Universidad Nacional
de Córdoba

Facultad de Matemática, Astronomía y Física

TRABAJO ESPECIAL DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

ACOTACIÓN DE CIERTOS OPERADORES INTEGRALES EN ESPACIOS DE LEBESGUE VARIABLES

LUCAS ALEJANDRO VALLEJOS

Dirigido por:
Dra. MARTA SUSANA URCIUOLO

Córdoba-Argentina
Marzo 2016

Resumen

En el presente trabajo estudiamos la acotación de ciertos operadores integrales sobre los espacios de Lebesgue variables. En el capítulo I damos los preliminares necesarios. En el capítulo II comparamos las distintas técnicas con la que se obtiene la acotación $p-q$ de la *Integral Fraccionaria*. En el capítulo III mostramos resultados de la acotación $p-q$ nuevamente de la *Integral Fraccionaria* pero con *pesos* $A(p,q)$. En el capítulo IV introducimos los *Operadores Integrales de Tipo Fraccionario*, mostrando diferentes resultados de la continuidad en los espacios de Lebesgue clásicos y con pesos. En el capítulo V introducimos la teoría de los espacios de Lebesgue variables concluyendo con el estudio de la continuidad de la *Integral Fraccionaria* en dichos espacios y mostrando también un fuerte resultado sobre la función *Maximal Sharp*. Finalmente en el capítulo VI volvemos a los *Operadores Integrales de Tipo Fraccionario* pero esta vez sobre los espacios de Lebesgue variables. Obtenemos resultados de acotación de tipo fuerte y débil para un caso particular de tales operadores.

PALABRAS CLAVES: Integral Fraccionaria, espacios de Lebesgue variables, extrapolación, Operadores Integrales de tipo Fraccionario.

CÓDIGO 42B25. Maximal functions, Littlewood-Paley theory

Abstract

In this paper we study the boundedness of certain integral operators on variable Lebesgue spaces. The first chapter is devoted to preliminaries. In the second chapter we compare the different techniques developed to get the $p-q$ boundedness of the *Fractional Integral Operator*. In the third chapter we show weighted results about the *Fractional Integral Operator.* In the fourth chapter we define the *Integral Operators of Fractional Type* and we show resuts about the continuity os these operatos on classical and weighted Lebesgue spaces. In chapter V we describe the theory of *Variable Lebesge Spaces* and the boundedness of the *Fractional Integral Operator* on these spaces. Finally in chapter VI we obtain resuts about the boundedness of some *Integral Operators of Fractional Type* on variable Lebesgue spaces

Agradecimientos

Este trabajo está dedicado a todos aquéllos que me apoyaron de una manera especial en estos últimos años. Primero que nada quiero agradecer a Dios por permitirme llegar donde llegué. A mi madre que puso toda su confianza en mí y toda mi familia que siempre estuvo. A mis dos grandes amigos de la vida, Juan Costamagna y Belén Martin, por su incondicional apoyo siempre ya que sin ellos las cosas hubieran sido más complicadas. Agradecer también a mis compañeros por sus ayudas incondicionales. Finalmente agradecer a mi directora, la Dra. Marta Urciuolo, por la paciencia y la confianza que me mostró a lo largo del trabajo, como así también a muchos profes de la Fa.M.A.F. por sus valiosos aportes a lo largo de mi carrera.

Índice general

Introducción

En este trabajo estudiamos la continuidad de ciertos operadores integrales entre espacios de Lebesgue con exponente variable.

Recordamos que para $1 \leq p < \infty$, se define $L^p(\mathbb{R}^n)$ como el conjunto de clases de equivalencia de funciones medibles $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ tales que $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx < \infty$, donde dos funciones f y g se dicen equivalentes si $f(x) = g(x)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ ($p.c.t. x \in \mathbb{R}^n$). También se define $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ como el conjunto de clases de equivalencia de funciones medibles $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ tales que el supremo escencial (esssup) de $|f|$ es finito. En estos espacios se define una norma de la siguiente manera. Si $1 \leq p < \infty$, ponemos

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

y si $p = \infty$,

$$\|f\|_\infty = \operatorname{esssup}(|f|).$$

Con esta norma, $L^p(\mathbb{R}^n)$ resulta un espacio de Banach para todo $1 \leq p \leq \infty$.

Un problema clásico del Análisis Armónico es el estudio de distintos tipos de operadores entre estos espacios. Un operador muy estudiado es la *Integral Fraccionaria* I_α definida, para $0 < \alpha < n$, por

$$I_\alpha f(x) = \int \frac{f(y)}{|x - y|^{n-\alpha}} dy.$$

En el capítulo II de este trabajo abordamos el estudio de distintas demostraciones de la acotación de I_α desde $L^p(\mathbb{R}^n)$ en $L^q(\mathbb{R}^n)$, para ciertos pares p, q. Como una herramienta para esto, necesitamos estudiar también la acotación correspondiente del operador maximal asociado M_α. Desarrollamos en detalle las demostraciones dadas en [5] y en [7].

En el capítulo III tratamos el problema análogo, pero entre espacios de Lebesgue con pesos. Recordamos que un peso es una función positiva y localmente integrable $\omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $L^p(\mathbb{R}^n, \omega)$ es el conjunto de clases de equivalencia de funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ tales que $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, \omega(x)dx < \infty$, donde dos funciones f y g se dicen equivalentes si $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - g(x)|\, \omega(x)dx = 0$. De forma análoga se define $L^{\infty}(\mathbb{R}^n, \omega)$.

En los trabajos [18], [19] [20], [21] y [22] se estudian la acotación de *operadores integrales de tipo fraccionario* de la forma

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k_1(x - A_1y)...k_m(x - A_my)f(y)dy, \tag{1}$$

donde $A_1, ...A_m$ son ciertas matrices invertibles y si $1 \leq i \leq m$, el núcleo k_i satisface una condición de homogeneidad de grado $\frac{n}{q_i}$, con $\frac{n}{q_1} + ... + \frac{n}{q_m} = n - \alpha$ (la homogeneidad del núcleo de I_α). En el capítulo IV desarrollamos algunos resultados de estos trabajos sobre la continuidad de estos operadores entre espacios de Lebesgue clásicos y con pesos.

En el capítulo V introducimos los *Espacios de Lebesgue Variables* $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, donde ahora el exponente es una función $p(.) : \mathbb{R}^n \to [1, \infty)$ y $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ es el conjunto de clases de equivalencia de funciones medibles $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ tales que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p(x)}\, dx < \infty.$$

En estos espacios se define una norma de tipo Luxemburgo por

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \text{ínf} \left\{ \lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\}$$

y con esta norma resulta $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ un espacio de Banach. En este capítulo analizamos la continuidad de I_α entre estos espacios. Seguimos la demostración dada en el libro [14] donde el autor usa técnicas de extrapolación.

Finalmente, en el capítulo VI desarrollamos la demostración de la acotación del operador definido por (1) entre espacios de Lebesgue variables dada por P.Rocha y M.Urciuolo en [23] y damos una nueva demostración de ese resultado, en algunos casos particulares, usando técnicas de extrapolación similares a las desarrolladas en el capítulo anterior. Concretamente en el caso en que las matrices A_i son A^i para alguna matriz A tal que $A^m = I$, obtenemos una nueva demostración de la acotación del T_α desde $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ en $L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ para ciertas funciones exponentes $p(\cdot)$, $q(\cdot)$ tales que $\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{q(x)} = \frac{\alpha}{n}$. También, en el Teorema 6.4 damos la correspondiente estimación de tipo débil.

Capítulo I. Preliminares

1. Resultados conocidos en Espacios de Lebesgue clásicos

Para $1 < p < \infty$ denotamos por p' el número real tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ Si $E \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto medible Lebesgue, $|E|$ denota la medida de Lebesgue del conjunto.

Teorema 1.1 (Desigualdad de Hölder). *Sean $p, p' > 1$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$. Entonces $fg \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Teorema 1.2 (Desigualdad de Jensen). *Sea E un conjunto medible Lebesgue y sea $f \in L^1(E)$ una función a valores reales, $0 < |E| < \infty$. Si φ es una función convexa definida sobre $\mathbb{R}$, entonces*

$$\varphi\left(\frac{1}{|E|}\int_E f(x)dx\right) \leq \frac{1}{|E|}\int_E \varphi(f(x))dx.$$

Teorema 1.3 (Desigualdad de Young). *Sean $p, q \geq 1$ tales que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} > 1$. Definamos r por $\dfrac{1}{r} := \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1$. Sean $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Entonces*

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Definicion 1.4. *Sean (X, μ) e (Y, υ) dos espacios de medida y T un operador de $L^p(X, \mu)$ en el espacio de funciones medibles de Y en $\mathbb{C}$. Se dice que T es de tipo débil (p, q) $(q < \infty)$ si*

$$\upsilon(x \in X : |Tf(x)| > \lambda) \;\leq\; \left(\frac{C\|f\|_p}{\lambda}\right)^q,$$

donde C es una constante independiente de f.
T se dice de tipo débil (p,∞) *si está acotado del* $L^p(X,\mu)$ *en* $L^\infty(Y,\upsilon)$. *Es decir si existe una constante* $C>0$, *independiente de* f, *tal que*

$$\|Tf\|_\infty \leq C\|f\|_p.$$

Y T será de tipo fuerte (p,q) *si existe* $C>0$, *independiente de* f, *tal que*

$$\|Tf\|_q \leq C\|f\|_p.$$

En otras palabras T está acotado del $L^p(X,\mu)$ *en el* $L^q(Y,\upsilon)$.

Nota 1.5. *En el resto del trabajo, nuestro espacio de medida será* $\mathbb{R}^n$ *con la medida de Lebesgue.*

Un operador T de un espacio vectorial A de funciones medibles en funciones medibles se dice *sublineal* si

$$|T(f+g)| \;\leq\; |Tf| \;+\; |Tg|,$$

$$|T(\lambda f)| \;=\; |\lambda||Tf|,$$

para todo $\lambda\in\mathbb{C}$ y $f,g\in A$.

Teorema 1.6. (Interpolación de Marcienkiewicz) *Supongamos que T es un operador sublineal simultáneamente de tipo débil* (p_0,q_0) *y* (p_1,q_1). *Si* $0<t<1$ *y*

$$\frac{1}{p}=\frac{1-t}{p_0}+\frac{t}{p_1},\ \frac{1}{q}=\frac{1-t}{q_0}+\frac{t}{q_1}$$

entonces T es de tipo fuerte (p,q) *y*

$$\|Tf\|_q \leq C\ \|f\|_p,$$

donde $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ *y C es una constante positiva independiente de* f.

2. La Función Maximal de *Hardy–Littlewood*

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y sea B una bola (euclídea) que contiene a x. Entonces se define *la función maximal de Hardy – Littlewood* de una función f localmente integrable en $\mathbb{R}^n$ como

$$Mf(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy.$$

Nota 1.7. *A veces nos referiremos al Operador Maximal de Hardy – Littlewood simplemente como M si el contexto no da lugar a confusión. En muchos casos tal operador se lo define tomando supremo sobre cubos que contengan al punto x en lugar de bolas. Ambas definiciones son equivalentes y, por ello, usaremos en algunos casos la definición con cubos, y con bolas en otros casos.*

Teorema 1.8. *M es de tipo débil $(1,1)$ y M es de tipo fuerte (p,p) si $1 < p \leq \infty$.*

De manera análoga se define la *Función Maximal Diádica* de la siguiente manera, sea $[0,1)^n$ el cubo unidad, abierto por la derecha, de $\mathbb{R}^n$; Δ_0 es la familia de cubos de $\mathbb{R}^n$ congruentes con $[0,1)^n$ con vértices en el retículo $\mathbb{Z}^n$. Dilatando esa familia de cubos por un factor de 2^{-k} obtenemos la familia Δ_k $(k \in \mathbb{Z})$; es decir Δ_k es la familia de cubos abiertos por derecha con vértices en el retículo $(2^{-k}\mathbb{Z})^n$. Llamaremos *cubos diádicos* a todos los cubos de

$$\bigcup_k \Delta_k$$

Las siguientes propiedades son evidentes a partir de esta construcción,

i) *Todo $x \in \mathbb{R}^n$ está en un único cubo de cada familia Δ_k*

ii) *Dos cubos diádicos cualesquiera o bien son disjuntos, o bien uno de ellos está totalmente contenido en el otro*

iii) *Un cubo diádico de la familia Δ_k está contenido en un único cubo diádico de cada familia Δ_j $(j < k)$ y contiene 2^n cubos diádicos de la familia Δ_{k+1}.*

Dada una función $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, definimos

$$E_k f(x) = \sum_{Q \in \Delta_k} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q f \right) \chi_Q(x)$$

Se verifica la siguiente propiedad fundamental

$$\int_{\Omega} E_k f = \int_{\Omega} f$$

donde Ω es la unión de cubos de la familia Δ_k.

Definimos ahora la *Función Maximal Diádica* como

$$M_d f(x) = \sup_k |E_k f(x)|$$

Notar que es claro que

$$M_d f(x) \leq M f(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n$$

Teorema 1.9. (*Descomposición de Calderón – Zygmund*) *Sea f una función integrable no negativa y λ un número positivo. Existe una sucesión Q_j de cubos diádicos disjuntos tales que*

i) $f(x) \leq \lambda$ *p.c.t.* $x \notin \cup_j Q_j$

ii) $|\bigcup_j Q_j| \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_1$

iii) $\lambda < \frac{1}{|Q|} \int_{Q_j} f \leq 2^n \lambda$

3. Desigualdades con peso de clase A_p

En esta sección introduciremos la noción de peso. Luego recordaremos resultados elementales sobre la acotación del operador Maximal en los espacios $L^p(\omega)$, donde ω es un peso. También veremos algunas desigualdades que nos servirán a lo largo de este trabajo. Un buen tratamiento de estos temas se puede encontrar en [2].

Definición 1.10. *Un peso ω es una función definida sobre $\mathbb{R}^n$ a valores reales, medible no negativa y localmente integrable.*

Dado un *peso* ω y un conjunto medible E ponemos

$$\omega(E) = \int_E \omega(x)dx.$$

Esto define una medida positiva y regular sobre la sigma álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.11. *Dado un peso ω diremos que es de clase A_1 si satisface*

$$M\omega(x) \leq C\omega(x) \qquad p.c.t. x \in \mathbb{R}^n,$$

(que llamaremos la condición A_1), donde C es una constante positiva independiente de Q.

Y diremos que ω es de clase A_p $(1 < p < \infty)$ si existe $C > 0$ tal que para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$,

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega\right)\left(\frac{1}{Q}\int_Q \omega^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} \leq C.$$

A la menor constante C que satisface la desigualdad anterior la denotaremos por $[\omega]_{A_p}$.

Teorema 1.12. *La desigualdad*

$$\omega(x : Mf(x) > \lambda) \leq \frac{C}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)dx$$

se satisface si y sólo si $\omega \in A_p$.

Proposición 1.13. *Se verifican las siguientes propiedades,*

(i) $A_p \subset A_q$ *si* $p < q$.

(ii) $\omega \in A_p$ *si y sólo si* $\omega^{-\frac{1}{p-1}} \in A_{p'}$

(iii) *Si* $\omega_0,\ \omega_1 \in A_1,\ \omega_0\omega_1^{1-p} \in A_p$

Un resultado clave en la teoría de pesos es el siguiente

Teorema 1.14 (Desigualdad de Hölder inversa). *Sea $\omega \in A_p$. Existen $C > 0$ y $\varepsilon > 0$ que dependen sólo de p y de la constante A_p de ω tal que, para todo cubo Q,*

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \leq \frac{C}{|Q|}\int_Q \omega.$$

Lema 1.15. *Sea $\omega \in A_p$. Para todo $\alpha < 1$ existe $\beta < 1$ tal que si $S \subset Q$ y $|S| \leq \alpha|Q|$, entonces $\omega(S) \leq \beta\omega(Q)$.*

Corolario 1.16. *Se verifican las siguientes propiedades,*

(i) $\bigcup_{p<q} A_p = A_q, \qquad 1 < q < \infty.$

(ii) *Si* $\omega \in A_p$, *existe* $\varepsilon > 0$ *tal que* $\omega^{1+\varepsilon} \in A_p$.

(iii) *Si* $\omega \in A_p$, *para* $1 \leq p \leq \infty$, *existe* $\delta > 0$ *y* $C > 0$ *tal que para todo* $S \subset Q$ *medible,*

$$\frac{\omega(S)}{\omega(Q)} \leq C \left(\frac{|S|}{|Q|} \right)^{\delta}.$$

Nota 1.17. *Si* ω *satisface la desigualdad* (*iii*) *del Corolario* 1.16, *se dice que es de clase* A_∞.

4. Los pesos $A(p, q)$

En esta sección introduciremos lo que será muy importante en el capítulo III, los denominados pesos de clase $A(p, q)$, que fueron introducidos por B. Muckenhoupt y R.L. Wheeden en [10]. Dicha herramienta será crucial para estudiar la acotación de tipo fuerte (p, q) de la *Integral fraccionaria* en los espacios de Lebesgue con pesos. Veremos que relación existe entre esta nueva clase y la definida en la sección anterior.

Definición 1.18. *Sean* $1 < p \leq \infty$, $1 \leq q < \infty$. *Un peso* ω *se dice de clase* $A(p, q)$ *si para todo cubo* $Q \subset \mathbb{R}^n$, *existe* C, *constante independiente de* Q, *tal que*

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^{-p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \leq C.$$

Y decimos que ω *es de clase* $A(p, \infty)$ *si para todo cubo* $Q \subset \mathbb{R}^n$, *existe una constante* C, *independiente de* Q *tal que*

$$\|\omega \chi_Q\|_\infty \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^{-p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \leq C.$$

Proposición 1.19. *Sean* $1 < p \leq \infty$, $1 \leq q < \infty$. *Entonces*

(a) $\omega \in A(p, q) \Leftrightarrow \omega^q \in A_r$ *con* $r = 1 + \frac{q}{p'}$ $(q < \infty)$.

(b) $\omega \in A(p, q) \Leftrightarrow \omega^{-p'} \in A_r$ *con* $r = 1 + \frac{p'}{q}$ $(q < \infty)$.

(c) $\omega \in A(p,\infty) \;\Leftrightarrow\; \omega^{-p'} \in A_1$.

(d) $\omega \in A(p,p) \;\Leftrightarrow\; \omega^{p} \in A_p$.

Para la demostración de estos resultados ver [10].

Capítulo II. *Integral Fraccionaria*, distintas demostraciones de la acotación $p-q$ del operador

En este capítulo pretendemos estudiar el siguiente problema. Dado $0<\alpha<n$, ¿Para qué pares $p-q$ de números reales el operador $f \to I_\alpha f$ es acotado del $L^p(\mathbb{R}^n)$ en el $L^q(\mathbb{R}^n)$? Esto es, cuando existe $C>0$, independiente de f, tal que

$$\|I_\alpha f\|_q \leq \; C \; \|f\|_p, \tag{2}$$

1. La primera demostración

Con la idea de intentar dar las condiciones para las que se verifica la desigualdad (2), observamos que existe una condición necesaria simple. En efecto, consideremos el operador dilatación D_δ definido por

$$D_\delta f(x) = f(\delta x),\, \delta > 0$$

Entonces claramente se tiene

$$D_{\delta^{-1}} \; I_\alpha \; D_\delta = \delta^{-\alpha} \; I_\alpha,\, \delta > 0.$$

Además se tiene que

$$\|D_\delta f\|_p = \delta^{-\frac{n}{p}} \; \|f\|_p$$

$$\|D_{\delta^{-1}} I_\alpha f\|_q = \delta^{\frac{n}{q}} \|I_\alpha f\|_q$$

Con lo que podemos concluir que (2) es posible solo si

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}.$$

Veremos que, en realidad, esta condición es suficiente salvo para dos casos excepcionales. Uno de ellos es cuando $p = 1$ (lo que equivale a $q = \frac{n}{n-\alpha}$) y el otro caso cuando $q = \infty$ (osea $p = \frac{n}{\alpha}$). En nuestro primer caso, si $p = \frac{n}{n-\alpha}$ (2) se reescribe

$$\|I_\alpha f\|_{\frac{n}{n-\alpha}} \leq C\ \|f\|_1$$

Tomemos una sucesión $\{f_n\}$ de funciones integrales positivas que definan una aproximación a la identidad. Entonces un simple argumento de límite mostraría que

$$\||x|^{-n+\alpha}\|_{\frac{n}{n-\alpha}} \leq C < \infty,$$

lo cual implicaría

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-n} dx < \infty,$$

que es una contradicción. En nuestro segundo caso, si $q = \infty$, tomemos $f(x) = |x|^{-\alpha}(log\frac{1}{|x|})^{-(\frac{\alpha}{n})(1+\varepsilon)}$ para $|x| \leq \frac{1}{2}$ y $f(x) = 0$ para $|x| > \frac{1}{2}$ donde ε es un positivo pequeño. Claramente $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p = \frac{n}{\alpha}$, ya que

$$\int_{|x|\leq\frac{1}{2}} |x|^{-n} \left(log\frac{1}{|x|}\right)^{-1-\varepsilon} dx < \infty.$$

Sin embargo $I_\alpha f$ es escencialmente no acotada cerca del origen ya que

$$I_\alpha f(0) = \int_{|x|\leq\frac{1}{2}} |x|^{-n} \left(log\frac{1}{|x|}\right)^{-\frac{\alpha}{n}(1+\varepsilon)} dx,$$

que no converge cuando $(\frac{\alpha}{n})(1+\varepsilon) \leq 1$.

Luego de la motivación dada, ahora presentaremos la primera demostración que nos dice qué condiciones necesarias y suficientes se tienen que cumplir para que se verifique la desigualdad (2). El siguiente teorema es obtenido en [5] y se enuncia como sigue,

Teorema 2.1 (Teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev). *Sea* $0 < \alpha < n$, $1 \leq p < q < \infty$ con $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{\alpha}{n}$. *Entonces*

a) *Si* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, *la integral que define al* I_α *converge absolutamente p.c.t.* $x \in \mathbb{R}^n$.

b) *Si además* $p > 1$, *existe* $C_{p,q} > 0$ *tal que si* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$,

$$\|I_\alpha f\|_q \leq C_{p,q}\ \|f\|_p.$$

c) *Existe* $C > 0$ *tal que si* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *y* $\lambda > 0$,

$$|\{x : |I_\alpha f| > \lambda\}| \leq \left(\frac{C \parallel f \parallel_1}{\lambda}\right)^q,$$

en otras palabras, I_α *es de tipo débil* $(1, q)$ *con* $q = 1 - \dfrac{\alpha}{n}$.

Demostración. *Sea* $K(x) = |x|^{-n+\alpha}$. *Observemos que* $I_\alpha f = K * f$.

Dado $\mu > 0$, *descomponemos* $K = K_1 + K_\infty$ *donde*

$$K_1(x) = K(x) \text{ si } |x| \leq \mu,\ K_1(x) = 0 \text{ si } |x| > \mu,$$

$$K_\infty(x) = K(x) \text{ si } |x| > \mu,\ K_\infty(x) = 0 \text{ si } |x| \leq \mu,$$

entonces $K*f = K_1*f + K_\infty*f$. *Por la Desigualdad de Young (Teorema* 1.3) K_1*f *converge absolutamente pues* $K_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *y* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. *La desigualdad de Hölder (Teorema* 1.1) *asegura que la integral que representa a* $K_\infty*f$ *también converge pues* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *y* $K_\infty \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$. *En efecto, como*

$(-n + \alpha)p' < -n$, *entonces*

$$\parallel K_\infty \parallel_{p'} = \int_{|x| > \mu} |x|^{(-n+\alpha)p'} dx \ < \ \infty \tag{3}$$

Ahora mostraremos que si $1 \leq p < q < \infty$ *y* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ *entonces* $K * f$ *es de tipo débil* (p, q). *Notemos que es suficiente suponer* $\|f\|_p = 1$.

$$|\{x : |K * f(x)| > 2\lambda\}| \leq |\{x : |K_1 * f(x)| > \lambda\}| + |\{x : |K_\infty * f(x)| > \lambda\}|.$$

$$|\{x : |K_1 * f(x)| > \lambda\}| \leq \left(\frac{\|K_1 * f\|_p}{\lambda}\right)^p \leq \left(\frac{\|K_1\|_1}{\lambda}\right)^p.$$

Pero si denotamos por Σ *la esfera unitaria de* $\mathbb{R}^n$,

$$\|K_1\|_1 = \int_{|x| \leq \mu} |x|^{-n+\alpha}\ dx = |\Sigma| \int_0^\mu r^{\alpha-1}\ dr = C_1\ \mu^\alpha.$$

También por la Desigualdad de Hölder (Teorema 1.1)

$$\|K_\infty * f\|_\infty \leq \|K_\infty\|_{p'} \ \|f\|_p = \|K_\infty\|_{p'} < \infty,$$

donde la última *desigualdad sigue de* (3), *además*

$$\|K_\infty\|_{p'} = \left(\int_{|x|>\mu} |x|^{(-n+\alpha)p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$= \left(|\Sigma| \int_\mu^\infty r^{(-n+\alpha)p'} r^{n-1} dr \right)^{\frac{1}{p'}} = C_2 \mu^{-(\frac{n}{q})}$$

Cuando integramos esto último, *el exponente nos queda* $(-n+\alpha)p' + n$ *y para que converja la integral se requiere que* $(-n+\alpha)p' + n < 0$, *osea* $(-n+\alpha)p' < -n$ *lo cual esta garantizado por la hipótesis.*

Luego, si elegimos $\mu = C_3^{-\frac{q}{n}}$ *resulta* $\|K_\infty\|_{p'} = \lambda$. *Así*

$$\|K_\infty * f\|_\infty \leq \lambda \text{ y luego } |\{x : |K_\infty * f| > \lambda\}| = 0.$$

Finalmente se tiene

$$|\{x : |K * f| > 2\lambda\}| \leq \left(C_1 \tfrac{\mu^\alpha}{\lambda}\right)^p = C_4 \lambda^{-q} = C_{p,q} \left(\tfrac{\|f\|_p}{\lambda}\right)^q, \text{ por lo tanto}$$

$$I_\alpha \text{ es de tipo débil } (p,q).$$

Y ahora usando el teorema de interpolación de Marcienkiewicz (*Teorema* 1.6) *obtenemos que* I_α *es de tipo fuerte* (p,q) $\forall\ p > 1$ *y* q *como en la hipótesis.*

□

2. La segunda demostración

Ahora presentaremos una segunda prueba de la acotación del operador en cuestión, pero en este caso usando la acotación del conocido operador *Maximal de Hardy – Littlewood.* (Ver *Teorema* 1.8). Esta demostración esta desarrollada en [8].

Lema 2.2. *Si* $0 < \alpha < n$ *entonces existe* $C > 0$ *tal que,* $\forall x \in \mathbb{R}^n$ *y* $\delta > 0$, *se tiene*

$$\int_{|x-y|<\delta} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \leq C\delta^{\alpha} Mf(x).$$

Demostración. *Sea* $x \in R^n$ *y* $\delta > 0$,

$$\int_{|y-x|\leq\delta} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\delta 2^{-i-1}\leq|y-x|\leq\delta 2^{-i}} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty} (\delta 2^{-i-1})^{-(n-\alpha)} \int_{|y-x|<\delta 2^{-i}} |f(y)| dy$$

$$\leq \delta^{n-\alpha} \sum_{i=0}^{\infty} (2^{i+1})^{n-\alpha} (\delta 2^{-i})^n |\Sigma| Mf(x) \leq C\delta^{\alpha} Mf(x).$$

$\square$

Teorema 2.3. *Sea* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $0 < \alpha < n$, $1 < p < q < \infty$ *con* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. *Entonces* $\exists\, C_{p,q} > 0$, *independiente de* f, *tal que*

$$\|I_\alpha f\|_q \leq C_{p,q} \|f\|_p.$$

Demostración. *Sea* $p > 1$, $0 < \alpha < n$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$, $\delta > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. *Entonces aplicando la desigualdad de Hölder,*

$$\int_{|x-y|\geq\delta} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \ \leq \ C\|f\|_p \delta^{\alpha - \frac{n}{p}}. \tag{4}$$

Observamos que si $g(y) = |x-y|^{-(n-\alpha)}$ *entonces*

$$\|g\|_{p'} = \left(\int_{|x-y|\geq\delta} |x-y|^{-(n-\alpha)p'} dy \right)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$|\Sigma|^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\delta}^{\infty} r^{-(n-\alpha)p'+n-1} dr \right)^{\frac{1}{p'}} = C\delta^{\alpha - \frac{n}{p}}.$$

Ahora,

$$|I_\alpha f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)||x-y|^{n-\alpha} dy$$

$$= \int_{|x-y|<\delta} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy + \int_{|x-y|\geqq\delta} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

aplicando el Lema 2.2 *y por* (4),

$$\leq C\delta^{\alpha} Mf(x) + C\|f\|_p \delta^{\alpha-\frac{n}{p}}$$

eligiendo $\delta = \left(\frac{Mf(x)}{\|f\|_p}\right)^{-\frac{p}{n}}$ *obtenemos*

$$= C\left[\left(\frac{Mf(x)}{\|f\|_p}\right)^{-\frac{\alpha p}{n}} Mf(x) + \|f\|_p \left(\frac{Mf(x)}{\|f\|_p}\right)^{(\alpha-\frac{n}{p})(-\frac{p}{n})}\right]$$

$$= C\left[\left(\frac{Mf(x)}{\|f\|_p}\right)^{1-\frac{\alpha p}{n}} \|f\|_p + \left(\frac{Mf(x)}{\|f\|_p}\right)^{1-\frac{\alpha p}{n}} \|f\|_p\right]$$

$$= C_{p,q}\left[\left(\frac{Mf(x)}{\|f\|_p}\right)^{1-\frac{\alpha p}{n}} \|f\|_p\right].$$

Finalmente por el Teorema 1.8, (*M es de tipo fuerte* (p,p) *con* $p > 1$),

$$\|I_\alpha f\|_q^q = \int_{\mathbb{R}^n} |I_\alpha f(x)|^q dx \leq C_{p,q} \int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)^{q(1-\frac{\alpha p}{n})} \|f\|_p^{\frac{\alpha pq}{n}} dx$$

$$\leq C_{p,q} \|f\|_p^{\frac{\alpha pq}{n}} \int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)^p dx \leq C_{p,q} \|f\|_p^{\frac{\alpha pq}{n}} \|Mf\|_p^p \leq C_{p,q} \|f\|_p^{\frac{\alpha pq}{n}+p} = C\|f\|_p^q.$$

□

3. La tercera demostración

Mostraremos una tercera prueba de la acotación de la *Integral Fraccionaria*. Pero en este caso usaremos el siguiente resultado conocido como La Desigualdad de Hedberg (Probada por L.I.Hedberg en 1972. Ver [7])

Teorema 2.4 (Desigualdad de Hedberg). *Sea* $0 < \alpha < n$ *y* f *una función acotada de soporte compacto. Entonces para* $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$ *existe* $C > 0$ *tal que*

$$|I_\alpha f(x)| \leq C\|f\|_p^{\frac{p\alpha}{n}} Mf(x)^{1-\frac{p\alpha}{n}}.$$

Demostración. *Sea* $s > 0$,

$$|I_\alpha f(x)| \leq \int_{|x-y|<s} \frac{|f(y)|}{(|x-y|)^{n-\alpha}} dy + \int_{|x-y|\geq s} \frac{|f(y)|}{(|x-y|)^{n-\alpha}} dy = I + II.$$

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{-k-1}s<|x-y|<2^{-k}s} \frac{|f(y)|}{(|x-y|)^{n-\alpha}} dy \leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{|x-y|<2^{k}s} |f(x)|dy$$
$$\leq 2^{2n-\alpha} s^{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha} \frac{1}{(2^{-k+1}s)^n} \int_{Q(x,2^{-k+1}s)} |f(y)|dy = Cs^{\alpha} Mf(x).$$

Ahora para acotar el segundo sumando II analizamos los casos $p = 1$ y $p > 1$.
Si $p = 1$,

$$II = \int_{|x-y|\geq s} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \leq \frac{1}{s^{n-\alpha}} \int_{|x-y|\geq s} |f(y)|dy \leq s^{-(n-\alpha)} \|f\|_1.$$

Si $1 < p < \dfrac{n}{\alpha}$, sea $\beta = p'(n-\alpha) - n$. Entonces $\beta > 0$ y,

$$II = \int_{|x-y|\geq s} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \leq \|f\|_p \left(\int_{|x-y|\geq s} \frac{1}{|x-y|^{p'(n-\alpha)}} dy \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Y ahora,

$$\int_{|x-y|\geq s} \frac{1}{|x-y|^{p'(n-\alpha)}} dy = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k s\leq|x-y|\leq 2^{k+1}s} \frac{1}{|x-y|^{n+\beta}} dy$$
$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|Q(x, 2^{k+2}s)|}{(2^k s)^{n+\beta}}.$$

De esta manera

$$II \leq Cs^{-\frac{\beta}{p'}} \|f\|_p = Cs^{-(\frac{n}{p}-\alpha)} \|f\|_p,$$

osea que tenemos,

$$|I_\alpha f(x)| \leq C \left[s^{\alpha} Mf(x) + s^{\alpha-\frac{n}{p}} \|f\|_p \right].$$

Y ahora tomando $s = \left(\dfrac{(\frac{n}{p}-\alpha)\|f\|_p}{\alpha Mf(x)} \right)^{\frac{p}{n}}$, se logra la desigualdad deseada en el enunciado.

$\square$

Teorema 2.5. *Sea $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$. Definimos q por $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. Entonces existe $C > 0$ tal que para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$,*

$$\|I_\alpha f\| \leq C\ \|f\|_p$$

Demostración. *Sea f continua de soporte compacto. Entonces por la desigualdad de Hedberg,*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |I_\alpha f(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\ (\|f\|_p)^{\frac{p\alpha}{n}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)^{q(1-\frac{p\alpha}{n})} dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= C\ (\|f\|_p)^{\frac{p\alpha}{n}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)^p dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

como el operador $Maximal$ es de tipo $fuerte$ (p,p),

$$\leq C\ \|f\|_p^{\frac{p\alpha}{n}+\frac{p}{q}} = C\ \|f\|_p.$$

Por densidad el resultado se extiende a todo el $L^p(\mathbb{R}^n)$, con lo cual queda probado el teorema.

$\square$

Capítulo III. Teoremas de acotación $p-q$ de la $Integral\ Fraccionaria$ con pesos de clase $A(p,q)$

En este capítulo vamos a estudiar el problema de la acotación $p-q$ de la $Integral\ Fraccionaria$ con peso. En esta ocasión estudiaremos las condiciones necesarias y suficientes que debe satisfacer un peso ω para que la $Integral\ Fraccionaria$ esté acotada del $L^p(\mathbb{R}^n,\omega^p)$ en $L^q(\mathbb{R}^n,\omega^q)$. Nos basaremos principalmente en el trabajo [10] de B.Muckenhoupt y R.L.Wheeden. En dicho trabajo los autores estudian la acotación $p-q$ de la llamada $Maximal\ Fraccionaria$, la cual se define como sigue. Para $0<\alpha<n,\ x\in\mathbb{R}^n$ y f localmente integrable,

$$M_\alpha f(x) \ = \ \sup_{Q\ni x}\frac{1}{|Q|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int_Q |f(y)|dy, \tag{5}$$

donde Q es cualquier cubo que contiene a x.
Los autores estudian la acotación con peso de clase $A(p,q)$ de este último operador bajo ciertas condiciones para los exponentes p,q. Finalmente, en el Teorema 3.4, comparamos la $integral\ Fraccionaria$ con la $Maximal\ Fraccionaria$ para luego, en el Teorema 3.5, enunciar el resultado principal de este capítulo. Comenzaremos con un lema de gran utilidad.

Lema 3.1. *Si* $0<\alpha<n$, *entonces existen constantes* $B,K,$ *que dependen solo de* α *y* n, *tal que si* $a>0,\ d>0,\ b\leq B,\ f$ *función no negativa,* Q *un cubo en* $\mathbb{R}^n$ *con* $I_\alpha f(x)\leq a$ *en algún punto de* Q *y si definimos,*

$$E=\{x\in Q\ :\ I_\alpha f(x)>ab\ \wedge\ M_\alpha f(x)\leq ad\}$$

entonces se tiene,

$$|E| \leq K|Q| \left(\frac{d}{b}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}.$$

Demostración. *Definimos* $g(x) = f(x)$ *en* $2Q$ *y* $g(x) = 0$ *fuera. Sea* $h(x) = f(x) - g(x)$. *Asumimos que existe* $t \in Q$ *tal que* $M_\alpha f(t) \leq ad$ *(de lo contrario no habría nada que probar). Por el Teorema 2.1, parte (c), existe* C, *dependiendo solo de* α *y* n, *tal que para cualquier par de positivos* a, b *se tiene,*

$$\left|\left\{I_\alpha g(x) > \frac{ab}{2}\right\}\right| \ \leq \ C \left(\frac{1}{ab}\int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}. \tag{6}$$

Sea P *el cubo con centro en* t, $P = 3Q$ $(2Q \subset P)$. *Entonces,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx \ \leq \ \int_P f(x)dx \ \leq \ M_\alpha f(t)|P|^{\frac{n-\alpha}{n}} \ \leq \ ad|3Q|^{\frac{n-\alpha}{n}}.$$

Usando esto último *en* (6) *obtenemos que,*

$$\left|\left\{I_\alpha g(x) > \frac{ab}{2}\right\}\right| \ \leq \ C3^n|Q| \left(\frac{d}{b}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}. \tag{7}$$

Sea s *un punto de* Q *tal que* $I_\alpha f(s) \leq a$ *(existe por hipótesis). Existe* $L > 1$, *que depende solo de* α *y* n, *tal que si* $x \in Q$, $y \notin 2Q$, *entonces*

$$|s - y| \ \leq \ L|x - y|.$$

Por lo tanto, para $x \in Q$,

$$I_\alpha h(x) \ = \ \int_{\mathbb{R}^n} \frac{h(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}dy \ \leq \ L^{n-\alpha}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{h(y)}{|s-y|^{n-\alpha}}dy \ \leq \ L^n I_\alpha f(s) \ \leq \ L^n a$$

Sea $B = 2L^n$. *Entonces si* $b \geq B$ $I_\alpha h(x) \leq \frac{ab}{2}$ $\forall x \in Q$ *y* $E \subset \left\{I_\alpha g(x) > \frac{ab}{2}\right\}$. *Luego la conclusión sigue de* (7).

$\square$

Ahora el siguiente teorema compara, en algún sentido, la *Integral Fraccionaria* con la *Maximal Fraccionaria.*

Teorema 3.2. *Sea* $\omega \in A_\infty$, $0 < q < \infty$, $0 < \alpha < n$ *y* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. *Entonces existe* $C > 0$, *independiente de* f *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |I_\alpha f(x)|^q \omega(x)dx \ \leq \ C \int_{\mathbb{R}^n} M_\alpha f(x)^q \omega(x)dx.$$

Demostración. *Asumimos* f *no negativa y de soporte compacto. Dado* $a > 0$, *descomponemos el conjunto*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : I_\alpha f(x) > a\}$$

en cubos disjuntos $\{Q_j\}$ *tales que,* $\forall j$, $I_\alpha f(x) \leq a$ *en algún punto de* $4Q_j$. (*Esto es posible por el Teorema* 1 *de la página* 167 *en* [5]) *Sean* B, K *constantes como en el Lema* 3.1 *y sea* $b = max\{1, B\}$. *Sea* δ *correspondiente al* $\varepsilon = \frac{1}{2}b^{-q}$ *en la definición de* A_∞ *para* ω. *Elegimos* D *tal que* $\delta = K4^n \left(\frac{D}{b}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}$. *Sea* d *satisfaciendo* $0 < d \leq D$ *y sea* $E_j \subset Q_j$ *donde*

$$I_\alpha f(x) > ab \text{ y } M_\alpha f(x) \leq ad.$$

Por el Lema 3.1

$$|E_j| \leq K|4Q_j| \left(\frac{d}{b}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}} < \delta|Q_j|$$

entonces, por la definición del δ,

$$\omega(E_j) \leq \tfrac{1}{2}b^{-q}\omega(Q_j)$$

Sumando sobre j *se tiene*

$$\omega\left(\{x \in \mathbb{R}^n : I_\alpha f(x) > ab \wedge M_\alpha f(x) \leq ad\}\right) \leq$$

$$\tfrac{1}{2}b^{-q}\omega\left(\{x \in \mathbb{R}^n : I_\alpha f(x) > a\}\right)$$

Esto implica que, para d *que satisfaga* $0 < d \leq D$,

$$\begin{aligned}\omega\left(\{x \in \mathbb{R}^n : I_\alpha f(x) > ab\}\right) \;&\leq \\ &\omega\left(\{x \in \mathbb{R}^n : M_\alpha f(x) > ad\}\right) \;+\; \omega\left(\{x \in \mathbb{R}^n : I_\alpha f(x) > a\}\right) \quad (8)\end{aligned}$$

Ahora sea Q *un cubo tal que* $f(x) = 0$ *para* $x \notin Q$. *Dado* $x \in (3Q)^c$ *sea* u *un punto en* Q, *el más cercano a* x. *Sea* P *el cubo más pequeño con centro en* x, *de lados paralelos a* Q *que contiene a* Q.
Entonces existe una constante $L > 1$ (*dependiendo sólo de* n *y* α) *tal que*

$$|P| \leq L|x - u|^n$$

Además se tiene que

$$I_\alpha f(x) \leq \frac{1}{|x-u|^{n-\alpha}} \int_Q f(y)dy \leq \frac{|P|^{\frac{n-\alpha}{n}}}{|x-u|^{n-\alpha}} M_\alpha f(x) \leq L\; M_\alpha f(x).$$

Ahora definimos $d = min\{D, \frac{1}{L}\}$. *De esto se sigue inmediatamente que*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : I_\alpha f(x) > a\} \ \cap \ (3Q)^c \ \subset \ \{x \in \mathbb{R}^n : M_\alpha f(x) > ad\} \qquad (9)$$

De (8) *y* (9) *se sigue que*

$$\omega\left(\{x \in \mathbb{R}^n : I_\alpha f(x) > ab\}\right) \ \leq$$
$$2\omega(\{x \in \mathbb{R}^n : M_\alpha f(x) > ad\}) \ + \ \frac{1}{2} b^{-q} \omega(\{x \in \mathbb{R}^n : I_\alpha f(x) > a\} \cap 3Q) \quad (10)$$

Multiplicando esto último *por* a^{q-1} *e integrando entre* 0 *y* N *respecto de* a, *el lado izquierdo queda, luego de un cambio de variable,*

$$\int_0^N a^{q-1}\omega(\{x \in \mathbb{R}^n : I_\alpha f(x) > ab\}) da \ =$$
$$b^{-q}\int_0^{Nb} a^{q-1}\omega(\{x \in \mathbb{R}^n : I_\alpha f(x) > a\}) da \quad (11)$$

Similarmente el lado derecho de (10) *queda*

$$2\int_0^N a^{q-1}\omega(\{x \in \mathbb{R}^n : M_\alpha f(x) > ad\}) da \ +$$
$$\tfrac{1}{2} b^{-q}\int_0^N a^{q-1}\omega(\{x \in \mathbb{R}^n : I_\alpha f(x) > a\} \cap 3Q) da.$$

Luego de un cambio de variable,

$$2d^{-q}\int_0^{Nd} a^{q-1}\omega(\{x \in \mathbb{R}^n : M_\alpha f(x) > a\}) da \ +$$
$$\frac{1}{2} b^{-q}\int_0^N a^{q-1}\omega(\{x \in \mathbb{R}^n : I_\alpha f(x) > a\} \cap 3Q) da. \quad (12)$$

Como ω *es localmente integrable, el segundo* término *en* (12), *es finito. Luego*

$$\frac{1}{2} b^{-q}\int_0^{Nb} a^{q-1}\omega\left(\{I_\alpha f > a\}\right) da \leq 2d^{-q}\int_0^{Nd} a^{q-1}\omega\left(\{M_\alpha > a\}\right) da. \quad (13)$$

Haciendo $N \longrightarrow \infty$, (13) *queda,*

$$\frac{b^{-q}}{2q}\int_{\mathbb{R}^n} |I_\alpha f(x)|^q \omega(x) dx \ \leq \ \frac{2d^{-q}}{q}\int_{\mathbb{R}^n} (M_\alpha(x))^q \omega(x) dx$$

Luego queda probada la conclusión para f no negativa de soporte comptacto. Ahora para cualquier f (la podemos suponer no negativa pues ambos lados de la desigualdad que queremos probar son positivos) definimos $f_m(x) = f(x)\chi_{B_m}(x)$, donde B_m es la bola cerrada centrada en el origen de radio m. Como $f_m \nearrow f$, por el teorema de la convergencia monótona se logra la conclusión para f.

$\square$

El siguiente teorema muestra la acotación de *tipo débil* de la *Maximal Fraccionaria*.

Teorema 3.3. *Si $0 \leq \alpha < n,\ 1 \leq p < \frac{n}{\alpha},\ \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n},\ a > 0$. Sea*

$$E_a = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ M_\alpha f(x) > a\}.$$

Si $\omega \in A(p,q)$, entonces existe C independiente de f tal que,

$$\left(\int_{E_a} \omega(x)^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \ \leq \ \frac{C}{a}\left(\int_{R^n} |f(x)\omega(x)|^p dx\right).$$

Demostración. *Fijamos $M > 0$ y sea,*

$$E_{a,M} = E_a \cap B_M$$

donde B_M es la esfera $n-dimensional$ de radio M. Ahora para $x \in E_{a,M}$ existe un cubo Q centrado en x tal que,

$$\frac{1}{|Q|^{\frac{n-\alpha}{n}}} \int_Q |f(x)|dx > a \tag{14}$$

Usando el Corolario 1.7 de la página 304 en [24], existe una sucesión de cubos $\{Q_k\}$ tal que $E_{a,M} \subset \cup Q_k$ y ningún punto de $\mathbb{R}^n$ está en más de C de esos cubos (C finito y solo depende de n). Entonces,

$$\left(\int_{E_{a,M}} \omega(x)^q dx\right)^{\frac{p}{q}} \ \leq \ \left(\sum_k \int_{Q_k} \omega(x)^q dx\right)^{\frac{p}{q}} \tag{15}$$

y ya que $\frac{p}{q} \leq 1$, el lado derecho de (15) está acotado por

$$\sum_k \left(\int_{Q_k} \omega(x)^q dx\right)^{\frac{p}{q}} \tag{16}$$

Ya que los $Q_k's$ *satisfacen* (14), (16) *queda acotado por*

$$\sum_k \left(\int_{Q_k} \omega(x)^q dx \right)^{\frac{p}{q}} \cdot \left(\frac{a^{-1}}{|Q_k|^{\frac{n-\alpha}{n}}} \int_{Q_k} |f(x)| dx \right)^p . \tag{17}$$

Usando la desigualdad de Hölder en la última integral de (17), *queda acotado por*

$$\sum_k \left(\int_{Q_k} \omega(x)^q dx \right)^{\frac{p}{q}} a^{-p} |Q_k|^{1-p-\frac{p}{q}} \left(\int_{Q_k} |f(x)\omega(x)|^p dx \right) \cdot \left(\int_{Q_k} |\omega(x)^{-p'}| dx \right)^{\frac{p}{p'}} . \tag{18}$$

Como $\omega \in A(p,q)$ *entonces* (18) *queda acotado por,*

$$Ca^{-p} \sum_k \int_{Q_k} |f(x)\omega(x)|^p dx. \tag{19}$$

Y como ningún punto de $\mathbb{R}^n$ *está en más de un número finito de tales cubos,* (19) *queda finalmente acotado por*

$$Ca^{-p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\omega(x)|^p dx. \tag{20}$$

Por lo tanto el lado derecho de (15) *es acotado por* (20) *y ya que* C *en* (20) *no depende de* M, *el resultado sigue por el teorema de la convergencia monótona.*

$\square$

Ahora sí estamos en condiciones de afirmar el siguiente resultado sobre la acotación de *tipo fuerte* $(p-q)$ de la *Maximal Fraccionaria* con pesos $A(p,q)$.

Teorema 3.4. *Si* $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ *y* $\nu \in A(p,q)$, *entonces existe* C, *independiente de* f, *tal que*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} (M_\alpha f(x)\nu(x))^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} (f(x)\nu(x))^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Demostración. *Definimos* $\omega(x) = (\nu(x))^q$. *Por la Proposición* 1.19, $\omega \in A_r$ *con* $r = 1 + \frac{q}{p'}$, *es decir*

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x)^{\frac{1}{1-r}} dx \right)^{r-1} \leq C. \tag{21}$$

Por el Corolario 1.16, *existe* s, $1 < s < r$, *tal que* $\omega \in A_s$. *Entonces existen* p_1, q_1 *tales que* $\frac{1}{q_1} = \frac{1}{p_1} - \frac{\alpha}{n}$, $1 < p_1 < p$ *y* $s = 1 + \frac{q_1}{p_1'}$.
Observemos que $\omega^{\frac{1}{q_1}} \in A(p_1, q_1)$ *pues como* $\omega \in A_s$ *entonces,*

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^{\frac{1}{1-s}}\right)^{s-1} \;\leq\; C,$$

con C independiente de los cubos Q. Como $s = 1+\frac{q_1}{p_1'}$ entonces la desigualdad de arriba es lo mismo que

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^{-\frac{p_1'}{q_1}}\right)^{\frac{q_1}{p_1'}} \;\leq\; C.$$

Pero esto último *es lo mismo que*

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega\right)^{\frac{1}{q_1}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^{-\frac{p_1'}{q_1}}\right)^{\frac{1}{p_1'}} \;\leq\; C^{\frac{1}{q_1}},$$

O sea $\omega^{\frac{1}{q_1}} \in A(p_1, q_1)$.
Ahora por el Teorema 3.3 existe C tal que

$$\left(\int_{E_a} \omega(x)dx\right)^{\frac{p_1}{q_1}} \;\leq\; Ca^{-p_1}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p_1}\omega(x)^{\frac{p_1}{q_1}}dx. \tag{22}$$

Definimos ahora un operador sublineal T,

$$Tg(x) = M_\alpha\left(g(\omega^{\frac{\alpha}{n}})\right)(x).$$

Entonces con $f(x) = g(x)\left(\omega(x)^{\frac{\alpha}{n}}\right)$, (22) se reescribe

$$\int_{\{Tg>a\}} \omega(x)dx \;\leq\; Ca^{-q_1}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^{p_1}\omega(x)dx\right)^{\frac{q_1}{p_1}}. \tag{23}$$

Similarmente existe p_2 satisfaciendo $p < p_2 < \frac{n}{\alpha}$. Entonces, con q_2 definido por $\frac{1}{q_2} = \frac{1}{p_2} - \frac{\alpha}{n}$ y usando la desigualdad de Hölder vemos que $\omega \in A_t$ con $t = 1+\frac{q_2}{p_2'}$, ya que $t > r$. Luego el Teorema 3.3 sigue valiendo si reemplazamos p_1, q_1 por p_2, q_2 y de esta forma se ve que

$$\int_{Tg>a} \omega(x)dx \;\leq\; Ca^{-q_2}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^{p_2}\omega(x)dx\right)^{\frac{q_2}{p_2}}. \tag{24}$$

Finalmente por el teorema deInterpolación de Marcinkiewicz se tiene

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} (Tg(x))^q\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \;\leq\; C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{25}$$

Ahora como $g(x) = f(x)[\omega(x)]^{-\frac{\alpha}{n}}$ y $\omega(x) = [\nu(x)]^q$ entonces $Tg(x) = M_\alpha f(x)$ y finalmente (25) queda,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} (M_\alpha f(x)\nu(x))^q\right)^{\frac{1}{q}} dx \;\leq\; C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \nu(x)^p\right)^{\frac{1}{p}} dx.$$

Lo cual prueba el teorema.

$\square$

Finalmente tenemos todas las herramientas para probar la acotación $(p-q)$ con peso para la *Integral Fraccionaria*. El siguiente teorema nos asegura que $I_\alpha : L^p(\mathbb{R}^n, \nu^p) \longmapsto L^q(\mathbb{R}^n, \nu^q)$ es acotado bajo ciertas condiciones que enunciamos a continuación.

Teorema 3.5. *Asumiendo que* $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, *si* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ *y* $\nu \in A(p,q)$ *entonces existe* C, *independiente de* f, *tal que*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |I_\alpha f(x)|^q \nu(x)^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \;\leq\; C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \nu(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demostración. *Observemos que* $\nu \in A(p,q) \iff \nu^q \in A_r$ *con* $r = 1 + \frac{q}{p'}$ *(por Proposición* 1.19*). Luego* $\nu^q \in A_\infty$. *Entonces por los Teoremas* 3.2 *y* 3.4 *sale inmediatamente,*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |I_\alpha f(x)|^q \nu(x)^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \;\leq\; C\left(\int_{\mathbb{R}^n} [M_\alpha f(x)]^q \nu(x)^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \;\leq\; C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \nu(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$\square$

Capítulo IV. Estudios sobre la continuidad de Operadores Integrales de Tipo Fraccionario

En este capítulo vamos a estudiar operadores más generales que la *Integral Fraccionaria*. Los denominados *Operadores Integrales de Tipo Fraccionario* de la forma

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k_1(x - A_1 y)...k_m(x - A_m y) f(y) dy,$$

donde $A_1, ...A_m$ son ciertas matrices invertibles y si $1 \leq i \leq m$, el núcleo k_i satisface una condición de homogeneidad de grado $\frac{n}{q_i}$, con $\frac{n}{q_1} + ... + \frac{n}{q_m} = n - \alpha$ (la homogeneidad del núcleo de I_α).
En la primer sección mostramos diferentes resultados que obtuvieron la Dra. M.Urciuolo y el Dr. T.Godoy en los trabajos [18], [19] y [20] sobre la acotación de este tipo de operadores entre espacios de Lebesgue clásicos. En la segunda sección , enunciamos los principales resultados obtenidos por la Dra. M.S.Riveros y la Dra. M.Urciuolo en los trabajos [21] y [22] sobre la continuidad de estos operadores entre espacios de Lebesgue con pesos.

1. Acotación de T entre espacios de Lebesgue clásicos

En [17] los autores prueban la acotación sobre el $L^2(\mathbb{R})$ del operador

$$Tf(x) = \int |x - y|^{-\alpha} |x + y|^{\alpha - 1} f(y) dy,$$

para $0 < \alpha < 1$. Luego en 1993, en [18] prueban un primer teorema donde generalizan al resultado anterior dado en [17]. Dicho teorema establece lo siguiente,

Teorema 4.1. *Sea Ω función en el $L^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. Entonces para $0<\alpha<n$, el operador definido por*

$$Tf(x) \;=\; \int \Omega(x,y)|x-y|^{-\alpha}|x+y|^{-n+\alpha}f(y)dy,$$

es acotado del $L^p(\mathbb{R}^n)$ en el $L^p(\mathbb{R}^n)$, para todo $1<p<\infty$.

Años más tarde, en 1996, en [19] estudian la acotación sobre el $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1<p<\infty$, de operadores integrales con núcleos de la forma $k_1(x-y)k_2(x+y)$ para ciertas clases de funciones, k_1,k_2, que satisfacen ciertas condiciones de homogeneidad. Dada una función $g:\mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{C}$, definimos

$$g^{(j,q)}(x) = 2^{\frac{jn}{q}}g(2^jx)$$

Sean $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ dos familias de funciones medibles sobre $\mathbb{R}^n$ con soporte contenido en $\{t: 2^{-1}\le |t|\le 2\}$ tales que

$$\|\varphi_j\|_{q_0}\le c_1, \|\psi_j\|_{q_1}\le c_2 \tag{26}$$

para algún $q_0>q,\ q_1>q',\ c_1>0,\ c_2>0,\ \forall j\in\mathbb{Z}$. En este trabajo se logra el siguiente resultado

Teorema 4.2. *Sean $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ dos familias que satisfacen* (26). *Entonces el operador definido por*

$$Tf(x) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} k_1(x-y)k_2(x+y)f(y)dy,$$

donde $k_1(z)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\varphi_j^{(j,q)}(z)$ y $k_2(z)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\psi_j^{(j,q')}(z)$, es acotado sobre el $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1<p<\infty$.

Más adelante, en 1999, en [20] generalizan más aún y estudian operadores de la forma

$$Tf(x) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} k_1(x-a_1y)k_2(x-a_2y)...k_m(x-a_my)f(y)dy,$$

con $k_i(y)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{\frac{jn}{q_i}}\varphi_{i,j}(2^jy)$, $1\le q_i<\infty$, $\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+...+\frac{1}{q_m}=1-r$, donde $0\le r<1$ y $\varphi_{i,j}$ satisfacen ciertas condiciones de regularidad. A continuación comentaremos más sobre estos operadores. Observamos que si para cada

$1 \leq i \leq m$, todas las $\varphi_{i,j}$, $j \in \mathbb{Z}$, son iguales, o sea $\varphi_{i,j} \equiv \varphi_i$ entonces para $k \in \mathbb{Z}$,

$$k_i(2^k y) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{\frac{jn}{q_i}} \varphi_i(2^j 2^k y) = 2^{-k\frac{n}{q_i}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{\frac{(j+k)n}{q_i}} \varphi_i(2^{j+k} y) = 2^{-k\frac{n}{q_i}} k_i(y),$$

o sea k_i es homogéneo de grado $-\frac{n}{q_i}$ respecto de las potencias de 2. Y por lo tanto el núcleo $k_1 \ldots k_m$ sería homogéneo de grado $-(\frac{n}{q_1} + \ldots + \frac{n}{q_m}) = -n(1-r)$, que es la homogeneidad de la integral fraccionaria I_α con $\alpha = nr$. Esto sugirió que deberían obtenerse, para estos operadores, resultados de continuidad similares a los que satisface I_α. Por esto a esta familia de operadores los llamamos *Operadores de Tipo Fraccionario.*

Sean $a_1, \ldots, a_m$ números reales tales que, para cada i, $a_i \neq 0$ y $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$. Sean $q_1, \ldots, q_m$ números reales, $1 \leq q_i < \infty$, tales que

$$\tfrac{1}{q_1} + \tfrac{1}{q_2} + \ldots + \tfrac{1}{q_m} = 1 - r,$$

para algún $0 \leq r < 1$. Para cada $1 \leq i \leq m$ sea $\{\varphi_{i,j}\}_{j \in \mathbb{Z}}$ una familia de funciones reales no negativas definidas sobre $\mathbb{R}^n$, tales que exista $c > 0$ y $\varepsilon > 0$, ambos independientes de i, j satisfaciendo

$H1)$ $\displaystyle\int |\varphi_{i,j}(y+h) - \varphi_{i,j}(y)|^{q_i} dy \leq c|h|^\varepsilon.$

$H2)$ $\displaystyle\int (1 + |y|^\varepsilon)\, \varphi_{i,j}(y)^{q_i} dy \leq c.$

Sea T el operador integral con núcleo $k(x,y)$, es decir

$$Tf(x) = \int k(x,y) f(y) dy \tag{27}$$

donde

$$k(x,y) = k_1(y - a_1 x) k_2(y - a_2 x) \ldots k_m(y - a_m x), \tag{28}$$

con

$$k_i(y) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{\frac{jn}{q_i}} \varphi_{i,j}(2^j y).$$

En este trabajo logran el siguiente resultado de continuidad

Teorema 4.3. *Sea T el operador definido por (27). Si $1 < p < \frac{1}{r}$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - r$, entonces T está bien definido y es acotado del $L^p(\mathbb{R}^n)$ en el $L^q(\mathbb{R}^n)$.*

2. Acotación de T entre espacios de Lebesgue con pesos

Empezamos considerando el trabajo [21] donde se estudia operadores integrales de la forma

$$Tf(x) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} |x-a_1y|^{-\alpha_1}...|x-a_my|^{-\alpha_m}f(y)dy, \tag{29}$$

donde $a_1,...,a_m$ son números reales, $\alpha_1+...+\alpha_m \;=\; n$, $\alpha_i \in \mathbb{R}-\{0\}$ para $i=1,...,m$. Se considerará $f \in S(\mathbb{R}^n)$.
En este trabajo los autores obtienen los siguientes resultados,

Teorema 4.4. *Sea T definido por (29). Supongamos que existe $c \geq 1$ tal que $\omega(a_ix) \;\leq\; c\omega(x)$ para $1 \leq i \leq m$ y p.c.t.$x \in \mathbb{R}^n$.*

a) *Si $\omega \in A_p$, $1<p<\infty$, entonces T es acotado sobre el $L^p(\mathbb{R}^n,\omega)$.*

b) *Si $\omega \in A_1$ entonces existe $k>0$ tal que, para todo $\lambda>0$ y $f \in S(\mathbb{R}^n)$,*

$$\omega(\{x:|Tf(x)|>\lambda\}) \;\leq\; \frac{k}{\lambda}\int |f(x)|\omega(x)dx.$$

También los autores analizan la acotación $L^\infty - BMO$ del operador T. Decimos que una función $f \in L^1_{loc}$ pertenece al BMO si existe $c>0$ tal que

$$\frac{1}{|Q|}\int \left| f(x) - \frac{1}{|Q|}\int f \right| dx \;\leq\; c, \tag{30}$$

para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$. A la constante más pequeña que satisfaga la desigualdad (30) la llamamos $\|f\|_*$. Luego, un segundo resultado en este trabajo es el siguiente,

Teorema 4.5. *Sea T definido como en (29). Entonces existe $c>0$ tal que*

$$\|Tf\|_* \;\leq\; c\|f\|_\infty,$$

para toda $f \in S(\mathbb{R}^n)$.

Y un tercer resultado que obtienen los autores en este trabajo es el siguiente,

Teorema 4.6. *Sea T definido como en (29).*

a) *Si* $f \in L^\infty$ *y* $T|f|(x_0) < \infty$ *para algún* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *entonces* $Tf(x)$ *esta bien definido para todo* $x \neq 0$ *y* $Tf \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

b) *Existe* $c > 0$ *tal que,*
$$\|Tf\|_* \;\leq\; c\|f\|_\infty,$$
para toda f *como en* (a).

En [22] se considera finalmente los *Operadores Integrales de Tipo Fraccionarios* de la forma

$$Tf(x) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} |x - A_1 y|^{-\alpha_1}|x - A_2 y|^{-\alpha_2}...|x - A_m y|^{-\alpha_m} f(y)dy \qquad (31)$$

donde $\alpha_i > 0$, $1 \leq i \leq m$, $\alpha_1 + ... + \alpha_m = n - \alpha$, $0 < \alpha < n$ y A_i son ciertas matrices invertibles $(1 \leq i \leq m)$. En el presente trabajo se obtiene la acotación $L^p(\mathbb{R}^n, \omega^p) - L^q(\mathbb{R}^n, \omega^q)$ para $\omega \in A(p, q)$ para los cuales existe $C > 0$ tal que

$$\omega(A_i x) \;\leq\; C\omega(x), p.c.t. x \in \mathbb{R}^n \;(P)$$

Bajo la siguiente condición sobre las matrices A_i,

A_i es invertible $\forall i = 1, ..., m$ y $A_i - A_j$ es invertible $i \neq j, 1 \leq i, j \leq m$ (H)

se obtienen los siguientes resultados

Teorema 4.7. *Sea* $0 \leq \alpha \leq n$ *y* $\alpha_1, ..., \alpha_m > 0$ *tales que* $\alpha_1 + ... + \alpha_m = n - \alpha$. *Sea* T *definido como en* (31) *donde las matrices* $A_1, ..., A_m$ *satisfacen* (H). *Si* $0 < p < \infty$ *y* $\omega \in A_\infty$ *satisface* (P), *entonces existe* $C > 0$ *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T_\alpha f(x)|^p \omega(x)dx \;\leq\; C\int_{\mathbb{R}^n} |M_\alpha f(x)|^p \omega(x)dx$$

para $f \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$, *siempre que el lado izquierdo sea finito.*

Este primer resultado compara nuestro operador T_α con la conocida M_α definida en el capítulo anterior. Algo similar con lo que se hizo con la I_α. El siguiente lema habla sobre la imagen de una $f \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ bajo el T_α, definido en (4), para cierta condiciones que enunciamos a continuación.

Lema 4.8. *Sea* $0 < \alpha < n$ *y* $\alpha_1, ..., \alpha_m > 0$ *tales que* $\alpha_1 + ... + \alpha_m = n - \alpha$. *Sea* T *definido como en* (31), *donde* $A_1, ..., A_m$ *satisfacen* (H).
Si $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$, $\omega \in A(p, q)$ *y* $f \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$, *entonces*
$T_\alpha(f) \in L^q(\mathbb{R}^n, \omega^q)$.

Ahora, con estos dos resultados en mano, se da el siguiente teorema general que da la acotación $L^p(\mathbb{R}^n, \omega^p) - L^q(\mathbb{R}^n, \omega^q)$

Teorema 4.9. *Sea $0 < \alpha < n$ y $\alpha_1, ..., \alpha_m > 0$ tales que $\alpha_1 + ... + \alpha_m = n - \alpha$. Sea T definido como en (31) donde $A_1, ..., A_m$ satisfacen (H). Si $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ y $\omega \in A(p,q)$ satisface (P), entonces existe $C > 0$ tal que*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |T_\alpha f(x)|^q \omega^q(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

para $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. *Sea $\omega \in A(p,q)$ para $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$, entonces $\omega^q \in A_{1+\frac{q}{p'}} \subset A_\infty$. Sin pérdida de generalidad podemos tomar $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Por el Lema 4.8, se tiene que $T_\alpha f \in L^q(\mathbb{R}^n, \omega^q)$. Por el teorema 3.4 también tenemos que M_α es acotada del $L^p(\mathbb{R}^n, \omega^p)$ en el $L^q(\mathbb{R}^n, \omega^q)$. Luego, aplicando el Teorema 4.7 se obtiene*

$$\left(\int |T_\alpha f|^q \omega^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int (M_\alpha f) \omega^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int |f|^p \omega^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$\square$

Capítulo V. Los Espacios de Lebesgue Variables

En este penúltimo capítulo de este trabajo introducimos el concepto de Espacio de Lebesgue con exponente variable. Mostramos algunas de sus propiedades, vemos que tienen asociada una norma la cual hace que tales espacios formen lo que se denomina un espacio de Banach. Para este estudio, nos basamos principalmente en [14] aunque también añadimos información complementaria de [26]. Comenzamos describiendo dichos espacios para finalizar con el análisis de la Integral Fraccionaria estudiando la continuidad en este ambiente. Veremos muchas analogías con los espacios de Lebesgue clásicos como así también las diferencias que hay entre ambos.

Los espacios de Lebesgue con exponente variables, los cuales llamaremos espacios de Lebesgue variables, son una generalización de los espacios de Lebesgue clásicos. Éstos aparecen por primera vez en 1931 en el trabajo de W. Orlicz [27]. No obtante, Orlicz abandona el estudio de dichos espacios para centrarse más en lo que hoy se conoce como Espacios de Orlicz. Recién en 1950, en [28], H. Nakano menciona a los espacios $L^{p(\cdot)}([0,1])$ como un ejemplo de la teoría de los espacios Modulares (también llamados espacios de Nakano). Una década después, en 1961, los espacios de Lebesgue variables son introducidos en la literatura rusa por I.V.Tsenov en [29]. Más adelante, en 1979, I.I.Sharapudinov estudia algunos aspectos topológicos de estos espacios en [30], en intervalos de la recta real. Además este último autor, siguió estudiando otros aspectos de los espacios de Lebesgue variables en consecutivos trabajos como [31], [32] y [33]. Autores rusos también aportaron al estudio de estos espacios, uno de los más influyentes fue V.V.Zhikov (ver por ejemplo [34]). Pero en 1991 aparece un trabajo fundamental publicado por los autores O. Kovácik y J. Rákosnik, [35], en el cual comienza una era moderna en el estudio de los espacios de Lebesgue variables. En este trabajo comienzan a explorar las propiedades básicas de los $L^p(\cdot)(\mathbb{R}^n)$. En esta parte del trabajo damos a conocer algunos detalles sobre las características de estos espacios. Nuestro interés principal es estudiar la continuidad de ciertos Operadores Integrales de Tipo Fraccionario. Al final de este capítulo mostramos resultados de la acotación, sobre los $L^{p(\cdot)}$, de la Integral Fraccionaria, que es el operador de interés particular en este trabajo.

1. Las funciones exponentes

Iniciamos el estudio de estos espacios definiendo lo que se conoce como funciones exponentes.

Definición 5.1. *Dado un conjunto Ω, sea $\mathcal{P}(\Omega)$ el conjunto de todas las funciones medibles Lebesgue $p(\cdot) : \Omega \longmapsto [1, \infty]$. Los elementos de $\mathcal{P}(\Omega)$ son llamados funciones exponentes o simplemente exponentes. Las denotaremos por $p(\cdot)$ (para distinguir de los exponentes constantes p).*

Definición 5.2. *Dada una función exponente $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, sea $E \subset \Omega$. Definimos,*

$$p_-(E) = essinf_{x\in E}\ p(x) \text{ y } p_+(E) = esssup_{x\in E}\ p(x).$$

donde essinf denota el ínfimo escencial y esssup denota el supremo escencial. En el caso que $E = \Omega$ simplemente denotamos por $p_- = p_-(\Omega)$ y $p_+ = p_+(\Omega)$.

Además vamos a partir el Ω en tres subconjuntos que utilizaremos a lo largo de este capítulo. Dada una función exponente $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ definimos los siguientes,

$$\begin{aligned} \Omega_\infty^{p(\cdot)} &= \{x \in \Omega : p(x) = \infty\} \\ \Omega_1^{p(\cdot)} &= \{x \in \Omega : p(x) = 1\} \\ \Omega_*^{p(\cdot)} &= \{x \in \Omega : 1 < p(x) < \infty\} \end{aligned}$$

Cuando no haya lugar a confusión, omitiremos el supraíndice $p(\cdot)$ en las definiciones anteriores.
Dada una función exponente $p(\cdot) \in \rho(\Omega)$ definimos la *función exponente conjugada $p'(\cdot)$ por la fórmula*

$$\tfrac{1}{p(x)} + \tfrac{1}{p'(x)} = 1, \qquad x \in \Omega.$$

Definición 5.3. *Dado Ω y una función $r(\cdot) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, diremos que $r(\cdot)$ es localmente log$-$Hölder continua, y la denotamos por $r(\cdot) \in LH_0(\Omega)$, si existe una constante C_0 tal que para todo $x, y \in \Omega$, $|x - y| < \frac{1}{2}$,*

$$|r(x) - r(y)| \;\leq\; \frac{C_0}{-log(|x-y|)}.$$

Además diremos que $r(\cdot)$ es log−Hölder continua en el infinito, y la denotamos por $r(\cdot) \in LH_\infty(\Omega)$, si existen constantes C_∞ y r_∞ tales que para todo $x \in \Omega$,

$$|r(x) - r_\infty| \;\leq\; \frac{C_\infty}{log(e+|x|)}.$$

Proposición 5.4. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*

1. *Si $r(\cdot) \in LH_0(\Omega)$, entonces $r(\cdot)$ es uniformemente continua y $r(\cdot) \in L^\infty(E)$ para todo subconjunto acotado $E \subset \Omega$.*

2. *Si $r(\cdot) \in LH_\infty(\Omega)$, entonces $r(\cdot) \in L^\infty(\Omega)$.*

3. *Si Ω es acotado y $r(\cdot) \in L^\infty(\Omega)$, entonces $r(\cdot) \in LH_\infty(\Omega)$, donde la constante C_∞ depende de $\|r(\cdot)\|_\infty$, el diámetro de Ω, y de la distancia de Ω al origen.*

4. *$r(\cdot) \in LH_\infty(\Omega)$ es equivalente a la existencia de una constante C tal que para todo $x, y \in \Omega$, $|y| \geq |x|$,*

$$|r(x) - r(y)| \;\leq\; \frac{C}{log(e+|x|)}.$$

5. *Si $p_+ < \infty$, entonces $p(\cdot) \in LH_0(\Omega)$ si y solo si $r(\cdot) = \frac{1}{p(\cdot)} \in LH_0(\Omega)$. Similarmente, $p(\cdot) \in LH_\infty(\Omega)$ si y solo si $r(\cdot) = \frac{1}{p(\cdot)} \in LH_\infty(\Omega)$.*

2. La Modular

Dada una función exponente $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, queremos intentar definir al espacio de Lebesgue variable $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ como el conjunto de las funciones medibles f tales que,

$$\int_\Omega |f(x)|^{p(x)} dx \;<\; \infty.$$

Pero hay ciertos problemas con este intento ya que por ejemplo el Ω_∞ puede tener medida positiva. En esta sección vamos a remediar esto para luego dar formalmente la definición de lo que serán los espacios de Lebesgue variables.

Definición 5.5. *Dado Ω, $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ y una función medible Lebesgue f,* *definimos la modular funcional (o simplemente la modular) asociada con $p(\cdot)$ por,*

$$\rho_{p(\cdot),\Omega}(f) \;=\; \int_{\Omega\setminus\Omega_\infty} |f(x)|^{p(x)}dx \;+\; \|f\|_{L^\infty(\Omega_\infty)}.$$

Si f no es acotada sobre el Ω_∞ o si $f(\cdot)^{p(\cdot)} \notin L^1(\Omega\setminus\Omega_\infty)$, definimos $\rho_{p(\cdot),\Omega}(f) = +\infty$. Cuando $|\Omega_\infty| = 0$, en particular cuando $p_+ < \infty$, dejamos $\|f\|_{L^\infty(\Omega_\infty)} = 0$. Cuando $|\Omega\setminus\Omega_\infty| = 0$ entonces $\rho_{p(\cdot),\Omega} = \|f\|_{L^\infty(\Omega_\infty)}$.
Siempre y cuando no se presente ambigüedad alguna escribiremos simplemente $\rho_{p(.)}(f)$ o $\rho(f)$. A continuación vamos a enunciar algunas propiedades de la modular.

Proposición 5.6. *Dado Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$,*

i. *Para toda f, $\rho(f) \geq 0$ y $\rho(|f|) = \rho(f)$.*

ii. *$\rho(f) = 0$ si y solo si $f(x) = 0$ p.c.t.$x \in \Omega$.*

iii. *Si $\rho(f) < \infty$, entonces $f(x) < \infty$ p.c.t.$x \in \Omega$.*

iv. *ρ es convexa : dados $\alpha,\ \beta \geq 0,\ \alpha + \beta = 1$,*

$$\rho(\alpha f + \beta g) \;\leq\; \alpha\rho(f) + \beta\rho(g).$$

v. *ρ preserva orden : si $|f(x)| \geq |g(x)|$ p.c.t.$x \in \Omega$, entonces $\rho(f) \geq \rho(g)$.*

vi. *ρ tiene la propiedad de continuidad : si para algún $\mu > 0$, $\rho(f/\mu) < \infty$, entonces la función $\lambda \longmapsto \rho(f/\lambda)$ es continua y decreciente sobre $[\mu, \infty)$. Más aún, $\rho(f/\lambda) \longrightarrow 0$ cuando $\lambda \longrightarrow \infty$.*

Consecuencia inmediata de la convexidad de ρ es que si $\alpha > 1$, entonces $\alpha\rho(f) \leq \rho(\alpha f)$, y si $0 < \alpha < 1$, entonces $\rho(\alpha f) \leq \alpha\rho(f)$.

3. El Espacio $L^{p(\cdot)}(\Omega)$

Definición 5.7. *Dado Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, definimos el $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ como el conjunto de las funciones medibles Lebesgue, f, tales que $\rho(f/\lambda) < \infty$ para algún $\lambda > 0$. Definimos también el $L^{p(\cdot)}_{loc}(\Omega)$ como el conjunto de funciones medibles Lebesgue, f, tales que $f \in L^{p(\cdot)}(K)$ para todo compacto $K \subset \Omega$.*

Ejemplo 5.8. *Sea* $\Omega = (1, \infty)$, $p(x) = x$ *y* $f(x) = 1$. *Entonces* $\rho(f) = \infty$, *pero para todo* $\lambda > 1$,

$$\rho(f/\lambda) \;=\; \int_1^\infty \lambda^{-x} dx \;=\; \frac{1}{\lambda \log(\lambda)} \;< \infty.$$

Similarmente, si $\Omega = (0, 1)$ *y* $p(x) = \frac{1}{x}$, *con* $f(x) = 1$ *tenemos que* $\rho(f) < \infty$, *pero* $\rho(f/\lambda) = \infty$ *para todo* $\lambda < 1$.

Proposición 5.9. *Dado* Ω *y* $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, *entonces la propiedad de que* $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *si solo si*

$$\rho(f) \;=\; \int_{\Omega \backslash \Omega_\infty} |f(x)|^{p(x)} dx \;+\; \|f\|_{L^\infty(\Omega_\infty)} \;<\; \infty,$$

es equivalente a asumir que $p_- = \infty$ *o* $p_+(\Omega \backslash \Omega_\infty) < \infty$.

En [14] se prueba que el espacio $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ es un espacio vectorial. También se le define una norma de tipo *Luxemburgo − Nakano* y es como sigue,

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \;=\; \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho_{p(\cdot),\Omega}(f/\lambda) \leq 1 \right\}.$$

Finalmente se prueban también en [14] los siguientes resultados que caracterizan al espacio $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ como un espacio de *Banach*.

Teorema 5.10. *Dado* Ω *y* $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *es un espacio completo.*

Teorema 5.11. *Dado un conjunto abierto* Ω *y* $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, *supongamos que* $p_+ < \infty$. *Entonces el conjunto de todas las funciones acotadas de soporte compacto, con sop*$(f) \subset \Omega$, *es denso en* $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Teorema 5.12. *Dado un conjunto abierto* Ω *y* $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, *entonces* $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *es separable si y solo si* $p_+ < \infty$.

A continuación vamos a enunciar algunos resultados extras que nos servirán para estudiar luego algunos operadores entre los espacios $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Veremos las condiciones que tales operadores deben satisfacer, como asi también las condiciones sobre las funciones exponentes, para garantizar la continuidad de tales operadores.

Teorema 5.13. *Dado* Ω *y* $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ *tal que* $|\Omega_\infty| = 0$, *entonces para todo* s, $\frac{1}{p_-} \leq s < \infty$,

$$\| |f|^s \|_{p(\cdot)} \;=\; \|f\|^s_{sp(\cdot)}$$

Notemos que hemos simplificado la notación al poner $\|f\|_{p(\cdot)}$ en lugar de $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$. Siempre y cuando no presente ambigüedad lo haremos así. A continuación enunciamos la *Desigualdad de Hölder* para los espacios de Lebesgue variables.

Teorema 5.14. *Dado Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, para toda $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ y $g \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$, $fg \in L^1(\Omega)$ y*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \ \leq \ K_{p(\cdot)}\|f\|_{p(\cdot)}\|g\|_{p'(\cdot)},$$

donde

$$K_{p(\cdot)} \ = \ \left(\frac{1}{p_-} - \frac{1}{p_+} + 1\right)\|\chi_{\Omega_*}\|_\infty + \|\chi_{\Omega\infty}\|_\infty + \|\chi_{\Omega_1}\|_\infty.$$

Definición 5.15. *Dado Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, y dada una función medible f, definimos*

$$\|f\|'_{p(\cdot)} \ = \ \sup \int_\Omega f(x)g(x)dx.$$

donde el supremo se toma sobre todas las funciones $g \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ con $\|g\|_{p'(\cdot)} \leq 1$.

En lo que sigue vamos a denotar, de manera temporal, por $M^{p(\cdot)}$ al conjunto de todas las funciones medibles f tales que $\|f\|'_{p(\cdot)} < \infty$.

Teorema 5.16. *Dado Ω, $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ y f medible entonces $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ si y solo si $f \in M^{p(\cdot)}$; más aún,*

$$k_{p(\cdot)}\|f\|_{p(\cdot)} \ \leq \ \|f\|'_{p(\cdot)} \ \leq \ K_{p(\cdot)}\|f\|_{p(\cdot)},$$

donde

$$K_{p(\cdot)} \ = \ \left(\frac{1}{p_-} - \frac{1}{p_+} + 1\right)\|\chi_{\Omega_*}\|_\infty + \|\chi_{\Omega\infty}\|_\infty + \|\chi_{\Omega_1}\|_\infty.$$

$$\frac{1}{k_{p(\cdot)}} \ = \ \|\chi_{\Omega_*}\|_\infty + \|\chi_{\Omega\infty}\|_\infty + \|\chi_{\Omega_1}\|_\infty.$$

Proposición 5.17. *Dado Ω y $p(\cdot)$, $q(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, supongamos que $|\Omega\backslash\Omega_\infty^{p(\cdot)}| < \infty$. Entonces $L^{q(\cdot)}(\Omega) \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$ si y solo si $p(x) \leq q(x)$ p.c.t.$x \in \Omega$. Más aún, en este caso tenemos que,*

$$\|f\|_{p(\cdot)} \ \leq \ \left(1 + |\Omega\backslash\Omega_\infty^{p(\cdot)}|\right)\|f\|_{q(\cdot)}.$$

4. Convergencia en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$

Ahora vamos a considerar tres tipos de convegencia en el espacio que estamos estudiando, $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Tales serán la convergencia en modular, la convergencia en norma y la convergencia en medida. Todo está probado en [14], libro que seguimos como referencia principal.

Definición 5.18. *Dado Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, y dada una sucesión de funciones $\{f_k\} \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$, decimos que $f_k \longrightarrow f$ en modular si para algún $\beta > 0$, $\rho(\beta(f-f_k)) \longrightarrow 0$ cuando $k \longrightarrow \infty$. Diremos que $f_k \longrightarrow f$ en norma si $\|f - f_k\|_{p(\cdot)} \longrightarrow 0$ cuando $k \longrightarrow \infty$.*

El siguiente resultado establece la relación entre la convergencia en modular y la convergencia en norma en el $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Teorema 5.19. *Dado Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, la sucesión $\{f_k\}$ converge a f en norma si y solo si para todo $\beta > 0$, $\rho(\beta(f-f_k)) \longrightarrow 0$ cuando $k \longrightarrow \infty$. En particular, convergencia en norma implica convergencia en modular. Más aún, convergencia en norma es equivalente a convergencia en modular si y solo si se tiene $p_- < \infty$ o $p_+(\Omega\backslash\Omega_\infty) < \infty$.*

En los espacios de Lebesgue clásicos teníamos los fuertes teoremas de convergencia, el llamado teorema de la convergencia monótona, el teorema de la convergencia dominada y el lema de Fatou. A continuación veremos la versión de tales resultados en los espacios de Lebesgue variables.

Teorema 5.20. *Dado Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, sea $\{f_k\}$ una sucesión de funciones no negativas tales que $f_k \nearrow f$ puntualmente para casi todo punto. Entonces se tiene que $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ y $\|f_k\|_{p(\cdot)} \longrightarrow \|f\|_{p(\cdot)}$ o $f \notin L^{p(\cdot)}(\Omega)$ y $\|f_k\|_{p(\cdot)} \longrightarrow \infty$.*

Teorema 5.21. *Dado Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, supongamos que la sucesión $\{f_k\} \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$ es tal que $f_k \longrightarrow f$ puntualmente en casi todo punto. Si*

$$\liminf_{k\to\infty} \|f_k\|_{p(\cdot)} \;<\; \infty,$$

entonces $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ y,

$$\|f\|_{p(\cdot)} \;\leq\; \liminf_{k\to\infty} \|f_k\|_{p(\cdot)}.$$

Teorema 5.22. *Dado Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, supongamos $p_+ < \infty$. Si la sucesión $\{f_k\}$ es tal que $f_k \longrightarrow f$ puntualmente en casi todo punto, y existe*

$g \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ tal que $|f_k(x)| \leq g(x)$ p.c.t.$x \in \Omega$, entonces $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ y $\|f - f_k\|_{p(\cdot)} \longrightarrow 0$ cuando $k \longrightarrow \infty$.
Además, si $p_+ < \infty$, entonces este resultado es siempre falso.

A continuación vamos a relacionar las convergencias en modular y en norma con la convergencia en medida. Recordemos que dado un dominio Ω y una sucesión de funciones $\{f_k\}$, decimos que $f_k \longrightarrow f$ en medida si para todo $\varepsilon > 0$ existe $K > 0$ tal que si $k \geq K$,

$$|\{x \in \Omega : |f(x) - f_k(x)| \geq \varepsilon\}| < \varepsilon.$$

Teorema 5.23. *Dado Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, si la sucesión $\{f_k\} \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$ converge a f en norma, entonces converge a f en medida.*

Proposición 5.24. *Dado Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, supongamos que la sucesión $\{f_k\} \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$ converge en norma a $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Entonces existe una subsucesión $\left\{f_{k_j}\right\}$ y $g \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ tal que la subsucesión converge puntualmente en casi todo punto a f, y para casi todo $x \in \Omega$, $|f_{k_j}(x)| \leq g(x)$.*

Teorema 5.25. *Dado Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, si $\{f_k\} \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$ es tal que $\|f_k\|_{p(\cdot)} \longrightarrow 0$ (o ∞), entonces la sucesión $\rho(f_k) \longrightarrow 0$ (o ∞). La recíproca vale si y solo si $p_+(\Omega \backslash \Omega_\infty) < \infty$.*

Finalmente concluimos esta sección con el resultado más fuerte de las relaciones entre la convergencia en norma, la convergencia en modular y la convergencia en medida.

Teorema 5.26. *Dado Ω y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, supongamos que $p_+ < \infty$. Entonces para $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ y una sucesión $\{f_k\} \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes :*

1. *$f_k \longrightarrow f$ en norma,*
2. *$f_k \longrightarrow f$ en modular,*
3. *$f_k \longrightarrow f$ en medida y para algún $\gamma > 0$, $\rho(\gamma f_k) \longrightarrow \rho(\gamma f)$.*

5. Acotación de la *Integral Fraccionaria* en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$

Finalmente hemos llegado a esta última sección de este capítulo, donde vamos a estudiar en profundidad la continuidad de la *Integral Fraccionaria* en los espacios de Lebesgue variables. Tal estudio nos servirá para el próximo

capítulo, estudiar con más detalle los operadores de tipo fraccionario definidos en el capítulo anterior pero ahora en los espacios $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. En este capítulo vamos a ver las técnicas que utilizan los autores D.Cruz Uribe y A.Fiorenza en [14] para probar que la *Integral Fraccionaria* es acotada del $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ en el $L^{q(\cdot)}(\Omega)$ para ciertas condiciones en las funciones exponentes $p(\cdot)$ y $q(\cdot)$. A continuación daremos un resultado general de extrapolación que nos va a servir para el estudio de la continuidad de la *Integral Fraccionaria*.
Denotaremos por $\mathfrak{F}$ la familia de pares de funciones medibles no negativas. Dados p, q, $1 \leq p, q < \infty$, si para algún $\omega \in A(p,q)$ escribimos,

$$\int_\Omega F(x)^p \omega(x) dx \ \leq \ C_0 \int_\Omega G(x)^p \omega(x) dx, \quad (F,G) \in \mathfrak{F},$$

queremos decir que esta desigualdad vale para todo par $(F,G) \in \mathfrak{F}$ tal que el miembro izquierdo sea finito y la constante puede depender de $n,\ p,\ \Omega$ *y de* $[\omega]_{A_q}$ pero no del ω.

Teorema 5.27. *Dado* Ω, *supongamos que para algún* $p_0,\ q_0,\ 1 \leq p_0 \leq q_0$, *la familia* $\mathfrak{F}$ *es tal que* $\forall \omega \in A_1$,

$$\left(\int_\Omega F(x)^{q_0} \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{q_0}} \ \leq \ C_0 \left(\int_\Omega G(x)^{p_0} \omega(x)^{\frac{p_0}{q_0}} dx \right)^{\frac{1}{p_0}}, \tag{32}$$

con $(F,G) \in \mathfrak{F}$.
Dado $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ *tal que* $p_0 \leq p_- \leq p_+ < \dfrac{p_0 q_0}{q_0 - p_0}$, *definimos* $q(\cdot)$ *por,*

$$\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{q(x)} = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0}. \tag{33}$$

Si el operador Maximal es acotado sobre el $L^{\left(\frac{q(\cdot)}{q_0}\right)'}(\Omega)$, *entonces*

$$\|F\|_{q(\cdot)} \ \leq \ C_{p(\cdot)} \|G\|_{p(\cdot)}. \tag{34}$$

Demostración. *Sea* $p(\cdot),\ q(\cdot)$ *como en la hipótesis. Sean* $\overline{p(x)} = \dfrac{p(x)}{p_0}$, $\overline{q(x)} = \dfrac{q(x)}{q_0}$. *Asumimos que la Maximal esta acotada sobre* $L^{\overline{q(x)}\,'}(\Omega)$. *Ahora desarrollaremos una técnica conocida como Algoritmo de Rubio Francia. Definimos iteradamente* $\mathcal{R}$ *sobre* $L^{\overline{q(x)}\,'}(\Omega)$ *por,*

$$\mathcal{R}h(x) \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k h(x)}{2^k \|M\|^k_{\overline{q(\cdot)}\,'}}, \tag{35}$$

entonces se puede comprobar que,

(i) $\forall x \in \Omega,\ |h(x)| \leq \mathcal{R}h(x)$.

(ii) $\mathcal{R}$ *es acotado sobre* $L^{\overline{q(x)}\,'}(\Omega)$ *y* $\|\mathcal{R}h\|_{\overline{q(x)}\,'} \leq 2\|h\|_{\overline{q(x)}\,'}$.

(iii) $\mathcal{R}h \in A_1$ *y* $[\mathcal{R}h]_{A_1} \leq 2\|M\|_{\overline{q(x)}\,'}$.

Ahora fijamos un par $(F,G) \in \mathfrak{F}$ *tal que* $F \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$. *Por los Teoremas* 5.13 *y* 5.16 *tenemos que,*

$$\|F\|_{q(\cdot)}^{q_0} \;=\; \|F^{q_0}\|_{\overline{q(\cdot)}} \;\leq\; k_{p(\cdot)}^{-1} \sup \int_\Omega F(x)^{q_0} h(x)dx, \tag{36}$$

donde el supremo se toma sobre todas las funciones h tales que $\|h\|_{\overline{q(\cdot)}\,'} = 1$.
Ahora mostraremos que, fijada cualquier función h,

$$\int_\Omega F(x)^{q_0} h(x)dx \;\leq\; C\|G\|_{p(\cdot)}^{q_0}, \tag{37}$$

donde C *no depende de* h. *Ahora, por (i), tenemos que*

$$\int_\Omega F(x)^{q_0} h(x)dx \;\leq\; \int_\Omega F(x)^{q_0} \mathcal{R}h(x)dx. \tag{38}$$

Por la desigualdad de Hölder para los espacios de Lebesgue variables, Teorema 5.14, *por (ii) y por el Teorema* 5.13, *tenemos que*

$$\int_\Omega F(x)^{q_0}\mathcal{R}h(x)dx \leq K_{p(\cdot)}\|F^{q_0}\|_{\overline{q(\cdot)}}\|\mathcal{R}h\|_{\overline{q(\cdot)}\,'} \leq 2K_{p(\cdot)}\|F\|_{q(\cdot)}^{q_0}\|h\|_{\overline{q(\cdot)}\,'} < \infty.$$

Con esto último *mostramos que el lado derecho de* (38) *es finito. Ahora por (iii) tenemos garantizado que vale* (32) $(\omega = \mathcal{R}h)$. *M*á*s a*ú*n,* C_0 *sólo depende de* $[\mathcal{R}h]_{A_1}$. *Luego, entonces por* (32), *Teorema* 5.14 *y Proposición* 5.13 *podemos acotar el lado derecho de* (38) *como sigue,*

$$\begin{aligned}\int_\Omega F(x)^{q_0}\mathcal{R}h(x)dx \;&\leq\; C_0^{q_0}\left(\int_\Omega G(x)^{p_0}\mathcal{R}h(x)^{p_0/q_0}dx\right)^{\frac{q_0}{p_0}} \\ \leq\; C_0^{q_0}\|G^{p_0}\|_{\overline{p(\cdot)}}^{q_0/p_0}\|\mathcal{R}h^{p_0/q_0}\|_{\overline{p(\cdot)}\,'}^{q_0/p_0} \;&=\; C_0^{q_0}\|G\|_{p(\cdot)}^{q_0}\|\mathcal{R}h^{p_0/q_0}\|_{\overline{p(\cdot)}\,'}^{q_0/p_0}.\end{aligned}$$

Para completar la prueba solo resta ver que $\|\mathcal{R}h^{p_0/q_0}\|_{\overline{p(\cdot)}\,'}^{q_0/p_0}$ *es acotado por una constante independiente de h. Por la definición de* $q(\cdot)$,

$$\overline{p(x)}\,' \;=\; \frac{p(x)}{p(x)-p_0} \;=\; \frac{q_0}{p_0}\frac{q(x)}{q(x)-q_0} \;=\; \frac{q_0}{p_0}\overline{q(x)}\,'.$$

Por lo tanto, por el Teorema 5.13 *y por* (*ii*),

$$\|\mathcal{R}h^{p_0/q_0}\|_{\overline{p(\cdot)}'}^{q_0/p_0} \;=\; \|\mathcal{R}h\|_{\overline{q(\cdot)}'} \;\leq\; 2\|h\|_{\overline{q(\cdot)}'} \;=\; 2.$$

como queríamos ver.

