View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Repositorio Digital de la Universidad Nacional de Córdoba

EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS VIII JORNADAS

VOLUMEN 4 (1998), Nº 4

Horacio Faas
Luis Salvatico
Editores

ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons atribución NoComercial-SinDerivadas 2.5 Argentina

O problemático sentido finitário das proposições da aritmética

*Wagner de Campos Sanz**

No artigo de 1936[1], "A consistência da teoria elementar de números", Gentzen oferece uma prova da consistência dessa teoria usando técnicas que segundo ele enquadrar-se-iam como técnicas finitárias. Também afirma, no artigo citado, que tais técnicas ultrapassam as técnicas admissíveis na teoria elementar de números. Central a sua prova é a definição de *regra de redução* para um sequente. A formalização da teoria elementar dos números no referido texto tem como expressões formais da teoria sequentes da forma $\Gamma \Rightarrow \varphi$ onde Γ é uma sequência finita de fórmulas (pressuposições) e φ é uma fórmula que depende (dedutivamente) das fórmulas em Γ. Neste sistema formalizado as regras são aquelas de dedução natural clássica (incluem uma regra para eliminação da dupla negação) para os sequentes da forma acima.

Em termos muito gerais, após formalizar as formas de expressão e de inferência usuais na teoria elementar de números com sequentes e regras de dedução natural, a prova de consistência vem a ser uma prova de que nenhuma derivação (contrapartida formal de uma prova matemática) pode demonstrar uma contradição Mais precisamente, não há nenhuma derivação da seguinte expressão (ou sequente):

$$\Rightarrow 1=2$$

O coração da prova está na demonstração de que para qualquer expressão derivável no sistema formal é possível estabelecer uma regra de redução, e como, dada a definição de uma regra de redução, é impossível estabelecê-la para o sequente $\Rightarrow 1=2$, então não poderíamos provar uma contradição na teoria elementar dos números.

Podemos definir uma regra de redução para um sequente $\Gamma \Rightarrow \varphi$, onde Γ é um conjunto finito de fórmulas (chamadas de pressupostos) e φ é uma fórmula qualquer, seguindo as linhas gerais de Gentzen, do seguinte modo:

* Mestre em Lógica e Filosofia da Ciência pela Unicamp. Universidade Católica de Pelotas - Brasil

[1] O presente texto toma por base o artigo *The consistency of elementar number theory*, em The Collected Papers of Gerhard Gentzen, North-Holland, 1969, pág. 132, daqui por diante citado como CN

1) dizemos que o sequente está em forma reduzida se φ é uma fórmula mínima (não tem conectivos lógicos nem variáveis) verdadeira, ou se φ é uma fórmula mínima falsa e Γ contém pelo menos uma fórmula mínima falsa (uma fórmula mínima é constituída de um símbolo de predicado com numerais ocupando as posições dos argumentos, por exemplo: 4=12);

2) se um sequente não está em forma reduzida então temos os seguintes casos, que são as diferentes possibilidades de reduzir o sequente, após termos feito uma substituição homogênea de variáveis livres e o cálculo dos termos mínimos (aqueles que contém símbolos funcionais e numerais unicamente):

2.1) se φ é da forma $\forall x\psi(x)$ reduzimos o sequente a $\Gamma \Rightarrow \psi(n)$ (aqui é possível a escolha de um número qualquer);

2.2) se φ é da forma $\psi\wedge\rho$ reduzimos o sequente a $\Gamma \Rightarrow \psi$ ou a $\Gamma \Rightarrow \rho$ (aqui é possível a escolha de uma das fórmulas);

2.3) se φ é da forma $\neg\psi$ reduzimos o sequente a $\psi, \Gamma \Rightarrow 1=2$;

2.4) se φ é uma fórmula mínima falsa e $\Gamma = \Delta, \omega, \Sigma$, onde Δ, Σ são sequências de fórmulas eventualmente vazias e ω é uma fórmula, tal que Γ não contém nenhuma fórmula mínima falsa:

2.4.1) se ω é da forma $\forall x\psi(x)$ reduzimos o sequente a $\Delta, \psi(n), \Sigma \Rightarrow \varphi$ ou a $\Delta, \psi(n), \forall x\psi(x) , \Sigma \Rightarrow \varphi$ se desejamos reter a fórmula (aqui são possíveis duas escolhas, em princípio, uma para o número e outra acerca da retenção ou não da fórmula);

2.4.2) se ω é da forma $\psi\wedge\rho$ reduzimos o sequente a $\Delta, \psi, \Sigma \Rightarrow \varphi$ ou a $\Delta, \rho, \Sigma \Rightarrow \varphi$, podendo ainda reter a fórmula como no caso anterior (aqui são possíveis duas escolhas, da fórmula e da retenção ou não, em princípio);

2.4.3) se ω é da forma $\neg\psi$ reduzimos o sequente a $\Delta, \Sigma \Rightarrow \psi$, podendo ainda reter a fórmula como no caso anterior (aqui é possível uma escolha, da retenção, em princípio).

Como é possível notar, não foram mencionados os conectivos lógicos $\exists$, $\vee$, $\rightarrow$ (existencial, disjunção e implicação) e que no entanto fazem parte do sistema formal apresentado pelo autor. Ocorre que em um passo prévio à definição da regra de redução, o autor faz uma tradução das derivações no sistema completo para um sistema que não contenha aqueles símbolos lógicos acima. Gentzen transforma as derivações da teoria elementar de números formalizada substituindo todas as expressões que contenham os símbolos $\exists$, $\vee$, $\rightarrow$ por expressões que contenham unicamente os símbolos $\forall$, $\wedge$, $\neg$:

$\exists x\varphi(x)$ por $\neg\forall x\neg\varphi(x)$

$\varphi \vee \rho$ por $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\rho)$
$\varphi \rightarrow \rho$ por $\neg(\varphi \wedge \neg\rho)$

Como sabemos, esta tradução só é possível quando consideramos o significado clássico dos conectivos lógicos. Naturalmente, as regras de introdução e eliminação destes conectivos ($\exists$, $\vee$, $\rightarrow$) devem ser substituídas na derivação por outros trechos de derivação que não façam uso destas regras. Lembramos que a derivação obtida ainda é uma derivação clássica pois nelas ainda fazemos uso (possivelmente) da regra de eliminação da dupla negação. Acerca da regra de redução diz o autor:

> 13.6 Uma **regra de redução** para um sequente no qual os conectivos $\exists$, $\vee$ e $\rightarrow$não ocorrem é uma regra que torna possível em cada caso a 'redução' de um sequente em **um número finito de passos de redução individuais** [acima definida por nós de 1 a 2.4.3] a uma das **formas corretamente reduzidas** [acima como 1] independente de como nós podemos **escolher** o numeral n, ou qual das duas fórmulas [φ] ou [ρ] [acima em 2.2] nós podemos **escolher** quando levamos avante um passo de redução no qual existe uma 'opção', i.e., um dos passos descritos em [acima como 2.1 a 2.3][2]

Além de definir o que é uma regra de redução para um sequente, para os fins da prova de consistência, é preciso também definir como estabelecer as regras de redução para os sequentes que ocorrem em uma derivação arbitrária dada. Começamos por um tratamento das derivações com apenas um sequente, aquelas em que temos um sequente básico, seja ele lógico ou matemático. Depois, no caso de uma derivação mais complexa, teremos procedimentos de redução correspondentes a cada uma das regras (na prova de galé: regras estruturais no antecedente do sequente, introdução e eliminação do universal e da conjunção, *reductio*, eliminação da dupla negação, indução completa) dependendo de qual foi a última regra aplicada, para obter o sequente final.

A derivação abaixo:

$\Rightarrow \forall x \forall y\ (x=y \rightarrow y=x)$[3]

por exemplo, é reduzida da seguinte forma:

1) $\Rightarrow \forall x \forall y\ \neg(x=y \wedge \neg y=x)$	(tradução dos conectivos)
2) $\Rightarrow \forall y\ \neg(1=y \wedge \neg y=1)$	p/2.1
3) $\Rightarrow \neg(1=2 \wedge \neg 1=2)$	p/2.3
4) $(1=2 \wedge \neg 1=2) \Rightarrow 1=2$	p/2.4.2

[2]CN pág. 175
[3]CN pág. 157

5) $1=2 \Rightarrow 1=2$ p/1 em forma reduzida (escolhida a subfórmula falsa)

Vejamos a seguintes passagem do artigo:

o conceito de 'afirmabilidade [statability] de uma regra de redução' para um sequente, ..., servirá como o substituto formal do conceito informal de verdade; ele nos fornece um interpretação finitista especial das proposições e toma o lugar da sua interpretação atualista.[4]

Esta passagem, que antecede a definição da regra de redução para um sequente, parece querer indicar que a regra de redução confere um sentido finitista à todas as **proposições da teoria formalizada**. Consequentemente que as proposições correspondentes da teoria elementar intuitiva dos números também poderiam receber um significado finitista.

Gentzen define como fórmulas transfinitas aquelas que contém um conectivo $\exists$ ou um $\forall$[5]. Ou seja aquelas que correspondem a proposições que fazem referência a totalidade dos números naturais[6]. Dizemos que uma proposição transfinita tem sentido atualista[7] quando está predeterminado se uma proposição transfinita é **verdadeira** ou **falsa**. Em resumo, a partir das passagens acima, podemos dizer que a regra de redução dá uma ***ancoragem*** as proposições transfinitas em uma parte nuclear da matemática.

Em boa medida, a prova de consistência está motivada pelas críticas de não-construtividade das proposições da matemática clássica, em particular aquela formulada pelos intuicionistas, que rejeitam a aplicação de certas formas de inferência, basicamente a aplicação de terceiro excluído à proposições que se referem a totalidades infinitas. Contudo, mesmo após a prova de consistência da matemática clássica (neste caso da teoria elementar de números), Gentzen examina uma objeção adicional da parte dos intuicionistas, que ele apresenta assim:

17.3 Da parte dos **intuicionistas**, a seguinte **objeção** é levantada contra o significado das provas de consistência: mesmo que tenha sido demonstrado que as formas de inferência disputáveis não conduzem a resultados mutuamente contraditórios, estes resultados seriam no entanto proposições **sem sentido** ...[8]

Quanto a esta objeção o autor assume a seguinte posição:

... [Estas proposições] Elas podem servir como fonte para a derivação de proposições mais simples, possivelmente representáveis por fórmulas mínimas (3.24), as quais são elas mesmas

[4]CN pág. 173, § 13.

[5]CN pág. 142, 3.24.

[6]CN pág. 161, 9.1.

[7]CN pág. 162, 9.2.

[8]CN pág. 200, 17.3 (16.3 na prova de galé)

finitisticamente e intuicionisticamente significantes e que devem ser **verdadeiras** em virtude da prova de consistência.[9] ..

> Assim proposições da matemática atualista parecem ter uma certa utilidade, mas nenhum **sentido**. A maior parte da minha prova de consistência, no entanto, consiste precisamente em imputar um sentido finitista para proposições atualistas, isto é: para toda proposição arbitrária, tanto quanto ela seja demonstrável, uma regra de redução de acordo com (13.6) pode ser afirmada (stated), e este fato representa o sentido finitista da proposição concernida e este sentido é obtido precisamente através da prova de consistência.[sublinhado meu].[10]

Porém acreditamos que a objeção intuicionista não pode ser ainda inteiramente removida pela prova oferecida por Gentzen. Se de fato a definição da regra de redução, além de estar dando uma prova finitista de consistência, está dando um significado finitista as proposições da teoria elementar dos números, devemos lembrar que antes de definir a regra de redução alteramos as provas eliminando delas os conectivos $\exists$, $\vee$, $\rightarrow$. Contudo, essa tradução entre derivações é, por assim dizer, correta do ponto de vista da lógica clássica (ou da interpretação atualista[11]), pois aquelas proposições que contenham uma implicação, particularmente, parecem poder receber um sentido finitista só através da referida tradução. Repare que para efetuar a tradução a regra de introdução deve ser substituída por um trecho de prova que é válido intuicionisticamente, o mesmo não ocorrendo para a regra de eliminação. Para substituir esta última sempre é necessário a utilização da regra de eliminação da dupla negação (não aceita intuicionisticamente).

Em um artigo publicado postumamente[12], o autor mostra como seria possível transformar uma prova da aritmética clássica em uma prova intuicionista. A regra de eliminação da dupla negação pode ser suprimida da derivação caso sejam substituídas na derivação aquelas proposições elementares que compõem qualquer fórmula desta mesma derivação por sua dupla negação. Porém, do ponto de vista intuicionista não há porque aceitar que as proposições elementares substituídas por sua dupla negação tenham o mesmo significado que aquela que elas substituem.

---

[9]CN págs. 200 e 201, 17.3 (16.3 na prova de galé)

[10]CN pág. 201, 17.3 (16.3 na prova de galé)

[11]CN pág. 171, 12.2

[12]*On the relation between intuitionist and classical arithmetic*, em The Collected Papers of Gerhard Gentzen, North-Holland, 1969, pág. 53