EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS VIII JORNADAS

VOLUMEN 4 (1998), Nº 4

Horacio Faas
Luis Salvatico
Editores

ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

El sistema de Poole: un estudio formal

Silvia B. Lerner[*]

1. Introducción.

Con el auge de la Inteligencia Artificial comenzaron a proliferar, a partir de la década de los 80, sistemas cuyo objetivo es reconstruir formalmente el razonamiento revocable. Los sistemas de Poole y Reiter se inscriben en esta vertiente.

El estudio metateórico de los sistemas para razonamiento revocable condujo a Gabbay, Makinson y otros a definir propiedades debilitadas como la monotonía cauta, la monotonía racional, etc.: propiedades positivas mínimas esperables en sistemas no-monótonos.

En el presente trabajo proponemos algunas definiciones alternativas y ofrecemos pruebas que evidencian ventajas comparativas del sistema de Poole.

2. La propiedad de monotonía cauta y sus dificultades

En su trabajo 'General Theory of Cumulative Inference' Makinson adopta la caraterización de Gabbay de la propiedad de monotonía cauta (en adelante MC) en su versión unitaria y finitaria. Su definición es la siguiente:

$$\text{Si } \Gamma \mid\!\sim x \quad \text{y} \quad \Gamma \mid\!\sim y\text{, entonces } \Gamma \cup \{y\} \mid\!\sim x$$

donde Γ es un conjunto de fórmulas x e y son fórmulas y $\mid\!\sim$ es una relación de consecuencia no-monótona.

El objetivo de Makinson es definir una relación de consecuencia finitaria acumulativa que cumple reflexidad, MC y transitividad acumulativa.

Como ejemplo negativo de sistema que no cumple MC (y por ende no proporciona una relación de consecuencia acumulativa), Makinson propone el sistema de Lógica Default de Reiter. El contraejemplo que exhibe (que involucra *default* normales) es el siguiente:

$$\Delta_1 : \; D_1 = \left\{ \frac{: Mp}{p} \; ; \; \frac{p \vee q : M \neg p}{\neg p} \right\}$$

$$W_1 = \varnothing$$

$$\Delta_2 : \; D_2 = D_1$$

$$W_2 = \{ p \vee q \}$$

---

[*] Universidad de Buenos Aires.

La teoría Δ_1 tiene una única extensión E_1, a saber, Cn({p}). Claramente, **p** v q pertenece a E_1. Pero ¬ **p** no puede pertenecer a dicha extensión, Pues resultaría inconsistente. Por otro lado, la segunda regla *default* no puede activarse para generar una segunda extensión, pues su prerrequisito no pertenece a W_1. En cambio Δ_2 (obtenida agregando a Δ_1 una consecuencia suya) posee dos extensiones: Cn({p}) y Cn({¬p,q}).

Esto muestra, argumenta Makinson, que **MC** no se cumple en el sistema Default. No se cumple en el caso de que consideremos que el conjunto de teoremas es el conjunto intersección de todas las extensiones (lo cuál resulta obvio), ni tampoco en el caso de que elijamos una extensión; Pues si elegimos la E_2=(Cn({¬p,q})), **p** no pertenece a E_2.

Pero parece demasiado fuerte pedir que en cualquier extensión elegida se cumpla la propiedad de **MC** para afirmar que la relación de consecuencia cumple MC. Pues entonces se diluye la diferencia con el caso 'intersección' (pedir que x pertenezca a cualquier extensión elegida es pedir que pertenezca a todas). Y no parece ser el sentido en el que Reiter está pensando los elementos de sus extensiones. Dice Reiter: "Cualquier extensión (tal) será interpretada como un conjunto aceptable de creencias que pueden sostenerse acerca del mundo incompletamente especificado W"[1].

Mientras que Mc Dermott y Doyle, dice Reiter, introducen la noción de teorema de una teoría no-monótona como la intersección de todos los puntos fijos de esa teoría, él prefiere no adoptar ese punto de vista. La teoría de la prueba que desarrolla "no es para teorematicidad sino para 'credibilidad', Por ésto queremos significar una teoría de la prueba tal que, dada una fórmula β, determine si existe o no una extensión que contenga a β, en lugar de determinar si β está en todas las extensiones"[2].

De estas afirmaciones parece desprenderse que Reiter considera a las extensiones de una teoría como conjuntos alternativos de creencias (para las que la denominación de 'teoremas' le resulta seguramente demasiado fuerte).

En este sentido una fórmula (interpretada como creencia) es consecuencia de una teoría si pertenece a alguna extensión. Y, según esta interpretación, el sistema de Reiter cumpliría **MC** (en el ejemplo de Makinson, E_1 se preserva en Δ_2).

Del análisis anterior se desprende que nociones como la de teorematicidad y sus propiedades se complejizan en teorías con múltiples extensiones. No basta decir que **x** es consecuencia de Γ; hay que establecer, por ejemplo, si en todas o

[1]Reiter, R: 'A Logic for Default Reasoning', p.88

[2]Reiter, R; ob. cit. p. 44.

algunas de sus extensiones. No alcanza con afirmar que **x** e **y** son consecuencia de Γ; puede ser necesario determinar si **x** e **y** pertenecen o no a la misma extensión.

3. Tipos de MC

Caraterizaciones útiles de **MC** surgen al establecer la condición de que **x** e **y** pertenezcan a la misma extensión[3]. Introduciremos dos definiciones:

1. Monotonía ultracauta **(MUC)**

$$\text{SI} \quad \Gamma \mathrel{\underset{E_i}{\mid\!\sim}} x \quad y \quad \Gamma \mathrel{\underset{E_i}{\mid\!\sim}} y, \quad \text{entonces } \exists E_k (\Gamma \cup \{y\} \mathrel{\underset{E_k}{\mid\!\sim}} x)$$

Esta propiedad establece que si **x** e **y** son consecuencias no-monótonas de Γ que pertenecen a la misma extensión, entonces **x** pertenece a alguna extensión de la teoría ampliada $\Gamma \cup \{y\}$.

2. Monotonía cauta fuerte **(MCF)**,

$$\text{SI} \quad \Gamma \mathrel{\underset{E_i}{\mid\!\sim}} x \quad y \quad \Gamma \mathrel{\underset{E_i}{\mid\!\sim}} y, \quad \text{entonces } \forall E_k (\Gamma \cup \{y\} \mathrel{\underset{E_k}{\mid\!\sim}} x)$$

Esta propiedad establece que si **x** e **y** son consecuencias no-monótonas de Γ que pertenecen a la misma extensión, entonces **x** pertenece a toda extensión de la teoría ampliada $\Gamma \cup \{y\}$.

4. El sistema de Poole

En su artículo de 1988 'A Lógical Framework for Default Reasoning', D. Poole presenta una propuesta para reconstruir el razonamiento revocable que se diferencia de propuestas similares en no apelar a cambios de lógica. La lógica es la clásica de primer orden, Pues ' ... antes que ser un problema con la lógica, la no-monotonía es un problema acerca de cómo la lógica se usa'.[4]

El objetivo de Poole es construir un formalismo que refleje la explicación de hechos a partir de hipótesis en el marco de una teoría. Poole ve al razonamiento hipotético como un caso paradigmático de razonamiento *default.*

El sistema consta de tres conjuntos categorialmente diferentes, que se suponen provistos por el usuario:

F es un conjunto de fórmulas cerradas llamadas 'hechos'. Se supone que F es consistente. Las fórmulas de F se interpretan como verdaderas (no son cuestionables en el sistema).

Δ es un conjunto de fórmulas (posiblemente abiertas) llamadas 'hipótesis posibles'. Cualquier instancia fundada de un elemento de Δ puede ser utilizada en

---

[3]En caso de que x e y pertenezcan a extensiones diferentes, no se cumplen las propiedades (ni es deseable que lo hagan).

[4]Poole, D, 1988, pag 28.

una explicación si resulta consistente con los hechos y restricciones. Los elementos de Δ constituyen matrices productoras de instancias.

C es un conjunto (posiblemente vacío) de fórmulas cerradas llamadas 'restricciones'. Las restricciones constituyen un expediente para bloquear instancias de Δ's en casos particulares no deseados. Los elementos de C no pueden cumplir una función inferencial; sólo inhibitoria.

Definición 1: Un escenario de F,Δ,C es un conjunto $D \cup F$ donde D es un conjunto de instancias fundadas de elementos de Δ tal que $D \cup F \cup C$ es consistente.

Definición 2: Si x es una fórmula cerrada, una explicación de x a partir de F,Δ, C es un escenario de F,Δ,C que implica (deductivamente) a x.

Es decir, x es explicable a partir de F,Δ,C si existe un conjunto D de instancias fundadas de elementos de Δ tal que:

1) $D \cup F \vdash x$
2) $D \cup F \cup C$ es consistente

Definición 3: Una extensión de F,Δ,C es el conjunto de consecuencias lógicas de un escenario maximal de F,Δ,C.

El siguiente teorema conecta la noción de pertenencia a una extensión con la de ser deducible a partir de un escenario consistente con C:

Teorema 1: x es explicable si y sólo si x está en alguna extensión.[5]

5. Propiedades formales del sistema de Poole. Comparación con el sistema Default de Reiter

Para el análisis formal del sistema de Poole entenderemos '$\mid\!\sim$' como la relación de explicabilidad que él caracteriza, investigando si dicha relación cumple o no con los análogos (en términos de explicabilidad) de las propiedades definidas en la sección 3.

Teorema 2: La relación de explicabilidad cumple MUC[6]

En símbolos:

$$\text{SI} \quad \Delta, F \underset{E_i}{\mid\!\sim} x \quad \text{y} \quad \Delta, F \underset{E_i}{\mid\!\sim} y\ , \quad \text{entonces } \exists\, E_k\, (\Delta, F, \{y\} \underset{E_k}{\mid\!\sim} x\,)$$

[5]Véase la prueba del teorema de Poole, D. 1988, p.30.

[6]Nos limitaremos a probar el teorema para teorías sin restricciones. La prueba puede extenderse fácilmente a teorías con restricciones.

Prueba:

1. $\Delta, F \mathrel{\mid\!\sim_{E_i}} x$ por hipótesis.

2. $\Delta, F \mathrel{\mid\!\sim_{E_i}} y$ por hipótesis.

O sea,

3. $x \in Cn(D \cup F)$ para algún conjunto maximal D de instancias fundadas de Δ (por def. de extensión)

4. $y \in Cn(D \cup F)$ para algún conjunto maximal Dde instancias fundadas de Δ (por def. de extensión)

Y por lo tanto

5. $D \cup F \vdash x$

6. $D \cup F \vdash y$

7. $D \cup F$ es consistente (por def. de escenario)

Sea ahora Δ, F', donde F' es $F \cup \{y\}$. Entonces

8. $D \cup F \cup \{y\}$ es escenario de Δ, F', Pues

9. D es un conjunto de instancias de Δ

10. $D \cup F \cup \{y\}$ es consistente.

Pues si $D \cup F \cup \{y\}$ fuera inconsistente, siendo $D \cup F$ consistente (por 7), debería cumplirse

11. $D \cup F \vdash \neg y$

Pero 6. y 11. incumplirían que $D \cup F$ es inconsistente, contradiciendo 7. Además

12. $D \cup F \cup \{y\} \vdash x$ (de 5. por monotonía de $\vdash$)

Luego,

13. $\Delta, F' \mathrel{\mid\!\sim} x$ en $Cn(D \cup F \cup \{y\})$ (de 12. y 8.)

Que es lo que queríamos demostrar.

Teorema 3: Sea una teoría Δ, F y sean x e y explicables en E_i, extensión de Δ, F. Entonces E_i es también extensión de Δ, F, {y}.

Por teorema 2

1. $D \cup F \cup \{y\}$ es escenario de Δ, F, {y}.

Además,

2. $D \cup F \cup \{y\}$ es escenario maximal de Δ, F, {y}, pues si no lo fuese, $D \cup F$ no sería escenario maximal de Δ, F.

Luego

3. $Cn(D \cup F \cup \{y\})$ es extensión de Δ, F, $\{y\}$.

Pero

4. $Cn(D \cup F \cup \{y\}) = Cn(D \cup F)$ si $x \varepsilon Cn(D \cup F)$

Por lo tanto, $Cn(D \cup F \cup \{y\})$ es extensión de Δ, F, $\{y\}$ idéntica a E_i.

Teorema 4: El sistema Default cumple MUC.

En su teorema 2.6[7] Reiter prueba que si agregamos a una teoría cerrada un subconjunto de fórmulas de una extensión E de dicha teoría, entonces E es también una extensión de la teoría ampliada. Este resultado es más general que MUC y la implica (tomando como subconjunto de E un subconjunto unitario) ya que si E sigue siendo extensión de la nueva teoría, cada uno de sus elementos es consecuencia de la misma.

Teorema 5: La relación de explicabilidad en teorías con una única extensión cumple **MCF**.

En símbolos: Si Δ, F tiene una única extensión E_1, entonces si :

$$\Delta, F \underset{E_1}{\mid\!\sim} x \quad \text{y} \quad \Delta, F \underset{E_1}{\mid\!\sim} y, \quad \text{entonces } \forall E_k \,(\Delta, F, \{y\} \underset{E_k}{\mid\!\sim} x)$$

Prueba:

1. $\Delta, F \underset{E_1}{\mid\!\sim} x$ por hipótesis.

2. $\Delta, F \underset{E_1}{\mid\!\sim} y$ por hipótesis.

O sea,

3. $x \ \varepsilon\ E_1 = Cn(Dj \cup F)$ dónde $Dj \cup F$ es el único escenario maximal de Δ, F (una teoría con una sóla extensión tiene un único escenario maximal)

4. $y \ \varepsilon\ E_1 = Cn(Dj \cup F)$ dónde $Dj \cup F$ es el único escenario maximal de Δ, F

Y por lo tanto

5. $Dj \cup F \vdash x$
6. $Dj \cup F \vdash y$
7. $Dj \cup F$ es consistente (por def. de escenario)

---

[7]Reiter, R ob. cit., p. 92

Sea ahora Δ, F, {y}   y sea Ek = Cn (Dk $\cup$ F $\cup$ {y}) una extensión cualquiera de Δ, F, {y}. Probaremos que Ek = E_1
En efecto

8. Dk $\cup$ F $\cup$ {y} es escenario *maximal* de Δ, F, {y}   (por definición de extensión)
Entonces

9. Dk es un conjunto de instancias de Δ (por definición de escenario)
10. Dk $\cup$ F es consistente   (pues Dk $\cup$ F $\cup$ {y} es consistente, por ser escenario de Δ, F. {y})
11. Dk $\cup$ F es escenario de Δ, F (de 9. y 10. por definición de escenario)
Además
12. Dk $\cup$ F es escenario maximal de Δ, F. Pues supongamos que no lo fuese, entonces existiría un conjunto Dl de instancias fundadas de Δ tal que

13. Dk $\cup$ Dl $\cup$ F es escenario maximal y por ende es consistente.
Pero
14. Dk $\cup$ Dl $\cup$ F $\cup$ {y}   es inconsistente (por 8.)
Es decir
15. Dk $\cup$ Dl $\cup$ F $\vdash \neg$ y   (por 13. y 14.)
Pero
16. Dj = Dk $\cup$ Dl   (Pues Dj $\cup$ F es el *único* escenario maximal de Δ, F por hipótesis)
Entonces
17. Dj $\cup$ F $\vdash \neg$ y   (de 15. y 16.)
Luego
18. Dk $\cup$ F es escenario maximal de Δ, F (de 6. 7. y 17. por contradicción)
O sea
19. Dk = Dj
Por lo tanto
20. Cn (Dj $\cup$ F) = Cn (Dj $\cup$ F $\cup$ {y})   (por 6.)
Es decir
21. $E_1 = E_k$

En síntesis, toda extensión de Δ, F, {y} es también extensión de Δ, F. Como Δ, F tiene una única extensión, Δ, F, {y} tiene una única extensión, idéntica a E_1. Por lo tanto, el teorema 4 se cumple trivialmente en teorías con una única extensión.

El sistema Default de Reiter no cumple MCF, ni siquiera en teorías con una sóla extensión. El contraejemplo de Makinson constituye justamente una muestra del incumplimiento de esta propiedad. Dicho ejemplo no puede, evidentemente, reproducirse en el sistema de Poole. Su traducción sería la siguiente:

D1 p
D2 $(p \vee q) \rightarrow \neg p$
C1 $\neg p \rightarrow \neg D1$
C2 $\neg\neg p \rightarrow \neg D2$
F $\varnothing$

El mecanismo de Poole permite que la teoría originaria Δ, F, C arriba definida genere dos extensiones; es decir, permite activar los dos *default* (a diferencia de Reiter, en donde el prerrequisito **p v q** impide la aparición de una segunda extensión). Esto excluye el caso como contraejemplo, ya que la teoría posee más de una extensión[8].

El sistema de Poole no cumple **MCF** en teorías con múltiples extensiones. El siguiente constituye un contraejemplo:

D1 Los vampiros son peligrosos
D2 Los murciélagos vuelan y no son peligrosos ni agresivos.
F1 Los vampiros son murciélagos.
F2 Drácula es vampiro

Si extendemos la teoría anterior agregando

F3 Drácula no es agresivo (que es explicable en una extensión de la teoría original)

'Dracula no es peligroso' que pertenece a la misma extensión que F3, no es explicable en toda nueva extensión.

Teorema 6: Si una teoría Δ, F tiene una única extensión E, y además y es explicable en Δ, F, entonces Δ, F, {y} tiene también una única extensión idéntica a E.

Prueba: se sigue inmediatamente por el teorema 3 y el teorema 5.

6. Conclusiones

El sistema de Poole constituye un sistema fácilmente implementable, que no recurre a cambios de lógica: sólo utiliza lógica estándar. La no-monotonía, que en la mayoría de los sistemas para razonamiento revocable afecta a la relación de

[8]Poole señala en su trabajo algunas dificultades del sistema de Reiter que el suyo soluciona, y que también están relacionadas con la rigidez de los prerrequisitos, que impiden extraer inferencias deseables.

consecuencia, se traslada en éste a la relación de explicabilidad, preservando así a la lógica clásica.

El análisis formal efectuado permite garantizar un adecuado comportamiento del sistema en casos en que otros sistemas, como el de Reiter, exhiben consecuencias indeseables.

7 Bibliografía

Kraus, S, Lehmann, D y Magidor M: 'Nonmonotonic Reasoning, Preferential Models and Cumulative Logics' En *Artificial Intelligence* 44 (1990).

Legris, J:'Diferentes criterios para analizar la inferencia revocable: observaciones sobre el punto de vista lógico'. Actas de las Jornadas de Epistemología de las Cs. Ecs. 1995

Lerner, S: 'Algunas propiedades de la Inferencia no-monótona'. Comunicación V Jornadas de Epistemología e Historia de la Ciencia. Córdoba. 1994.

Lombardi, C: 'Razonamiento Revocable: Aplicaciones en el Area Económico-Administrativa e Implementaciones Computacionales'. Informe de Beca. 1996

Makinson, D: 'General Theory of Cumulative Inference'. En Lecture Notes in Artificial Intelligence. Springer- Verlag – 1988

Mc Dermot, D: 'Nonmonotonic Logic II: Nonmonotonic modal Theories'. En Journal of the Association for Computing Machinery. Vol 29, N* 1, 1982.

Mc Dermott, D y Doyle, J: 'Non-monotonic Logic I'. En Artificial Intelligence', 13, 1980

Poole, D:'A Logical Framework for Default Reasoning'.En *Artificial Intelligence* 36,1988

Poole, D:'A Methology for Using a Default and Abductive Reasoning System'. En *International Journal of Intelligent Systems.* Vol 5. Wiley & Sons, 1990.

Reiter, R:'A Logic for Default Reasoning'. En *Artificial Intelligence* 13, 1980.

Reiter, R:'Nonmonotonic Reasoning'. En *Ann. Rev. Comput.* Sept 1987.

Tarski, A: Logic, Semantics, Metamathematics. Hackett Publisching Company, 1930