EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS IX JORNADAS

VOLUMEN 5 (1999), Nº 5

Eduardo Sota
Luis Urtubey
Editores

ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Reglas estructurales y análisis de la consecuencia lógica[1]

*Javier Legris**

1. Teoría de la demostración y filosofía de la lógica

La semántica formal de valores de verdad para la lógica de primer orden, tal como fue fundada por Alfred Tarski, es considerada por muchos como la herramienta formal adecuada para reconstruir la verdad lógica y la relación de consecuencia lógica. La determinación de condiciones de verdad para enunciados atómicos y moleculares del lenguaje de primer orden sobre la base de asignaciones de elementos de un dominio para las expresiones no lógicas y asignaciones a uno de los valores de verdad, verdadero o falso, para los enunciados se consideran como una elucidación, una aclaración semántica, por lo menos en el sentido introducido por Rudolf Carnap. La elucidación (*explication* en inglés), así entendida, consiste en reemplazar un concepto vago e inexacto de la vida cotidiana por otro más exacto, presentado en términos formales de acuerdo con ciertas condiciones (véase Carnap 1947 pp.7 y s.). Precisamente, la definición tarskiana de verdad que constituye el origen conceptual de la teoría de modelos es puesta por Carnap como un ejemplo de este tipo de elucidación (véase Carnap 1950, p. 5). Más allá de su aceptación como método filosófico y de las críticas de que ha sido objeto, no cabe duda de que este concepto de elucidación es un claro ejemplo de análisis filosófico.

Como es sabido, esta semántica se formula esencialmente en términos de la teoría clásica de conjuntos, haciendo uso de procedimientos no constructivos. En efecto, en la semántica tarskiana se toman en cuenta asignaciones arbitrarias de valores de verdad a los enunciados atómicos sin limitarse a aquellas asignaciones que resultan de procedimientos constructivos o efectivos. Por el contrario, existen otros enfoques para analizar la consecuencia lógica que admiten exclusivamente métodos constructivos. Tomo aquí la palabra "constructivo" en un sentido amplio que incluye, por ejemplo, no sólo al intuicionismo matemático, sino muchos de los métodos empleados en el desarrollo de la teoría de la demostración, entendida como disciplina dentro de la lógica matemática.

El enfoque constructivo encierra una concepción determinada de la consecuencia lógica en la que los procesos mediante los cuales se llega a determinar que un enunciado es consecuencia de otros adquieren una peculiar importancia. Estos procesos constituyen lo que usualmente se llama una demostración. La corrección de cada uno de los pasos de los que consta una demostración es lo que asegura la existencia de la relación de consecuencia lógica, de allí que deba analizarse la estructura de las demostraciones.

Los intentos de desarrollar una semántica constructiva han sido variados y de variado éxito. Algunos han empleado herramientas matemáticas más complejas y otros más simples. Desde las primeras ideas de una "lógica de problemas" (Kolmogorov), hasta la "teoría de construcciones" de Kreisel y la "teoría de tipos" de Martin-Löf se han propuesto diferentes reconstrucciones formales. Pero además, existe una tradición de pensamiento en la historia de la lógica que se basa en una caracterización de la consecuencia lógica en términos de conceptos como los de demostración, deducción y regla de inferencia, que puede

* Universidad de Buenos Aires y Conicet.

remontarse a la definición aristotélica de la lógica como *ciencia demostrativa* (*An. Pr.* I 124 a 10).

