El Tapiz de Euclides

*Carlos D. Galles**

Introducción

El gran matemático italiano Beppo Levi publicó en Rosario en 1947 su libro "Leyendo a Euclides". De la lectura de esta magnifica obra y de nuestra práctica como docente en la cátedra de Epistemología e Historia de la Ciencia de la UNR surge este modesto trabajo, que se limita a tener aspiraciones didácticas, con que el autor pretende recordar la memoria del ilustre fundador de las matemáticas superiores en el ámbito rosarino.[1]

El gran mérito de Euclides fue el de resumir en unos pocos axiomas todos los resultados anteriores obtenidos en Geometría, agregando asimismo algunos nuevos. Su axiomatización constituyó un ejemplo para los matemáticos y científicos que le sucedieron. Es un excelente ejercicio aun para aquellos que no se dedican a las matemáticas el intentar comprender el intrincado haz de deducciones que conforman la Geometría de Euclides.

Como bien señala Levi los primeros 28 teoremas constituyen una verdadera geometría preeuclidiana pues todos ellos son deducidos con el uso de solamente tres postulados. Es como si Euclides, renuente a la utilización del Quinto Postulado, hubiese querido mostrar hasta que punto la invención unida al uso cuidadoso de los axiomas permite llevar a su máximo las deducciones antes de dirigirse al proficuo camino que conduce a la demostración del Teorema de Pitágoras. Recién la Proposición 29 requiere para su demostración el uso del famoso Quinto Postulado.

Los estudiantes son invitados primeramente a demostrar las primeras tres proposiciones de los Elementos, las cuales tratan sobre el transporte de segmentos, que son las siguientes:

I, 1. Sobre un segmento dado construir un triángulo equilátero.
I, 2. Trazar un segmento igual a un segmento dado con extremo en un punto dado.
I, 3. Dados dos segmentos, cortar del mayor un segmento igual al otro.

A primera vista puede parecer que estas demostraciones son excesivamente sencillas para ser solicitadas a estudiantes universitarios, pero la práctica efectiva nos muestra que tal no es el caso. Para manifestar el rigor con el que se procede en las demostraciones se solicita indicar en cada paso los postulados o nociones comunes que permiten la acción que se realiza, por supuesto esta era una práctica común en los viejos textos que con mayor o menor suerte emulaban a Euclides.

Por otra parte aún un autor distinguido como Ian Mueller asevera, en una obra muy acreditada, que se puede prescindir de la proposición (I, 2), pues (I, 3) puede ser resuelta con el simple procedimiento de colocar el compás con la abertura adecuada sobre el segmento mayor.[2] Es claro que Mueller olvida que el uso legítimo del compás permite sólo el trazado de circunferencias y no el transporte de segmentos. Como regla práctica se puede tomar la siguiente: luego de trazar una circunferencia cierre el compás para evitar la tentación de, sin más, trazar otra igual con centro en un punto distinto al usado anteriormente. El propio Levi destaca sobre esta cuestión que Euclides combate contra el empirista, el cual

* Universidad Nacional de Rosario.

transporta fácilmente segmentos con solo medirlos, mediante una construcción estática que permite realizar la operación completa "aunque fuera sólo en la imaginación."

En este trabajo se presenta una representación gráfica ilustrativa de la urdimbre de deducciones por medio de las cuales Euclides arriba en sus Elementos al Teorema de Pitágoras. En este dibujo se puede apreciar la cadena deductiva que conforma lo que Beppo Levi llamó una Geometría Preeuclidiana, así como el rol decisivo de ciertas proposiciones y los teoremas que no son utilizados posteriormente. Se ha comprobado que esta presentación tiene un buen efecto sobre los estudiantes universitarios de Epistemología, tanto por la visualización en sí misma del grandioso monumento euclidiano, como por el hecho de poder enfrentarse con un sistema axiomático semejante a los que encuentra en su práctica real el científico. Por otra parte el principio de Duhem-Quine, que nos señala que no son las hipótesis aisladas las que se someten al dictamen de la experiencia sino los sistemas teóricos en su totalidad, puede ser expuesto en una manera clara y neta por medio de esta ilustración

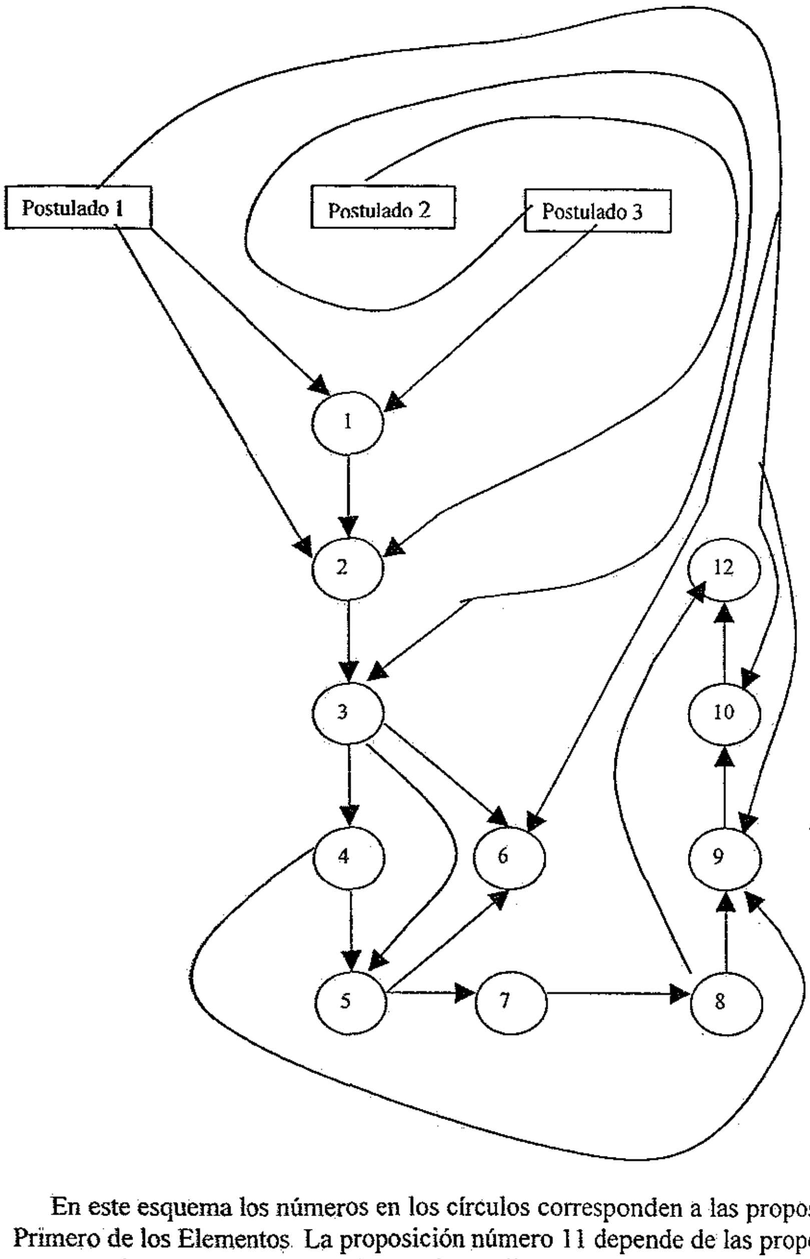
Por otra parte creemos haber comprobado que esta presentación tiene un gran efecto sobre los estudiantes universitarios. En primer lugar porque el monumento euclidiano, el cual fuera otrora y durante más de 2000 años la base de la enseñanza matemática y lógica, no es enseñado en la forma y secuencia tradicional en los colegios secundarios, de allí una suerte de sorpresa en el estudiante al ver que es posible intentar un ordenamiento deductivo sobre tan vasta cantidad de resultados. En segundo lugar porque los estudiantes de humanidades, si bien estudian en sus cursos de epistemología y de lógica los sistemas axiomáticos, rara vez tienen frente a sí un ejemplo de ellos que se asemeje a los que encuentra en su práctica real el científico. Es nuestra creencia que los estudiantes de carreras científicas tampoco serían indiferentes a la subyugación del tapiz euclidiano.

El tapiz de Euclides

En este trabajo hemos compuesto una representación gráfica ilustrativa del Primer Libro de los Elementos a la cual, sin ninguna pretensión artística por supuesto, hemos denominado "El tapiz de Euclides", entendiendo que su presentación frente a los estudiantes puede darles una visión de lo grandioso del monumento lógico construido por el alejandrino con su urdimbre de demostraciones.

El tejido del tapiz es sumamente sencillo: en primer lugar se une con líneas cada teorema y cada problema con todos los postulados, teoremas y problemas anteriores que sirven para su demostración. Obviamente esto conduce a un intrincado dibujo, el cual aplicando nociones simples e intuitivas de topología puede ser presentado de diferentes maneras, algunas de las cuales hacen más fácil la visualización de la construcción euclidiana. Nos hemos limitado al primer libro de Euclides, el cual culmina en la Proposición 47 con el resultado de Pitágoras.

El primer diagrama deductivo que es desarrollado es el mayor que puede construirse con el resultado de encontrarse un grafo plano [3] Es el siguiente.



En este esquema los números en los círculos corresponden a las proposiciones del Libro Primero de los Elementos. La proposición número 11 depende de las proposiciones 1, 3 y 8, y no puede ser alcanzada con líneas de implicancia sin pasar por encima de otras líneas correspondientes a proposiciones anteriores.

El dibujo del tapiz completo, comprendiendo las cadenas inductivas hasta el Teorema de Pitágoras, es sumamente enmarañado y no es posible presentarlo adecuadamente con los medios del procesador de palabra con el que trabajamos y en el espacio de una página de la revista a la cual este trabajo está destinado.[4]

Hemos comprobado que esta presentación tiene un gran efecto sobre los estudiantes universitarios. En primer lugar porque el monumento euclidiano, el cual fuera otrora y durante más de 2000 años la base de la enseñanza matemática y lógica, no es enseñada en la forma y secuencia tradicional en los colegios secundarios. En segundo lugar porque los estudiantes de humanidades, si bien estudian en sus cursos de epistemología y de lógica los sistemas axiomáticos, rara vez tienen frente a sí un ejemplo de ellos que se asemeje a los que encuentra en su práctica real el científico. Es nuestra creencia que los estudiantes de carreras científicas tampoco serían indiferentes a la subyugación del tapiz.

Aplicación al Principio de Duhem-Quine

Por otra parte el principio de Duhem-Quine, que nos señala que no son las hipótesis aisladas las que se someten al dictamen de la experiencia sino los sistemas teóricos en su totalidad, puede ser expuesto en una manera clara y neta por medio de esta ilustración que venimos discutiendo. Recordemos que el principio fue expuesto por primera vez por Pierre Duhem al considerar la posibilidad de experiencias cruciales que pudiesen confrontar con la prueba empírica las hipótesis de las que se valen los científicos tomándolas de a una por vez,[5] y esto es así pues las observaciones experimentales están inscriptas en una compleja malla teórica de conceptos e hipótesis, entre ellas las hipótesis auxiliares. Nos valemos de percepciones para la observación pero además las interpretamos.[6]

Esta idea de Duhem, quien se conformaba con aplicarla a las refutaciones de las hipótesis en Física, fue extendida por Quine, en el llamado holismo de la significación, al lenguaje, por medio de la crítica al reduccionismo y a la distinción entre enunciados analíticos y sintéticos. No pretendemos abordar estas cuestiones en este artículo.

Para un estudiante que haya visto, a través del Tapiz de Euclides que presentamos, la compleja malla de demostraciones que permiten avanzar en la obtención de teoremas resulta incuestionable la verdad de este principio. Claro está que la Geometría de Euclides debe ser pensada en ese caso como una ciencia natural, que por otra parte la fue en sus comienzos, allá en el Antiguo Egipto, cuando según Herodoto tras las crecidas del Nilo había que delimitar nuevamente las fértiles parcelas. Es fácil comprender que si alguno de sus teoremas no lograse ser verificado, tras las mediciones de ángulos y distancias hechas por agrimensores por ejemplo, sería toda la construcción teórica la que caería, no en su aspecto lógico pero sí en la comparación con los resultados experimentales, y no solo alguno de los postulados iniciales.

Recordemos a este respecto que durante mucho tiempo se ha creído que el genial Gauss no vaciló en intentar verificar la suma de los ángulos internos de un triángulo con mediciones terrestres, logrando una confirmación dentro del error de los instrumentos utilizados.[7] Actualmente se cree que esto es un mito, forjado por la admiración de la que ha gozado merecidamente Gauss, y que las mediciones, hechas entre picos de las montañas del Reino de Hannover, sólo pretendían a lo sumo medir la curvatura de la superficie terrestre.[8] También Lobachevsky hizo algún intento parecido con mediciones astronómicas.[9]

Luego sobrevino la teoría de la Relatividad General donde los tests se hicieron observando durante eclipses solares la desviación de la posición de estrellas cuya luz llegaba rasante a la superficie solar, mostrando cabalmente la curvatura del espacio debido a la gravitación. Finalmente cabe consignar que las señales electromagnéticas emitidas por los satélites que forman parte del sistema de posicionamiento sobre la superficie terrestre, llamado GPS por su sigla en inglés (Global Positioning System), son curvadas por el campo gravitatorio de la Tierra, también de acuerdo con las conclusiones de la Relatividad General. Dado que los satélites se encuentran a unos 20000 Km de la superficie del planeta surge una modificación de los valores dados por la geometría euclidiana de unos 2 cm, el cual no se tiene en cuenta por supuesto en la práctica de los geodestas, pero que es en principio medible.[10]

Veamos los efectos que causaría en la estructura deductiva una contrastación negativa del teorema de Pitágoras. A continuación se indica una cadena deductiva inversa que va desde la Proposición 47 hacia los axiomas de base.

Proposición 47 → (46, 31, 14, 4, $\underline{41}$) → (34, $\underline{37}$) → (31, $\underline{35}$, 34) → (29, $\underline{34}$, 26) → ($\underline{29}$, 26, 13) → (23, 27, $\underline{15}$, 13, Axioma 5) → ($\underline{13}$, Axioma 3) → ($\underline{11}$) → (3, 1, $\underline{8}$) → ($\underline{7}$) → ($\underline{5}$) → (4, $\underline{3}$, Axioma 2, Axioma 1) → (Axioma 3)

Las flechas apuntan hacia las proposiciones anteriores, las cuales van entre paréntesis, que se usan explícitamente en la demostración de una dada. Hablamos de "una cadena deductiva inversa" pues para simplificar el dibujo se ha tomado de cada paréntesis, para el paso siguiente, una sola de estas proposiciones, la cual aparece subrayada. Aún con esta limitación se comprueba que todos los axiomas de partida forman parte de la cadena. Es fácil convencerse que otras elecciones en la cadena deductiva, en este ejemplo, conducirían también ineludiblemente a los axiomas de base. En tal forma se muestra claramente que mal se puede por la refutación experimental de un resultado de la teoría rechazar uno y sólo uno de sus axiomas básicos, lo más que podemos decir es que la teoría tomada globalmente debe modificarse.

Notas

[1] Beppo Levi, *Leyendo a Euclides*. La edición original fue publicada por Editorial Rosario en 1947. Una nueva edición ha sido publicada por la editorial Libros del Zorzal en 2000.

[2] Ian Mueller, *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid*, The MIT Press (1981).

[3] Nos basamos en la obra *Euclid. The thirteen books of the elements, Translated with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath*, Dover (1956). La versión completa puede encontrarse también en Internet.

[4] El dibujo del tapiz completo fue exhibido al presentar la ponencia correspondiente en las XII Jornadas de Epistemología e Historia de la Ciencia, La Falda, 13 al 15 de Septiembre de 2001. Para comodidad del dibujante y del lector se recomienda usar como soporte papel tamaño póster.

[5] Pierre Duhem, *La théorie physique. Son objet, sa structure*, Paris, 1914.

[6] En la obra de Gregorio Klimovsky, *Las desventuras del conocimiento científico*, Buenos Aires, A-Z Editora (1994), se presenta un tratamiento riguroso y ameno de estas cuestiones en los capítulos dedicados al método hipotético en versión compleja. Para una introducción a las ideas de Duhem en Filosofía de la Ciencia puede consultarse el siguiente artículo: C. Galles, "Pierre Duhem: Teoría y Experimento en Física", *Revista de Enseñanza de la Física*.

[7] Julio Rey Pastor, José Babini, *Historia de la Matemática*, Vol. II, Barcelona, Editorial Gedisa (1986).

[8] Véase la página en la Red: http://www.mathpages.com/rr/s8-06/8-06.htm.

[9] Para un convencionalista estas contrastaciones pueden parecer un tanto ingenuas, véase al respecto Henri Poincaré, *La science et l'hypothèse*, Flammarion, Paris (1968), donde se sostiene que es posible mantener la geometría euclidiana si se modifican las hipótesis físicas relacionadas con la medición. El punto de vista opuesto es defendido por Carl Hempel en "Geometry and Empirical Science", *American Mathematical Monthly* 52, pág. 7, (1945).

La relación entre la Física y la Geometría es tratada con gran detenimiento en la obra de Michel Paty, *Einstein Philosophe*, PUF, Paris (1993).

[10] B. Hofman-Wellenhof, H. Lichtenegger, J. Collins, *Global Positioning System. Theory and Practice*, Springer Verlag (1994).