



Universidad  
Nacional  
de Córdoba

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

ESCUELA I.M.E – I.M. – T.M.

PROYECTO INTEGRADOR

**“SIMULACIÓN NUMÉRICA DE ENSAYOS PARA  
BICICLETAS DE MONTAÑA SEGÚN UNE-EN 14766”**

MATÍAS EZEQUIEL CORTASSA

INGENIERÍA MECÁNICA

Director: Dr. Ing. José Stuardi

Co-Director: Msc. Ing. Guillermo Chiappero

Córdoba, Octubre de 2015







## Agradecimientos

Se brinda un especial agradecimiento a mi familia, que ofreció todo el apoyo no sólo durante la realización del proyecto, sino a lo largo de la carrera.

A los directores por proponer y orientar este trabajo, contribuyendo a ampliar mi formación profesional.

A los integrantes del tribunal por dedicar su valioso tiempo a tratar el presente trabajo.

A la Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales, por los conocimientos y las experiencias recibidas, que se enfocan adecuadamente a la reciente actividad laboral desarrollada.



# Índice de contenidos

1	Introducción, objetivos y organización .....	1
1.1	Introducción .....	1
1.2	Objetivos del presente trabajo.....	3
1.2.1	Objetivos particulares .....	3
1.3	Alcance del trabajo .....	8
1.4	Organización del proyecto integrador.....	9
2	Marco conceptual teórico empleado .....	11
2.1	Resolución numérica de ecuaciones diferenciales .....	11
2.2	Método de elementos finitos.....	11
2.2.1	Procedimiento .....	12
2.2.2	Equilibrio y trabajos virtuales.....	12
2.3	Procedimientos de análisis de tensión-deformación.....	18
2.3.1	Análisis estático.....	18
2.3.2	Análisis dinámico .....	19
2.4	Software de elementos finitos.....	26
2.4.1	Modelado y análisis en Abaqus .....	26
2.4.2	Componentes de un modelo de análisis de Abaqus.....	27
2.5	Modelos de plasticidad .....	29
2.5.1	Teoría de plasticidad incremental.....	29
2.5.2	Elasto-plasticidad isotrópica.....	31
2.6	Modelos de contacto .....	33
2.6.1	Métodos de integración .....	34
2.6.2	Bases del contacto .....	34
2.6.3	Enfoques para definir el contacto .....	35
2.6.4	Definición de la superficie.....	35
2.6.5	Discretización .....	35
2.6.6	Formulaciones .....	35
2.6.7	Modelos constitutivos.....	37
2.6.8	Método de ejecución de restricciones.....	39
3	Validación del uso del método de elementos finitos.....	41
3.1	Análisis estático .....	41
3.1.1	Casos planteados .....	42
3.2	Análisis dinámico .....	44
3.2.1	Descomposición modal .....	44

3.2.2	Casos planteados .....	44
4	Modelos de cálculo utilizados .....	49
4.1	Descripción de los componentes del ensayo .....	49
4.1.1	Descripción del cuadro de bicicleta .....	49
4.1.2	Descripción del percutor .....	70
4.1.3	Descripción del rodillo.....	72
4.2	Modelos planteados.....	74
4.2.1	Modelos del conjunto cuadro-tija en la configuración de ensayo.....	74
4.2.2	Modelo de contacto entre el percutor y el rodillo .....	95
5	Análisis de componentes previo a las simulaciones numéricas.....	105
5.1	Análisis del comportamiento del cuadro-tija en la configuración de ensayo.....	105
5.1.1	Análisis estático .....	106
5.1.2	Análisis dinámicos .....	118
5.1.3	Casos planteados .....	122
5.2	Análisis del choque entre el percutor y el rodillo.....	137
5.2.1	Casos planteados .....	139
5.3	Estimación de parámetros de contacto .....	144
5.3.1	Modelo de Kelvin-Voigt .....	145
5.3.2	Modelo histerético.....	146
5.3.3	Modelo de Maxwell .....	147
5.3.4	Resultados .....	149
6	Simulación numérica del ensayo de choque.....	157
6.1	Simulación del ensayo mediante masas concentradas .....	157
6.1.1	Modelo plástico perfecto.....	158
6.1.2	Modelo elástico perfecto .....	165
6.1.3	Modelo de Newton.....	166
6.1.4	Modelo de Kelvin-Voigt .....	168
6.1.5	Modelo de Maxwell .....	173
6.1.6	Respuestas libres comunes a los modelos puntuales .....	178
6.1.7	Resultados .....	182
6.2	Simulación del ensayo mediante elementos finitos.....	202
6.2.1	Modelo de simulación de impacto con cuerpos puntuales.....	202
6.2.2	Modelo de simulación de impacto con cuerpos tridimensionales.....	216
7	Conclusiones.....	225
7.1	Conclusiones respecto a la simulación numérica del ensayo .....	225
7.2	Conclusiones académicas .....	226
7.3	Trabajos futuros.....	227



8	Bibliografía.....	229
9	Apéndice.....	231
9.1	Formulación de espacio de estado .....	231
9.2	Método de Runge-Kutta.....	232



## Índice de figuras

Figura 1.2-1: Diagrama de flujo de la preparación de los componentes antes del ensayo, (1). .5	
Figura 1.2-2: Conjunto cuadro y horquilla delantera. Ensayo de choque (caída de una masa), (1). . . . .	6
Figura 2.4-1: Esquema de las etapas del método de elementos finitos, (8). . . . .	26
Figura 2.6-1: Modelos para la relación entre presión de contacto e interferencia, (6). . . . .	38
Figura 3.1-1: Modelo estático de viga empotrada-libre con soluciones analíticas conocidas. .41	
Figura 3.1-2: Perfiles de las secciones transversales propuestas para verificar los modelos. ....	41
Figura 3.1-3: Desplazamiento estático en el extremo libre para vigas de distintas secciones. .43	
Figura 3.2-1: Modelo de viga empotrada-libre para aplicar la descomposición modal. . . . .	44
Figura 3.2-2: Frecuencia de vibración transversal libre para viga de perfil cuadrado. . . . .	45
Figura 3.2-3: Frecuencia de vibración transversal libre para viga de perfil circular. . . . .	46
Figura 3.2-4: Frecuencia de vibración transversal libre para viga de perfil anular. . . . .	46
Figura 4.1-1: Recorrido de suspensión para diferentes disciplinas de Mountain Bike, (12). . . . .	51
Figura 4.1-2: Principales componentes de un cuadro de bicicleta convencional. . . . .	53
Figura 4.1-3: Sistema coordenado definido para el cuadro. . . . .	53
Figura 4.1-4: Esquema de la configuración geométrica para el cuadro Kinesis K-210, (13). .54	
Figura 4.1-5: Detalle del tubo de sillín. . . . .	55
Figura 4.1-6: Configuración geométrica de los tubos soportes de sillín. . . . .	56
Figura 4.1-7: Configuración geométrica de los tubos soportes de cadena. . . . .	58
Figura 4.1-8: Detalle del tubo de dirección. . . . .	59
Figura 4.1-9: Configuración geométrica para definir el tubo superior. . . . .	60
Figura 4.1-10: Representación del modelo plano del cuadro. . . . .	63
Figura 4.1-11: Representación del modelo tridimensional del cuadro. . . . .	66
Figura 4.1-12: Esquema del percutor requerido por la Norma. . . . .	70
Figura 4.1-13: Curva de relación densidad-altura del percutor. . . . .	71
Figura 4.1-14: Esquema del rodillo colocado sobre el extremo de la horquilla. . . . .	72
Figura 4.1-15: Zona de densidad-semiancho de rodillo permitidas por la Norma. . . . .	74
Figura 4.2-1: Conjunto cuadro-tija en la configuración de ensayo . . . . .	75
Figura 4.2-2: Ensamble del conjunto cuadro-tija en la configuración de ensayo. . . . .	77
Figura 4.2-3: Restricciones que acoplan las partes del modelo. . . . .	78
Figura 4.2-4: Condiciones de contorno para el modelo del conjunto cuadro-tija. . . . .	79
Figura 4.2-5: Malla de elementos de viga para el conjunto cuadro-tija. . . . .	79
Figura 4.2-6: Orientación de las secciones de vigas asignadas al modelo del cuadro. . . . .	80
Figura 4.2-7: Posibilidad de evolución en los modelos de elementos finitos del conjunto cuadro-tija. . . . .	81
Figura 4.2-8: Diferencias entre elementos de cáscara convencionales y continuas, (5). . . . .	82
Figura 4.2-9: Ensamble del conjunto cuadro-tija en la configuración de ensayo. . . . .	84
Figura 4.2-10: Restricciones que acoplan las regiones del modelo de distinto tipo. . . . .	85
Figura 4.2-11: Condiciones de contorno del modelo de cáscaras del cuadro. . . . .	86
Figura 4.2-12: Particiones axiales y transversales sobre los tubos del cuadro. . . . .	87
Figura 4.2-13: Técnicas empleadas para mallar el cuadro con elementos de cáscaras. . . . .	87
Figura 4.2-14: Malla de elementos de vigas y cáscaras, para el conjunto cuadro-tija. . . . .	88
Figura 4.2-15: Modelo lineal de masas puntuales que representa al conjunto cuadro-tija. . . . .	90
Figura 4.2-16: Modelo lineal de un grado de libertad dinámico del conjunto cuadro-tija. . . . .	93
Figura 4.2-17: Modelo lineal de dos grados de libertad dinámicos del conjunto cuadro-tija. .94	
Figura 4.2-18: Modelo propuesto para estudiar la interacción de contacto. . . . .	95
Figura 4.2-19: Relación seleccionada entre densidad y altura del percutor. . . . .	96