□

Un corolario importante del Teorema 5.27 es el que enunciaremos a continuación, que nos ayudará con la desigualdad de tipo débil de la *Integral Fraccionaria* que veremos luego.

Corolario 5.28. *Dado* Ω, *supongamos que para algunos* p_0, q_0, $1 \leq p_0 \leq q_0$, *la familia* $\mathfrak{F}$ *es tal que para todo* $\omega \in A_1$,

$$\omega\left(\{x \in \Omega : F(x) > t\}\right) \leq C_0 \left(\frac{1}{t^{p_0}} \int_\Omega G(x)^{p_0} \omega(x)^{p_0/q_0} dx\right)^{q_0/p_0}, \qquad (39)$$

con $(F, G) \in \mathfrak{F}$.
Dado $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ *tal que* $p_0 \leq p_- \leq p_+ < \frac{p_0 q_0}{q_0 - p_0}$, *definimos* $q(\cdot)$ *como en* (33). *Si el operador Maximal es acotado sobre* $L^{(q(\cdot)/q_0)'}(\Omega)$, *entonces para todo* $t > 0$,

$$\|t\chi_{x\in\Omega:F(x)>t}\|_{q(\cdot)} \;\leq\; C_{p(\cdot)}\|G\|_{p(\cdot)}, \qquad (40)$$

con $(F, G) \in \mathfrak{F}$.

Demostración. *Definimos una nueva familia* $\overline{\mathfrak{F}}$ *que consta de los pares,*

$$(F_t, G) \;=\; \left(t\chi_{\{x\in\Omega:F(x)>t\}}, G\right), \quad (F, G) \in \mathfrak{F}, \; t > 0.$$

Entonces podemos reafirmar (39) *como sigue, Para todo* $\omega \in A_1$,

$$\|F_t\|_{L^{q_0}(\omega)} \;=\; t\omega\left(x \in \omega : F(x) > t\right)^{\frac{1}{q_0}} \;\leq\; C_0^{\frac{1}{q_0}}\|G\|_{L^{p_0}(\omega^{p_0/q_0})}, \quad (F_t, G) \in \overline{\mathfrak{F}}.$$

Por lo tanto podemos aplicar el Teorema 5.27 *a la familia* $\overline{\mathfrak{F}}$ *y concluir que* (34) *vale para los pares* $(F_t, G) \in \overline{\mathfrak{F}}$, *o sea* (40).

□

Llegamos al final de este capítulo donde estamos en condiciones de estudiar la acotación $L^{p(\cdot)}(\Omega) - L^{q(\cdot)}(\Omega)$ de la *IntegralFraccionaria.* La misma la seguiremos de [14] donde los autores, D.Cruz Uribe y A.Fiorenza, utilizan técnicas de extrapolación. Una prueba alternativa se da en [12] donde primero se obtiene la acotación $L^{p(\cdot)}(\Omega) - L^{q(\cdot)}(\Omega)$ de la *Maximal Fraccionaria*, para ciertas condiciones sobre las funciones exponentes. Luego, usando un resultado de comparación puntual entre la *Integral Fraccionaria* y la *Maximal Fraccionaria*, dado en [11], los autores obtienen la acotación $L^{p(\cdot)}(\Omega) - L^{q(\cdot)}(\Omega)$ para la *Integral Fraccionaria* bajo las mismas condiciones en las funciones exponentes que las pedidas para la *Maximal Fraccionaria*.

Teorema 5.29. *Fijado* α, $0 < \alpha < n$. *Dado* $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *tal que* $1 < p_- \leq p_+ < \frac{n}{\alpha}$, *definimos* $q(\cdot)$ *por,*

$$\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{q(x)} = \frac{\alpha}{n}.$$

Si existe $q_0 > \frac{n}{n-\alpha}$ *tal que* M *es acotada sobre* $L^{(q(\cdot)/q_0)'}(\mathbb{R}^n)$, *entonces,*

$$\|I_\alpha f\|_{q(\cdot)} \ \leq \ C\|f\|_{p(\cdot)}. \tag{41}$$

Si $p_- = 1$ *y si* M *es acotada sobre el* $L^{(q(\cdot)/q_0)'}(\mathbb{R}^n)$ *donde* $q_0 = \frac{n}{n-\alpha}$, *entonces para todo* $t > 0$,

$$\|t\chi_{\{x\in\mathbb{R}^n:|I_\alpha f(x)|>t\}}\|_{q(\cdot)} \ \leq \ C\|f\|_{p(\cdot)}. \tag{42}$$

Demostración. *Fijamos* α, $p(\cdot)$ *y* $q(\cdot)$ *como en la hipótesis. Primero probaremos la desigualdad de tipo fuerte* (41). *Como* $q_0 > \dfrac{n}{n-\alpha}$, *si definimos* p_0 *por* $\frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0} = \frac{\alpha}{n}$, *entonces* $p_0 > 1$. *Por lo tanto, por la Proposición* 1.19 (*a*), *si* $\omega \in A_1 \subset A_{1+\frac{q_0}{p_0'}}$, *entonces* $\omega^{\frac{1}{q_0}} \in A_1$ *pues por la desigualdad de Hölder,*

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^{\frac{1}{q_0}}(x)dx \leq \frac{1}{|Q|}\left[\left(\int_Q \omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q_0}} |Q|^{\frac{1}{q_0'}}\right] = \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q_0}}.$$

Tomando supremo sobre todos los cubos Q *que contienen a* x *y del hecho que* $\omega \in A_1$,

$$M(\omega^{\frac{1}{q_0}}) \leq (M(\omega))^{\frac{1}{q_0}} \leq C\omega^{\frac{1}{q_0}}.$$

Esto último muestra que $\omega^{\frac{1}{q_0}} \in A_1 \subset A_{1+\frac{q_0}{p_0'}}$ (*Proposición* 1.19 (*a*)). *Y entonces por el Teorema* 3.5 *se tiene que*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |I_\alpha f(x)|^{q_0}\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q_0}} \ \leq \ C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p_0}\omega(x)^{p_0/q_0}dx\right)^{\frac{1}{p_0}}$$

vale para toda función f *acotada y de soporte compacto.* (*Notemos que el lado derecho de la desigualdad anterior es finito puesto que* $\omega \in A_1$ *es localmente*

integrable. Luego el lado derecho también resulta finito).
Definimos la familia $\mathfrak{F}$ *de pares* $(|I_\alpha f|, |f|)$ *con* f *función acotada de soporte compacto. Entonces por el Teorema* 5.27,

$$\|I_\alpha f\|_{q(\cdot)} \ \leq \ C\|f\|_{p(\cdot)}, \tag{43}$$

para todas las funciones acotadas de soporte compacto para las cuales el lado izquierdo de (43) *sea finito. Este es siempre el caso. Ahora fijamos una función* f *y sea* B *una bola de radio al menos* 1 *centrada en el orígen tal que sop*$(f) \subset B$*. Por la Proposición* 5.17 *y cualquiera de los Teoremas del capítulo* II,

$$\|I_\alpha f\|_{L^{q(\cdot)}(2B)} \ \leq \ (1+|2B|)\|I_\alpha f\|_{L^{q_+}(2B)} \ \leq \ C\|f\|_{L^{p_+}(B)} \ < \ \infty.$$

Para estimar la norma de $I_\alpha f$ *sobre* $\mathbb{R}^n \backslash 2B$, *notemos primero que si* $x \in \mathbb{R}^n \backslash 2B$ *e* $y \in B$, $|x-y| \geq |x|-|y| \geq |x|/2$. *Por lo tanto, para todos esos* x,

$$|I_\alpha f(x)| \leq \int_B \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \leq C|x|^{\alpha-n},$$

y luego,

$$\|I_\alpha f\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n \backslash 2B)} \leq C\||\cdot|^{\alpha-n}\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n \backslash 2B)}.$$

Ya que $p_- > 1$, $q_- > \frac{n}{n-\alpha}$, *y luego,*

$$\int_{\mathbb{R}^n \backslash 2B} |x|^{(\alpha-n)q(x)} dx \leq \int_{\mathbb{R}^n \backslash 2B} |x|^{(\alpha-n)q_-} dx < \infty,$$

y luego por la Proposición 5.9 *tenemos que* $\||\cdot|^{\alpha-n}\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n \backslash 2B)} < \infty$.
Así (43) *vale para toda función acotada de soporte compacto. Ahora dada una* $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, *ya que* $p_+ < \frac{n}{\alpha} < \infty$, *el Teorema* 5.11 *nos garantiza la existencia de una sucesión* $\{f_k\}$ *de funciones acotadas de soporte compacto que convergen en norma a* f *y tales que* $|f_k| \leq |f|$; *por Proposición* 5.24 *podemos pasar a una subsucesión que converge puntualmente en casi todo punto. Luego por el Lema de Fatou en los espacios de Lebesgue clásicos se tiene,*

$$|I_\alpha f(x)| \leq I_\alpha(|f|)(x) \leq \liminf_{k\to\infty} I_\alpha(|f_k|)(x).$$

Por lo tanto, por el Teorema 5.21,

$$\|I_\alpha f\|_{q(\cdot)} \leq \liminf_{k\to\infty} \|I_\alpha(|f_k|)\|_{q(\cdot)} \leq C \liminf_{k\to\infty} \|f_k\|_{p(\cdot)} \leq \|f\|_{p(\cdot)}.$$

Y esto completa la prueba de (41).
Para probar la desigualdad de tipo débil (42) *sale siguiendo la misma idea excepto que como* $q_0 = \frac{n}{n-\alpha}$, $p_0 = 1$. *Entonces usamos el Colorario* 5.28 *y listo.*

$\square$

6. La *Maximal Sharp*

Como usualmente, dada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y una bola B, definimos $f_B = \frac{1}{|B|}\int_B f$ y la función *Maximal Sharp* $M^\# f$ *por*

$$M^\# f(x) = \sup_B \frac{1}{|B|}\int_B |f - f_B|,$$

donde el supremo se toma sobre todas las bolas que contienen a x. Es bien sabido que para $1 < s < \infty$ vale la estimación

$$c\|M^\# f\|_s \le \|f\|_s \le C\|M^\# f\|_s.$$

En [36] L.Diening y M.Ruzicka prueban que el mismo resultado vale para exponente variable. Obtienen el siguiente resultado,

Teorema 5.30. *Sean* $p,\ p'$ *in* $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n),\ 1 < p_- \le p_+ < \infty$. *Entonces existe* $C > 0$ *tal que para toda* f *in* $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$,

$$\|f\|_{p(\cdot)} \ \le \ C\|M^\# f\|_{p(\cdot)}.$$

Capítulo VI. Resultados principales

Hemos llegado finalmente al último capítulo de este trabajo. Ahora nos dedicaremos exclusivamente al estudio de la acotación sobre los espacios de Lebesgue variables de los *Operadores Interales de Tipo Fraccionario*, como en (1) pero en este caso con núcleos de la forma,

$$K(x,y) \;=\; \frac{1}{|x-A_1y|^{\alpha_1}...|x-A_my|^{\alpha_m}} \tag{44}$$

con $\alpha_1+...+\alpha_m=\alpha$, donde $0<\alpha<n$ y algunas condiciones en las matrices A_i. En una primera parte, mostraremos los resultados dados en [23] donde los autores, el Dr. P.Rocha y la Dra. M.Urciuolo, obtienen estimaciones de tipo fuerte y débil con ciertas hipótesis sobre las matrices A_i. En la segunda y última parte, daremos un resultado análogo, pero ahora para el caso en que $A_i=A^i$ donde A es cierta matriz tal que $A^m=I$. Pero en este último caso usaremos técnicas de extrapolación, parecidas a las usadas en el Teorema 5.27, concluyendo con la acotación $L^{p(\cdot)}-L^{q(\cdot)}$ del operador.

1. Resultados recientes

Como dijimos arriba, en esta primera sección mostraremos los resultados que se obtuvieron en [23].

Teorema 6.1 *Sea $0\leq\alpha<n$, y sea T_α el operador integral con núcleo dado por* (44), *con A_i matrices ortogonales y tales que A_i-A_j es invertible para $i\neq j$, $1\leq i,j\leq m$. Sea $h:\mathbb{R}\longrightarrow[1,\infty)$ tal que $1<h_-\leq h_+<\frac{n}{\alpha}$, $h\in LH_0(\mathbb{R})\cap LH_\infty(\mathbb{R})$. Sea $p:\mathbb{R}^n\longrightarrow[1,\infty)$ dada por $p(x)=h(|x|)$. Entonces T_α es acotado desde el $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ en el $L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ para $\frac{1}{p(x)}-\frac{1}{q(x)}=\frac{\alpha}{n}$.*

Esbozo de la demostración. *En* [22] *los autores obtienen la siguiente estimación*, (p,3, (2,2)),

$$M_\delta^\#(T_\alpha f)(x) \;\leq\; C\sum_{i=1}^{m} M_\alpha f(A_i^{-1}x),$$

donde $M_\delta^\# f \;=\; (M^\#(|f|)^\delta)^{\frac{1}{\delta}}$. *De esta estimación y del Teorema* 5,30 *se sigue*

$$\|T_\alpha f\|_{q(\cdot)} = \||T_\alpha f|^\delta\|_{\frac{q(\cdot)}{\delta}}^{\frac{1}{\delta}} \leq c\|M^\#\left(|T_\alpha f|^\delta\right)\|_{\frac{q(\cdot)}{\delta}}^{\frac{1}{\delta}} \leq c\|M_\delta^\#\left(T_\alpha f\right)\|_{q(\cdot)}$$

$$\leq c\sum_{i=1}^{m}\|M_\alpha f(A_i^{-1}\cdot)\|_{q(\cdot)} = c\sum_{i=1}^{m}\|M_\alpha f\|_{q(A_i\cdot)},$$

Como $q(\cdot)$ *es una función radial y las matrices* A_i *son ortogonales tenemos que la* última *expresión es igual a*

$$= c\sum_{i=1}^{m}\|M_\alpha f\|_{q(\cdot)} \leq c\|f\|_{p(\cdot)}.$$

Donde la última *desigualdad se sigue de un resultado de acotación* $p(\cdot) - q(\cdot)$ *de la Maximal fraccionaria estudiado en* [12].

□

También obtienen una estimación de tipo débil para tal operador como sigue.

Teorema 6.2. *Sea* $0 \leq \alpha < n,\ h : \mathbb{R} \longrightarrow [1,\infty)$ *una función tal que* $h \in LH_0(\mathbb{R}) \cap LH_\infty(\mathbb{R}),\ h(0) = 1$ *y* $h_+ < \infty$. *Sea* $p : \mathbb{R}^n \longrightarrow [1,\infty)$ *dada por* $p(x) = h(|x|)$. *Sea* T_α *el operador integral con* núcleo *dado por* (44), *con* A_i *matrices ortogonales tales que* $A_i - A_j$ *son invertibles para* $i \neq j$, $1 \leq i,j \leq m$. *Si* $\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{q(x)} = \frac{\alpha}{n}$ *entonces existe* C *tal que,*

$$\sup_{t>0}\ t\ \|\chi_{T_\alpha f(x)>t}\|_{q(\cdot)} \;\leq\; C\|f\|_{p(\cdot)}.$$

Estos dos resultados son los principales de este trabajo.

2. Nuestros resultados

Ahora daremos otra demostración de la acotación del T_α definido como antes con núcleo de la forma (44) pero ahora las matrices A_i serán de la forma A^i tal que $A^m = I$ (donde I denota la matriz identidad). Es decir, el operador que nos interesa ahora, tiene la siguiente forma,

$$T_\alpha f(x) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-Ay|^{\alpha_1}|x-A^2y|^{\alpha_2}...|x-A^my|^{\alpha_m}} f(y)dy, \qquad (45)$$

donde $m \in \mathbb{N}$, A matriz nxn tal que $A^m = I$. Además le vamos a pedir que $A_i - A_j$ sea invertible para $i \neq j$, $0 \leq \alpha < n$, y tal que $\alpha_1 + ... + \alpha_m = n - \alpha$. Usaremos técnicas de extrapolación como en el Teorema 5.27, donde obtendremos la acotación $L^{p(\cdot)} - L^{q(\cdot)}$ bajo ciertas condiciones que enunciamos a continuación.

Teorema 6.3. *Sea $0 \leq \alpha < n$ y T_α definido como en (45). Sea $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ tal que $1 < p_- \leq p_+ < \frac{n}{\alpha}$ y $q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ definido por $\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{q(x)} = \frac{\alpha}{n}$. Si el operador Maximal esta acotado sobre el $L^{\left(\frac{n-\alpha p_-}{np_-}q(\cdot)\right)'}(\mathbb{R}^n)$ entonces T_α es acotado del $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ en el $L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. *Sea $q_0 = \frac{np_-}{n-\alpha p_-}$. Sea $\overline{q(x)} = \frac{q(x)}{q_0}$. Definimos,*

$$\mathcal{R}h(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k h(Ax)}{2^k \|M\|^k} + ... + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k h(A^m x)}{2^k \|M\|^k}. \qquad (46)$$

Podemos observar lo siguiente,

(i) $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ |h(x)| \leq \mathcal{R}h(x)$.

(ii) *$\mathcal{R}$ es acotado sobre el $L^{\overline{q(x)}\,'}(\mathbb{R}^n)$ y $\|\mathcal{R}h\|_{\overline{q(\cdot)}\,'} \leq 2m\|h\|_{\overline{q(\cdot)}\,'}$.*

(iii) *$\mathcal{R}h \in A_1$ y $[\mathcal{R}h]_{A_1} \leq 2m\|M\|$.*

(iv) $\mathcal{R}h(A^i x) \leq \mathcal{R}h(x),\ x \in \mathbb{R}^n$.

(i) y (iv) son evidentes, (ii) se obtiene gracias a la subaditividad de la norma. Probemos (iii),

$$\begin{aligned} M\mathcal{R}h(x) \leq\ & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^{k+1} h(Ax)}{2^k \|M\|^k} + ... + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^{k+1} h(A^m x)}{2^k \|M\|^k} \\ \leq (2m\|M\|)\ & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^{k+1} h(Ax)}{2^{k+1} \|M\|^{k+1}} + ... + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^{k+1} h(A^m x)}{2^{k+1} \|M\|^{k+1}} \\ & \leq (2m\|M\|)\ \mathcal{R}h(x). \end{aligned}$$

Luego esto último *implica que* $[\mathcal{R}h]_{A_1} \leq 2m\|M\|$. *Notemos que* (iv) *nos dice que* $\mathcal{R}h$ *verifica la hipótesis* (P) *fundamental para los resultados obtenidos en* [22] *que mostramos en la sección* 2 *del capítulo IV. En tal trabajo, de hecho, se obtiene una estimación ponderada* (p_-, q_0) *con pesos* $\omega \in A(p,q)$ *tales que satisfacen la hipótesis* (P).
Ahora tomamos f *acotada de soporte compacto. Primero chequeamos que* $\|T_\alpha f\|_{q(\cdot)} < \infty$. *Por Proposición* 5.19, *esto es equivalente a ver que* $\rho_{q(\cdot)}(T_\alpha f) < \infty$.

$$|T_\alpha f(x)|^{q(x)} \;\leq\; |T_\alpha f(x)|^{q_+}\chi_{\{x:T_\alpha f(x)>1\}} \;+\; |T_\alpha f(x)|^{q_-}\chi_{\{x:T_\alpha f(x)\leq 1\}},$$

Pero como f *es acotada de soporte compacto entonces* $T_\alpha f \in L^s(\mathbb{R}^n)$ *para* $s > \frac{n}{n-\alpha}$. *Luego entonces se concluye que* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |T_\alpha f(x)|^{q(x)}dx < \infty$.
Ahora seguimos como en el Teorema 5.27,

$$\|T_\alpha f\|_{q(\cdot)}^{q_0} \;=\; \|(T_\alpha f)^{q_0}\|_{\overline{q(\cdot)}} \;=\; C \sup_{\|h\|_{\overline{q(\cdot)}\,'}=1} \int_{\mathbb{R}^n} (T_\alpha f)^{q_0}(x)h(x)dx$$

$$\leq C \sup_{\|h\|_{\overline{q(\cdot)}\,'}=1} \int_{\mathbb{R}^n} (T_\alpha f)^{q_0}(x)\mathcal{R}h(x)dx \leq C \sup_{\|h\|_{\overline{q(\cdot)}\,'}=1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f^{p_-}|\mathcal{R}h(x)^{\frac{p_-}{q_0}}dx\right)^{\frac{q_0}{p_-}},$$

Ahora aplicando la desigualdad de Hölder, Teorema 5.14, *y el Teorema* 5.13,

$$\leq C\|f^{p_-}\|_{\overline{p(\cdot)}}^{\frac{q_0}{p_-}} \sup_{\|h\|_{\overline{q(\cdot)}\,'}=1} \|\mathcal{R}h^{\frac{p_-}{q_0}}\|_{\overline{p(\cdot)}\,'}^{\frac{q_0}{p_-}} \leq C\|f\|_{p(\cdot)}^{q_0} \sup_{\|h\|_{\overline{q(\cdot)}\,'}=1} \|\mathcal{R}h^{\frac{p_-}{q_0}}\|_{\overline{p(\cdot)}\,'}^{\frac{q_0}{p_-}}. \quad (47)$$

donde $\overline{p(\cdot)} = \frac{p(\cdot)}{p_-}$. *Ahora por la definición del* $q(\cdot)$, *se verifica que,*

$$\overline{p(x)}\,' \;=\; \frac{q_0}{p_-}\;\overline{q(x)}\,',$$

de esta forma, el último *miembro de* (47) *se acota por,*

$$\leq\; C\|f\|_{p(\cdot)}^{q_0} \sup_{\|h\|_{\overline{q(\cdot)}\,'}=1} \|\mathcal{R}h\|_{\overline{q(\cdot)}\,'} \;\leq\; 2mC\|f\|_{p(\cdot)}^{q_0}.$$

Lo cual completa la prueba puesto que por el Teorema 5.11 *las funciones acotadas de soporte compacto son densas en el* $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ *entonces para cualquier* f *sigue un argumento como en el Teorema* 5.29.

$\square$

También, siguiendo la demostración del Corolario 5.28, concluimos un resultado de la acotación de tipo débil del operador T_α que enunciamos a continuación.

Teorema 6.4. *Sea* $0 \leq \alpha < n$, *y* T_α *el operador integral definido como en* (45). *Sea* $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *tal que* $1 \leq p_- \leq p_+ < \dfrac{n}{\alpha}$ *y* $q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *definido por* $\dfrac{1}{p(x)} - \dfrac{1}{q(x)} = \dfrac{\alpha}{n}$. *Si el operador Maximal* M *es acotado sobre el* $L^{\left(\frac{n-\alpha p_-}{np_-}q(\cdot)\right)'}(\mathbb{R}^n)$, *entonces existe* $C > 0$ *tal que,*

$$\|t\chi_{\{x\in\mathbb{R}^n: T_\alpha f(x)>t\}}\|_{q(\cdot)} \;\leq\; C\|f\|_{p(\cdot)}.$$

Y con estos resultados hemos llegado al final de este trabajo. Hemos obtenido la acotación de tipo fuerte y de tipo débil del operador T_α definido en (45) con técnicas de extrapolación.

Bibliografía

[1] N.Fava y F.Zo, *Medida e Integral de Lebesgue*, Instituto Argentino de Matemática, Conicet. Red Olimpica.

[2] J.Duoandikoetxea Zuazo, *Análisis de Fourier*, Universidad Autónoma de Madrid, 1991.

[3] L.Grafakos, *Classical Fourier Analysis*, Second Edition, Springer. University of Missouri Columbia.

[4] L.Grafakos, *Modern Fourier Analysis*, Second Edition, Springer. University of Missouri Columbia.

[5] E.M.Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press.

[6] M.Riesz, *L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy*, Acta Mathematica, 1948.

[7] L.I.Hedberg, *On certain convolution inequalities*,Proc. American Mathematical Society, 1972, 505-510.

[8] E.Porten, *Desigualdades para la Integral Fraccionaria y Teoremas de inmersión para Espacios Potenciales de Funciones Radiales. Tesis de Licenciatura*, Junio de 2014.

[9] J.García Cuerva y J.M.Martell *Two-weight norm inequalities for maximal operators and fractional integrals on non-homogeneous spaces.*

[10] B.Muckenhoupt y R.L.Wheeden *Wheighted norm inequalities for fractional integrals*, American Mathematical Society. Vol. 192, 1974.

[11] G.V.Welland *Wheighted norm inequalities for fractional integrals*, Proc. American Mathematical Society. 51 (1), 1975, 143-148.

[12] C.Capone, D.Cruz Uribe, SFO y A.Fiorenza, *The Fractional Maximal Operator on Variable L^p Spaces*, Mathematics Subjets Classification. 42B25,42B35. 2004.

[13] C.Capone, D.V.Cruz Uribe y A.Fiorenza, *The Fractional Maximal Operator and Fractional Integral on Variable L^p Spaces*, Revista Matemática Iberoamericana 23(3), 2007, 743-770.

[14] D.V.Cruz Uribe y A.Fiorenza, *Variable Lebesgue Spaces, Foundations and Harmonic Analysis*, University of Maryland, Birkhauser.

[15] L.Diening, *Maximal Functions on Generalized $L^{p(\cdot)}$ Spaces*, Math. Inequal. Appl., 7(2), 2004, 245-253.

[16] L.Diening y M.Ruzicka, *Calderon-Zygmund Operators on Generalized Lebesgue Spaces $L^{p(\cdot)}$ and Problems Related to Fluid Dynamics*, J.Reine Angew. Math. 563, 2003, 197-220.

[17] F.Ricci y P.Sjögren, *Two parameter maximal functions in the Heissemberg group*, Math. Z., Vol. 199, 4, 1988.

[18] T.Godoy y M.Urciuolo, *About the L^p boundedness of some integral operators*, Revista de la UMA 38, 1993.

[19] T.Godoy y M.Urciuolo, *About the L^p boundedness of integral operators with kernels of the form $k_1(x-y)k_2(x+y)$*, Math Scand. 78, 1996, 84-92.

[20] T.Godoy y M.Urciuolo, *On Certain integral operators of fractional type*, Acta Math. Hungar. 82 (1-2), 1999, 99-105.

[21] M.S.Riveros y M.Urciuolo, *Weighted inequalities for integral operators with some homogeneous kernels*, Czechoslovak Mathematical Journal, 55 (130) (2005), 423-432.

[22] M.S.Riveros y M.Urciuolo, *Weighted inequalities for fractional type operators with some homogeneous kernels*, Acta Mathematica Sinica 29, Nº 3, 2013, 449-460.

[23] P.Rocha y M.Urciuolo, *About integral operators of fractional type on variable L^p Spaces*, Georgian Math. J.20, 2013, 805-816.

[24] M.Deguzman *A covering lemma with applications to differentiability of measures and singular integral operators*, Studia Math.34(1970), 299-317.

[25] B.Muckenhoupt . *Muckenhoupt, Weighted norm inequalities for the Hardy maximal functions* , Trans. Amer. Math. Soc.165(1972), 207-226. MR 45.

[26] H.Rafeiro y E.Rojas, *Espacios de Lebesgue con exponente variable. Un espacio de Banach de funciones medibles.*, XXVII Escuela venezolana de Matemáticas, Emalca-Venezuela 2014.

[27] W.Orlicz, *Über konjugierte exponentenfolgen*, Studia Math., 3, (1931), 200-212.

[28] H.Nakano, *Modulared Semi-Ordered Linear Spaces*, Maruzen Co. Ltd., Tokio, 1950.

[29] I.V.Tsenov, *Generalization of the problem of best approximation of a function in the spaces* L^s, Uch. Zap. Dagestan. Gos. Unive., 7, (1961), 25-37.

[30] I.I.Sharapudinov, *The topology of the spaces* $\mathfrak{L}^{p(t)}([0,1])$, Math. Zametki, 26(4) (1979), 613-655.

[31] I.I.Sharapudinov, *Approximation of function in the metric space* $\mathfrak{L}^{p(\cdot)}([a,b])$ *and quadrature formulas*, En: Çonstructive function theory '81 (Varma 1981)", Publ. House Bulgar. Acad. Sci. Sofia, (1983), 189-193.

[32] I.I.Sharapudinov, *The basic property of the Haar system in the space* $\mathfrak{L}^{p(t)}([0,1])$ *and the principle of localization in the mean*, Math. Sb., (N.S.), 130 (**172**)(**2**) (1986), 275-283.

[33] I.I.Sharapudinov, *On the uniform boundedness in* $L^p(p=p(x))$ *of some families of convolution operators*, Math. Zametki 59(**2**)(**302**) (1996), 291-302.

[34] V.V.Zhicov, *On some variational problems*, Russian J. Math. Phys. 5(**1**) (1997), 105-116.

[35] O.Kovácik, y J.Rákosnik *On spaces* $L^{p(x)}$ *and* $W^{k,p(x)}$, Czech. Math. J., 41(**116**) (1991), 592-618.

[36] L.Diening, y M.Ruzicka *Calderon* $-$ *Zygmund operators on generalized Lebesgue spaces* $L^{p(\cdot)}$ and problems related to fluid dynamics, J. Reine Angew. Math. 563 (2003), 197-220.