Facultad de Matemática, Astronomía y Física - Universidad Nacional de Córdoba

ACOTACIÓN DE CONMUTADORES DE OPERADORES INTEGRALES, DADOS POR UN NÚCLEO A VALORES VECTORIALES QUE SATISFACE UNA CONDICIÓN DE TIPO HÖRMANDER Y APLICACIONES

TRABAJO ESPECIAL DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

IBAÑEZ FIRNKORN, GONZALO HUGO

Dirigido por:

Dra. RIVEROS, MARÍA SILVINA

CÓRDOBA - ARGENTINA

-2015-

RESUMEN:

Se sabe que el todo conmutador de una integral singular esta acotado en normas $L^p(w)$, con w un cierto peso, por un operador maximal apropiado. Para conmutadores de orden k de integrales singulares de Calderón-Zygmund (con núcleo satisfaciendo la condición de Lipschitz), el resultado clásico es: el operador que controla en normas p 's es el iterado $k+1$ veces del operador maximal de Hardy-Littlewood.
En este trabajo se definen condiciones que debe satisfacer un núcleo K de una integral singular a valores vectoriales para que su conmutador de orden k, es decir $K \in H^{\dagger}_{\mathcal{A},X,k}$, este acotado en normas p's por un operador maximal $M_{\bar{\mathcal{A}}}$. Como aplicación de este resultado estudiaremos el conmutador del operador cuadrado.

PALABRAS CLAVES:

- Conmutadores de Operadores Integrales
- Condiciones Hörmander
- Operador Cuadrado
- Maximal de Hardy-Littlewood
- Pesos

CLASIFICACIÓN:

42B25 Maximal functions, Littlewood-Paley theory
42B20 Singular and oscillatory integrals (Calderón-Zygmund, etc.)
47G10 Integral operators

AGRADECIMIENTOS:

A mi familia, especialmente a mi tio Coco.

A mis amigos y compañeros de la carrera, especialmente a Dahy, Agus y Andre. A mis amigos de la facultad, en particular a Mauri, Andres, Julian, Santi, Marcos y Mariano.

A Silvina, por mi directora del Trabajo Especial y por toda su ayuda en este ultimo tiempo.

Al grupo de Análisis, en particular a Linda, Marta y Guille.

Índice

Introducción

Consideremos T una aplicación definida de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial en otro $\mathbb{K}$-espacio vectorial, donde $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. En este trabajo consideraremos espacios vectoriales normados, cuyos elementos son funciones definidas en $\mathbb{R}^n$.

En el caso particular de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dados A y B $\mathbb{R}$-espacios vectoriales, una aplicación $T : A \to B$ se dice sublineal si satisface:

$$T(cr + s)(x) \leq |c|T(r)(x) + T(s)(x),$$

para todo $c \in \mathbb{R}$, para todo $r, s \in A$ y para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Un operador T será una aplicación lineal o sublineal de A en B, según el caso.

Una pregunta muy recurrente en el análisis es: ¿Cuándo un operador T es acotado? En este trabajo intentaremos responder esta inquietud para cierto tipo de operadores. Consideremos operadores de la forma:

$$T : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \{g : \mathbb{R}^n \to X\}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

con $(X = \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}, \|\cdot\|_X)$ espacio de Banach.

Un caso particular de estos operadores son los Operadores Integrales Singulares (OIS), los cuales viene dados por el valor principal (v.p.) de la convolución con una función K que toma valores en $\mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$ y tiene a lo sumo una singularidad en el origen, es decir si T es un OIS, T es de la forma:

$$\begin{aligned} Tf(x) &= v.p. \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)dy \\ &= \left\{ v.p. \int_{\mathbb{R}^n} K_l(x-y)f(y)dy \right\}_{l \in \mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

A la función K asociada al operador T se la denomina núcleo de T.

En este trabajo nos dedicaremos a los Conmutadores de Operadores Integrales Singulares (COIS), los cuales se definen a partir de un OIS, T, una función $b \in BMO$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Al COIS lo denotaremos como T_b^k y es de la forma:

$$T_b^k f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (b(x) - b(y))^k K(x-y)f(y)dy.$$

Al igual que antes, a K lo llamaremos núcleo de T_b^k.

Una de las técnicas más utilizadas para contestar la pregunta anterior es, acotar al operador por un operador maximal adecuado. En el caso de OIS clásicos, es decir cuando sus núcleos K son suaves, y sus conmutadores el operador maximal que lo controla es el operador maximal de Hardy-Littlewood e iteraciones de él (según el caso).

Estudiaremos las condiciones que debe cumplir el núcleo K del COIS para que el operador T_b^k esté acotado por algún operador maximal adecuado.

Algunos Resultados Conocidos

Dada K una función definida de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ decimos que K satisface la condición de Lipschitz (denotamos $K \in H_\infty^*$) si: $\exists\, \alpha > 0$ y $C > 0$ tales que:

$$|K(x-y) - K(x)| \leq C \frac{|y|^\alpha}{|x|^{\alpha+n}}, \quad \forall\, |x| > 2|y|.$$

Sea T un OIS, donde el núcleo K tiene transformada de Fourier acotada y satisface la condición de Lipschitz. Un resultado clásico de Coifman [2], afirma que para este tipo de operador T, vale: Para todo $0 < p < \infty$ y ciertas funciones w, $\exists\, C > 0$ tal que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p w(x)dx,$$

para toda f tal que el lado izquierdo sea finito, donde M es el operador maximal de Hardy-Littlewood.

En [12] se definen condiciones de tipo Hörmander asociadas a una función de Young $\mathcal{A}$, que deben satisfacer el núcleo K y se prueban distintos resultados de acotación de OIS por operadores maximales asociados a una función de Young.

Concretamente dado T un OIS acotado en algún L^{p_0}, $1 < p_0 < \infty$, y tal que el núcleo asociado $K \in H_{\mathcal{A}}$ entonces vale: Para todo $0 < p < \infty$, $\exists\, C > 0$ tal que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (M_{\bar{\mathcal{A}}} f(x))^p w(x)dx,$$

para toda $w \in A_\infty$ y f tal que el lado izquierdo sea finito, donde $M_{\bar{\mathcal{A}}}$ es el operador maximal asociado a la función $\bar{\mathcal{A}}$.

Además, si K es un núcleo a valores vectoriales, vale que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|Tf(x)\|_X^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (M_{\bar{\mathcal{A}}} f(x))^p w(x)dx,$$

para toda f tal que el lado izquierdo sea finito, donde $M_{\bar{\mathcal{A}}}$ es el operador maximal asociado a la función $\bar{\mathcal{A}}$.

En el mismo trabajo, se toma como aplicación el Operador Cuadrado, S, probando que vale: Para todo $p > 0$, $\exists\, C > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Sf(x)|^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (M^3 f(x))^p w(x)dx,$$

para toda $w \in A_\infty$ y f tal que el lado izquierdo sea finito, donde M^3 es el operador maximal de Hardy-Littlewood iterado 3 veces.

Posteriormente en [13], se mejora la cota anterior y se prueba que vale: Para toda $p > 0$, $\exists\, C > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Sf(x)|^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (M^2 f(x))^p w(x)dx,$$

para toda $w \in A_\infty$ y f tal que el lado izquierdo sea finito, donde M^2 es el operador maximal de Hardy-Littlewood iterado 2 veces.

Actualmente, en [8], se define una condición más débil que $H_{\mathcal{A}}$, denotada como $H_{\mathcal{A}}^{\dagger}$, con esta nueva condición se prueba que vale: Si K es un núcleo a valores vectoriales tal que $K \in H_{\mathcal{A}}^{\dagger}$, para todo $0 < p < \infty$, $\exists\, C > 0$ tal que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|Tf(x)\|_X^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (M_{\bar{\mathcal{A}}} f(x))^p w(x)dx,$$

para toda $w \in A_\infty$ y f tal que el lado izquierdo sea finito, donde $M_{\bar{\mathcal{A}}}$ es el operador maximal asociado a la función de Young $\bar{\mathcal{A}}$.

En cuanto a los COIS, existen varios resultados parecidos a los del OIS.

Un resultado clásico de Coifman, Rochberg y Weiss, ver [3], es: Sea T_b es un COIS, donde el núcleo K tiene transformada de Fourier acotada y satisface la condición de Lipschitz, entonces $T_b f$ es acotado en $L^p(dx)$, $1 < p < \infty$, si y sólo si $b \in BMO$.

En [11], los autores definen condiciones que debe satisfacer un núcleo K para poder asegurar que el conmutador de la integral singular T_b^k este acotado, prueban que si el núcleo asociado satisface $K \in H_{\mathcal{B}} \cap H_{\mathcal{A},k}$, para algunas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ funciones de Young, entonces para todo $0 < p < \infty$ se tiene:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T_b^k f(x)|^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (M_{\bar{\mathcal{A}}} f(x))^p w(x)dx,$$

para toda $w \in A_\infty$ y f tal que el lado izquierdo sea finito, donde $M_{\bar{\mathcal{A}}}$ es el operador maximal asociado a la función $\bar{\mathcal{A}}$.
Como aplicación se prueba que el conmutador del operador cuadrado, S_b^k, cumple la desigualdad: Para todo $p > 0$, $\exists\, C > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |S_b^k f(x)|^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (M^{k+3} f(x))^p w(x)dx,$$

para toda $w \in A_\infty$ y f tal que el lado izquierdo sea finito, donde M^{k+3} es el operador maximal de Hardy-Littlewood iterado $k+3$ veces.

Posteriormente, en [13], los autores mejoran la desigualdad anterior, logrando probar para este operador en particular el siguiente resultado: Para todo $p > 0$, $\exists\, C > 0$ tal que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |S_b^k f(x)|^p w(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (M^{k+2} f(x))^p w(x) dx,$$

para toda $w \in A_\infty$ y f tal que el lado izquierdo sea finito, donde M^{k+2} es el operador maximal de Hardy-Littlewood iterado $k+2$ veces.

La idea de este trabajo es definir una nueva condición para los núcleos asociado COIS que generalice la condición definida en [8] y que sea más débil que la condición utilizada en [11]. Con esta nueva condición se probará un resultado similar al probado en [13] y como corolario, la desigualdad:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |S_b^k f(x)|^p w(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (M^{k+2} f(x))^p w(x) dx,$$

para toda $w \in A_\infty$ y f tal que el lado izquierdo sea finito, donde M^{k+2} es el operador maximal de Hardy-Littlewood iterado $k+2$ veces.

Capítulo 1
Preliminares

1 Espacios de Banach

Definición 1.1. Dado $\mathbf{X}$ espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, una **norma** sobre $\mathbf{X}$ es una función $\|\cdot\|_{\mathbf{X}} : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ que satisface:

1. $\|y\|_{\mathbf{X}} \geq 0$ y $\|y\|_{\mathbf{X}} = 0$ si y sólo si $y = 0$,
2. $\|cy\|_{\mathbf{X}} = |c|\|y\|_{\mathbf{X}}$,
3. $\|z + y\|_{\mathbf{X}} \leq \|z\|_{\mathbf{X}} + \|y\|_{\mathbf{X}}$.

Esta norma induce una métrica $d(y, z) = \|y - z\|_{\mathbf{X}}$ y llamamos al par $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}})$ espacio normado.

Definición 1.2. Un **Espacio de Banach** es un par $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}})$ normado cuya métrica inducida es completa.

Ejemplo 1.3. Espacios de Banach:

1. $L^p(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p < \infty\}$ con $\|f\|_p := (\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p)^{1/p}$, para $1 \leq p < \infty$.
2. $L^\infty(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \text{ess}|f(x)| < \infty\}$ con $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \text{ess}|f(x)|$.
3. $l^p(\mathbb{R}^n) = \left\{\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}} : \sum_{i\in\mathbb{Z}} |x_i|^p < \infty\right\}$ con $\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}\|_p = \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} |x_i|^p\right)^{1/p}$, para $1 \leq p < \infty$.
4. $l^\infty(\mathbb{R}^n) = \left\{\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}} : \sup_{i\in\mathbb{Z}}|x_i| < \infty\right\}$ con $\|\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{Z}}|x_i|$.

Definición 1.4. Sea $\mathbf{X} = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$. Una norma $\|\cdot\|_{\mathbf{X}}$ cumple la **condición del módulo** si $\|\{a_n\}\|_{\mathbf{X}} \leq \|\{|a_n|\}\|_{\mathbf{X}}$.

Definición 1.5. Sea $\mathbf{X} = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$. Diremos que una norma $\|\cdot\|_{\mathbf{X}}$ es **creciente** si dadas $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones tales que $0 \leq a_n \leq b_n \; \forall\, n \in \mathbb{Z}$, se tiene que $\|\{a_n\}\|_{\mathbf{X}} \leq \|\{b_n\}\|_{\mathbf{X}}$.

Las normas más utilizadas son crecientes y cumplen la condición del módulo, algunos ejemplos son las normas l^q, $1 < q < \infty$ y las normas de Luxemburgo asociadas a una función de Young, que se definirán más adelante. Estas condiciones son necesarias pues no todas las normas las cumplen. Un claro ejemplo es:

Ejemplo 1.6. Sea $\mathbf{X} = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ y la norma $\|\{x_n\}\|_{\mathbf{X}} := \left((x_1 - x_2)^2 + \sum_{n \neq 1} x_n^2 \right)^{1/2}$.

Si tomamos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ y $x_n = 0$ si $n \neq 1, 2$. Se puede ver que $\|\{x_n\}\|_{\mathbf{X}} = \sqrt{5}$ y $\|\{|x_n|\}\|_{\mathbf{X}} = 1$. Luego esta norma no cumple la condición del módulo. Si tomamos $(..., 0, x_1, x_2, 0, ...) = (..., 0, 1, 3, 0, ...)$ y $(..., 0, y_1, y_2, 0, ...) = (..., 0, 2, 3, 0, ...)$, se ve que $0 \leq x_i \leq y_i \ \forall\, i \in \mathbb{Z}$, y tenemos que $\|\{x_n\}\|_{\mathbf{X}} = \sqrt{13}$ y $\|\{y_n\}\|_{\mathbf{X}} = \sqrt{10}$. Por lo tanto, la norma no es creciente.

2 Algunas Nociones de Operadores Acotados

De aquí en más el espacio $\mathbf{X}$ será $\mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$, es decir el espacio vectorial de las sucesiones. $\|.\|_{\mathbf{X}}$ será alguna norma definida en el espacio de sucesiones $\mathbf{X}$ que sea creciente y cumpla la condición del módulo, por ejemplo las normas l^p, con $1 \leq p \leq \infty$, o la norma de Luxemburgo dada por alguna función de Young con la cual $(\mathbf{X}, \|.\|_{\mathbf{X}})$ es un espacio de Banach.

A continuación se presentarán dos definiciones de operadores acotados.

Definición 1.7. Sean $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, y T un operador definido en $L^p(\mathbb{R}^n)$ en el espacio de las funciones definidas en $\mathbb{R}^n$ que toman valores en el espacio de Banach $(\mathbf{X}, \|.\|_{\mathbf{X}})$, entonces:

- T se dice **de tipo fuerte** (p, q) si y sólo si, $\exists\, c > 0$ tal que,

$$\left\| \|Tf\|_{\mathbf{X}} \right\|_q \leq c\|f\|_p,$$

  para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

- T se dice **de tipo débil** (p, q) si y sólo si, $\exists\, c > 0$ tal que,

$$|\,\{x \in \mathbb{R}^n : \|Tf(x)\|_{\mathbf{X}} > \lambda\}\,| \leq c \left(\frac{\|f\|_p}{\lambda} \right)^q,$$

  para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

En el caso particular de que $T : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$, es decir, $\mathbf{X} = \mathbb{R}$ ó $\mathbf{X} = \mathbb{C}$ tenemos que para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$:
T es de tipo fuerte (p, q) si y sólo si, $\exists\, c > 0$ talque, $\|Tf\|_q \leq c\|f\|_p$ y
T es de tipo débil (p, q) si y sólo si, $\exists\, c > 0$ talque,

$$|\,\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}\,| \leq c \left(\frac{\|f\|_p}{\lambda} \right)^q.$$

Observación 1.8. *Se prueba que si un operador es de tipo fuerte (p, q) entonces es de tipo débil (p, q). Para hacer la prueba sólo se utiliza la desigualdad de Tchebycheff.*

3 Operadores Maximales y la Clase de Pesos de Muckenhoupt

A continuación se define un caso particular de un operador sublineal:

Definición 1.9 (Maximal de Hardy-Littlewood)**.** Dada $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ y $x \in \mathbb{R}^n$, definimos:

$$Mf(x) := \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy,$$

donde Q son cubos en $\mathbb{R}^n$.

Observación 1.10. *El operador M satisface las siguientes propiedades:*

1. *M es sublineal.*
2. *M es semicontinua inferiormente.*
3. *$f(x) \leq Mf(x)$, para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ (Por el Teorema de diferenciación de Lebesgue).*
4. *M es de tipo fuerte (∞, ∞) (se prueba trivialmente).*
5. *M es de tipo débil $(1, 1)$ (utilizando algún lema de cubrimiento).*
6. *M es de tipo fuerte (p, p) para todo $1 < p \leq \infty$. Esta afirmación se deduce usando el Teorema de Interpolación de Marzinkiewicz y los dos incisos anteriores.*

Al operador M se lo generaliza a una familia de operadores M_r como se muestra a continuación:

Definición 1.11. Dada $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $r \geq 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$, definimos:

$$M_r f(x) := (M(|f|^r)(x))^{1/r} = \left(\sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|^r dy \right)^{1/r},$$

donde Q son cubos en $\mathbb{R}^n$.

Observación 1.12. *Observar que si $1 \leq r < \infty$, por la desigualdad de Hölder, se tiene que $Mf(x) \leq M_r f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.*

Antes de seguir definiendo operadores maximales, definamos las clases de pesos de Muckenhoupt.

Definición 1.13. Un **peso** será una función w, no negativa y localmente integrable.

Definición 1.14 (Clases de pesos de Muckenhoupt, A_p)**.** Dado w un peso diremos que:

- w es un peso de la clase A_p, $1 < p < \infty$, si para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$,

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y) dy \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y)^{-\frac{1}{p-1}} dy \right)^{p-1} \leq C_p,$$

  con C_p independiente de Q.

- w es un peso de la clase A_1 si

$$Mw(x) \leq C_1 w(x) \quad p.p. x \in \mathbb{R}^n,$$

con C_1 independiente de x.

Definimos además la clase $A_\infty := \bigcup_{p \geq 1} A_p$.

Se puede probar lo siguiente, para mayor precisión ver [5],

Teorema 1.15. *Dada w una función no negativa localmente integrable en $\mathbb{R}^n$ y M la función maximal de Hardy-Littlewood, entonces son equivalentes:*

- *w es un peso de la clase A_p con $1 \leq p < \infty$.*
- *M es de tipo débil (p, p) con respecto a la medida $w(x)dx$.*

Si consideramos $p > 1$ son equivalentes:

- *w es un peso de la clase A_p con $1 < p < \infty$.*
- *M es de tipo fuerte (p, p) con respecto a la medida $w(x)dx$.*

Definición 1.16. Dada $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, definimos el **Operador Sharp** como sigue:

$$M^\# f(x) := \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q \left| f(y) - \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(z)| dz \right| dy,$$

ó equivalentemente,

$$M^\# f(x) = \sup_{Q \ni x} \inf_{a \in \mathbb{C}} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - a| dy.$$

A fines prácticos se utiliza la segunda definición del operador Sharp. Además, este operador esta controlado puntualmente por un múltiplo de la maximal de Hardy-Littlewood, más concretamente, $M^\# f(x) \leq 2Mf(x) \, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

El siguiente teorema nos da una relación en normas p's entre los dos operadores maximales. (ver [5])

Teorema 1.17 (Teorema Sharp)**.** *Sea $w \in A_\infty$, $0 < p < \infty$. Existe $c > 0$ tal que:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Mf(x)|^p w(x) dx \leq c \int_{\mathbb{R}^n} |M^\# f(x)|^p w(x) dx,$$

siempre que el lado izquierdo sea finito.

Definiremos un caso particular de espacio de funciones, que nos será de utilidad.

Definición 1.18. El espacio de funciones con oscilación media acotada, **BMO**, está definido como

$$BMO := \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ medibles } : M^\# f(x) < \infty \text{ para casi todo } x \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Además, tomamos como $\|f\|_{BMO} := \|M^\# f\|_\infty$.

Observación 1.19. *La $\|\cdot\|_{BMO}$ definida antes no es una norma pues las constantes tienen oscilación cero. Para que sea una norma, lo que se considera es el espacio BMO cocientado por el espacio de las funciones constantes. Luego, en este espacio $\|\cdot\|_{BMO}$ es una norma y además este espacio es un espacio de Banach.*

4 Funciones de Young y Normas Luxemburgo

En esta sección se definirá las funciones de Young, las normas de Luxemburgo y se enunciarán algunos resultados relacionados a funciones de Young. Para mayor precisición ver [14].

Definición 1.20. Una función $\mathcal{B} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ es una **función de Young** si $\mathcal{B}$ es continua, convexa, no decreciente que satisface $\mathcal{B}(0) = 0$ y $\lim_{t\to\infty} \mathcal{B}(t) = \infty$.

Observación 1.21. *Dada una función de Young se puede probar que existe la función inversa y además es no decreciente.*

Definición 1.22. Dada una función de Young $\mathcal{B}$, la **función complementaria** $\bar{\mathcal{B}}$, se define de la siguiente forma: para $0 \leq x < \infty$,

$$\bar{\mathcal{B}}(x) := \sup_{0\leq y<\infty} (xy - \mathcal{B}(y)).$$

Observación 1.23. *La función complementaria $\bar{\mathcal{B}}$ de una función $\mathcal{B}$ de Young es de Young.*

Ejemplo 1.24. Funciones de Young:

1. Si $\mathcal{B}(t) = t^p$, $1 \leq p < \infty$ entonces $\bar{\mathcal{B}}(t) = t^{p'}$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
2. Dado $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, si $\mathcal{B}(t) = \exp\left(t^{\frac{1}{1+k+\epsilon}}\right) - 1$ con $\epsilon \geq 0$, entonces $\bar{\mathcal{B}}(t) = t(1+\log(t))^{1+k+\epsilon}$.

Definición 1.25. Se define la **norma Luxemburgo** de una función f inducida por una tal $\mathcal{B}$ función de Young de la siguiente manera:

$$\|f\|_{\mathcal{B}} := \inf\left\{\lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}} \mathcal{B}\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) \leq 1\right\}.$$

El promedio de la norma Luxemburgo de f en el cubo Q viene dado por:

$$\|f\|_{\mathcal{B},Q} := \inf\left\{\lambda > 0 : \frac{1}{|Q|}\int_{Q} \mathcal{B}\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) \leq 1\right\}.$$

Teorema 1.26. *(Desigualdad de Hölder para funciones de Young)*

- *Dada $\mathcal{A}$ una función de Young,*

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |fg| \leq 2\|f\|_{\mathcal{A},Q}\|g\|_{\bar{\mathcal{A}},Q}.$$

- *Si $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ son funciones de Young tal que $\mathcal{A}^{-1}(t)\mathcal{B}^{-1}(t)\mathcal{C}^{-1}(t) \leq t$, para todo $t \geq 1$, entonces*

$$\|fgh\|_{L^1,Q} \leq c\|f\|_{\mathcal{A},Q}\|g\|_{\mathcal{B},Q}\|h\|_{\mathcal{C},Q}.$$

Observación 1.27. *Notemos que la segunda desigualdad de Hölder implica*

$$\|fg\|_{\bar{\mathcal{C}},Q} \leq c\|f\|_{\mathcal{A},Q}\|g\|_{\mathcal{B},Q} \quad \text{y} \quad \|f\|_{\bar{\mathcal{C}},Q} \leq c\|f\|_{\mathcal{A},Q}.$$

La primera desigualdad se obtiene por dualidad y la segunda tomando $g \equiv 1$.

Dada $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ se define el *operador maximal asociado a una función de Young* $\mathcal{B}$ como:

$$M_{\mathcal{B}}f(x) := \sup_{Q \ni x} \|f\|_{\mathcal{B},Q}.$$

Observación 1.28. *Si $k \in \mathbb{N}$, se puede probar que el operador $M_{L(1+\log L)^k}$ es puntualmente equivalente a $(k+1)$ veces iteraciones del operador M, es decir, a M^{k+1}. Más aún se tiene que:*

$$Mf(x) \leq cM_{L(1+\log L)^k}f(x) \leq cM_rf(x), \quad \forall\, k > 0,\ r > 1.$$

La primera desigualdad se obtiene usando la desigualdad de Hölder para las funciones f y $g \equiv 1$ y las normas dadas por funciones de Young $\mathcal{B}(t) = t(1+\log(t))^k$ $\bar{\mathcal{B}}(t) = \exp\left(t^{\frac{1}{k}}\right) - 1$ respectivamente. Para la segunda desigualdad sale del hecho que $t(1+\log(t))^k \lesssim t^r$.

Observación 1.29. *Dada una función de Young, $\mathcal{A}$ y $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida se puede generalizar la norma de Luxemburgo a funciones definidas en Ω de la siguiente manera:*

$L_{\mathcal{A}} := \bigcup S_{\mathcal{A},a}$ donde $S_{\mathcal{A},a} := \{f : \int_\Omega \mathcal{A}(|f|)d\mu \leq a\}$.

Se prueba que:

$$\|f\|_{\mathcal{A},a} := \inf\left\{\lambda > 0 : \int_\Omega \mathcal{A}\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) d\mu \leq a\right\},$$

define una norma completa en $L_{\mathcal{A}}$ para todo $a \in [0,\infty)$. Más aún todas las normas $\|\cdot\|_{\mathcal{A},a}$ son equivalentes para todo a.

En particular, si consideramos como $\Omega = \mathbb{Z}$, μ la medida de contar, entonces queda definida una familia de normas Luxemburdo en $\mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$ asociadas a la función de Young $\mathcal{A}$ (definiendo como $\|f\|_{\mathcal{A},a} = \infty$ si $f \notin L_{\mathcal{A}}$). Como las normas $\|\cdot\|_{\mathcal{A},a}$ son equivalentes para todo a, las denotamos $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$. De esta manera, $(\mathbb{K}^{\mathbb{Z}}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ resulta espacio de Banach. (Ver [16]).

5 Conmutadores de Operadores Integrales Singulares (COIS)

En esta sección definiremos algunos casos particulares de operadores a valores vectoriales: los Operadores Integrales Singulares (OIS) y los Conmutadores de Operadores Integrales Singulares (COIS). Para ello comencemos definiendo algunas condiciones de tipo Hörmander.

La siguiente definición fue dada en el trabajo [13]. Ahí los autores generalizan la clásica condición de Hörmander.

Notación: De ahora en adelante $|y| \sim 2^m R := \{y \in \mathbb{R} : 2^m R \leq |y| < 2^{m+1}R\}$.

Definición 1.30. Sea K una función a valores vectoriales, $\mathcal{A}$ una función de Young y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces:

1. K satisface la condición $L^{\mathcal{A},X,k}$-Hörmander si existen $c_{\mathcal{A}} > 1$ y $C_{\mathcal{A}} > 0$ tales que para cada x y $R > c_{\mathcal{A}}|x|$ se tiene:

$$\sum_{m=1}^{\infty} (2^m R)^n m^k \left\| \|K(\cdot - x) - K(\cdot)\|_X \, \chi_{|y|\sim 2^m R}(\cdot) \right\|_{\mathcal{A},B(0,2^{m+1}R)} \leq C_{\mathcal{A}},$$

ó equivalentemente, dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, K satisface la condición $L^{\mathcal{A},X,k}$-Hörmander centrada en x_0 si existen $c_{\mathcal{A}} > 1$ y $C_{\mathcal{A}} > 0$ tales que para cada x y $R > c_{\mathcal{A}}|x - x_0|$ se tiene:

$$\sum_{m=1}^{\infty} (2^m R)^n m^k \left\| \|K(\cdot - (x - x_0)) - K(\cdot)\|_X \, \chi_{|y-x_0|\sim 2^m R}(\cdot) \right\|_{\mathcal{A},B(x_0,2^{m+1}R)} \leq C_{\mathcal{A}}.$$

Si K satisface la condición $L^{\mathcal{A},X,k}$-Hörmander se dice que $K \in H_{\mathcal{A},X,k}$.

2. K satisface la condición $L^{\infty,X,k}$-Hörmander si existe $C_\infty > 0$ tal que:

$$\sum_{m=1}^{\infty} (2^m R)^n m^k \sup_{|y|\sim 2^m R} \|K(y - x) - K(y)\|_X \leq C_\infty.$$

Si K satisface la condición $L^{\infty,X,k}$-Hörmander se dice que $K \in H_{\infty,X,k}$.

3. $K \in H_{1,X}$ si existe $C > 0$ tal que:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{|y|>2|x|} \|K(y - x) - K(y)\|_X dy \leq C \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Si $k = 0$, denotamos $H_{\mathcal{A},X} = H_{\mathcal{A},X,0}$ y $H_{\infty,X} = H_{\infty,X,0}$.

Observación 1.31. *Para probar que las dos condiciones en 1. son equivalentes sólo hay que realizar el cambio de variable $\bar{x} = x - x_0$ y $\bar{y} = y - x_0$ en la definición de la norma de Young de $\|K(\cdot - (x - x_0)) - K(\cdot)\|_X \chi_{|y-x_0|\sim 2^m R}(\cdot)$.*

Observación 1.32. *Existen relaciones entre estas clases. Si $\mathcal{A}$ es una función de Young, usando la desigualdad de Hölder, obtenemos:*

1. $H_{\infty,X,k} \subset H_{\mathcal{A},X,k} \subset H_{\mathcal{A},X,k-1} \subset \cdots \subset H_{\mathcal{A},X,1} \subset H_{1,X}$.

2. *Si $\mathcal{A}(t) \leq C\mathcal{B}(t)$ para $t > t_0$, algún t_0, entonces:*

$$H_{\infty,X,k} \subset H_{\mathcal{B},X,k} \subset H_{\mathcal{A},X,k} \subset H_{1,X,k} \subset H_{1,X}.$$

3. *En particular, si $\mathcal{A}(t) = t^r$ y si denotamos $H_{r,X} = H_{\mathcal{A},X}$ entonces*

$$H_{\infty,X,k} \subset H_{r_2,X,k} \subset H_{r_1,X,k} \subset H_{1,X,k} \subset H_{1,X} \quad \forall\, 1 < r_1 < r_2 < \infty.$$

Definiremos ahora las nociones de **Operador Integral Singular (OIS)** y **Conmutador de Operador Integral Singular (COIS)** a valores vectoriales.

Definición 1.33. (OIS) Consideremos una función K a valores vectoriales, $K(y) = \{K_l(y)\}_{l\in\mathbb{Z}}$, $K_l \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$. Definimos:

$$\begin{aligned} Tf(x) &:= v.p. \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)dy = \{(K_l * f)(x)\}_{l\in\mathbb{Z}} \\ &= \left\{ v.p. \int_{\mathbb{R}^n} K_l(x-y)f(y)dy \right\}_{l\in\mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

El operador T será un Operador Integral Singular (OIS) si es fuerte (p_0, p_0), para algún $p_0 > 1$, y el núcleo $K = \{K_l\}_{l\in\mathbb{Z}} \in H_{1,X}$.

Definición 1.34. (COIS) Dados T un OIS y $b \in BMO$ definimos el conmutador de T de orden k, $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, como:

$$\begin{aligned} T_b^k f(x) &:= v.p. \int_{\mathbb{R}^n} (b(y) - b(x))^k K(x-y)f(y)dy \\ &= \left\{ v.p. \int_{\mathbb{R}^n} (b(y) - b(x))^k K_l(x-y)f(y)dy \right\}_{l\in\mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

Notemos que para $k = 0$, $T_b^k = T$ y observemos que $T_b^k = [b, T_b^{k-1}]$, $k \in \mathbb{N}$.

Observación 1.35. $T_b^k f(x) = [b, T_b^{k-1}](f)(x) := b(x)T_b^{k-1}(f)(x) - T_b^{k-1}(bf)(x)$.

Observación 1.36. *Las dos hipótesis pedidas al operador T en la defnición de OIS, implican que el operador es de tipo fuerte (p,p) para todo $1 < p < \infty$. Para mayor precisición ver [5].*

6 El Conmutador del Operador Cuadrado

Ahora definiremos un COIS, que nos servirá de ejemplo en este trabajo. Para ello primero definiremos el operador cuadrado.

Definición 1.37. Sea f una función medible definida en $\mathbb{R}$. Para cada $l \in \mathbb{Z}$ consideramos los promedios $A_l f(x) := \frac{1}{2^{l+1}} \int_{x-2^l}^{x+2^l} f$. El operador cuadrado se define como:

$$Sf(x) := \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} |A_l f(x) - A_{l-1} f(x)|^2 \right)^{1/2}.$$

Este operador esta relacionado con un OIS, $\tilde{T}$, que definiremos a continuación:

Definición 1.38. Dada f localmente integrable en $\mathbb{R}$, definimos $\tilde{T}$ como:

$$\begin{aligned}\tilde{T}f(x) &:= \left\{ \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2^{l+1}} \chi_{(-2^l,2^l)}(x-y) - \frac{1}{2^l} \chi_{(-2^{l-1},2^{l-1})(x-y)} \right) f(y)dy \right\}_{l\in\mathbb{Z}} \\ &= \int_{\mathbb{R}} K(x-y)f(y)dy,\end{aligned}$$

donde K es

$$K(z) = \{K_l(z)\}_{l\in\mathbb{Z}} = \left\{ \frac{1}{2^{l+1}} \chi_{(-2^l,2^l)}(z) - \frac{1}{2^l} \chi_{(-2^{l-1},2^{l-1})}(z) \right\}_{l\in\mathbb{Z}}.$$

Observación 1.39. *Se puede probar que* $\|\tilde{T}f(x)\|_{l^2} = Sf(x)$*. Para este operador* $\tilde{T}$ *el espacio de Banach* $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}})$ *a considerar es* $(l^2(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_{l^2})$*.*

Ahora podemos definir el conmutador del operador cuadrado.

Definición 1.40. Dados f una función medible en $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $b \in BMO$. Sea $\tilde{T}$ el OIS asociado al operador cuadrado, definimos:

$$\begin{aligned}\tilde{T}_b^k f(x) &:= \int_{\mathbb{R}} (b(y) - b(x))^k K(x-y)f(y)dy \\ &= \left\{ \int_{\mathbb{R}} (b(y) - b(x))^k K_l(x-y)f(y)dy \right\}_{l\in\mathbb{Z}},\end{aligned}$$

donde K es el núcleo asociado a $\tilde{T}$.

Definición 1.41. Dados f una función medible en $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $b \in BMO$. Definimos el conmutador del operador cuadrado de orden k, como:

$$S_b^k f(x) := \|\tilde{T}_b^k f(x)\|_{l^2},$$

donde $\tilde{T}_b^k$ es el conmutador de $\tilde{T}$ de orden k.

7 Resultados conocidos

El principio de Calderón-Zygmund asegura que toda integral singular está acotada en normas $L^p(w)$, $w \in A_\infty$, por un operador maximal apropiado. Para integrales singulares de Calderón-Zygmund (con núcleo satisfaciendo la condición de Lipschitz) este es el resultado clásico de Coifman [2]: el operador que controla en normas p's es el operador maximal de Hardy-Littlewood. Para integrales singulares con núcleo no tan suave, por ejemplo con núcleo en $H_{r,X}$, el operador maximal que controla es mayor que el de Hardy-Littlewood, es M_r (ver [10] y [15], donde se generaliza para núcleos a valores vectoriales). En [12] los autores generalizan estos resultados probando el siguiente teorema:

Teorema 1.42. [12] *Sea K un núcleo a valores vectoriales tal que $K \in H_{\mathcal{A},X}$ y sea T el operador asociado al núcleo K. Supongamos que T es de tipo fuerte (p_0, p_0) para algún $p_0 > 1$. Entonces $\forall\, 0 < p < \infty$ y $w \in A_\infty$ se tiene,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|Tf\|_X^p w \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (M_{\bar{\mathcal{A}}} f)^p w,$$

siempre que el lado izquierdo sea finito.

Observación 1.43. *Notemos que un operador que satisfaga las hipótesis del teorema anterior es un OIS, pues $K \in H_{\mathcal{A},X} \subset H_{1,X}$.*

Luego en [11] los autores generalizan el resultado anterior a COIS y también demuestran un corolario para el conmutador del operador cuadrado.

Teorema 1.44. [11] *Dados $b \in BMO$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sean $\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$ funciones de Young tales que $\bar{\mathcal{A}}^{-1}(t)\mathcal{B}^{-1}(t)\bar{\mathcal{C}}_k^{-1}(t) \leq t$, con $\bar{\mathcal{C}}_k(t) = \exp(t^{1/k})$ para $t \geq 1$. Si T es un operador integral con núcleo K a valores vectoriales tal que $K \in H_{\mathcal{B}} \cap H_{\mathcal{A},k}$, entonces para todo $0 < p < \infty$ y $w \in A_\infty$ se tiene,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|T_b^k f\|_X^p w \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (M_{\bar{\mathcal{A}}} f)^p w, \quad f \in L_c^\infty,$$

siempre que el lado izquierdo sea finito.

Corolario 1.45. [11] *Dada $b \in BMO$. Sea S_b^k el conmutador del operador cuadrado de orden k, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces su núcleo K cumple que $K \in H_{\mathcal{B},l^2} \cap H_{\mathcal{A},l^2,k}$ con $\mathcal{B}(t) = \exp(t^{\frac{1}{1+\epsilon}}) - 1$ y $\mathcal{A}(t) = \exp(t^{\frac{1}{1+k+\epsilon}}) - 1$ para todo $\epsilon > 0$. Luego para $p > 0$ y $w \in A_\infty$, existe una constante $C > 0$ tal que:*

$$\int_{\mathbb{R}} (S_b^k f(x))^p w(x)dx = \int_{\mathbb{R}} (\|\tilde{T}_b^k f(x)\|_{l^2})^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}} (M^{k+3} f(x))^p w(x)dx,$$

siempre que el lado izquierdo sea finito.

En este corolario lo único que hay que ver es que si $\mathcal{A}(t) = \exp(t^{\frac{1}{1+k+\epsilon}}) - 1$, entonces $\bar{\mathcal{A}}(t) = t(1 + \log(t))^{1+k+\epsilon}$. Para ϵ suficientemente pequeño $\bar{\mathcal{A}}(t) \leq t(1 + \log(t))^{2+k} = \mathcal{D}(t)$ y por lo tanto $M_{\mathcal{D}} f$ es puntualmente equivalente a $M^{k+3} f$. El Corolario se probará en el Capitulo 2.

Posteriormente en [13], los autores logran mejorar esta cota, con algunas cuentas trabajando con este operador específicamente y obtienen:

Corolario 1.46. [13] *Dada $b \in BMO$. Sea S_b^k el conmutador del operador cuadrado de orden k, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Luego para $p > 0$ y $w \in A_\infty$, existe una constante $C > 0$ tal que:*

$$\int_{\mathbb{R}} (S_b^k f(x))^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}} (M^{k+2} f(x))^p w(x)dx,$$

siempre que el lado izquierdo sea finito.

Actualmente en [8], la autora trabajando con OIS define una condición más débil para el núcleo y que permite obtener mejores resultados a los probados en [11] y generalizar los de [13].

Definición 1.47. Sea T un operador a valores vectoriales, K el núcleo asociado a T y $\mathcal{A}$ una función de Young, entonces:

1. K satisface la condición $L_{\dagger}^{\mathcal{A},X}$-Hörmander si existen $c_{\mathcal{A}} > 1$ y $C_{\mathcal{A}} > 0$ tales que para cada x y $R > c_{\mathcal{A}}|x|$ se tiene:

$$\left\| \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} (2^m R)^n \|(K_l(\cdot - x) - K_l(\cdot))\chi_{|y|\sim 2^m R}(\cdot)\|_{\mathcal{A},B(0,2^{m+1}R)} \right\}_{l\in\mathbb{Z}} \right\|_X \leq C_{\mathcal{A}},$$

ó equivalentemente, dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, K satisface la condición $L_{\dagger}^{\mathcal{A},X}$-Hörmander centrada en x_0 si existen $c_{\mathcal{A}} > 1$ y $C_{\mathcal{A}} > 0$ tales que para cada x y $R > c_{\mathcal{A}}|x - x_0|$ se tiene:

$$\left\| \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} (2^m R)^n \|(K_l(\cdot - (x - x_0)) - K_l(\cdot))\chi_{|y-x_0|\sim 2^m R}(\cdot)\|_{\mathcal{A},B(x_0,2^{m+1}R)} \right\}_{l\in\mathbb{Z}} \right\|_X \leq C_{\mathcal{A}}.$$

Si K satisface la condición $L_{\dagger}^{\mathcal{A},X}$-Hörmander se dice que $K \in H_{\mathcal{A},X}^{\dagger}$.

2. K satisface la condición $L_{\dagger}^{\infty,X}$-Hörmander si existe $C_{\infty} > 0$ tal que:

$$\left\| \sum_{m=1}^{\infty} (2^m R)^n \sup_{|y|\sim 2^m R} (K_l(y - x) - K_l(y)) \right\|_X \leq C_{\infty}.$$

Si K satisface la condición $L_{\dagger}^{\infty,X}$-Hörmander se dice que $K \in H_{\infty,X}^{\dagger}$.

3. $K \in H_{1,X}^{\dagger}$ si existe $C > 0$ tal que:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left\| \int_{|y|>2|x|} K_l(y - x) - K_l(y)dy \right\|_X \leq C \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Observación 1.48. *Nuevamente observemos que se dan las siguientes contenciones, estas se deducen solamente usando la desigualdad de Hölder:*

1. $H_{\mathcal{A},X}^{\dagger} \subset H_{1,X}^{\dagger}$.

2. *Además si* $\mathcal{A}(t) = t^r$ *y si denotamos* $H_{r,X}^{\dagger} = H_{\mathcal{A},X}^{\dagger}$ *entonces*

$$H_{\infty,X}^{\dagger} \subset H_{r_2,X}^{\dagger} \subset H_{r_1,X}^{\dagger} \subset H_{1,X}^{\dagger} \quad \forall 1 < r_1 < r_2 < \infty.$$

Además tenemos contenciones entre las distintas clases, que se deducen usando la desigualdad triangular de la norma $\|\cdot\|_X$*, estas son:*

1. $H_{\mathcal{A},X} \subset H_{\mathcal{A},X}^{\dagger}$.

2. $H_{1,X} \subset H^{\dagger}_{1,X}$.

3. $H_{\infty,X} \subset H^{\dagger}_{\infty,X}$.

Teorema 1.49. *Sea T OIS a valores vectoriales cuyo núcleo $K \in H^{\dagger}_{\mathcal{A},X}$. Sea $0 < p < \infty$ y $w \in A_\infty$, entonces $\exists\, c > 0$ tal que:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|Tf\|_X^p w \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (M_{\bar{\mathcal{A}}} f)^p w,$$

siempre que el lado izquierdo sea finito.

Como aplicación en [8] la autora prueba que si $\{K_l\}$ es el núcleo asociado al operador cuadrado entonces $\{K_l\} \in H^{\dagger}_{\mathcal{A},X}$ con $\mathcal{A}(t) = e^t - 1$.

En este trabajo, inspirados en [8], introducimos la siguiente definición que es una condición más débil que satisfacerá el núcleo, generalizando la condición introducida en [8], y nos permitirá obtener mejores resultados a los probados en [11] y generalizar los de [13] para COIS. El **Corolario 1.38** será una aplicación del resultado que probaremos en los Capitulos 2 y 3 utilizando esta nueva definición.

Definición 1.50. Sean T un operador a valores vectoriales, K el núcleo asociado a T, $\mathcal{A}$ una función de Young y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces:

1. K satisface la condición $L^{\mathcal{A},X,k}_{\dagger}$-Hörmander si existen $c_{\mathcal{A}} > 1$ y $C_{\mathcal{A}} > 0$ tales que para cada x y $R > c_{\mathcal{A}}|x|$ se tiene:

$$\left\| \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} (2^m R)^n m^k \|(K_l(\cdot - x) - K_l(\cdot))\chi_{|y|\sim 2^m R}(\cdot)\|_{\mathcal{A},B(0,2^{m+1}R)} \right\}_{l\in\mathbb{Z}} \right\|_X \leq C_{\mathcal{A}},$$

ó equivalentemente, dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, K satisface la condición $L^{\mathcal{A},X,k}_{\dagger}$-Hörmander centrada en x_0 si existen $c_{\mathcal{A}} > 1$ y $C_{\mathcal{A}} > 0$ tales que para cada x y $R > c_{\mathcal{A}}|x - x_0|$ se tiene:

$$\left\| \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} (2^m R)^n m^k \|(K_l(\cdot - (x - x_0)) - K_l(\cdot))\chi_{|y-x_0|\sim 2^m R}(\cdot)\|_{\mathcal{A},B(x_0,2^{m+1}R)} \right\}_{l\in\mathbb{Z}} \right\|_X \leq C_{\mathcal{A}}.$$

Si K satisface la condición $L^{\mathcal{A},X,k}_{\dagger}$-Hörmander se dice que $K \in H^{\dagger}_{\mathcal{A},X,k}$.

2. $K \in H^{\dagger}_{1,X,k}$ si $\exists\, C_1 > 0$ tal que:

$$\left\| \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} (2^m R)^n m^k \|(K_l(\cdot - y) - K_l(\cdot))\chi_{|y|\sim 2^m R}(\cdot)\|_{L^1,B(0,2^{m+1}R)} \right\}_{l\in\mathbb{Z}} \right\|_X \leq C_1.$$

3. $K \in H^{\dagger}_{\infty,X,k}$ si $\exists\, C_\infty > 0$ tal que:

$$\left\| \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} (2^m R)^n m^k \|(K_l(\cdot - x) - K_l(\cdot))\chi_{|y|\sim 2^m R}(\cdot)\|_{L^\infty,B(0,2^{m+1}R)} \right\}_{l\in\mathbb{Z}} \right\|_X \leq C_\infty.$$

Observación 1.51. *Si* $k = 0$, $H^{\dagger}_{\mathcal{A},X,0}$ *coincide con* $H^{\dagger}_{\mathcal{A},X}$ *definido en [8].*

Observación 1.52. *Nuevamente tenemos relaciones entre las clases:*

1. *Para todo* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$H^{\dagger}_{\mathcal{A},X,k} \subset H^{\dagger}_{\mathcal{A},X,k-1} \subset \cdots \subset H^{\dagger}_{\mathcal{A},X,1} \subset H^{\dagger}_{\mathcal{A},X}.$$

2. *Para* k *fijo y si* $\mathcal{A}(t) \leq C\mathcal{B}(t)$ *para* $t > t_0$*, algún* t_0*, entonces:*

$$(i) \quad H^{\dagger}_{\infty,X,k} \subset H^{\dagger}_{\mathcal{B},X,k} \subset H^{\dagger}_{\mathcal{A},X,k} \subset H^{\dagger}_{1,X,k} \subset H^{\dagger}_{1,X}.$$

   En particular, si $\mathcal{A}(t) = t^r$ *y si denotamos* $H^{\dagger}_{r,X,k} = H^{\dagger}_{\mathcal{A},X,k}$ *entonces para todo* $1 < r_1 < r_2 < \infty$,

$$(ii) \quad H^{\dagger}_{\infty,X,k} \subset H^{\dagger}_{r_2,X,k} \subset H^{\dagger}_{r_1,X,k} \subset H^{\dagger}_{1,X,k}.$$

3. $H_{\mathcal{A},X,k} \subset H^{\dagger}_{\mathcal{A},X,k}$.

4. $H_{1,X,k} \subset H^{\dagger}_{1,X,k}$.

5. $H_{\infty,X,k} \subset H^{\dagger}_{\infty,X,k}$.

Para 1. se utiliza el hecho que dado $k \in \mathbb{N}$, $m^k \geq m^{k-1}\ \forall\, m \in \mathbb{N}$ *y la última inclusión es la desigualdad de Hölder. Para 2. (i) y (ii) nuevamente se utiliza la desigualdad de Hölder. Para las demás relaciones se utiliza la desigualdad triangular de* $\|\cdot\|_X$.

Observación 1.53. *En 3. la inclusión es estricta, es decir,* $H_{\mathcal{A},X,k} \subsetneq H^{\dagger}_{\mathcal{A},X,k}$. *Un ejemplo es el núcleo asociado al operador cuadrado con* $X = l^2$ *y* $\mathcal{A}(t) = \exp(t^{\frac{1}{1+k}})$. *Esta observación se probará en el siguiente capítulo.*

En el próximo capítulo se enunciara el teorema más importante de este trabajo y sus corolarios y aplicaciones.

Capítulo 2

Resultados Principales y Aplicaciones

1 Resultados Principales

A continuación enunciaremos el resultado principal de este trabajo. Para ello consideraremos núcleos que satisfacen la condición $H^{\dagger}_{\mathcal{A},X,k}$. El enunciado de este teorema es similar al Teorema 1.42, pero nos permitirá obtener una acotación más precisa para el caso del conmutador del operador cuadrado S^k_b.

Teorema 2.1. *Sean $b \in BMO$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ funciones de Young tales que $\bar{\mathcal{A}}^{-1}(t)\mathcal{B}^{-1}(t)\bar{\mathcal{C}}_k^{-1}(t) \leq t$, con $\bar{\mathcal{C}}_k(t) = \exp(t^{1/k})$ para $t \geq 1$. Si T es un operador integral con núcleo K a valores vectoriales tal que $K \in H^{\dagger}_{\mathcal{B},X} \cap H^{\dagger}_{\mathcal{A},X,k}$, entonces para todo $0 < p < \infty$ y $w \in A_\infty$ se tiene,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|T^k_b f\|^p_X w \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (M_{\bar{\mathcal{A}}} f)^p w, \quad f \in L^\infty_c,$$

siempre que el lado izquierdo sea finito.

Este teorema se demostrará en el siguiente capítulo. Como aplicación del mismo recordemos el corolario enunciado en los preliminares:

Corolario. 1.46 *Dada $b \in BMO$. Sea S^k_b el conmutador del operador cuadrado de orden k, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Luego para $p > 0$ y $w \in A_\infty$, existe una constante $C > 0$ tal que:*

$$\int_{\mathbb{R}} (S^k_b f(x))^p w(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}} (M^{k+2} f(x))^p w(x) dx,$$

siempre que el lado izquierdo sea finito.

2 El Conmutador del Operador Cuadrado

El objetivo de esta sección es demostrar el **Corolario 1.46**, para ello primero veamos algunas propiedades del núcleo del operador cuadrado S.

2.1 Propiedades del Núcleo del Operador Cuadrado

En las siguientes proposiciones denotamos al núcleo asociado al operador cuadrado como $K = \{K_l\}_{l\in\mathbb{Z}}$.

Proposición 2.2. *$K \notin H_{\infty,\, l^2,k}$.*

Proposición 2.3. *$K \in H_{\mathcal{A},\, l^2,k}$ con $\mathcal{A}(t) = \exp(t^{\frac{1}{1+k+\epsilon}}) - 1$ para todo $\epsilon > 0$.*

Proposición 2.4. *$K \in H^{\dagger}_{\mathcal{A},\, l^2,k} \Leftrightarrow \left\| \left\{ \frac{m^k}{\mathcal{A}^{-1}(2^m 8)} \right\}_{m\in\mathbb{Z}} \right\|_{l^2} < \infty$.*

Proposición 2.5. *$K \in H^{\dagger}_{\mathcal{B},\, l^2} \cap H^{\dagger}_{\mathcal{A},\, l^2,k}$ con $\mathcal{B}(t) = e^t - 1$ y $\mathcal{A}(t) = \exp(t^{\frac{1}{1+k}}) - 1$.*

Observación 2.6. *Como K es par,*

$$K(\cdot - x) - K(\cdot) = K(x - \cdot) - K(-\cdot).$$

Entonces podemos cambiarlo en las condiciones de Hörmander definidas en el capítulo anterior.

Para demostrar estas propiedades enunciaremos una propiedad de K, demostrada en [8].

Proposición 2.7. *Sean $x_0 \in \mathbb{R}$, $i < j$, $i, j \in \mathbb{Z}$. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $|x - x_0| < 2^i$, además $y \in (x_0 - 2^{j+1}, x_0 - 2^j)$ ó $y \in (x_0 + 2^j, x_0 + 2^{j+1})$. Entonces:*

$$|K_l(x-y) - K_l(x_0 - y)| = \begin{cases} \frac{1}{2^{j+1}}\chi_{(x-2^j, x_0-2^j)\cup(x_0+2^j, x+2^j)}(y) & \textit{si } l = j, \\ \frac{1}{2^{j+2}}\chi_{(x_0-2^{j+1}, x-2^{j+1})\cup(x+2^{j+1}, x_0+2^{j+1})}(y) & \\ +\frac{1}{2^{j+1}}\chi_{(x-2^j, x_0-2^j)\cup(x_0+2^j, x+2^j)}(y) & \textit{si } l = j+1, \\ \frac{1}{2^{j+2}}\chi_{(x_0-2^{j+1}, x-2^{j+1})\cup(x+2^{j+1}, x_0+2^{j+1})}(y) & \textit{si } l = j+2, \\ 0 & \textit{si } l \notin \{j, j+1, +2\} \end{cases}$$

Definición: Definamos algunos conjuntos, estos son:

$$-F_m^- := (x - 2^{m+i}, -2^{m+i}) \qquad F_m^- := (x + 2^{m+i}, 2^{m+i})$$
$$-F_m^+ := (-2^{m+i}, x - 2^{m+i}) \qquad F_m^+ := (2^{m+i}, x + 2^{m+i})$$

$$-F_m := \begin{cases} -F_m^- & \text{si } x < 0 \\ -F_m^+ & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad F_m := \begin{cases} F_m^- & \text{si } x < 0 \\ F_m^+ & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Observemos que si $|x| < 2^i$, $[-F_m \cup F_m] \cap [-F_{m-1} \cup F_{m-1}] = \emptyset \ \forall\, m \in \mathbb{Z}$.

Demostración Proposición 2.2. Probemos que el núcleo asociado al operador cuadrado S, $K(x) = \{K_l(x)\}_{l\in\mathbb{Z}} \notin H_{\infty,\, l^2,k}$. Como K está definida en $\mathbb{R}$, entonces en la condición debemos tomar $n = 1$ y utilizando la **Observación 2.6**, es decir que,

$K(x) = \{K_l(x)\} \in H_{\infty, l^2, k}$ si y sólo si $\exists\, c_\infty > 1$ y $C_\infty > 0$ tales que $\forall\ R > 0$ y $\forall\, x \in \mathbb{R} : R > c_\infty |x|$ se tiene que:

$$\sum_{m=1}^{\infty} (2^m R) m^k \sup_{|y| \sim 2^{m+i}} \|K(x-y) - K(-y)\|_{l^2} \leq C_\infty.$$

Para probar que el núcleo K no satisface dicha condición basta ver que dado un $R > 0$ la sumatoria es infinita.

Sea $x_0 = 0$ (de la proposición anterior) y sean $c_\infty > 1$ y $C_\infty > 0$ fijos, $R = 2^i$ para algún $i \in \mathbb{Z}$, $|x| c_\infty < R$, $j = m + i$ con $m \in \mathbb{N}$ y $2^j < |y| < 2^{j+1}$ entonces por la **Proposición 2.7** se tiene:

$$\begin{aligned}
\sup_{|y| \sim 2^j} \|K(x-y) - K(-y)\|_{l^2} &= \sup_{|y| \sim 2^{m+i}} \left[\left(\frac{1}{2^{j+1}} \right)^2 \chi_{-F_m^- \cup F_m^+}(y) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{2^{j+2}} \chi_{-F_m^+ \cup F_m^-)}(y) + \frac{1}{2^{j+1}} \chi_{-F_{m-1}^- \cup F_{m-1}^+}(y) \right)^2 + \left(\frac{1}{2^{j+2}} \right)^2 \chi_{-F_{m-1}^+ \cup F_{m-1}^-}(y) \right]^{1/2} \\
&= \sup_{|y| \sim 2^j} \left[\frac{2}{2^{2(j+1)}} \chi_{-F_m^- \cup F_m^+}(y) + \frac{2}{2^{2(j+2)}} \chi_{-F_{m-1}^+ \cup F_{m-1}^-}(y) \right]^{1/2} \qquad (2.1) \\
&\geq \sup_{|y| \sim 2^{mj}} \left[\frac{2}{2^{2(j+1)}} \chi_{-F_m^- \cup F_m^+}(y) \right]^{1/2} = \sup_{|y| \sim 2^j} \frac{1}{2^j \sqrt{2}} \chi_{-F_m^- \cup F_m^+}(y), \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

donde la igualdad (2.1) es debido a que los conjuntos son disjuntos.

Notemos que $|y| \sim 2^j = (-2^{j+1}, -2^j) \cup (2^j, 2^{j+1})$ y además

$$\begin{aligned}
[(-2^{j+1}, -2^j) \cup (2^j, 2^{j+1})] \cap [-F_m^- \cup F_m^+] &= [-2^{j+1}, -2^j) \cap -F_m^-] \cup [(2^j, 2^{j+1}) \cap F_m^+] \\
&\supset [(2^j, 2^{j+1}) \cap F_m^+] = [(2^j, 2^{j+1}) \cap (2^j, x + 2^j)] \neq \emptyset.
\end{aligned}$$

Luego, (2.2) queda:

$$\sup_{|y| \sim 2^j} \|K(x-y) - K(-y)\|_{l^2} \geq \sup_{|y| \sim 2^j} \frac{1}{2^j \sqrt{2}} \chi_{-F_m^- \cup F_m^+}(y) = \frac{1}{2^j \sqrt{2}} \quad \forall m \in \mathbb{N}. \qquad (2.3)$$

Por lo tanto, por (2.3) y como $j = m + i$,

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} (2^{m+i}) m^k \sup_{|y| \sim 2^{m+i}} \|K(x-y) - K(-y)\|_{l^2} &\geq \sum_{m=1}^{\infty} (2^{m+i}) m^k \frac{1}{2^{m+i} \sqrt{2}} \qquad (2.4) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^k}{\sqrt{2}} = \infty. \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Por lo tanto $K \notin H_{\infty, l^2, k}$.

□

Observación 2.8. *Como $K \notin H_{\infty, l^2, k}$ no podemos usar el* **Teorema 2.1** *para asegurar que:*

$$\int_{\mathbb{R}} |S_b^k f(x)|^p w(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \|\tilde{T}_b^k f(x)\|_{l^2}^p w(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}} |M^{k+1} f(x)|^p w(x) dx.$$

Esta última desigualdad sigue siendo un problema abierto.

Demostración Proposición 2.3. Sea $\mathcal{A}(t) = \exp(t^{\frac{1}{1+k+\epsilon}}) - 1$ con $\epsilon > 0$. Por la **Observación 2.6**, queremos ver que $\exists\, c_{\mathcal{A}} > 1$ y $C_{\mathcal{A}} > 0$ tales que $\forall R > 0$ y $\forall\, x : R > c_{\mathcal{A}}|x|$ entonces:

$$\sum_{m=1}^{\infty} (2^m R)^n m^k \left\| \|K(x - \cdot) - K(-\cdot)\|_{l^2} \chi_{|y|\sim 2^m R}(\cdot) \right\|_{\mathcal{A}, B(0,2^{m+1}R)} \leq C_{\mathcal{A}}.$$

Si $x = 0$, de la **Proposición 2.5** se puede observar que $K(x - \cdot) - K(-\cdot) = 0$ entonces la condición anterior se cumple trivialmente.

Consideremos ahora $x \neq 0$. Sea $i \in \mathbb{Z}$ y consideramos $R = 2^i$, $I_m := (-2^{m+i+1}, 2^{m+i+1})$ y $-F_m, F_m$ definidos como antes, entonces $|I_m| = 2^{m+i+2}$. Utilizando la desigualdad $(a+b)^p \leq a^p + b^p \;\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ con $0 < p < 1$ (en este caso tomamos $p = \frac{1}{2}$) se tiene que:

$$\begin{aligned}
2^{m+i} \left\| \|K(x - \cdot) - K(-\cdot)\|_{l^2} \chi_{|y|\sim 2^{m+i}} \right\|_{\mathcal{A}, I_m} &\leq 2^{m+i} 3 \left\| \frac{1}{2^{2(m+i+1)}} \chi_{-F_m \cup F_m} \right\|_{\mathcal{A}, I_m}^{1/2} \\
&\quad + 2^{m+i} 3 \left\| \frac{1}{2^{2(m+i+2)}} \chi_{-F_{m+1} \cup F_{m+1}} \right\|_{\mathcal{A}, I_m}^{1/2} \\
&\leq \frac{2^{m+i} 3}{2^{m+i+1}} \|\chi_{-F_m \cup F_m}\|_{\mathcal{A}, I_m}^{1/2} + \frac{2^{m+i} 3}{2^{m+i+2}} \|\chi_{-F_{m+1} \cup F_{m+1}}\|_{\mathcal{A}, I_m}^{1/2} \\
&= \frac{3}{2} \|\chi_{-F_m \cup F_m}\|_{\mathcal{A}, I_m} + \frac{3}{2^2} \|\chi_{-F_{m+1} \cup F_{m+1}}\|_{\mathcal{A}, I_m} \\
&\leq 2 \left[\|\chi_{-F_m \cup F_m}\|_{\mathcal{A}, I_m} + \|\chi_{-F_{m+1} \cup F_{m+1}}\|_{\mathcal{A}, I_m} \right]. \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Ahora observemos que,

$$\begin{aligned}
\|\chi_{-F_m \cup F_m}\|_{\mathcal{A}, I_m} &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{1}{|I_m|} \int_{I_m} \mathcal{A}\left(\frac{\chi_{-F_m \cup F_m}}{\lambda} \right) \leq 1 \right\} \\
&= \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{1}{|I_m|} \int_{I_m} \mathcal{A}\left(\frac{1}{\lambda} \right) \chi_{-F_m \cup F_m} \leq 1 \right\} \\
&= \inf \left\{ \lambda > 0 : \mathcal{A}\left(\frac{1}{\lambda} \right) \frac{|I_m \cap [-F_m \cup F_m]|}{|I_m|} \leq 1 \right\} \\
&= \inf \left\{ \lambda > 0 : \mathcal{A}\left(\frac{1}{\lambda} \right) \leq \frac{|I_m|}{|I_m \cap [-F_m \cup F_m]|} \right\} \\
&= \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{1}{\lambda} \leq \mathcal{A}^{-1}\left(\frac{|I_m|}{|I_m \cap [-F_m \cup F_m]|} \right) \right\} \\
&= \inf \left\{ \lambda > 0 : \lambda \geq \frac{1}{\mathcal{A}^{-1}\left(\frac{|I_m|}{|I_m \cap [-F_m \cup F_m]|} \right)} \right\} \\
&= \frac{1}{\mathcal{A}^{-1}\left(\frac{|I_m|}{|I_m \cap [-F_m \cup F_m]|} \right)} = \frac{1}{\mathcal{A}^{-1}\left(\frac{2^{m+i+2}}{|I_m \cap [-F_m \cup F_m]|} \right)} \\
&\leq \frac{1}{\mathcal{A}^{-1}\left(\frac{2^{m+i+2}}{2|x|} \right)} = \frac{1}{\mathcal{A}^{-1}\left(\frac{2^{m+i+1}}{|x|} \right)}, \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue del hecho de que: $I_m \cap [-F_m \cup F_m] \subset [-F_m \cup F_m]$ y $|[-F_m \cup F_m]| \leq 2|x| \quad \forall\, m \in \mathbb{N}$ y del hecho que $\mathcal{A}^{-1}$ es creciente.

De forma análoga se puede ver que,

$$\|\chi_{-F_{m+1}\cup F_{m+1}}\|_{\mathcal{A},I_m} \leq \frac{1}{\mathcal{A}^{-1}\left(\frac{2^{m+i+1}}{|x|}\right)}. \tag{2.8}$$

Observemos que las acotaciones anteriores valen siempre que:

$$\mathcal{A}^{-1}\left(\frac{|I_m|}{|I_m \cap [-F_m \cup F_m]|}\right) \neq 0 \qquad \text{y} \qquad \mathcal{A}^{-1}\left(\frac{|I_m|}{|I_m \cap [-F_{m+1} \cup F_{m+1}]|}\right) \neq 0.$$

Como para este caso particular, $\mathcal{A}^{-1}(t) = (\log(t+1))^{1+k+\epsilon}$, esto se cumple si y sólo si:

$$\frac{|I_m|}{|I_m \cap [-F_m \cup F_m]|} \neq 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{|I_m|}{|I_m \cap [-F_{m+1} \cup F_{m+1}]|} \neq 0,$$

y este si y sólo si se cumple para todo $m \in \mathbb{N}$.

Luego, por (2.7) y (2.8), (2.6) queda como,

$$\begin{aligned}
2^{m+i}\left\|\|K(x-\cdot)-K(-\cdot)\|_{l^2}\chi_{|y|\sim 2^{m+i}}\right\|_{\mathcal{A},I_m} &\leq 2\left[\|\chi_{-F_m\cup F_m}\|_{\mathcal{A},I_m} + \|\chi_{-F_{m+1}\cup F_{m+1}}\|_{\mathcal{A},I_m}\right] \\
&\leq 2\left[\frac{1}{\mathcal{A}^{-1}\left(\frac{2^{m+i+1}}{|x|}\right)} + \frac{1}{\mathcal{A}^{-1}\left(\frac{2^{m+i+1}}{|x|}\right)}\right] \\
&= \frac{4}{\mathcal{A}^{-1}\left(\frac{2^{m+i+1}}{|x|}\right)} \\
&\leq \frac{4}{\mathcal{A}^{-1}\left(2^{m+1}\right)}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Usando el hecho que $\mathcal{A}(t) \sim \log(t)^{1+k+\epsilon}$, tenemos:

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^{m+i} m^k \left\|\|K(x-\cdot)-K(-\cdot)\|_{l^2}\chi_{|y|\sim 2^{m+i}}\right\|_{\mathcal{A},I_m} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4m^k}{\mathcal{A}^{-1}\left(2^{m+1}\right)} \\
&\sim \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4m^k}{\log\left(2^{m+1}\right)^{1+k+\epsilon}} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4m^k}{\log\left(2^{m+1}\right)^{1+k+\epsilon}} \\
&= \frac{4}{\log(2)^{1+k+\epsilon}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^k}{(m+1)^{1+k+\epsilon}} \\
&\leq \frac{4}{\log(2)^{1+k+\epsilon}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m+1)^{1+\epsilon}}.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Definiendo $C_{\mathcal{A}} := \frac{4}{\log(2)^{1+k+\epsilon}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m+1)^{1+\epsilon}}$, podemos observar que $C_{\mathcal{A}}$ sólo depende de k, ϵ. Además sabemos que $C_{\mathcal{A}} < \infty$ pues $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m+1)^{1+\epsilon}} < \infty \; \forall \, \epsilon > 0$.

Por lo tanto,

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^{m+i} m^k \left\| \|K(x-\cdot) - K(-\cdot)\|_{l^2} \chi_{|y|\sim 2^{m+i}} \right\|_{\mathcal{A}, I_m} \leq C_{\mathcal{A}}.$$

Esto nos dice que, $K \in H_{\mathcal{A}, l^2, k}$ con $\mathcal{A}(t) = \exp(t^{\frac{1}{1+k+\epsilon}})$.

□

A continuación demostraremos el **Corolario 1.45** utilizando la **Proposición 2.3**. Este corolario muestra que podemos acotar al conmutador del operador cuadrado por un operador maximal adecuado.

Demostración Corolario 1.45. En [8] se probó que el núcleo del operador cuadrado cumple la condición $L^{\mathcal{B}, l^2}$-Hörmander con $\mathcal{B}(t) = \exp(t^{\frac{1}{1+\epsilon}}) - 1$, es decir, $K \in H_{\mathcal{B}, l^2}$ con $\mathcal{B}(t) = \exp(t^{\frac{1}{1+\epsilon}}) - 1$. Por otro lado, en la proposición anterior se probó que $K \in H_{\mathcal{A}, l^2, k}$ con $\mathcal{A}(t) = \exp(t^{\frac{1}{1+k+\epsilon}}) - 1$. Por lo tanto, $K \in H_{\mathcal{B}, l^2} \cap H_{\mathcal{A}, l^2, k}$. Luego podemos usar el **Teorema 1.44**, dado $w \in A_\infty$, $1 < p < \infty$, $\exists \, c > 0$ tal que:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |S_b^k f(x)|^p w(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \|\tilde{T}_b^k f(x)\|_{l^2}^p w(x) dx &\leq c \int_{\mathbb{R}} (M_{\bar{\mathcal{A}}} f(x))^p w(x) dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}} |M^{k+3} f(x)|^p w(x) dx. \end{aligned}$$

Veamos ahora la última desigualdad, para eso observemos que si $\mathcal{A}(t) = \exp(t^{\frac{1}{1+k+\epsilon}}) - 1$, entonces por ejemplo 1.24 $\bar{\mathcal{A}}(t) = t(1+\log(t))^{1+k+\epsilon}$, que está acotada por $\mathcal{D}(t) = t(1+\log(t))^{2+k}$, por la **Observación 1.28**, $M_{\mathcal{D}} f$ es puntualmente equivalente a $M^{k+3} f$.

□

Observación 2.9. *Si $\mathcal{A}(t) = \exp(t^{\frac{1}{1+k}}) - 1$, entonces $K \notin H_{\mathcal{A}, l^2, k}$ pero $K \in H^{\dagger}_{\mathcal{A}, l^2, k}$. Lo primero se observa con cuentas similares a las de la demostración de la Proposición 2.3 y utilizando la* **Observación 2.6**, *se puede ver que nos quedaría,*

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^{m+i} m^k \left\| \|K(x-\cdot) - K(-\cdot)\|_{l^2} \chi_{|y|\sim 2^{m+i}} \right\|_{\mathcal{A}, I_m} \geq \frac{1}{\log(2)^{1+k}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m+1)} = \infty.$$

Por lo tanto, $K \notin H_{\mathcal{A}, l^2, k}$. En la **Proposición 2.5** *se prueba que $K \in H^{\dagger}_{\mathcal{A}, l^2, k}$, por lo cual $K \in H^{\dagger}_{\mathcal{A}, l^2, k} \setminus H_{\mathcal{A}, l^2, k}$ como habíamos dicho en la introducción.*

Demostración Proposición 2.4. Para esta demostración utilizaremos la **Observación 2.6**, entonces $K \in H^{\dagger}_{\mathcal{A}, l^2, k}$ si existen $c_{\mathcal{A}} > 1$ y $C_{\mathcal{A}} > 0$ tales que para cada x y $R > c_{\mathcal{A}} |x|$ se tiene:

$$\left\| \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} (2^m R)^n m^k \|(K_l(x-\cdot) - K_l(-\cdot)) \chi_{|y|\sim 2^m R}(\cdot)\|_{\mathcal{A}, B(0, 2^{m+1} R)} \right\}_{l \in \mathbb{Z}} \right\|_X \leq C_{\mathcal{A}}.$$

Veamos que

$$\left\|\left\{\tfrac{m^k}{\mathcal{A}^{-1}(2^m 8)}\right\}_{m\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^2} < \infty \Rightarrow K \in H^{\dagger}_{\mathcal{A},l^2,k}.$$

Si consideramos $x = 0$, $(K_l(x-\cdot) - K_l(-\cdot)) = 0 \quad \forall\, l \in \mathbb{Z}$, entonces la condición se cumple trivialmente.

Consideremos $x \neq 0$. Sea $R = 2^i$ con $i \in \mathbb{Z}$, x tal que $|x| < 2^i$, sean $I_m := (-2^{m+i}, 2^{m+i})$ y $-F_m$ y F_m como antes. Dado $l \in \mathbb{Z}$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} 2^{m+i} m^k \|(K_l(x-\cdot) - K_l(-\cdot))\chi_{|y|\sim 2^{m+i}}\|_{\mathcal{A},I_{m+1}} &= 2^{l+i} l^k \|\frac{1}{2^{l+i+1}}\chi_{-F_l\cup F_l}\|_{\mathcal{A},I_{l+1}} \\
&\quad + 2^{l-1+i}(l-1)^k \|\frac{1}{2^{l+i+1}}\chi_{-F_l\cup F_l} + \frac{1}{2^{l+i}}\chi_{-F_{l-1}\cup F_{l-1}}\|_{\mathcal{A},I_l} \\
&\quad + 2^{l-2+i}(l-2)^k \|\frac{1}{2^l+i}\chi_{-F_{l-1}\cup F_{l-1}}\|_{\mathcal{A},I_{l-1}} \\
&\leq 2^{l+i} l^k \|\frac{1}{2^{l+i+1}}\chi_{-F_l\cup F_l}\|_{\mathcal{A},I_{l+1}} + 2^{l-1+i}(l-1)^k \|\frac{1}{2^{l+i+1}}\chi_{-F_l\cup F_l}\|_{\mathcal{A},I_l} \\
&\quad + 2^{l-1+i}(l-1)^k \|\frac{1}{2^{l+i}}\chi_{-F_{l-1}\cup F_{l-1}}\|_{\mathcal{A},I_l} \\
&\quad + 2^{l-2+i}(l-2)^k \|\frac{1}{2^{l+i}}\chi_{-F_{l-1}\cup F_{l-1}}\|_{\mathcal{A},I_{l-1}}.
\end{aligned}$$

Luego, como $\|\frac{1}{2^{l+i+1}}\chi_{-F_l\cup F_l}\|_{\mathcal{A},I_l} \leq 2\|\frac{1}{2^{l+i+1}}\chi_{-F_l\cup F_l}\|_{\mathcal{A},I_{l+1}}$ y $\|\frac{1}{2^{l+i}}\chi_{-F_{l-1}\cup F_{l-1}}\|_{\mathcal{A},I_{l-1}} \leq 2\|\frac{1}{2^{l+i}}\chi_{-F_{l-1}\cup F_{l-1}}\|_{\mathcal{A},I_l}$ tenemos que,

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{\infty} 2^{m+i} m^k \|(K_l(x-\cdot) - K_l(-\cdot))\chi_{|y|\sim 2^{m+i}}\|_{\mathcal{A},I_{m+1}} \\
&\quad \leq 2.2^{l+i} l^k \|\frac{1}{2^{l+i+1}}\chi_{-F_l\cup F_l}\|_{\mathcal{A},I_{l+1}} + 2.2^{l-1+i}(l-1)^k \|\frac{1}{2^{l+i}}\chi_{-F_{l-1}\cup F_{l-1}}\|_{\mathcal{A},I_l} \\
&\quad = 2^{l+i+1} l^k \frac{1}{2^{l+i+1}\mathcal{A}^{-1}\left(\frac{2^{l+i+2}}{2|x|}\right)} + 2^{l+i}(l-1)^k \frac{1}{2^{l+i}\mathcal{A}^{-1}\left(\frac{2^{l+i+1}}{2|x|}\right)} \\
&\quad = \frac{l^k}{\mathcal{A}^{-1}\left(\frac{2^{l+i+2}}{2|x|}\right)} + \frac{(l-1)^k}{\mathcal{A}^{-1}\left(\frac{2^{l+i+1}}{2|x|}\right)} \\
&\quad \leq \frac{2l^k}{\mathcal{A}^{-1}\left(\frac{2^{l+i+1}}{|x|}\right)},
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se debe a que como $\mathcal{A}$ es función de Young, $\mathcal{A}^{-1}$ es creciente.

Luego, $\forall\, |x| < 2^i$, tenemos:

$$\left\|\left\{\sum_{m=1}^{\infty} 2^{m+i} m^k \|(K_l(x-\cdot) - K_l(-\cdot))\chi_{|y|\sim 2^{m+i}}\|_{\mathcal{A},t_{m+1}}\right\}_{l\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^2} \leq \left\|\left\{\frac{2l^k}{\mathcal{A}^{-1}\left(\frac{2^{l+i+1}}{|x|}\right)}\right\}_{l\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^2}.$$

En particular, la desigualdad anterior vale para todo $|x| < \frac{2^i}{4}$. Como,

$$|x| < \frac{2^i}{4} \Rightarrow \frac{2^{l+i+1}}{|x|} > 2^l 8,$$

tenemos que:

$$\left\|\left\{\sum_{m=1}^{\infty} 2^{m+i}m^k \|(K_l(x-\cdot)-K_l(-\cdot))\chi_{|y|\sim 2^{m+i}}\|_{\mathcal{A},B_{m+1}}\right\}_{l\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^2} \leq \left\|\left\{\frac{2l^k}{A^{-1}\left(\frac{2^{l+i+1}}{|x|}\right)}\right\}_{l\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^2}$$

$$\leq \left\|\left\{\frac{2l^k}{A^{-1}(2^l 8)}\right\}_{l\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^2} = 2\left\|\left\{\frac{l^k}{A^{-1}(2^l 8)}\right\}_{l\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^2}.$$

Luego, por lo que hemos supuesto por hipótesis, tenemos que $K \in H^{\dagger}_{\mathcal{A},l^2,k}$.

Ahora veamos $K \in H^{\dagger}_{\mathcal{A},l^2,k} \Rightarrow \left\|\left\{\frac{m^k}{\mathcal{A}^{-1}(2^m 8)}\right\}_{m\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^2} < \infty \quad \forall\, i \in \mathbb{Z}$. Sabemos por la hipótesis que, $\exists\, c_{\mathcal{A}} > 1$ y $C_{\mathcal{A}} > 0$ tales que $\forall\, R \in \mathbb{R}$ y $\forall x:\ |x|c_{\mathcal{A}} < 2^i$ vale que:

$$\left\|\left\{\sum_{m=1}^{\infty} 2^m R\, m^k \|(K_l(x-\cdot)-K_l(-\cdot))\chi_{|y|\sim 2^m R}\|_{\mathcal{A},B_{m+1}}\right\}_{l\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^2} \leq C_{\mathcal{A}}.$$

Sea $i \in \mathbb{Z}$, tomando $R = 2^i$, tenemos $|x| < 2^i$. Luego,

$$\left\|\left\{\sum_{m=1}^{\infty} 2^{m+i}m^k \|(K_l(x-\cdot)-K_l(-\cdot))\chi_{|y|\sim 2^{m+i}}\|_{\mathcal{A},B_{m+1}}\right\}_{l\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^2}$$

$$\geq \left\|\left\{2^{l+i}l^k \|\frac{1}{2^{l+i+1}}\chi_{-F_l\cup F_l}\|_{\mathcal{A},I_{l+1}}\right\}_{l\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^2} = \left\|\left\{2^{l+i}l^k \frac{1}{2^{l+1+i}\mathcal{A}^{-1}\left(\frac{2^{l+i+2}}{2|x|}\right)}\right\}_{l\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^2}$$

$$= \left\|\left\{\frac{l^k}{2\mathcal{A}^{-1}\left(\frac{2^{l+i+1}}{|x|}\right)}\right\}_{l\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^2} = \frac{1}{2}\left\|\left\{\frac{l^k}{\mathcal{A}^{-1}\left(\frac{2^{l+i+1}}{|x|}\right)}\right\}_{l\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^2},$$

esto vale para todo $|x| < 2^i$. Luego, tomando supremo, tenemos:

$$C_{\mathcal{A}} \geq \sup_{2^{i-2}<|x|<2^{i-1}} \left\|\left\{\sum_{m=1}^{\infty} 2^m R\, m^k \|(K_l(x-\cdot)-K_l(-\cdot))\chi_{|y|\sim 2^m R}\|_{\mathcal{A},B_{m+1}}\right\}_{l\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^2}$$

$$\geq \sup_{2^{i-2}<|x|<2^{i-1}} \frac{1}{2}\left\|\left\{\frac{l^k}{\mathcal{A}^{-1}\left(\frac{2^{l+i+1}}{|x|}\right)}\right\}_{l\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^2} \geq \frac{1}{2}\left\|\left\{\frac{l^k}{\mathcal{A}^{-1}(2^l 8)}\right\}_{l\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^2}.$$

Por lo tanto,

$$\left\|\left\{\frac{l^k}{\mathcal{A}^{-1}(2^l 8)}\right\}_{l\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^2} \leq 2C_{\mathcal{A}} < \infty.$$

$\square$

Demostración Proposición 2.5. Sea $\mathcal{A}(t) = \exp(t^{1+k}) - 1$. Veamos que

$$\left\|\left\{\frac{l^k}{A^{-1}(2^l 8)}\right\}_{l\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^2} < \infty.$$

Como $\mathcal{A}(t) = \exp(t^{1+k}) - 1$, $\mathcal{A}^{-1}(t) = \log(t+1)^{k+1}$. Observemos que si $m = 0$, $\mathcal{A}^{-1}(2^m) = \mathcal{A}^{-1}(1) = \log(1+1)^{k+1} = \log(2)^{k+1} \neq 0$, entonces $\frac{m^k}{A^{-1}(2^m 8)} = 0$. Además, $\mathcal{A}^{-1}(2^m 8) = \log(2^m 8 + 1)^{k+1} \geq \log(2^m 8)^{k+1} \geq \log(2^m)^{k+1}$.

Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
\left\| \left\{ \frac{m^k}{A^{-1}(2^m 8)} \right\}_{m\in\mathbb{Z}} \right\|_{l^2}^2 &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(\frac{m^k}{A^{-1}(2^m 8)} \right)^2 = \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{m^k}{A^{-1}(2^m 8)} \right)^2 \\
&\leq \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{m^k}{\log(2^m)^{k+1}} \right)^2 = \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{\log(2)^{k+1}} \frac{m^k}{m^{k+1}} \right)^2 \\
&= \frac{1}{\log(2)^{2(k+1)}} \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{m^2} < \infty.
\end{aligned}$$

Luego, por la **Proposición 2.4**, $K \in H^{\dagger}_{\mathcal{A},l^2,k}$ con $\mathcal{A}(t) = \exp(t^{1+k}) - 1$.

□

Finalmente podemos demostrar el objetivo de esta sección, el **Corolario 1.46**.

Demostración Corolario 1.46. Por la **Proposición 2.5** sabemos que $K \in H^{\dagger}_{\mathcal{B},l^2} \cap H^{\dagger}_{\mathcal{A},l^2,k}$ con $\mathcal{B}(t) = \exp(t) - 1$ y $\mathcal{A}(t) = \exp(t^{\frac{1}{1+k}}) - 1$. Entonces utilizando el **Teorema 2.1**, tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}} (S_b^k f(x))^p w(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \|\tilde{T}_b^k f(x)\|_{l^2}^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}} (M_{\bar{\mathcal{A}}} f(x))^p w(x)dx.$$

Como $\mathcal{A}(t) = \exp(t^{\frac{1}{1+k}}) - 1$, $\bar{\mathcal{A}}(t) = t(1+\log(t))^{1+k}$. Luego por la **Observación 1.24**, $M_{\bar{\mathcal{A}}} \approx M^{k+2}$.

Por lo tanto,

$$\int_{\mathbb{R}} (S_b^k f(x))^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}} (M_{\bar{\mathcal{A}}} f(x))^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}} (M^{k+2} f(x))^p w(x)dx.$$

□

3 Generalización del Conmutador Operador Cuadrado

Definición 2.10. Definimos, dado $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $S_{b,q}^k f(x) := \|\tilde{T}_b^k f(x)\|_{l^q}$ para todo q tal que $1 < q < \infty$, con $\tilde{T}_b^k$ definido como antes, es decir:

$$\begin{aligned}
\tilde{T} f(x) &:= \int_{\mathbb{R}} (b(y) - b(x))^k K(x-y) f(y) dy \\
&= \left\{ \int_{\mathbb{R}} (b(y) - b(x))^k K_l(x-y) f(y) dy \right\}_{l\in\mathbb{Z}},
\end{aligned}$$

donde K es

$$K(z) = \{K_l(z)\}_{l\in\mathbb{Z}} = \left\{ \frac{1}{2^{l+1}} \chi_{(-2^l,2^l)}(z) - \frac{1}{2^l} \chi_{(-2^{l-1},2^{l-1})(z)} \right\}_{l\in\mathbb{Z}}.$$

Cuando $q=2$, $S^k_{b,2}f(x) := \|\tilde{T}^k_b f(x)\|_{l^2} = S^k_b f(x)$.

Utilizando el **Teorema** 2.1, se puede ver que si $\mathcal{A}(t) = \exp(t^{\frac{1}{1+k}}) - 1$, entonces $S^k_{b,q}f(x)$ satisface la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |S^k_{b,q}f(x)|^p w(x)dx = \int_{\mathbb{R}} = \|\tilde{T}^k_b f(x)\|^p_{l^q} w(x)dx \\ \leq c\int_{\mathbb{R}} (M_{\bar{\mathcal{A}}}f(x))^p w(x)dx \leq c\int_{\mathbb{R}} (M^{k+2}f(x))^p w(x)dx,\end{aligned}$$

$\forall p : 1 < p < \infty$ y $\forall w \in A_\infty$, siempre que $\int_{\mathbb{R}} |S^k_{b,q}f(x)|^p w(x)dx \leq \infty$.

Esto se debe al hecho que, $K \in H^\dagger_{\mathcal{A},l^q,k}$ para todo q tal que $1 < q < \infty$, pues cambiando 2, por q, en la **Proposición** 2.4 tendríamos que:

$$K \in H^\dagger_{\mathcal{A},l^q,k} \Leftrightarrow \left\| \left\{ \frac{m^k}{\mathcal{A}^{-1}(2^m 8)} \right\}_{m\in\mathbb{Z}} \right\|_{l^q} < \infty,$$

y esto se cumple pues, siguiendo un razonamiento análogo al de la demostración de la **Proposición** 2.5,

$$\left\| \left\{ \frac{m^k}{\mathcal{A}^{-1}(2^m 8)} \right\}_{m\in\mathbb{Z}} \right\|_{l^q} \leq c\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{m}\right)^q \right)^{1/q} =: C_{A_q} < \infty \quad \forall\, q : 1 < q < \infty.$$

Una pregunta que surge ahora es: Si pudimos generalizar para todas las normas q, ¿se podrá generalizar para otras normas?

Un ejemplo de esto, es tomar las normas de Luxemburgo asociadas a funciones de Young. Definimos $S^k_{b,\mathcal{B}}f(x) := \|\tilde{T}^k_b f(x)\|_{\mathcal{B}}$, con $\mathcal{B}$ una función de Young y $\tilde{T}^k_b$ como antes. Adaptando la **Proposición** 2.4 tenemos:

$$K \in H^\dagger_{\mathcal{A},\mathcal{B},k} \Leftrightarrow \left\| \left\{ \frac{m^k}{\mathcal{A}^{-1}(2^m 8)} \right\}_{m\in\mathbb{Z}} \right\|_{\mathcal{B}} < \infty.$$

Luego, tomando $\mathcal{A}(t) = \exp(t^{\frac{1}{1+k}}) - 1$, por el **Teorema** 2.1 y utilizando el mismo razonamiento que en la demostración de la **Proposición** 2.5, si se cumple:

$$\left\| \left\{ \frac{1}{m} \right\}_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \right\|_{\mathcal{B}} =: C_{A_{\mathcal{B}}} < \infty,$$

entonces:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |S^k_{b,\mathcal{B}}f(x)|^p w(x)dx = \int_{\mathbb{R}} = \|\tilde{T}^k_b f(x)\|^p_{\mathcal{B}} w(x)dx \\ \leq c\int_{\mathbb{R}} (M_{\bar{\mathcal{A}}}f(x))^p w(x)dx \leq c\int_{\mathbb{R}} (M^{k+2}f(x))^p w(x)dx,\end{aligned}$$

$\forall p : 1 < p < \infty$y $\forall w \in A_\infty$, siempre que $\int_{\mathbb{R}} |S^k_{b,\mathcal{B}}f(x)|^p w(x)dx \leq \infty$.

Tomando $\mathcal{B}_{q,r}(t) = t^q(\log(t+1))^r$ con $1 < q < \infty$ y $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ para $t \geq 0$, notemos que esta función es continua, convexa, no decreciente, $\mathcal{B}_{q,r}(0) = 0$ y $\mathcal{B}_{q,r}(t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$. Luego $\mathcal{B}_{q,r}$ es una función de Young.

Por la **Observación** 1.29 podemos considerar la norma de Luxemburgo asociada a la función $\mathcal{B}_{q,r}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{B}_{q,r}}$, en el espacio $(\mathbb{Z}, \mu)$ con μ la medida de contar. Consideremos la función $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$. Veamos que

$$\|f\|_{\mathcal{B}_{q,r}} = \left\| \left\{ \frac{1}{m} \right\}_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \right\|_{\mathcal{B}_{q,r}} < \infty.$$

Notemos que para probar lo anterior basta probar que existe algún $0 < \lambda < \infty$ tal que:

$$\int_{\mathbb{Z}} \mathcal{B}\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) d\mu \leq 1.$$

Suponiendo $\lambda > 1$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{Z}} \mathcal{B}\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) d\mu &= \sum_{m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \mathcal{B}\left(\frac{|1/m|}{\lambda}\right) = \sum_{m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \mathcal{B}\left(\frac{1}{|m|\lambda}\right) \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{|m|\lambda}\right)^q \log\left(\left(\frac{1}{|m|\lambda}\right) + 1\right)^r \\
&\leq \frac{1}{\lambda^q} \sum_{m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{|m|^q} \log\left(\frac{1}{\lambda} + 1\right)^r \\
&\leq \frac{1}{\lambda^q} \log(2)^r \sum_{m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{|m|^q} \\
&\leq \frac{1}{\lambda^q} \log(2)^r C.
\end{aligned}$$

Observemos que $\frac{1}{\lambda^q} \log(2)^r C \leq 1$ si y sólo si $\log(2)^r C \leq \lambda^q$.
En particular, $\lambda_0 = (\log(2)^r C + 1)^{1/q}$ cumple la desigualdad. Luego,

$$\int_{\mathbb{Z}} \mathcal{B}\left(\frac{|f|}{\lambda_0}\right) d\mu \leq 1.$$

Por lo tanto,

$$\|f\|_{\mathcal{B}_{q,r}} = \left\| \left\{ \frac{1}{m} \right\}_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \right\|_{\mathcal{B}_{q,r}} < \infty.$$

Notemos que si $r = 0$, $\mathcal{B}_{q,0}(t) = t^q$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{B}_{q,r}} = \|\cdot\|_{l^q}$.

Capítulo 3

Demostración del Teorema Principal

En este capítulo demostraremos el **Teorema 2.1**, que es el resultado principal que obtuvimos en este trabajo. Para ello enunciaremos y demostraremos una serie de lemas previos. Primero enunciaremos algunos resultados conocidos que utilizaremos para la demostración del teorema.

Teorema 3.1 (Teorema de extrapolación)**.** (Ver [4]) *Dada una familia $\mathcal{F}$, supongamos que para algún p_0, $0 < p_0 < \infty$, y para todo $w \in A_\infty$*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{p_0}(x)w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |g|^{p_0}(x)w(x)dx, \quad (f,g) \in \mathcal{F}.$$

Entonces, para todo $0 < p < \infty$ y $w \in A_\infty$, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{p}(x)w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |g|^{p}(x)w(x)dx, \quad (f,g) \in \mathcal{F}.$$

En este trabajo consideraremos como $(f,g) = (\|Tf\|_X, |f|)$.

Proposición (Desigualdad de Jensen)**.** (Ver [7]) *Sea $f \in L^1(E)$ una función a valores reales, $0 < |E| < \infty$. Si φ es una función convexa definida sobre $\mathbb{R}$, entonces*

$$\varphi\left(\frac{1}{|E|}\int_E f(x)dx\right) \leq \frac{1}{|E|}\int_E \varphi(f(x))dx.$$

La integral de la derecha está bien definida, pudiendo valer $+\infty$.

Un ejemplo de una función convexa es $\varphi(t) = t^{1/\delta}$ con $0 < \delta < 1$.

A continuación enunciaremos la desigualdad de John-Niremberg y algunos de sus corolarios, que utilizaremos para demostrar el Teorema Principal. Para mayor precisición ver [9].

Proposición (Desigualdad de John-Nirenberg)**.** *Para toda $f \in BMO$, para todos los cubos Q, y todo $\alpha > 0$ tenemos que*

$$|\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > \alpha\}| \leq e|Q| \exp(-A\alpha/\|f\|_{BMO}),$$

con $A = (2^n e)^{-1}$ y $f_Q := \frac{1}{|Q|}\int_Q |f|$.

Corolario 3.2. *Para todo $0 < p < \infty$, entonces existe una constante finita $B_{p,n}$ tal que*

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q|^p dx \right)^{1/p} \leq B_{p,n} \|f\|_{BMO}.$$

Observación 3.3. *Los siguientes resultados son consecuencias del corolario anterior, denotamos $b_B := \frac{1}{|B|}\int_B |b|$:*

1. *Dados $b \in BMO$, una bola B, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $q \geq 0$ y $\bar{C}_k(t) = \exp(t^{1/k})$, entonces*

$$\|(b - b_B)^k\|_{L^q,B} \leq \|(b - b_B)^k\|_{\bar{\mathcal{C}}_k,B} = \|b - b_B\|^k_{\exp L,B} \leq C\|b\|^k_{BMO}.$$

2. *Para todo $j \geq 1$ y $b \in BMO$, tenemos*

$$|b_B - b_{2^jB}| \leq \sum_{m=1}^{j} |b_{2^{m-1}B} - b_{2^mB}| \leq 2^n \sum_{m=1}^{j} \|b - b_{2^mB}\|_{L^1,2^mB} \leq 2^n j \|b\|_{BMO}.$$

Proposición (Desigualdad de Fefferman-Stein)**.** (Ver [6]) *Para todo $0 < p < \infty$, y $w \in A_\infty$,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)^p w(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} M^{\#} f(x)^p w(x) dx,$$

para todas las funciones tales que el lado izquierdo sea finito.

1 Enunciado de Lemas previos

A continuación enunciaremos unos lemas previos que usaremos en la demostración del resultado principal. Sean $b \in BMO$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Lema 3.4 (Tipo débil (1,1))**.** *Sea T el OIS asociado al núcleo $K = \{K_l\}_{l\in\mathbb{Z}}$ con $K \in H_{1,X}$, entonces T es de tipo débil $(1,1)$.*

Lema 3.5 (Desigualdad de Kolmogorov)**.** *Sea T un operador a valores vectoriales tal que T es de tipo débil $(1,1)$. Entonces si f es una función con soporte en $\tilde{Q}$ con $\tilde{Q} = \tilde{c}Q$, Q un cubo, entonces $\forall\ 0 < \epsilon < 1$,*

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \|Tf\|_X^\epsilon \right)^{1/\epsilon} \leq c \frac{1}{|\tilde{Q}|} \int_{\tilde{Q}} |f|.$$

Lema 3.6. *Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ funciones de Young tales que $\bar{\mathcal{A}}^{-1}(t)\mathcal{B}^{-1}(t)\bar{\mathcal{C}}_k^{-1}(t) \leq t$, con $\bar{\mathcal{C}}_k(t) = \exp(t^{1/k})$ para $t \geq 1$. Si T es un operador integral con núcleo K a valores vectoriales tal que $K \in H^\dagger_{\mathcal{B},X} \cap H^\dagger_{\mathcal{A},X,k}$, entonces para toda $b \in BMO$, $0 < \delta < \epsilon < 1$ y $k \geq 1$, $\exists\, C = C(\delta, \epsilon) > 0$ tal que:*

$$M_\delta^{\#}(\|T_b^k f\|_X)(x) \leq C \sum_{j=0}^{k-1} \|b\|_{BMO}^{k-j} M_\epsilon(T_b^j f)(x) + C\|b\|^k_{BMO} M_{\bar{\mathcal{A}}} f(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Observación 3.7. *En [8] fue probado el caso $k = 0$, es decir*

$$M_\delta^{\#}(\|Tf\|_X)(x) = M_\delta^{\#}(\|T_b^k f\|_X)(x) \leq C\|b\|_{BMO}^k M_{\bar{\mathcal{A}}} f(x) = C M_{\bar{\mathcal{A}}} f(x).$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

2 Demostración de los Resultados Enunciados

Demostración Teorema 2.1. Por extrapolación, basta probar el resultado para algún p_0 fijo, $1 < p_0 < \infty$.

Primero supongamos $w, b \in L^\infty$: Procedemos por inducción fuerte.

Por homogeneidad, podemos suponer que $\|b\|_{BMO} = 1$. Para cualquier $b \in BMO$ podemos escribir $\tilde{b} = \frac{b}{\|b\|_{BMO}}$, $\|\tilde{b}\|_{BMO}$ y en este caso $T_b^k f(x) = \|b\|_{BMO}^k T_{\tilde{b}}^k f(x)$.
Si $k = 0$ entonces $T_b^k = T$. Como $K \in H_{\mathcal{A},X,0}^\dagger = H_{\mathcal{A},X}^\dagger$, el resultado probado en [8] implica que T esta controlado por $M_{\bar{\mathcal{A}}}$.
Ahora, asumimos que el resultado vale para todo $0 \leq j \leq k-1$ y veamos el caso k. Fijando $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ funciones de Young tal que $\bar{\mathcal{A}}^{-1}(t)\mathcal{B}^{-1}(t)\bar{\mathcal{C}_k}^{-1}(t) \leq t$ y $K \in H_{\mathcal{B},X}^\dagger \cap H_{\mathcal{A},X,k}^\dagger$. Sea $f \in L_c^\infty$ y sin perdida de generalidad, podemos asumir $\|M_{\bar{\mathcal{A}}} f\|_{L^{p_0}(w)}$, $\|\|T_b^k f\|_X\|_{L^{p_0}(w)} < \infty$.
Sea $w \in A_\infty$, entonces $\exists\, r > 1$ (podemos tomar $r > p_0$) tal que $w \in A_r$. Observemos que $\forall\, 0 < \delta < p_0/r < 1$, tenemos $r < p_0/\delta$ y $w \in A_{p_0/\delta}$.

Veamos que $\|M_\delta(\|T_b^k f\|_X)\|_{L^{p_0}(w)} < \infty$.

$$\|M_\delta(\|T_b^k f\|_X)\|_{L^{p_0}(w)} = \|M(\|T_b^k f\|_X^\delta)\|_{L^{p_0/\delta}(w)}^{1/\delta} \leq C\|\|T_b^k f\|_X\|_{L^{p_0}(w)} < \infty.$$

Luego podemos aplicar la desigualdad de Fefferman-Stein.

Ahora, utilizando Fefferman-Stein y el **Lema 3.6**, $\forall \epsilon\,:\, \delta < \epsilon < 1$ tenemos

$$\begin{aligned}\|\|T_b^k f\|_X\|_{L^{p_0}(w)} &\leq \|M_\delta(\|T_b^k f\|_X)\|_{L^{p_0}(w)} \leq \|M_\delta^{\#}(\|T_b^k f\|_X)\|_{L^{p_0}(w)} \\ &\leq C\sum_{j=0}^{k-1}\|M_\epsilon(\|T_b^j f\|_X)\|_{L^{p_0}(w)} + C\|M_{\bar{\mathcal{A}}} f\|_{L^{p_0}(w)}.\end{aligned}$$

Como $\delta < p_0/r < 1$, elegimos $\epsilon > 0$ tal que $\delta < \epsilon < p_0/r < 1$ y entonces $w \in A_{p_0/\epsilon}$

$$\|M_\epsilon(\|T_b^j f\|_X)\|_{L^{p_0}(w)} = \|M(\|T_b^j f\|_X^\epsilon)\|_{L^{p_0/\epsilon}(w)}^{1/\epsilon} \leq C\|\|T_b^j f\|_X\|_{L^{p_0}(w)}.$$

Notemos que para $0 \leq j \leq k-1$ y $\forall\, t \geq e$ tenemos

$$\bar{\mathcal{A}}^{-1}(t)\mathcal{B}^{-1}(t)\bar{\mathcal{C}_j}^{-1}(t) = \bar{\mathcal{A}}^{-1}(t)\mathcal{B}^{-1}(t)\bar{\mathcal{C}_k}^{-1}(t)\log(t)^{j-k} \leq t,$$

entonces $K \in H_{\mathcal{B},X}^\dagger \cap H_{\mathcal{A},X,k}^\dagger \subset H_{\mathcal{B},X}^\dagger \cap H_{\mathcal{A},X,j}^\dagger$. Entonces por la hipotesis inductiva, $\forall\, 0 \leq j \leq k-1$,

$$\|M_\epsilon(\|T_b^j f\|_X)\|_{L^{p_0}(w)} \leq C\|\|T_b^j f\|_X\|_{L^{p_0}(w)} \leq C\|M_{\bar{\mathcal{A}}} f\|_{L^{p_0}(w)},$$

probando que el termino del medio es finito.

Luego tenemos que $\||\|T_b^k f\|_X\|_{L^{p_0}(w)} \le C\|M_{\bar{A}} f\|_{L^{p_0}(w)}$.

Veamos ahora que $\||\|T_b^j f\|_X\|_{L^{p_0}(w)} < \infty \ \forall\ 0 \le j \le k-1$.

Como $w \in L^\infty$, basta ver que $\||\|T_b^j f\|_X\|_{L^{p_0}} < \infty$ Como $p_0 > 1$ y $K \in H_{1,X}$ se sigue que T es un operador de Calderón-Zygmund a valores vectoriales y esta acotado en L^{p_0}. Entonces, como $f \in L_c^\infty$,

$$\||\|T_b^j f\|_X\|_{L^{p_0}} \le \left\| \sum_{i=0}^{j} C_{i,j}\, b^{j-i} \|T(b^i f)\|_X \right\|_{L^{p_0}} \le C\|b\|_{L^\infty}^j \|f\|_{L^{p_0}} < \infty.$$

Luego, sacando la suposición de $\|b\|_{BMO} = 1$, tenemos:

$$\||\|T_b^k f\|_X\|_{L^{p_0}(w)} \le C\|b\|_{BMO}^{kp_0} \|M_{\bar{\mathcal{A}}} f\|_{L^{p_0}(w)} \quad \forall\ b \in L^\infty, w \in A_\infty \cap L^\infty,$$

con $C = C(w, p_0, k, T)$.

Ahora sólo suponemos $w \in L^\infty$:

Sea $b \in BMO$ y $N \in \mathbb{N}$, definimos $b_N(x) := \begin{cases} -N & \text{si } b(x) < -N, \\ b(x) & \text{si } -N < b(x) < N, \\ N & \text{si } N < b(x). \end{cases}$

Se puede probar que $|b_N(x) - b_N(y)| \le |b(x) - b(y)|$, $\|b_N\|_{BMO} \le 2\|b\|_{BMO}$ y $b_N \in L^\infty$. Luego,

$$\begin{aligned} \||\|T_{b_N}^k f\|_X\|_{L^{p_0}(w)} &\le C\|b_N\|_{BMO}^{kp_0} \|M_{\bar{\mathcal{A}}} f\|_{L^{p_0}(w)} \\ &\le C\|b\|_{BMO}^{kp_0} \|M_{\bar{\mathcal{A}}} f\|_{L^{p_0}(w)}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

con C que no depende del N.

Como $f \in L_c^\infty$, se sigue que para $0 \le m \le k$, $(b_N)^m f \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} b^m f$ en L^q con $q > 1$. Además, como T es acotado en L^q implica que $T((b_N)^m f) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} T(b^m f)$ en L^q con $q > 1$. Luego pasando a una subsucesión la convergencia es $p.p. x \in \mathbb{R}^n$ y usando el hecho de que

$$T_{b_N}^k f(x) = \sum_{m=0}^{k} C_{m,k} b_N(x)^{k-m} T({b_N}^m f)(x),$$

obtenemos que

$$T_{b_{N_j}}^k f(x) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} T_b^k f(x)\ p.p. x \in \mathbb{R}^n.$$

Luego por el lema de Fatou tenemos:

$$\begin{aligned} \||\|T_b^k f\|_X\|_{L^{p_0}(w)}^{p_0} &= \int_{\mathbb{R}^n} \|T_b^k f(x)\|_X^{p_0} w(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{j\to\infty} \|T_{b_{N_j}}^k f(x)\|_X^{p_0} w(x)dx \\ &\le \liminf_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \|T_{b_{N_j}}^k f(x)\|_X^{p_0} w(x)dx \quad \text{con } w \in L^\infty. \end{aligned}$$

Finalmente, usando (3.12), tenemos que:

$$\begin{aligned}\| \|T_b^k f\|_X \|_{L^{p_0}(w)} &\le \liminf_{j\to\infty} \| \|T_{b_{N_j}}^k f(x)\|_X \|_{L^{p_0}(w)} \\ &\le C\|b\|_{BMO}^{kp_0} \|M_{\bar{A}} f\|_{L^{p_0}(w)}, \quad \text{con } w \in L^\infty. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Por último, veamos el caso general: Sean $b \in BMO$ y $w \in A_\infty$.
Dado $w \in A_\infty$, para cualquier $N \in \mathbb{N}$ definimos $w_N := \min\{w, N\}$. Se puede probar que $w_N \in A_\infty \cap L^\infty$. Luego, vale 3.13 con w_N, es decir,

$$\| \|T_b^k f\|_X \|_{L^{p_0}(w_N)} \le C\|b\|_{BMO}^{kp_0} \|M_{\bar{A}} f\|_{L^{p_0}(w_N)}.$$

Si consideramos la sucesión $\{w_N\}_{N\in\mathbb{N}}$, se puede observar que esta sucesión es creciente y $w_N \longrightarrow w$. Luego, usando el Teorema de Convergencia Monótona, concluimos que:

$$\| \|T_b^k f\|_X \|_{L^{p_0}(w)} \le C\|b\|_{BMO}^{kp_0} \|M_{\bar{A}} f\|_{L^{p_0}(w)}, \quad \forall\, w \in A_\infty.$$

Por lo tanto, por el Teorema de Extrapolación,

$$\| \|T_b^k f\|_X \|_{L^{p}(w)} \le C\|b\|_{BMO}^{kp} \|M_{\bar{A}} f\|_{L^{p}(w)}, \quad \forall\, 0 < p < \infty, w \in A_\infty.$$

□

2.1 Demostración de los lemas

Los **Lemas 3.4** y **3.5** son clásicos en la literatura y las demostraciones para el caso en que T toma valores en el cuerpo, aparecen en [9]. La demostración cuando T toma valores vectoriales aparece en [8]. A continuación demostraremos el **Lema 3.6**.

Demostración Lema 3.6. Consideramos $K \in H_{\mathcal{B},X}^{\dagger} \cap H_{A,X,k}^{\dagger}$ y $k \in \mathbb{N}$. Tenemos que para todo λ constante:

$$T_b^k f(x) = T((\lambda - b)^k f)(x) + \sum_{m=0}^{k-1} C_{k,m}(b(x) - \lambda)^{k-m} T_b^m f(x). \tag{3.14}$$

Dado $x \in \mathbb{R}^n$, sean B una bola tal que $x \in B$, $\tilde{B} := 2B$ y $c_B :=$ centro de B. Escribimos $f = f_1 + f_2$ con $f_1 := f\chi_{\tilde{B}}$ y tomamos $a := \|T(b_{\tilde{B}} - b)^k f_2(c_B)\|_X$. Utilizando 3.14 y tomando $\lambda = b_{\tilde{B}} = \frac{1}{|\tilde{B}|}\int_{\tilde{B}} b$,

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B ||\|T_b^k f(y)\|_X^\delta - |a|^\delta| dy\right)^{1/\delta} \leq \left(\frac{1}{|B|}\int_B ||\|T_b^k f(y)\|_X - a|^\delta dy\right)^{1/\delta}$$
$$\leq \left(\frac{1}{|B|}\int_B ||\|T_b^k f(y) - T(b_{\tilde{B}} - b)^k f_2(c_B)\|_X|^\delta dy\right)^{1/\delta}$$
$$= \left(\frac{1}{|B|}\int_B \|T_b^k f(y) - T(b_{\tilde{B}} - b)^k f_2(c_B)\|_X^\delta dy\right)^{1/\delta}$$
$$= \left(\frac{1}{|B|}\int_B \|\sum_{m=0}^{k-1} C_{k,m}(b(y) - b_{\tilde{B}})^{k-m} T_b^m f(y) + T((b_{\tilde{B}} - b)^k f)(y)\right.$$
$$\left. - T((b_{\tilde{B}} - b)^k f_2)(c_B)\|_X^\delta dy\right)^{1/\delta}$$
$$\leq C\left[\sum_{m=0}^{k-1} C_{k,m}\left(\frac{1}{|B|}\int_B \|(b(y) - b_{\tilde{B}})^{k-m} T_b^m f(y)\|_X^\delta dy\right)^{1/\delta}\right.$$
$$+ \left(\frac{1}{|B|}\int_B \|T((b_{\tilde{B}} - b)^k f_1)(y)\|_X^\delta dy\right)^{1/\delta}$$
$$\left. + \left(\frac{1}{|B|}\int_B \|T((b_{\tilde{B}} - b)^k f_2)(y) - T((b_{\tilde{B}} - b)^k f_2)(c_B)\|_X^\delta dy\right)^{1/\delta}\right]$$
$$= C[I + II + III].$$

Veamos I: Como $0 < \delta < \epsilon < 1$, por la desigualdad de Hölder con $q := \epsilon/\delta > 1$

$$I = \sum_{m=0}^{k-1} C_{k,m}\left(\frac{1}{|B|}\int_B \|(b(y) - b_{\tilde{B}})^{k-m} T_b^m f(y)\|_X^\delta dy\right)^{1/\delta}$$
$$= \sum_{m=0}^{k-1} C_{k,m}\left(\frac{1}{|B|}\int_B |b(y) - b_{\tilde{B}}|^{(k-m)\delta} \|T_b^m f(y)\|_X^\delta dy\right)^{1/\delta}$$
$$\leq \sum_{m=0}^{k-1} C_{k,m}\left(\frac{1}{|B|}\int_B |b(y) - b_{\tilde{B}}|^{(k-m)\delta q'} dy\right)^{1/\delta q'} \left(\frac{1}{|B|}\int_B \|T_b^m f(y)\|_X^{\delta q} dy\right)^{1/\delta q}$$
$$\leq c\sum_{m=0}^{k-1} C_{k,m}\|b\|_{BMO}^{k-m} M_\epsilon(\|T_b^k f\|_X)(x),$$

donde la última desigualdad, se deduce de la **Observación 3.3**.

Veamos II: Por el **Lema 3.4**, T es de tipo débil $(1,1)$, luego podemos usar el **Lema 3.5**. Además usaremos que $H_{\mathcal{B}} \subset H_1$ y la desigualdad de Hölder generalizada.

$$
\begin{aligned}
II &= \left(\frac{1}{|B|}\int_B \|T((b_{\tilde{B}}-b)^k f_1)(y)\|_X^\delta dy\right)^{1/\delta} \le C\frac{1}{|\tilde{B}|}\int_{\tilde{B}} |b_{\tilde{B}}-b(y)|^k |f_1|(y)dy \\
&\le C\|(b_{\tilde{B}}-b)^k f_1\|_{\mathcal{B},\tilde{B}} \le C\|(b_{\tilde{B}}-b)^k\|_{\bar{\mathcal{C}}_k,\tilde{B}}\|f\|_{\bar{\mathcal{A}},\tilde{B}} \\
&\le C\|b\|_{BMO}^k M_{\bar{\mathcal{A}}} f(x),
\end{aligned}
$$

donde en la última desigualdad se utiliza la **Observación** 3.3.

Veamos III: Por la desigualdad de Jensen y el hecho de que $\|\cdot\|_X$ es creciente y cumple la condición del módulo.

$$
\begin{aligned}
III &\le \frac{1}{|B|}\int_B \|T((b_{\tilde{B}}-b)^k f_2)(y) - T((b_{\tilde{B}}-b)^k f_2)(c_B)\|_X dy \\
&= \frac{1}{|B|}\int_B \left\|\left\{\int_{\tilde{B}^c} (K_l(y-z)-K_l(c_B-z))(b_{\tilde{B}}-b(z))^k f(z)dz\right\}\right\|_X dy \\
&\le \frac{1}{|B|}\int_B \left\|\left\{\left|\int_{\tilde{B}^c} (K_l(y-z)-K_l(c_B-z))(b_{\tilde{B}}-b(z))^k f(z)dz\right|\right\}\right\|_X dy \\
&\le \frac{1}{|B|}\int_B \left\|\left\{\int_{\tilde{B}^c} |K_l(y-z)-K_l(c_B-z)||b_{\tilde{B}}-b(z)|^k |f(z)|dz\right\}\right\|_X dy.
\end{aligned}
$$

Trabajemos ahora con $\displaystyle\int_{\tilde{B}^c} |K_l(y-z)-K_l(c_B-z)||b_{\tilde{B}}-b(z)|^k |f(z)|dz.$

Para $j \ge 1$, sea $S_j := 2^{j+1}B \backslash 2^j B$ y $B_j := 2^{j+1}B$. Luego, $\tilde{B}^c = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$ y observemos que los $\{S_j\}$ son disjuntos 2 a 2. Considerando $R :=$ radio de B, tenemos que,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\tilde{B}^c} |K_l(y-z)-K_l(c_B-z)||b_{\tilde{B}}-b(z)|^k |f(z)|dz \\
&\qquad \le \sum_{j=1}^{\infty}\int_{S_j} |b(z)-b_{\tilde{B}}|^k |K_l(y-z)-K_l(c_B-z)||f(z)|dz \\
&\qquad \le \sum_{j=1}^{\infty}\int_{B_j} |b(z)-b_{B_j}|^k |K_l(y-z)-K_l(c_B-z)||f(z)|\chi_{S_j}dz \\
&\qquad\quad + \sum_{j=1}^{\infty}\int_{B_j} |b_{B_j}-b_{\tilde{B}}|^k |K_l(y-z)-K_l(c_B-z)||f(z)|\chi_{S_j}dz \\
&\qquad \le C\sum_{j=1}^{\infty}(2^j R)^n \frac{1}{|B_j|}\int_{B_j} |b(z)-b_{B_j}|^k |K_l(y-z)-K_l(c_B-z)||f(z)|\chi_{S_j}dz \\
&\qquad\quad + C\sum_{j=1}^{\infty}(2^j R)^n j^k \frac{\|b\|_{BMO}^k}{|B_j|}\int_{B_j} |K_l(y-z)-K_l(c_B-z)||f(z)|\chi_{S_j}dz \\
&\qquad = C[IV+V],
\end{aligned}
$$

donde la última desigualdad es por la **Observación 3.3**.

Utilizando la desigualdad de Hölder generalizada para funciones de Young,

$$\begin{aligned}
IV &= \sum_{j=1}^{\infty}(2^jR)^n\frac{1}{|B_j|}\int_{B_j}|b(z)-b_{B_j}|^k|K_l(y-z)-K_l(c_B-z)||f(z)|\chi_{S_j}dz\\
&\leq c\sum_{j=1}^{\infty}(2^jR)^n\|(b-b_{B_j})^k\|_{\bar{\mathcal{C}}_k,B_j}\|f\|_{\bar{\mathcal{A}},B_j}\|(K_l(y-\cdot)-K_l(c_B-\cdot))\chi_{S_j}\|_{\mathcal{B},B_j}\\
&\leq c\|b\|_{BMO}^kM_{\bar{\mathcal{A}}}f(x)\sum_{j=1}^{\infty}(2^jR)^n\|(K_l(y-\cdot)-K_l(c_B-\cdot))\chi_{S_j}\|_{\mathcal{B},B_j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V &= \sum_{j=1}^{\infty}(2^jR)^nj^k\frac{\|b\|_{BMO}^k}{|B_j|}\int_{B_j}|K_l(y-z)-K_l(c_B-z)||f(z)|\chi_{S_j}dz\\
&\leq c\|b\|_{BMO}^k\sum_{j=1}^{\infty}(2^jR)^nj^k\|(K_l(y-\cdot)-K_l(c_B-\cdot))\chi_{S_j}\|_{\mathcal{A},B_j}\|f\|_{\bar{\mathcal{A}},B_j}\\
&\leq c\|b\|_{BMO}^kM_{\bar{\mathcal{A}}}f(x)\sum_{j=1}^{\infty}(2^jR)^nj^k\|(K_l(y-\cdot)-K_l(c_B-\cdot))\chi_{S_j}\|_{\mathcal{A},B_j}.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
III &\leq \frac{1}{|B|}\int_B\Bigg\|\Bigg\{\tilde{c}\|b\|_{BMO}^kM_{\bar{\mathcal{A}}}f(x)\sum_{j=1}^{\infty}(2^jR)^n\|(K_l(y-\cdot)-K_l(c_B-\cdot))\chi_{S_j}\|_{\mathcal{B},B_j}\\
&\quad+\tilde{c}\|b\|_{BMO}^kM_{\bar{\mathcal{A}}}f(x)\sum_{j=1}^{\infty}(2^jR)^nj^k\|(K_l(y-\cdot)-K_l(c_B-\cdot))\chi_{S_j}\|_{\mathcal{A},B_j}\Bigg\}\Bigg\|_X dy\\
&\leq \tilde{c}\|b\|_{BMO}^kM_{\bar{\mathcal{A}}}f(x)\frac{1}{|B|}\int_B\Bigg[\Bigg\|\sum_{j=1}^{\infty}(2^jR)^n\|(K_l(y-\cdot)-K_l(c_B-\cdot))\chi_{S_j}\|_{\mathcal{B},B_j}\Bigg\|_X\\
&\quad+\Bigg\|\sum_{j=1}^{\infty}(2^jR)^nj^k\|(K_l(y-\cdot)-K_l(c_B-\cdot))\chi_{S_j}\|_{\mathcal{A},B_j}\Bigg\|_X\Bigg]dy\\
&\leq C\|b\|_{BMO}^kM_{\bar{\mathcal{A}}}f(x)\frac{1}{|B|}\int_B dy = C\|b\|_{BMO}^kM_{\bar{\mathcal{A}}}f(x),
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad se utiliza el hecho que $K \in H^{\dagger}_{\mathcal{B},X}\cap H^{\dagger}_{\mathcal{A},X,k}$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{|B|}\int_B\left|\|T_b^k(y)\|_X^{\delta}-|a|^{\delta}\right|dy\right)^{1/\delta} &\leq C\sum_{m=0}^{k-1}C_{k,m}\|b\|_{BMO}^{k-m}M_{\epsilon}(\|T_b^kf\|_X)(x)\\
&\quad+C\|b\|_{BMO}^kM_{\bar{\mathcal{A}}}f(x).
\end{aligned}$$

□

Capítulo 4

Conclusión

Primero se plantearon las condiciones introducidas por los autores Lorente, Martell, Riveros y de la Torre, en [11], que tiene que cumplir un núcleo K asociado a un Conmutador de Operador Integral Singular a valores vectoriales, para que este acotado por una clase de operador maximal: el operador $M_{\bar{\mathcal{A}}}$ con $\mathcal{A}$ función de Young. Estas son las condiciones $L^{\mathcal{A},X,k}$-Hörmander con $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Luego se mencionaron la condición $L^{\mathcal{A},X}_{\dagger}$-Hörmander, introducidas por la autora Gallo en [8], que es un poco más débil que la condición $L^{\mathcal{A},X,0}$-Hörmander.

Luego se logró definir una nueva condición: llamada $L^{\mathcal{A},X,k}_{\dagger}$-Hörmander con $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, que resulta ser un poco más débil que la condición $L^{\mathcal{A},X,k}$-Hörmander con $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y es una generalización de la condición $L^{\mathcal{A},X}_{\dagger}$-Hörmander.

Con esta nueva definición se pudieron probar resultados para operadores asociados a núcleos $K \in H^{\dagger}_{\mathcal{A},X,k}$ (**Teorema 2.1**), similares a los ya conocidos para núcleos que satisfacen la condición $L^{\mathcal{A},X,k}$-Hörmander.

Este teorema nos permitió demostrar una acotación conocida para el Conmutador del Operador Cuadrado, S^k_b, ver [13], que mejora la cota probada con los resultados ya conocidos para núcleos que satisfacen la condición $L^{\mathcal{A},X,k}$-Hörmander.

En realidad, nos permitió extender acotación conocida a una familia de operadores cuyo núcleo cumpla la condición $L^{\mathcal{A},X,k}_{\dagger}$-Hörmander.

Mas precisamente, dado $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, si $\mathcal{B}(t) = \exp(t) - 1$ y $\mathcal{A}(t) = \exp(t^{\frac{1}{1+k}})$. Sea T un operador integral singular tal que su núcleo asociado $K \in H^{\dagger}_{\mathcal{B},X} \cap H^{\dagger}_{\mathcal{A},K,k}$, entonces existe $c > 0$ tal que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|T^k_b f(x)\|^p_X w(x)dx \leq c \int_{\mathbb{R}^n} (M_{\bar{\mathcal{A}}} f(x))^p w(x)dx \leq c \int_{\mathbb{R}^n} (M^{k+2} f(x))^p w(x)dx,$$

siempre que $\int_{\mathbb{R}^n} \|T^k_b f(x)\|^p_X w(x)dx < \infty$.

Un ejemplo de que esta familia no es vacía es el Conmutador del Operador Cuadrado, se demostró en detalle que pertenece a la familia y cumple la desigualdad anterior. Luego se generalizó la definición del este operador a una familia de operadores $S^k_{b,\mathcal{B}}$

con $\mathcal{B}$ función de Young, que cumple una cierta propiedad de convergencia, esta es:

$$\left\| \left\{ \frac{1}{m} \right\}_{m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \right\|_{\mathcal{B}} =: C_{A_{\mathcal{B}}} < \infty.$$

Para estos operadores $S^k_{b,\mathcal{B}}$ se generalizó el resultado obtenido para el S^k_b como sigue:

$$\int_{\mathbb{R}} |S^k_{b,\mathcal{B}} f(x)|^p w(x)dx \leq c \int_{\mathbb{R}} (M_{\bar{A}} f(x))^p w(x)dx \leq c \int_{\mathbb{R}} (M^{k+2} f(x))^p w(x)dx,$$

siempre que $\int_{\mathbb{R}} |S^k_{b,\mathcal{B}} f(x)|^p w(x)dx < \infty$.

También se planteó una interrogante que no pudimos contestar, esta es:
Se puede obtener una acotación para el conmutador del operador cuadrado, S^k_b del tipo:

$$\int_{\mathbb{R}} |S^k_b f(x)|^p w(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \|T^k_b f(x)\|^p_{l^2} w(x)dx \leq c \int_{\mathbb{R}} (M^{k+1} f(x))^p w(x)dx,$$

Este interrogante continúa siendo un problema abierto.

Propuestas para seguir investigando
Alguna propuesta para continuar investigando en un futuro trabajo es la siguiente.

En [1], Bernardis, Dalmasso y Pradolini, probaron resultados similares a los probados en [11], trabajando en los espacios de Lebesgue variables, $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Definición 4.1. Sea $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) := \{p : \mathbb{R}^n \to [1, \infty) \,:\, p \text{ es una función medible}\}$.
Dada $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ y $E \subset \mathbb{R}^n$ medible, definimos $p^-_E := \operatorname*{essinf}_{x\in E} p(x)$ y $p^+_E := \operatorname*{esssup}_{x\in E} p(x)$, además denotamos $p^- = p^-_{\mathbb{R}^n}$ y $p^+ = p^+_{\mathbb{R}^n}$.
Definimos $\mathcal{P}^*(\mathbb{R}^n) = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) : p^+ < \infty\}$.

Dado $p \in \mathcal{P}^*(\mathbb{R}^n)$, decimos que una función medible f pertenece a $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ si para algún $\lambda > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right)^{p(x)} dx < \infty.$$

En este caso definimos la norma en $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ como

$$\|f\|_{p(\cdot)} := \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right)^{p(x)} dx \leq 1 \right\}.$$

Se puede probar que $(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{p(\cdot)})$ es un espacio de Banach.

Definición 4.2. Decimos que $p \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ (o $p \in LH(\mathbb{R}^n)$) si $p \in \mathcal{P}^*(\mathbb{R}^n)$ y satisface las siguientes condiciones:

$$|p(x) - p(y)| \le \frac{C}{\log(e + 1/|x-y|)} \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n, \tag{4.15}$$

y

$$|p(x) - p(y)| \le \frac{C}{\log(e + |x|)} \quad \forall\, |y| \ge |x|. \tag{4.16}$$

Definición 4.3. Dada $p \in \mathcal{P}^*(\mathbb{R}^n)$ decimos que un peso $w \in A_{p(\cdot)}$ si existe una constante $C > 0$ tal que para toda bola B, vale

$$\|w\chi_B\|_{p(\cdot)} \|w^{-1}\chi_B\|_{p(\cdot)} \le C|B|.$$

Definición 4.4. Dado $1 < q < \infty$. Decimos que una función de Young η satisface la condición B_p si existe una constante positiva c tal que

$$\int_c^\infty \frac{\eta(t)}{t^q} \frac{dt}{t} < \infty.$$

Teorema 4.5. *Dada $p \in \mathcal{P}^*(\mathbb{R}^n)$, $1 \le \beta < p^-$. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ funciones de Young tales que $\bar{\mathcal{A}}^{-1}(t)\mathcal{B}^{-1}(t)(\log t)^k \le t$ para $t \ge t_0 > 1$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $\bar{\mathcal{A}} \in B_\rho$, para todo $\rho > \beta$. Sean $b \in BMO$ y T_b^k el conmutador de orden k del operador integral singular T con núcleo $K \in H_{\mathcal{B}} \cap H_{\mathcal{A},k}$. Si $w^\beta \in \mathcal{A}_{\frac{p(\cdot)}{\beta}}$, entonces existe una constante $C > 0$ tal que:*

$$\|wT_b^k f\|_{p(\cdot)} \le C\|b\|_{BMO}^k \|wf\|_{p(\cdot)}, \tag{4.17}$$

para toda $f \in L_c^\infty$, siempre que el lado izquierdo sea finito.

Una propuesta para continuar este trabajo es intentar adaptar este trabajo para el caso de los espacios de Lebesgue variables. Es decir, buscar una condición para núcleos de operadores integrales singulares. De esta forma, se obtendría un resultado similar al **Teorema 4.5** para núcleos que satisfacen la nueva condición y como corolario de este, siguiente desigualdad:

$$\int_{\mathbb{R}} |S_b^k f(x)|^{p(x)} w(x)dx \le c \int_{\mathbb{R}} (M^{k+2} f(x))^{p(x)} w(x)dx.$$

Bibliografía

[1] A. Bernardis, E. Dalmasso, G.Pradolini, *Generalized maximal funtions and related operators on weights Musielak-Orlicz spaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **39** (2014), 1-28.

[2] R. Coifman, *Distribution function inequalities for singular integrals,* Proc. Acad. Sci. U.S.A. **69**, (1972), 2838-2839.

[3] R. Coifman, R. Rochberg and G. Weiss *Factorization theorems for Hardy spaces in several variables,* Ann. of Math. **103**, (1976), 611-635.

[4] D. Cruz-Uribe, J.M Martell, C.Pérez, *Extrapolation from A_∞ weights and applications*, J. Funct. Anal. **213**, (2004), 412-439

[5] J. Duoandikoetxea, *Fourier Analysys*. Graduate Studants in Mathematics, Volumen 29. American Mthematical Society. (2001)

[6] C. Fefferman, E.M. Stein, *H^p spaces in several variables,* Acta Math. **129**, (1972) 137-193.

[7] N. Fava, F. Zo, *Medida e integral de Lebesgue,* Red Olimpica (1996).

[8] A.L. Gallo *Acotación de operadores integrales dados por un núcleo a valores vectoriales que satisface una condición de tipo Hörmander y aplicaciones* Trabajo Final de la licenciatura en Matemática, FaMAF, 2015.

[9] L. Grafakos, *Modern Fourier Analysis,2nd edition,* Graduate Texts in Mathematics. Volumen 250 Springer (2009)

[10] D.S. Kurtz and R.L. Wheeden, *Results on weighted norm inequalities for multipliers*, Trans. Amer. Math. Soc. **255** (1979), 343–362.

[11] M. Lorente, J.M. Martell, M.S. Riveros and A. de la Torre, *Generalized Hörmander's conditions, commutators and weights*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol **342** (2008) 1399–1425.

[12] M. Lorente, M.S. Riveros and A. de la Torre *Weighted estimates for singular integral operators satisfying Hörmander's conditions of Young type*, Journal of Fourier Analysis and Aplications. Vol 11, No 5 (2005) 497-509.

[13] M. Lorente, M.S. Riveros and A. de la Torre *On the Coifman type inequality for the oscillation of the one-sided averages* , Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol 336, Issue 1,(2007) 577-592.

[14] R. O'Neil, *Fractional integration in Orlicz spaces,* Trans. Amer. Math. Soc. **115**, (1963), 300-328.

[15] J.L. Rubio de Francia, F.J. Ruiz and J. L. Torrea, *Calderón-Zygmund theory for vector-valued functions,* Adv. in Math. **62**, (1986) 7-48.

[16] O. van Gaans, *Combination of Orlicz norms,* Bachelorscriptie, 17 Januari 2013, Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden.