como puede ser usado. |
| **Conocimiento del Contenido en un Contexto Pedagógico** | |
| Conocimiento Profundo de la Matemática Fundamental | Demuestra un conocimiento conceptual profundo y minucioso de aspectos identificados de las matemáticas. |
| Desmonta el Contenido en Componentes Llave | Identifica los componentes matemáticos críticos de un concepto que son fundamentales para la comprensión y aplicación de ese concepto. |
| Estructura Matemática y Conexiones | Hace conexiones entre conceptos y contenidos, incluyendo interdependencia entre conceptos. |
| Conocimiento Procedimental | Presenta habilidad para resolver problemas matemáticos (la comprensión conceptual no necesita ser evidenciada). |
| Métodos de Solucionar | Presenta un método de solucionar un problema matemático. |

[1] En la tesis siempre se utilizan los términos "Conocimiento Didáctico del Contenido" (CDC). Como hemos utilizado el instrumento de Chick (2007) sin alterar, se indican los términos originales "Conocimiento Pedagógico del Contenido" (CPC).

**Conocimiento Pedagógico en un Contexto de Contenido**

| | |
|---|---|
| Objetivos del Aprendizaje | Describe el objetivo del aprendizaje del alumno. |
| Obtención y Conservación de la Atención del Alumno | Discute y usa estrategias de interacción con los alumnos |
| Técnicas de Sala de Aula | Discute y usa prácticas generales de sala de aula. |

El sistema de categorías descrito permitió a Chick (2007) y a Baker y Chick (2006) obtener resultados a través de cuestionarios y entrevistas, ya que el número de profesores a estudiar era demasiado grande para poder asistir a las clases de todos. Los resultados obtenidos se vinculan con el CDC de los catorce profesores sin que, no obstante, haya habido la intención de medirlo.

## II.3. Utilización de Ejemplos

### El uso de los Ejemplos

En este apartado hacemos una revisión de la literatura existente sobre la selección y el uso de los ejemplos en las aulas de matemáticas. Desde las primeras referencias hasta los últimos trabajos de investigación sobre ejemplificación como campo autónomo de investigación. El último apartado de este capítulo incluye diferentes aspectos de la ejemplificación y casos que la bibliografía ha tipificado y que pueden ayudar al profesor de matemáticas en su quehacer cotidiano.

La utilización de los ejemplos no es una tarea trivial del profesor. No basta presentar ejemplos para que ellos cumplan su función, puesto que son escogidos dentro de un abanico de posibilidades (Watson y Mason, 2005), y los profesores necesitan aceptar que algún ejemplo es "mejor" que otro (Huckstep, Rowland y Thwaites, 2002). Los estudios relacionados con el aprendizaje de conceptos sugieren que los ejemplos y los no ejemplos, cuando son presentados de una forma pensada y ponderada, ayudan a distinguir los aspectos importantes de los menos importantes y a construir imágenes de conceptos variadas y, también, los espacios de ejemplos (Zaslavsky, Harel y Manaster, 2006). No importa si los ejemplos son presentados antes o después de las definiciones, antes o después de la sistematización de los procedimientos, antes o después de las demostraciones formales de los teoremas. Parece importante conocer la función que queremos destinar al ejemplo que se presenta. Si es una particularización de lo que es general; si es la aplicación de un teorema; si es para adquirir agilidad en el cálculo o en el uso de un procedimiento. Y, además, habría que diferenciar sobre quién hace uso del ejemplo, el profesor o el alumno. El profesor para explicar, el alumno para practicar o ambos.

Los ejemplos y sus diferentes contextos han sido objeto de estudio. La ejemplificación consiste en un proceso en que se toma algo específico para que represente lo que es general. Las matemáticas tratan con resultados de naturaleza general, muchos de los cuales clasifican propiedades de sus objetos y de sus estructuras (Sangwin, 2002). Para Watson y Mason (2002a), el término ejemplo es usado para cubrir una extensión amplia de géneros matemáticos, incluidos los ejemplos de clases. Ejemplos que ilustran conceptos, ejercicios resueltos que muestran técnicas, ejemplos de problemas y cuestiones que pueden ser resueltas, ejemplos de objetos apropiados que satisfacen determinadas condiciones, ejemplos de formas de responder a una pregunta, construcción de pruebas, y muchos otros. De un modo general, los ejemplos deben ser vistos dentro de un contexto dado. Watson y Mason (2005) utilizan el término *Ejemplificación* para describir cualquier situación en la cual algo específico se muestra para representar una clase con la cual el alumno debe familiarizarse. Así, un caso particular de una situación general; una cuestión de examen; una particularización de una definición; un objeto específico que contraría una generalización falsa; un procedimiento matemático para ser reproducido por los alumnos. Zaslavsky y Lavie (2005), en un estudio con los objetivos de explorar y caracterizar el uso que los profesores hacen de los ejemplos, definieron el concepto de *Ejemplo Instructivo*. Este término es utilizado para indicar cualquier ejemplo que sea presentado por el profesor dentro de un contexto de enseñanza de un tópico en particular. Los *ejemplos instructivos*, en el aula, son una parte integrante de la enseñanza de las matemáticas que tienen una gran influencia en el aprendizaje de los alumnos. Bills y sus colegas (2006) distinguen ejemplos de concepto de ejemplos de procedimiento. En un estudio sobre el conocimiento base de los profesores, Zaslavsky, Harel y Manaster (2006) utilizan el tratamiento que los profesores hacen de los ejemplos para analizar su práctica docente. En este estudio, los ejemplos son considerados como posibles elementos de un conjunto de herramientas eficaces para que los alumnos desarrollen su pensamiento y su comprensión de las ideas matemáticas. Para Zodik y Zaslavsky (2008) los ejemplos son casos particulares de una clase más amplia, sobre los cuales podemos pensar y generalizar. Zazkis y Leikin (2008) usan el término “ejemplo” para designar una circunstancia, ilustración, caso o elemento de una idea, objeto, proceso o clase matemática. Para Tsamir, Tirosh y Levenson (2008), en el ámbito de los principios generales de la formación de conceptos, los casos particulares de un concepto pueden ser llamados ejemplos.

De todas las definiciones de ejemplo que se presentaron, podemos asumir que un *ejemplo* no es un objeto que exista de forma independiente, y el término *ejemplificación* no transmite cualquier contenido sin que haya una contextualización de lo que se pretende ejemplificar. Además, como fácilmente se constata, *aquello* que se ejemplifica puede surgir de una diversidad de situaciones.

Los ejemplos son un recurso que los profesores utilizan para ayudar a los alumnos a encontrar significado en el aprendizaje de las materias, por lo que tienen un papel central en ese aprendizaje. Pueden incluir ilustraciones de conceptos y de principios, contextos que ilustran y motivan en el aprendizaje de un tópico matemático en particular y una determinada solución cuando varias son posibles (Muir, 2007). Los ejemplos constituyen un esquema comunicativo fundamental para las explicaciones y para el discurso matemático (Leinhardt citado por Bills *et al*., 2006). El arte de explicar para enseñar es una tarea altamente exigente, como describe Leinhardt (citado por Bills *et al*., 2006): "*las explicaciones consisten en los planteamientos de demostraciones, representaciones analógicas y ejemplos. [...] La principal característica de las explicaciones es la de usar ejemplos bien adaptados, ejemplos que establezcan pero limiten las generalizaciones, ejemplos que son equilibrados con otros no ejemplos y contra-ejemplos*". Así pues, el uso de ejemplos para ilustrar y clarificar conceptos matemáticos es parte integrante de una enseñanza eficaz de las matemáticas (Abdul-Rahman, 2006) teniendo un papel preponderante en el aprendizaje. En particular, constituyen la base para las generalizaciones, para las abstracciones y para el raciocinio analógico (Zaslavsky, Harel y Manaster, 2006). Además, al tener un papel central en el desarrollo de la enseñanza de las matemáticas, los ejemplos tienen lugar en muchas teorías del aprendizaje de esta disciplina (Bills y Watson, 2008). En lo que respecta a las abstracciones y al raciocinio analógico, los profesores deben usar varios ejemplos de modo que el alumno perciba el sentido general de lo que está siendo enseñado. De esta manera, es importante que se comparen todos los ejemplos para que se vea lo que entre ellos existe de común, y así se pueda encontrar la generalidad (Watson y Mason, 2002a).

El uso de los ejemplos no se restringe a la actividad lectiva ni a facilitar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. El uso de los ejemplos y su clasificación es también centro de interés en la investigación matemática. De cierta forma, varios investigadores usan ejemplos cuidadosamente seleccionados para analizar los esquemas mentales de los alumnos (Dreyfus y Tsamir, Peled y Awawdy-Shabary, citados en Bills, 2006) y muchos los usan para estudiar el conocimiento y la práctica de los profesores.

La investigación en educación matemática se interesa por el papel de los ejemplos, las selecciones de los mismos incluidas en las programaciones, su relación con el aprendizaje, el papel de los estudios de caso (considerados ejemplos de investigación) y con la construcción de teoría en educación matemática (Bills *et al.,* 2006). La selección de ejemplos, y su secuenciación, es crucial para la actividad lectiva. Los ejemplos pueden ser escogidos porque se presentan en una representación específica y secuenciados desde el fácil al difícil para desencadenar el raciocinio analógico, o del difícil para el fácil para desencadenar un conflicto cognitivo (Tsamir, 2003). En consecuencia, la investigación sobre el aprendizaje de las matemáticas está, también, necesariamente basada en los ejemplos y la selección de los ejemplos puede influenciar los resultados de una investigación. Los investigadores pueden contrapesar esa influencia siendo conscientes de ella, teniéndola en cuenta cuando retiren sus conclusiones y manteniendo investigaciones paralelas usando conjuntos de ejemplos diferentes (Bills *et al.,* 2006).

**Espacios de Ejemplos**

Existe un fenómeno que todos experimentamos todos los días, seamos profesores, alumnos o matemáticos, que es la formación mental de ejemplos de imágenes, de expresiones o de procedimientos, cuando oímos referir (o referimos nosotros mismos) un determinado tópico o concepto matemático. Si el tema referido fuera la función cuadrática, aparecen imágenes mentales de parábolas, o expresiones de funciones como $y = 2x^2 - 10$, eventualmente una expresión más general $f(x) = ax^2 + bx + c$. En menos ocasiones, nos viene a la mente la expresión $f(x) = (x-a)(x-b)$, que no posee la expresión '$x^2$'. A su vez, la expresión $h(x) = \int x dx$ tal vez no le surgiese a mucha gente.

Todos nosotros tenemos, por así decirlo, una "fuente" de donde nos surgen nuestros ejemplos. También sabemos que, para un tema matemático específico, existen ejemplos que surgen espontáneamente, mientras que para otros temas los ejemplos no surgen con tanta facilidad. Por eso podemos decir que existe un espacio mental de donde nos surgen los ejemplos. Este espacio mental comenzó por llamarse *Espacio de Ejemplos*.

La noción de 'espacio de ejemplos' fue transferida para el ámbito de los alumnos por A. Watson y J. Mason tras observar que, frecuentemente, los alumnos tienen una colección muy limitada de ejemplos de algún concepto en concreto; es decir, lo que esta noción encierra es observable en muchas situaciones de enseñanza y aprendizaje: cuando se les pide, sobre un concepto en particular, los alumnos solo pueden presentar unos pocos ejemplos. En términos muy sencillos, la noción de espacio de ejemplos puede ser considerada como: *"... Los ejemplos producidos por los alumnos surgen de un pequeño conjunto de ideas que sencillamente aparecen como respuesta a determinadas tareas en situaciones concretas. Nosotros llamamos a estos conjuntos espacios de ejemplos*" (Watson e Mason, 2005, p. ix). Sin embargo, normalmente, los ejemplos no existen de forma aislada. Previamente, son percibidos como casos particulares de una clase de ejemplos potenciales. Como tales, todos ellos componen un *Espacio de Ejemplos*. Estos dos investigadores (Watson y Mason, 2002a y 2005; Mason y Watson, 2005) promovieron el uso alargado del término *Espacio de Ejemplos* y desarrollaron técnicas para dirigir los alumnos en la toma de consciencia de sus espacios de ejemplos, para que pudieran enriquecerlos, y a los cuales pudieran acceder en un futuro en caso de ser necesario. Según sus observaciones, la experiencia de los alumnos utiliza un espacio de ejemplos al cual acceden como respuesta a situaciones, desafíos y a tendencias matemáticas. Los espacios de ejemplos no son meras listas, ellos tienen idiosincrasias y estructuras internas, y es a través de estas estructuras que se generan los ejemplos. Dentro de los espacios de ejemplos, sus contenidos y estructuras se vinculan al individuo y a la situación y no existen independientemente de ese individuo ni de las tareas que determinan la situación (Watson y Mason, 2005, p. 51). Watson y Mason (2002a) consideran que aprender consiste en aumentar y adaptar, en aquel tema, los espacios personales de ejemplos, por parte de los alumnos. Enseñar implica la presentación, por parte del profesor, de situaciones en las cuales aquello tiene sentido. Para los autores, muchas formas de enseñanza que observaron en otros profesores, o en estudiantes para profesores, podrían ser descritas como oportunidades para que los alumnos pudieran ampliar sus espacios personales de ejemplos. Estos espacios de ejemplos, localizados en el espacio, en el tiempo, en la persona y en las experiencias, proporcionan puntos de partida para la labor de los alumnos. Aún cuando abordan tópicos nuevos, ya existen conexiones con ciertos conocimientos previos que traen a la conciencia imágenes y ejemplos.

En síntesis, enseñar y aprender matemáticas se basa en la creación y ampliación de los espacios personales de ejemplos en los cuales alumnos y profesores trabajan sus estructuras y conexiones. Adquirir competencias matemáticas consiste en desarrollar espacios de ejemplos complejos, interconectados pero, en el fondo, comprensibles para los alumnos. Los espacios de ejemplos, tal y como los hemos descrito, son componentes imprescindibles de la experiencia de los alumnos. Aprender más sobre un determinado tópico consiste en acceder a ejemplos más avanzados, o a construcciones más avanzadas hacia esos ejemplos, así como aumentar el número de conexiones, o sus desencadenantes, que permiten acceder a determinados espacios de ejemplos; enseñar eficazmente incluye el uso de tareas y interacciones a través de las cuales los alumnos mejoran sus accesos a los ejemplos, a métodos de su construcción y, claro está, a los aspectos matemáticamente relevantes de los diferentes ejemplos (Goldenberg y Mason, 2008).

**Secuencias de Ejemplos y Variación**

Muchos de los estudios que tratan el uso de secuencias de ejemplos sugieren que una secuencia específica de ejemplos tiene influencia en el aprendizaje. En particular, se recomienda la combinación de conjuntos de ejemplos, y de no ejemplos, en el seno de las secuencias de ejemplos, para enfocar la atención de los alumnos en los aspectos críticos de los ejemplos que son relevantes (Bills *et al.*, 2006). Y, específicamente, el profesor puede usar una secuencia de ejemplos para ayudar sus alumnos a encontrar un patrón subyacente a un fenómeno matemático (Zaslavsky, Harel y Manaster, 2006).

Existe el argumento de que los ejemplos deben ser presentados de forma gradual, para que los alumnos obtengan algún éxito en ejemplos rutinarios antes de experimentar otros más difíciles (Bills *et al.*, 2006). Así pues, las secuencias de ejercicios cuya vocación es la de mejorar la fluencia de rutinas y procedimientos son, probablemente, estructurados de forma diferente que aquellas destinadas a promover o inducir generalizaciones (Watson y Mason, 2006). Mason (2003), en un trabajo sobre la estructura de la atención, se refiere a los trabajos de F. Marton y colegas sobre la noción de *Variación*. Marton y Booth (1997) dieron inicio a una nueva perspectiva en el contexto de la enseñanza de las matemáticas basada en el principio de que "aprender consiste en hacer nuevas distinciones; simultáneamente, *discernir algo de*, y *relacionarlo con*, un contexto". En otras palabras, aprender a distinguir pormenores que antes no podíamos discernir. Todavía, hacer distinciones, discernir nuevas características es únicamente el inicio. Solo se pueden discernir nuevas características si existe un cambio, y solamente habrá variaciones si existe algo que, en nuestra percepción, se mantenga (relativamente) invariante. Es por esta razón que el tema de la *invariación en el centro del cambio* es tan importante en todas las matemáticas (Mason, 2003; Mason y Johnston-Wilder, 2006; Mason, 2008).

Los trabajos de F. Marton (e.g. Marton y Booth, 1997) se fundamentan en los resultados de una investigación que duró 25 años y que culminó en una teoría general sobre el *Aprendizaje y Conocimiento* llamada Teoría de la Variación. Esta teoría señala que "*Si un aspecto de un fenómeno o evento varia mientras otro u otros se mantienen inalterados, se observará el aspecto cambiante*". La parte del contenido que varia es llamada *Dimensión de la variación*. Para Marton y sus colegas la variación está en el centro de esta teoría pedagógica que se apoya en este aspecto esencial: aquello que puede ser alterado, que puede variar, sin modificar el sentido de invariación o de estructura se llama *Dimensión de variación*. Destaquemos que si solo un aspecto en particular es presentado como una dimensión de variación, y si esa variación es comedida, es posible que esa variación sea mejor notada, pues se evidenciará ante un telón de fondo constituido por todos los otros aspectos que no variaron. Si todo estuviera variando nada podría ser discernido (Watson y Mason, 2006).

### Transparencia de un Ejemplo a una noción matemática

La noción de transparencia está fuertemente relacionada con la representación que se utiliza para un concepto cualquiera. En 1987, Lesh, Behr y Post (citados por Zazkis y Gadowsky, 2001) designaron los sistemas representativos llamándolos: *Opacos* o *Transparentes*. Una *representación transparente* es aquella que no tiene ni más ni menos significado que la idea o estructura que representa. Una *representación opaca* enfatiza unos aspectos de la idea o estructura y atenúa otros.

Asumiendo esta idea, Rina Zazkis y Karen Gadowsky (2001) afirman que todas las representaciones de números naturales son opacas, aunque cada una de ellas tiene aspectos transparentes. Para esclarecer esta afirmación mostramos varias representaciones del número 46.656. Así pues, $216^2$ es transparente a la idea de que 46.656 es un cuadrado perfecto; $36^3$ muestra que 46.656 es un cubo perfecto; 3x15.552 permite concluir que 46656 es un múltiplo de 3 y de 15552; por último, la representación 5x7x31x43+1 nos indica que 466656 cuando dividido por 5, 7, 31 o 43 resta 1. La noción de representación transparente puede extenderse a otros conceptos. Zaslavsky y Lavie (2005) señalan aspectos transparentes de representaciones de funciones. En el caso de las funciones cuadráticas podemos considerar las siguientes representaciones (Zaslavsky y Lavie, 2005):

$$y=(x-1)(x-3) \qquad y=(x-1)^2-4 \qquad y=x^2-2x-3$$

Fácilmente, realizando algunos cálculos, podemos comprobar que son tres ecuaciones de la misma función cuadrática. No obstante, cada una de ellas es más transparente a determinado aspecto y más opaca a otros. Así, la primera ecuación es transparente a las raíces de la función, mientras que la segunda es transparente a las coordenadas del vértice de la parábola que la función define. Y, por último, la tercera es transparente a la intersección de la parábola con el eje vertical.

Para que los alumnos observen esa transparencia se requiere, por parte del profesor, alguna orientación de forma que ellos puedan leer o interpretar las expresiones. Por ello, el papel que los ejemplos juegan en esa orientación es preponderante. Será con ejemplos, o con secuencias de ellos, que los alumnos podrán percibir lo que varia y lo que no varía, orientando su atención hacia los aspectos generales que se pretende alcanzar. Como puede verse, la noción de *transparencia* es bastante versátil en su aplicabilidad. Zazkis y Gadowsky (2001) citan a Mason para recordar que cada representación atrae nuestra atención para diferentes representaciones del número. Además, la atención puede ser atraída para diferentes propiedades del número, del conjunto de números o del concepto matemático en estudio. Se revela especialmente importante que los profesores pongan atención a las estructuras de representación de los conceptos que utilizan, de forma que los alumnos puedan ver en las representaciones que se les presenta aquello que sus profesores quieren mostrar y constaten aquello que es transparente. Por ello, destacamos la sugerencia de R. Zazkis (2005), al señalar que debemos empezar por pedir a nuestros alumnos que *miren* y, después, que *miren otra vez* (la cursiva es nuestra).

En suma, en la enseñanza y el aprendizaje de las ideas matemáticas, objetos matemáticos y procesos matemáticos debemos tener presente que "*capitalizar las potencialidades de una representación dada es una componente importante para la comprensión de las ideas matemáticas*" (Lesh, Behr y Post citados por Zazkis y Gadowsky, 2001). En la actividad del profesor, la transparencia de determinadas representaciones a ciertos aspectos de los conceptos debe ser algo a tenerse en cuenta.

Para Zazkis y Gadowsky (2001) una selección cuidadosa de tareas puede ayudar a los alumnos a identificar aspectos transparentes de las representaciones de los números. Como se ha visto anteriormente, la transparencia y la opacidad de las representaciones puede ser fácilmente transportada de los números hacia el concepto de función.


Figura 3: La Ejemplificación del profesor

**La selección de ejemplos por el profesor**

Usar ejemplos para enseñar a nuestros alumnos es algo que hacemos todos los días sin que eso se revista de una complejidad excesiva. El uso de los ejemplos está tan entrañado en los actuales modelos de enseñanza de las matemáticas que todo aquello que se pueda escribir sobre el uso de los ejemplos puede parecer banal. Sin embargo, en la misma medida que hacer uso de los ejemplos pueda ser trivial y común, escoger ejemplos y secuencias de ejemplos adecuados a nuestros propósitos constituye, desde luego, una ocupación que puede acarrear algunos problemas (Asghari, 2007). Por lo tanto, el uso de ejemplos en las aulas de matemáticas es esencial, aunque puede ser bastante complejo. Es una labor que conlleva una elección de ejemplos muy específicos de acuerdo algunos criterios.  Ello, para facilitar la orientación de los alumnos de modo apropiado, incluso para explicar e inducir generalizaciones (Bills *et al.,* 2006). Ball, Bass & Thames (2005) consideran que la selección de ejemplos es un aspecto importante del conocimiento profesional del profesores. La selección y presentación de ejemplos por parte del profesor, en un objeto matemático concreto, es una tarea intrínsecamente exigente (Zaslavsky y Peled, 1996).

**Tipos de ejemplos presentes en la bibliografía específica**

En la bibliografía manejada aparecen numerosas referencias al uso de ejemplos, a la ejemplificación y a los tipos de ejemplos que los profesores, en su quehacer cotidiano, utilizan para enseñar matemáticas a sus alumnos.

Las primeras referencias al uso de ejemplos realizadas de forma más profundada se dan con la presentación de una categorización creada por Edwina Rissland-Michener (1978). Esta categorización distingue los ejemplos en cuanto a su función en el proceso de enseñanza y aprendizaje. De una forma muy sintética, los ejemplos se dividen en:

*Ejemplos Iniciales:* en una primera aproximación a cualquier teoría existen ejemplos que sobresalen fácil e inmediatamente. Son aquellos que nos permiten iniciar el estudio de un nuevo tema y que se utilizan para las primeras definiciones y resultados dando, así, oportunidad a que surjan las primeras intuiciones útiles.

*Ejemplos de Referencia:* son aquellos ejemplos a los que nos referimos repetidamente. Son básicos y ampliamente aplicables, proporcionando un hito de referencia a partir del cual muchos resultados y conceptos se conectan unos a otros. Se usan también para verificar la comprensión de conceptos, resultados o procedimientos.

*Ejemplos Modelo:* son ejemplos paradigmáticos y genéricos. Sugieren y sistematizan expectativas y asunciones automáticas sobre resultados y conceptos. Son los ejemplos que nos indican los casos generales. Dada su naturaleza genérica, los Ejemplos Modelo están frecuente e íntimamente conectados a los argumentos *sin pérdida de generalidad*.

*Contra-ejemplos:* estos ejemplos son muy familiares a todos por utilizarse para demostrar que un determinado argumento es falso. Se utilizan para revelar mejor las diferencias entre conceptos.

En la conclusión del artículo de Rissland-Michener (1978), una vez más, se constata la presencia de los ejemplos. Cuando se señalan los ingredientes fundamentales para la comprensión del conocimiento matemático se lee, en el segundo párrafo, Estrategia General o control del conocimiento: saber cómo restringir la situación al caso particular de un ejemplo de referencia; en particular, restringir la situación en consideración a un ejemplo de reconocida generalidad, tal y como un ejemplo modelo, analizando la forma como las cosas funcionan, para después poder retroceder; saber como *divertirse* con los ejemplos cuando las ideas no surgen; tentar perturbar afirmaciones y disposiciones (con contra-ejemplos).

Charles (1980), en su estudio sobre la utilización de ejemplos en geometría, empieza por referir algunos estudios en psicología y en educación matemática que afirman la existencia de actos de enseñanza que potencian la adquisición de conceptos matemáticos. Entre estos actos de enseñanza que pueden influenciar el aprendizaje de conceptos, dos vienen siendo objeto de numerosos estudios: los actos de ejemplificación y los actos de caracterización.

- Acto de Ejemplificación: es la presentación de un ejemplo o de un no ejemplo de un concepto. Estos actos tienen el propósito de ilustrar los atributos relevantes y no relevantes de un concepto.
- Acto de Caracterización: es una afirmación sobre un atributo relevante o irrelevante de un concepto. Estos actos tienen el propósito de dirigir la atención para los atributos de un concepto.

Charles (1980), en su estudio persigue tres objetivos:

1. Determinar si los estudiantes para profesores pueden ser entrenados para usar actos de ejemplificación y de caracterización en la enseñanza de conceptos geométricos de simetrías y rotaciones.
2. Determinar si los estudiantes para profesores sujetos a entrenamiento en el uso de actos de ejemplificación y de caracterización consiguen mejores resultados que los profesores que no han recibido este tipo de entrenamiento.
3. Determinar hasta qué punto los actos de ejemplificación y de caracterización desarrollados en clase, así como la claridad de las presentaciones, están relacionados con los resultados de los alumnos.

Afirma este autor que una cuidadosa selección de ejemplos y de series de ejemplos ilustran los atributos de un concepto. No obstante, deja bien claro que si los ejemplos y los no ejemplos fueran simplemente presentados a los alumnos, entonces éstos tendrían que hacer todo el trabajo de inferencia sobre los atributos del concepto. En este punto, el papel de los actos de caracterización puede ser importante, basta que ellos acompañen la presentación de los ejemplos y, de ese modo, facilitar la adquisición del concepto.

La idea de que existe un ejemplo que pueda ser visto como representante general fue bien aceptada por algunos investigadores, que frecuentemente lo han designado por Ejemplo Genérico (Bills, 1996). Mason y Pimm publicaron un artículo (1984) cuya finalidad era de explorar los significados de "genérico" y de "generalidad" y el modo en cómo se encuentran en el lenguaje cotidiano y, también, la forma como estos términos se presentan a los estudiantes de matemáticas. Cuando un profesor ejemplifica en la pizarra una teoría o un procedimiento, ve la generalidad que ese ejemplo incorpora. Es posible, que no piense en indicar el alcance de ese ejemplo, ni resaltar los aspectos que necesitan ser realzados, para significar la potencia de ese ejemplo. Todavía, los alumnos están mucho menos experimentados, y la observación de casos particulares de la situación en estudio (pudiendo no estar conscientes de otros) puede absorber toda su atención. Los alumnos podrían ver únicamente lo que es particular (que para ellos puede ser bastante general; es decir, no trabajado) y, como resultado, intentar aprender solamente el ejemplo que les fue presentado.

Un Ejemplo Genérico es, efectivamente, un ejemplo. Todavía, es aquél que es presentado como el que cumple una función pretendida: que transporte la generalidad.

Este transporte es alcanzado cuando el ejemplo hace sobresalir aquellos aspectos principales e ignora otros, pretendiendo estructurar la percepción de todos esos aspectos principales. Diferentes maneras de entender llevan a diferentes formas de conocer. No es fácil saber si alguien da relevancia o ignora de la misma forma que nosotros.

Los Ejemplos Resueltos vienen siendo usados tradicionalmente en la enseñanza de las matemáticas. El aprendizaje a través de ejercicios resueltos, en un ámbito de educación matemática, tiene su referencia más común en Zhu y Simon (1987). Según estos autores, un ejercicio resuelto consiste en la solución explícita de ejercicios presentada por un profesor o por un libro de texto. Estos ejemplos deben presentar el uso de técnicas específicas que, a su vez, serán imitadas por los alumnos (o con ligeras modificaciones) cuando se enfrenten a ejemplos semejantes. La autoridad que los presenta son los profesores o los manuales y quien aprende de ellos son los alumnos. Las etapas de resolución del ejercicio pueden venir acompañadas de algún comentario por parte del autor del manual o del profesor (Renkl, 2002).

Atkinson, Derry, Renkl y Wortham (2000) se refieren a los ejemplos resueltos como instrumentos que proporcionan una solución, facilitada por un especialista, para que los alumnos los puedan estudiar y aprender con ellos. A partir de la investigación bibliográfica y con la participación de profesores, el estudio tuvo como objetivo encontrar principios que involucran a los profesores en la construcción de buenos ejemplos resueltos. En este articulo (Atkinson, Derry, Renkl y Wortham, 2000) se afirma que los ejemplos resueltos tienen un papel muy importante en los *periodos iniciales* de adquisición de las capacidades cognitivas y se destina a dar fluidez y rapidez en el cálculo y en la resolución de problemas. En una primera fase, los alumnos resuelven los problemas basándose en un raciocinio analógico; en la segunda fase consiguen desarrollar algunas pautas más abstractas y adquieren un lenguaje que los conduce en el proceso de resolución del problema; por último, la resolución de problemas, de ese tipo, se desarrolla sin sobresaltos y de forma rápida. Estas tres etapas explican cómo los alumnos adquieren las destrezas cognitivas propias a la resolución de problemas, y por qué los ejemplos resueltos son fundamentales en el proceso.

Como sabemos, los Contra-Ejemplos tienen una función fundamental en matemática. Por si solos, son ejemplos capaces de refutar una afirmación falsa. En este sentido, en términos lógicos, todos los contra-ejemplos tienen el mismo cometido. Pero lo que es asumible en términos de lógica pura, puede no serlo bajo una perspectiva pedagógica. Ciertos contra-ejemplos son más explícitos que otros a las razones por las cuales refutan la afirmación falsa y, más aún, hay otros que elucidan sobre la afirmación y facultan medios de refutarla (Peled y Zaslavsky, 1997). En el contexto matemático, existe poca diferencia entre un ejemplo y un contra-ejemplo: todo depende de donde está fijada nuestra atención y de qué estemos tratando. De ahí que, un ejemplo de un concepto o de un teorema es un contra-ejemplo de una interpretación inapropiada de la definición del concepto o del teorema; un contra-ejemplo a una interpretación de una definición o de un teorema ilustra su papel o su importancia, pero también puede presentar un ejemplo para una definición que fue alterada o de una afirmación (Goldenberg y Mason, 2008). Además, la eficacia de un ejemplo o de un contraejemplo no depende del propio ejemplo, más bien del contexto donde es utilizado. Es decir, el objeto matemático que es presentado, porque muestra determinadas características y que verifica determinadas condiciones puede ser un contra-ejemplo de una afirmación, exactamente porque no verifica determinadas restricciones o condiciones. Todo ejemplo es contra-ejemplo de *alguna cosa* (Gelbaum y Olmsted, 1964). Así, la función $f(x)=|x|$ es un ejemplo de una función continua en el conjunto de los números reales y es un contra-ejemplo a la afirmación de que todas las funciones continuas en $\mathbb{R}$ también son derivables en todos los puntos de ese conjunto (e.g. Goldenberg y Mason, 2008). El contra-ejemplo debe exhibir un potencial de esclarecimiento que facilite el aprendizaje. Los contra-ejemplos deben poseer dos características, la de presentar de forma esclarecedora la razón por la cual la afirmación es falsa, y aportar algún modo de se ver la forma de encontrar clases de contra-ejemplos adicionales. Es decir, la forma de poder generar otros contra-ejemplos (Peled y Zaslavsky, 1997). Saber generar toda una clase de contra-ejemplos obliga al alumno a entender la generalidad que subyace a la afirmación y a los aspectos que la caracterizan. Otro papel de los contra-ejemplos se sitúa al nivel de la argumentación.

Los contra-ejemplos, atendiendo a su potencial de convencimiento, pueden servir para que los profesores confronten alguna idea matemáticamente incorrecta de los alumnos (Zazkis y Chernoff, 2008). Considerando los errores y falsas concepciones que los alumnos muchas veces muestran, los contra-ejemplos tienen una acción importante en la inducción de conflictos cognitivos (Klymchuk, 2001; Peled y Zaslavsky, 1997; Zaslavsky y Ron, 1998) e, igualmente, en el cambio conceptual. Cuando un contra-ejemplo induce un conflicto cognitivo en un alumno, no siempre promueve la resolución de ese conflicto (Zazkis y Chernoff, 2008). En otras palabras, cuando el alumno es implicado en una situación en que algunas de sus formas de interpretar ideas o tópicos matemáticos son puestas en cuestión, frecuentemente no ve la importancia (o necesidad) de involucrarse en un proceso de permita modificar sus concepciones y resolver la contradicción que esté experimentando (Stylianides y Stylianides, 2008).

Fruto de sus experiencias previas, la existencia de ideas contradictorias puede darse sin que alguna vez se manifieste algún conflicto. Así pues, ideas conflictivas pueden coexistir sin que eso pueda mostrar un conflicto explicito, no obstante existe una situación potencialmente conflictiva. En estas situaciones, la introducción de un contra-ejemplo puede desencadenar el conflicto, confrontando el alumno con la contradicción proveniente de sus experiencias previas. Cuando este hecho ocurre, puede darse el caso de el alumno no perciba la contradicción e incongruencia de sus ideas y tratar el contra-ejemplo como una excepción a aquello en que cree (Zazkis y Chernoff, 2008; Stylianides y Stylianides, 2008), manteniéndose inalterada su concepción. En estos casos son necesarios los contra-ejemplos estratégicos que promuevan un cambio en la concepción del alumno y ayuden a que se produzca un aprendizaje nuevo: estamos ante el uso de Ejemplos Fulcrales.

Se utiliza el término fulcro para indicar un punto de apoyo donde se verifica una rotación. Un ejemplo es fulcral para un alumno si crea un punto de *viraje* en su percepción cognitiva en la forma de abordar la resolución de problemas; estos ejemplos pueden únicamente introducir el conflicto o pueden, además, resolverlo (Zazkis y Chernoff, 2008). El ejemplo que provoca el conflicto se denomina *Ejemplo Fulcral*. Pero si además de provocar el conflicto también ayuda el alumno a resolverlo, entonces toma el nombre de *ejemplo fulcral-puente*, o simplemente Ejemplo Puente (Zazkis y Chernoff, 2008). El ejemplo toma esta designación en el sentido de que hace de puente entre la concepción inicial (ingenua, incorrecta o incompleta) y la nueva concepción matemática, apropiada y correcta. Cabe señalar que mientras el contra-ejemplo es una noción matemática, el ejemplo fulcral es un noción pedagógica.

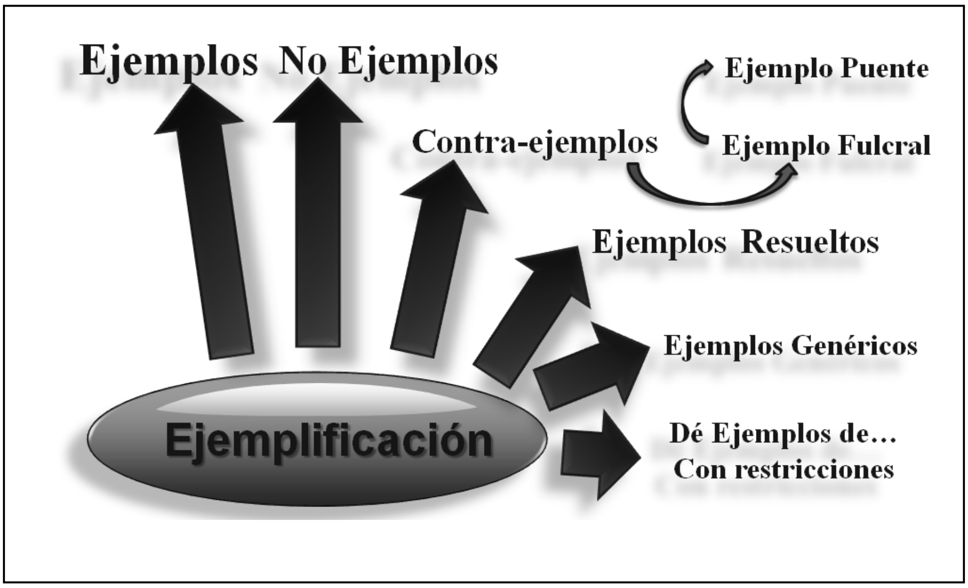


Figura 4: Tipos de Ejemplos

Si proponemos a una clase, donde haya sido enseñado el concepto de función afín $f(x) = ax + b$, la siguiente tarea

| |
|---|
| Verifique si el par $(2,-5)$ es solución de la función $f(x) = -3x - 7$. |

Seguramente, todos los alumnos se dedicarán a cumplir la tarea sin cualquier duda cuanto a su objetivo y, también sin ninguna duda, sabrán cuando dar la tarea por concluida.

Aún más, si la actividad propuesta a esos mismos alumnos fuese

| |
|---|
| Dar ejemplo de una función afín que admita como solución el par $(2,-5)$. |

Tal vez aparezca alguna confusión entre los alumnos. Es probable que algún alumno encuentre esta tarea *extraña*, o piense que el ejercicio está *al revés*. La tarea parece estar al revés de las usuales y más familiares porque normalmente a los alumnos es pedido algo de la misma naturaleza de la primera actividad; en este sentido, los papeles usuales de lo que es *pedido* y de lo que es *dado* están invertidos en la segunda actividad (Hazzan y Zazkis, 1997, 1999). Lo cierto es que este tipo de actividades no son usuales en la práctica del aula, pero hay veces que son presentadas a los estudiantes por sus profesores (Watson y Mason, 2005; Abdul-Rahman, 2006), lo que obliga a que los ejemplos sean presentados por los alumnos. Lo que sí es *normal* es que sea el profesor quien produzca los ejemplos y que sean los alumnos quienes les den sentido, las excepciones a esta regla aparecen en los momentos de motivación o de evaluación (Watson y Mason, 2002b). ¿Será deseable que sean siempre los profesores los que presenten los ejemplos a los alumnos? ¿No será mejor pedirles a los alumnos que produzcan y presenten sus propios ejemplos? ¿Serán ellos capaces de hacerlo? ¿Dada una conjetura falsa, serán los alumnos capaces de presentar contra-ejemplos? (Selden y Selden, 1998).

Seguir los ejemplos de otros y construir nuestros propios ejemplos puede ser comparado a la diferencia entre “conocimiento-oído” y “conocimiento-construido” (Bereiter y Scardamalia, 1987). Si el alumno consigue producir un ejemplo estructuralmente diferente de aquél que se le presentó, muy probablemente, además de la generalización, se producirá una transformación del conocimiento (Watson y Mason, 2002b). Igualmente, la actividad de construcción de ejemplos es un buen instrumento de evaluación de los aprendizajes de los alumnos, en términos de revelación de puntos fuertes y debilidades (Bratina, 1986).

Hazzan y Zazkis (1997, 1999) afirman que este tipo de actividad, “Escriba un ejemplo de…” es más difícil para los alumnos. Señalan que este tipo de actividad es diferente, de las otras que normalmente se les presentan, en tres aspectos:

- Invierte lo que tradicionalmente es presentado y lo que es pedido.
- Este tipo de problema invita a la exploración de las nociones matemáticas.
- Tiene muchas más, a veces infinitas, soluciones.

En el fondo, estos ejemplos son objetos matemáticos creados por alumnos que son elementos de una determinada clase de objetos (Sinclair, Watson y Zazkis, 2004) porque comparten las propiedades expresas en la actividad.

**Relaciones entre la ejemplificación y el conocimiento del profesor**

El conocimiento que el profesor de matemáticas utiliza para enseñar matemática es diferente del conocimiento estrictamente matemático (e.g. Risseland-Michener, 1978; Shulman, 1986). En los trabajos mencionados en casi todos los apartados anteriores se puede apreciar, de algún modo, la relación que siempre existe entre los ejemplos que el profesor escoge para enseñar determinado concepto y el conocimiento matemático que él mismo tiene de ese concepto, así como, del conocimiento de cómo enseñarlo. La manera como el profesor trasmite la información matemática a sus alumnos se fundamenta en gran medida en la ejemplificación que emplea. De cualquier forma, la ejemplificación que el profesor utiliza depende básicamente de su conocimiento como profesor y del grado de refinamiento que consiguió alcanzar en los años de carrera que ha ejercido. Su conocimiento profesional le permite, conscientemente o no, adecuar un ejemplo a una situación, preferir un ejemplo o evitar otro y presentar una secuencia de ejemplos en un orden determinado. La forma como el profesor utiliza los ejemplos es un proceso complejo e implica (por lo menos) diferentes aspectos que describimos en este capítulo. La calidad de la ejemplificación depende de todos ellos.

Parece natural que se consideren las tres vertientes del conocimiento del profesor que están fuertemente relacionadas con la ejemplificación matemática que el profesor proporciona a sus alumnos: el conocimiento del contenido matemático, el conocimiento del alumno y el Conocimiento Didáctico del Contenido (Shulman, 1986). Para Zodik y Zaslavsky (2008), la calidad del conocimiento del contenido matemático afecta a lo que es enseñado y cómo es enseñado. En lo que respecta a la ejemplificación, el aspecto matemático del ejemplo está ligado a la verificación de ciertas condiciones matemáticas que dependen del concepto o del principio que se pretende ilustrar. El conocimiento de los alumnos se relaciona con la comprensión que el profesor tiene de cómo los estudiantes aprenden y de cómo sus conocimientos previos afectan a la construcción de nuevos conocimientos. También se relaciona con la sensibilidad que el profesor tiene sobre las debilidades y sobre las potencialidades en los aprendizajes de sus alumnos y, en lo que se refiere a la ejemplificación, con la consciencia de las consecuencias de las *sub* y *sobre* generalizaciones que los alumnos puedan hacer a partir de los ejemplos presentados. A esto puede añadirse la tendencia que los alumnos puedan tener para fijarse en los aspectos irrelevantes del ejemplo en vez de atender a sus aspectos fundamentales. El Conocimiento Didáctico del Contenido se une con la transformación de la matemática en medios por los cuales el aprendizaje puede ser facilitado; esto incluye "*formas de representación y formulación del asunto que lo torne comprensible para los otros"* (Shulman, 1986).

Obviamente, "*los ejemplos son inseparables de sus representaciones y realmente, ellos existen para ayudar a que la matemática sea comprensible para los alumnos.*" (Zodik y Zaslavsky, 2008, p. 167).

En los primeros años de este siglo se pueden encontrar en la bibliografía algunos estudios e investigaciones sobre las relaciones entre el conocimiento del profesor y su forma de ejemplificar:

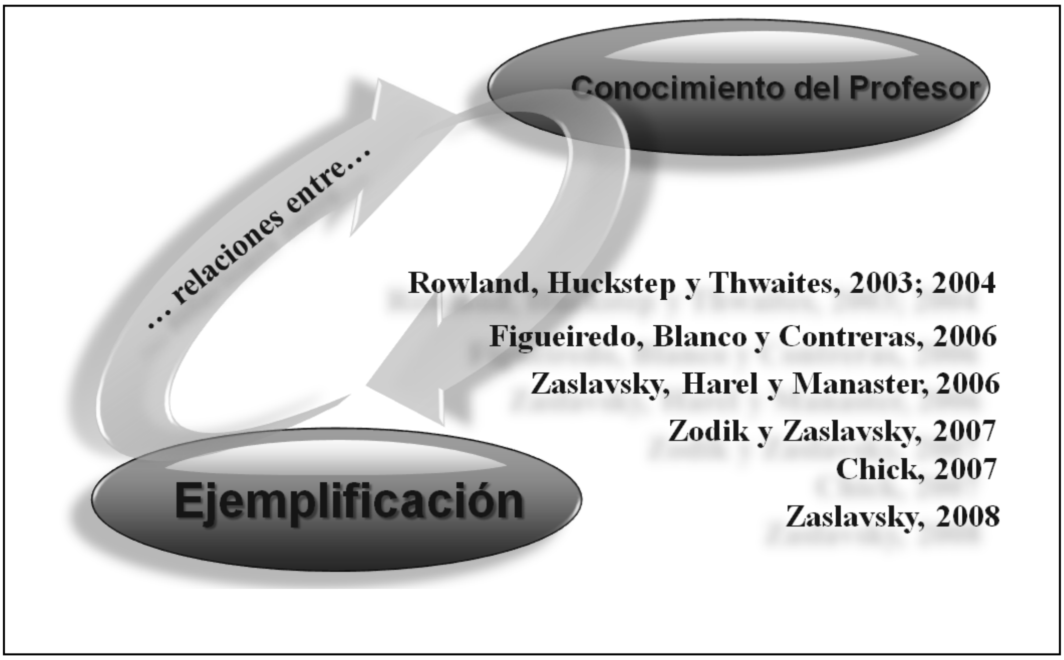


Figura 5: Estudios sobre la Relación entre la Ejemplificación y el Conocimiento del Profesor

En la Figura 5 se indican, por orden cronológico, los pocos estudios que pudimos encontrar sobre la relación entre Ejemplificación y el Conocimiento del Profesor. Lo cierto es que esta línea de investigación todavía se encuentra en una fase de desarrollo inicial y son muy pocos los investigadores que dedican su atención al tema.

# III METODOLOGÍA

El tercer capítulo describe la metodología utilizada en la investigación. También se aclara el significado de los términos utilizados, la obtención de los instrumentos de análisis y la forma de obtener la información. Se define el problema y los objetivos de la investigación, que han servido de guía en todo el trabajo.

## III.1. Interés y objetivos de la investigación

En la investigación se pretende estudiar cómo una profesora selecciona y utiliza los ejemplos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los alumnos con edades comprendidas entre los 15 y los 16 años, fijándonos en los ejemplos empleados por el profesor como puente entre la definición de conceptos relacionados con las funciones y la profundización de los conocimientos de los alumnos en este tema.

Por otro lado, asumiendo que el ejemplo es un instrumento básico del profesor, exploramos este medio de comunicación entre profesor y alumno como forma de ayudar al segundo a generalizar conceptos. Asumimos, asimismo, que los ejemplos permiten al profesor transmitir los conceptos a los alumnos. Anteriormente hemos señalado que, de una manera general, se acepta que los alumnos aprenden más a partir de los ejemplos que con la presentación formal de las definiciones. Además, a través de los ejemplos las definiciones de los conceptos toman forma y adquieren significado (Watson y Mason, 2002a). En realidad, lo que se aprende en una clase de matemáticas son conceptos matemáticos abstractos y generales que el alumno debe saber utilizar. Como se ha dicho antes, para Tall y Vinner (1981), adquirir un concepto significa construir un esquema conceptual de ese mismo concepto y, para explicar ese proceso, introducen dos términos: *definición del concepto* e *imagen del concepto*. De este modo, los ejemplos nos permiten ir construyendo la imagen del concepto (Vinner, 1991) o adquirir el esquema conceptual relacionado con ese concepto (Azcárate, 1995; 1997).

El Conocimiento Didáctico del Contenido que el profesor tiene de los contenidos que enseña influye en la selección de los ejemplos y, por tanto, podemos esperar que observando esa selección que él hace se nos revele alguna evidencia de ese conocimiento (Figueiredo, 2005; Chick, 2007; Chick y Harris, 2007).

Dada la naturaleza de la investigación que nos proponemos, se optó por una metodología cualitativa configurada en un estudio de caso. Teniendo en consideración la posición de autores, como Yin (2003) o Stake (2000), el estudio de caso como forma de investigación es visto como una metodología, o como elección de un objeto de estudio, determinada por el interés en casos individuales. Este tipo de investigación tiene como objetivo analizar un caso bien definido y totalmente delimitado en el tiempo, en el lugar y en el contexto. El estudio de caso llevado a cabo tiene como figura central una profesora que se mostró dispuesta e interesada para ser la informante.

Así pues, por las razones presentadas, por el interés suscitado y con la metodología escogida, este estudio se propone alcanzar los siguientes objetivos:

- Describir la naturaleza de los ejemplos en función de su papel en el aprendizaje del concepto de función.

- Estudiar aspectos del Conocimiento Didáctico del Contenido a través de los ejemplos.

- Evaluar las potencialidades de la ejemplificación del profesor en la caracterización de su conocimiento profesional.

- Obtener un instrumento de análisis de la creación, selección y uso de los ejemplos por el profesor.

- Estructurar un perfil del profesor basado en su ejemplificación.

- Presentar sugerencias concretas para la formación continua de profesores.

## III.2. El diseño de la investigación

La investigación se identifica con el Estudio de Caso, puesto que es una investigación empírica que pretende, por un lado, investigar un fenómeno complejo, actual y de características únicas que se desarrolla en una coyuntura real y, por otro, analizarlo y describirlo en profundidad, en contexto y de una forma holística, sobre la base de los resultados obtenidos.

La profesora que aceptó participar en este estudio imparte clases en la Escola Secundária D. Sancho II de Elvas, en Portugal. Las clases que nos fue permitido asistir y grabar se destinaron a alumnos de 15-16 años y lo hicimos siempre con el mismo grupo de alumnos, por eso hemos pedido autorización a sus padres para que pudiéramos grabar sus eventuales intervenciones. Todos los padres respondieron afirmativamente. Los nombres de los alumnos que figuran en las transcripciones no corresponden a sus verdaderos nombres. Al contrario, la profesora prefirió ser designada por su verdadero nombre, lo que denota su total implicación en el trabajo que se efectuó.

La recogida de la información fue hecha en el contexto escolar, que, en el ámbito del conocimiento del profesor, implicó que tuviéramos que desplazarnos a la sala de aula de la profesora Esmeralda (Yin, 2003).

El diseño de la investigación es descrito por el siguiente esquema

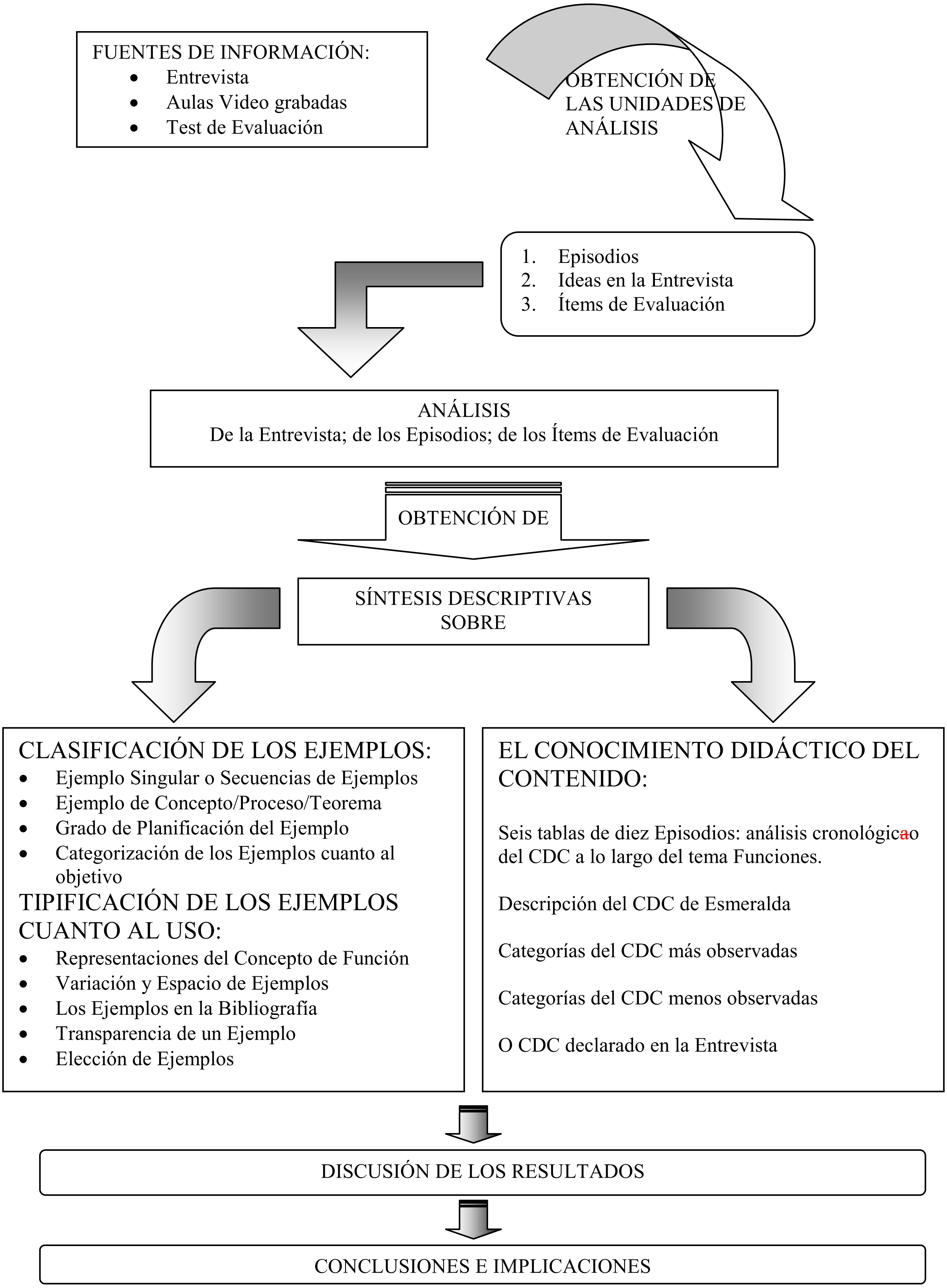


Figura 6: Diseño de la Investigación

## III.3. Definición de Ejemplo en la investigación

Lo que determina que un elemento de una colección sea utilizado como ejemplo no son las características que ese elemento posee, sino las características que en determinado momento son evidenciadas.

- En el caso de los ***conceptos*** o de las ***definiciones***, hay objetos de la Geometría que en una situación dada pueden ser utilizados por, entre otras características, ser cuadriláteros. Pero, bajo otras condiciones, esos mismos objetos pueden ser invocados por evidenciar características propias de cuadrados o rectángulos. La ejemplificación no es, por lo tanto, la creación de objetos sino la indicación de objetos que evidencian determinadas características.

Una definición genera ejemplos o, si queremos, colecciones de ellos. En otro sentido, de una colección de definiciones podemos escoger una de ellas como ejemplo. Supongamos que queremos explicar lo que es un cuantificador universal; debemos utilizar una definición que evidencie el papel de este cuantificador de manera que el alumno entienda lo que es y para lo que sirve. En este caso, la propia definición constituye un ejemplo.

- En el caso de los ***algoritmos*** y de los ***procesos*** (incluye procedimientos y métodos), podemos escoger un caso para realzar determinado aspecto o eventualmente usarlo para ilustrar un tipo de cálculo. O, entonces, de una colección de ejercicios podemos escoger uno para mostrar la utilización de un algoritmo/proceso que se aplica y que queremos enseñar.

- En el caso de los ***teoremas***, podemos escoger situaciones o figuras geométricas que sean adecuados a la utilización de determinado teorema.

En este estudio se entiende *Ejemplo* como:

| |
|---|
| Un elemento de una colección de objetos (entes) que es utilizado en una determinada situación de enseñanza/aprendizaje porque evidencia determinada, o determinadas, características. |

## III.4. Recogida de la información

La información recogida tuvo origen en tres fuentes: las grabaciones en video de doce aulas sobre el tema funciones, una entrevista y todas las cuestiones de los tests de evaluación relativos al tema de las funciones.

Para explorar las concepciones de la profesora Esmeralda sobre su forma de enseñar las funciones y, simultáneamente, su intuición sobre la selección y el uso de ejemplos que se integrasen en situaciones tipificadas descritas en la bibliografía sobre ejemplificación, propusimos algunas cuestiones bajo la forma de una entrevista semiestructurada. La entrevista es una de las formas más utilizadas para recoger datos en las investigaciones de carácter etnográfico o interpretativo, cuando se pretende conocer mejor el pensamiento del informante (Mellado, 1994).

Al contrario de la observación en tiempo real, que requiere que se sea consciente de numerosos aspectos didácticos y simultáneamente registrarlos, analizar un video proporciona la posibilidad de estrechar la atención a determinados aspectos, actividades o alumnos (Nicol y Crespo, 2004), además de poderse ver las veces que se estime necesarias. Estas dos ventajas son convenientes cuando se pretende entender y relacionar la clase con las planificaciones de aula y de unidad (Climent y Carrillo, 2007). Por eso, todas las clases fueron grabadas en audio y vídeo y digitalizadas posteriormente.

La evaluación de los aprendizajes es un aspecto muy importante en la labor de cualquier profesor. En el caso de la matemática, la evaluación de los aprendizajes puede conseguirse utilizando situaciones próximas a aquellas que fueron trabajadas en clase. Así pues, tiene sentido que se aborde, aunque superficialmente, los ejemplos que Esmeralda planteó a sus alumnos en los tests de evaluación.

## III.5. Definición de episodio en la investigación

Para poder analizar la forma como la profesora Esmeralda utiliza los ejemplos en su clase fue necesario observar cada ejemplo individualmente. Solamente de este modo pudimos identificar la manera en que utilizó cada ejemplo y con qué objetivo. Para el análisis hemos aislado cada uno de los ejemplos que registramos en video, para observar el uso que la profesora dio al ejemplo, para observar cómo los alumnos trataron el ejemplo presentado por la profesora y para poder analizar cómo entre todos lo exploraron.

De esta forma, las clases de Esmeralda fueron seccionadas en segmentos temporales. Cada segmento incluyó todo el tratamiento de un ejemplo, independientemente de que fuera tratado por la profesora, por los alumnos o por todos conjuntamente. Consecuentemente, podemos establecer que cada segmento temporal fue determinado para cada uno de los ejemplos propuestos por Esmeralda. Cuando fueron tratados por los alumnos varios ejemplos semejantes, de la misma naturaleza y con el mismo objetivo, entonces el segmento temporal incluyó una secuencia de ejemplos.

Por *Episodio*, consideramos:

| |
|---|
| La parte del desarrollo de la lección de Esmeralda en que ella o sus alumnos hayan tratado un ejemplo o una secuencia de ellos, teniendo esta parte del aula un inicio, un fin y un propósito bien definidos. |

## III.6. Los instrumentos de análisis

Concluida la recolección de la información, el paso siguiente es el análisis de todo el material. Para eso, se tornó inevitable la utilización de instrumentos que se adaptaran a la información acumulada y que permitieran obtener resultados conducentes a los objetivos de la investigación. Tales instrumentos han surgido de otros ya existentes a los que les han sido adaptados algunas características y elementos que los habilitaran para las funciones requeridas:

- Clasificar los ejemplos en relación con el objetivo
- Describir el Conocimiento Didáctico del Contenido de la profesora Esmeralda

El sistema de categorías fue adaptado a partir del trabajo de Figueiredo (2005). En esta investigación se analizó el conocimiento que cuatro estudiantes para profesores, mientras enseñaron el concepto de función, observándose el conocimiento que tenían sobre cómo enseñar el concepto de función al final de la formación universitaria.

El conocimiento del profesor es complejo y con múltiples facetas (Chick, Baker, Pham y Cheng, 2007). El conocimiento que más se evidencia cuando un profesor enseña sus alumnos es, como se vio en el cuadro teórico, el Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC) y es ahí donde están incluidos aspectos importantes como el conocimiento de formas de enseñar completas y profundas, la habilidad para seleccionar representaciones adecuadas que transmiten ideas clave y, también, una consciencia de la razón de por qué es probable que surjan algunas confusiones y falsas concepciones (Leinhardt, Putnan, Stein y Baxter, 1991). Sobre la base de la bibliografía se puede argumentar que el CDC influencia la elección de ejemplos, así pues, podemos esperar que la selección pueda proporcionar evidencias sobre el CDC (Chick y Harris, 2007). Sobre la base de afirmaciones como la anterior Chick, Baker, Pham y Cheng (2006) y Chick (2007) desarrollaron un instrumento que permite enmarcar y explicitar elementos del CDC. Según sus creadores, no se puede sugerir que este instrumento esté completo y totalmente validado. No obstante podemos encontrar buenas razones para usarlo: testarlo en situación de clase, de entrevista y con tópicos matemáticos diferentes de los utilizados por los autores, tal y como ellos mismos lo sugieren.

El instrumento se adapta muy bien a las condiciones de esta investigación, es perfectamente ajustable a la situación de ejemplificación. Es decir, tiene muy buenas potencialidades para estudiar el CDC de un profesor aplicándolo al uso de ejemplos que él haya seleccionado.

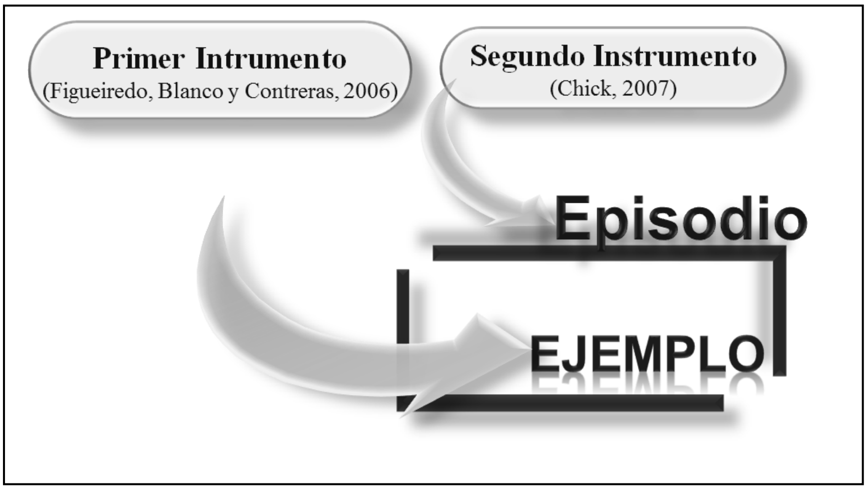


Figura 7: Aplicación del Primer y Segundo Instrumentos

## III.7. La aplicación de los instrumentos de análisis y de las situaciones tipificadas en la bibliografía

Con los dos instrumentos de análisis y con las diferentes situaciones de uso de ejemplos que presentamos pudimos analizar los 60 episodios identificados, la entrevista que se transcribió y las cuestiones incluidas en los tests que la profesora presentó a sus alumnos.

La aplicación de los instrumentos se efectuó a cada uno de los 60 episodios. En la investigación, la clasificación del ejemplo, la caracterización del CDC de Esmeralda y la forma en que los ejemplos se utilizaron están íntimamente ligadas a la ejemplificación del concepto de función. En otras palabras, de cada episodio se pueden extraer informaciones sobre tres vertientes de la ejemplificación del concepto de función de la profesora:

- La clasificación del ejemplo en relación con el objetivo con que se usa (primer instrumento)

- Aspectos del CDC (segundo instrumento)

- Uso de las particularidades del ejemplo (casos tipificados en la bibliografía, Cf. II. 3.)

A la entrevista de la profesora Esmeralda se aplicó únicamente el instrumento que permite identificar elementos del CDC (Chick, 2007). Como es obvio, el instrumento que clasifica los ejemplos en relación con el objetivo con que se usa no se aplicó por no haberse pedido a Esmeralda, en el transcurso de la entrevista, que presentara cualquier ejemplo. Con esta aplicación se identificaron las concepciones de Esmeralda sobre lo que ella considera ser la ejemplificación del concepto de función, sus objetivos y como debe ser implementada en clase.

La presentación de situaciones matemáticas en tests de evaluación no es considerada, en general, una forma de ejemplificar. Todavía, muchas de las situaciones que se les presentan a los alumnos en las clases son en todo idénticas a aquellas que, más tarde, se les presentarán en los tests. En este sentido, se trataron las cuestiones presentadas a los alumnos en su evaluación como ejemplos que se enmarcan en la definición que hemos presentado arriba, contrastando después las cuestiones de los tests y los ejemplos utilizados en clase. A través de la confrontación de situaciones distintas, los ejemplos presentados en clase y las cuestiones de los tests, se han procurado puntos de acuerdo entre ejemplos de concepto y casos cognitivamente exigentes.

# IV. ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN RECOGIDA

El cuarto capítulo reproduce las transcripciones de los episodios. Cada una de las sesiones que se grabó ha sido dividida en episodios, en un total de 60, y se hacen los respectivos análisis, episodio por episodio, a luz de los instrumentos creados.

El primer instrumento distingue los ejemplos observados a través de un sistema de cinco categorías que los clasifica en relación con el objetivo con que son propuestos. Al mismo tiempo, diferenciamos los ejemplos según su naturaleza: ejemplos de concepto, de procedimiento o de teorema, y también si son programados, modificados o espontáneos. Este instrumento de análisis permite conocer la manera en que la profesora elige y usa los ejemplos para enseñar matemáticas a sus alumnos.

El segundo instrumento de análisis, a su vez, permite comprender el Conocimiento Didáctico del Contenido de la profesora observada. Este conocimiento se aborda a partir de tres subcategorías. La primera, incluye los aspectos claramente relacionados con aspectos del CDC. La segunda vinculada a aspectos del conocimiento del contenido en un contexto pedagógico y, la tercera categoría, relacionada con aspectos con el conocimiento pedagógico en un contexto de contenido. El trabajo que la profesora desarrolla con los alumnos mediante el uso de ejemplos es el espejo del conocimiento que emplea en su labor y este instrumento proporciona unas lentes adecuadas a la visión de ese reflejo.

# V. PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS

El quinto capítulo presenta los resultados obtenidos con la aplicación de los dos instrumentos y del análisis a luz de los casos tipificados en la bibliografía de toda la información contenida en los episodios. Estos resultados son mostrados mediante las dos vertientes indicadas en el cuadro teórico: la forma en que la profesora ejemplifica y el Conocimiento Didáctico del Contenido que ella movilizó cuando utilizó los ejemplos con los alumnos. Así pues, este capítulo presenta un perfil de Esmeralda que se divide en dos caras que se complementan para construir una imagen que integra, simultáneamente, la elección y el uso de ejemplos con su Conocimiento Didáctico involucrado.

## V.1. La Ejemplificación del Concepto de Función y el Conocimiento Didáctico del Contenido

Queremos destacar el hecho de que fácilmente pudimos *encajar* el uso que Esmeralda dio a los ejemplos con los casos descritos en la bibliografía, así como el uso que hizo de los ejemplos en el ámbito de la bibliografía relativa al concepto de función. Cabe aclarar que, en este ámbito, utilizamos menos referencias a la adquisición y profundización en el concepto de función por el alumno, dado que los objetivos de la investigación están más ligados al papel de la profesora que al aprendizaje de los alumnos.

Por ello, dedicamos nuestra atención al modo en que Esmeralda eligió los ejemplos que es un campo donde la bibliografía no está dedicada solamente al concepto de función, y es bastante más genérica. Sin embargo, los puntos donde hay contacto entre la práctica de Esmeralda y los casos descritos en la bibliografía dedicada a la ejemplificación fueron constantes y no existió ningún episodio que no pudiese ser encuadrado en este marco.

Al contrario de lo que ocurrió en lo relativo al sistema de categorías para la clasificación de los ejemplos, en relación al objetivo con que los usa Esmeralda para enseñar el concepto de función, el sistema de categorías que permite examinar el Conocimiento Didáctico del Contenido de Esmeralda, mientras enseñó los contenidos relativos aquél concepto, no sufrió ninguna alteración. Por eso, decidimos utilizar el sistema de categorías que Chick (2007) propone, sin encontrar razones para su modificación o adaptación a nuestra investigación. Tal y como se describe en el capí~~i~~tulo relativo a la metodología de esta investigación, este sistema de categorías no fue aplicado por sus autores a ningún profesor que enseñase el concepto de función. Aún así, la especificidad del tema que Esmeralda enseñó no obstaculizó la aplicación del instrumento. Es más, una de las buenas características del instrumento es la capacidad de adaptarse a la enseñanza del concepto de función y a las diversas formas de representarlo, a través de los ejemplos que la profesora propone a sus alumnos en situación de clase.

No obstante, es cierto que observamos una pequeña carencia en lo que se refiere a la categorización del Conocimiento del Contenido en un Contexto Pedagógico y, también, en el Conocimiento Pedagógico en un Contexto de Contenido. Axial pues, echamos en falta una categoría donde pudiésemos incluir todos los elementos del conocimiento del contenido de Esmeralda que se relacionan con el rigor del lenguaje y con el rigor en el uso de la notación. Por otro lado, también nos quedamos con la sensación de que la forma en que Esmeralda controla la eficacia de su enseñanza y su evaluación, en tiempo real, de los aprendizajes de los alumnos no quedó totalmente enmarcada.

# VI. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

El sexto capítulo contiene la discusión de los resultados en el ámbito de la fundamentación teórica. En él se contrastan los resultados obtenidos en la investigación y los casos presentados en la bibliografía compilada. También en este sexto capítulo mostramos algunos resultados de esta investigación que no encuentran semejanzas en la bibliografía. Son aspectos del conocimiento de la profesora Esmeralda e, incluso, de su forma de elegir, crear y usar los ejemplos. Junto con estos resultados originales se concibió un instrumento capaz de describir globalmente el conocimiento específico empleado en la ejemplificación de un profesor, ya que integra lo que de crítico se pudo encontrar en la bibliografía específica.

## VI.1. Discusión del Conocimiento Didáctico del Contenido de Esmeralda

La aplicación del instrumento de análisis, relativo al Conocimiento Didáctico del Contenido (Chick, 2007), a la forma de enseñar el concepto de función de Esmeralda permitió encontrar dos lagunas en el sistema de categorías que lo compone.

La primera es la ausencia de una categoría que permita encuadrar las evidencias del conocimiento de la profesora que se relacionan con el rigor del lenguaje y de la notación. Es una característica que debería ser bastante cuidada, principalmente en profesores de ciencias, y que consideramos es poco tenida en cuenta por muchos profesores. No fue el caso de Esmeralda. Para salvar esta ausencia, el sistema de categorías debe incluir una más que figuraría en el área del Conocimiento del Contenido en un Contexto Pedagógico, obviamente porque el conocimiento de la notación y del lenguaje es específico del conocimiento de la materia disciplinar y, como se desarrolla en el aula, se incluye en un contexto pedagógico.

La otra categoría que echamos en falta se refiere a la forma en que la profesora controla la evolución del proceso de aprendizaje. Todos los profesores, de alguna manera, controlan la evolución del proceso de aprendizaje de los alumnos en relación a los contenidos programados para la clase que estén aleccionando. En otras palabras, los profesores poseen mecanismos que les permiten evaluar si los alumnos están o no acompañando, entendiendo y progresando en los trabajos específicos del aula. Otras veces, verifican si los aprendizajes previos de un día anterior pueden ser convenientemente aplicados por los alumnos en situaciones específicas del aula. Esta preocupación que la profesora Esmeralda tiene en verificar cómo sus alumnos siguen sus explicaciones o el desarrollo de las tareas es, en nuestra opinión, un rasgo de su conocimiento didáctico que, por ser aplicado a contenidos tocantes al tema de las funciones, deberá figurar en una categoría propia del área Conocimiento Pedagógico en un Contexto de Contenido.

De acuerdo a Davis y Krajcik (2005), citado en Friedrichsen y colegas (2009), Esmeralda presenta características de CDC que son específicas de las disciplinas de ciencias: el uso de la máquina de calcular. Estas características no están específicamente contempladas en Chick (2007). Es solamente en una categoría, Conocimiento de Recursos, donde están incluidas las capacidades de usar la calculadora, lo que es bastante ambiguo. Muchas veces el conocimiento de los contenidos y de pedagogía general es visto como conocimiento separado del conocimiento tecnológico, lo que puede ser perjudicial para la enseñanza de las ciencias. Por ello, el conocimiento de la tecnología debe asociarse a los otros dos conocimientos de forma que se establezca un conocimiento común a los tres conocimientos (Unwin, 2007; Mishra y Koehler, 2006). Ese conocimiento debe ser evidenciado por los profesores de ciencias y, en particular, por los de matemáticas. El conocimiento que incluye los tres conocimientos fue designado por Mishra y Koehler (2006) como Conocimiento Didáctico del Contenido Tecnológico y constituye una pequeña parte del CDC. Todavía es un conocimiento muy especial porque involucra el conocimiento de la tecnología digital (McCrory, 2008).

Hoy día, independientemente de la tecnología usada o de los tópicos que se enseñen, el objetivo puede ser el de proveer a los profesores de conocimiento, técnicas y aptitudes para experimentar nuevas tecnologías y que aprendan con sus propias experiencias, para anticipar los problemas que puedan surgir y para que persistan en el uso de las tecnologías, de modo a que estén aptos a apoyar los aprendizajes de los alumnos (McCrory, 2008). Al final, el concepto de CDC-Tecnológico puede ser usado para diseñar estrategias pedagógicas y unas lentes analíticas para estudiar los cambios en los conocimientos de los profesores sobre una enseñanza efectiva basada en la tecnología (Mishra y Koehler, 2006).

## VI.2. Discusión sobre el uso de los ejemplos por Esmeralda

**Variación y Transparencia. Transparencia Inmediata y Transparencia Mediata**

La forma en que Esmeralda utilizó los ejemplos, especialmente en lo que concierne a la transparencia y a la variación, permitió distinguir dos formas de transparencia. A una de ellas le llamamos Transparencia Inmediata y a la otra Transparencia Mediata.

La Transparencia Inmediata es una característica de una representación que permite obtener de forma directa algunos aspectos propios de un concepto.

La Transparencia Mediata es una característica de la representación que permite encontrar aspectos de un concepto dado de forma indirecta.

Tomemos como ejemplo la ecuación $f(x) = 2(x-1)^2 - 3$. Esta representación de la función cuadrática es *Inmediatamente Transparente* a las coordenadas del vértice $V(1;-3)$ y al sentido de la concavidad de la parábola, que es virada hacia arriba. Por otro lado, esta misma representación es *Mediatamente Transparente* al género de extremo que la función cuadrática posee, un mínimo, y que tiene dos raíces reales (dado que tiene el extremo negativo y el sentido de la concavidad virado hacia arriba) y el primer intervalo de monotonía es decreciente y el segundo intervalo de monotonía es creciente.

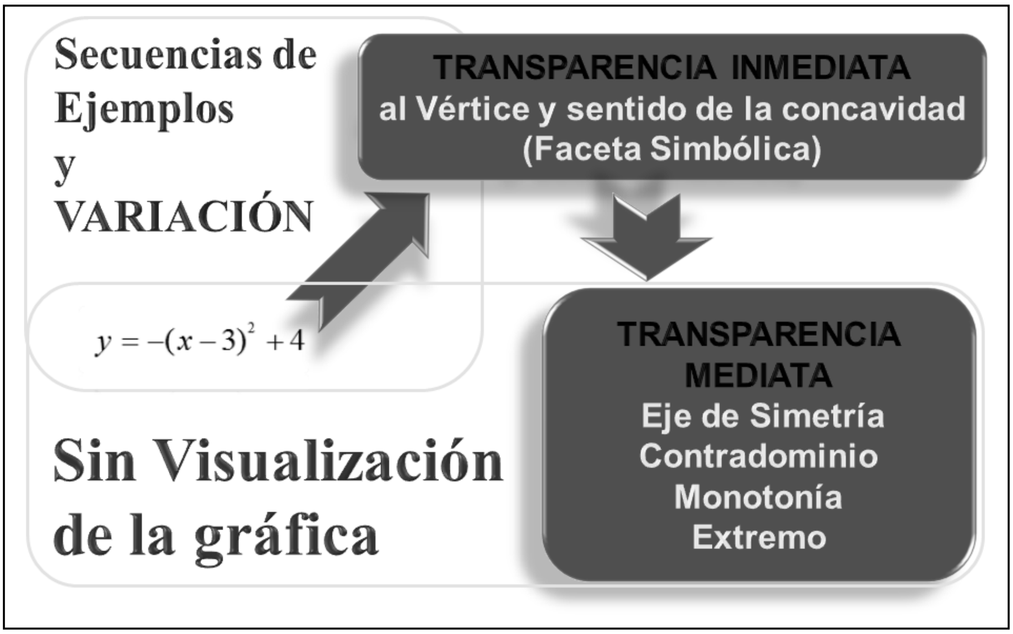


Figura 8: La Transparencia Inmediata y la Transparencia Mediata

**La Ejemplificación de Conceptos y la construcción de la Imagen del Concepto**

El análisis de los episodios y de los ejemplos utilizados por Esmeralda evidencia aspectos sobre su forma de explicar y, por otro lado, deja ver las implicaciones que esa ejemplificación tiene en la adquisición y estructuración del concepto de función por parte de sus alumnos. Obviamente, Esmeralda ejemplifica con el objetivo de que sus estudiantes aprendan. Podemos decir que la forma en que Esmeralda utilizó los ejemplos, la labor que ella y sus alumnos hicieron con los ejemplos que incluimos en las categorías, bien como todo el conocimiento que empleó, se centró y se destinó a que cada uno de sus alumnos desarrollara, estructurara y profundizara el concepto de función.

Si analizamos el aprendizaje de este concepto desde la perspectiva de la Ejemplificación, podríamos afirmar que los alumnos aprenden si amplían sus *Espacios de Ejemplos* en relación al concepto de función (Watson y Mason, 2002a; Mason y Watson, 2005). Por otra parte, si analizamos el aprendizaje desde la perspectiva de la construcción del concepto de función, podríamos decir que los alumnos aprenden si construyen su Imagen del Concepto bien articulada con la Definición del Concepto (Tall y Vinner, 1981). Contrastando, de un lado tenemos que el *Espacio de Ejemplos* es un conjunto de ejemplos que un alumno construye y al cual accede para superar una situación y, del otro, que la *Imagen del Concepto* es una estructura cognitiva que el alumno utiliza para trabajar una situación. Aún así, percibimos que ambos modelos cumplen su objetivo.

El análisis de la ejemplificación de Esmeralda evidenció que estas dos perspectivas pueden ser coincidentes en unas situaciones y complementarias en otras. Mayoritariamente optamos por indicar el objetivo de la profesora orientado a la ampliación de los espacios de ejemplos de los alumnos y menos veces hacia la construcción de la imagen del concepto. Esta opción fue intencionada. Nuestra investigación está orientada a la ejemplificación que una profesora pone en juego para enseñar a sus alumnos y, en el ámbito de la ejemplificación, cabe mejor la perspectiva de Mason y Watson (2005) que la de Tall y Vinner (1981) que está más orientada al ámbito de la adquisición conceptual.

No obstante, las citas de los trabajos de Tall y Vinner (1981) y de Vinner (1983) en la bibliografía referida al uso, tratamiento y naturaleza de los ejemplos son constantes. Cuando se habla de aprender conceptos a través de la ejemplificación es común que los términos *Imagen del Concepto* y *Definición del Concepto* sean utilizados como forma de explicar la construcción cognitiva y profundización en el concepto que se verifica en los estudiantes por la acción de la enseñanza.

Dadas las semejanzas que encontramos en nuestro trabajo entre ampliación de los espacios de ejemplos y su papel en el aprendizaje de los conceptos y la construcción de la imagen del concepto y su papel en la construcción de estructuras cognitivas, en el análisis de los episodios, entendemos que tal hecho era demasiado importante para que no fuera tenido en cuenta en la discusión sobre ejemplificación de Esmeralda. La duplicidad encontrada, la posibilidad de explicar su labor con sus alumnos recurriendo a los ejemplos, tanto por la ampliación de los espacios de ejemplos como por la construcción y profundización de estructuras cognitivas, nos llevó a pensar que las dos teorías tenían un alto grado de equivalencia y, cuando no, de complementariedad.

## VI.3. Cómo explicar el contenido: un Conocimiento del Profesor

Este apartado debe verse como una síntesis de lo que es el conocimiento de un profesor en lo que concierne a la ejemplificación, aquello que un profesor utiliza para crear, elegir y tratar los ejemplos que presenta a los alumnos. Si consideramos esta síntesis de forma aislada, podría constituir una forma de enmarcar y categorizar este conocimiento del profesor.

Toda la información que fue recogida de la bibliografía puede ser condensada en un cuadro. Atiéndase que las categorías no son mutuamente excluyentes, cuando se presenta un ejemplo, este puede ser incluido en una o, simultáneamente, en más que una categoría.

| **Aspectos del Conocimiento Sobre Ejemplificación** | **Evidente cuando el profesor…** |
|---|---|
| ***Introducción del Contenido Matemático*** | |
| Inducción | Presenta a los alumnos los ejemplos antes de generalizar para la definición del concepto. |
| Deducción | Presenta los ejemplos a los alumnos después de la definición del concepto. |
| No-ejemplo | Usa no-ejemplos para que los alumnos puedan establecer los límites del concepto. |
| Ejercicio resuelto | Presenta los varios pasos de un procedimiento para que sean posteriormente repetidos por los alumnos. |
| ***Variación*** | |
| Dimensiones de la Variación Posible | Presenta secuencias de ejemplos donde se distinguen las Dimensiones de Variación Posibles. |
| Amplitud de Cambio Permitida | Explora, dentro de cada Dimensión, el cambio en la Amplitud que es permitida. |
| ***Espacio de Ejemplos*** | |
| Ejemplo Conceptual | Propone ejemplos de un concepto anteriormente definido pretendiendo ampliar el espacio de ejemplos de los alumnos. |
| Ejemplo Procedimental | Propone ejemplos de un procedimiento anteriormente expuesto, pretendiendo ampliar el espacio de ejemplos de los alumnos. |
| Ejemplo de Teorema | Propone ejemplos de un teorema anteriormente presentado, pretendiendo ampliar el espacio de ejemplos de los alumnos. |
| De ejemplo de … (con restricciones) | Pide a los alumnos que presenten un ejemplo de un tópico matemático dado, condicionándolo con sucesivas restricciones. |
| ***Profundización Conceptual*** | |
| Ejemplo Genérico | Usa un ejemplo genérico para que los alumnos puedan obtener generalizaciones. |
| Contra-Ejemplo | Usa un contra-ejemplo con el objetivo de contrariar una afirmación, conjetura o concepción. |
| Ejemplo Fulcral | Usa un contra-ejemplo con el objetivo de obtener un cambio en la percepción cognitiva del alumno confrontándolo con sus contradicciones. |
| Ejemplo Puente | Usa el Ejemplo Fulcral para promover una evolución conceptual. |
| ***Transparencia*** | |
| Transparencia Inmediata | Llama la atención de los alumnos para las informaciones que un objeto matemático dado presenta. |
| Transparencia Mediata | Muestra a los alumnos cómo, a partir de las informaciones inmediatas que el objeto matemático presenta, se pueden obtener otras que no son inmediatas. |

| ***Grado de Planificación*** | |
|---|---|
| Ejemplo Planeado | Presenta a los (o trabaja con los) alumnos un ejemplo escogido anticipadamente. |
| Modificado | Modifica un ejemplo planeado de forma que éste se adecue a una situación imprevista, o de respuesta a una solicitud inesperada. |
| Espontáneo | Crea en el momento un ejemplo que se adecua a una situación imprevista, o da respuesta a una solicitación inesperada. |

Tabla 1: El Conocimiento sobre Ejemplificación

## VI.4. Nuevo modelo de construcción del Concepto de Función

El conocimiento de cómo explicar los contenidos matemáticos es, en realidad, una simbiosis entre el conocimiento de la materia disciplinar y el conocimiento de cómo enseñar esa materia utilizando los ejemplos; es un conocimiento ejemplarizante del contenido. Así pues, el Conocimiento Ejemplarizante del Contenido (CEC) es, claramente, un conocimiento que se integra en el Conocimiento Didáctico del Contenido.

Mientras observábamos las sesiones de clase de Esmeralda pudimos comprobar su modo de utilizar los ejemplos para enseñar el concepto de función: introducir el concepto y la respectiva definición; dar oportunidad a los alumnos de trabajar el concepto a través de los primeros ejemplos para que perciban los contornos del concepto y de que surjan las primeras dudas; uso de los ejemplos para esclarecer las dudas; aplicar los ejemplos a otras situaciones (de las matemáticas, de otras ciencias o de la vida real) donde pudieran surgir nuevas dudas, lo que hace con que retome el papel de los ejemplos con el fin de esclarecer las dudas. Este modo de ejemplificar se esquematiza del siguiente modo:

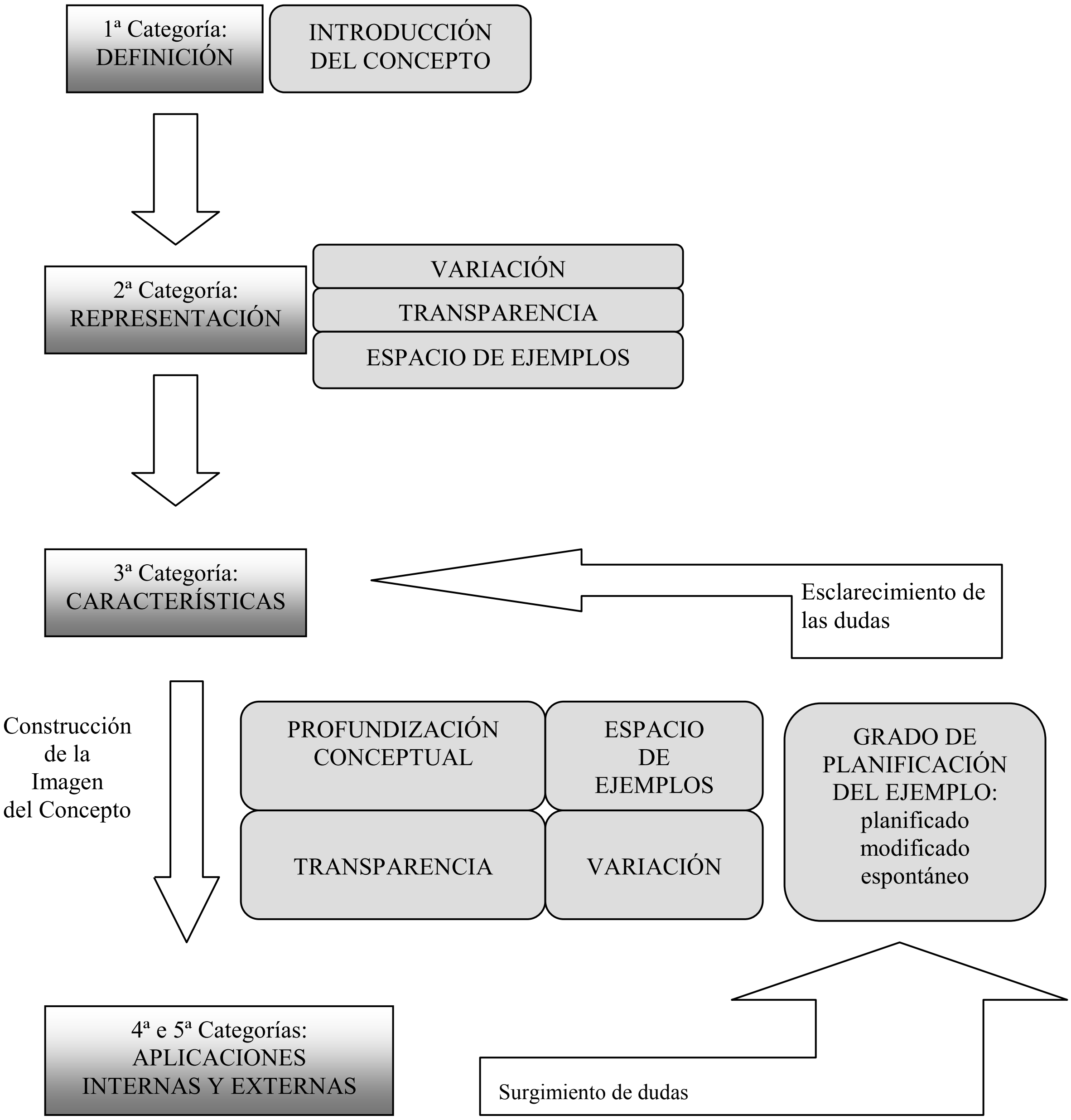


Figura 9: La Ejemplificación de Esmeralda

# VII CONCLUSIONES E IMPLICACIONES

El séptimo capítulo está dedicado a las conclusiones, implicaciones y líneas que pudieran dar continuidad a la investigación desarrollada.

Como es evidente, las conclusiones se relacionan directamente con los objetivos que se formularon y su ámbito se apoya en tres pilares: el conocimiento del profesor de matemáticas, la ejemplificación y el concepto de función. Las implicaciones que resultan de este trabajo se sitúan en el ámbito de la formación inicial y permanente de profesores y la continuidad a esta investigación que se inició remite para la inclusión de la ejemplificación en la evaluación de los aprendizajes de los alumnos y en las nuevas tecnologías.

## VII.1. El Conocimiento Didáctico del Contenido de Esmeralda cuando enseña el concepto de función

*Estudiar aspectos del Conocimiento Didáctico del Contenido a través de los ejemplos.*

El segundo instrumento de análisis (Chick, 2007) que aplicamos se mostró eficaz y adecuado en lo que respecta al análisis del conocimiento que la profesora emplea en la enseñanza del concepto de función. Recuérdese que este instrumento fue utilizado adaptado a este estudio y siguiendo la propuesta de sus autores (Chick, Baker, Pham y Cheng, 2006, Chick, 2007; Chick y Harris, 2007). Era aconsejable su aplicación en situación de clase y sobre contenidos diferentes de aquellos que fueron por ellos utilizados, de forma que se encontrasen carencias o aspectos que mejorar. Y así lo hicimos. De acuerdo a la discusión de los resultados fue posible mejorar un instrumento que ya de por sí se mostraba muy eficaz en la labor para la cual fue ideado.

## VII.2. El uso de los ejemplos cuando Esmeralda enseña el concepto de función.

De la revisión biográfica fue posible tomar algunos resultados de otros estudios que se revelaron muy importantes para nuestra investigación. Estudiar la acción de elegir un ejemplo y trabajarlo con los alumnos no es un proceso que haya sido el centro de atención de muchas investigaciones. Es cierto que existe un número muy considerable de estudios en el ámbito de temas que se relacionan con la ejemplificación, asuntos como el conflicto cognitivo, la evolución conceptual, la adquisición y estructuración de conceptos y el aprendizaje del concepto de función, pero no así sobre la elección y uso de ejemplos, donde el número de investigaciones es más reducido. Aún así, el material teórico y práctico acumulado permitió empezar la tarea y construir una base teórica suficientemente sólida donde basar y construir nuestro trabajo.

*Obtención de un instrumento de análisis de la creación, elección y uso de los ejemplos por el profesor:*

*(I) Ajuste de un instrumento de análisis de la creación, elección y uso de los ejemplos por el profesor cuanto al objetivo.*

En el inicio de la investigación sentimos la necesidad de modificar el instrumento de análisis de los ejemplos en relación al objetivo con que se usa (Figueiredo, 2005; Figueiredo, Blanco y Contreras, 2006, 2007). Aquella categorización se reveló suficiente para analizar la ejemplificación de cuatro estudiantes para profesores, aunque en el caso de Esmeralda presentaba limitaciones en cuanto a la naturaleza del ejemplo – concepto, procedimiento o teorema – y del grado de planificación. Salvadas algunas lagunas, este primer instrumento de análisis cumplió el objetivo que directamente le correspondía.

*(II) Construcción de un instrumento de análisis global de la creación, elección y uso de los ejemplos por el profesor.*

No obstante, más allá de la modificación de un modelo existente para obtener el primer instrumento de análisis, esta investigación permitió concebir un modelo teórico compuesto por una serie de categorías que sirve para caracterizar la elección y uso de los ejemplos por los profesores de forma genérica, y no solo en relación a los objetivos con que se usan. Este modelo fue concebido a través de la integración, estructuración y categorización de toda la información disponible, todavía dispersa, sobre la utilización de ejemplos y abarca casi toda la teoría y resultados que se reunieron. Este nuevo modelo tiene como función describir aquello que, en el capitulo donde se discuten los resultados, se designó por Conocimiento Ejemplarizante del Contenido.

*Descripción de la naturaleza de los ejemplos en función de su papel en el aprendizaje del concepto de función.*

Esta descripción se consiguió a través del primer instrumento de análisis y, además, a través de los casos tipificados en la bibliografía. En el caso de la elección y uso de los ejemplos por parte de Esmeralda pudimos discriminar la naturaleza de los ejemplos a través del objetivo que persiguen y la forma en que cumplen ese objetivo. La distinción del papel del ejemplo es mejor comprendida por medio de la tipificación que se presenta en el marco teórico de este trabajo.

*Evaluación de las potencialidades de la ejemplificación del profesor en la caracterización de su conocimiento profesional.*

Es esperable que la ejemplificación de un profesor refleje toda su experiencia y capacidades adquiridas a lo largo de su vida profesional. Por tanto, debiera permitirnos analizar y caracterizar su conocimiento a partir de la elección y uso de los ejemplos. En el caso de la profesora Esmeralda así fue con el material teórico-práctico disponible; pudimos encontrar en la práctica de Esmeralda la totalidad de los casos tipificados en la bibliografía y, con ello, su conocimiento profesional pudo ser caracterizado en lo que respecta al proceso de ejemplificación.

Las potencialidades de la ejemplificación tienen allí un papel primordial, siendo que ese papel se observa a varios niveles:

- El grado de espontaneidad de los ejemplos. La ejemplificación espontánea que el profesor exhibe es un buen indicador de su conocimiento del contenido. Solamente un conocimiento sólido del contenido disciplinar permite al profesor presentar ejemplos, contraejemplos o no ejemplos adecuados a la situación de forma espontánea.

- El grado de planificación de los ejemplos y el objetivo de la elección/creación. La creación y la elección de ejemplos de forma planificada y el objetivo pretendido revela más sobre el conocimiento pedagógico del profesor y a través de ellos podemos evaluar sus creencias y sus concepciones en el ámbito de la pedagogía y de la didáctica.

- La forma de usar los ejemplos es esclarecedora en cuanto al Conocimiento Didáctico del Contenido del profesor. La diversidad de situaciones tipificadas encontradas en su práctica, el uso de la variación, la aplicación de ejemplos transparentes, la ampliación de espacios de ejemplos de los alumnos, la promoción de conflictos cognitivos y consecuente desarrollo conceptual, entre tantos otros aspectos de ejemplificación, son el espejo del conocimiento que la profesora adquirió sobre cómo enseñar y la mejor forma de hacerlo.

## VII.3. La relación entre el uso de los ejemplos y el Conocimiento Didáctico del Contenido cuando Esmeralda enseña el Concepto de Función

*Estructuración de un perfil del profesor basado en su ejemplificación.*

Las opciones metodológicas, los dos instrumentos de análisis y el marco teórico adoptados, aplicados a la información obtenida, nos permitieron elaborar el perfil de Esmeralda en dos vertientes. Una referida a la elección y uso de los ejemplos y otra a su Conocimiento Didáctico del Contenido. Sin embargo no se puede interpretar esta dualidad como una división, en el fondo son las dos caras de un mismo perfil.

Consideramos que es un perfil suficientemente objetivo, focalizado en la selección y en el uso de los ejemplos en clase, que es algo objetivo y tangible, evitando la dispersión de la atención del investigador en otros aspectos del aula.

Los trazos más relevantes del perfil de Esmeralda están sintetizados en los siguientes puntos:

- Fundamenta su forma de explicar en casos que se integran en la 3ª categoría, Esclarecimiento y Profundización, y los ejemplos de las otras categorías son usados para desencadenar casos de esta categoría.

- Identifica la importancia del Conocimiento Didáctico del Contenido Tecnológico en el uso de los ejemplos y cómo este conocimiento atraviesa todos los ámbitos señalados del conocimiento del uso de ejemplos.

- Su ejemplificación desea preparar los alumnos para el examen final del ciclo secundario (15-18 años). La entrevista y los episodios tienen múltiples referencias al examen de 12º año.

## VII.4. Implicaciones de esta investigación

Más allá de las implicaciones en la formación permanente de profesores, compartiendo experiencias en el ámbito de la ejemplificación entre profesores con grados de experiencia diferentes, la reflexión sobre la elección y uso de ejemplos debe ser objeto de reflexión por parte de los profesores en inicio de carrera (Rowland *et al.*, 2003 a,b,c,d). La elección y uso de los ejemplos es un aspecto fundamental en la vida de un profesor y la evolución de este conocimiento es demasiado importante para que sea dejado a cargo del propio profesor. Esto nos lleva a pensar en la necesidad de procurar la oportunidad de que se promueva el trabajo colaborativo entre compañeros de un centro donde se enseñe matemáticas. La capacidad de utilizar bien los ejemplos se adquiere con la práctica y es un proceso que se prolonga por mucho tiempo (Zodik y Zaslavsky, 2007b). Lo que se propone es que este periodo de tiempo que se tarda en conseguir alguna maestría sea acortado mediante una formación permanente focalizada en este tema. Sería beneficiosa la inclusión del Conocimiento Ejemplarizante del Contenido en el ámbito del conocimiento del profesor, si es posible con cierto grado de identidad propia pues contiene un número significativo de aspectos que le proporciona cohesión, y que se deberá tener en cuenta en la labor diaria con los conceptos matemáticos.

En definitiva, se pretende que los profesores tomen conciencia sobre la importancia de la ejemplificación en su práctica como instrumento clave en el quehacer de todos los días. Es por ser tan utilizado cotidianamente que el papel de la ejemplificación corre el riesgo de banalizarse y, por lo tanto, podría no dársele toda la atención que se merece.

## VII.5. Contribuciones de esta investigación a la Educación Matemática

Como primera contribución queremos mostrar que es posible construir un perfil de una profesora en lo que se refiere a su forma de elegir, crear y usar los ejemplos. Siendo importante encontrar este tipo de perfil, tal no debe ser destinado a una catalogación o forma de evaluación, sino como elemento de desarrollo profesional.

A lo largo de la investigación pudimos percibir cómo algunos aspectos de la ejemplificación estaban íntimamente ligados. Es el caso de la transparencia y de la Variación. La revisión bibliográfica y la forma en que la utilizamos para enmarcar el conocimiento de Esmeralda nos permitió, de igual forma, contribuir para el perfeccionamiento de dos instrumentos de análisis ya existentes.

La aplicación de toda la teoría y resultados sobre ejemplificación que fue movilizada en el caso de Esmeralda nos ayudó a configurar un marco teórico bien estructurado y coherente.

En lo que concierne a la transparencia, a través del análisis del uso de los ejemplos por la profesora, fue posible identificar dos particularidades de este aspecto que algunos ejemplos tienen. Este estudio permitió identificar dos tipos de transparencia diferentes, la Transparencia Inmediata y la Transparencia Mediata. La primera permite determinar, directamente, ciertos elementos del concepto y la otra permite determinar, de forma indirecta, otros elementos del concepto. De este modo muy breve llamamos la atención sobre dos aspectos del quehacer diario del profesor y que todavía no están integrados en lo que usualmente se designa como ejemplificación del profesor.

Otra contribución de este estudio fue, precisamente, destacar la importancia que la Evaluación de los aprendizajes y el Conocimiento Didáctico del Contenido Tecnológico tienen en el ámbito de la selección de ejemplos. El modo como el ejemplo es elegido en el ámbito de la evaluación de los aprendizajes, así como la elección e uso de ejemplos que incluyan las nuevas tecnologías, son aspectos de la ejemplificación del profesor que merecen una atención particular en futuros estudios.

# REFERENCIAS EMPLEADAS EN LA TESIS


**Abdul-Rahman, S.** (2006). Probing Understanding Through Example Construction: The Case of Integration. In Hewitt, D. (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, *26*(2).

**Abell, S. K.** (2007). Research on science teacher knowledge. In S. K. Abell & N. G. Lederman (Eds.), *Handbook of research on science education* (pp. 1105-1149). Mahwah, New Jersey, USA: Lawrence Erlbaum.

**Acevedo, J. A.** (2009). Conocimiento Didáctico del Contenido para la enseñanza de la naturaleza de la ciencia (i): el marco teórico. *Revista Eureka Enseñanza Divulgación y Ciencia, 6*(1), 21-46.

**Akkoc, H., & Tall, D.** (2002). The simplicity, complexity and complication of the function concept. In Anne D. Cockburn & Elena Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 2, pp. 25-32). University of East Anglia. Norwich, UK: PME.

**Akkoç, H., & Tall, D.** (2005). A mismatch between curriculum design and student learning: the case of the function concept. In D. Hewitt & A. Noyes (Eds.), *Proceedings of the sixth British Congress of Mathematics Education* (pp. 1-8). University of Warwick. England.

**Alcock, L.** (2006). Uses of example objects in proving. In M. J. Høines & A. B. Fugelstad, (Eds.) *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 2, pp. 17-24). Bergen, Norway: Bergen University College. PME.

**Alcock, L., & Simpson, A.** (2002). Two components in Learning to Reason Using Definitions. *Proceedings of the Second International Conference on the Teaching of Mathematics*. Hersonissos, Crete.

**Al-Murani, T.** (2006). Teachers' awareness of dimensions of variation: A mathematics intervention project. *Proceedings of the 26th Conference of the British Society of Research in Learning Mathematics* (Volume 1, pp. 1-6). Warwick, U.K., BSRLM.

**Andrews, P., Carrillo, J., & Climent, N.** (2005). Proyecto "METE" (mathematics education traditions of Europe): el foco matemático. In A. Maz, B. Gómez & M. Torralbo (Eds.) *Investigación en Educación Matemática* (pp. 131-137). IX Simposio de la SEIEM. Córdoba, España: Publicaciones de la Universidad de Córdoba.

**Asghari, A.** (2007). Examples, a missing link. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.), *Proceedings of the 31st annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 2, pp. 25-32). Seoul, Korea: *PME*.

**Askew, M., & Wiliam, D.** (1995). *Recent research in mathematics education*. London, England: HMSO.

**Askew, M., Brown, M., Rhodes, V., Johnson, D., & Wiliam, D.** (1997). *Effective teachers of numeracy. Final report*. King's College, London.

**Atkinson, R., Derry, S., Renkl, A., & Wortham, D.** (2000). Learning from Examples: Instructional principles from the worked examples research. *Review of Educational Research, 70*(2), 181-214.

**Azcárate, C.** (1995). Sistemas de representación. *Uno, 4*, 53-61.

**Azcárate, C.** (1997). Si el eje de coordenadas es vertical, ¿qué podemos decir de las alturas de un triángulo? *Suma, 25*, 23-30.

**Baker, M., & Chick, H.** (2006). Pedagogical Content Knowledge for Teaching Primary Mathematics: A case Study of Two Teachers. In P. Grootenboer, R. Zevenbergen, & M. Chinnappan (Eds.), *Identities, Cultures and Learning Spaces, Proceedings of the 29th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 60-67). Sydney, Australia: MERGA.

**Balacheff, N.** (1988). Aspects of Proof in Pupils' Practice of School Mathematics. In D. Pimm, (Ed.), *Mathematics, Teachers and Children* (pp. 216-235). London: Hodder and Stoughton.

**Ball, D. L.** (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(2),132-144.

**Ball, D. L.** (1991). Research on teaching mathematics: Making subject-matter knowledge part of the equation. In J. Brophy (Ed.), *Advances in Research on teaching* (Volume 2, pp. 1-48). Connecticut, USA: Jai Press Inc.

**Ball, D. L.** (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education, 51*(3), 241-247.

**Ball, D., Bass, H., Sleep, L., & Thames, M.** (2005). *A Theory of mathematical knowledge for teaching.* Work-Session presented at the 15th ICMI study conference: The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics. Águas de Lindóia, Brasil.

**Barnes, M.** (1988) Understanding the Function Concept: Some Results of Interviews with Secondary and Tertiary Students. *Research on Mathematics Education in Australia*, 24-33.

**Baumert, J., Blum, W., & Neubrand, M.** (2004). Drawing the lessons from PISA-2000. Long term research implications: Gaining a better understanding of the relationship between system inputs and learning outcomes by assessing instructional and learning processes as mediating factors. In D. Lenzen, J. Baumert, R. Watermann, & U. Trautwein (Eds.), *PISA und die Konsequenzen für die erziehungswissenschaftliche Forschung,* (Suppl. 3-2004, pp. 143-157).

**Behr, M., & Harel, G.** (1990). Students' errors, misconceptions, and cognitive conflict in application of procedures. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 12*(3-4), 75-84.

**Bereiter, C., & Scardamalia, M.** (1987). An attainable version of high literacy: Approaches to teaching higher-order skills in reading and writing. *Curriculum Inquiry*, *17*(1), 9-30.

**Bills, L.** (1995). Teachers' use of generic examples. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 15*(1), 5-8.

**Bills, L.** (1996). The Use of Examples in the Teaching and Learning of Mathematics. In Puig L. & Gutierres A. (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 2, pp. 81–88). Valencia, Spain: PME.

**Bills, L., & Rowland, T.** (1999). Examples, Generalisation and Proof. In L. Brown (Ed.) *Making Meaning in Mathematics. Advances in Mathematics Education 1* (pp. 103-116). York, UK: QED.

**Bills, C., & Bills, L.** (2005). Experienced and Novice Teachers' Choice of Examples. In Clarkson, P., Downton, A., Gronn, D., Horne, M., McDonough, A., Pierce, R. & Roche, A (Eds.), *Proceedings of Twenty eighth annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Volume 1, pp. 146-153). Melbourne, Australia: MERGA Inc.

**Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A., & Zaslavsky, O.** (2006). Exemplification in Mathematics Education. In J. Novotna, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 1, pp. 126-154). Prague, Czech Republic: PME

**Bills, L., & Watson, A.** (2008). Editorial introduction. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(2), 77-79.

**Blanco, L. J.** (2004). Problem solving and the initial practical and theoretical education of teachers in Spain. *Mathematics teacher education & development, 6*, 37-48.

**Blanco, L. J., Mellado, V., & Ruiz, C.** (1995). Conocimiento Didáctico del Contenido en matemáticas y ciencias. *Revista de educación*, *307*, 427-446.

**Blanco L. J., Figueiredo, C. A., & Contreras, L. C.** (2010). The use and classification of examples in learning the concept of function: A case study. In Nata R. V. (Ed.), *Progress in Education 9.* New York, USA: Nova Publishers.

**Bolivar, A.** (2005). Conocimiento Didáctico del Contenido y didácticas específicas. *Profesorado. Revista de Currículo y formación del profesorado, 9*(2).

**Borasi, R.** (1984). Some reflections On and Criticisms of the Principle of Learning Concepts by Abstraction. *For the Learning of Mathematics, 4*, 14-18.

**Boyer, C.** (1974). *História da Matemática*. (Tradução de Elza F. Gomide). São Paulo, Brasil: Edgard Blücher.

**Braga, E.** (2009). *A compreensão dos conceitos de Função Afim e Quadrática no Ensino Fundamental com recurso da planilha*. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.

**Bratina, T. A.** (1986). Can your students give examples? *Mathematics Teacher, 79*(7), 524-526.

**Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D.** (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 247-285.

**Brunner, M., Kunter, M., Krauss, S., Klusmann, U., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., Dubberke, T., Jordan, A., Löwen, K., & Tsai, Y.-M.** (2006). Die professionelle Kompetenz von Mathematiklehrkräften: Konzeptualisierung, Erfassung und Bedeutung für den Unterricht. Eine Zwischenbilanz des COACTIV-Projekts [Mathematical teachers' professional competence: Conceptions, assessment and impact on instruction. Interim results of the COACTIV-Project]. In M. Prenzel & L. Allolio-Näcke (Eds.), *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule. Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms* (pp. 54-82). Münster, Deutchland: Waxmann.

**Carlson, M., & Oehrtman, M.** (2005). Key Aspects of Knowing and Learning the concept of Function. *Mathematical Association of America Research Sampler*, 9.

**Carlson, M. P.** (1998). A Cross-Sectional Investigation of the Development of the Function Concept. In A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education III* (Volume 7, pp. 114-162). Providence, USA: American Mathematical Association.

**Carroll, W. M.** (1992). The Use of Worked Examples in Teaching Algebra. *Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association*. S. Francisco, California, USA.

**Carroll, W. M.** (1994). Using Worked Examples as Instructional Support in the Algebra Classroom. *Journal of Educational Psychology, 86*(3), 360-367.

**Chandler, P., & Sweller, J.** (1991). Cognitive Load Theory and the Format of Instruction. *Cognition and lnstruction, 8*, 293-332.

**Charles, R. I.** (1980). Exemplification and Characterization Moves in the Classroom Teaching of Geometry Concepts. *Journal for Research in Mathematics Education, 11*(1), 10-21.

**Chernoff, E.** (2006). Examples that change minds. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the Twenty Eighth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics*

*Education* (Volume 2, pp. 756-758). Mérida, Mexico: Universidad Pedagógica Nacional.

**Chi, M. T. H., Bassok, M. W., Lewis, P., Reiman, P., & Glasser, R.** (1989). Self-explanations: How Students Study and Use Examples in Learning to Solve Problems. *Cognitive Science, 13*, 145-182.

**Chick, H.** (2007). Teaching and Learning by Example. In K. Beswick & J. Watson (Eds.) *Mathematics: Essential Research, Essential Practice.* Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Research Group of Australasia (pp. 3-21). Hobart, Australia: MERGA.

**Chick, H.L., Baker, M., Pham, T., & Cheng, H.** (2006) Aspects of teachers' pedagogical content knowledge for decimals. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N.Stehlíková (Eds.), *Proc. 30th conference e International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 2, pp. 297-304). Prague, Check Republic: PME.

**Chick, H., & Harris, K.** (2007). Pedagogical content knowledge and the use of examples for teaching ratio. *AARE Conference-FREEMANTLE, Association for Active Educational Researchers.*

**Climent, N., & Carrillo, J.** (2007). El uso del video para el análisis de la práctica en entornos colaborativos. *Investigación en la escuela*, *61*, 23-35.

**Cochran-Smith, M., & Lytle, S. L.** (1990). Research on teaching and teacher research: the issues that divide. *Educational Researcher*, *19*(2), 2-10.

**Cooke, R.** (1974). *História da Matemática*. São Paulo, Brasil: Edgard Blücher Lda.

**Corleis, A., Schwarz, B., Kaiser, G., & Leung, I.** (2008). Content and pedagogical content knowledge in argumentation and proof of future teachers: a comparative case study in Germany and Hong Kong. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 40*(5), 813–832.

**Correia, J. M.** (1999). *A evolução do conceito de função na segunda metade do século XVIII.* Tese de mestrado não publicada, Departamento de Matemática Pura, Faculdade de Ciências, Universidade do Porto, Portugal.

**Cuoco, A. A.** (1994). Multiple Representations of Functions. In Kaput, J. & Dubinsky, E. (Eds.), *Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning* (pp. 121–140). Washington, DC, USA: Mathematical Association of America.

**Dahlberg, R., & Housman, D.** (1997). Facilitating learning events through example generation. *Educational Studies in Mathematics, 33*, 283-299.

**De Jong, O., Van Driel, J., & Verloop, N**. (2005). Preservice Teachers' Pedagogical Content Knowledge of Using Particle Models in Teaching Chemistry. *Journal of Research in Science Teaching , 42*(8), 947–964.

**Demana, F., & Waits, B.** (1990). The role of technology in teaching mathematics. *Mathematics Teacher*, *83*(1), 27-31.

**DeMarois, P., & Tall, D. O.** (1996). Facets and layers of the function concept. In Puig, L & Gutierrez, A. (Eds.), *Proceedings of the 20th Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 2, pp. 297–304). Valencia, Spain: PME.

**DeMarois, P., & Tall, D. O.** (1999), Functions: Organizing principle or cognitive root. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of of the 23th Conference e International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 2, pp. 257–264). Haifa, Israel: PME.

**Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S.** (1994). Introduction: entering the field of qualitative research. In N. Denzin. & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 1-17). Thousand Oaks, USA: Sage Publications.

**Derry, G. N.** (1999). *What science is and how it works*. Princeton, NJ, USA: Princeton University Press.

**Dreyfus, T.** (1991). Advanced Mathematical Thinking Processes. In D. O. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 25-41). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

**Dreyfus, T., & Vinner, S.** (1982). Some aspects of the function concept in college students and junior high school teachers. *Proceedings of the Sixth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp.12-17). Antwerp, The Netherlands: PME.

**Dreyfus, A., Jungwirth, E., & Eliovitch, R.** (1990). Applying the "Cognitive Conflict" Strategy for Conceptual Change – Some Implications, Difficulties, and Problems. *Science Education, 74*(5), 555-569.

**Dubinsky, E.** (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking, in D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. Dordecht, The Netherlands: Kluwer, Academic Publishers.

**Dubinsky, E.** (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación universitária. *Educación Matemática, 8*(3), 24-41.

**Dubinsky, E., & Harel, G.** (1992). The nature of the process conception of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*. (MAA Notes no. 25, pp. 85-106), Washington DC, USA: Mathematical Association of America.

**Dubinsky, E., & McDonald, M.** (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education. In: Holton, D. (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study* (pp. 275-282). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

**Duval, R.** (2000). Basic Issues for Research in Mathematics Education. In T. Nakahara & M. Koyama, (Eds.), *Proceedings of the 24th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 1, pp. 55-69). Hiroshima University, Japan: PME.

**Eisenberg, T.** (1992). On the development of a sense for functions. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 153-174). Washington, DC: MAA.

**Eisner, E., & Peshkin, A.** (Eds.). (1990). *Qualitative inquiry in education*. New York, USA: Teachers College Press.

**Eley, M., & Cameron, N.** (1993). Proficiency in the explanation of procedures: A test of the intuitive understanding of teachers of undergraduate mathematics. *Higher Education*, *26,* 355-386.

**Ericsson, F.** (1992). Ethnographic Microanalysis of Interaction. In M. D. LeCompte, M. L. Millroy & J. Preissle (Eds.), *The handbook of qualitative research in education* (pp. 201-225). New York, USA: Academic Press Inc.

**Erlandson. D. A., Harris, E. L., Skipper, B. L., & Allen, S. D.** (1993). *Doing naturalistic inquiry*. Newbury Park, California, USA: Sage Publications.

**Escudero, I., & Sánchez, V.** (2007a). A Mathematic Teachers' Perspective and its Relationship to Practice. *International Journal of Science and Mathematics Education, 6*, 87-116.

**Escudero, I., & Sánchez, V.** (2007b). How do domains of knowledge integrate into mathematics teachers' practice? *Journal of Mathematical Behavior, 26*, 312-326.

**Even, R.** (1988). *Prospective secondary mathematics teachers' knowledge and understanding about mathematical function.* Tese de doutoramento não publicada, Michigan State University, USA.

**Even, R.** (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*(2), 94-116.

**Fernandes, D.** (2006). Para uma teoria da avaliação formativa. *Revista Portuguesa de Educação 19*(2), 21-50.

**Figueiredo, C. A.** (2005). *Os exemplos utilizados por professores estagiários quando ensinam o conceito de Função.* Memoria de Proyecto de Investigación de Doctorado, Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas, Universidada de Extremadura, España.

**Figueredo, C. A., Blanco, L. J., & Contreras, L. C.** (2006). A Exemplificação do Conceito de Função em Professores Estagiários. *Revista Unión*, *8*, 23-39.

**Figueiredo, C. A., Blanco, L. J., & Contreras, L. C.** (2007). La ejemplificación del concepto de función en estudiantes para profesores de Matemáticas en Secundaria. *Investigación en la Escuela, 61*, 53-67.

**Figueiredo, C. A., Contreras, L. C., & Blanco, L. J.** (2009). A transparência e a variação dos exemplos utilizados na aprendizagem de conceitos matemáticos. *Zetetiké*, *32*(17), 29-60.

**Firestone, W.** (1990). Toward a paradigmpraxis dialectic. In: E. Guba (Ed.), *The paradigm dialog* (pp. 105-124). Newbury Park, California, USA: Sage Publications.

**Friedrichsen P., Abell S., Pareja E., Brown P., Lankford D., & Volkmann, M.** (2009). Does Teaching Experience Matter? Examining Biology Teachers' Prior Knowledge for Teaching in an Alternative Certification Program. *Journal of Research in Science Teaching, 46*(4), 357–383.

**Garcia, M. M., & Llinares, S.** (1996). El concepto de función a través de los textos escolares: reflexión sobre una evolución. *Qurriculum*, *10-11*,103-115.

**Gavilán, J. M., García, M. M., & Llinares, S.** (2007a). Una perspectiva para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas. Implicaciones metodológicas. *Enseñanza de las Ciencias*, *25*(2), 157-170.

**Gavilán, J. M., García, M. M., & Llinares, S.** (2007b). La modelación de la descomposición genética de una noción matemática. Explicando la práctica del profesor desde el punto de vista del aprendizaje potencial en los estudiantes. *Educación Matemática*, *19*(2), 5-39.

**Gelbaum, B. R., & Olmsted, J. M.H.** (1964). *Counterexamples in Analysis*. San Francisco, USA: Holden-Day.

**Gess-Newsome, J., & Lederman, N. G.** (2001). Examining Pedagogical Content Knowledge: The Construct and its Implications for Science Education. *Contemporary Trends and Issues in Science Education*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

**Gibson, J. J.** (1977). The theory of affordances. In R. Shaw & J. Bransford, (Eds.), *Perceiving, acting and knowing: Toward an ecological psychology* (pp. 67-82). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

**Goetz, J. P., & LeCompte, M. D.** (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid, España: Morata.

**Goldenberg, P., & Mason, J.** (2008). Sheding light on and with example spaces. *Educational Studies in Mathematics*, *69*, 183-194.

**Goñi, J. M.** (2000). La evaluación en matemáticas. *Aula de Innovación educativa, 93-94*, 6-9.

**Gray, E.** (2002). Research Forum on Abstraction. *PME News, November 2002.*

**Gray, E. M., & Tall, D. O.** (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A "Proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(2), 116–140.

**Grevholm, B.** (2008). Concept maps as research tool in mathematics education. In A. J. Cañas, P. Reiska, M. Åhlberg & J. D. Novak, (Eds.), *Concept Mapping: Connecting Educators Proeedings of the Third Int. Conference on Concept Mapping*. Tallinn, Estonia & Helsinki, Finland.

**Grossman, P. L.** (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*. New York, USA: Teachers College Press.

**Gudmundsdottir, S., & Shulman, L.** (1987). Pedagogical content knowledge in social studies. *Scandinavian Journal of Educational Research, 31*, 59-70.

**Harel, G., & Tall, D.** (1991). The general, the abstract and the generic in advanced mathematics. *For the learning of Mathematics*, *11*, 38-42.

**Hazzan, O.** (1994). Students' belief about the solutions of the equation $x = x^{-1}$ in a group. *18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 49-55). Lisbon, Portugal: PME.

**Hazzan, O., & Zazkis, R.** (1997) Constructing knowledge by constructing examples for mathematical concepts. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Voluma 4, pp. 299-306). Lahti, Finland: PME.

**Hazzan, O., & Zazkis, R.** (1999). A perspective on "give an example" tasks as opportunities to construct links among mathematical concepts. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 21*(4), 1-14.

**Hilbert, T., Schworm, S., & Renkl, A.** (2004). Learning from worked-out examples: The transition from instructional explanations to self-explanation prompts. In P. Gerjets, J. Elen, R. Joiner, & P. Kirschner (Eds.), *Instructional design for effective and enjoyable computer-supported learning* (pp. 184-192). Tübingen, Germany: Knowledge Media Research Center.

**Hill, H.C., Schilling, S.G., & Ball, D.L.** (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *Elementary School Journal, 105*, 11-30.

**Hill, H.C., Rowan, B., & Ball, D.** (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal, 42*(2), 371– 406.

**Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S**. (2008). Unpacking "pedagogical content knowledge": Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400.

**Houssart, J., & Evens, H.** (2005). Giving examples and making general statements: 'two odds always make an even (in maths)'. In D. Hewitt & A. Noyes (Eds.), *Proceedings of the sixth British Congress of Mathematics Education* (pp. 65-72). University of Warwick, UK.

**Huckstep, P., Rowland, T., & Thwaites, A.** (2002). Primary Teachers' Mathematics Content Knowledge: What does it look like in the Classroom*? Proceedings of BERA Conference*, University of Exeter, UK.

**Huckstep, P., Rowland, T., & Thwaites, A.** (2003). Observing subject knowledge in primary mathematics teaching. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics 23*(Volume 1, pp. 37-42).

**Huntley, R.** (2008). Researching Primary Trainees' Choice of Examples: Some early analysis of data. Joubert, M. (Ed.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics 28*(Volume 3, pp. 42-46).

**Inglis, M., & Simpson, A.** (2008). Conditional inference and advanced mathematical study. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 187-204.

**Jones, M.** (2006). Demystifying Functions: The Historical and Pedagogical Difficulties of the Concept of the Function. *Undergraduate Math Journal*, *7*(2), 1-20.

**Jorro, A.** (2000). *L'enseignant et l'évaluation. Des gestes évaluatifs en question.* Bruxelles, Belgique: De Boeck.

**Juter, K.** (2005). Limits of functions - How do students handle them? *Pythagoras*, *61*, 11-20.

**Karaağaç, M. K.** (2005). Differences in teachers' selection and use of examples in classrooms: an institutional perspective on teacher practice. Hewitt, D. (Ed.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 25*(2).

**Kleiner, I.** (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. *College Mathematics Journal, 20*(4), 282-300.

**Klymchuk, S.** (2001). Counterexamples and conflicts as a remedy to eliminate misconceptions and mistakes. In Marja van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th International Conference for Psychology in Mathematics Education* (Volume 1, 326). Utrecht, The Netherlands: PME.

**Krauss, S., Brunner, M., Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., & Jordan, A.** (2008). Pedagogical content knowledge and content knowledge of secondary mathematics teachers. *Journal of Educational Psychology, 100*(3), 716-725.

**Lakoff, G.** (1987). *Woman, fire and dangerous things: What Categories Reveal about the Mind*, Chicago, USA: University of Chicago Press.

**Lange, K., Kleickmann, T., & Moeller, K.** (2009). Measuring primary school teachers' Pedagogical Content Knowledge in science education with open-ended and multiple-choice items. *Proceedings of the European Science Education Research Association Conference.* Istanbul, Turkey.

**Lederman, N.G., Gess-Newsome, J., & Latz, M.S.** (1994). The nature and development of preservice science teachers' conceptions of subject matter and pedagogy. *Journal of Research in Science Teaching*, *31*, 129–146.

**Leinhardt, G.** (1989). Math lessons: A contrast of novice and expert competence. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(1), 52–57.

**Leinhardt, G.** (2001). Instructional explanations: A commonplace for teaching and location for contrast. In V. Richardson (Ed.). *Handbook of research on teaching (*4th Ed. pp. 333-357*.).* Washington, DC, USA: American Educational Research Association.

**Leinhardt, G., Putnam, R. T., Stein, M. K., & Baxter, J.** (1991). Where subject knowledge matters. In J. Brophy (Ed.), *Advances in research on teaching: Teachers' knowledge of subject matter as it relates to their teaching practice* (Voluma 2, pp. 87-113). Greenwich, Connecticut, USA: Jai Press, Inc.

**Lesh, R., Behr, M., & Post, T.** (1987). Rational number relations and proportions. In Claude Janvier (Ed), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 41-58). Hillsdale, New Jersey, USA: Lawrence Erlbaum.

**Lester, F. K., & Kroll, D. L.** (1991). Evaluation: A new vision. *Mathematics Teacher, 84*, 276-284.

**Lewis, M. W., & Dehler, G. E.** (2000). Learning Through Paradox: A Pedagogical Strategy for Exploring Contradictions and Complexity. *Journal of Management Education*, *(24)*6, 708-725.

**Lincoln, Y., & Guba, E.** (1991). *Naturalistic inquiry*. New York, USA: Sage.

**Llinares, S.** (1996). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: Conocimiento, creencias y contexto en relación a la noción de función. In J. Ponte, C. Monteiro, M. Maia, L. Serrazina & C. Loureiro (Eds.), *Desenvolvimento profissional dos professores de Matemática: Que formação?*( pp. 47-82). Lisboa: SPCE.

**Loyd, G.M., & Wilson M.** (1998). Supporting innovation: The impact of a teacher's conception of function on his implementation of a reform curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*(3), 248-274.

**Lucus, C. A.** (2006). Is subject matter knowledge affected by experience? The case of composition of functions. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 4, pp. 97-104). Prague, Czech Republic: PME

**Ma, L.** (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. Mahwah, New Jersey, USA: Lawrence Erlbaum Associates.

**MacHale, D.** (1980). The predictability of counterexamples. *American Mathematical Monthly 87*, 752.

**Magnusson, S., Krajcik, L., & Borko, H.** (1999). Nature, sources and development of pedagogical content knowledge. In J. Gess-Newsome & N.G. Lederman (Eds.), *Examining pedagogical content knowledge* (pp. 95-132). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

**Makin, V. S., & Ross, H. B.** (1999). Prototype versus Exemplar Models in Cognition. In R. J. Sternberg (Ed.), *The Nature of Cognition* (pp. 205–243). Massachusetts: MIT Press.

**Marcelo, Carlos** (2009). Desenvolvimento Profissional Docente: passado e futuro. *Sísifo. Revista de Ciências da Educação 08*, 7-22.

**Markovits Z., Eylon B., & Bruckheimer M.** (1988). Difficulties Students have with the Function Concept. *The Ideas of Algebra, K-12, N.C.T.M. 1988 Yearbook*, 43-60.

**Marton, F., & Booth, S.** (1997). *Learning and Awareness.* Hillsdale, USA: Lawrence Erlbaum.

**Marton, F., Runesson, U., & Tsui, A. B. M.** (2004). The Space of Learning. In F. Marton & A. B. M. Tsui (Eds.), *Classroom discourse and the space of learning*. (pp. 3-40). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.

**Mason, J.** (2002). What makes an example exemplary?: Pedagogical and research issues in transitions from numbers to number theory. In A.D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 1, pp. 224-229). Norwich, UK: PME

**Mason, J.** (2003). Structure of Attention in the Learning of Mathematics. In J. Novotná (Ed.) *Proceedings, International Symposi um on Elementary Mathematics Teaching* (pp. 9-16). Charles University, Prague, Czech Republic.

**Mason, J.** (2006). What makes and example exemplary: Pedagogical and didactical issues in appreciating multiplicative structures. In R. Zazkis & S.R. Campbell (Eds.), *Number Theory in mathematics education: Perspectives and prospects* (pp. 41–68). New York: Lawrence Erlbaum Press.

**Mason, J.** (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 57–94). New York: Lawrence Erlbaum Press.

**Mason, J., & Pimm, D.** (1984). Generic examples: seeing the general in the particular, *Educational Studies in Mathematics, 15*, 277-289.

**Mason, J., & Spence, M.** (1999). Beyond mere knowledge of mathematics: The importance of knowing to act in the moment. *Educational Studies in Mathematics, 38,* 135-161.

**Mason, J., & Watson, A.** (2001). Getting students to create boundary examples. *MSOR Connections*, *1*(1), 9-11.

**Mason, J., & Watson, A.** (2005). Mathematical Exercises: what is exercised, what is attended to, and how does the structure of the exercises influence these? *Invited Presentation to SIG on Variation and Attention*. Nicosia, Greece: EARLI

**Mason, J., & Johnston-Wilder, S.** (2006). *Designing and using mathematical tasks* (2nd ed.). St. Albans, UK: Tarquin.

**Mavarech Z., & Kramarsky B.** (1997). From Verbal Descriptions to Graphic Representations: Stability and Change in Students' Alternative Conceptions. *Educational Studies in Mathematics, 32*, 229-263.

**McCrory, R.** (2008). Technology PCK in Science. In Colbert, J., Boyd, K., Clarke, K., Guan, S., Harris, J., Kelly, M., & Thompson, A. (Eds.). *The Handbook of Technological Pedagogical Content Knowledge for Educators.* London, UK: Routledge.

**McDonough, A., & Clarke, D.** (2002). Describing the practice of effective teachers of mathematics in the early years. In N. A. Pateman, B. J. Doherty, & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of 27th Conf. of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 3, pp. 261-268). Honolulu, USA: PME.

**McGowen, M., DeMarois, P., & Tall, D.** (2000). Using the function machine as a cognitive root. *Proceedings of the 22nd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 247-254). Tucson, USA: PME.

**Meehan, M.** (2007). Student generated examples and the transition to advanced mathematical thinking. In Pitta-Pantazi, P. & Philippou, G.(Eds.*), Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2349-2358). Larnaca, Cyprus.

**Mellado, V.** (1994). *Análisis del conocimiento didáctico del contenido, en profesores de primaria y secundaria en formación inicial*. Tese de doutoramento inédita, Universidad de Sevilla, España.

**Ministério da Educação** (2001). *Programas de Matemática A* dos 10º e 11º anos dos Cursos Gerais de Ciências Naturais, Ciências e Tecnologias, Ciências Socio-Económicas. Departamento do Ensino Secundário, Lisboa, Portugal.

**Mishra, P., & Koehler, M. J.** (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record 108*, 1017- 1054.

**Monk, S., & Nemirovsky, R.** (1994). The case of Dan: Student construction of a functional situation through visual attributes. *CBMS Issues in Mathematics Education, 4*, 139-168.

**Morine-Dershimer, G., & Kent, T.** (1999). The complex nature and sources of teachers' pedagogical knowledge. In J. Gess-Newsome & N. G. Lederman (Eds.), *Examining pedagogical content knowledge: the construct and its implications for science teaching* (pp. 21-50). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

**Moura, M., & Moretti, V.** (2003). Investigando a aprendizagem do conceito de função a partir dos conhecimentos prévios e das interacções sociais. *Ciência & Educação, 9*(1), 67-82.

**Movshovitz-Hadar, N.** (1993). The False Coin Problem, Mathematical Induction and Knowledge Fragility. *Journal of Mathematical Behavior, 12*, 253-268.

**Muir, T.** (2007). Setting a good example: Teachers' choice of examples and their contribution to effective teaching of numeracy. In J. Watson & K. Beswick (Eds.), *Mathematics: Essential research, essential practice*. *Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 513-522). Hobart, Australia: MERGA.

**Mulhall, P., Berry, A., & Loughran, J.** (2003). Frameworks for representing science teachers' pedagogical content knowledge. *Asia-Pacific Forum on Science Learning and Teaching, 4*(2), Article 2.

**NCTM** (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, VA, USA: NCTM.

**Neubrand, M.** (2006). The TIMSS 1995 and 1999 Video Studies: In Search for Appropriate Units of Analysis. In F.K.S Leung, K.-D. Graf & F.J. Lopez-Real (Eds.), *Mathematics Education in Different Cultural Traditions: A Comparative Study of East Asia and the West. - The 13th ICMI Study* (Volume 9, pp. 291-318), *(New ICMI Study Series),* Berlin, Heidelberg, New York: Springer.

**Neubrand, M.** (2008). Knowledge of Teachers – Knowledge of Students: Conceptualizations and outcomes of a Mathematics Teacher Education Study in Germany. *Symposium on the Occasion of the 100th Anniversary of ICM, Working Group 2: The professional formation of teachers.* Roma, Italia.

**Neves, M. A., & Guerreiro, L.** (2003). *Funções I. Matemática A · 10.º Ano, Volume II.* Porto, Portugal: Porto Editora.

**Nicol, C., & Crespo, S.** (2004). Learning to see in mathematics classrooms. In M. Høines & A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 2004 International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 3, pp. 417-424). Bergen, Norway: Bergen University College.

**Norman, A.** (1992). Teacher's mathematical knowledge of the concept of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.). *The Concept of Function, Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 215-232). Washington, DC, USA: Mathematical Association of America.

**Novak, J.** (1985). Meta-learning and meta-knowledge strategies to help students learn how to learn. In West, L. & Pines, L. (Eds.), *Cognitive Structure and Conceptual Change* (pp. 189–209). Orlando, FL, USA: Academic Press.

**Novak, J.** (1990). Concept Mapping: A Useful Tool for Science Education. *Journal of Research in Science Teaching, 27*(10), 937–949.

**Novak, J., & Gowin, D.** (1984). *Learning how to learn*. New York, USA: Cambridge University Press.

**Palaro, L. A.** (2008). Leonhard Euler e o Conceito de Função. *Seminário Educação 2008: 20 anos de Pós Graduação em Educação, avaliação e perspectivas.* Cuiabá, Brasil.

**Park, S., & Oliver, J. S.** (2008). Revisiting the conceptualization of Pedagogical Content Knowledge (PCK): PCK as a conceptual tool to understand teachers as professionals. *Research in Science Education, 38*(3), 261-284.

**Peled, I., & Zaslavsky, O.** (1997). Counter-examples that (only) prove and Counter-examples that (also) explain. *FOCUS on Learning Problems in mathematics, 19* (3), 49-61.

**Peterson, P.L., Fennema, E., Carpenter, T.P., & Loef, M.** (1989). Teachers' pedagogical content beliefs in mathematics. *Cognition and Instruction*, *6*(1), 1-40.

**Polya, G.** (1981). *Mathematical discovery: on understanding, learning, and teaching problem solving.* New York, USA: John Wiley and Sons, Inc.

**Ponte, J. P.** (1990). O conceito de função no currículo de Matemática. *Revista Educação e Matemática*, *15*, 3-9.

**Ponte, J. P.** (2000). A investigação sobre o professor de matemática. Problemas e perspectivas. *Conferência realizada no 1º SIPEM promovido pelo SBEM-Sociedade Brasileira de Educação Matemática*, Serra Negra, São Paulo, Brasil.

**Porlán, R., & Rivero, A.** (1998). *El conocimiento de los profesores. Una propuesta formativa en el área de ciencias*. Sevilla: Díada.

**Reed, S. Dempster, A., & Ettinger, M.** (1985). Usefulness of analogous solutions for solving algebra word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition, 11,* 106-125.

**Reimann, P., & Schult, T. J.** (1996). Turning examples into cases: Acquiring knowledge structure for analogical problem solving. *Educational Psychologist, 31*, 123-132.

**Renkl, A.** (2002). Worked-out examples: instructional explanations support learning by self-explanations. *Learning and Instruction 12*, 529-556.

**Rico, L., Castro, E., Fernández, F., & Segovia, I.** (1997). Cuestiones abiertas sobre evaluación en matemáticas. *Uno, 11*, 7-23.

**Riese, J., & Reinhold, P.** (2009). Measuring Physics Student Teachers' Pedagogical Content Knowledge as an Indicator of their Professional Action Competence. *Proceedings of the European Science Education Research Association Conferenc*. Istanbul, Turkey.

**Rissland-Michener, E.** (1978). Understanding Understanding Mathematics. *Cognitive Science, 2,* 361-383.

**Rochera, M. J., Colomina, R., & Barberà, E.** (2001). Utilizando los resultados de la evaluación en matemáticas para optimizar el aprendizaje de los alumnos. *Investigación en la escuela, 25* , 33-44.

**Rowland, T.** (1998). Conviction, explanation and generic examples. *Proceedings of the 22nd International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 4, pp. 65-72). University of Stellenbosch, S. Africa: PME.

**Rowland, T.** (2008). The purpose, design and use of examples in the teaching of elementary mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(2), 149-163.

**Rowland, T., Thwaites, A., & Huckstep, P.** (2003a). Novices' Choice of Examples in the Teaching of Elementary Mathematics. In A. Rogerson (Ed.), *Proceedings of the International Conference on the Decidable and the Undecidable in Mathematics Education* (pp. 242-245). Brno, Czech Republic.

**Rowland, T., Thwaites, A., & Huckstep, P.** (2003b). Elementary Teachers' Mathematics Content Knowledge and Choice of Examples. *Paper given at CERME3*, Bellaria, Italy.
http://www.dm.unipi.it/%7Edidattica/CERME3/proceedings/Groups/TG12/TG12_Rowland_cerme3.pdf

**Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A.** (2003c). The choice of examples in the teaching of mathematics: what do we tell the trainees? *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics 23* (Volume 2, pp. 85-90).

**Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A.** (2003d). The knowledge quartet. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics 23* (Volume 3, pp. 97-103).

**Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A.** (2004). Reflecting on prospective elementary teachers' mathematics content knowledge: the case of Laura. In M. J. Høines & A. B. Fugelstad, (Eds.) *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*(Volume 4, pp. 121-128). Bergen University College, Norway: PME.

**Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A.** (2005). Elementary Teachers' Mathematical Subject Knowledge: The Knowledge Quartet and the Case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*, 255-281.

**Rowland, T., & Zaslavsky, O.** (2005). *Pedagogical Example-Spaces*. Notes for the mini-conference on Exemplification in Mathematics, Oxford University, June 2005.

**Runesson, U., & Mok, I. A. C.** (2004). Discernment and the Question, "What can be learned?" In F. Marton & A. B. M. Tsui (Eds.), *Classroom discourse and the space of learning* (pp. 63-87). Mahwah, New Jersey, USA: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.

**Ryan, J.** (1994). The Function Concept: Making connections within and between representations. In R. Killen (Ed.), Educational Research: Innovation and Practice. *Proceedings of the Annual Australian Association for Research in Education Conference.*

**Salazar, S. F.** (2005). El conocimiento pedagógico del contenido como categoría de estudio de la formación docente. *Actualidades investigativas en educación, 5*(2).

**Sanders, L.R., Borko, H., & Lockard, J.D.** (1993). Secondary science teachers' knowledge base when teaching science courses in and out of their area of certification. *Journal of Research in Science Teaching, 30*, 723–736.

**Sangwin, C. J.** (2002). Teacher generated examples of mathematical objects. Obtido na Net em 2006 no endereço:
http://web.mat.bham.ac.uk/C.J.Sangwin/Publications/ExamplesObjects.pdf

**Sangwin, C. J.** (2006). Mathematical questions spaces. In: Danson, M. (ed.). 10th CAA International Computer Assisted Assessment Conference: *Proceedings of the Conference on 4th and 5th July 2006 at Loughborough University* (pp. 377-386). Loughborough, UK: Lougborough University.

**Santos, L.** (2004). O ensino e a aprendizagem da matemática em Portugal: Um olhar através da avaliação. *Actas del octavo simposio de la sociedad española de investigación en educación matemática (S.E.I.E.M.)* (pp. 127-151). Coruña, España: Universidade da Coruña.

**Schoenfeld, A.** (1994). A discourse on methods. *Journal for Research in Mathematics Education, 25* (6), 697-710.

**Schön, D.** (1983). *The Reflective Practitioner: how professionals think in action*. London, England: Temple Smith.

**Schwartz, J., & Yerushalmy, M.** (1992). Getting students to function in and with algebra. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*. (MAA Notes no. 25, pp. 261-289), Washington DC, USA: Mathematical Association of America.

**Schwarz B., Leung I. K. C., Buchholtz N., Kaiser G., Stillman G., Brown J., & Vale C.** (2008) Future teachers' professional knowledge on argumentation and proof: a case study from universities in three countries. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 40*(5), 791-811.

**Sela, H.** (2008). Coping with mathematical contradictions with peers. *Apresentação ao International Congress on Mathematical Education*. Monterrey, Mexico.

**Sela, H.. & Zaslavsky, O.** (2007). Resolving cognitive conflict with peers - does it matter how many? In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume, 4, pp. 169-176). Seoul, Korea: *PME*.

**Selden, A., & Selden, J.** (1992). Research perspectives on conceptions of function summary and overview. In Guershon Harel & Ed Dubinsky (Eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 1-16). Washington, USA: Mathematical Association of America.

**Selden, A., & Selden, J.** (1998). The role of examples in learning mathematics. *MAA Online,* obtido na Net em 2004 do endereço http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_5.html.

**Sfard, A.** (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification - the case of function. Em Guershon Harel e Ed Dubinsky (Ed.), *The concept of function* (pp. 59-84).Washington, EUA: Mathematical Association of America.

**Shílov, G. E.** (2004). ¿Qué es una función? *Sigma, 25*, 137-147.

**Shulman, L. S.** (1986). Those who understand, knowledge growth in teaching. *Educational Researcher 15*(2), 4-14.

**Shulman, L. S.** (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

**Sierpinska, A.** (1988). Epistemological Remarks on Functions. *Proceedingsof the Twelfth International Conference for the Psychological of Mathematics Education* (pp. 568-575). Vesprem, Hungary.

**Sierpinska, A.** (1994). *Understanding in mathematics*. London, England: The Falmer Press.

**Silverman, J. & Thompson, P. W.** (2005). Investigating the relationship between mathematical understanding and teaching mathematics. In S. Wilson (Ed.), *Proceedings of the Twenty-seventh Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Roanoke, VA. Vicksburg, VA, USA: Virginia Tech, PME.

**Simon, M.** (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*, 233-254.

**Sinclair, N., Watson, A., & Zazkis, R.** (2004). *Learner-generated examples* (pp. 45-54). Working group report. Laval, Quebec, Canada.

**Skemp, R.** (1971). *The Psychology of Learning Mathematics*. Middlesex, England: Penguin.

**Sowder, L.** (1980). Concept and Principle Learning. In R. Shumway (Ed.)*, Research in Mathematics Education* (pp. 244-285). Reston, VA, USA: NCTM.

**Stake, R.E.** (1994). Case studies. In: N. Denzin e Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 236-247). Thousand Oaks, CA, USA: Sage Publications.

**Stake, R. E.** (1995). *The arte of case research*. Thousand Oaks, CA, USA: Sage Publications.

**Stake R. E**. (2000). Case studies. In: Denzin N. K., Lincoln Y. S. (Eds). *Handbook of qualitative research*. London, England: Sage.

**Staub. F., & Stern. E.** (2002). The nature of teachers' pedagogical content beliefs matters for students' achievement gains: Quasi-experimental evidence from elementary mathematics. *Journal of Educational Psychology, 93*, 344–355.

**Stein, M.K., Baxter J.A., & Leinhardt G.** (1990). Subject matter knowledge and elementary instruction: A case from functions and graphing. *American Educational Research Journal, 27*, 639-663.

**Strauss, A., & Corbin, J.** (1990). *Basics of qualitative research*. London, England: Sage.

**Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J.** (2008). *'Cognitive conflict' as a mechanism for supporting developmental progressions in students' knowledge about proof*. Article presented at, and available at the website of, the 11th International Congress on Mathematical Education, under Topic Study Group 18 (Reasoning, proof and proving in mathematics education) (http://tsg.icme11.org/tsg/show/19). Monterrey, Mexico.

**Swan, M.** (1983). *Teaching decimal place value: A comparative study of "conflict" and "positive only" approaches*. Nottingham, England: University of Nottingham, Shell Centre for Mathematical Education.

**Sweller, J.** (1988). Cognitive load during problem solving: Effects on learning. *Cognitive Science, 12*, 257-285.

**Sweller, J.** (1989). Cognitive technology: some procedures for facilitating learning and problem-solving in mathematics and science. *Journal of Educational Psychology, 65* (1), 93-102.

**Sweller, J., & Cooper, G. A.** (1985). The use of worked examples as a substitute for problem solving in learning algebra. *Cognition and Instruction, 2*, 59–89.

**Tall, D.** (1977). *Cognitive conflict and the learning of mathematics.* Paper presented at the first conference of the international group for the psychology of mathematics education. Utrecht, Netherlands.

**Tall, D.** (1992). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof. In Grouws, D. A. (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics*

*Teaching and Learning* (pp. 495–511). New York, USA: Macmillan Publishing Company.

**Tall D., & Vinner S.** (1981) Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics 12*, 151-169.

**Tall D., & Thomas M.** (1989). Versatile Learning and the Computer. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11*(2), 117-125.

**Tall, D., & Bakar, M.** (1992). Students' prototypes for functions e graphs. *International Journal of Mathematics Education in Science & Tecnology, 23*(1), 39-50.

**Tall, D., McGowen, M., & DeMarois,P.** (2000). The function machine as a cognitive root for the function concept. *Proceedings of PME-NA 22* (pp.255-261). Tucson, Arizona, USA.

**Tamir, P.** (1988). Subject Matter and Related Pedagogical Knowledge in Teacher Education. *Teaching and teacher education: an internal journal of research and studies*, *4*, 99-110.

**Thompson, P.** (1994a). Students, Functions and Curriculum. In Dubinsky, E., Schoenfeld, A., & Kaput, J. J. (Eds.) *Research in Collegiate Mathematics Education*, I (pp. 21–44). Providence, USA: American Mathematical Society.

**Thompson, P.** (1994b). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 229-274.

**Tirosh, D., & Graeber, A. O.** (1990). Evoking cognitive conflict to explore preservice teachers' thinking about division. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(2), 98–108.

**Tirosh, D., Hadass R., & Movshovich-Hadar N.** (1991). Overcoming overgeneralizations: The case of commutativity and associativity. In F. Furinguetti (Ed.), *Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 3, pp. 310-315). University of Assisi, Italy: PME.

**Tirosh, D., & Tsamir, P.** (2004). What can mathematics education gain from the conceptual change approach? And what can the conceptual change approach gain from its application to mathematics education? *Learning and Instruction 14*, 535-540.

**Tsamir, P., & Tirosh, D.** (1999). Consistency and representations: The case of actual infinity. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*, 213–219.

**Tsamir, P., Tirosh, D., & Levenson, E.** (2008). Intuitive nonexamples: the case of triangles. *Educational Studies in Mathematics, 69*, 81-95.

**Tsamir, P.** (2003). From "easy" to "difficult" or vice versa: The case of infinite sets. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 25*, 1-16.

**Turner, F.** (2005). "I wouldn't do it that way": trainee teachers' reaction to observations of their own teaching. Hewitt, D. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 25*(3).

**Unwin, A.** (2007). Technological Pedagogical Content Knowledge (TPCK), a conceptual framework for an increasingly technology driven higher education? *Bulgarian Journal of Science and Education Policy*, *1* (1), 231-236.

**Van Driel, J. H., Verloop, N., & De Vos, W.** (1998). Developing science teachers' pedagogical content knowledge. *Journal of Research in Science Teaching, 35*(6), 673-695.

**Van Driel, J.H., De Jong, O., & Verloop, N.** (2002). The development of preservice chemistry teachers' PCK. *Science Education, 86*, 572–590.

**Vidakovic, D.** (1996). Learning the concept of inverse function. *Journal for Computers in Mathematicsand and Science Teaching, 15*(3), 295-318.

**Vinner, S.** (1983) Concept definition, concept image and the notion of function. *The International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14*, 293-305.

**Vinner, S.** (1991). The role of definitions in teaching and learning of mathematics. In Tall, D. (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht, The Nederlands: Kluver.

**Vinner, S.** (1992). The Function Concept as a Prototype for Problems in Mathematics Learning. In Harel, G., & Dubinsky, E. (Eds.)*, The Concept of Function – Aspects of epistemology and Pedagogy*, (MAA Notes, no 25, pp. 195- 214). Washington DC, USA: Mathematical Association of America.

**Von Frank, V.** (2008). *Professional Learning for School Leaders*. Oxford, Ohio, USA: National Staff Development Council.

**Vosniadou, S. & Verschaffel, L.** (2004). Extending the conceptual change approach approach to mathematics learning and teaching. *Learning and Instruction, 14*(5), 445–451.

**Wamba, A. M.** (2001). *Modelos didácticos personales y obstáculos para el desarrollo profesional: Estudios de caso con profesores de Ciencias experimentales en Educación Secundaria.* Tese de Doutoramento inédita, Universidad de Huelva, España.

**Watson, J. M.** (2002). Inferential reasoning and the influence of cognitive conflict. *Educational Studies in Mathematics, 51*, 225–256.

**Watson, A., & Mason, J.** (2001). Getting students to create boundary examples. *MSOR Conections 1* (1), 9-11.

**Watson, A., & Mason, J. H.** (2002a). Extending example spaces as a learning/teaching strategy in mathematics. In A. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 4, pp. 377). University of East Anglia, Norwich, UK: PME

**Watson, A., & Mason, J.H.** (2002b), Student-generated examples in the learning of mathematics. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education 2*(2), 237-249.

**Watson, A., & Mason, J.** (2004). The Exercise as Mathematical Object: Dimension of Possible Variation in Practice. *Proceedings of the 24th Conference of the British Society of Research in Learning Mathematics*, (Volume 2, pp. 107-112). Leeds, U.K.: BSRLM.

**Watson, A., & Mason, J.** (2005). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples.* Mahwah, NJ, USA: Lawrence Erlbaum Associates.

**Watson, A., & Mason, J.** (2006). Seeing an exercise as a single mathematical object: using variation to structure sense-making. *Mathematics Thinking and Learning, 8*(2), 91-111.

**Watson, A., & Shipman, S.** (2008). Using learner generated examples to introduce new concepts. *Educational Studies in Mathematics, 69*, 97-109.

**Yamada, A.** (2000). Two patterns of progress of problem-solving process: From a representational perspective. In T. Nakahara & M. Koyana (Eds.), *Proceedings of the 24th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 4, pp. 289-296). Hiroshima University, Japan: PME.

**Yerushalmy, M., & Schwartz, J. L.** (1993). Seizing the opportunity to make algebra mathematically and pedagogically interesting. In T. A. Romberg, E. Fennema, & T. P. Carpenter (Eds.), *Integrating research on the graphical representation of functions* (pp. 41–68). Hillsdale, NJ, USA: Lawrence Erlbaum Associates.

**Yin, R. K.** (2003). *Case Study Research: Design and Methods*, (3rd Edition). Thousand Oaks, CA, USA: Sage Publications.

**Youschkevitch, A. P.** (1976). The Concept of Function. *Archive for History of Exact Ciencies* (Volume 16, no1, pp. 37-85). New York, USA: Springer.

**Youschkevitch, A. P.** (1981). Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIXe siècle. *Fragments d'histoire des mathématiques* (Volume 41, pp. 7-68). Paris, France: Brochure A.P.M.E.P.

**Zabalza, M. A.** (1987). *Diseño y desarrollo curricular*. Madrid, España: Narcea.

**Zaslavsky, O.** (2005). Transparent Objects and Processes in Learning Mathematics. *An international conference to review research on science, technology and mathematics education December 13-17*. Goa, India**:** International Centre, Dona Paula.

**Zaslavsky, O.** (2008). *What knowledge is involved in choosing and generating useful instructional examples?* Paper submitted to WG2 of the Symposium for celebration of the centennial of ICMI, Rome, March 2008.
Obtido na Net no endereço:
http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/WG2/Papers/ZASLAV.pdf

**Zaslavsky, O.** (2010). The explanatory power of examples in mathematics. Challengs for teaching. In M. K. Stein, & L. Kucan (Eds.), *Instructional explanations in the disciplines.* New York, USA: Springer.

**Zaslavsky, O., & Peled, I.** (1996). Inhibiting factors in generating examples by mathematics teachers and student-teachers: The case of binary operation. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*, 67-78.

**Zaslavsky, O., & Ron, G.** (1998). Students' understanding of the role of counter-examples. *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 1* (pp. 225-232). Stellenbosch, South Africa: PME.

**Zaslavsky, O., & Lavie, O.** (2005). *Teachers' use of instructional examples*. Paper presented at the 15th ICMI study conference: The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics. Águas de Lindóia, Brazil.

**Zaslavsky, O. Harel, G., & Manaster, A.** (2006). A teacher's treatment of examples as reflection of her knowledge-base. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 5, pp. 457–464). Prague, Czech Republic: PME.

**Zaslavsky, O., & Zodik, I.** (2007). Mathematics teachers' choices of examples that potentially support or impede learning. *Research in Mathematics Education, 9*, 143–155.

**Zazkis, R.** (2005) Representing numbers: prime and irrational. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 36* (2-3), 207-217.

**Zazkis, R., & Gadowsky, K.** (2001). Attending to transparent features of opaque representations of natural numbers. In A. Cuoco (Ed.), *NCTM 2001 Yearbook: The roles of representation in school mathematics* (pp. 41-52). Reston, VA, USA: NCTM.

**Zazkis, R., Liljedahl, P.0, & Gadowsky, K.** (2003). Translation of a function: Coping with perceived inconsistency. In N. Pateman, B. Dougherty & J. Ziliox (Eds.), *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA* (Volume 4, pp. 459-466). University of Hawaii, Honolulu, USA: PME.

**Zazkis, R., & Liljedahl, P.** (2004). Understanding primes: The role of representation. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(3), 164–186.

**Zazkis, R., & Sirotic, N.** (2004). Making sense of irrational numbers: focusing on representation. In Hoines, M. J. & Fuglestad, A. B. (Eds.), *Proceedings of the 28th*

*Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 4, pp. 497-504). Bergen University College, Norway: PME.

**Zazkis, R., & Chernoff, E.** (2006). Cognitive conflict and its resolution via pivotal/bridging example. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), **Proceedings of the Thirtieth annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education** (Volume 5, pp. 465-472). Charles Univeristy, Prague, Czech Republic: PME.

**Zazkis, R., & Leikin, R.** (2007). Generating examples: from pedagogical tool to research tool. *For the Learning of Mathematics, 27*(2), 15–21.

**Zazkis, R., & Leikin, R.** (2008). Exemplifying definitions: a case of squares. *Educational Studies in Mathematics*, *69*, 131-148.

**Zazkis, R., & Chernoff, E.** (2008). What makes a counterexample exemplary? *Educational Studies in Mathematics*, *68*, 195-208.

**Zazkis R., Liljedahl, P., & Chernoff E. J** (2008) The role of examples in forming and refuting generalizations. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 40*, 131-141.

**Zhu, X., & Simon, H. A.** (1987). Learning mathematics from examples and by doing. *Cognition and Instruction*, *4*, 137 – 166.

**Zodik, I., & Zaslavsky, O.** (2004). Characteristics of mathematical problem solving tutoring in an informal setting. In Hoines, M. J. & Fuglestad, A. B. (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 4, pp. 489-496). Bergen, Norway: Bergen University College. PME.

**Zodik, I., & Zaslavsky, O.** (2007a). Is a visual example in geometry always helpful? In Woo, Jeong-Ho (Eds.) et al., *Proceedings of the 31st annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 4, pp. 265-272). Seoul, Korea: PME.

**Zodik, I., & Zaslavsky, O.** (2007b). Exemplification in the mathematics classroom: what is it like and what does it imply? *Paper presented at the 5th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME5), Larnaka, Cyprus.

**Zodik, I., & Zaslavsky, O.** (2008). Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, **69**(2), 165-182.

**Zuffi, E.** (2001). Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função. *Educação Matemática em Revista*, *8*(9), 10-16.

**Yamada, A.** (2000). Two patterns of progress of problem-solving process: From a representational perspective. In T. Nakahara & M. Koyana (Eds.), *Proceedings of the*

*24th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 4, pp. 289-296). Hiroshima University, Japan: PME.

**Yerushalmy, M., & Schwartz, J. L.** (1993). Seizing the opportunity to make algebra mathematically and pedagogically interesting. In T. A. Romberg, E. Fennema, & T. P. Carpenter (Eds.), *Integrating research on the graphical representation of functions* (pp. 41–68). Hillsdale, NJ, USA: Lawrence Erlbaum Associates.

**Yin, R. K.** (2003). *Case Study Research: Design and Methods*, (3rd Edition). Thousand Oaks, CA, USA: Sage Publications.

**Youschkevitch, A. P.** (1976). The Concept of Function. *Archive for History of Exact Ciencies* (Volume 16, no1, pp. 37-85). New York, USA: Springer.

**Youschkevitch, A. P.** (1981). Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIXe siècle. *Fragments d'histoire des mathématiques* (Volume 41, pp. 7-68). Paris, France: Brochure A.P.M.E.P.