Figura 4.2-20: Representación geométrica de un cuarto del percutor. ....	97
Figura 4.2-21: Relación seleccionada entre densidad y semiancho del rodillo. ....	98
Figura 4.2-22: Representación geométrica de un cuarto de rodillo. ....	98
Figura 4.2-23: Curva de plastificación del percutor y del rodillo. ....	100
Figura 4.2-24: Instancias que participan en el ensamble del modelo de contacto. ....	101
Figura 4.2-25: Condiciones de apoyo y cargas planteadas en el modelo de contacto. ....	102
Figura 4.2-26: Restricciones de acoplamiento entre el percutor y el conector axial. ....	102
Figura 4.2-27: Malla de elementos hexaedros para modelar los cuerpos que impactan. ....	104
Figura 5.1-1: Análisis estático del modelo plano del cuadro. ....	106
Figura 5.1-2: Esquema de las secciones transversales empleadas para el modelo del cuadro. ....	113
Figura 5.1-3: Contribuciones relativas de los componentes al desplazamiento en el extremo según modelo de vigas plano, con formulación de Timoshenko. ....	116
Figura 5.1-4: Contribuciones relativas de los componentes a la masa total del cuadro. ....	116
Figura 5.1-5: Tipos de deformación elástica relativa en cada componente. ....	117
Figura 5.1-6: Amplitud de la fuerza propuesta para contrastar la respuesta dinámica. ....	120
Figura 5.1-7: Representación de secciones de espesor variable. ....	124
Figura 5.1-8: Distribución de espesores de los tubos del cuadro propuesto. ....	126
Figura 5.1-9: Distribución de masa y energía elástica obtenida en el análisis estático. ....	126
Figura 5.1-10: Forma de los primeros 10 modos naturales del conjunto cuadro-tija. ....	129
Figura 5.1-11: Contribuciones de los modos a la masa específica en la dirección x. ....	129
Figura 5.1-12: Deformadas de los dos modos más relevantes del conjunto cuadro-tija. ....	130
Figura 5.1-13: Modelo lineal de un grado de libertad dinámico. ....	131
Figura 5.1-14: Modelo lineal de dos grados de libertad dinámicos. ....	132
Figura 5.1-15: Magnitud de la fuerza propuesta para contrastar modelos. ....	133
Figura 5.1-16: Variables cinemáticas según el modelo de vigas y el modelo puntual. ....	134
Figura 5.1-17: Variables cinemáticas según dos procedimientos de integración. ....	136
Figura 5.2-1: Superficie utilizada para obtener la fuerza de contacto. ....	138
Figura 5.2-2: Variación de la fuerza de contacto para distintas velocidades de impacto. ....	140
Figura 5.2-3: Magnitud de la fuerza de contacto para distintas velocidades de impacto. ....	140
Figura 5.2-4: Período de contacto para diferentes velocidades de impacto. ....	141
Figura 5.2-5: Impulso total para impacto entre cuerpos a diferentes velocidades. ....	141
Figura 5.2-6: Variación del impulso para distintas velocidades de impacto. ....	142
Figura 5.2-7: Energía plástica disipada para distintas velocidades de impacto. ....	142
Figura 5.2-8: Coeficiente de restitución en función de la velocidad de impacto. ....	143
Figura 5.3-1: Fuerza de contacto para el primer impacto entre el percutor y el rodillo. ....	150
Figura 5.3-2: Desplazamientos relativos entre el percutor y el rodillo. ....	150
Figura 5.3-3: Diferencia de velocidad de cuerpo rígido entre el rodillo y el percutor. ....	151
Figura 5.3-4: Comparación entre el modelo numérico y el modelo de Kelvin-Voigt. ....	152
Figura 5.3-5: Comparación entre el modelo numérico y el modelo histerético. ....	153
Figura 5.3-6: Comparación entre el modelo numérico y el modelo de Maxwell. ....	154
Figura 6.1-1: Diagrama del modelo plástico perfecto despreciando la masa del extremo. ...	159
Figura 6.1-2: Diagrama del modelo plástico perfecto considerando la masa del extremo. ...	163
Figura 6.1-3: Diagrama del modelo elástico perfecto. ....	165
Figura 6.1-4: Diagrama del modelo de Newton. ....	166
Figura 6.1-5: Diagrama del modelo de Kelvin-Voigt. ....	168
Figura 6.1-6: Diagrama del modelo de Maxwell. ....	173
Figura 6.1-7: Estimación del amortiguamiento del cuadro según el modelo plástico perfecto. ....	184
Figura 6.1-8: Resultados del modelo plástico perfecto con amortiguamiento viscoso del cuadro. ....	185

Figura 6.1-9: Resultados del modelo plástico perfecto con amortiguamiento histerético del cuadro. ....	186
Figura 6.1-10: Estimación de amortiguamiento del cuadro según el modelo elástico perfecto. ....	188
Figura 6.1-11: Resultados del modelo elástico perfecto con amortiguamiento viscoso del cuadro. ....	189
Figura 6.1-12: Resultados del modelo elástico perfecto con amortiguamiento histerético del cuadro. ....	190
Figura 6.1-13: Estimación del amortiguamiento del cuadro según el modelo de Newton. ....	192
Figura 6.1-14: Resultados del modelo de Newton con amortiguamiento viscoso del cuadro. ....	193
Figura 6.1-15: Resultados del modelo de Newton con amortiguamiento histerético del cuadro. ....	194
Figura 6.1-16: Estimación del amortiguamiento del cuadro según el modelo de Kelvin-Voigt. ....	196
Figura 6.1-17: Resultados del modelo de Kelvin-Voigt con amortiguamiento de cuadro y de contacto, ambos viscosos. ....	197
Figura 6.1-18: Resultados del modelo de Kelvin-Voigt con amortiguamiento de cuadro y de contacto, ambos histeréticos. ....	198
Figura 6.1-19: Estimación del amortiguamiento del cuadro según el modelo de Maxwell. ....	200
Figura 6.1-20: Resultados del modelo de Maxwell con amortiguamiento viscoso del cuadro. ....	201
Figura 6.2-1: Modelo de simulación mediante impacto de cuerpos puntuales. ....	202
Figura 6.2-2: Relación entre la fuerza de contacto y la separación de las masas puntuales. ....	204
Figura 6.2-3: Aceleración del percutor durante un contacto puntual. ....	204
Figura 6.2-4: Representación de las aceleraciones durante un impacto puntual. ....	205
Figura 6.2-5: Relación entre el incremento de tiempo y la aceleración máxima. ....	206
Figura 6.2-6: Variables cinemáticas obtenidas mediante el modelo de impacto puntual. ....	207
Figura 6.2-7: Cinemática y disipación plástica obtenida mediante modelo de vigas. ....	208
Figura 6.2-8: Cinemática y disipación plástica obtenida mediante modelo de superficies. ....	209
Figura 6.2-9: Estimación del desplazamiento permanente del extremo antes del equilibrio. ....	210
Figura 6.2-10: Plastificación equivalente luego del impacto según el modelo de vigas del cuadro. ....	210
Figura 6.2-11: Plastificación equivalente luego del impacto según el modelo de superficie del cuadro. ....	211
Figura 6.2-12: Zonas de mayor plastificación equivalente luego del impacto. ....	212
Figura 6.2-13: Distribución de plastificación sobre los componentes del ensayo. ....	213
Figura 6.2-14: Distribución de puntos de integración de secciones de vigas y cáscaras. ....	214
Figura 6.2-15: Fuerza de contacto obtenida mediante el choque de cuerpos puntuales. ....	215
Figura 6.2-16: Impulso de contacto obtenido mediante el choque de cuerpos puntuales. ....	216
Figura 6.2-17: Ensamble de instancias que participan de la simulación del ensayo. ....	217
Figura 6.2-18: Restricción que acopla al rodillo y la tija maciza. ....	218
Figura 6.2-19: Variables cinemáticas obtenidas mediante el modelo de impacto de cuerpos tridimensionales. ....	219
Figura 6.2-20: Distribución de plastificación sobre los componentes del ensayo. ....	220
Figura 6.2-21: Variación de energía plástica sobre los componentes del ensayo. ....	221
Figura 6.2-22: Fuerza de contacto entre el percutor y el rodillo. ....	222
Figura 6.2-23: Etapa inicial de la fuerza de contacto entre el percutor y el rodillo. ....	222
Figura 6.2-24: Etapa media de la fuerza de contacto entre el percutor y el rodillo. ....	223
Figura 6.2-25: Etapa final de la fuerza de contacto entre el percutor y el rodillo. ....	223



## Índice de tablas

Tabla 4-1: Parámetros geométricos para el cuadro Kinesis K-210, (13).....	54
Tabla 4-2: Nomenclatura de los nodos que definen el modelo plano del cuadro.....	64
Tabla 4-3: Segmentos de ejes de los componentes que forman el modelo plano del cuadro...	65
Tabla 4-4: Nomenclatura de nodos que definen el modelo tridimensional del cuadro. ....	67
Tabla 4-5: Segmentos de ejes de los componentes que forman el modelo tridimensional del cuadro. ....	70
Tabla 4-6: Definición de la curva de plastificación para el modelo de vigas del cuadro. ....	77
Tabla 4-7: Definición de la curva de plastificación para el modelo de superficies del cuadro.	84
Tabla 4-8: Asociación entre el modelo, la forma y el tipo de elemento.....	87
Tabla 4-9: Definición de la curva de plastificación para los cuerpos que impactan. ....	99
Tabla 5-1: Posibilidades de cortes que transforman la estructura hiperestática en isostática. .	107
Tabla 5-2: Secciones utilizadas en el modelo de vigas del cuadro.....	113
Tabla 5-3: Propiedades de los materiales utilizados en los modelos de cuadro y la tija. ....	113
Tabla 5-4: Propiedades geométricas de las vigas que componen el modelo.....	114
Tabla 5-5: Factor de corte estimado por Cowper para las vigas anulares y circulares.....	114
Tabla 5-6: Energía de deformación elástica, desplazamiento en el extremo y rigidez del conjunto obtenidos mediante el método de las fuerzas y el método de elementos finitos. ....	115
Tabla 5-7: Definición de amplitud de la fuerza genérica. ....	120
Tabla 5-8: Dimensiones de las secciones de los componentes del modelo.....	125
Tabla 5-9: Resumen de los resultados del análisis estático del cuadro. ....	127
Tabla 5-10: Variables modales obtenidas empleando los primeros 10 modos naturales mediante el modelo de vigas con formulación de corte flexible.....	128
Tabla 5-11: Variables modales obtenidas empleando los primeros 10 modos naturales mediante el modelo de superficies. ....	128
Tabla 5-12: Comportamiento general de las variables del modelo según la velocidad de impacto. ....	144
Tabla 5-13: Parámetros relevantes de los modelos para la fuerza de contacto. ....	155
Tabla 6-1: Resumen de los aspectos numéricos de los modelos del ensayo. ....	213





# 1 Introducción, objetivos y organización

## 1.1 Introducción

### *Algunos antecedentes de la bicicleta de montaña*

La bicicleta se utilizaba como un simple medio de transporte desde 1930, en diversos lugares del mundo. A principios de la década de los 70, en Colorado, EE. UU., un grupo de jóvenes se comenzó a reunir en las montañas con sus bicicletas, para experimentar el descenso. Durante esta aventura, los cuadros empleados que eran de bicicletas de paseo, o de carrera, muy populares en aquella época, no estaban preparados para este tipo de desafío, y generalmente se rompían durante la marcha. Esta situación provocó que el grupo de ciclistas interesados en esta nueva actividad, comenzaran a efectuar modificaciones a sus bicicletas, para que resistieran los diversos problemas que se presentaban durante el duro camino de montaña. Dentro de las primeras innovaciones que se realizaron, se destacan la implementación de rueda ancha que no se conocía hasta el momento, el sistema de cambio de velocidades, los frenos a tambor extraídos de motocicletas y el refuerzo de los cuadros. Cada una de las mejoras, a su vez generó nuevas ideas en este grupo de jóvenes que buscaban todo tipo de innovaciones, iniciando un proceso sinérgico de evolución continua.

La cantidad de gente que participaba en las carreras aumentó, y sus promotores comenzaron a destacarse en la construcción artesanal de cuadros, sin embargo la oferta continuaba siendo insuficiente para un número creciente de corredores que demandaban estos novedosos productos.

En 1976 un distribuidor de bicicletas, tomó uno de los cuadros artesanales, y lo envió a Japón para construir una imitación del mismo, marcando el inicio la producción en serie de estos cuadros. Las ventas se incrementaron notablemente en cada año, y en poco tiempo la cantidad de bicicletas de montaña equiparó al resto de tipos de bicicletas existentes hasta el momento, para luego lograr convertirse en el más difundido.