Una idea primera y seminal para muchos de estos intentos se encuentra en las reglas de la deducción natural de Gentzen (sistema cuyo uso está tan extendido en cursos introductorios de Lógica). Tal como ha sido expresado por su mismo autor, las reglas de introducción de constantes lógicas de la deducción natural pueden verse como "definiciones" de las constantes lógicas y las reglas de eliminación surgen como consecuencia de haber aceptado esas definiciones (véase Gentzen 1935 § 5.13). Estas "definiciones" pueden considerarse elucidaciones en el sentido de Carnap recién mencionado, dado que las condiciones intuitivas para afirmar enunciados con constantes lógicas se reconstruyen de manera precisa como reglas de inferencia referidas a expresiones en un lenguaje formalizado. Por estas razones puede hablarse, en el caso de teorías semánticas basadas en estas definiciones, de *semánticas de Gentzen,* en oposición a la llamada semántica de Tarski, la semántica basada en la teoría de conjuntos clásica (tomo la expresión "semántica de Gentzen" de Kutschera 1968, p. 10).

Posteriormente, los teoremas de normalización para la deducción natural (obtenidos independientemente por Dag Prawitz y Andrés Raggio) y el desarrollo de una teoría general de la demostración han permitido expresar con mayor exactitud estas ideas, y otro tanto puede decirse del isomorfismo Curry-Howard que permite traducir reglas de la deducción natural a expresiones del cálculo lambda.

2. Teoría de secuentes

Esta idea de analizar la consecuencia lógica por medio de métodos de la teoría de la demostración se plasma también en la teoría de secuentes, debida al mismo Gentzen. Los secuentes son un tipo de expresiones que sirven para representar relaciones inferenciales en general.

Los secuentes pueden ser de dos tipos singulares y múltiples. Sean $A_1, .., A_m$, y B fórmulas del lenguaje de predicados de primer orden, los secuentes singulares son expresiones de la siguiente forma:

(sqs) $A_1, .., A_m$: B.

Los secuentes singulares se interpretan fácilmente como inferencias deductivas o deducciones: La expresión (sqs) dice que el enunciado B se sigue deductivamente de los enunciados $A_1, .., A_m$ (en ese orden). Gentzen consideró a los secuentes singulares como expresiones formales del "significado de una *proposición en una demostración* junto con su dependencia de posibles supuestos" (Gentzen 1936, § 5.21), de modo que puede leerse como "B es demostrable a partir de los supuestos $A_1, .., A_m$". En este sentido, los secuentes sirven para expresar la idea de inferencia hipotética siendo ellos mismos afirmaciones hipotéticas acerca de la demostrabilidad de un enunciado a partir de hipótesis o supuestos. El doble punto ":" (para el cual Gentzen usaba una flecha $\rightarrow$) puede interpretarse, en general, como la relación de consecuencia lógica. Los enunciados a la izquierda del doble punto están ordenados en una secuencia y reciben el nombre de "antecedentes"; el de la derecha recibe el nombre "sucedente".

Los secuentes múltiples expresan una generalización de la consecuencia lógica. Sean ahora $A_1, .., A_m, B_1, ..., B_n$ fórmulas del lenguaje de predicados de primer orden, entonces un secuente múltiple tendrá la siguiente forma (sqm) $A_1, .., A_m : B_1, ..., B_n$,

Es decir, en un secuente múltiple aparece una secuencia ordenada de sucedentes. La interpretación más inmediata de estos secuentes múltiples es la siguiente: De los enunciados A_1, .., A_m se sigue (se infiere deductivamente) al menos uno de los enunciados $B_1, ..., B_n$. Esta idea de conclusiones alternativas puede entenderse mejor diciendo que explicita todas las diferentes conclusiones que, alternativamente, pueden obtenerse de un conjunto de premisas, las que en el uso habitual se omiten de una manera *entinemática* (véase Dosen 1994, p. 277). El carácter constructivo de esta teoría de secuentes puede apreciarse en el hecho de que las secuencias de antecedentes y consecuentes son siempre finitas.

Con estos secuentes se pueden hacer afirmaciones acerca de relaciones de consecuencia, y, en particular, expresar las condiciones mínimas que estas deben cumplir. Desde Gentzen, quien continuaba una idea original de Paul Hertz, las condiciones mínimas para la consecuencia lógica generalizada estaban indicadas mediante el secuente

$$A : A\ ,$$

llamado "secuente básico" o "secuente inicial", que representa la *reflexividad* de la relación de consecuencia, y las siguientes reglas

Contracción

$$\frac{A, A, \Gamma : \Theta}{A, \Gamma : \Theta} \qquad \frac{\Gamma : \Theta, A, A}{\Gamma : \Theta, A}\ ;$$

Permutación

$$\frac{\Delta, A, B, \Gamma : \Theta}{\Delta, B, A, \Gamma : \Theta} \qquad \frac{\Gamma : \Theta, A, B, \Lambda}{\Gamma : \Theta, B, A, \Lambda}\ ;$$

Dilución

$$\frac{\Gamma : \Theta}{A, \Gamma : \Theta} \qquad \frac{\Gamma : \Theta}{\Gamma : \Theta, A}\ ;$$

Corte

$$\frac{\Gamma : \Theta, C \qquad C, \Delta : \Lambda}{\Gamma, \Delta : \Theta, \Lambda}\ ;$$

Sustitución de variables de individuo

$$\frac{\Gamma : \Theta}{\Gamma : \Theta\ [x/y]}$$

En todos los casos Γ, Δ, Θ y Λ representan secuencias (i.e., conjuntos ordenados) de enunciados. En la regla de sustitución $\Gamma : \Theta\ [x/y]$ indica el resultado de reemplazar todas las apariciones libres de las variables de individuo x por la variable y en los enunciados de la secuente $\Gamma : \Theta$.

Contracción y permutación dan lugar a que los secuentes puedan ser considerados como pares de conjuntos de fórmulas. Su restricción o eliminación implica tomar en cuenta el orden en que se presentan las fórmulas (permutación) o ver a los secuentes como pares de multiconjuntos (contracción).

Dilución y corte son distintos. Aparecen como reglas características de la inferencia lógica considerada abstractamente (sin tomar en cuenta los procedimientos de demostración concretos). El célebre *Hauptsatz* de Gentzen afirma la eliminabilidad de la regla de corte, pero esto como propiedad de sistemas formales concretos y a los efectos de demostrar que el sistema tiene la propiedad de la subfórmula (es decir, no desaparecen fórmulas a lo largo de las derivaciones en el sistema). Como es sabido, a partir de esta propiedad de la subfórmula puede demostrarse la consistencia de un sistema dado (tal como fue la intención original de Gentzen). Ahora bien, la regla de corte expresa la transitividad de la relación de inferencia deductiva, propiedad que parece irrenunciable. El caso de la dilución es más difícil. Gentzen mismo justificó parcialmente esta regla diciendo que si una fórmula es verdadera, entonces lo es también a partir de supuestos cualesquiera arbitrarios, sin pretender una "dependencia de hecho" (*tatsächliche Abhängigkeit*) entre la fórmula y sus supuestos. Caso contrario, afirma Gentzen, surgirían dificultades en las demostraciones que hacen uso de supuestos aparentes (véase Gentzen 1936 § 5.244). Esta dependencia es lo que actualmente se entendería por relevancia. Además, en el caso de la relación de consecuencia lógica, esta regla expresa lo que se llama "propiedad de monotonía". La regla de sustitución de variables de individuo (que no siempre se hace explícita de esta manera) permite "renombrar" las variables que aparecen en un secuente.

Desde los "sistemas de proposiciones" de Paul Hertz (Hertz 1923), dilución (monotonía) y corte (transitividad) fueron definitorias de la inferencia deductiva, en un sentido más general o abstracto, y así aparecen también en la definición de consecuencia lógica de Tarski (Tarski 1930), donde se las presenta en términos de la teoría clásica de conjuntos. La reglas de sustitución forma parte de esta definición.

Todas estas reglas fueron llamadas reglas *estructurales* por el mismo Gentzen, en el sentido de que regulan exclusivamente la estructura de los secuentes, sin hacer referencia a ningún tipo de constante lógica (o extralógica), y son por ello absolutamente *formales*: Sólo aparecen formas o esquemas de enunciado del lenguaje de primer orden. (El caso particular de los secuentes básicos que expresan la identidad puede verse como una regla estructural sin premisas).

Sobre la base de estas reglas pueden desarrollar argumentaciones, las cuales, considerando a los secuentes como un sistema formal, son derivaciones en un sistema de secuentes. Hay diferentes estrategias para ello. Se puede partir de los secuentes básicos, pensados como axiomas, a los cuales se les van aplicando las reglas estructurales mencionadas. También se puede adoptar métodos refutatorios, considerando que el secuente vacío (" : ") representa la contradicción. Todas estas derivaciones puramente estructurales no dependen de reglas para las constantes lógicas. Esto significa que su descripción es independiente de las constantes lógicas que contenga el lenguaje, y por lo tanto requiere únicamente de secuentes estructurales, obtenidos por medio de reglas estructurales. Nos hallamos aquí frente a un marco metalógico, que no presupone sistema lógico alguno determinado.

3. Las constantes lógicas como "signos de puntuación"

En un trabajo publicado originariamente en 1989, Kosta Dosen ofreció una elucidación (en el sentido mencionado al comienzo) de las constantes lógicas dentro del marco metateórico de secuentes, en el cual estas quedan caracterizadas en términos de deducciones estructurales. Más precisamente, "cualquier constante [lógica] del lenguaje objeto de cuya presencia depende la descripción de una deducción formal no estructural puede ser analizada de manera definitiva en términos estructurales." (Dosen 1994, p. 277).

Las deducciones estructurales son las deducciones básicas y las que exhiben, en última instancia, la forma lógica de una demostración. La introducción de las constantes lógicas sirven para indicar relaciones puramente estructurales. Esto llevó a Dosen a hablar, metafóricamente, de las constantes lógicas como "signos de puntuación" que posee el lenguaje objeto en cuestión con la finalidad de indicar características estructurales de las demostraciones.

El caso del condicional ilustra con claridad esta idea. Un enunciado de la forma A → B expresa que a partir de suponer A el enunciado B resulta demostrable, o, lo que es lo mismo, B se deriva a partir de A. Esto conduce a la caracterización del condicional en términos de secuentes múltiples por medio de la siguiente regla

$$\frac{A, \Gamma : \Theta, B}{\Gamma : \Theta, A \rightarrow B}$$

(La doble raya = indica que la inferencia vale para ambos lados; se trata de una "regla de equivalencia"). La forma lógica de A → B representa en el lenguaje de primer orden un *rasgo estructural* de las demostraciones, a saber la relación entre una premisa A y una conclusión B.

El cuantificador universal se caracteriza con la siguiente regla de secuentes

$$\frac{\Gamma : \Theta, A[x]}{\Gamma : \Theta, \forall x\, A[x]}$$

con la restricción de que no puede haber apariciones libres de la variable de individuo x en Γ o en Θ. Esta regla indica que el cuantificador universal está representando ciertos aspectos estructurales de las demostraciones en las que aparecen variables de individuo. Si x aparece libre en la fórmula A del sucedente, entonces se refiere a "uno cualquiera" del dominio, de manera indeterminada. Ahora bien, el cuantificador universal representa el hecho de que si x aparece en el sucedente del secuente, entonces está representando a todos los objetos del dominio.

Finalmente, puede verse también el caso de la conjunción, caracterizada mediante la siguiente regla

$$\frac{\Gamma : \Theta, A \qquad \Gamma : \Theta, B}{\Gamma : \Theta, A\&B},$$

según cual la conjunción es una forma de fusionar dos demostraciones en una (véase Dosen 1994, p. 280). Estas caracterizaciones están implícitas en la obra de Gentzen. Con el auxilio de secuentes básicos y la regla de corte, la regla se deriva de las reglas de secuentes para las constantes lógicas que Gentzen ofrece en 1935 § 1.22, las que, a su vez, son trasposiciones a secuentes de aquellas dadas en la deducción natural.

Quiero subrayar muy especialmente que estas reglas pueden considerarse básicamente una elucidación en el sentido de Carnap, pues las constantes lógicas son reemplazadas por secuentes estructurales, en el marco de una teoría formal de secuentes. Pero además queda plenamente justificada la elección de este marco formal, ya que los secuentes sirven como medio para expresar la idea de la consecuencia lógica ligada al concepto de demostración.

Esta semántica "gentzeniana" (o "*à la* Gentzen") parecería limitar la interpretación de los conceptos lógicos a los métodos de derivación formal (recordando incluso al sintactismo de Carnap), pero en realidad surge de las ideas constructivas que el mismo Gentzen formuló para el caso de análisis de teorías matemáticas. Se trata de una investigación *general* acerca del concepto de demostración, en la que las diferentes "figuras" de demostración son estudiadas como se estudian las figuras geométricas, y que se lleva a cabo conforme el punto de vista constructivo, en el sentido apuntado antes (véase Gentzen 1936-1937). Más aún, la "teoría de secuentes" puede considerarse como una teoría no formalizada acerca de relaciones de consecuencia, cuyas expresiones no pertenecen a un lenguaje formalizado (en este sentido es comparable a la "teoría abstracta" de la consecuencia lógica desarrollada por Tarski en su trabajo de 1930).

4. El análisis de las reglas estructurales

Paso a continuación al punto central del trabajo. El hecho de que las constantes lógicas sean indicaciones de determinados aspectos de deducciones estructurales significa que toda demostración que emplea reglas para las constantes lógicas puede reducirse, en última instancia, a demostraciones de secuentes puramente estructurales, en las cuales no se aplica ninguna regla para las constantes lógicas, sino exclusivamente reglas estructurales. Es así que las reglas estructurales resultan ser lo que caracteriza esencialmente a la consecuencia lógica.

Ahora bien, de lo expuesto se sigue que las reglas estructurales pueden dividirse en dos clases. De un lado, están las reglas de identidad, atenuación y corte. De otro lado, están las reglas de permutación y contracción. La distinción entre ambas clases se basa en el tratamiento que hacen de la información. Se considera que las expresiones integrantes de los secuentes son enunciados, es decir, unidades completas de información acerca de un dominio cualquiera.

Las reglas de la primera clase tienen la peculiaridad de eliminar o introducir información en las demostraciones estructurales; atenuación e identidad introducen nueva información en la conclusión (la segunda regla de manera trivial) mientras que la regla de corte hace que en la conclusión desaparezca información que está presente en las premisas. Obviamente, el agregado o eliminación de información es, en cada caso, irrelevante desde el punto de vista lógico (y eso es lo que dicen cada una de las reglas respectivamente). Pero el *contenido* de información varía efectivamente.

Las reglas de la segunda clase, en cambio, se limitan a manipular la información dada en función de poder aplicar las reglas de la primera clase. En el caso de la permutación se altera el orden en que la información viene dada; en el caso de la contracción se eliminan "copias" redundantes de la información. Como se mencionó antes, la regla de permutación deja de ser necesaria si se consideran conjuntos no ordenados y la de contracción es superflua al considerar conjuntos en lugar de multiconjuntos.

Salta a la vista que las reglas de la primera clase tienen un carácter más primario que las reglas de la segunda clase. Esta es la idea que aparece, por primera vez, en los escritos de Paul Hertz y sus "sistemas de proposiciones" (véase Hertz 1923), en los que versiones singulares de identidad, dilución y corte aparecen como definitorias de la consecuencia lógica. Y esta misma idea fue continuada más tarde, desde diferentes concepciones, por Gentzen y por Tarski.

Por esto motivo, llamo a las reglas de la primera clase *reglas de consecuencia lógica* y a las reglas de la segunda clase *reglas de manipulación* de la información.

Si se acepta que estas reglas caracterizan a la consecuencia lógica (clásica), en el sentido de deducción lógica (clásica), cualquier modificación o eliminación de las mismas reflejaría una consecuencia no lógica y las demostraciones estructurales resultantes no serían demostraciones lógicas (al menos en un sentido estricto). Ahora bien, siendo las reglas que llamé de consecuencia más esenciales que las de manipulación, una modificación en estas últimas parece más decisiva. Este sería el caso de la lógica relevante, la lógica intuicionista y la familia de las lógicas no monótonas. (El caso de la lógica intuicionista presenta problemas particulares; como ya se mencionó, la manera natural, y seguramente adecuada, de expresar la lógica intuicionista es mediante secuentes singulares, respecto de los cuales no se requiere modificación alguna de las reglas estructurales.)

Por el contrario, cambios en las reglas de manipulación significan cambios en la forma en que es tratada la información e indicarían ciertas limitaciones puramente operacionales, de modo que las demostraciones resultantes en tales sistemas estarían más próximas a las demostraciones lógicas (clásicas), siendo algo así como "variantes operacionales" de las mismas. Este parece ser el caso de la lógica lineal (si bien modifica también la regla de atenuación, de acuerdo con su espíritu intuicionista, al respecto véase, por ejemplo, Troelstra 1992).

Por último, cabe destacar muy especialmente el hecho de incluir estas reglas de manipulación en la caracterización de la consecuencia lógica. En efecto, al capturar propiedades relativas al orden en que la información viene dada y a la manera en que se va disponiendo la información a lo largo de una demostración, los procedimientos pasan a formar parte de la consecuencia lógica. Cambios en las reglas de manipulación pueden conducir a diferentes demostraciones. La consecuencia lógica, siguiendo la idea original, aparece en conexión con los procedimientos de demostración.

Nota

[1] La realización de este trabajo ha sido parcialmente subvencionada mediante el subsidio JE01 de la Secretaría de Ciencia y Técnica de la Universidad de Buenos Aires.

Referencias bibliográficas

Carnap, Rudolf. 1947. *Meaning and Necessity. A Study in Semantics and Modal Logic*. Chicago, Chicago University Press.

Carnap, Rudolf. 1950. *Logical Foundations of Probability*. Chicago, Chicago University Press.

Dosen, Kosta. 1994. "Logical Constants as Punctuation Marks". En *What is a Logical System?* comp. por Dov. M. Gabbay. Oxford, Oxford University Press, pp. 273-296.

Gentzen, Gerhard. 1935. "Untersuchungen über das logische Schließen". En *Mathematische Zeitschrift* 39, pp. 176-210 y 405-431.

Gentzen, Gerhard. 1936. "Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie". En *Mathematische Annalen* 112 (1936), pp. 493-565.
Gentzen, Gerhard. 1936-1937. "Der Unendlichkeitsbegriff in der Mathematik". En *Semester-Berichte*, Münster in W., 9. Semester, pp.65-80.
Hertz, Paul. 1923. "Über Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme. 1. Teil. Sätze ersten Grades". En *Mathematische Annalen* 87, pp. 246-269.
Kutschera, Franz von. 1968. "Die Vollständigkeit des Operatorensystems { ¬, ∧ , ∨ , } für die intuitionistische Aussagenlogik im Rahmen der Gentzensemantik". En *Archiv für Logik und Grundlagenforschung* 11, pp. 3-16.
Tarski, Alfred. 1930. "Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften I". En *Monatsheft für Mathematik und Physik* 37, pp. 361-404.
Troelstra, Anne S. 1992. *Lectures on Linear Logic*. Stanford, CSLI.