EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS XX JORNADAS
VOLUMEN 16 (2010)

Pío García
Alba Massolo

Editores

ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Reglas de transformación para diagramas

*Alejandra Ciruelos**

Una clasificación frecuente de los sistemas lógicos formales, es decir aquellos construidos en base a la exigencia de explicitar con precisión tanto los elementos primitivos del sistema como sus reglas de formación de fórmulas y sus reglas de inferencia -y los axiomas, si se tratara de un sistema axiomático- con el fin de contar con un instrumento que garantice demostraciones correctas y rigurosas, los divide entre sistemas sintácticos y sistemas semánticos, según el tipo de reglas de inferencia que el sistema utilice[1] Las reglas sintácticas, como puede apreciarse en el sistema de Deducción Natural de Gentzen, autorizan, a partir de ciertos símbolos o de combinaciones de símbolos, la obtención de nuevos esquemas por medio de la introducción o de la eliminación de una conectiva lógica. Por ejemplo, la regla "Introducción de la Conjunción" establece que si tenemos un esquema A y otro B, podemos introducir el signo "^" y obtener una nueva *fbf* (fórmula bien formada), A ^ B. Las reglas instruyen qué combinaciones están permitidas y cuáles no. La ausencia de cualquier referencia a un estado de cosas, reales o imaginadas, es patente aquí, ya que de lo único que se trata es de la relación de los signos entre sí. Los sistemas formales que utilizan reglas semánticas, en cambio, introducen en éstas el componente denotativo del valor de verdad. De esta manera, sistemas como las tablas semánticas requieren que las condiciones de verdad de los esquemas sean formalmente explicitadas y de acuerdo a su valor de verdad se aplicará una regla de verdad o una regla de falsedad. Esta distinción entre sintaxis y semántica aparece con claridad en los sistemas mencionados; sin embargo, sobre todo debido a razones históricas[2], no se presentó de manera nítida para lógicos como Euler, Venn o Peirce, especialmente si consideramos que estos autores elaboraron sistemas diagramáticos y hubieron de crear reglas para manipular figuras y no esquemas de un cálculo formalizado lingüísticamente.

Desde fines del siglo pasado, las investigaciones en lógica sobre la inferencia heterogénea y la inferencia diagramática han señalado la necesidad de precisar las reglas de transformación para esos sistemas, precisión que, como vimos, está presente en los sistemas lingüísticos. Por ello, en el presente trabajo se mostrarán algunos ejemplos de reglas para diagramas que, al estar exentas de la confusión entre sintaxis y semántica, contribuyen a la construcción de pruebas válidas conservando su visualización, que es la característica distintiva de los mencionados sistemas.

Si se quiere contar con un sistema diagramático que realice demostraciones rigurosas como lo hacen los sistemas lingüísticos, tan ampliamente desarrollados, es necesario llevar a cabo la tarea

* UNRC

de formalización de los mismos. Esta formalización implica que la sintaxis y la semántica del sistema estén definidas y nítidamente diferenciadas.

En la evolución de los diagramas a partir de Euler hasta la actualidad, puede verse la constante búsqueda de sistemas de demostración diagramáticos que integren la capacidad expresiva necesaria para obtener demostraciones válidas, con la claridad visual que hace que dichas demostraciones se vuelvan a la vez intuitivas.

La idea de utilizar diagramas y figuras en general tiene por fin explotar la capacidad de visualizar en ellos los conceptos más abstractos. Dice Martin Gardner a este respecto:

"El diagrama lógico es una figura geométrica bidimensional que muestra relaciones espaciales isomórficas con la estructura de un enunciado lógico. Estas relaciones espaciales son usualmente de carácter topológico, lo cual no es sorprendente en vista del hecho de que las relaciones lógicas son las relaciones primitivas subyacentes en todo razonamiento deductivo, y que las propiedades topológicas son, en cierto sentido, las propiedades fundamentales de las estructuras espaciales. Los diagramas lógicos se hallan con respecto a las álgebras lógicas en la misma relación en que los gráficos de curvas se hallan con respecto a sus fórmulas algebraicas, se trata simplemente de otros modos de simbolizar la misma estructura básica"[3]

Uno de los métodos gráficos más utilizados para decidir si un razonamiento silogístico es válido o no, lo constituyen los diagramas de Venn. Su antecedente se encuentra en el trabajo de Euler en el S. XVIII quien utilizó círculos para representar conjuntos de objetos donde la relación que puede establecerse entre los objetos de distintos conjuntos es representada por la relación espacial que adoptan los círculos y que tienen la característica de ser visualmente comprensibles.[4]

Los círculos de Euler expresaban visualmente los enunciados categóricos universales sin ninguna dificultad con respecto a la comprensión de la relación entre sus términos, pero la representación para los enunciados particulares presentaba una notoria ambiguedad al momento de hacer ciertas inferencias o probar la validez de algún razonamiento que involucrara a estos últimos. Así, se producían derivaciones anómalas, como por ejemplo inferir a partir del mismo gráfico dos afirmaciones contrarias[5].

Venn (1834-1923) advirtió las limitaciones expresivas de los círculos de Euler y propuso un sistema similar para representar conjuntos, el cual, al introducir como nuevo objeto sintáctico el sombreado para denotar la clase vacía, incrementa el poder expresivo del sistema. Una decisión importante de Venn fue tomar como punto de partida círculos intersecados como diagrama básico donde no aparece ninguna información sino que puede verse como el espacio de todas las relaciones posibles entre conjuntos. A este diagrama básico se le irá introduciendo el sombreado como forma de expresar la información de los enunciados universales.

Peirce (1839-1914), en una nueva contribución a esta evolución de los sistemas diagramáticos, introdujo nuevos elementos sintácticos para aumentar aún más la capacidad expresiva de los diagramas al introducir el símbolo *x* para el importe existencial, la línea – para la información disyuntiva y el *o* para expresar el conjunto vacío en reemplazo del sombreado de Venn, aunque esta ganancia de poder expresivo produjo una gran pérdida de visualización

Esta pérdida de visualización ha motivado a nuevos investigadores –entre los cuales Sun-Joo Shin es una de las principales representantes del enfoque sobre el razonamiento heterogéneo- a continuar la búsqueda del equilibrio entre los dos factores, expresividad y visualización, para los sistemas lógicos diagramáticos, destacándose como una tarea imprescindible la necesidad de especificar reglas precisas para la manipulación de los elementos del sistema. Shin ha señalado que las primeras de estas reglas esbozadas por los lógicos mencionados presentan una evidente confusión entre el aspecto sintáctico y el semántico, indicando que fue Peirce el primero en darse cuenta de la necesidad de formular reglas de transformación para diagramas que funcionaran como las reglas del álgebra, es decir, que autorizaran ciertos cambios bajo ciertas condiciones, sin embargo, sus formulaciones no están exentas de ambigüedad (Shin,1994:24). Para ilustrar la citada imprecisión entre las características sintácticas y semánticas, he elegido la cuarta regla de transformación -de seis en total- que Peirce introduce como contribución al sistema de los diagramas de Venn. Dicha regla enuncia lo siguiente: "cuando más de un símbolo está escrito en el mismo compartimento[6], podemos transformar un diagrama de varias maneras, como las siguientes:

Suponga que los símbolos del mismo compartimento son de la misma clase, ya sea ligados o separados. Entonces, son equivalentes a escribir uno solo de ellos.

Suponga que son dos signos diferentes:

(1) Suponga que están conectados entre sí. Entonces podemos borrarlos o dejarlos, ya que no son equivalentes a ningún signo en absoluto.

(2) Suponga que están separados entre sí. Entonces esto constituye un absurdo.

(3) Suponga que dos clases diferentes de signos se conectan con otros signos, digamos, P y Q, respectivamente. Entonces podemos borrar los dos signos contrarios y conectar P y Q" (Shin, 1994:30).

En el primer ítem de la segunda cláusula de esta regla se autoriza a borrar o dejar los signos diferentes ligados que están marcados dentro de la misma área, lo cual constituye una transformación sintáctica, pero la aclaración que le sigue pertenece a la semántica ya que aquí "equivalencia" se refiere a un estado de cosas que las diferentes expresiones puestas juntas denotan, y en este caso significa que no denotan nada, razón por la cual podemos seguir cualquiera de las dos acciones. En el segundo ítem introduce el término "absurdo", claramente está asumiendo que la presencia de ambos signos en la misma área no puede ser aceptada porque cada signo diferente denota no sólo hechos diferentes sino, además, que son contradictorios entre sí.

La superación de la confusión entre los distintos planos puede lograrse, como se ha sugerido, mediante la formalización del sistema diagramático -cualquiera sea este- teniendo en cuenta los siguientes aspectos:

En primer lugar, necesitamos definir la sintaxis del sistema donde se presentarán los objetos diagramáticos primitivos pertenecientes al mismo, las reglas de formación de diagramas que nos indicarán qué diagramas están permitidos y qué combinaciones de ellos pueden hacerse (y en este sentido hablaremos de diagramas bien formados o *dbf*), y las reglas de transformación o de inferencia, cuyas instrucciones nos permitirán, a partir de un diagrama dado, obtener otro; la validez de estas reglas debe garantizar que los diagramas obtenidos sean una consecuencia lógica de los diagramas de partida.

En segundo lugar, como se trata de un sistema lógico de representación, el objetivo es lograr demostraciones de cierto tipo de razonamiento. Para esto es imprescindible contar con una semántica del sistema que nos señale el significado de sus objetos primitivos, es decir, que establezca acerca de qué habla el sistema y que ofrezca una fundamentación de la relación de consecuencia lógica.

El trabajo de Tarski concerniente a la definición de la verdad y a los fundamentos de la semántica, hizo posible, a partir de los años ´30 del siglo pasado, que los sistemas simbólicos contaran con una teoría sólida que vino a ser el fundamento de la validez de las reglas de transformación de fórmulas pertenecientes a esos sistemas y, de esta manera, para que con la aplicación de estas reglas se lograran demostraciones infalibles. Pero este éxito logrado en los sistemas lingüísticos fallaba en los sistemas diagramáticos, reforzando, así, un arraigado prejuicio contra el uso de figuras y su fecundidad en las demostraciones.

Hasta que Barwise y Etchemendy no emprendieron un análisis semántico que fuera independiente de las formas de representación en los sistemas lógicos, no pudo superarse la confusión de los niveles sintáctico y semántico en los sistemas diagramáticos y heterogéneos. Estos investigadores elaboraron una teoría de la inferencia basada en la información que consiste básicamente en afirmar que una inferencia válida es el proceso de extracción de una información a partir de otra información dada, independientemente de la forma de representación en que se halla expresada esa información, ya sea por ejemplo que esté expresada en un lenguaje o bajo la forma de diagramas, o ambas cosas a la vez. La estructura matemática de esta teoría contiene cinco principios de inferencia básicos que representan el flujo de la información: Datos, Suponga, Subsuma, Confluir y Reconocer como Posible, instalándose con éstos en un meta nivel respecto del análisis semántico llevado a cabo por Tarski, para quien la semántica se establecía para cada sistema individualmente, si antes para cada sistema debía justificarse la validez de las reglas sintácticas, con este nuevo enfoque de la inferencia puede hablarse de una semántica que justifique la amplia gama de razonamientos válidos, ya sean formales o informales (por ejemplo los de la vida cotidiana), lingüísticos o no-lingüísticos. Se habla a este respecto de un nivel informacional y semántico libre de sistema (*informational and system-free semantic level*) para contraponerlo al nivel sintáctico y semántico relativo al sistema (*syntactic and system-related semantic level*). En este contexto es de esperarse que las reglas de transformación no puedan ser las mismas, de lo contrario estaríamos tratando a los sistemas no-lingüísticos como sistemas lingüísticos, lo cual ha sido, según Shin (Shin;2002), una de las causas de la ambigüedad presente en los primeros sistemas diagramáticos. Al comparar los elementos primitivos de los sistemas lingüísticos con los de los diagramáticos resulta claro pensar que con tan pocos objetos primitivos en éstos últimos –supongamos que adoptamos el círculo para denotar conjuntos y algunos pocos objetos más- pueda generarse confusión al tratar de determinar a qué conjunto de elementos se refiere un círculo en cada paso de una demostración. Para evitar esta ambigüedad se introduce un medio sintáctico que es la "relación de contraparte", la cual nos permitirá determinar por ejemplo que dos objetos del mismo tipo –dos círculos- se refieren al mismo conjunto o, de lo contrario, denotan conjuntos diferentes, apoyándose para ello en la relación de equivalencia entre regiones básicas.

Se distinguen tres tipos de áreas en un diagrama: *región*, *región básica* y *región mínima*. Una *región* es cualquier área cerrada que está dentro de un diagrama; una *región básica* es el área encerrada por el rectángulo o por un círculo (en caso de que ambos sean objetos primitivos de un sistema); y una *región mínima* es la región dentro de la cual no existe ninguna otra región.

Con el propósito de ilustrar cómo pueden elaborarse reglas para un sistema lógico que trabaje con elementos visuales, se usará un sistema diagramático *ad-hoc* (el sistema DM[7]) para la demostración de razonamientos silogísticos, que consiste en una modificación de lo que en los libros de texto se conoce como diagramas de Venn. En DM, como se verá, el sombreado fue reemplazado por un desplazamiento de los círculos para representar a los enunciados universales y se conserva la *x* para representar enunciados particulares. El interés es mostrar un sistema diagramático muy sencillo pero que sea visualmente intuitivo y cuyas reglas, expresadas de forma clara, sean suficientes para realizar demostraciones rigurosas. Para ello, se adoptan las convenciones y algunas de las definiciones que utiliza Shin en su presentación del sistema Venn I, de su autoría[8].

Objetos primitivos:

Reglas de formación de diagramas:

Sea $\mathcal{D}$ el conjunto mínimo de diagramas bien formados que debe satisfacer las siguientes reglas.

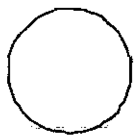
RD1: Se tiene un diagrama básico (*db*) formado por un rectángulo que contiene tres círculos intersecados. El *db* es un *dbf*.

RD2: Si D está en el conjunto $\mathcal{D}$ y D' resulta de marcar una x en una región mínima, entonces D' está en el conjunto $\mathcal{D}$.

RD3: Si D está en el conjunto $\mathcal{D}$ y D' resulta de desplazar un primer círculo dentro de un segundo círculo manteniendo la región mínima común a los tres círculos y otra región mínima con el segundo círculo, entonces D' está en el conjunto $\mathcal{D}$.

RD4: Si D está en el conjunto $\mathcal{D}$ y D' resulta de desplazar simultáneamente dos círculos de modo que entre éstos no exista una región en común pero manteniendo ambos una región mínima en común con el tercer círculo, entonces D' está en el conjunto $\mathcal{D}$.

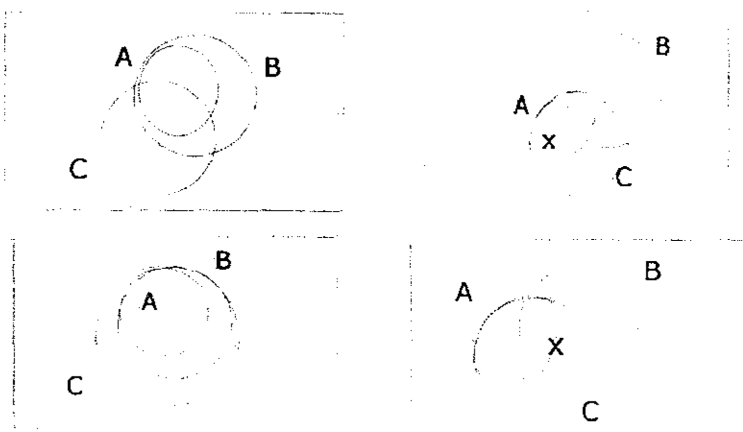
Ejemplos de diagramas[9]:



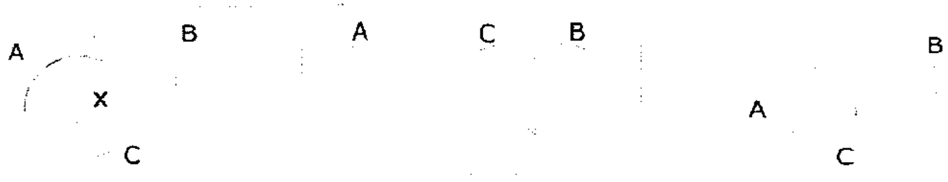
x

Rectangulo Circulo Importe existencial

Son diagramas bien formados (*dbf*).



Son diagramas mal formados (*dmf*).



Reglas de transformación de diagramas:

Las reglas de transformación presuponen la relación sintáctica de "contraparte", mencionada anteriormente, que nos garantiza que en la derivación de un diagrama a partir de otro se haga referencia a los mismos conjuntos. Podemos establecer las siguientes reglas.

RT1. Regla de introducción de una x.

Se puede marcar una x en una región mínima

RT2. Regla de desplazamiento de un círculo.

Se puede desplazar un círculo hasta quedar totalmente contenido en otro segundo círculo, sin modificar la región en intersección con el tercero, si la tuviera Si se aplica RT2 después de haber aplicado RT3, el círculo desplazado se separa totalmente del tercero, no quedando ninguna región en común entre éstos.

RT3: Regla de desplazamiento de dos círculos:

Se pueden desplazar dos círculos simultáneamente hasta separarlos entre sí, sin modificar la región en intersección de cada círculo desplazado con el tercero.

Cada proposición categórica que integra el silogismo tiene, en DM, una representación diagramática precisa, a continuación se muestran cuadros con los enunciados de los tipos:

A: *Todo A es B*,

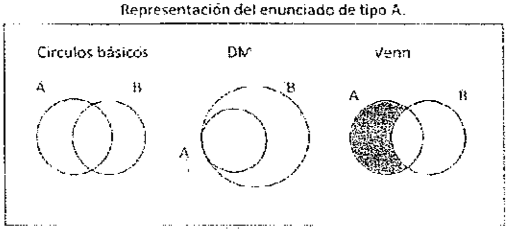
E: *Ningún A es B*,

I: *Algún A es B*, y

O: *Algún A no es B*.

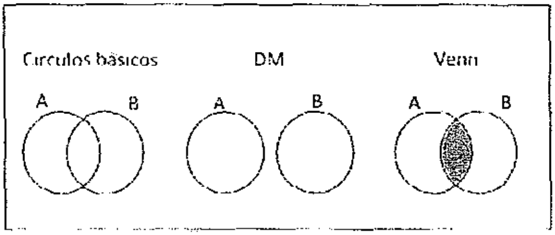
En estos cuadros se compara, además, la representación del sistema DM con el de Venn, partiendo ambos del mismo diagrama básico que está compuesto por dos círculos intersecados que representan los términos del enunciado:

Representación del enunciado de tipo A.



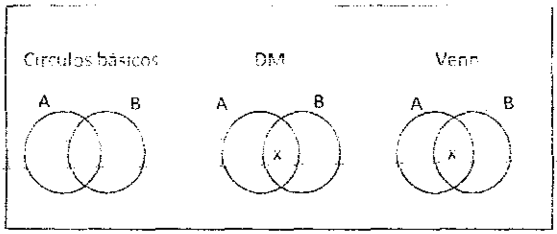
En este caso, en DM, se ha aplicado la regla RT2 que instruye la acción de desplazar un círculo bajo las condiciones especificadas en la regla;

Representación del enunciado de tipo E.

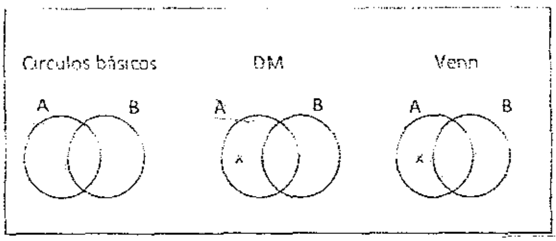


En la representación del enunciado de tipo E ambos círculos se separan espacialmente, como indica la regla RT3; como en el caso anterior, debe observarse la condición de la regla para su correcta aplicación en presencia del tercer círculo;

Representación del enunciado de tipo I.

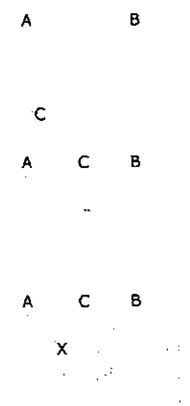


Representación del enunciado de tipo O.



En las afirmaciones existenciales no hay ninguna diferencia entre las representaciones que pertenecen a uno u otro sistema, por lo tanto la aplicación de la regla RT1 de DM procede de la misma manera que lo hace en las demostraciones conocidas como los Diagramas de Venn.

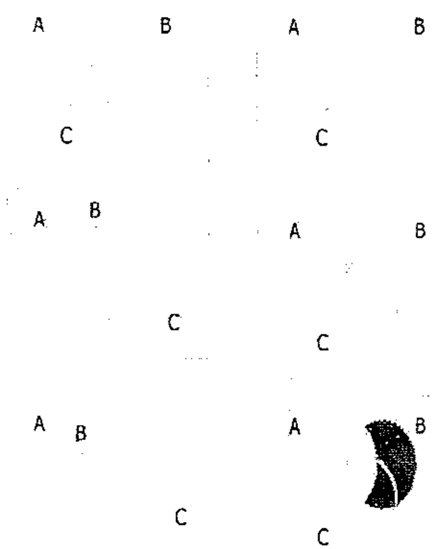
Un ejemplo de derivación donde se han aplicado algunas de estas reglas, es el siguiente, donde se demuestra la validez del siguiente esquema de silogismo.



Ningún A es B
<u>Algún C es A</u>
Algún C no es B

Las reglas citadas tienen, además de la garantía del rigor necesario para hacer demostraciones evitando la ambigüedad, el objetivo de aprovechar las potencialidades visuales de los gráficos generando pruebas eficaces e intuitivas a la vez.

Otro ejemplo nos permitirá mostrar cómo se aprovechan las características de las figuras para lograr una mayor visualización. Se compara, para ello, con una derivación realizada con el modo convencional de los diagramas de Venn como se exponen en los libros de texto. La de la primera columna corresponde a DM y la de la segunda columna, a Venn.



Ningún A es C
<u>Todo B es A</u>
Ningún B es C

Conclusiones:

La investigación sobre el razonamiento multi-modal iniciada por Barwise y Etchemendy ha conducido al replanteamiento de numerosas cuestiones sobre la base de la adopción de nuevos presupuestos teóricos relativos al razonamiento. En el caso particular de los sistemas lógicos se considera, desde este enfoque, que los elementos no-lingüísticos como los mapas, diagramas, gráficos, y figuras en general, pueden constituir piezas genuinas en las demostraciones, así como en la vida diaria la mayoría de las veces razonamos usando esos elementos además de nuestro lenguaje natural.

El desarrollo de una semántica basada en el flujo de la información, justificada matemáticamente, hizo posible la aspiración de formalización de los sistemas heterogéneos y diagramáticos, formalización que parecía ser una prerrogativa de los sistemas simbólicos. En los sistemas diagramáticos formalizados, las reglas de transformación juegan un doble e importante rol: Por un lado, deben estar formuladas de tal manera que estén exentas de confusión entre los niveles sintáctico y semántico, lo cual garantiza demostraciones no ambiguas sino precisas; y por otro lado, deben aprovechar las características visuales de los objetos primitivos del sistema, acercando las pruebas a nuestras intuiciones.

Por último, se ha intentado poner en práctica estas ideas a través de un sistema *ad-hoc*, de alcance limitado, con la pretensión de que sirva, además, como un recurso didáctico para mostrar el beneficio que pueden ofrecer los elementos visuales si son tratados con el rigor y la precisión con que son tratados los esquemas de los lenguajes formalizados.

Notas

1 Históricamente, la exigencia de formalización de los sistemas lógicos tuvo lugar hacia fines del siglo XIX y comienzos del siglo XX siendo enérgicamente impulsada por la metamatemática de Hilbert; estuvo motivada, en parte, por el descubrimiento de lagunas lógicas en las demostraciones euclidianas –por ejemplo, debido a la carencia del postulado explícito de continuidad-, y por la aparición de los llamados "monstruos matemáticos" –figuras demostradas matemáticamente pero antiintuitivas, como el caso de la curva de Koch o la curva de Peano-. Estos hechos generaron en muchos filósofos, además, un enérgico rechazo a la utilización de figuras en las demostraciones por considerarlas ambiguas y activamente engañosas.

2 Como se explicará mas adelante, en este trabajo, hubo que esperar el desarrollo de la semántica formal de Tarski para los sistemas lingüísticos formalizados y el desarrollo de la semántica basada en el flujo de la información de Barwise y Etchemendy, para que se crearan las condiciones históricas necesarias para establecer una distinción rigurosa entre los niveles sintáctico y semántico en la formulación de las reglas de cualquier sistema lógico.

3 Citado por Ferrater Mora en el *Diccionario de Filosofía*, Art. "Diagramas"

4 Ya Leibniz (1646-1716), un siglo antes de Euler, había utilizado círculos "eulerianos" En ellos mostraba algunas figuras y modos aunque no contaba con un cálculo lógico diagramático para hacer demostraciones.

5 Por razones de espacio no exhibo los ejemplos aquí, pero puede consultarse el artículo *Diagrams* en http://plato.stanford.edu/

6 Los símbolos a los cuales se está refiriendo son la *x* del importe existencial y el *o* que denota la clase vacía
7 Esta sigla corresponde a "Diagrama Móvil" y la idea se inspira en el "modelo móvil" del triángulo que presenta R. Arnheim en *El pensamiento visual*, para demostrar que la suma de los ángulos internos de todo triángulo es igual a 180° (un semicírculo). Dicho triángulo tiene dos manecillas móviles que permiten variar el tamaño y el tipo de triángulo adoptando cualquiera de sus posibilidades.
8 Shin, con la creación de sus sistemas Venn I y Venn II, es la primera en elaborar un sistema diagramático formalizado donde además demuestra la consistencia y la completud de los mismos.
9 Por razones de espacio, sólo se ofrecen algunos ejemplos.

Bibliografía:

Shin, S-J (1994) *The Logical Status of Diagrams.* Cambridge University Press.

Shin, S-J (2002) *The iconic Logic of Peirce's Graphs.* Cambridge, MA. MIT Press.

Shin, S-J. (2004) Heterogeneous Reasoning and its Logic, en *The Bulletin of Symbolic Logic*, Vol. 10, Number 1, March.

Shin, Sun-Joo, Lemon, Oliver, "Diagrams", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2008 Edition)*, Edward N. Zalta (ed.), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/win2008/entries/diagrams/>