De esta manera, la disciplina se expandió hacia todo el mundo, y las carreras que en un principio, eran clandestinas, se oficializaron y posteriormente esta actividad se convirtió en deporte olímpico y comenzó a celebrarse la Copa del Mundo de Mountain Bike, cuya primera edición se celebró en EE. UU. en 1990.

A partir de este momento, la disciplina creció rápidamente al mismo ritmo también acompañaron las innovaciones tecnológicas, en diseños, materiales, procesos constructivos, alcanzando un nivel de desarrollo, que sería inimaginable por aquellos pioneros de la década de los 70. En la actualidad la actividad muestra una enorme evolución tecnológica, debido a la adopción de tecnologías que provienen directamente de la industria aeronáutica e incluso de la industria aeroespacial.

## *Normativa para bicicletas de montaña*

La expansión de la demanda de bicicletas de montaña, provocó que surgieran gran cantidad de fabricantes, generando la necesidad de contar con normativas generales que contribuyan a unificar criterios de diseño y fabricación, orientados a la seguridad.

La Norma *UNE-EN-14766: Bicicletas de montaña - Requisitos de seguridad y métodos de ensayo* (1), que en el presente trabajo denominaremos "la Norma", es aplicada a las bicicletas de montaña, cuya altura del sillín en posición máxima sea 635 mm o más. Esta normativa fue creada por la Unión Europea, con el objetivo de que las bicicletas se diseñen y construyan para ser tan seguras como sea posible. Para tal fin, plantea detalladamente un conjunto de ensayos que se deben llevar a cabo para poner en evidencia las posibles fallas y evitar que estas ocurran durante el servicio ocasionando daños mayores. En Argentina, se cuenta con la Norma *IRAM 40020: Bicicletas - Requisitos de seguridad* (2), que se aplica a todas las bicicletas de uso público, en las que el asiento se puede ajustar a una altura de 635 mm o más.

Los ensayos requeridos por la Norma tienen diversa índole, duración, dificultad, etc. Mientras algunos no justifican el modelado matemático debido a su simplicidad, escasa duración y costo, por el contrario existen ensayos más complicados que exigen instrumental y procedimientos complejos, donde luego de realizar el ensayo el elemento probado puede resultar inútil. En este último caso adquiere relevancia la simulación del ensayo, valiéndose de los potentes recursos computacionales disponibles en la actualidad, para facilitar esta tarea.

Los ensayos de impacto, pueden ocasionar deformaciones plásticas excesivas, grietas, fisuras o separación de partes, resultando inútiles los componentes evaluados. Esto implica costos económicos, que se pueden atenuar mediante la simulación numérica de los ensayos reales propuestos, detectando las potenciales fallas en una etapa inicial, durante el diseño del cuadro, cuando aún no se ha invertido en la construcción del mismo, permitiendo rápidamente tomar las medidas correctivas necesarias para cumplir con los requerimientos de la prueba de impacto.

La Norma trata la seguridad desde un enfoque global, con este fin especifica los métodos de ensayo, los requisitos de seguridad y de prestaciones que deben ocurrir durante todas las etapas, desde el diseño de una bicicleta de montaña. El contenido de la Norma, primeramente establece los términos y las definiciones necesarios para una correcta interpretación, clara y sin ambigüedades. A continuación se encuentra la parte principal que está constituida por los requisitos y métodos de ensayos, donde se contempla una cantidad de pruebas que están orientadas a una determinada condición de seguridad. En cada ensayo, se define el procedimiento a seguir y las exigencias para dar cumplimiento a la reglamentación. Finalmente, se establecen las instrucciones de entrega de la bicicleta al cliente, y el marcado correspondiente que certifica el cumplimiento de la Norma. Dentro de los ensayos propuestos por la Norma, el "*ensayo de choque, caída de una masa*", consiste en el impacto de un percutor sobre el eje delantero de la bicicleta, e intenta representar el choque frontal con un objeto del entorno. En el presente trabajo se tiene por objeto simular el comportamiento real observado durante el ensayo. Se selecciona precisamente este ensayo que reviste gran importancia debido a dos aspectos, por un lado la seguridad del ciclista ante un eventual impacto frontal está condicionada por el comportamiento del conjunto cuadro-horquilla que se evalúa en este ensayo y por otro lado los recursos que insume efectuar el ensayo real son significativos.

## 1.2 Objetivos del presente trabajo

El objetivo principal del proyecto es proporcionar modelos matemáticos que representen el ensayo de caída de una masa sobre el cuadro, para verificar que cuadros ya construidos satisfacen los requerimientos de la Norma o para que los cuadros en fase de concepción, puedan tener un diseño orientado al cumplimiento de la Norma, atenuando la necesidad de realizar físicamente el ensayo.

La simulación del ensayo intenta disminuir la cantidad de veces que se efectúa la prueba real, que insume recursos materiales, humanos y tiempo. Sin embargo no se pretende reemplazar completamente la realización del ensayo, que se requiere para la calibración del modelo, o la verificación final de un prototipo antes de iniciarse la etapa productiva.

### 1.2.1 Objetivos particulares

En la simulación del ensayo se utilizan diversas herramientas computacionales. Para adquirir habilidad y experiencia en el manejo de las mismas, se plantea una secuencia de objetivos, que consisten en efectuar estudios partiendo de los más simples hacia los más complejos, que se mencionan a continuación.

- Estudio estático.
- Estudio de vibraciones libres.
- Estudio dinámico modal.
- Estudio dinámico mediante integración directa.

La realización de cada estudio, permite obtener resultados que luego se analizan para obtener conclusiones parciales que se emplean en las etapas posteriores del proyecto orientado a cumplir los siguientes objetivos particulares:

- Estudiar los fenómenos físicos involucrados en el ensayo.
- Formular modelos matemáticos para simular los ensayos reales.
- Proponer la geometría de un cuadro y aplicar los modelos de simulación planteados.
- Seleccionar los modelos más adecuados para simular el ensayo.

Para simular el ensayo en cuestión, se realiza un estudio profundo del mismo, analizando todos sus aspectos, que se mencionan en la Norma, pero que se considera oportuno tratar en el presente trabajo, para brindar una visión completa del tema.

#### *Ensayo de choque: caída de una masa*

Los métodos de ensayos que integran la Norma, se clasifican en grandes grupos, enfocados a diversos componentes de la bicicleta, entre los que se mencionan: ensayos comunes, ensayos de frenado, ensayos de la dirección, ensayos de cuadro y horquilla, ensayos para ruedas y llantas, ensayos para pedales y sistemas de transmisión. Cada uno de estos conjuntos de ensayos conforman una parte de la Norma *UNE-EN ISO 4210: Ciclos - Requisitos para seguridad de bicicletas*, (3), que reemplazará en el futuro a la actual Norma *UNE-EN 14766* (1), que se toma como referencia para simular los ensayos. Se selecciona la Norma europea *UNE-EN 14766*, respecto a la Norma nacional *IRAM 40020*, porque ésta última es en esencia similar y para el caso particular del ensayo de impacto estudiado, tiene menores exigencias. Por lo tanto si un determinado cuadro satisface los requisitos del ensayo de impacto especificado por *UNE-EN 14766*, indefectiblemente, cumple con la normativa nacional, no siendo válido el enunciado opuesto.

La seguridad de los componentes de la bicicleta se aborda desde distintos enfoques, para ello se establecen ensayos de diversos tipos, para cada parte. En el caso particular del cuadro, se plantean tres grupos de ensayos, entre los que están: el ensayo de salientes, los ensayos de choque, y los ensayos de fatiga. Cada grupo evalúa fenómenos de diversa índole. El ensayo de salientes estudia el posible contacto del ciclista con el cuadro y sus componentes, estableciendo restricciones geométricas en la inmediación para evitar potenciales daños. Los ensayos de choque intentan recrear situaciones reales en las que estará expuesta la bicicleta de montaña durante su uso fuera de carretera, donde podrían ocurrir colisiones con el terreno o con otros objetos del entorno. Los ensayos de fatiga pretenden representar situaciones repetitivas que pueden ocasionar el deterioro progresivo del cuadro y sus componentes, como los ciclos de pedaleo.

El presente trabajo, incumbe los ensayos de impacto del cuadro, más precisamente *el ensayo de choque caída de una masa*, que pretende simular el efecto provocado por un choque frontal de la bicicleta, donde tanto el cuadro como la horquilla, deben permanecer íntegros, sin separarse, ni alcanzar una deformación permanente que impidan continuar con su normal funcionamiento.

Para efectuar el ensayo de choque caída de una masa se deben cumplir etapas, entre las que están la preparación de los componentes, y la ejecución del ensayo. A continuación se describen detalladamente ambos procedimientos.

### **Preparación del ensayo**

La Norma desarrolla métodos de ensayos para el conjunto cuadro-horquilla, y métodos de ensayos para ambos componentes por separado. La disociación planteada permite la certificación particular del componente provisto por cada fabricante.

Para los cuadros que se proporcionan sin horquilla, se debe colocar una tija maciza de acero, que tenga las dimensiones apropiadas para montarse en el cuadro y cuyo extremo libre tenga la forma del rodillo como se indica la leyenda 5, de la Figura 1.2-2, y cuya masa no supere 1 kg., sin embargo no hay exigencias respecto a la geometría del resto de la tija y a su masa.

Para los cuadros que se suministran con su correspondiente horquilla montada, se debe colocar el rodillo en el eje delantero, (ver leyenda 5, de la Figura 1.2-2), situado en la posición de la rueda delantera que debe retirarse previamente si estaba colocada. Si la horquilla tiene algún mecanismo de suspensión, debe encontrarse en su posición libre.

Si el cuadro incluye algún mecanismo de suspensión de atrás, debe mantenerse en la posición equivalente a un ciclista de 80 kg sentado. Para cumplir este objetivo se bloquea el elemento resorte-amortiguador, y si esto no es posible, entonces la unidad de suspensión se reemplaza por una unión rígida equivalente con las dimensiones apropiadas, para montarse en el cuadro evaluado.

En el caso de que el cuadro sea convertible entre ciclistas hombre y mujer, retirando el tubo superior, este componente se debe desmontar para realizar el ensayo.

En la Figura 1.2-1 se muestra un diagrama de flujo del proceso de preparación del cuadro, para facilitar la interpretación de las instrucciones descriptas en la Norma.

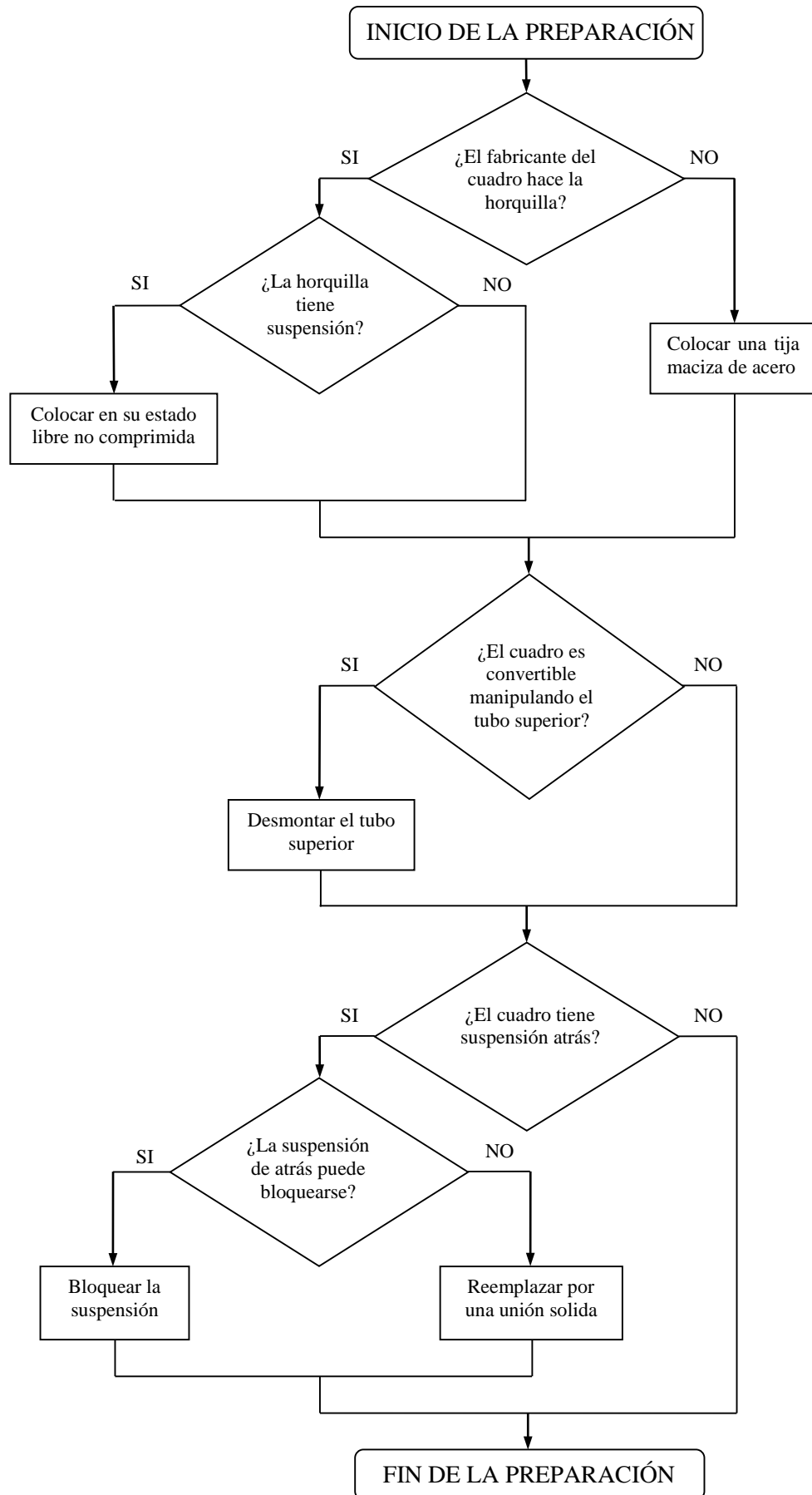


Figura 1.2-1: Diagrama de flujo de la preparación de los componentes antes del ensayo, (1).

## Ejecución del ensayo

Una vez finalizada la preparación del cuadro de acuerdo a los diferentes casos planteados, se inicia el ensayo propiamente dicho, que consiste en los siguientes pasos:

- El conjunto de cuadro-horquilla o cuadro-tija maciza se posiciona, como se muestra en la Figura 1.2-2, donde el cuadro se fija rígidamente desde las punteras de atrás, según lo indicado en leyenda 6.
- Se tiene un percutor de forma cilíndrica, que tiene una masa de 22,5 [kg], mostrado en leyenda 3, que se apoya sobre el extremo de la tija maciza de acero para fabricantes de cuadros sin horquilla o sobre el rodillo para cuadros que vienen equipados con horquilla.
- Se mide la distancia entre los ejes, con el percutor apoyado, según indicado en leyenda 1.
- Se levanta el percutor a una altura de 360 [mm] respecto la posición apoyada, según indicado en leyenda 4.
- Se suelta el percutor para que caiga libremente, e interaccione con el cuadro, observando el comportamiento del conjunto, hasta que el percutor se detenga.
- Se mide nuevamente la distancia entre ejes, con el percutor apoyado, según indicado en leyenda 1, siempre y cuando esto sea posible, debido a que no han ocurrido roturas, ni separaciones de los componentes.

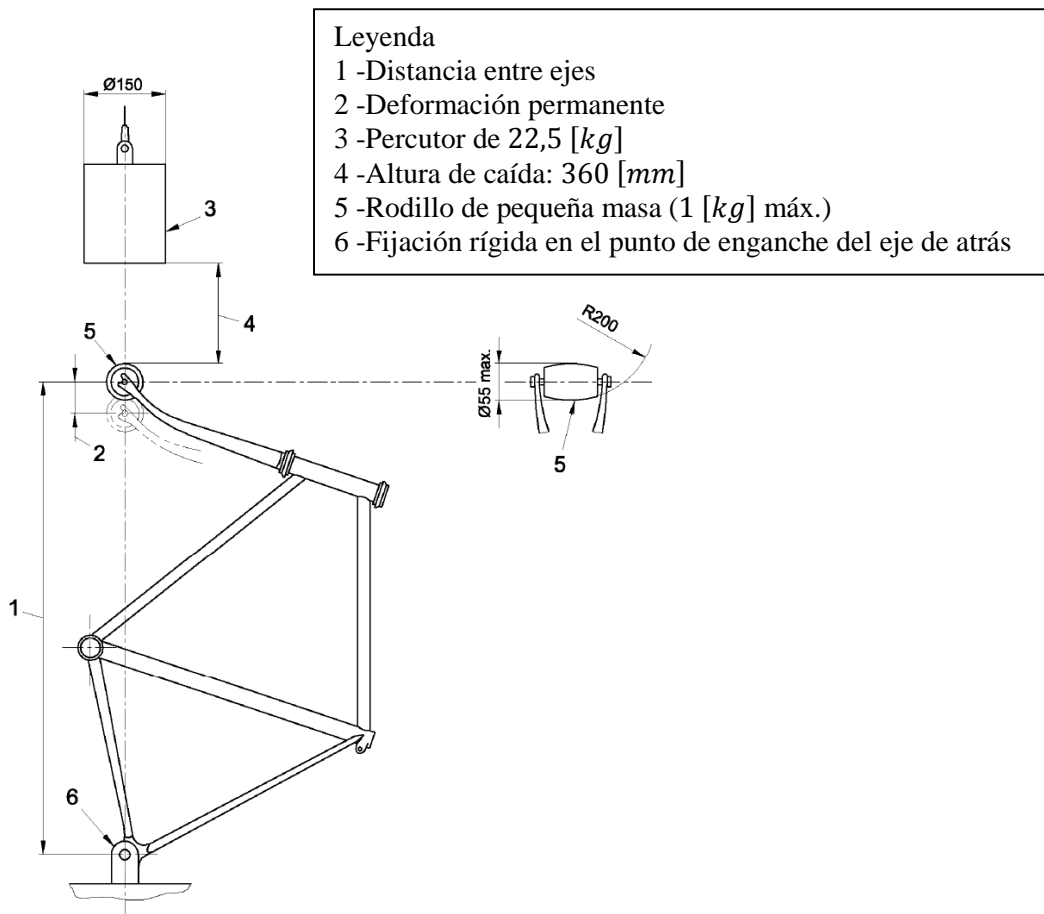


Figura 1.2-2: Conjunto cuadro y horquilla delantera. Ensayo de choque (caída de una masa), (1).

Para que el cuadro o conjunto de cuadro-horquilla apruebe el ensayo de impacto caída de una masa, se deben cumplir todas y cada una de las siguientes condiciones:

- A simple vista no deben observarse grietas, ni fisuras en el cuadro y la horquilla.
- Ninguno de los componentes debe separarse o romperse.
- La deformación permanente, obtenida de la diferencias de mediciones de distancia entre ejes antes y después del ensayo, que se muestra en leyenda 2, de Figura 1.2-2 no deben superar los siguientes valores indicados según el tipo de montaje:
  - para cuadro sin horquilla, donde ésta se reemplazó por la tija maciza, 10 [mm].
  - para cuadro equipado con su correspondiente horquilla 30 [mm].

### 1.3 Alcance del trabajo

La simulación del ensayo de choque, involucra diversos fenómenos físicos, que se pretenden interpretar y analizar. Para tal fin luego de realizar una revisión bibliográfica, en el presente trabajo se describen los conceptos teóricos, más relevantes, orientados a desarrollar conjuntos de modelos que permitan explicar y predecir el comportamiento que podría lograrse mediante la realización del ensayo real.

Se plantean los desarrollos teóricos de diversos modelos para representar el ensayo. Cada uno de los cuales se basa en hipótesis simplificadoras, presentando capacidades y limitaciones. La aplicación de los modelos planteados a casos particulares exige una definición precisa de los componentes que participan de la prueba. Se necesita establecer un cuadro para ser sometido a las distintas simulaciones. En este sentido, se realiza una búsqueda sobre catálogos de fabricantes de cuadros y tubos, para obtener información respecto a la geometría y las propiedades relevantes de los materiales de sus productos. En base a la revisión de esta amplia cantidad de información disponible, se propone un modelo de cuadro.

La geometría del cuadro se elige a los fines de ilustrar los procedimientos de simulación desarrollados, quedando fuera del alcance de este trabajo, la búsqueda de un diseño optimizado al cumplimiento de ensayo de caída del percutor propuesto por la Norma (1). Se entiende además, que lograr un cuadro optimizado para un determinado ensayo, no garantiza la capacidad del mismo a tener buen desempeño frente a otros ensayos que además deba cumplir, ni a las condiciones sometidas durante el servicio, que pueden diferenciarse de las propuestas durante el ensayo.

Se plantean modelos de elementos finitos, que representan el conjunto cuadro-tija o cuadro-horquilla en la configuración de ensayo, realizando diversos tipos de análisis y luego se simula el ensayo. Con la gran cantidad de información obtenida la aplicación del método de elementos finitos se plantean modelos simplificados que pretenden representar ciertos aspectos del ensayo desde un punto de vista macroscópico.

Posteriormente se obtienen resultados de cada uno de los modelos, que se analizan, y contrastan entre sí, para realizar inferencias respecto a sus cualidades. Finalmente se establecen las conclusiones del trabajo, dejando establecido un procedimiento de simulación.



## 1.4 Organización del proyecto integrador

El contenido del trabajo se forma por distintos capítulos que abarcan las temáticas comunes, que se mencionan a continuación.

En el Capítulo 1 se realiza una introducción al tema, se plantean los objetivos generales y particulares; y se describen los alcances del proyecto.

En el Capítulo 2 se tratan los conceptos teóricos más relevantes para el desarrollo de los modelos.

En el Capítulo 3 se aplica el método de elementos finitos, a modelos de situaciones físicas de las cuales se disponen soluciones analíticas, para validar el manejo del software y visualizar la convergencia de las aproximaciones logradas.

En el Capítulo 4 se reúnen los modelos propuestos de los diferentes componentes que participan del ensayo, describiendo detalladamente sus características. Se efectúa una definición del cuadro de la bicicleta y los modelos propuestos para realizar la simulación del ensayo. Se estudian exhaustivamente el percutor y el rodillo, para lograr una definición completa que cumpla con los requerimientos establecidos por la Norma y permita incorporarlos a la simulación del ensayo.

En el Capítulo 5 se agrupan diversos análisis previos a la simulación, que se realizan a los modelos planteados en el capítulo anterior, para obtener parámetros que representen el comportamiento de los diversos componentes que participan del ensayo de choque. En la primera parte se estudia el comportamiento del conjunto cuadro-tija maciza en la configuración de ensayo, y luego se analiza la interacción que ocurre entre el rodillo y el percutor durante el impacto.

En el Capítulo 6 se simula numéricamente el ensayo. En una primera parte se formulan modelos de cuerpos puntuales orientados a representar el comportamiento macroscópico observado en el ensayo, en función de una escasa cantidad de parámetros. Estos modelos se implementan numéricamente, disponiendo del valor de los parámetros estimados mediante los resultados de elementos finitos. En la segunda parte se simula el ensayo de choque caída de una masa, empleando el método de elementos finitos, donde los cuerpos involucrados se representan mediante nodos, vigas, cáscaras, y sólidos tridimensionales que se utilizan convenientemente.

En el Capítulo 7 se expresan las conclusiones técnicas y académicas logradas; y se dejan planteados los trabajos futuros.

Por último, se presenta el apéndice, donde se desarrollan dos temas. Por un lado se trata la formulación de espacio de estado, y por otro lado se describe el método de Runge-Kutta; ambas temáticas se utilizan para integrar numéricamente las ecuaciones de movimiento, en los modelos de impacto de cuerpos puntuales.



## **2 Marco conceptual teórico empleado**

Este capítulo se hace referencia a diversos conocimientos y prácticas que han sido utilizados durante el desarrollo de los diferentes modelos para abordar la simulación del ensayo. Los conceptos tratados, se ordenan desde una perspectiva general, y posteriormente se orientan a los temas que tienen relevancia en la realización del proyecto. De ninguna manera se pretende un desarrollo exhaustivo de cada temática, sino que estos desarrollos sólo buscan facilitar la interpretación de los modelos. Por consiguiente, se recomienda recurrir a las fuentes citadas, si se considera que alguno de los temas teóricos planteados merece un tratamiento adicional de mayor profundidad.

### **2.1 Resolución numérica de ecuaciones diferenciales**

La aplicación de principios físicos a situaciones concretas, plantea ecuaciones diferenciales, ya sea ecuaciones diferenciales ordinarias, es decir aquellas que contienen derivadas respecto a una sola variable independiente o ecuaciones en derivadas parciales, es decir aquellas que contienen derivadas respecto a dos o más variables (4).

Existen métodos para obtener soluciones analíticas de ciertos tipos de ecuaciones diferenciales; sin embargo estos no son aplicables a muchos problemas prácticos, debido a que las ecuaciones diferenciales no tienen solución analítica, o la geometría en cuestión es compleja, y el procedimiento se torna dificultoso. A partir de estos inconvenientes surgen los métodos numéricos, que se usan para obtener la solución de problemas prácticos en todas las ramas de la ingeniería.

Durante la historia se han desarrollado diversos métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales entre los que se mencionan los siguientes: método de diferencias finitas, método de elementos finitos, método de volúmenes finitos, método de elementos de frontera y método espectral. Dentro de la amplia variedad de métodos numéricos mencionados que permiten resolver ecuaciones diferenciales, en este trabajo se trata particularmente el método de elementos finitos porque se emplea para lograr soluciones de los modelos de simulación del ensayo de choque.

### **2.2 Método de elementos finitos**

El método de elementos finitos se basa en la idea clave de discretizar el dominio de la solución en una cantidad de dominios simples llamados elementos. Luego se asume una solución aproximada sobre cada elemento en términos de las soluciones en puntos seleccionados, llamados nodos.

En la siguiente sección se menciona el procedimiento general, y posteriormente se describe la formulación de equilibrio en que se basa el método de elementos finitos.

### 2.2.1 Procedimiento

La aplicación del método de elementos finitos involucra una serie de pasos, entre los que están:

- 1- Desarrollo de las ecuaciones de elementos.
- 2- Discretización del dominio de la solución en una malla de elementos finitos.
- 3- Ensamble de las ecuaciones de elementos.
- 4- Introducción de las condiciones de contorno.
- 5- Solución para las incógnitas nodales.
- 6- Cálculo de la solución y representación de las cantidades sobre cada elemento.

### 2.2.2 Equilibrio y trabajos virtuales

El método de elementos finitos se aplica a muchos problemas, en los cuales se requiere encontrar una solución aproximada para los desplazamientos, las deformaciones, las tensiones, las fuerzas, y otras variables en un cuerpo sólido que está sujeto a cargas que varían respecto al tiempo. Se entiende por cargas a una serie de eventos para los cuales se busca una respuesta. La solución exacta de estos problemas requiere que se mantenga el equilibrio de fuerza y momento durante todo el tiempo sobre un cualquier volumen arbitrario del cuerpo. El método de elementos finitos de desplazamiento se basa en un requerimiento de equilibrio que se aproxima mediante un requerimiento débil, que el equilibrio se mantenga en un sentido promedio sobre un número finito de divisiones del volumen del cuerpo. En esta sección se desarrolla el enunciado de equilibrio exacto y se escribe este en forma enunciado de trabajos virtuales para luego reducir a la forma aproximada del equilibrio usada en un modelo de elementos finitos, (5).

Suponiendo que  $V$  denote un volumen ocupado por una parte de un cuerpo, y que  $S$  sea la superficie que limite este volumen. Cabe destacar que se adopta un punto de vista Lagrangiano, es decir se considera un volumen de material en el cuerpo, contrariamente al enfoque Euleriano, donde se examina un volumen en el espacio y se observa el flujo de material a través del volumen.

Sea  $\mathbf{t}$  la fuerza de tracción por unidad de área en cualquier punto sobre la superficie  $S$ , y  $\mathbf{f}$  la fuerza volumétrica por unidad de volumen en cualquier punto dentro el volumen  $V$  de material. El equilibrio de fuerza para el volumen se expresa en la Ecuación (2.2-1),

$$\int_S \mathbf{t} dS + \int_V \mathbf{f} dV = 0 \quad (2.2-1)$$

La matriz de tensión de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  en un punto de  $S$  se define por la Ecuación (2.2-2),

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (2.2-2)$$

donde:

- $\mathbf{n}$  es la normal saliente unitaria a  $S$  en un punto
- $\cdot$  indica multiplicación de matices.

Usando la definición de la Ecuación (2.2-2), se expresa nuevamente la Ecuación (2.2-1),

$$\int_S \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} dS + \int_V \mathbf{f} dV = 0 \quad (2.2-3)$$

Aplicando el teorema de Gauss a la integral de superficie en la ecuación de equilibrio se obtiene la Ecuación (2.2-4),

$$\int_S \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} dS = \int_V \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot \boldsymbol{\sigma} dV \quad (2.2-4)$$

Dado que la elección del volumen es arbitraria, la Ecuación (2.2-4) se debe cumplir punto a punto en el cuerpo, así obteniendo la ecuación diferencial de equilibrio traslacional:

$$\left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0 \quad (2.2-5)$$

Éstas son tres ecuaciones diferenciales de equilibrio de fuerzas conocidas, que no se basan en aproximaciones con respecto a la magnitud de la deformación o la rotación, sino que son un enunciado exacto del equilibrio y su precisión está condicionada por las definiciones de las superficies de tracción, las fuerzas de volumen, los tensores de tensión, el volumen y el área.

El equilibrio de momento respecto al origen se expresa en la Ecuación (2.2-6):

$$\int_S (\mathbf{x} \times \mathbf{t}) dS + \int_V (\mathbf{x} \times \mathbf{f}) dV = 0 \quad (2.2-6)$$

donde:

$\times$  indica producto cruz.

Usando el teorema de Gauss con la Ecuación (2.2-6), se alcanza el resultado que la matriz de tensión de Cauchy debe ser simétrica:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad (2.2-7)$$

Entonces que en cada punto hay solo seis componentes independientes de tensión. Contrariamente, tomando la matriz de tensión simétrica, automáticamente satisface equilibrio de momento y, más aún, se requiere considerar únicamente el equilibrio traslacional cuando se escriben explícitamente las ecuaciones de equilibrio. Físicamente la ecuación de equilibrio de momento asume que no hay cuplas puntuales actuando sobre el volumen. Si hay, la matriz de tensión no tiene la propiedad de simetría de la Ecuación (2.2-7).

La interpolación de desplazamiento para el modelo de elementos finitos se basa en una aproximación espacial local para partes de la solución. Para desarrollar la aproximación, se reemplazan las tres ecuaciones de equilibrio mediante una "forma débil" equivalente que es una única ecuación escalar sobre el cuerpo entero, la cual se obtiene multiplicando la ecuación diferencial punto a punto por una "función de prueba", vector valuada, definida con apropiada continuidad, sobre el volumen completo, e integrada. Como la función de prueba es bastante arbitraria, el enunciado de equilibrio diferencial en cualquier dirección particular en un punto cualquiera siempre se puede recuperar eligiendo la función de prueba para no ser nula solo en

aquella dirección en ese punto. Para este caso de equilibrio con una matriz de tensión general, esta "forma débil" equivalente es el principio de trabajos virtuales. La función de prueba se puede imaginar como un campo de velocidad "virtual"  $\delta \mathbf{v}$ , el cual es completamente arbitrario excepto que debe cumplir cualquier restricción cinemática prescrita y tener continuidad suficiente, entonces el producto punto de esta función de prueba con el campo de fuerzas de equilibrio representan la tasa de trabajo virtual.

Tomando el producto punto de la ecuación (2.2-5) con  $\delta \mathbf{v}$  resulta una única ecuación escalar en cada punto material que luego se integra sobre el cuerpo entero para obtener:

$$\int_V \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} \right] \cdot \delta \mathbf{v} dV = 0 \quad (2.2-8)$$

Aplicando la regla de la cadena, el teorema de Gauss y la definición de tensión de Cauchy, el enunciado de trabajo virtual se expresa en la Ecuación (2.2-9),

$$\int_S \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{v} dS + \int_V \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{v} dV = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \left( \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right) dV \quad (2.2-9)$$

donde:

: indica el producto escalar de dos matrices.

Definiendo el gradiente de velocidad en la configuración corriente  $\delta \mathbf{L}$  como:

$$\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \delta \mathbf{L}$$

Se descompone el gradiente en dos partes:

$$\delta \mathbf{L} = \delta \mathbf{D} + \delta \mathbf{W}$$

La parte simétrica  $\delta \mathbf{D}$  es la tasa de deformación virtual y se expresa como:

$$\delta \mathbf{D} = \text{sym}(\delta \mathbf{L}) = \frac{1}{2} (\delta \mathbf{L} + \delta \mathbf{L}^T)$$

La parte antisimétrica  $\delta \mathbf{W}$  es la tasa de giro virtual y se expresa como:

$$\delta \mathbf{W} = \text{asym}(\delta \mathbf{L}) = \frac{1}{2} (\delta \mathbf{L} - \delta \mathbf{L}^T)$$

Con estas definiciones, el producto punto se distribuye como:

$$\boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{L} = \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{D} + \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{W}$$

Dado que  $\boldsymbol{\sigma}$  es simétrica, si no hay cuplas puntuales actuando, entonces:

$$\boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{W} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{L} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{L}^T = 0$$

Finalmente se obtiene la ecuación de trabajo virtual en forma clásica,

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{D} dV = \int_S \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{v} dS + \int_V \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{v} dV \quad (2.2-10)$$

$\delta \mathbf{D}$  y  $\delta \mathbf{v}$  son compatibles

$$\delta \mathbf{D} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} + \left[ \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \right)$$

$\delta \mathbf{v}$  es compatible con las restricciones cinemáticas. Se puede mostrar que cualquier par de estos tres enunciados (trabajos virtuales, equilibrio y compatibilidad con la función de prueba  $\delta \mathbf{v}$ ) implican el otro restante: de manera que se puede usar el principio de trabajo virtual, con una función de prueba adecuada, como un enunciado de equilibrio.

El enunciado de trabajo virtual tiene una interpretación física: la tasa de trabajo hecho por las fuerzas externas sujetas a cualquier campo de velocidad virtual es igual a la tasa de trabajo virtual hecho por las tensiones equilibrantes sobre la deformación del mismo campo de velocidad virtual. El principio de trabajos virtuales es la "forma débil" de las ecuaciones de equilibrio y se usa como el enunciado equilibrio básico para la formulación de elementos finitos. La ventaja es que el enunciado de equilibrio se resuelve en forma integral sobre el volumen del cuerpo y se puede introducir aproximaciones eligiendo funciones de prueba para el campo de velocidad virtual que nos son completamente arbitrarios, pero aquella variación se restringe a un número finito de valores nodales. Este enfoque provee bases matemáticas fuertes para aproximar la ecuación diferencial de equilibrio, presentando una alternativa a la discretización directa de la derivada en un punto, que es el inicio del enfoque de diferencias finitas para el mismo problema.

### *Ecuaciones de elementos finitos básicas*

En esta sección se describen las ecuaciones básicas para el análisis de elementos basados en desplazamientos. Comenzando con el enunciado de equilibrio, escrito como principio de trabajo virtual, dado en la Ecuación (2.2-10) tratada más atrás.

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{D} dV = \int_S \mathbf{t}^T \cdot \delta \mathbf{v} dS + \int_V \mathbf{f}^T \cdot \delta \mathbf{v} dV \quad (2.2-10)$$

La parte izquierda de esta ecuación (el término de tasa de trabajo virtual interno) se reemplaza con la integral sobre el volumen de referencia  $V^0$  de la tasa de trabajo virtual por volumen de referencia definido por cualquier par conjugado de tensión y deformación:

$$\int_{V^0} \boldsymbol{\tau}^c : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV^0 = \int_S \mathbf{t}^T \cdot \delta \mathbf{v} dS + \int_V \mathbf{f}^T \cdot \delta \mathbf{v} dV \quad (2.2-11)$$

donde  $\boldsymbol{\tau}^c$  y  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$  son cualquier par conjugado de medidas de tensión y deformación material. La elección particular de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  depende del elemento individual.

El interpolador de elementos finitos se escribe en general como:

$$\mathbf{u} = \sum_N \mathbf{N}_N u^N \quad (2.2-12)$$

donde:

$\mathbf{N}_N$  son funciones de interpolación con respecto a algún sistema coordenado  
 $u^N$  son variables nodales.

El campo virtual  $\delta \mathbf{v}$ , debe ser compatible con todas las restricciones cinemáticas. Introduciendo las restricciones de interpolación, el desplazamiento tiene una cierta variación espacial, que debe tener la misma forma espacial:

$$\delta \mathbf{v} = \sum_N \mathbf{N}_N \delta v^N \quad (2.2-13)$$

El enunciado de variación continuo de la Ecuación (2.2-11) se aproxima por una variación sobre el conjunto finito  $\delta v^N$ .

La tasa virtual de deformación material  $\delta \varepsilon$  asociada con  $\delta \mathbf{v}$ , debido a tiene una forma de tasa, debe ser lineal en  $\delta v^N$ . Por lo tanto, la asunción de interpolación da:

$$\delta \varepsilon = \sum_N \beta_N \delta v^N \quad (2.2-14)$$

donde  $\delta \varepsilon$  es una matriz que depende, en general, sobre la posición,  $\mathbf{x}$ , del punto material considerado. La matriz  $\beta_N$  que define la variación de deformación desde la variación de variables cinemáticas se deriva inmediatamente desde las funciones de interpolación una vez que se define la medida de deformación particular a ser usada.

Sin pérdida de generalidad se escribe  $\beta_N = \beta_N(\mathbf{x}, \mathbf{N}_N)$ , y con esta notación la ecuación de equilibrio se aproxima como:

$$\delta v^N \int_{V^0} \beta_N : \boldsymbol{\tau}^c dV^0 = \delta v^N \left[ \int_S \mathbf{N}_N^T \cdot \mathbf{t} dS + \int_V \mathbf{N}_N^T \cdot \mathbf{f} dV \right] \quad (2.2-15)$$

debido a que los  $\delta v^N$  son variables independientes, se pueden elegir cada una para ser no nulas y en cambio todas las otras cero, para arribar a un sistema de ecuaciones no lineales:

$$\int_{V^0} \beta_N : \boldsymbol{\tau}^c dV^0 = \int_S \mathbf{N}_N^T \cdot \mathbf{t} dS + \int_V \mathbf{N}_N^T \cdot \mathbf{f} dV \quad (2.2-16)$$

Este sistema de ecuaciones de equilibrio forma las bases para un procedimiento de análisis de elementos finitos de desplazamientos y se expresa resumido en la Ecuación (2.2-17),

$$F^N(u^M) = 0 \quad (2.2-17)$$

donde:

$F^N$  es la componente de fuerza conjugada a la variable  $N$   
 $u^M$  es el valor de la variable  $M$



La Ecuación (2.2-17) es válida para análisis estáticos y dinámicos si se asume que la fuerza volumétrica contiene la contribución de inercia. Sin embargo en análisis dinámicos, la contribución de inercia comúnmente se considerada separadamente, llegando a la Ecuación (2.2-18):

$$M^{NM}\ddot{u}^M + F^N(u^M) = 0 \quad (2.2-18)$$

Cabe aclarar que, en las fuerzas  $F^N$  se pueden distinguir las fuerzas internas  $I^N$  y las fuerzas externas  $P^N$ .

$$M^{NM}\ddot{u}^M + I^N(u^M) - P^N(u^M) = 0 \quad (2.2-19)$$

La Ecuación (2.2-19) es la aproximación a la ecuación de equilibrio utilizada por el método de elementos finitos.

La fuerza volumétrica en un punto, se escribe como la suma de la fuerza volumétrica externa  $\mathbf{F}$  y la fuerza de d'Alembert  $-\rho\ddot{\mathbf{u}}$ .

$$\mathbf{f} = \mathbf{F} - \rho\ddot{\mathbf{u}}$$

Los desplazamientos en un punto se aproximan mediante la interpolación  $N^N$ .

$$\mathbf{u} = N^N \mathbf{u}^N$$

Entonces las aceleraciones se expresan como:

$$\ddot{\mathbf{u}} = N^N \ddot{\mathbf{u}}^N$$

La matriz de masa  $M^{NM}$  se expresa en la Ecuación (2.2-20),

$$M^{NM} = \int_{V_0} \rho_0 N^N \cdot N^M dV_0 \quad (2.2-20)$$

El vector de fuerzas internas  $I^N$  se expresa en la Ecuación (2.2-21),

$$I^N = \int_{V_0} \beta^N : \boldsymbol{\sigma} dV_0 \quad (2.2-21)$$

El vector de fuerzas externas  $P^N$  se expresa en la Ecuación (2.2-22),

$$P^N = \int_S N^N \cdot \mathbf{t} dS + \int_V N^N \cdot \mathbf{F} dV \quad (2.2-22)$$

### *Estudio de cuerpo rígido equivalente*

Sea  $V$  un volumen material para el cual se requiere calcular los valores de movimiento de cuerpo rígido equivalente. La densidad en su configuración de referencia es  $\rho_0(S_i)$ , donde  $S_i$  son las coordenadas materiales en el cuerpo. La posición espacial de una partícula material en

la configuración de referencia es  $\mathbf{X}(S_i)$  y la configuración actual es  $\mathbf{x}(S_i)$ , resultando un desplazamiento  $\mathbf{u}(S_i)$ .

La masa de un cuerpo se define como:

$$\mathcal{M} = \int_{V^0} \rho_0 dV^0$$

El movimiento traslacional del centro de masa en un movimiento de cuerpo rígido equivalente se obtiene como:

$$\mathbf{u}_0 = \frac{1}{\mathcal{M}} \int_{V^0} \rho_0 \mathbf{u} dV^0 \quad (2.2-23)$$

A partir de la Ecuación (2.2-23) se obtienen velocidades y aceleraciones de cuerpo rígido.

## 2.3 Procedimientos de análisis de tensión-deformación

El método de elementos finitos se aplica al estudio de diferentes fenómenos físicos, entre ellos el análisis de tensión-deformación, la transferencia de calor, el flujo eléctrico y magnético, etc. Los problemas de tensión presentan mayor estudio y desarrollo en los programas de elementos finitos. Estos análisis se clasifican según su respuesta como: análisis estáticos y análisis dinámicos, que se tratan a continuación.

### 2.3.1 Análisis estático

El análisis estático se aplica cuando los efectos de la inercia son bajos y se pueden despreciar, cuando las cargas actuantes, tienen una variación lenta respecto al mayor período natural de vibración de la estructura. En esta situación las solicitaciones totales se fraccionan a lo largo de un tiempo general que se toma simplemente como referencia y no tiene sentido físico. Posteriormente se calculan los sucesivos estados de equilibrio, para cada incremento hasta alcanzar el estado final que es el objetivo propuesto para el análisis.

Los análisis estáticos se clasifican como lineales o no lineales, y que se describen a continuación.

#### *Análisis estático lineal*

Un análisis estático lineal se emplea si todas las condiciones involucradas en el problema son lineales, de manera que los algoritmos de resolución se simplifican reduciendo el costo computacional.

#### *Análisis estático no lineal*

Un análisis estático no lineal se utiliza cuando un problema presenta no linealidades que provienen de diversas fuentes como los materiales, los apoyos, la configuración geométrica de la estructura, etc. En casos extremos podrían ocurrir inestabilidades tanto globales como locales, que requieren procedimientos especiales para alcanzar la solución buscada.

### 2.3.2 Análisis dinámico

El análisis dinámico se aplica para resolver problemas en los cuales las cargas actuantes tienen una variación rápida respecto al mayor período natural de vibración de la estructura, ocasionando que los efectos inerciales sean significativos y se deban tener en cuenta, (6).

Las respuestas de los sistemas dinámicos exigen dos tipos de análisis, los lineales o los no lineales, ambos se describen a continuación.

#### *Análisis dinámico lineal*

Todos los métodos pueden aplicarse para realizar análisis de sistemas puramente lineales. En estos casos resulta conveniente hacer uso de los métodos modales, que muestran una visión del comportamiento general de la estructura que los otros métodos no, siendo más económicos computacionalmente debido a que la respuesta se expresa como combinación lineal de un número reducido de coordenadas generalizadas.

#### *Análisis dinámico no lineal*

Cuando en el modelo existen no linealidades, no se pueden aplicar los métodos modales y en cambio se deben integrar directamente todos los grados de libertad planteados.

Los métodos para realizar análisis dinámicos se agrupan según la manera en que integran las ecuaciones de movimiento, clasificándose en métodos modales y métodos de integración directa, que se tratan a continuación.

#### **2.3.2.1 Métodos modales**

El método modal se basa en que la respuesta del sistema se puede representar en términos de un número relativamente bajo de modos propios de la estructura, que son ortogonales y permiten desacoplar el sistema de ecuaciones de movimiento. Los principios de superposición y ortogonalidad son válidos únicamente cuando se modela la respuesta dinámica de un sistema puramente lineal.

Este método requiere de dos etapas bien diferenciadas: la descomposición modal y la superposición modal, que se describen a continuación.

##### 2.3.2.1.1 Descomposición modal

La ejecución de este procedimiento supone un costo adicional respecto los métodos de solución directa, sin embargo disponiendo de los modos y frecuencias naturales obtenidos mediante la descomposición modal, luego se logra un ahorro significativo durante el procedimiento de superposición modal debido a que se proyecta la respuesta del sistema en una cantidad menor de grados de libertad generalizados que representan a la estructura.

El problema de valores propios para modos naturales de una pequeña vibración en el modelo de elementos finitos se expresa en la Ecuación (2.3-1),

$$(\mu^2[M] + \mu[C] + [K])\{\phi\} = 0 \quad (2.3-1)$$

donde:

$[M]$  es la matriz de masa, la cual es simétrica y definida positiva

$[C]$  es la matriz de amortiguamiento

$[K]$  es la matriz de rigidez, la cual puede no ser definida positiva o simétrica

$\mu$  es el valor propio

$\{\phi\}$  es el vector propio

En general la Ecuación (2.3-1) puede tener valores propios y vectores propios complejos. Este sistema será simétrico asumiendo que la rigidez es simétrica y despreciando el amortiguamiento. Un sistema simétrico tiene valores propios cuadrados reales y vectores propios reales solamente. Si adicionalmente se supone que la rigidez es semidefinida positiva, los valores propios se convierten en imaginarios  $\mu = i\omega$  donde la frecuencia natural circular es  $\omega$ . La Ecuación (2.3-1) para sistemas simétricos se expresa como la Ecuación (2.3-2),

$$(-\omega^2[M] + [K])\{\phi\} = 0 \quad (2.3-2)$$

Si el sistema de ecuaciones (2.3-1) contiene multiplicadores de Lagrange, la matriz de rigidez se puede convertir en indefinida. Sin embargo todos los términos de la matriz de masa correspondientes a los multiplicadores de Lagrange son iguales a cero, por lo tanto los valores propios son imaginarios y los vectores propios son reales.

Existen diversos métodos de descomposición modal, cuya aplicación depende del tipo de sistema que se pretende resolver, (5). Para sistemas simétricos se emplea el método de Lanczos y el método de iteración de subespacio, mientras que para sistemas complejos se utiliza el método de proyección de subespacio.

El objetivo principal del procedimiento de descomposición modal es obtener los valores propios que indican las frecuencias naturales de vibración y los vectores naturales que representan la forma o modo de vibración libre. Luego del análisis además se obtienen un conjunto de variables modales, entre las que están la masa generalizada, el factor de participación modal, y la masa modal efectiva, que se tratan a continuación.

### *Masa generalizada*

La masa generalizada asociada con el modo  $\alpha$  se define en la Ecuación (2.3-3),

$$m_\alpha = \phi_\alpha^N M^{NM} \phi_\alpha^M \quad (2.3-3)$$

donde:

$M^{NM}$  es la matriz de masa de la estructura

$\phi_\alpha^N$  es el vector propio para el modo  $\alpha$

Los criterios de normalización de vectores propios, se orientan a cumplir distintos objetivos:

- que el elemento más grande en cada vector propio sea la unidad
- que la masa generalizada de cada modo sea unitaria

El tipo de normalización adoptado no influye en los resultados del análisis modal, sólo determina la manera en la que se representan los vectores propios.

### Factor de participación modal

El factor de participación modal denotado  $\Gamma_{\alpha i}$ , es una variable que indica como un desplazamiento o rotación en la dirección  $i$ , se representa en el vector propio del modo  $\alpha$ , quedando definida por la Ecuación (2.3-4),

$$\Gamma_{\alpha i} = \frac{1}{m_{\alpha}} \phi_{\alpha}^N M^{NM} T_i^M \quad (2.3-4)$$

donde  $T_i^N$  define la magnitud de la respuesta de cuerpo rígido de un grado de libertad  $N$  en el modelo, a un movimiento de cuerpo rígido impuesto en la dirección  $i$ .

### Masa efectiva modal

La masa modal efectiva para el modo  $\alpha$  asociada a la dirección cinemática  $i$ , se define en la Ecuación (2.3-5),

$$m_{\alpha i}^{\text{ef}} = (\Gamma_{\alpha i})^2 m_{\alpha} \quad (2.3-5)$$

Si las masas efectivas de todos los modos se suman en cualquier dirección, la suma debería dar la masa total del modelo, excluyendo las masas que tienen cinemáticamente restringido dicho grado de libertad. Así, si la suma de la masa efectiva en un grado de libertad usada en el análisis tiene un valor relativamente menor que la masa del modelo, los modos que tienen participación significativa en la dirección no han sido considerados, o gran proporción de la masa del modelo está limitada por apoyos en este grado de libertad.

#### 2.3.2.1.2 Superposición modal

El objetivo de la superposición modal es conocer la respuesta del sistema a cargas que varían en el tiempo. La calidad de la solución obtenida depende de varios factores, entre los que se destacan: la linealización del problema bajo las hipótesis de descomposición modal, el modelado espacial, la definición de las cargas y la cantidad de modos propios aplicados para representar el sistema.

Si las cargas se discretizan para variar linealmente entre intervalos de tiempo, se obtiene un conjunto de ecuaciones en el tiempo  $t$ , que en general están acopladas:

$$\ddot{q}_{\beta} + C_{\beta\alpha} \dot{q}_{\alpha} + \omega^2 q_{\beta} = (f_t)_{\beta} = f_{t-\Delta t} + \frac{\Delta f}{\Delta t} \Delta t \quad (2.3-6)$$

donde:

$\alpha$  y  $\beta$  son los índices que abarcan el espacio propio

$C_{\beta\alpha}$  es la matriz amortiguamiento viscoso proyectado

$q_{\beta}$  es la "coordenada generalizada" del modo  $\beta$  (la amplitud de la respuesta en este modo)

$\omega_{\beta} = \sqrt{k_{\beta}/m_{\beta}}$  es la frecuencia natural del modo  $\beta$  no amortiguado (obtenido como la raíz cuadrada del valor propio del procedimiento de descomposición modal que precede a la superposición modal);

$(f_t)_{\beta}$  es la magnitud de la carga proyectada sobre este modo

$\Delta f$  es el cambio de  $f$  durante el incremento de tiempo, el cual es  $\Delta t$

La matriz de amortiguamiento proyectada se puede separar en dos partes:

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_{diag} + \mathbf{C}_{off} \quad (2.3-7)$$

donde:

$\mathbf{C}_{diag}$  es la parte diagonal

$\mathbf{C}_{off}$  es la parte fuera de la diagonal

Luego, asumiendo que las fuerzas de amortiguamiento fuera de la diagonal varían linealmente durante el tiempo de incremento, la ecuación para el sistema desacoplado es:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} q_{t+\Delta t} \\ \bar{\mathbf{C}}\dot{q}_{t+\Delta t} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} - b_{11}\mathbf{C}_{off} \\ a_{21} & a_{22} - b_{21}\mathbf{C}_{off} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_t \\ \dot{q}_t \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_t \\ f_{t+\Delta t} \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & -b_{12}\mathbf{C}_{off} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{t+\Delta t} \\ \dot{q}_{t+\Delta t} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.3-8)$$

donde:

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{I} + b_{22}\mathbf{C}_{off} \quad (2.3-9)$$

$\bar{\mathbf{C}}$  entonces únicamente es función de  $\Delta t$ , entonces se factoriza sólo una única vez para un análisis dado.

El valor de los coeficientes  $a_{ij}$  y  $b_{ij}$  dependen del amortiguamiento y si se permite o no movimiento de cuerpo rígido, que se expresa en las siguientes condiciones:

- Si hay modos de cuerpo rígido  $\omega = 0$
- No hay modos de cuerpo rígido  $\omega \neq 0$

Para mayores detalles respecto el procedimiento de integración modal, consultar (5).

### 2.3.2.2 Métodos directos

Para estudiar la respuesta dinámica no lineal, se debe integrar directamente a través del tiempo un sistema de ecuaciones de movimiento con todos los grados de libertad.

La aproximación a las ecuaciones de equilibrio (2.2-16) se expresa como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{P} - \mathbf{I} \quad (2.3-10)$$

donde:

$\mathbf{M}$  es la matriz de inercia

$\ddot{\mathbf{u}}$  es el vector de aceleraciones nodales

$\mathbf{P}$  es el vector de fuerzas exteriores aplicadas

$\mathbf{I}$  es el vector de fuerzas internas de los elementos

En todos los procedimientos directos se obtienen las fuerzas internas de la misma manera. Los cálculos de elementos incluyen determinar las deformaciones de los elementos y aplicar las relaciones constitutivas del material para calcular las tensiones de los elementos y consecuentemente las fuerzas internas.

La diferencia de los métodos directos reside en la forma en que se calculan las aceleraciones. Para resolver las ecuaciones de movimiento en un análisis dinámico, se selecciona un operador que permita realizar la integración numérica. Los operadores de integración dinámicos se caracterizan como implícitos o explícitos. Los esquemas explícitos obtienen los valores para cantidades dinámicas en  $t + \Delta t$  basándose únicamente en los valores disponibles en  $t$ . Los operadores implícitos resuelven las cantidades dinámicas en  $t + \Delta t$  basados en los valores de  $t$ , pero de las mismas cantidades en  $t + \Delta t$ . A continuación se describen los principales operadores utilizados en el procedimiento de integración directa.

### 2.3.2.2.1 Operadores implícitos

Algunos de los operadores implícitos son el operador de Hilber-Hughes-Taylor y el operador de Euler invertido, que se describen a continuación.

#### 2.3.2.2.1.1 Operador de Hilber-Hughes-Taylor

El operador de Hilber-Hughes-Taylor se basa en una generalización del operador de Newmark con amortiguamiento numérico controlable, que reemplaza la ecuación de equilibrio (2.2-16) con un balance de fuerzas de d'Alembert en el final del paso de tiempo y un promedio ponderado de fuerzas estáticas en el comienzo y final de paso de tiempo.

$$M^{NM}\ddot{u}^M|_{t+\Delta t} + (1 + \alpha)(I^N|_{t+\Delta t} - P^N|_{t+\Delta t}) - \alpha(I^N|_t - P^N|_t) + L^N|_{t+\Delta t} = 0 \quad (2.3-11)$$

Los desplazamientos y las velocidades se obtienen por la fórmula de Newmark como:

$$u|_{t+\Delta t} = u|_t + \Delta t\dot{u}|_t + \Delta t^2 \left( \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{u}|_t + \beta \ddot{u}|_{t+\Delta t} \right) \quad (2.3-12)$$

$$\dot{u}|_{t+\Delta t} = \dot{u}|_t + \Delta t((1 - \gamma)\ddot{u}|_t + \gamma\ddot{u}|_{t+\Delta t})$$

Los parámetros del operador se definen como:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{4}(1 - \alpha)^2 \\ \gamma &= \frac{1}{2} - \alpha \\ -\frac{1}{2} &\leq \alpha \leq 0 \end{aligned} \quad (2.3-13)$$

El control sobre la cantidad de amortiguamiento numérico se proporciona por el parámetro  $\alpha$ : con  $\alpha = 0$ , no hay amortiguamiento y el operador se convierte en la regla trapezoidal (Newmark,  $\beta = 1/4$ ). Sin embargo la solución puede introducir un ruido de alta frecuencia en cada cambio de paso de tiempo. Un valor pequeño de amortiguamiento permite evitar ésta dificultad, sin interferir significativamente en el balance energético del sistema.

#### 2.3.2.2.1.2 Operador de Euler invertido

El operador de Euler invertido resuelve la ecuación de equilibrio dinámico (2.2-19) en el final del paso de tiempo:

$$M^{NM}\ddot{u}^M|_{t+\Delta t} + (I^N|_{t+\Delta t} - P^N|_{t+\Delta t}) = 0 \quad (2.3-14)$$

Los desplazamientos y las velocidades se calculan como:

$$\begin{aligned} u|_{t+\Delta t} &= u|_t + \Delta t \dot{u}|_{t+\Delta t} \\ \dot{u}|_{t+\Delta t} &= \dot{u}|_t + \Delta t \ddot{u}|_{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (2.3-15)$$

### *Manejo del incremento de tiempo*

En la elección del tamaño de incremento máximo se consideran factores como el período de variación de las cargas aplicadas  $\Delta t$ , el período típico de vibración de la estructura  $T$ , las propiedades de amortiguamiento y rigidez. En general, se logran resultados fiables con una relación entre períodos de  $\Delta t/T < 1/10$ , (5).

El paso de integración implícita se puede seleccionar automáticamente sobre las bases del "incremento medio residual", que se basa en monitorear los valores de equilibrio residual en  $t + \Delta t/2$ , una vez que se obtiene la solución en  $t + \Delta t$ , para evaluar la exactitud y de esta manera ajustar apropiadamente el incremento de tiempo.

#### 2.3.2.2.2 Operadores explícitos

Dentro de los operadores explícitos, el operador de diferencia central es el más usado para aplicaciones de análisis de tensión-deformación, y se describe a continuación.

##### 2.3.2.2.2.1 Operador de diferencia central

El operador de diferencia central resuelve la ecuación de equilibrio dinámico (2.2-19) al inicio del incremento,

$$\ddot{u}|_{(t)} = (\mathbf{M})^{-1} \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{I})|_{(t)} \quad (2.3-16)$$

Las aceleraciones se integran a lo largo del tiempo usando la regla de diferencia central, la cual calcula el cambio de velocidad asumiendo que la aceleración es constante. El cambio en la velocidad se suma a la velocidad desde la mitad del incremento previo para determinar las velocidades en la mitad del incremento actual,

$$\dot{u}|_{(t+\frac{\Delta t}{2})} = \dot{u}|_{(t-\frac{\Delta t}{2})} + \frac{(\Delta t|_{(t+\Delta t)} + \Delta t|_{(t)})}{2} \ddot{u}|_{(t)} \quad (2.3-17)$$

Las velocidades se integran a lo largo del tiempo y se suman a los desplazamientos en el comienzo del incremento para determinar los desplazamientos al final del incremento,

$$\mathbf{u}|_{(t+\Delta t)} = \mathbf{u}|_{(t)} + \Delta t|_{(t+\Delta t)} \dot{\mathbf{u}}|_{(t+\frac{\Delta t}{2})} \quad (2.3-18)$$

De esta manera, cumpliendo el equilibrio dinámico al inicio del incremento se calculan las aceleraciones, luego las velocidades y los desplazamientos se avanzan "explícitamente" a lo largo del tiempo. El término "explícito" se refiere al hecho que el estado en el fin del incremento se basa solamente en los desplazamientos, las velocidades y las aceleraciones al inicio del



incremento. En este método se integran aceleraciones constantes y para lograr resultados exactos, el incremento de tiempo debe ser bastante pequeño para que las aceleraciones sean aproximadamente constantes durante un incremento.

### *Manejo del incremento de tiempo*

En el método explícito el estado del modelo se avanza durante un incremento de tiempo  $\Delta t$ , basado en el estado del modelo en el inicio del intervalo en un tiempo  $t$ . La cantidad de tiempo que se puede avanzar y aún mantener una representación apropiada del problema es bastante corto. Si el tiempo avanzado supera un determinado límite de estabilidad, puede ocurrir una inestabilidad numérica ocasionando que la solución no esté acotada. En general resulta difícil determinar el límite de estabilidad exacto, por lo tanto se realizan estimaciones conservativas del mismo. El carácter de la estimación puede ser elemento por elemento o global; ambos se describen a continuación.

#### **Estimación elemento por elemento**

Se estudia la frecuencia individual de cada elemento del modelo de elementos finitos, con el objetivo de encontrar la máxima frecuencia, o el mínimo período:

$$\Delta t = \min\left(\frac{L_e}{c_d}\right)$$

donde:

$c_d$  es la velocidad de onda del material

$L_e$  es la longitud característica del elemento

Esta estimación del límite de estabilidad se interpreta físicamente como el tiempo necesario para que una onda de tensión atraviese un elemento finito representado mediante su longitud característica. Esta evaluación realizada elemento por elemento, proporcionará un incremento de tiempo pequeño que es conservador.

#### **Estimación global**

Se observa la frecuencia más alta del modelo completo, que proporciona una estimación más cercana al límite de estabilidad real. Inicialmente se basa en la estimación elemento por elemento, y luego a partir de algoritmos adaptativos se modifica el incremento de tiempo en base a la exactitud alcanzada por las estimaciones previas.

### *Comparación de los operadores implícitos y explícitos*

Como se menciona anteriormente el método explícito es condicionalmente estable, ya que los incrementos de tiempo deben ser menores a un determinado valor límite. Pero para obtener la solución de las ecuaciones de movimiento en un punto de tiempo no se requieren iteraciones, ni tolerancias. Se utiliza una matriz de masa diagonal, y las ecuaciones se desacoplan, de esta manera la resolución en cada paso de cálculo resulta computacionalmente económica, sin embargo debido al límite de estabilidad el incremento de tiempo es pequeño por lo que para completar un análisis se requieren gran cantidad de pasos de cálculo.

Los métodos implícitos son incondicionalmente estables, pero el sistema de ecuaciones de movimiento está acoplado. Si el modelo analizado es puramente lineal en todos sus aspectos, se puede obtener la solución directa del sistema de ecuaciones sin iteraciones. En cualquier caso donde se presenten no linealidades, sin importar su causa, la solución alcanzada para cada punto de tiempo es iterativa, donde en cada iteración se requiere obtener la matriz de rigidez tangente local y resolver un sistema de ecuaciones acopladas. Se establecen tolerancias para evaluar si la solución obtenida representa adecuadamente la realidad. En casos extremos donde se analicen situaciones altamente no lineales o discontinuas, el método implícito podría requerir incrementos de tiempo que sean del orden de magnitud del método explícito, con un elevado costo computacional por cada incremento de tiempo, e incluso que no sea posible alcanzar la convergencia, por lo que se debe evitar su aplicación para analizar tales situaciones.

## 2.4 Software de elementos finitos

Existen en la actualidad diversas propuestas de software comerciales para la aplicación del método de elementos finitos. Debido a su amplia difusión y a sus posibilidades técnicas en el presente trabajo se utiliza una versión estudiantil de Abaqus, (7). A continuación se detallan las bases del funcionamiento del software y se mencionan los principales componentes de un modelo de elementos finitos, enfocado al análisis de tensión-deformación.

### 2.4.1 Modelado y análisis en Abaqus

Un análisis completo empleando el método de elementos finitos en Abaqus consiste en tres etapas distintas: el preprocesado, la simulación y el postprocesado, (8). Estos tres estados se interrelacionan mediante archivos que se leen y escriben en determinado formato. La Figura 2.4-1 muestra las etapas principales del funcionamiento del software de elementos finitos Abaqus, donde se visualizan las extensiones de archivos involucrados en cada una de las etapas y los módulos del programa utilizados.

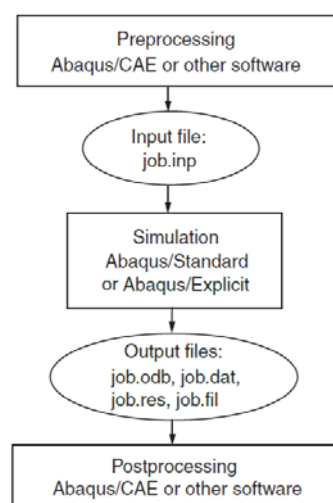


Figura 2.4-1: Esquema de las etapas del método de elementos finitos, (8).

A continuación se describen brevemente las funciones y los componentes del software que realizan cada una de las etapas del método de elementos finitos.

### *Preprocesado (Abaqus/CAE)*

En el preprocesado se define el modelo del problema físico y se crea un archivo de entrada de Abaqus. El modelo usualmente se crea gráficamente usando Abaqus/CAE o otro preprocesador, aunque el archivo de entrada para un análisis simple puede ser creado directamente usando un editor de texto. Los preprocesadores facilitan la tarea de modelado y generan un archivo de entrada donde la información esta organizada eficientemente.

### *Simulación (Abaqus/Standard o Abaqus/Explicit)*

En la simulación se resuelve el problema numérico definido en el modelo, por los módulos Abaqus/Standard y Abaqus/Explicit que emplean los algoritmos numéricos correspondientes. Dependiendo de la complejidad del problema que se analiza y la potencia computacional utilizada, la ejecución completa de un análisis puede tomar desde segundos hasta días.

### *Postprocesado (Abaqus/CAE)*

En el postprocesado se tratan los resultados obtenidos luego de finalizada la simulación, que consisten en variables de tipo escalares, vectoriales o tensoriales. Los datos se pueden observar interactivamente usando un postprocesador como el módulo de Visualización de Abaqus/CAE, el cual lee un archivo de base de datos binario neutral, brindando una variedad de opciones para mostrar los resultados, incluyendo gráficos de contornos de color, animaciones, gráfico de formas deformadas, gráficos cartesianos, etc, que se utilizan en el presente trabajo.

## **2.4.2 Componentes de un modelo de análisis de Abaqus**

Un modelo de Abaqus esta formado por diferentes componentes que unidos describen el problema físico analizado y los resultados que se pretende obtener. Como mínimo el modelo de análisis requiere de la siguiente información: geometría discretizada, propiedades de sección de elementos, datos de material, cargas y condiciones de contorno, tipo de análisis y requerimientos de salida. A continuación se tratan estos aspectos enfocados a aplicaciones estructurales que son de interés en el presente trabajo.

### *Geometría discretizada*

La geometría básica de la estructura que esta siendo modelada se define por elementos finitos y nodos, cuyo conjunto se denomina malla y generalmente logra solo una aproximación de la geometría real. