

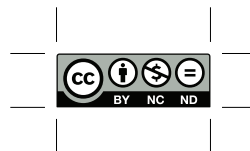
# Estabilidad lineal de agujeros negros

Trabajo especial de Licenciatura

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación,  
Universidad Nacional de Córdoba

Juan Ignacio Cayuso  
Director: Sergio Dain

11 de abril de 2016



Estabilidad lineal de agujeros negros por Cayuso, Juan Ignacio  
se distribuye bajo una  
[Licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-SinDerivar 2.5 Argentina](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/arg/).

# Agradecimientos

Quisiera dar las gracias a todas aquellas personas que han estado conmigo hasta este momento de mi vida, en el cual se ha culminado un sueño, y comienzan muchos otros. A mi familia, por su amor y apoyo infinitos, y por ser quienes me han ayudado a crecer en corazón y mente. A mis amigos, que lejos o cerca, han sabido estar siempre con alegría a mi lado, bendiciéndome con un cariño que llevaré conmigo a donde sea que la vida me lleve. A todos los profesores que he tenido durante estos años, que lograron transmitirme con dedicación y emoción la belleza del mundo que estudiamos. Y quisiera dar un agradecimiento especial a Sergio Dain, un increíble educador pero mucho más increíble ser humano, quien a pesar de haber estado pasando por el momento más duro de su vida, decidió apostar por él, por mí y por muchos más, mostrándome que el amor por lo que uno hace va más allá de cualquier cosa. El brillo de las almas bellas nunca deja este mundo.

## Resumen

En este trabajo se muestra la existencia de una cantidad conservada y definida positiva para las perturbaciones lineales con simetría axial en el exterior del agujero negro de Schwarzschild con dato inicial en la región exterior y para tiempos para los cuales la perturbación gravitacional no haya alcanzado el horizonte de eventos. Utilizando esta cantidad y otras definidas a partir de ella, se dan cotas para los parámetros de la perturbación en la región exterior al horizonte de eventos mediante métodos de análisis funcional y desigualdades geométricas.

## Abstract

We study the existence of conserved quantities for axially symmetric linear perturbations of the exterior region of the Schwarzschild black hole, focusing on perturbations that have not reached the event horizon. Using this conserved quantities, we build bounds for the linear perturbations with the help of functional analysis and geometrical inequalities technics.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>6</b>
<b>I Cantidades conservadas</b>	<b>8</b>
<b>2. Presentación de las ecuaciones y objetos de estudio</b>	<b>8</b>
2.1. Variables y gauge maximal isotérmico . . . . .	8
2.2. Operadores y notación . . . . .	11
2.3. Ecuaciones linearizadas . . . . .	11
2.4. Densidades de energía y masas asociadas . . . . .	13
<b>3. Idea</b>	<b>14</b>
<b>4. Cálculos preeliminares</b>	<b>15</b>
4.1. Energías desacopladas . . . . .	15
4.2. Análisis para las densidades de energía y para $m_1$ . . .	16
<b>5. Sistema de coordenadas de Weyl</b>	<b>19</b>
<b>6. Masas <math>m_0</math> y <math>m_1</math></b>	<b>24</b>
6.1. Estudiando $m_0$ . . . . .	26
6.2. Estudiando $m_1$ . . . . .	28
<b>7. Masa <math>m_\sigma</math></b>	<b>30</b>
7.1. Positividad . . . . .	30
7.2. Finitud . . . . .	30
7.3. Conservación . . . . .	33
<b>8. Masa <math>m_\omega</math></b>	<b>34</b>
8.1. Positividad . . . . .	34
8.2. Finitud . . . . .	35
8.3. Conservación . . . . .	35
<b>9. Primeros resultados</b>	<b>36</b>
9.1. Condiciones de contorno condensadas . . . . .	36
9.2. Teorema I.1 . . . . .	37
<b>II Acotando la perturbación</b>	<b>38</b>
<b>10. Desigualdades geométricas</b>	<b>38</b>
10.1. Teorema II.1 . . . . .	39
10.1.1. Prueba del Teorema II.1 . . . . .	41

<b>11.Cotas para la perturbación</b>	<b>44</b>
11.1. Corolario 11.1 . . . . .	44
11.2. Prueba del Corolario 11.1 . . . . .	45
<b>12.Conclusiones y observaciones para el futuro</b>	<b>48</b>

# 1. Introducción

Uno de los problemas abiertos más importantes en Relatividad General es el de demostrar la estabilidad de los agujeros negros. Como todo problema complejo, es necesario conocerlo con detalle y estudiar primero sus formas más simples. En este caso, mucho trabajo se invierte en comprender y estudiar las perturbaciones lineales de este sistema físico, las cuales nos permiten atacar el problema con menor dificultad y ganar intuición en el área. En este trabajo final de licenciatura se comenzará un estudio acerca de las perturbaciones lineales con simetría axial del agujero negro de Schwarzschild, siguiendo en parte el espíritu de los artículos [1] y [2] en los cuales se realiza una labor similar para el agujero negro de Kerr extremo. Es importante remarcar que estos trabajos han servido de guía y nos hallaremos realizando constantes comparaciones y comentarios de su contenido.

Para comenzar esta introducción, sería útil hacer una aclaración acerca de a que nos estamos refiriendo con una perturbación lineal de un espacio-tiempo. Dada una solución particular de las ecuaciones de Einstein de vacío, por ejemplo la del agujero negro de Schwarzschild, estudiar una perturbación lineal de dicho espacio-tiempo sería considerar la evolución y comportamiento de otra solución que se encuentre “cerca” de la que tenemos como referencia. Ahora, ¿cómo uno puede generar alguna correspondencia matemática con este concepto de cercanía?

Consideremos lo siguiente: dado que las ecuaciones de Einstein de vacío tienen muchas soluciones, uno podría construir con ellas una familia monoparamétrica  $\psi(\lambda)$ , de modo que recorriendo distintos valores de  $\lambda$  uno puede moverse de una solución a otra de forma continua. En particular, vamos a pensar que  $\psi(0)$  es una solución estacionaria de las ecuaciones de Einstein de vacío. El concepto de perturbación lineal surge entonces de considerar un desarrollo de Taylor alrededor de  $\lambda = 0$ , en el cual las únicas cantidades relevantes son:

$$\psi_0 = \psi(\lambda)\Big|_{\lambda=0}, \quad \psi_1 = \frac{d\psi}{d\lambda}(\lambda)\Big|_{\lambda=0} \quad (1)$$

lo cual significaría que los términos  $\psi_n = \frac{d^n\psi}{d\lambda^n}\Big|_{\lambda=0}$  con  $n > 1$  son tan chicos que pueden ser despreciados en el análisis. En palabras más simples, el espacio-tiempo perturbado que estamos considerando es tan parecido a la solución de fondo que solo necesitamos hasta orden lineal en  $\lambda$  para describir dicha perturbación.

Con esto en mente, podemos decir que tratar el problema de estabilidad lineal es estudiar la evolución de los términos lineales asociados a

cada una de las variables o incógnitas involucradas en las ecuaciones de Einstein. Más aún, podemos hacer uso solamente de la parte de las ecuaciones que gobierne el comportamiento de los términos lineales de  $\psi(\lambda)$  (ecuaciones linearizadas), y cualquier cantidad que queramos calcular deberá ser computada solo utilizando  $\psi_0$  y  $\psi_1$ .

Como fue mencionado en el primer párrafo, para realizar este trabajo nos hemos guiado por los artículos [1] y [2]. En ellos, se utiliza una técnica que se basa en cantidades conservadas y desigualdades geométricas para lograr acotar las perturbaciones lineales axialmente simétricas del agujero negro de Kerr extremo. La pieza central del primero de estos trabajos es la utilización de un gauge en simetría axial conocido por el nombre de **gauge maximal isotérmico**, el cual se obtiene tras realizar una reducción por simetría de la métrica, y que especificaremos más adelante en el trabajo. Una pregunta válida que surge es: ¿Por qué utilizar este particular gauge? La respuesta está en una propiedad muy interesante del mismo. En Relatividad General, uno puede calcular una cantidad llamada **masa ADM** para un dado espacio-tiempo, que resulta ser una cantidad conservada para las ecuaciones de Einstein “completas”(no linearizadas). La novedad es que trabajando en el gauge maximal isotérmico, esta cantidad puede ser escrita como una integral definida positiva sobre hipersuperficies espaciales:

$$m = \frac{1}{16} \int_{\Omega} \epsilon dV \quad (2)$$

donde nos referiremos a  $\epsilon$  como una “densidad de energía”. ¿Y cómo puede ayudarnos esto a estudiar las perturbaciones en el régimen lineal? Lo que se ve en [1] es que si uno calcula la masa ADM utilizando los campos solo hasta orden lineal

$$m(\psi_0 + \lambda\psi_1) = \frac{1}{16} \int_{\Omega} \epsilon(\psi_0 + \lambda\psi_1) dV, \quad (3)$$

se obtiene que el término resultante de orden cuadrático en  $\lambda$ , que llamaremos  $\mathbf{m}_2$ , sirve como cantidad definida positiva y conservada para la perturbación lineal. Valiéndose de esta cantidad conservada, en [2] se construyen cotas para este tipo de perturbaciones mediante técnicas de análisis funcional y de desigualdades geométricas.

En este trabajo final de licenciatura nos proponemos estudiar las perturbaciones lineales con simetría axial para la región exterior del agujero negro de Schwarzschild, siguiendo el espíritu de los trabajos [1] y [2]. ¿A qué se debe nuestra elección de trabajar con este espacio-tiempo particular? Para responder esto, hay que hacer un comentario

acerca de lo hecho en [1]. Cuando uno estudia estas perturbaciones para el agujero de Kerr extremo, es posible utilizar un sistema de coordenadas dentro del gauge maximal isotérmico para el cual el horizonte de eventos sea un límite asintótico. ¿Qué quiere decir esto? Que si uno considera un dato inicial en el exterior del agujero negro, la perturbación no alcanzará el horizonte para un tiempo finito, evitando incluir en el análisis el complicado comportamiento de los campos en el horizonte. Esto significa una gran simplificación para el estudio de perturbaciones del exterior de este agujero negro, pero es una propiedad provista por su carácter extremo. Cuando uno considera casos más complicados como el del agujero negro de Kerr, este truco no es posible y hay que tener en cuenta la posibilidad de que la perturbación alcance el horizonte.

Es por esta razón que estudiamos el caso de Schwarzschild, mucho más simple que el de Kerr, pero aún con la complicación arriba mencionada. Sin embargo, no enfocaremos por el momento nuestros esfuerzos en investigar que sucede con una perturbación que llega al horizonte, sino que más bien seguiremos el ejemplo de [1] y [2] para determinar si existe alguna cantidad conservada para esta perturbación lineal con simetría axial ( por lo menos para aquellos tiempos para los cuales no haya alcanzado el horizonte) y construiremos cotas para la misma en alguna región del exterior del agujero negro.

## Parte I

# Cantidades conservadas

## 2. Presentación de las ecuaciones y objetos de estudio

### 2.1. Variables y gauge maximal isotérmico

Para introducir los objetos con los cuales se escribirán las ecuaciones, vale la pena dar una explicación acerca de su significado. Como punto de partida, consideremos una solución de las ecuaciones de Einstein de vacío, es decir, una variedad 4 dimensional  $M$  junto con una métrica  $g_{AB}$  ( con signatura  $(- + + +)$ ) tal que el correspondiente tensor de Ricci sea nulo

$${}^{(4)}R_{AB} = 0. \tag{4}$$

Ahora, si estamos considerando un espacio-tiempo axialmente simétri-



co, sabemos que el mismo admite un campo vectorial de Killing  $\eta^A$  tal que el mismo satisface la ecuación:

$$\nabla_{(A}\eta_{B)} = 0 \quad (5)$$

donde  $\nabla_A$  es la conexión correspondiente a la métrica  $g_{AB}$ , y los índices  $A, B, \dots$  denotan índices 4-dimensionales. A partir de este campo vectorial definimos su norma cuadrado  $\eta$  y su “twist”  $\omega_A$  mediante:

$$\eta = \eta^A \eta^B g_{AB} \quad , \quad \omega_A = \epsilon_{ABCD} \eta^B \nabla^C \eta^D. \quad (6)$$

Usando la ecuación (5), se puede ver que el twist satisface:

$$\nabla_{[A}\omega_{B]} = 0 \quad (7)$$

lo cual nos dice que podemos escribir a  $\omega_A$  como el gradiente de un campo escalar  $\omega$

$$\omega_A = \nabla_A \omega. \quad (8)$$

Ahora, para realizar la reducción por simetría de esta 4-métrica consideremos lo siguiente: sea  $N$  la colección de las trayectorias de  $\eta^A$  y asumamos que  $N$  es una 3-variedad diferenciable. Definimos la “métrica reducida”  $h_{AB}$  con signatura  $(-++)$  sobre  $N$  mediante:

$$\eta g_{AB} = h_{AB} + \eta_A \eta_B. \quad (9)$$

Lo que uno obtiene al expresar las ecuaciones (5) sobre  $N$  es que los campos  $\eta$  y  $\omega$  cumplen la función de fuente de materia efectiva para las ecuaciones de Einstein de la métrica  $h_{AB}$ , con tensor de Ricci asociado  ${}^{(3)}R_{AB}$ . Esto nos dice que la dinámica del problema está codificada en estos escalares geométricos  $\eta$  y  $\omega$ .

Para continuar nuestra descripción de la 3-métrica, consideremos una foliación de  $h_{AB}$  con superficies espaciales  $S_t$  2-dimensionales, donde  $t$  es una función de tiempo global que parametriza dichas superficies. Sea  $n^A$  un vector unitario normal y ortogonal a las superficies  $S_t$  respecto a la métrica  $h_{AB}$ , con lo cual podemos escribir:

$$h_{AB} = -n_A n_B + q_{AB}, \quad (10)$$

siendo entonces  $q_{AB}$  la métrica de signatura  $(++)$  inducida en cada superficie  $S_t$ . Para introducir la función de tiempo  $t$  en nuestra descripción consideremos un campo  $t^A$  tal que  $t^A \tilde{\nabla}_A t = 1$ , donde  $\tilde{\nabla}_A$  es la conexión asociada a  $h_{AB}$ . Este campo tiene la interpretación de dar el “flujo de tiempo” a través del espacio-tiempo. Uno puede entonces reescribir la métrica  $h_{AB}$  para incluir la coordenada  $t$  descomponiendo  $t^A$  en su proyección sobre  $n^A$  y sobre las superficies  $S_t$ :

$$h_{AB} = -\alpha^2 dt_A dt_B + \tilde{q}_{AB} \quad (11)$$

donde  $\alpha$  (función de lapso) es justamente la componente de  $t^A$  sobre  $n^A$  y  $\tilde{q}_{AB}$  es el resultado de agregarle a  $q_{AB}$  el término asociado a la proyección de  $t^A$  sobre  $S_t$ , conocida como el vector de shift  $\beta^A$ .

Estamos ahora en condiciones de especificar cómo es que se alcanza el gauge maximal isotérmico para la métrica  $h_{AB}$ . Las condiciones que fijan el gauge son: que la elección de coordenadas  $(\rho, z)$  sobre  $S_t$  sea tal que la métrica adquiera la forma:

$$h_{AB} = -\alpha^2 dt_A dt_B + e^{2u} (d\rho_A d\rho_B + dz_A dz_B) = -\alpha^2 dt_A dt_B + e^{2u} \delta_{AB}, \quad (12)$$

(con  $u$  una dada función de  $(\rho, z)$ ) y que la curvatura extrínseca o segunda forma fundamental  $\chi_{AB}$  (curvatura de la métrica inducida  $\tilde{q}_{AB}$ ) sea igual a cero.

Para cerrar esta sección, comentamos que debido al comportamiento de  $\eta$  sobre el eje de simetría (se anula), resulta más adecuado para escribir las ecuaciones la utilización de una variable auxiliar  $\sigma$  definida mediante:

$$\eta = \rho^2 e^\sigma. \quad (13)$$

De modo que ahora los grados de libertad dinámicos estarán codificados en  $(\sigma, \omega)$ . También, para escribir las ecuaciones hacemos uso de las variables auxiliares  $\bar{\alpha}$  y  $q$  definidas a través de:

$$\alpha = \bar{\alpha}\rho, \quad u = \ln(\rho) + \sigma + q. \quad (14)$$

Por último, mencionamos condiciones de paridad que deben satisfacer los campos para que la métrica sea regular en el eje:

$$\eta, \omega, \bar{\alpha}, u, q, \sigma, \chi_{\rho\rho}, \beta^z \text{ deben ser pares como funciones de } \rho, \quad (15)$$

y

$$\alpha, \chi_{\rho z}, \beta^\rho \text{ deben ser impares como funciones de } \rho. \quad (16)$$

## 2.2. Operadores y notación

Para escribir las ecuaciones haremos uso de los siguientes operadores diferenciales. El 2-Laplaciano  $\Delta$  definido por

$$\Delta f = \partial_\rho^2 f + \partial_z^2 f, \quad (17)$$

los operadores  ${}^{(3)}\Delta$  y  ${}^{(7)}\Delta$  definidos por

$${}^{(3)}\Delta f = \Delta f + \frac{\partial_\rho f}{\rho}, \quad (18)$$

$${}^{(7)}\Delta f = \Delta f + 5 \frac{\partial_\rho f}{\rho}, \quad (19)$$

los cuales corresponden al Laplaciano en 3 y 7 dimensiones actuando sobre funciones axialmente simétricas escrito en coordenadas cilíndricas. También usaremos el operador de Killing conforme  $\mathcal{L}$  definido como

$$(\mathcal{L}\beta)_{AB} = \partial_A \beta_B + \partial_B \beta_A - \delta_{AB} \partial_C \beta^C. \quad (20)$$

El símbolo  $\partial$  denota a las derivadas parciales respecto a las coordenadas  $(\rho, z)$  y las ecuaciones han sido escritas de modo tal que todos los índices se mueven usando la métrica plana  $\delta_{AB}$ , con el objetivo de eliminar posibles confusiones. Los subíndices 0 y 1 denotan de que orden en la expansión de la perturbación es la cantidad considerada. Eso significa que los objetos con subíndice 0 corresponden a aquellos que se calculan con la métrica no perturbada.

## 2.3. Ecuaciones linealizadas

Al igual que en [1], las ecuaciones de Einstein presentadas en la sección (2.1) de dicho trabajo se linealizan, dándonos como resultado el conjunto que se presenta a continuación. Un comentario importante a realizar es aquel acerca de los distintos tipos de ecuaciones que tenemos. Las mismas se dividen en tres tipos: ecuaciones de evolución, ecuaciones de vínculo y ecuaciones de gauge. En particular, las ecuaciones de evolución se dividen en ecuaciones para  $(\sigma_1, \omega_1)$  y ecuaciones para la métrica y la curvatura extrínseca, pero estas ecuaciones no son independientes y eso se debe a las simetrías del problema. Es por ello que en este trabajo utilizaremos únicamente las ecuaciones de evolución para

$(\sigma_1, \omega_1)$  y cuando necesitemos saber de la evolución de la métrica o de la curvatura extrínseca, se tomarán derivadas temporales de las ecuaciones de vínculo. A pesar de esto, por completitud, presentamos el set de ecuaciones en su totalidad.

**Ecuaciones de evolución:** Las ecuaciones de evolución para  $\sigma_1$  y  $\omega_1$  están dadas por

$$-\frac{e^{2u_0}}{\alpha_0^2}\dot{p} + {}^{(3)}\Delta\sigma_1 + \frac{\partial_A\sigma_1\partial^A\bar{\alpha}_0}{\bar{\alpha}_0} = 0, \quad (21)$$

$$-\frac{e^{2u_0}}{\alpha_0^2}\dot{d} + {}^{(3)}\Delta\omega_1 + \frac{\partial_A\omega_1\partial^A\bar{\alpha}_0}{\bar{\alpha}_0} = 4\frac{\partial_\rho\omega_1}{\rho} + 2\partial_A\omega_1\partial^A\sigma_0, \quad (22)$$

donde hemos definido las siguientes variables auxiliares

$$p = \dot{\sigma}_1 - \beta_1^A\partial_A\sigma_0 - 2\frac{\beta_1^\rho}{\rho}, \quad (23)$$

$$d = \dot{\omega}_1. \quad (24)$$

Las ecuaciones de evolución para la métrica y la segunda forma fundamental se escriben como

$$2\dot{u}_1 = \partial_A\beta_1^A + 2\beta_1^A\partial_A u_0, \quad (25)$$

$$\dot{\chi}_{1AB} = -(F_{1AB} + \alpha_0 G_{1AB}), \quad (26)$$

donde

$$F_{1AB} = -2\partial_{(A}\alpha_0\partial_{B)}u_1 + \delta_{AB}\partial_C\alpha_0\partial^C u_1, \quad (27)$$

y

$$G_{1AB} = \frac{1}{2\eta_0^2}(\partial_A\eta_1\partial_B\eta_0 + \partial_A\eta_0\partial_B\eta_1) - \frac{\sigma_1}{\eta_0^2}\partial_A\eta_0\partial_B\eta_0, \\ - \frac{\delta_{AB}}{2} \left[ \frac{1}{\eta_0^2}\partial_C\eta_0\partial^C\eta_1 - \frac{\sigma_1}{\eta_0^2}\partial|\eta_0|^2 \right]. \quad (28)$$

**Ecuaciones de vínculo:** Los vínculos de momento y los vínculos Hamiltonianos están dados por

$$\partial^B\chi_{1AB} = -\frac{e^{2u_0}}{2\alpha_0}p \left( \partial_A\sigma_0 + 2\frac{\partial_A\rho}{\rho} \right), \quad (29)$$

$${}^{(3)}\Delta\sigma_1 + \Delta q_1 = -\frac{\epsilon_1}{4\rho}, \quad (30)$$

donde  $\epsilon_1$  es el término de primer orden de la densidad de energía exacta.

$$\epsilon_1 = 2\partial_A\sigma_0\partial^A\sigma_1\rho = \left.\frac{d\epsilon}{d\lambda}(\lambda)\right|_{\lambda=0}. \quad (31)$$

Cabe destacar que la relación (30) vale también cuando se reemplaza por las cantidades con subíndice 0.

**Ecuaciones de gauge:** Uno puede ver que el término de primer orden del lapso es cero, y para el shift tenemos

$$(\mathcal{L}\beta_1)^{AB} = 2e^{-2u_0}\alpha_0\chi_1^{AB}. \quad (32)$$

## 2.4. Densidades de energía y masas asociadas

A continuación vamos a introducir los objetos mas importantes de este trabajo: los distintos órdenes de la densidad de energía y sus masas asociadas. Si recordamos la introducción, estas cantidades son los remanentes de la masa ADM luego de realizada la linearización, y nuestra intención es investigar si a partir de estos objetos podemos conseguir alguna cantidad conservada para la perturbación lineal. El término de orden lineal  $\epsilon_1$  de la densidad exacta  $\epsilon$  ya ha sido introducido cuando se presentaron las ecuaciones de vínculo. Los términos restantes son el de orden cero:

$$\epsilon_0 = |\partial\sigma_0|^2\rho = \left.\epsilon(\lambda)\right|_{\lambda=0}, \quad (33)$$

y un término  $\mathcal{O}(\lambda^2)$ :

$$\begin{aligned} \epsilon_2 &= \left(\frac{2e^{2u_0}}{\alpha_0^2}\left(p^2 + \frac{\dot{\omega}_1^2}{\eta_0^2}\right) + 2|\partial\sigma_1|^2 + 4e^{-2u_0}\chi_1^{AB}\chi_{1AB} + 2\frac{|\partial\omega_1|^2}{\eta_0^2}\right)\rho \\ &= \epsilon(\psi_0 + \lambda\psi_1). \end{aligned} \quad (34)$$

Notemos que esta cantidad  $\epsilon_2$  no es exactamente el término  $\mathcal{O}(\lambda^2)$  de  $\epsilon(\lambda)$ , pues le falta la parte asociada a  $\psi_2$ , la cual no podemos usar debido a que nos restringimos a trabajar con los campos hasta orden lineal.

Las masas asociadas con los distintos ordenes de la energía son

$$m_0 = \frac{1}{16} \int_{\Omega} \epsilon_0 \, d\rho dz, \quad (35)$$

$$m_1 = \frac{1}{16} \int_{\Omega} \epsilon_1 d\rho dz, \quad (36)$$

$$m_2 = \frac{1}{16} \int_{\Omega} \epsilon_2 d\rho dz, \quad (37)$$

donde  $\Omega$  se corresponde con la región exterior al horizonte de eventos. Ya tenemos entonces todo el material necesario para comenzar a trabajar, a excepción de la herramienta más importante de todas, que es una idea clara y directa de lo que se pretende en este trabajo, y que se desarrolla en la siguiente sección.

### 3. Idea

¿Cuales serán nuestras intenciones respecto al análisis de las masas presentadas en la sección anterior? Tenemos una serie de puntos que guiarán dicho trabajo. En primer lugar, existe un resultado proveniente de la formulación Hamiltoniana de la Relatividad General el cual establece que la primera variación de la masa ADM,  $m_1$ , debe ser nula cuando el espacio-tiempo de fondo es uno estacionario, como lo es para el caso de Schwarzschild. Esta propiedad es algo que deberemos corroborar en nuestro trabajo. En segundo lugar, nuestra intención es demostrar que  $m_2$  sirve como una cantidad conservada para la perturbación lineal, lo cual se traduciría a que su derivada temporal  $\dot{m}_2$  sea nula.

La pregunta que surge entonces es, ¿Cómo podemos ver que  $m_1$  y  $\dot{m}_2$  son iguales a 0? La propuesta que hemos explorado es la siguiente: Si fuese posible escribir a  $\epsilon_1$  y a  $\dot{\epsilon}_2$  como divergencias de campos  $t_1^A$  y  $t_2^A$

$$\epsilon_1 = \partial_A t_1^A \quad \dot{\epsilon}_2 = \partial_A t_2^A, \quad (38)$$

entonces podríamos expresar a  $m_1$  y  $\dot{m}_2$  no como integrales volumétricas, sino como integrales sobre el borde de  $\Omega$

$$m_1 = \frac{1}{16} \int_{\Omega} \epsilon_1 d\rho dz = \frac{1}{16} \int_{\partial\Omega} t_1^A n_A dL, \quad (39)$$

$$\dot{m}_2 = \frac{1}{16} \int_{\Omega} \dot{\epsilon}_2 d\rho dz = \frac{1}{16} \int_{\partial\Omega} t_2^A n_A dL, \quad (40)$$

Ahora, esto nos da una forma más simple de analizar las masas. Dentro del volumen  $\Omega$ , los campos podrían cambiar durante

su evolución de formas en las cuales no se vea claramente si las integrales se anulan o no, pero pasando a integrales en el borde  $\partial\Omega$ , uno puede estudiar las condiciones de contorno para las cuales lo que buscamos se cumpla, sin hacer referencia a como estén cambiando los campos dentro de  $\Omega$ .

Nuestros objetivos quedan claros ahora: Investigar la existencia de un sistema de coordenadas dentro del gauge maximal isotérmico para el cual se cumple que  $\epsilon_1$  y a  $\dot{\epsilon}_2$  son divergencias de campos  $t_1^A$  y  $t_2^A$  (lo cual nos asegura la expresión de  $m_1$  y  $\dot{m}_2$  como integrales de borde) y seguido de esto estudiar las condiciones de contorno en  $\partial\Omega$  que aseguran la nulidad de las masas, y por lo tanto la existencia de una cantidad conservada para la perturbación.

En la siguiente sección, realizaremos algunos cálculos preliminares que nos ayudarán a comenzar esta labor.

## 4. Cálculos preliminares

### 4.1. Energías desacopladas

Si se le da un buen vistazo a las expresiones de las ecuaciones de evolución (21) y (22), y la expresión (34) para la energía  $\epsilon_2$ , puede verse que las variables  $\sigma_1$  y  $\beta_1^A$  están desacopladas de  $\omega_1$ . Esto nos introduce una importante simplificación, y es que podemos analizar la conservación de  $m_2$  por separado, estudiando las siguientes densidades de energía:

$$\epsilon_\sigma = \left( \frac{2e^{2u_0}}{\alpha_0^2} p^2 + 2|\partial\sigma_1|^2 + 4e^{-2u_0} \chi_1^{AB} \chi_{1AB} \right) \rho, \quad (41)$$

y

$$\epsilon_\omega = \left( \frac{2e^{2u_0}}{\alpha_0^2} \frac{\dot{\omega}_1^2}{\eta_0^2} + 2 \frac{|\partial\omega_1|^2}{\eta_0^2} \right) \rho. \quad (42)$$

De forma similar, separamos la masa  $m_2$  en sus dos términos para un mejor manejo:

$$m_\sigma = \frac{1}{16} \int_\Omega \epsilon_\sigma \, d\rho dz, \quad (43)$$

$$m_\omega = \frac{1}{16} \int_\Omega \epsilon_\omega \, d\rho dz. \quad (44)$$

## 4.2. Análisis para las densidades de energía y para $m_1$

Lo que realizaremos a continuación es uno de los puntos discutidos en la idea de este trabajo: tomar la derivada temporal de  $\epsilon_\sigma$  y  $\epsilon_\omega$  en busca de ver si existe alguna condición general para que las mismas puedan ser escritas como la derivada  $\partial_A t^A$  de un campo  $t^A$  sobre la región de integración.

### Empecemos con $\epsilon_\sigma$

$$\dot{\epsilon}_\sigma = \left( \frac{4e^{2u_0}}{\alpha_0^2} p\dot{p} + 4\delta_{AB}\partial^A\dot{\sigma}_1\partial^B\sigma_1 + 8e^{-2u_0}\dot{\chi}_1^{AB}\chi_{1AB} \right) \rho, \quad (45)$$

Para trabajar esta expresión, utilizamos las ecuaciones de evolución y de gauge:

$$\begin{aligned} \frac{4e^{2u_0}}{\alpha_0^2} \dot{p}p &= \left( {}^{(3)}\Delta\sigma_1 + \frac{\partial_A\sigma_1\partial^A\bar{\alpha}_0}{\bar{\alpha}_0} \right) 4p, \\ &= \left( {}^{(3)}\Delta\sigma_1 + \frac{\partial_A\sigma_1\partial^A\bar{\alpha}_0}{\bar{\alpha}_0} \right) \left( 4\dot{\sigma}_1 - 4\beta_1^A\partial_A\sigma_0 - \frac{8\beta_1^\rho}{\rho} \right), \end{aligned} \quad (46)$$

donde hemos utilizado en la primera línea la ecuación de evolución (21) y en la segunda línea la definición de  $p$  dada por (23).

$$\begin{aligned} 8e^{-2u_0}\dot{\chi}_1^{AB}\chi_{1AB} &= \frac{4(\mathcal{L}\beta)^{AB}\dot{\chi}_{1AB}}{\alpha_0}, \\ &= \frac{8\partial^A\beta_1^B\dot{\chi}_{1AB}}{\alpha_0}, \\ &= \frac{8\partial^A(\beta_1^B\dot{\chi}_{1AB}) - 8\beta_1^{AB}\partial^A\dot{\chi}_{1AB}}{\alpha_0}, \end{aligned} \quad (47)$$

donde hemos usado en la primera línea la ecuación de gauge (32), y hemos escrito la segunda línea utilizando que  $\chi_{1AB}$  posee traza nula. La tercer línea se obtiene simplemente sumando y restando términos para que emerge la derivada  $\partial^A(\beta_1^B\dot{\chi}_{1AB})$ . Continuamos usando la derivada temporal de la ecuación de vínculo (29) e insertando todas estas expresiones en (45), tenemos:



$$\begin{aligned}
\partial^A \dot{\chi}_{1AB} &= -\frac{e^{2u_0}}{2\alpha_0} \dot{p} \left( \partial_B \sigma_0 + \frac{2\delta_{B\rho}}{\rho} \right), \\
&= -\frac{\alpha_0}{2} \left( {}^{(3)}\Delta\sigma_1 + \frac{\partial_A \sigma_1 \partial^A \bar{\alpha}_0}{\bar{\alpha}_0} \right) \left( \partial_B \sigma_0 + \frac{2\delta_{B\rho}}{\rho} \right), \quad (48)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{\epsilon}_\sigma}{\rho} &= \left( {}^{(3)}\Delta\sigma_1 + \frac{\partial_A \sigma_1 \partial^A \bar{\alpha}_0}{\bar{\alpha}_0} \right) \left( 4\dot{\sigma}_1 - 4\beta_1^A \partial_A \sigma_0 - \frac{8\beta_1^\rho}{\rho} \right) \\
&\quad + 4\delta_{AB} \partial^A \dot{\sigma}_1 \partial^B \sigma_1 + \frac{8\partial^A (\beta_1^B \dot{\chi}_{1AB})}{\alpha_0} \\
&\quad + 4\beta_1^B \left( {}^{(3)}\Delta\sigma_1 + \frac{\partial_A \sigma_1 \partial^A \bar{\alpha}_0}{\bar{\alpha}_0} \right) \left( \partial_B \sigma_0 + \frac{2\delta_{B\rho}}{\rho} \right), \quad (49)
\end{aligned}$$

Realizando cancelaciones, se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{\epsilon}_\sigma}{\rho} &= {}^{(3)}\Delta\sigma_1 4\dot{\sigma}_1 + \frac{\partial_A \sigma_1 \partial^A \bar{\alpha}_0}{\bar{\alpha}_0} 4\dot{\sigma}_1 \\
&\quad + 4\delta_{AB} \partial^A \dot{\sigma}_1 \partial^B \sigma_1 + \frac{\partial^A (8\beta_1^B \dot{\chi}_{1AB})}{\alpha_0}, \quad (50)
\end{aligned}$$

Ahora, recordando la definición de  $\bar{\alpha}_0$  y pasando derivadas de un lado a otro tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial_A \sigma_1 \partial^A \bar{\alpha}_0}{\bar{\alpha}_0} 4\dot{\sigma}_1 &= \frac{1}{\alpha_0} \partial_A \sigma_1 \partial^A \bar{\alpha}_0 \rho 4\dot{\sigma}_1, \\
&= \frac{1}{\alpha_0} \partial^A (4\partial_A \sigma_1 \bar{\alpha}_0 \rho \dot{\sigma}_1) - \frac{1}{\alpha_0} 4\partial_\rho (\sigma_1) \dot{\sigma}_1 \bar{\alpha}_0 - 4\Delta\sigma_1 \dot{\sigma}_1 - 4\partial_A \sigma_1 \partial^A \dot{\sigma}_1, \\
&= \frac{1}{\alpha_0} \partial^A (4\partial_A \sigma_1 \alpha_0 \dot{\sigma}_1) - \frac{1}{\rho} 4\partial_\rho (\sigma_1) \dot{\sigma}_1 - 4\Delta\sigma_1 \dot{\sigma}_1 - 4\delta_{AB} \partial^A \sigma_1 \partial^B \dot{\sigma}_1, \\
&= \frac{1}{\alpha_0} \partial^A (4\partial_A \sigma_1 \alpha_0 \dot{\sigma}_1) - \left( \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\sigma_1) + \Delta\sigma_1 \right) 4\dot{\sigma}_1 - 4\delta_{AB} \partial^A \sigma_1 \partial^B \dot{\sigma}_1, \\
&= \frac{1}{\alpha_0} \partial^A (4\partial_A \sigma_1 \alpha_0 \dot{\sigma}_1) - {}^{(3)}\Delta\sigma_1 4\dot{\sigma}_1 - 4\delta_{AB} \partial^A \sigma_1 \partial^B \dot{\sigma}_1, \quad (51)
\end{aligned}$$

y finalmente conseguimos

$$\dot{\epsilon}_\sigma = \partial^A (4\partial_A \sigma_1 \alpha_0 \dot{\sigma}_1 + 8\beta_1^B \dot{\chi}_{1AB}) \frac{\rho}{\alpha_0}. \quad (52)$$

El resultado de esta cuenta es realmente interesante. El mismo nos está diciendo que  $\dot{\epsilon}_\sigma$  podrá ser escrito como una derivada de un campo  $t^A$  ( y por lo tanto  $\dot{m}_\sigma$  como una integral de borde) si se cumple que en el sistema de coordenadas elegido dentro del gauge maximal isotérmico, el lapso  $\alpha_0$  sea igual a la coordenada cilíndrica  $\rho$ . Consistentemente, en [1] se tratan los casos de los espacio-tiempos de Minkowski y Kerr extremo y en ambos dos se cumple la propiedad indicada. Nos preguntamos ahora si dicha condición sobre  $\alpha_0$  nos ayudará también a que  $\dot{\epsilon}_\omega$  se escriba como la derivada de un campo.

### Calculo para $\epsilon_\omega$

$$\dot{\epsilon}_\omega = \left( \frac{4e^{2u_0}}{\alpha_0^2} \frac{\dot{\omega}_1 \ddot{\omega}_1}{\eta_0^2} + \frac{4\partial_A \omega_1 \partial^A \dot{\omega}_1}{\eta_0^2} \right) \rho. \quad (53)$$

Usando la ecuación de evolución (22) tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{e^{2u_0}}{\alpha_0^2} \ddot{\omega}_1 &= {}^{(3)}\Delta \omega_1 - \frac{4\partial_\rho \omega_1}{\rho} - 2\partial_A \omega_1 \partial^A \sigma_0 + \frac{\partial_A \omega_1 \partial^A \bar{\alpha}_0}{\text{alph} a_0}, \\ &= \partial_A \partial^A \omega_1 - \frac{3\partial_\rho \omega_1}{\rho} - 2\partial_A \omega_1 \partial^A \sigma_0 + \frac{\partial_A \omega_1 \partial^A \bar{\alpha}_0}{\bar{\alpha}_0}, \end{aligned} \quad (54)$$

Teniendo en cuenta ahora la expresión que tenemos  $\eta_0 = \rho^2 e^{\sigma_0} = \frac{L+M}{L-M} \rho^2$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_\omega &= \frac{4\dot{\omega}_1 \rho}{\eta_0^2} \left( \partial_A \partial^A \omega_1 - \frac{3\partial_\rho \omega_1}{\rho} - 2\partial_A \omega_1 \partial^A \sigma_0 \right) + \frac{4\partial_A \omega_1 \partial^A \dot{\omega}_1 \rho}{\eta_0^2} + \frac{4\dot{\omega}_1 \rho}{\eta_0^2} \frac{\partial_A \omega_1 \partial^A \bar{\alpha}_0}{\bar{\alpha}_0} \\ &= \frac{4\dot{\omega}_1 \rho}{\eta_0^2} \left( \partial_A \partial^A \omega_1 - \frac{3\partial_\rho \omega_1}{\rho} - 2\partial_A \omega_1 \partial^A \sigma_0 \right) + \partial^A \left( \frac{4\partial_A \omega_1 \dot{\omega}_1 \rho}{\eta_0^2} \right) \\ &+ \frac{4\dot{\omega}_1 \rho}{\eta_0^2} \frac{\partial_A \omega_1 \partial^A \bar{\alpha}_0}{\bar{\alpha}_0} - \frac{4\dot{\omega}_1 \rho \partial^A \partial_A \omega_1}{\eta_0^2} + \frac{4\dot{\omega}_1 \rho}{\eta_0^2} \left( \frac{3\partial_\rho \omega_1}{\rho} \right) - \frac{4\partial_A \omega_1 \dot{\omega}_1 \rho}{\rho^4} \partial^A \left( \frac{(L-M)^2}{(L+M)^2} \right) \\ &= \partial^A \left( \frac{4\partial_A \omega_1 \dot{\omega}_1 \rho}{\eta_0^2} \right) + \frac{4\dot{\omega}_1 \rho}{\eta_0^2} \frac{\partial_A \omega_1 \partial^A \bar{\alpha}_0}{\bar{\alpha}_0} - \frac{8\dot{\omega}_1 \rho}{\eta_0^2} \partial_A \omega_1 \partial^A \sigma_0 - \frac{4\dot{\omega}_1 \rho}{\eta_0^2} \partial_A \omega_1 (-2\partial^A \sigma_0) \\ &= \partial^A \left( \frac{4\partial_A \omega_1 \dot{\omega}_1 \rho}{\eta_0^2} \right) + \frac{4\dot{\omega}_1 \rho}{\eta_0^2} \frac{\partial_A \omega_1 \partial^A \bar{\alpha}_0}{\bar{\alpha}_0} \end{aligned} \quad (55)$$

Vemos que, de cumplirse que  $\alpha_0 = \rho$  en el sistema de coordenadas que usemos, entonces  $\dot{\epsilon}_\omega$  también se escribirá como la

derivada de un campo, y esto es gracias a que  $\partial^A \bar{\alpha}_0 = 0$ . Por lo tanto hemos dado nuestro primer paso: en nuestra búsqueda de un sistema de coordenadas adecuado al problema, el criterio generado arriba nos ayudará a descartar o no las opciones que tengamos.

Seguimos ahora con el análisis de la masa  $m_1$ , intentando determinar bajo que condición general la misma puede escribirse como una integral de borde.

$$\begin{aligned}
m_1 &= \frac{1}{16} \int_{\Omega} 2\partial_A \sigma_0 \partial^A \sigma_1 \rho d\rho dz \\
&= \frac{1}{8} \int_{\Omega} \partial^A (\partial_A \sigma_0 \sigma_1 \rho) - \sigma_1 \partial^A (\partial_A \sigma_0 \rho) \\
&= \frac{1}{8} \int_{\partial\Omega} \partial_A \sigma_0 \sigma_1 \rho n^A dS - \frac{1}{8} \int_{\Omega} (\Delta \sigma_0 \rho + \partial_A \sigma_0 \partial^A \rho) \sigma_1 d\rho dz \\
&= \frac{1}{8} \int_{\partial\Omega} \partial_A \sigma_0 \sigma_1 \rho n^A dS - \frac{1}{8} \int_{\Omega} \left( \Delta \sigma_0 + \frac{\partial_A \sigma_0 \delta^A \rho}{\rho} \right) \sigma_1 \rho d\rho dz \\
&= \frac{1}{8} \int_{\partial\Omega} \partial_A \sigma_0 \sigma_1 \rho n^A dS - \frac{1}{8} \int_{\Omega} {}^{(3)}\Delta \sigma_0 \sigma_1 \rho d\rho dz \tag{56}
\end{aligned}$$

Vemos entonces que, para que tengamos solo un término de borde, la integral volumétrica debe anularse. Debido a la presencia de  $\sigma_1$  en dicha integral, la única forma segura que tenemos para asegurar que será nula es eligiendo un sistema de coordenadas en el cual  ${}^{(3)}\Delta \sigma_0 = 0$ .

Podríamos preguntarnos ahora si existe siquiera un sistema de coordenadas para el cual ambas condiciones que hemos hallado en esta sección se cumplan simultáneamente. Sorpendentemente (por lo menos para el autor), la respuesta es que sí.

## 5. Sistema de coordenadas de Weyl

Dicho sistema de coordenadas queda definido por la elección:

$$\rho_{Weyl} = r' \text{sen}(\theta) \left( 1 - \frac{M^2}{4r'^2} \right) \tag{57}$$

$$z_{Weyl} = r' \text{cos}(\theta) \left( 1 + \frac{M^2}{4r'^2} \right) \tag{58}$$

con

$$r' = \frac{r - M + \sqrt{r^2 - 2Mr}}{2} \quad (59)$$

donde  $r$  y  $\theta$  son las coordenadas tridimensionales usuales que se usan para escribir la métrica de Schwarzschild en coordenadas esféricas. Por una cuestión de comodidad, a partir de este punto usaremos  $\rho$  en vez de  $\rho_{Weyl}$  y  $z$  en vez de  $z_{Weyl}$ . En estas coordenadas, la métrica  $h_{AB0}$  del espacio-tiempo de Schwarzschild se expresa mediante:

$$dh^2 = -\rho^2 dt^2 + \frac{(L+M)^3}{l_+ l_- (L-M)} \rho^2 (d\rho^2 + dz^2). \quad (60)$$

donde hemos definidos las siguientes cantidades útiles:

$$l_{\pm} = \sqrt{\rho^2 + (z \pm M)^2} \quad (61)$$

$$L = \frac{l_+ + l_-}{2} \quad (62)$$

Calculando las cantidades relevantes que aparecen en las ecuaciones, se obtiene:

- $\alpha_0 = \rho$
- $\eta_0 = \frac{L+M}{L-M} \rho^2$
- $\sigma_0 = \ln \left( \frac{l_+ + l_- + 2M}{l_+ + l_- - 2M} \right)$
- $u_0 = \ln(\rho) + \frac{\sigma_0}{2} + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{(L+M)^2}{l_+ l_-} \right)$
- $q_0 = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{(l_+ + l_-)^2 - 4M^2}{4l_+ l_-} \right)$

Podemos ver ahora la primera de las conveniencias de elegir este sistema de coordenadas para tratar nuestro problema. Resulta ser que el lapso  $\alpha_0$  coincide con la coordenada cilíndrica de Weyl  $\rho$ , y volviendo a (52) y (55), esto nos asegura que  $\dot{m}_\sigma$  y  $\dot{m}_\omega$  adquieren la forma:

$$\dot{m}_\sigma = \frac{1}{16} \int_{\Omega} \partial^A t_{\sigma A} d\rho dz = \frac{1}{16} \int_{\partial\Omega} t_{\sigma A} n^A dS, \quad (63)$$

$$\dot{m}_\omega = \frac{1}{16} \int_{\Omega} \partial^A t_{\omega A} d\rho dz = \frac{1}{16} \int_{\partial\Omega} t_{\omega A} n^A dS, \quad (64)$$

con

$$t_{\sigma A} = 4\partial_A\sigma_1\rho\dot{\sigma}_1 + 8\beta_1^B\chi_{1AB}, \quad (65)$$

$$t_{\omega A} = \frac{4\partial_A\omega_1\dot{\omega}_1\rho}{\eta_0^2}. \quad (66)$$

La segunda ventaja viene dada por el hecho de que en este sistema de coordenadas, se cumple que  ${}^{(3)}\Delta\sigma_0 = 0$ . Verificar este cálculo a mano es algo tedioso, pero tenemos un par de formas de mostrarlo que resultarán mas simples. Una de ellas es considerando la ecuación de evolución no linealizada (9) para  $\sigma$  presentada en [1]:

$$-e^{2u}\sigma'' + {}^{(3)}\Delta\sigma + \partial_A\sigma\frac{\partial^A\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}} - 2e^{2u}(\log\rho)'' + 2\frac{\partial_\rho\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}\rho} = \frac{(e^{2u}\omega'^2 - |\partial\omega|^2)}{\eta^2}, \quad (67)$$

donde recordamos la definición  $f' = \frac{1}{\alpha}(f - \beta^A\partial_A f)$ . Si uno particulariza ésta ecuación para la métrica de Schwarzschild en coordenadas de Weyl, y usa que  $\bar{\alpha}_0 = 1$ ,  $\beta_0^A = 0$ ,  $\omega_0 = 0$  y que ninguna cantidad depende del tiempo, entonces es fácil ver que esta ecuación nos implica que  ${}^{(3)}\Delta\sigma_0 = 0$  para este sistema de coordenadas.

Otra forma interesante de mostrar que  ${}^{(3)}\Delta\sigma_0 = 0$  es darnos cuenta que  $\sigma_0$  posee la misma forma que el potencial electroestático producido por una línea finita de carga centrada en el origen y que se extiende con longitud  $2L$  a lo largo del eje  $z$ :

$$\varphi \propto \log\left(\frac{l_+ + l_- + 2L}{l_+ + l_- - 2L}\right), \quad (68)$$

con  $l_\pm = \sqrt{\rho^2 + (z \pm L)^2}$ . Si bien nuestro problema no es de electroestática, la propiedad de que el Laplaciano de una función con simetría axial de esta forma es cero queda garantizada porque en efecto es una solución de la ecuación de Laplace en la región externa a la línea de carga. En nuestro caso, lo que se cumple es que  ${}^{(3)}\Delta\sigma_0 = 0$  en la región externa al horizonte de eventos.

Hay un aspecto más acerca de esta equivalencia entre  $\sigma_0$  y el potencial electroestático de la línea finita de carga que nos resultará muy útil en este trabajo. Es fácil ver que las equipotenciales de (68) quedan dadas por

$$l_+ + l_- = cte \implies \sqrt{\rho^2 + (z + M)^2} + \sqrt{\rho^2 + (z - M)^2} = cte, \quad (69)$$

ecuación que describe elipses cuyos focos se encuentran en  $(0, \pm M)$ , siendo  $l_+$  y  $l_-$  las distancias de un punto  $(\rho, z)$  a dichos focos. El valor mínimo que puede adquirir esa constante es  $2M$ , y solo se alcanza cuando estamos considerando puntos sobre el horizonte. Esto nos da un artificio muy interesante, y es que podemos foliar  $\mathbb{R}_+^2$  con elipses que encierran cada vez más cerca al horizonte, sin tocarlo.

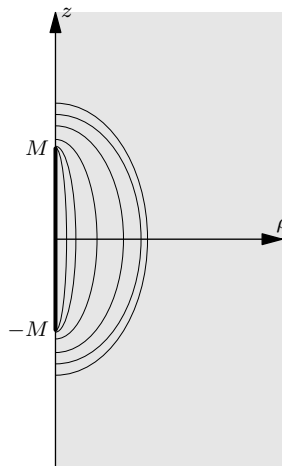


Figura 1: Equipotenciales.

Cuando tengamos que analizar el comportamiento de las distintas masas en los bordes del dominio de integración, utilizaremos esta estructura de foliación para construir un contorno que encierre cuan cerca queramos al horizonte.

Volviendo a la cuestión de  ${}^{(3)}\Delta\sigma_0 = 0$ , lo beneficioso de que se cumpla ésta relación se ve en la ecuación (56), la cual fue obtenida de forma general a partir de las ecuaciones de Einstein linealizadas. Como el 3-laplaciano de  $\sigma_0$  se anula para el sistema de coordenadas de Weyl, la masa  $m_1$  se escribe como:

$$m_1 = \frac{1}{8} \int_{\partial\Omega} \partial_A \sigma_0 \sigma_1 \rho n^A dS, \quad (70)$$

la cual es una integral sobre el borde de nuestro volumen  $\Omega$ , y cuyo valor sí puede ser controlado dando las condiciones de contorno adecuadas. Hemos logrado así alcanzar los primeros objetivos de este trabajo, y nuestra mirada pasa ahora a estudiar con atención los siguientes puntos:

1. Identificar cuales son las condiciones de contorno sobre  $\sigma_1$  que deben ser pedidas para que  $m_1$  sea igual a cero.
2. Determinar si  $m_\sigma$  y  $m_\omega$  son en efecto cantidades finitas y definidas positivas. Estudiar las condiciones de contorno que me aseguran su conservación y verificar que sean compatibles con las condiciones que anulan a  $m_1$ .

Para cerrar esta sección, realizamos un comentario acerca de la región de integración por las masas. En el sistema de coordenadas de Weyl nuestra región de integración, que es el exterior del agujero negro, se corresponde con todo el semiplano  $\rho > 0$ , siendo los bordes el infinito, el horizonte y el resto del eje  $z$ .

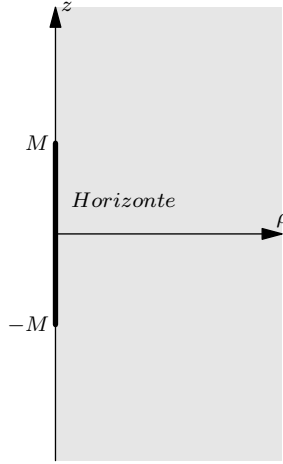


Figura 2: Dominio de integración en coordenadas de Weyl.

## 6. Masas $m_0$ y $m_1$

Nos resultará útil para los cálculos de la siguiente sección presentar la estructura y comportamientos relevantes al momento de estudiar las condiciones de contorno mencionadas. En primer lugar, debemos especificar cómo es que analizaremos las integrales en el borde de  $\Omega$ . La forma que hemos elegido consiste en construir la siguiente región sobre  $\mathbb{R}_+^2$ :

Utilizando la estructura de elipses “equipotenciales” determinadas por la ecuación  $l_+ + l_- = 2s$ , generamos un trozo del borde de  $\Omega$ ,  $C_E$ , el cual se cierra únicamente sobre el horizonte en el límite  $\lim s \rightarrow M$ . El resto del contorno es construido con intervalos  $C_e$  del eje de simetría  $z$  y un semicírculo  $C_r$  de radio  $r$  que nos servirá para analizar el comportamiento en el infinito.

Cuando estudiemos el término de borde  $C_E$ , va a resultar más que conveniente expresar la integral de borde y todas las cantidades involucradas en términos de variables más adaptadas a la geometría elíptica, cuya relación con  $\rho$  y  $z$  viene dada por:

$$\rho = \sqrt{s^2 - M^2} \operatorname{sen}(u) \quad (71)$$

$$z = s \operatorname{cos}(u) \quad (72)$$

Donde  $M \leq s \leq \infty$  y  $0 \leq u \leq \pi$ . Rápidamente, se introducen a continuación los elementos básicos de la geometría que fueron



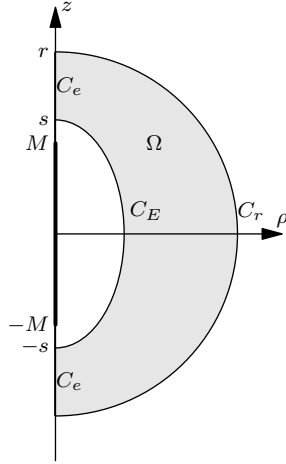


Figura 3: Dominio de integración.

utilizados en el cálculo. En principio, la forma de la métrica en estas coordenadas:

$$dE = \frac{s^2 - M^2 \cos^2(u)}{s^2 - M^2} ds^2 + (s^2 - M^2 \cos^2(u)) du^2, \quad (73)$$

el diferencial de volumen y los direrenciales de línea:

$$dV = \frac{s^2 - M^2 \cos^2(u)}{\sqrt{s^2 - M^2}} ds du, \quad (74)$$

$$dL_s = \frac{\sqrt{s^2 - M^2 \cos^2(u)}}{\sqrt{s^2 - M^2}} ds, \quad (75)$$

$$dL_u = \sqrt{s^2 - M^2 \cos^2(u)} du, \quad (76)$$

el vector normal a la elipse (y apuntando hacia fuera de  $\Omega$ ):

$$n_s^A = - \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^A \frac{\sqrt{s^2 - M^2}}{\sqrt{s^2 - M^2 \cos^2(u)}}, \quad (77)$$

y la forma del gradiente de una función  $f(s, u)$  :

$$\nabla f^A = \frac{s^2 - M^2}{s^2 - M^2 \cos^2(u)} \frac{\partial f}{\partial s} \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^A + \frac{1}{s^2 - M^2 \cos^2(u)} \frac{\partial f}{\partial u} \left( \frac{\partial}{\partial u} \right)^A. \quad (78)$$

Además, para el cálculo de ese término de borde, se utilizaron las siguientes expresiones para  $\sigma_0$  y  $\partial_s\sigma_0$ :

$$\sigma_0 = \ln\left(\frac{s+M}{s-M}\right), \quad (79)$$

$$\partial_s\sigma_0 = -\frac{2M}{s^2 - M^2}. \quad (80)$$

Para la integral de línea en  $C_e$  usaremos las expresiones en coordenadas  $(\rho, z)$  de  $\sigma_0$  y  $\partial_\rho\sigma_0$ :

$$\sigma_0 = \ln\left(\frac{l_+ + l_- + 2M}{l_+ + l_- - 2M}\right), \quad (81)$$

$$\partial_\rho\sigma_0 = -\frac{4M\rho}{(l_+ + l_-)^2 - 4M^2} \frac{l_+ + l_-}{l_+ l_-}, \quad (82)$$

y usaremos que sobre el eje  $z$  (fuera del horizonte) se tiene:

$$l_+ + l_- = \pm 2z, \quad (83)$$

$$l_+ l_- = z^2 - M^2. \quad (84)$$

Vale la pena destacar que, por simetría, los dos trozos de  $C_e$  aportan lo mismo a la integral de borde, y por lo tanto solo calcularemos uno de ellos.

Finalmente, para la integral en el semicírculo  $C_r$  usaremos que:

$$l_\pm \rightarrow r \text{ para } r \rightarrow \infty, \quad (85)$$

$$\sigma_0 \rightarrow \ln\left(\frac{r+M}{r-M}\right) \text{ para } r \rightarrow \infty, \quad (86)$$

$$\partial_r\sigma_0 \rightarrow -\frac{2M}{r^2 - M^2} \text{ para } r \rightarrow \infty. \quad (87)$$

## 6.1. Estudiando $m_0$

Utilizando que en las coordenadas de Weyl  ${}^{(3)}\Delta\sigma_0 = 0$ , vemos que  $m_0$  se escribe como el término de borde:

$$\begin{aligned}
m_0 &= \frac{1}{16} \int_{\Omega} \partial_A \sigma_0 \partial^A \sigma_0 \rho \, d\rho dz \\
&= \frac{1}{16} \int_{\Omega} [\partial_A (\sigma_0 \partial^A \sigma_0 \rho) - \sigma_0 \partial_A (\partial^A \sigma_0 \rho)] \, d\rho dz \\
&= \frac{1}{16} \int_{\partial\Omega} \sigma_0 \partial^A \sigma_0 \rho n_A \, dL - \int_{\Omega} \sigma_0 \rho^{(3)} \Delta \sigma_0 \, d\rho dz \\
&= \frac{1}{16} \int_{\partial\Omega} \sigma_0 \partial^A \sigma_0 \rho n_A \, dL \tag{88}
\end{aligned}$$

y dividimos a continuación en los distintos contornos introducidos en la sección anterior:

#### Integral sobre $C_r$

$$\begin{aligned}
&\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{16} \int_0^\pi \sigma_0 \partial^r \sigma_0 \rho r \, d\theta, \\
\Rightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} - \frac{1}{16} \int_0^\pi \left( \ln \left( \frac{r+M}{r-M} \right) \right) \left( \frac{2M}{r^2-M^2} \right) r^2 \operatorname{sen}(\theta) \, d\theta \tag{89}
\end{aligned}$$

La integral en  $\theta$  no simboliza ningún problema y resulta claro que en el límite  $r \rightarrow \infty$ , la parte del integrando que depende de  $r$  se anula y por lo tanto este término de borde es nulo.

#### Integral sobre $C_e$ con $s \rightarrow M$

$$\begin{aligned}
&\lim_{r \rightarrow \infty}, \lim_{s \rightarrow M} \frac{1}{16} - \int_s^r \sigma_0 \partial^\rho \sigma_0 \rho \Big|_{\rho=0} \, dz, \\
\Rightarrow \frac{1}{16} \int_M^\infty \ln \left( \frac{l_+ + l_- + 2M}{l_+ + l_- - 2M} \right) \frac{4M\rho}{(l_+ + l_-)^2 - 4M^2} \frac{l_+ + l_-}{l_+ l_-} \rho \Big|_{\rho=0} \, dz, \\
\Rightarrow \frac{1}{16} \int_M^\infty \ln \left( \frac{z+M}{z-M} \right) \frac{4M\rho}{(2z)^2 - 4M^2} \frac{2z}{z^2 - M^2} \rho \Big|_{\rho=0} \, dz. \tag{90}
\end{aligned}$$

Puede verse a simple vista que evaluando el integrando en el borde  $C_e$ , este término tampoco aporta a  $m_0$ .

#### Integral sobre $C_E$ con $s \rightarrow M$

$$\lim_{s \rightarrow M} - \frac{1}{16} \int_0^\pi \ln \left( \frac{s+M}{s-M} \right) \partial_s \sigma_0 \frac{\sqrt{s^2 - M^2}}{\sqrt{s^2 - M^2 \cos^2(u)}} \rho(s, u) \, dL_u,$$

$$\begin{aligned}
&\implies \lim_{s \rightarrow M} -\frac{1}{16} \int_0^\pi \ln\left(\frac{s+M}{s-M}\right) \partial_s \sigma_0(s^2 - M^2) \text{sen}(u) du, \\
&\implies \lim_{s \rightarrow M} -\frac{1}{8} \ln\left(\frac{s+M}{s-M}\right) \partial_s \sigma_0(s^2 - M^2), \\
&\implies \lim_{s \rightarrow M} \frac{M}{4} \ln\left(\frac{s+M}{s-M}\right) \implies \infty. \quad (91)
\end{aligned}$$

Uno podría alarmarse al ver que la masa de primer orden en una cantidad que diverge, pero en nuestro caso esto no es algo que nos vaya a simbolizar un problema dado que en nuestro trabajo no necesitamos hacer uso de la cantidad  $m_0$  para dar cotas para la perturbación, no nos molestará que esta cantidad diverga.

Una forma de comprender porque sucede dicha divergencia es recordando que en las coordenadas de Weyl,  $\sigma_0$  posee la misma forma que el potencial eléctrico para una línea de carga de largo  $2M$  centrada en el eje  $z$ . Teniendo esto en cuenta, uno reconoce que la cantidad  $\epsilon_0$  usada en este trabajo coincide con la densidad de energía del campo eléctrico generado por la línea, y es sabido que la energía necesaria para formar una distribución de carga puntual o lineal es infinita, que es justamente lo que nosotros obtenemos.

## 6.2. Estudiando $m_1$

Repetimos el análisis de arriba, ahora para la masa  $m_1$ , pero teniendo en cuenta que obtendremos expresiones que dependerán de  $\sigma_1$  y justamente eso es lo que nos dará la pauta de que condiciones de contorno debemos pedirle en los distintos bordes.

**Integral sobre  $C_r$**

$$\begin{aligned}
&\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{16} \int_0^\pi \sigma_1 \partial^r \sigma_0 \rho r d\theta, \\
&\implies \lim_{r \rightarrow \infty} -\frac{1}{16} \int_0^\pi \sigma_1 \left(\frac{2M}{r^2 - M^2}\right) r^2 \text{sen}(\theta) d\theta, \\
&\implies \lim_{r \rightarrow \infty} -\frac{1}{16} \int_0^\pi 2M \sigma_1 \text{sen}(\theta) d\theta. \quad (92)
\end{aligned}$$

Vemos entonces que basta con pedir que  $\sigma_1$  tienda a cero cuando  $r$  tiende a infinito. La forma o comportamiento según el cual decaiga será determinada más adelante, dado que hay que asegurar compatibilidad con las condiciones que se extraigan de secciones posteriores.

### Integral sobre $C_e$

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow \infty} -\frac{1}{16} \int_s^r \sigma_1 \partial^\rho \sigma_0 \rho \Big|_{\rho=0} dz, \\ \Rightarrow & -\frac{1}{16} \int_s^\infty \sigma_1 \frac{4M\rho}{(2z)^2 - 4M^2} \frac{2z}{z^2 - M^2} \rho \Big|_{\rho=0} dz. \end{aligned} \quad (93)$$

Una vez más, vemos al evaluar en  $\rho = 0$  que el integrando es nulo y por lo tanto este término no aporta a  $m_1$ .

### Integral sobre $C_E$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{16} \int_0^\pi \sigma_1 \partial_s \sigma_0 \frac{\sqrt{s^2 - M^2}}{\sqrt{s^2 - M^2 \cos^2(u)}} \rho(s, u) dL_u, \\ \Rightarrow & -\frac{1}{16} \int_0^\pi \sigma_1 \partial_s \sigma_0 (s^2 - M^2) \text{sen}(u) du, \\ \Rightarrow & \frac{1}{8} \int_0^\pi M \sigma_1 \text{sen}(u) du, \end{aligned} \quad (94)$$

y en el límite en el cual  $C_E$  tiende al horizonte, se tiene:

$$\Rightarrow -\frac{1}{8} \int_0^\pi \sigma_1 \Big|_{\rho=0} dz. \quad (95)$$

Vemos entonces que para que el término de borde de  $m_1$  sobre el horizonte se anule, la integral (95) debe ser igual a cero. Pero bajo nuestra suposición de que estamos estudiando una perturbación para tiempos en los cuales no ha alcanzado el horizonte, es claro que  $\sigma_1$  es cero allí y por lo tanto el término de borde no aporta.

**En resumen:** Para lograr que la masa  $m_1$  sea igual a cero solo necesitamos pedir:

1. Que  $\sigma_1 \rightarrow 0$  en el infinito.

## 7. Masa $m_\sigma$

De esta masa ya tenemos cierta información que ha resultado importante en nuestra elección de sistema de coordenadas. Sabemos que si utilizamos las coordenadas de Weyl, entonces  $\dot{m}_\sigma$  resulta ser un integral de borde cuyo valor podemos controlar mediante condiciones de contorno. Sin embargo, esta no es la única propiedad que necesitaremos que cumpla  $m_\sigma$ . Debemos asegurarnos también que se trata de una cantidad definida positiva y finita. A continuación, investigamos dichos puntos.

### 7.1. Positividad

Demosle un vistazo al integrando de  $m_\sigma$

$$\epsilon_\sigma = \left( \frac{2e^{2u_0}}{\alpha_0^2} p^2 + 2|\partial\sigma_1|^2 + 4e^{-2u_0} \chi_1^{AB} \chi_{1AB} \right) \rho \quad (96)$$

Resulta claro ver que los primeros dos términos dentro del paréntesis son positivos, ya que son cantidades elevadas al cuadrado. El tercer término también es positivo, pues si recordamos que los índices se suben y se bajan con la métrica plana definida positiva, entonces  $\chi_1^{AB} \chi_{1AB}$  es tan solo una suma de términos al cuadrado. Por último, dado que  $\rho$  solo recorre valores en la semi-plano positivo, no cabe duda de que  $\epsilon_\sigma$  es una cantidad definida positiva, y por lo tanto  $m_\sigma$  también lo será.

### 7.2. Finitud

Para estudiar la finitud de  $m_\sigma$ , analizaremos el comportamiento de su integrando cuando se aproxima a la región donde podría mostrar alguna divergencia: el infinito. ¿Por qué no tendremos en cuenta ni al eje ni al horizonte en nuestro análisis? En primer lugar, en [1] ya se ha estudiado la masa  $m_\sigma$  sobre la métrica de Minkowski, y en ese caso el eje de simetría no mostraba amenaza alguna de atentar contra la finitud de dicha masa. En nuestro caso la geometría es distinta, pero sobre el eje de simetría la diferencia con el caso en Minkowski es un factor multiplicativo que no diverge sobre este contorno ( y que en el límite de  $z \rightarrow \infty$  recupera Minkowski), y por lo tanto tampoco atentará contra la finitud de  $m_\sigma$ . En segundo lugar, no debemos preocuparnos por la

integrabilidad cuando nos acercamos al horizonte, pues estamos considerando una perturbación que aun no ha alcanzado dicha región, y dentro de todo el volumen  $\Omega$  ninguna de las cantidades de background muestra divergencias. Asumiendo entonces que buscamos soluciones suaves de las ecuaciones linearizadas, solo nos basta investigar cuales son las condiciones asintóticas en el infinito para que la integral  $m_\sigma$  sea finita.

### Comportamiento en el infinito

#### Primer término

Usando la expresión para  $u_0$  y los límites que tenemos para  $l_+$  y  $l_-$ , veamos como se comporta el término  $\left(2\frac{e^{2u_0}}{\rho^2}p^2\right)\rho$ .

$$2\frac{e^{2u_0}}{\rho^2} = \frac{1}{2} \frac{(l_+ + l_- + 2M)^3}{(l_+ + l_- - 2M)l_+l_-} \longrightarrow 2 \text{ para } r \rightarrow \infty \quad (97)$$

y usando los límites para  $\partial_\rho\sigma_0$  y  $\partial_z\sigma_0$

$$\partial_\rho\sigma_0 \longrightarrow -\frac{2M\rho}{r^3} \quad (98)$$

$$\partial_z\sigma_0 \longrightarrow -\frac{2Mz}{r^3} \quad (99)$$

tenemos

$$\begin{aligned}
2p^2 \rho d\rho dz &= 2 \left( \dot{\sigma}_1 - \beta_1^\rho \partial_\rho \sigma_0 - \beta_1^z \partial_z \sigma_0 - 2 \frac{\beta_1^\rho}{\rho} \right)^2 \rho d\rho dz \\
&= 2 \left( \dot{\sigma}_1 + \frac{\beta_1^\rho 2M\rho}{r^3} + \frac{\beta_1^z 2Mz}{r^3} - 2 \frac{\beta_1^\rho}{\rho} \right)^2 \rho d\rho dz \\
&= 2 \left( \dot{\sigma}_1 + \frac{\beta_1^\rho 2M \text{sen}(\theta)}{r^2} + \frac{\beta_1^z 2M \cos(\theta)}{r^2} - 2 \frac{\beta_1^\rho}{\rho} \right)^2 \rho d\rho dz \\
&= 2 \left( \dot{\sigma}_1^2 r^2 \text{sen}(\theta) + 4M \dot{\sigma}_1 \beta_1^\rho \text{sen}^2(\theta) + \frac{4M^2 (\beta_1^\rho)^2 \text{sen}^3(\theta)}{r^2} \right. \\
&\quad + 4M \dot{\sigma}_1 \beta_1^z \cos(\theta) \text{sen}(\theta) - 4 \dot{\sigma}_1 \beta_1^\rho r + \frac{8M^2 \beta_1^\rho \beta_1^z \text{sen}^2(\theta) \cos(\theta)}{r^2} \\
&\quad - \frac{8M (\beta_1^\rho)^2 \text{sen}(\theta)}{r} + \frac{4M^2 (\beta_1^z)^2 \cos^2(\theta) \text{sen}(\theta)}{r^2} \\
&\quad \left. - \frac{8M \beta_1^\rho \beta_1^z \cos(\theta)}{r} + \frac{4(\beta_1^\rho)^2}{\text{sen}(\theta)} \right) dr d\theta. \tag{100}
\end{aligned}$$

Hagamos algunas observaciones de esta expresión. La primera es que el último término posee un factor  $\text{sen}^{-1}(\theta)$  que diverge cuando nos acercamos el eje  $z$  en la integral sobre  $\theta$ . Esta aparente divergencia en realidad no nos molesta por un par de razones: estamos analizando el comportamiento en el infinito, y si las cantidades que tenemos decrecen a cero en este límite, no importa cuán cerca estemos del eje  $z$ , ese término no molestará pues será nulo. La otra razón es que  $\beta_1^\rho$  debe cumplir la condición de regularidad de ser impar como función de  $\rho$  en el eje, anulándose y compensando así la divergencia de  $\text{sen}^{-1}(\theta)$ . La segunda observación que debemos hacer es que para estudiar la integrabilidad en el infinito podemos no distinguir entre  $\beta_1^\rho$  y  $\beta_1^z$  y ver solo la relación de los  $\beta$  y  $\dot{\sigma}_1$  respecto a las potencias de  $r$ .

Bajo ese lente, los términos que aparecen en el integrando son de la forma  $\dot{\sigma}_1^2 r^2$ ,  $\dot{\sigma}_1 \beta$ ,  $\dot{\sigma}_1 \beta r$ ,  $\frac{\beta^2}{r^2}$ ,  $\frac{\beta^2}{r}$  y  $\beta^2$ . Para lograr que estos sean integrables en el infinito, debemos pedir las siguientes condiciones asintóticas:

$$\dot{\sigma}_1 \longrightarrow \frac{1}{r^n} \quad \text{con } n > \frac{3}{2} \tag{101}$$



$$\beta_1^A \longrightarrow \frac{1}{r^n} \text{ con } n > \frac{1}{2} \quad (102)$$

Segundo término

$$2|\partial\sigma_1|^2 \rho d\rho dz \longrightarrow 2((\partial_r \sigma_1)^2 r^2 \text{sen}(\theta) + (\partial_\theta \sigma_1)^2 \text{sen}(\theta)) d\theta dr \quad (103)$$

Con lo cual vemos que pidiendo que  $\sigma_1 \rightarrow \frac{1}{r^n}$  con  $n > \frac{1}{2}$  entonces este término se vuelve integrable.

Tercer término

$$4e^{-2u_0} \chi_1^{AB} \chi_{1AB} \rho d\rho dz \longrightarrow 4\chi_1^{AB} \chi_{1AB} \frac{1}{\text{sen}(\theta)} d\theta dr \quad (104)$$

A pesar de tener el factor multiplicativo  $\text{sen}^{-1}(\theta)$ , si pedimos que  $\chi_1^{AB}$  vaya como  $\frac{1}{r^n}$  con  $n > \frac{1}{2}$ , entonces la integral en r converge, sin importar cuan cerca estemos del eje z. El factor que diverge crece a medida que nos acercamos allí, pero dadas las condiciones de paridad para  $\chi_{AB}$  sobre el eje, uno puede ver que la divergencia se compensa en la integral.

Resumiendo entonces las condiciones que garantizan finitud de la energía  $m_\sigma$ , tenemos:

1. Para el infinito espacial necesitamos pedir que  $\dot{\sigma}_1$  vaya como  $\frac{1}{r^n}$  con  $n > \frac{3}{2}$ , y que  $\sigma_1, \beta_1^A, \chi_1^{AB}, \dot{\beta}_1^A$  y  $\dot{\chi}_1^{AB}$  vayan como  $\frac{1}{r^n}$  con  $n > \frac{1}{2}$ .

### 7.3. Conservación

Extraigamos ahora las condiciones de contorno para garantizar la conservación de  $m_\sigma$ .

$$\dot{m}_\sigma = \frac{1}{16} \int_{\partial\Omega} (4\partial_A \sigma_1 \rho \dot{\sigma}_1 + 8\beta_1^B \chi_{1AB}) n^A dS \quad (105)$$

Término sobre  $C_r$

Con las condiciones asintóticas que ya hemos pedido para la finitud de  $m_\sigma$  nos basta para que el integrando tienda a cero para  $r \rightarrow \infty$ .

Término sobre  $C_e$

Aqui tenemos

$$4\partial_\rho\sigma_1\rho\dot{\sigma}_1 + 8\beta_1^\rho\chi_{1\rho\rho} + 8\beta_1^z\chi_{1\rho z} \quad (106)$$

El primer término es claramente cero por la presencia de  $\rho$ . Usando las condiciones que tenemos para la paridad de  $\beta_1^\rho$  y  $\chi_1^{\rho z}$ , es fácil ver que los últimos dos términos se anulan sobre todo el eje z.

Término sobre  $C_E$

Cuando  $C_E$  se cierra sobre el horizonte, podemos escribir en coordenadas de Weyl el integrando como:

$$-4\partial_\rho\sigma_1\rho\dot{\sigma}_1 - 8\beta_1^z\dot{\chi}_{1\rho z} - 8\beta_1^\rho\dot{\chi}_{1\rho\rho} \quad (107)$$

Ahora, como estamos considerando una perturbación que no ha alcanzado el horizonte, estos términos son claramente nulos. Con esto, hemos demostrado que todos los términos de borde en la integral de  $\dot{m}_\sigma$  son cero, y por lo tanto esta es una cantidad conservada para la perturbación.

## 8. Masa $m_\omega$

En esta sección realizamos los mismos cálculos que se hicieron para  $m_\sigma$ .

### 8.1. Positividad

Tan solo viendo la expresión (42) para  $\epsilon_\omega$ , uno puede reconocer que todos sus términos son cantidades positivas y por lo tanto

esto implica que  $m_\omega$  lo será.

## 8.2. Finitud

### Comportamiento en el infinito

$$\begin{aligned}
\epsilon_\omega d\rho dz &= \left( \frac{2e^{2u_0}}{\rho^2} \frac{\dot{\omega}_1^2 (L-M)^2}{\rho^4 (L+M)^2} + \frac{2|\partial\omega_1|^2 (L-M)^2}{\rho^4 (L+M)^2} \right) \rho d\rho dz, \\
&\rightarrow \left( \frac{2\dot{\omega}_1^2}{\rho^3} + \frac{2|\partial\omega_1|^2}{\rho^3} \right) d\rho dz, \\
&= \left( \frac{2\dot{\omega}_1^2}{r^2 \text{sen}^3(\theta)} + \frac{2|\partial\omega_1|^2}{r^2 \text{sen}^3(\theta)} \right) dr d\theta. \tag{108}
\end{aligned}$$

Pidiendo que  $\omega_1$  como vaya como  $r^n$  con  $n < \frac{3}{2}$  y que  $\dot{\omega}_1$  vaya como  $r^n$  con  $n < \frac{1}{2}$ , tendremos que  $\epsilon_\omega$  es integrable en el infinito.

## 8.3. Conservación

Tenemos que:

$$\dot{m}_\omega = \int_{\partial\Omega} t^A n_{AdS} \quad \text{con} \quad t^A = \frac{4\partial^A \omega_1 \dot{\omega}_1 (L-M)^2}{\rho^3 (L+M)^2}. \tag{109}$$

Término sobre  $C_r$

Usando las condiciones de decaimiento obtenidas previamente, y usando el comportamiento asintótico de  $L$ , es claro que la integral en el infinito tiene integrando cero y por lo tanto no aporta.

Término sobre  $C_e$

$$t^\rho \rightarrow \frac{4\partial^\rho \omega_1 \dot{\omega}_1}{\rho^3} \frac{z-M}{z+M} \tag{110}$$

Para mostrar que este término de borde se anula, necesitamos pedir que  $\omega_1$ , la cual debe ser una función par de  $\rho$  cuando nos

acercamos al eje de simetría, vaya como  $\rho^4 \star_1$ . Esta condición no es una sacada de la nada, sino que puede verse su correspondencia con la conservación del momento angular del espacio-tiempo de fondo que esta siendo perturbado (el cual es cero en el caso de Schwarzschild).

### Término sobre $C_E$

Cuando  $C_E$  se cierra sobre el horizonte, podemos escribir en coordenadas de Weyl el integrando como:

$$\frac{4\partial^A \omega_1 \dot{\omega}_1 (L - M)^2}{\rho^3 (L + M)^2} \longrightarrow \frac{\rho \partial^\rho \omega_1 \dot{\omega}_1}{4(M^2 - z^2)^2}, \quad (111)$$

y de nuevo, sabemos que estos términos serán nulos debido a que la perturbación que consideramos no ha alcanzado al horizonte de eventos.

## 9. Primeros resultados

En esta sección, como primer acción, presentamos las condiciones de contorno condensadas que nos aseguran que la masa de primer orden  $m_1$  es idénticamente nula y que determinan el comportamiento de las masas  $m_\sigma$  y  $m_\omega$ , asegurando para ambos casos su finitud a lo largo de la evolución. Seguido a esto, presentaremos el primer teorema de este trabajo, el cual nos será útil para determinar las cotas a la perturbación lineal.

### 9.1. Condiciones de contorno condensadas

Para conseguir la demostración del teorema, necesitamos el siguiente conjunto de condiciones de borde:

1.  $\sigma_1, \beta_1^A$  y  $\chi_{1AB} \longrightarrow \frac{1}{r^n}$  con  $n > \frac{1}{2}$ , para  $r \rightarrow \infty$ .
2.  $\dot{\sigma}_1 \longrightarrow \frac{1}{r^n}$  con  $n > \frac{3}{2}$ , para  $r \rightarrow \infty$ .
3.  $\omega_1 \longrightarrow r^n$  con  $n < \frac{3}{2}$ , para  $r \rightarrow \infty$ .
4.  $\dot{\omega}_1 \longrightarrow r^n$  con  $n < \frac{1}{2}$ , para  $r \rightarrow \infty$ .

5. En el eje, deben cumplirse las condiciones de regularidad (15) y (16), y la condición  $\star_1$  asociada a la conservación del momento angular.

## 9.2. Teorema I.1

**Theorem I.1.** *Considere una solución suave de las ecuaciones linealizadas presentadas en la sección 2.3, tal que satisfagan todas las condiciones de decaimiento en el infinito y las condiciones en el eje presentadas en 9.1. Entonces, para una perturbación con dato inicial en el exterior del agujero negro y para tiempos en los cuales dicha perturbación aún no haya alcanzado el horizonte, se tiene:*

- *La masa de primer orden  $m_1$  definida por (36) con  $\epsilon_1$  definida por (31), cumple  $m_1 = 0$ .*
- *La masa de segundo orden  $m_\sigma$ , dada por (43) con  $\epsilon_\sigma$  definida por (41), es una cantidad definida positiva y finita.*
- *La masa de segundo orden  $m_\sigma$  se conserva a lo largo de la evolución.*
- *La masa de segundo orden  $m_\omega$ , dada por (44) con  $\epsilon_\omega$  definida por (42), es una cantidad definida positiva y finita.*
- *La masa de segundo orden  $m_\omega$  se conserva a lo largo de la evolución.*

Prueba: La prueba consiste en la unión de los resultados que hemos ido obteniendo. El primer ítem se obtiene a partir de lo encontrado en la sección 6.2 . El segundo y el tercer ítem son los resultados a los que se llegó en la sección 7, y los últimos dos son los resultados de la sección 8.

Este resultado es bastante satisfactorio. En principio, nos habla de la existencia de una energía conservada para la perturbación gravitacional, la cual posiblemente podría llegar a variar una vez que se alcanza el horizonte, pero aun así no quita su carácter de relevancia al momento de caracterizar y monitorear la perturbación.

En la siguiente parte del trabajo, usaremos desigualdades geométricas y técnicas de análisis funcional para mostrar como uno puede

dar cotas a los parámetros de la perturbación en la región exterior al horizonte de eventos, siendo estas cotas expresadas en términos de las energías conservadas. Llegado este punto del trabajo, se decidió realizar un enfoque en el parámetro  $\omega_1$  frente al resto, por el hecho de que es el único de ellos que se mantiene independiente del resto en su evolución.

## Parte II

# Acotando la perturbación

## 10. Desigualdades geométricas

En esta segunda parte del trabajo lo que haremos será seguir el camino utilizado en [2] para dar cotas para la perturbación gravitacional. Por una cuestión de conveniencia y más simplicidad al escribir las ecuaciones de evolución, en vez de usar la función  $\omega_1$ , utilizaremos la función  $\bar{\omega}_1$  definida por:

$$\bar{\omega}_1 = \frac{\omega_1}{\eta^2}, \quad (112)$$

y reescribiremos la densidad de energía y la masa asociada en términos de esta nueva variable  $\rightarrow (\epsilon_{\bar{\omega}}, m_{\bar{\omega}})$ .

Una pregunta que podría surgir a partir de lo hecho en la parte I del trabajo es la siguiente: ¿Tenemos solo una cantidad conservada? La respuesta es no y se debe a una propiedad interesante: una vez obtenida la cantidad conservada  $\epsilon_{\bar{\omega}}$ , podemos definir otra ( y muchas más), reemplazando en la expresión de la primera todos los parámetros de la perturbación por sus derivadas temporales. Para ver esto, consideremos por ejemplo la ecuación de evolución que tenemos para  $\bar{\omega}_1$

$$e^{2(q_0+\sigma_0)}\ddot{\bar{\omega}}_1 = {}^{(7)}\Delta\bar{\omega}_1 + 2\partial_A\bar{\omega}_1\partial^A\sigma_0. \quad (113)$$

Uno puede percatarse que tomando la derivada temporal de ésta ecuación, se revela que la función  $\dot{\bar{\omega}}_1$  obedece la misma evolución que  $\bar{\omega}_1$ . Por lo tanto, la cantidad  $\bar{\epsilon}_{\bar{\omega}}$  definida por

$$\bar{\epsilon}_{\bar{\omega}} = \left( 2e^{2(q_0+\sigma_0)} \ddot{\bar{\omega}}_1^2 \eta_0^2 + 2 \frac{|\partial(\dot{\bar{\omega}}_1 \eta_0^2)|^2}{\eta_0^2} \right) \rho. \quad (114)$$

sirve para definir una nueva masa asociada

$$\bar{m}_{\bar{\omega}} = \frac{1}{16} \int_{\Omega} \bar{\epsilon}_{\bar{\omega}} \, d\rho dz. \quad (115)$$

la cual también será una cantidad conservada si le pedimos que las derivadas temporales del parámetro de la perturbación cumpla las mismas condiciones de contorno que el original. Estas nuevas cantidades que se construyen así, como se verá más adelante, nos servirán para acotar el término de derivada de orden 2 de la función  $\bar{\omega}_1$ . Esto mismo puede hacerse para la densidad de energía  $\epsilon_{\sigma}$ .

A continuación, se presenta el primero de los resultados que serán demostrados en esta parte.

### 10.1. Teorema II.1

**Theorem II.1.** *Las perturbaciones lineales axialmente simétricas  $\omega_1$  que cumplen las hipótesis del Teorema I.1 satisfacen las siguientes cotas:*

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \left( \frac{1}{2} \eta_0^2 |\partial \bar{\omega}_1|^2 + |\partial \eta_0|^2 \bar{\omega}_1^2 \right) \rho \, d\rho dz \leq C_1 m_{\bar{\omega}}, \quad (116)$$

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \eta_0^2 ({}^{(7)}\Delta \bar{\omega}_1)^2 e^{-2(q_0+\sigma_0)} \rho \, d\rho dz \leq C_2 (\bar{m}_{\bar{\omega}} + m_{\bar{\omega}}), \quad (117)$$

donde  $C_{1/2}$  es una constante positiva que solo depende de la masa  $M$  del agujero negro de Schwarzschild.

La importancia de este teorema en la tarea de acotar la perturbación se debe a que estas integrales involucran hasta derivadas segundas de  $\bar{\omega}_1$  multiplicadas por factores y gracias a ello pueden ser utilizadas variaciones de las desigualdades Sobolev para acotar los supremos de dichas funciones en nuestro dominio de interés. Ahora, si uno presta atención a la cota (117), se puede ver que en el integrando hay presente un factor  $e^{-2(q_0+\sigma_0)}$ . Dicho

factor se anula en el horizonte y por lo tanto la estimación (117) degenerará en esa región. Cualquier cota que demos para  $\bar{\omega}_1$  deberá ser en la región exterior al horizonte y sin incluirlo.

Para dar la prueba del Teorema II vamos a necesitar hacer uso de la desigualdad de Cauchy para numeros reales  $a_1 \cdots a_n$  arbitrarios dada por:

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2. \quad (118)$$

También, vamos a necesitar el resultado del siguiente lema:

**Lemma 10.1.** *En el sistema de coordenadas de Weyl, las funciones  $(\bar{\omega}_1, \eta_0)$  satisfacen la siguiente propiedad*

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} 4\eta_0 \bar{\omega}_1 \partial^A \eta_0 \partial_A \bar{\omega}_1 \rho \, d\rho dz = - \int_{\mathbb{R}_+^2} 4\bar{\omega}_1^2 |\partial \eta_0|^2 \rho \, d\rho dz. \quad (119)$$

*Demostración.* Para la demostración, necesitamos usar la siguiente propiedad de  $\eta_0$  que se satisface en las coordenadas de Weyl:

$${}^{(3)}\Delta \eta_0 = \frac{|\partial \eta_0|^2}{\eta_0}. \quad (120)$$

La ecuación de arriba se obtiene de utilizando que  ${}^{(3)}\Delta \sigma_0$  y  ${}^{(3)}\Delta(\log(\rho))$  son ambos igual a cero:

$$\begin{aligned} {}^{(3)}\Delta(\log(\eta_0)) &= {}^{(3)}\Delta(\log(\rho^2 e^{\sigma_0})) = 2{}^{(3)}\Delta(\log(\rho)) + {}^{(3)}\Delta \sigma_0, \\ &= 0, \\ \implies \partial_A \partial^A (\log(\eta_0)) + \frac{\partial_\rho \log(\eta_0)}{\rho} &= 0, \\ \implies \partial_A \left( \frac{\partial^A \eta_0}{\eta_0} \right) + \frac{\partial_\rho \eta_0}{\rho \eta_0} &= 0, \\ \implies \left( \frac{\partial_A \partial^A \eta_0}{\eta_0} - \frac{\partial_A \eta_0 \partial^A \eta_0}{\eta_0^2} \right) + \frac{\partial_\rho \eta_0}{\rho \eta_0} &= 0, \\ \implies \frac{1}{\eta_0} \left( \partial_A \partial^A \eta_0 + \frac{\partial_\rho \eta_0}{\rho} \right) - \frac{|\partial \eta_0|^2}{\eta_0^2} &= 0, \\ \implies \frac{{}^{(3)}\Delta \eta_0}{\eta_0} &= \frac{|\partial \eta_0|^2}{\eta_0^2}, \\ \implies {}^{(3)}\Delta \eta_0 &= \frac{|\partial \eta_0|^2}{\eta_0}. \end{aligned} \quad (121)$$



Continuamos con la prueba trabajando con la integral del lado derecho de (113),

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+^2} 4\eta_0 \bar{\omega}_1 \partial^A \eta_0 \partial_A \bar{\omega}_1 \rho \, d\rho \, dz &= \int_{\mathbb{R}_+^2} \partial_A (\bar{\omega}_1^2) \partial^A (\eta_0^2) \rho \, d\rho \, dz, \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^2} \partial_A (\bar{\omega}_1^2 \partial^A (\eta_0^2) \rho) \, d\rho \, dz - \int_{\mathbb{R}_+^2} \bar{\omega}_1^2 \partial_A (\partial^A (\eta_0^2) \rho) \, d\rho \, dz, \\
&= \int_{\partial \mathbb{R}_+^2} \bar{\omega}_1^2 \partial^A (\eta_0^2) \rho n_A \, dS - \int_{\mathbb{R}_+^2} 2\bar{\omega}_1^2 \partial_A (\eta_0 \partial^A \eta_0 \rho) \, d\rho \, dz,
\end{aligned} \tag{122}$$

y usando las condiciones de contorno sobre  $\bar{\omega}_1$  expuestas en la sección (9.1), el primer término resulta nulo y por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+^2} 4\eta_0 \bar{\omega}_1 \partial^A \eta_0 \partial_A \bar{\omega}_1 \rho \, d\rho \, dz &= - \int_{\mathbb{R}_+^2} 2\bar{\omega}_1^2 \partial_A (\eta_0 \partial^A \eta_0 \rho) \, d\rho \, dz, \\
&= - \int_{\mathbb{R}_+^2} (2\bar{\omega}_1^2 |\partial \eta_0|^2 \rho + 2\bar{\omega}_1^2 \eta_0 \partial_A (\partial^A \eta_0 \rho)) \, d\rho \, dz, \\
&= - \int_{\mathbb{R}_+^2} (2\bar{\omega}_1^2 |\partial \eta_0|^2 + 2\bar{\omega}_1^2 \eta_0^{(3)} \Delta \eta_0) \rho \, d\rho \, dz, \\
&= - \int_{\mathbb{R}_+^2} 4\bar{\omega}_1^2 |\partial \eta_0|^2 \rho \, d\rho \, dz.
\end{aligned} \tag{123}$$

□

### 10.1.1. Prueba del Teorema II.1

Comenzaremos probando la desigualdad (116).

**Término**  $\frac{1}{2} \eta_0^2 |\partial \bar{\omega}_1|^2$

Utilizando la expresión de  $\epsilon_{\bar{\omega}}$  se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+^2} \epsilon_{\bar{\omega}} d\rho dz &= \int_{\mathbb{R}_+^2} \left( 2e^{2(q_0+\sigma_0)} \frac{\dot{\omega}_1^2}{\eta_0^2} + 2 \frac{|\partial\omega_1|^2}{\eta_0^2} \right) \rho d\rho dz, \\
&\geq \int_{\mathbb{R}_+^2} 2 \frac{|\partial\omega_1|^2}{\eta_0^2} \rho d\rho dz = \int_{\mathbb{R}_+^2} 2 \frac{|\partial(\bar{\omega}_1\eta_0^2)|^2}{\eta_0^2} \rho d\rho dz, \\
&> \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{1}{\eta_0^2} \partial_A(\bar{\omega}_1\eta_0^2) \partial^A(\bar{\omega}_1\eta_0^2) \rho d\rho dz, \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{1}{\eta_0^2} (\partial_A\bar{\omega}_1\eta_0^2 + 2\eta_0\bar{\omega}_1\partial_A\eta_0) (\partial^A\bar{\omega}_1\eta_0^2 + 2\eta_0\bar{\omega}_1\partial^A\eta_0) \rho d\rho dz, \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{1}{\eta_0^2} (\eta_0^4 |\partial\bar{\omega}_1|^2 + 4\eta_0^3 \bar{\omega}_1 \partial^A\eta_0 \partial_A\bar{\omega}_1 + 4\eta_0^2 \bar{\omega}_1^2 |\partial\eta_0|^2) \rho d\rho dz, \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^2} (\eta_0^2 |\partial\bar{\omega}_1|^2 \rho + 4\eta_0 \bar{\omega}_1 \partial^A\eta_0 \partial_A\bar{\omega}_1 \rho + 4\bar{\omega}_1^2 |\partial\eta_0|^2) \rho d\rho dz,
\end{aligned} \tag{124}$$

Usando el resultado del lema (9.1) podemos reemplazar el segundo término, obteniendo

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}_+^2} (\eta_0^2 |\partial\bar{\omega}_1|^2 \rho - 4\bar{\omega}_1^2 |\partial\eta_0|^2 \rho + 4\bar{\omega}_1^2 |\partial\eta_0|^2 \rho) d\rho dz = \int_{\mathbb{R}_+^2} \eta_0^2 |\partial\bar{\omega}_1|^2 \rho d\rho dz \\
&\qquad\qquad\qquad > \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{1}{2} \eta_0^2 |\partial\bar{\omega}_1|^2 \rho d\rho dz.
\end{aligned} \tag{125}$$

**Término**  $\frac{1}{2} \bar{\omega}_1^2 |\partial\eta_0|^2$

Probaremos la desigualdad comenzando esta vez del lado contrario, utilizando que ya hemos acotado la integral de  $\eta_0^2 |\partial\bar{\omega}_1|^2 \rho$ ,

y haciendo uso de la desigualdad de Cauchy().

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+^2} \bar{\omega}_1^2 |\partial \eta_0|^2 \rho d\rho dz &= \int_{\mathbb{R}_+^2} (\bar{\omega}_1 \partial \eta_0)^2 \rho d\rho dz, \\
&< \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{1}{2} (2\bar{\omega}_1 \partial \eta_0 + \eta_0 \partial \bar{\omega}_1 - \eta_0 \partial \bar{\omega}_1)^2 \rho d\rho dz, \\
&\leq \int_{\mathbb{R}_+^2} ((2\bar{\omega}_1 \partial \eta_0 + \eta_0 \partial \bar{\omega}_1)^2 \rho + (\eta_0 \partial \bar{\omega}_1)^2 \rho) d\rho dz, \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^2} \left( \frac{1}{\eta_0^2} (2\bar{\omega}_1 \eta_0 \partial \eta_0 + \eta_0^2 \partial \bar{\omega}_1)^2 \rho + \eta_0^2 |\partial \bar{\omega}_1|^2 \rho \right) d\rho dz, \\
&\leq \int_{\mathbb{R}_+^2} 2 \frac{(\bar{\omega}_1 \partial \eta_0 + \eta_0^2 \partial \bar{\omega}_1)^2}{\eta_0^2} \rho d\rho dz + C \int_{\mathbb{R}_+^2} \epsilon_{\bar{\omega}} d\rho dz, \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^2} 2 \frac{|\partial(\bar{\omega}_1 \eta_0^2)|^2}{\eta_0^2} \rho d\rho dz + C \int_{\mathbb{R}_+^2} \epsilon_{\bar{\omega}} d\rho dz, \\
&\leq C' \int_{\mathbb{R}_+^2} \epsilon_{\bar{\omega}} d\rho dz. \tag{126}
\end{aligned}$$

con  $C, C'$  constantes. Juntando los 2 resultados anteriores, queda probada la desigualdad (116). Continuemos con la prueba de la desigualdad (117), en la cual haremos uso de la energía  $\bar{\epsilon}_\omega$ .

**Término**  $({}^{(7)}\Delta \bar{\omega}_1)^2 e^{-2(q_0 + \sigma_0)}$

Para acotar este término utilizaremos la ecuación de evolución (113) y la cota (125) para el término  $\eta_0^2 |\partial \bar{\omega}_1|^2$ , junto también con la desigualdad de Cauchy antes presentada,

$$\begin{aligned}
\eta_0^2 ({}^{(7)}\Delta \bar{\omega}_1)^2 \rho &= (e^{2(q_0 + \sigma_0)} \ddot{\bar{\omega}}_1 \eta_0 - 2\eta_0 \partial_A \bar{\omega}_1 \partial^A \sigma_0)^2 \rho, \\
&\leq 2e^{4(q_0 + \sigma_0)} \ddot{\bar{\omega}}_1^2 \eta_0^2 \rho + 8\eta_0^2 (\partial_A \bar{\omega}_1 \partial^A \sigma_0)^2 \rho, \\
&\leq 2e^{4(q_0 + \sigma_0)} \ddot{\bar{\omega}}_1^2 \eta_0^2 \rho + 32\eta_0^2 |\partial \bar{\omega}_1|^2 |\partial \sigma_0|^2 \rho, \tag{127}
\end{aligned}$$

$\implies$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+^2} e^{-2(q_0 + \sigma_0)} \eta_0^2 ({}^{(7)}\Delta \bar{\omega}_1)^2 \rho d\rho dz &\leq \int_{\mathbb{R}_+^2} (2e^{2(q_0 + \sigma_0)} \ddot{\bar{\omega}}_1^2 \eta_0^2 + 32\eta_0^2 |\partial \bar{\omega}_1|^2 e^{-2(q_0 + \sigma_0)} |\partial \sigma_0|^2) \rho d\rho dz, \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}_+^2} \bar{\epsilon}_{\bar{\omega}} d\rho dz + C' \int_{\mathbb{R}_+^2} \epsilon_{\bar{\omega}} e^{-2(q_0 + \sigma_0)} |\partial \sigma_0|^2 d\rho dz. \tag{128}
\end{aligned}$$

Lo único que faltaría para probar ésta cota y finalmente demostrar el Teroema II.1 es que  $e^{-2(q_0 + \sigma_0)} |\partial \sigma_0|^2$  es una cantidad

que se encuentra acotada por una constantes. Teniendo en cuenta los límites

$$e^{-2(q_0+\sigma_0)} \longrightarrow 1 ; |\partial\sigma_0|^2 \longrightarrow \frac{4}{r^4} \quad \text{En el infinito,} \quad (129)$$

$$e^{-2(q_0+\sigma_0)} \longrightarrow \frac{(z-M)^2}{(z+M)^2} ; |\partial\sigma_0|^2 \longrightarrow \frac{4M^2}{(z^2-M^2)^2} \quad \text{En el eje } z \text{ con } z > M , \quad (130)$$

$$e^{-2(q_0+\sigma_0)} \longrightarrow \frac{\rho^2}{16M^2} ; |\partial\sigma_0|^2 \longrightarrow \frac{z^2}{(M^2-z^2)^2} \quad \text{En el eje } z \text{ con } |z| < M, \quad (131)$$

vemos que el producto de dichos factores esta acotado en los bordes de  $\mathbb{R}_+^2$ , y como sus expresiones generales no poseen divergencia en ningún otro sitio, se cumple que  $e^{-2(q_0+\sigma_0)}|\partial\sigma_0|^2$  esta acotada por una constante, probando la cota para el término  $({}^{(7)}\Delta\bar{\omega}_1)^2 e^{-2(q_0+\sigma_0)}$  y completando así la prueba del Teorema II.1.

## 11. Cotas para la perturbación

Nos hallamos ahora frente al último paso a dar en este trabajo, el de acotar la perturbaciones  $\bar{\omega}_1$  en la región exterior al horizonte, de forma similar en la que esto es hecho en corolario (1.2) de [2].

### 11.1. Corolario 11.1

**Corollary 11.1.** *Definiendo el siguientes dominio*

$$\Gamma_\delta = \{(\rho, z) \in \mathbb{R}_+^2, \text{ tal que } 0 < \delta \leq \rho\}, \quad (132)$$

*y bajo las mismas suposiciones del Teorema II.1, se cumple la siguiente cota*

$$\sup_{\Gamma_\delta} |\bar{\omega}_1| \leq C_\delta(m_{\bar{\omega}} + \bar{m}_{\bar{\omega}}), \quad (133)$$

*donde  $C_\delta$  es una constante que solo dependen de  $\delta$  y de la masa  $M$  del agujero negro de Schwarzschild.*

## 11.2. Prueba del Corolario 11.1

Para dar dicha prueba, se utilizará una variante apropiada de una desigualdad de Sobolev y funciones de corte adecuadas.

Sea  $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de corte suave tal que  $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $0 \leq \chi \leq 1$ ,  $\chi(s) = 1$  para  $0 \leq s \leq 1$ ,  $\chi(s) = 0$  para  $2 \leq s$ . Definimos a partir de  $\chi$

$$\chi_\delta(\rho) = \chi\left(\frac{\rho}{\delta}\right), \quad (134)$$

y con ella definimos la función

$$\bar{\omega}'_1 = (1 - \chi_\delta)\bar{\omega}_1. \quad (135)$$

Nótese que  $\bar{\omega}'_1 = 0$  en  $B_\delta = \mathbb{R}_+^2 - \Gamma_\delta$ , y  $\bar{\omega}'_1 = \bar{\omega}_1$  en  $\Gamma_{2\delta}$ . La función  $\bar{\omega}'_1$  es suave y decae a cero en el infinito, con lo cual satisface las ecuaciones del Lema B.1 de [1], y la siguiente cota se cumple:

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \left( ({}^{(3)}\Delta \bar{\omega}'_1)^2 + |\partial \bar{\omega}'_1|^2 \right) \rho d\rho dz \geq C \sup_{\mathbb{R}_+^2} |\bar{\omega}'_1|, \quad (136)$$

donde  $C$  es una constante numérica independiente de  $\bar{\omega}'_1$ . Ahora, como  $\bar{\omega}'_1 = \bar{\omega}_1$  en  $\Gamma_{2\delta}$ , se tiene que

$$\sup_{\mathbb{R}_+^2} |\bar{\omega}'_1| \geq \sup_{\Gamma_{2\delta}} |\bar{\omega}'_1| = \sup_{\Gamma_{2\delta}} |\bar{\omega}_1|, \quad (137)$$

y por lo tanto, si logramos acotar la parte izquierda de (136) con las masas  $m_{\bar{\omega}}$  y  $\bar{m}_{\bar{\omega}}$  multiplicadas por alguna constante, tendríamos demostrado este corolario.

*Demostración.* Descompongamos  $\mathbb{R}_+^2$  en tres dominios,  $\Gamma_{2\delta}$ ,  $B_\delta = \mathbb{R}_+^2 - \Gamma_\delta$  y  $A_{2\delta}$ , donde  $A_{2\delta} = \Gamma_\delta - \Gamma_{2\delta}$  será llamada la región de transición. Definamos algunas constantes que nos resultarán útiles:

$$C_\delta = \min_{\Gamma_\delta} \{e^{-2(q_0 + \sigma_0)}\}. \quad (138)$$

$$N_\delta = \min_{\Gamma_\delta} \{\eta_0^2\}. \quad (139)$$

$$H_\delta = \min_{\Gamma_\delta} \{|\partial\eta_0|^2\}. \quad (140)$$

Para la región  $B_\delta$ , dado que  $\bar{\omega}'_1 = 0$  allí por construcción, la cota resulta trivial. Para la región  $\Gamma_{2\delta}$ , como  $\bar{\omega}'_1 = \bar{\omega}_1$  podemos utilizar los resultados de la primera cota del Teorema II.1 de la siguiente manera

$$\begin{aligned} Cm_{\bar{\omega}} &\geq \int_{\mathbb{R}_+^2} \eta_0^2 |\partial\bar{\omega}_1|^2 \rho d\rho dz, \\ &\geq \int_{\Gamma_{2\delta}} \eta_0^2 |\partial\bar{\omega}_1|^2 \rho d\rho dz, \\ &= \int_{\Gamma_{2\delta}} \eta_0^2 |\partial\bar{\omega}'_1|^2 \rho d\rho dz, \\ &\geq N_\delta \int_{\Gamma_{2\delta}} |\partial\bar{\omega}'_1|^2 \rho d\rho dz. \end{aligned} \quad (141)$$

Para el término del Laplaciano utilizamos el mismo acercamiento

$$\begin{aligned} C(\bar{m}_{\bar{\omega}} + m_{\bar{\omega}}) &\geq \int_{\mathbb{R}_+^2} (e^{-2(q_0+\sigma_0)} ({}^{(7)}\Delta\bar{\omega}_1)^2 + \eta_0^2 |\partial\bar{\omega}_1|^2) \rho d\rho dz, \\ &\geq \int_{\Gamma_{2\delta}} (e^{-2(q_0+\sigma_0)} ({}^{(7)}\Delta\bar{\omega}_1)^2 + \eta_0^2 |\partial\bar{\omega}_1|^2) \rho d\rho dz, \\ &\geq M_\delta \int_{\Gamma_{2\delta}} ({}^{(7)}(\Delta\bar{\omega}_1)^2 + |\partial\bar{\omega}_1|^2) \rho d\rho dz, \\ &\geq M_\delta \int_{\Gamma_{2\delta}} ({}^{(7)}(\Delta\bar{\omega}_1)^2 + (\partial_\rho\bar{\omega}_1)^2) \rho d\rho dz, \end{aligned} \quad (142)$$

donde  $M_\delta$  es el mínimo entre  $C_\delta$  y  $N_\delta$ . Ahora, teniendo esto en cuenta, es fácil ver que siempre podemos hallar una constante  $D_\delta$  tal que

$$\begin{aligned}
D_\delta(\bar{m}_\omega + m_\omega) &\geq \int_{\Gamma_{2\delta}} \left( {}^{(7)}(\Delta\bar{\omega}_1)^2 + (4\partial_\rho\bar{\omega}_1)^2 \frac{1}{(2\delta)^2} \right) \rho d\rho dz, \\
&\geq \int_{\Gamma_{2\delta}} \left( {}^{(7)}(\Delta\bar{\omega}_1)^2 + (4\partial_\rho\bar{\omega}_1)^2 \frac{1}{\rho^2} \right) \rho d\rho dz, \\
&\geq \int_{\Gamma_{2\delta}} \left( \left( {}^{(3)}\Delta\bar{\omega}_1 + 4\frac{\partial_\rho\bar{\omega}_1}{\rho} \right)^2 + \left( 4\frac{\partial_\rho\bar{\omega}_1}{\rho} \right)^2 \right) \rho d\rho dz, \\
&\geq \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{2\delta}} \left( {}^{(3)}\Delta\bar{\omega}_1 \right)^2 \rho d\rho dz, \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{2\delta}} \left( {}^{(3)}\Delta\bar{\omega}'_1 \right)^2 \rho d\rho dz, \tag{143}
\end{aligned}$$

donde para pasar de la tercera a la cuarta línea hemos usado la desigualdad de Cauchy (118).

Solo nos queda cotar dichos términos en la región de transición  $A_{2\delta}$ . Al igual que en [2], acotamos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\partial\bar{\omega}'_1 &= (1 - \chi_\delta)\partial\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_1\partial\chi_\delta, \\
&\implies |\partial\bar{\omega}'_1|^2 \leq 2(1 - \chi_\delta)^2|\partial\bar{\omega}_1|^2 + 2\bar{\omega}_1^2|\partial\chi_\delta|^2, \\
&\leq F_\delta(|\partial\bar{\omega}_1|^2 + \bar{\omega}_1^2) \tag{144}
\end{aligned}$$

donde hemos usado que todas las derivadas de  $\chi_\delta$  se encuentran acotadas por una constante que solo depende de  $\delta$ . Para el Laplaciano, un análisis similar arroja

$$\left( {}^{(3)}\Delta\bar{\omega}'_1 \right)^2 \leq F'_\delta \left( \left( {}^{(3)}\Delta\bar{\omega}_1 \right)^2 + |\partial\bar{\omega}_1|^2 + \bar{\omega}_1^2 \right), \tag{145}$$

donde hemos usado que todas las derivadas de  $\chi_\delta$  se encuentran acotadas por una constante que solo depende de  $\delta$ . Utilizemos estas desigualdades y los resultados del Teorema II.1 acotar los términos de (146) en  $A_{2\delta}$ .

Siempre podremos hallar una constante una constante  $D_\delta$  tal que, si  $M_\delta$  es el mínimo entre los mínimos de  $\eta_0^2$  y  $|\partial\eta_0|^2$  en  $\Gamma_{2\delta}$ , entonces

$$\begin{aligned}
D_\delta m_{\bar{\omega}} &\geq \frac{F_\delta}{M_\delta} \int_{\mathbb{R}_+^2} (\eta_0^2 |\partial \bar{\omega}_1|^2 + \bar{\omega}_1^2 |\partial \eta_0|^2) \rho d\rho dz, \\
&\geq \frac{F_\delta}{M_\delta} \int_{\Gamma_{2\delta}} (\eta_0^2 |\partial \bar{\omega}_1|^2 + \bar{\omega}_1^2 |\partial \eta_0|^2) \rho d\rho dz, \\
&\geq F_\delta \int_{\Gamma_{2\delta}} (|\partial \bar{\omega}_1|^2 + \bar{\omega}_1^2) \rho d\rho dz, \\
&\geq \int_{\Gamma_{2\delta}} |\partial \bar{\omega}_1'|^2 \rho d\rho dz,
\end{aligned} \tag{146}$$

De la misma manera, siempre podemos hallar una constante  $D_\delta$  tal que

$$\begin{aligned}
&D_\delta(m_{\bar{\omega}} + \bar{m}_{\bar{\omega}}) \\
&\geq \int_{\mathbb{R}_+^2} F'_\delta \left( \frac{e^{-2(q_0 + \sigma_0)}}{C_\delta N_\delta} \eta_0^2 2^{(\tau)} \Delta \bar{\omega}_1)^2 + \left( \frac{32}{(2\delta)^2} + 1 \right) \frac{\eta_0^2}{N_\delta} |\partial \bar{\omega}_1|^2 + \frac{|\partial \eta_0|^2}{H_\delta} \bar{\omega}_1^2 \right) \rho d\rho dz, \\
&\geq \int_{\Gamma_{2\delta}} F'_\delta \left( \frac{e^{-2(q_0 + \sigma_0)}}{C_\delta N_\delta} \eta_0^2 2^{(\tau)} \Delta \bar{\omega}_1)^2 + \left( \frac{32}{(2\delta)^2} + 1 \right) \frac{\eta_0^2}{N_\delta} |\partial \bar{\omega}_1|^2 + \frac{|\partial \eta_0|^2}{H_\delta} \bar{\omega}_1^2 \right) \rho d\rho dz, \\
&\geq \int_{\Gamma_{2\delta}} F'_\delta \left( 2^{(\tau)} \Delta \bar{\omega}_1)^2 + \left( \frac{32}{(2\delta)^2} + 1 \right) |\partial \bar{\omega}_1|^2 + \bar{\omega}_1^2 \right) \rho d\rho dz, \\
&\geq \int_{\Gamma_{2\delta}} F'_\delta \left( 2^{(\tau)} \Delta \bar{\omega}_1)^2 + \frac{32}{\rho^2} |\partial \bar{\omega}_1|^2 + |\partial \bar{\omega}_1|^2 + \bar{\omega}_1^2 \right) \rho d\rho dz, \\
&= \int_{\Gamma_{2\delta}} F'_\delta \left( 2^{(\tau)} \Delta \bar{\omega}_1)^2 + 2 \left( \frac{4\partial_\rho \bar{\omega}_1}{\rho} \right)^2 + |\partial \bar{\omega}_1|^2 + \bar{\omega}_1^2 \right) \rho d\rho dz, \\
&\geq \int_{\Gamma_{2\delta}} F'_\delta \left( ({}^{(3)}\Delta \bar{\omega}_1)^2 + |\partial \bar{\omega}_1|^2 + \bar{\omega}_1^2 \right) \rho d\rho dz, \\
&\geq \int_{\Gamma_{2\delta}} ({}^{(3)}\Delta \bar{\omega}_1')^2 \rho d\rho dz,
\end{aligned} \tag{147}$$

dando así por finalizada la prueba de la cota (133).  $\square$

## 12. Conclusiones y observaciones para el futuro

Podemos concluir que hemos logrado estudiar satisfactoriamente las cantidades conservadas para las perturbaciones con si-



metría axial en el exterior del agujero negro de Schwarzschild, comprendiendo los factores que más influyen en su finitud y conservación. Las cantidades obtenidas solo dependen de la condición inicial de la perturbación.

En particular, mostramos como uno puede usar dicha información para construir cotas para la perturbación de  $\bar{\omega}$  en el exterior del agujero negro. Sin embargo, dado que uno de los factores en la integral (117) del teorema II.1 se anula en el horizonte, esta técnica nos sirve para acotar en regiones en las que el borde del agujero negro no está incluido, pues mientras más chico sea el parámetro  $\delta$  usado en las cotas, la constante  $C_\delta$  involucrada en el corolario 11.1 será más grande, tendiendo a infinito a medida que nos acercamos al horizonte y perdiendo su sentido para acotar la perturbación. Es decir, si bien esta técnica nos permite acotar la perturbación lineal de  $\bar{\omega}$  fuera del horizonte, la información que hemos obtenido no es suficiente como para argumentar que la perturbación no crece sin techo cuando alcanza el horizonte.

Para investigar más acerca de esta perturbación, la propuesta a futuro es estudiar más de cerca la ecuación de onda:

$$e^{2(q_0+\sigma_0)}\ddot{\bar{\omega}}_1 = {}^{(7)}\Delta\omega_1 + 2\partial_A\bar{\omega}_1\partial^A\sigma_0. \quad (148)$$

la cual contiene en la divergencia del factor  $e^{2(q_0+\sigma_0)}$  la información de la presencia del horizonte del agujero negro. En el artículo [3], se estudia la ecuación de onda para un campo escalar sin masa en el exterior del agujero negro de Reissner-Nordstrom extremo, y se usa una técnica basada en energías conservadas para acotar la solución a la ecuación. Tal vez, este trabajo pueda dar algún indicio de como tratar la ecuación (148).

Finalmente, vale la pena remarcar la ayuda y simplificación que han introducido las coordenadas de Weyl en el análisis de las perturbaciones con simetría axial de este agujero negro. Es válido preguntarnos y algún sistema de coordenadas análogo podría usarse en el caso del agujero negro de Kerr, que nos permita escribir a su lapso  $\alpha$  como la respectiva coordenada cilíndrica  $\rho$  dentro del gauge maximal isotérmico, dado que en los casos de Minkowski, Kerr extremo y Schwarzschild esta propiedad ha sido común al momento poder disponer de un conjunto de energías conservadas

para la perturbación.

## Referencias

- [1] Sergio Dain and Ivan Gentile de Austria. On the linear stability of the extreme Kerr black hole under axially symmetric perturbations. Class.Quant.Grav., 31(19):195009, 2014.
- [2] Sergio Dain and Ivan Gentile de Austria. Bounds for axially symmetric linear perturbations for the extreme Kerr black hole, 2015.
- [3] Sergio Dain and Gustavo Dotti. The wave equation on the extreme Reissner-Nordström black hole. Class.Quant.Grav., 30:055011, 2013.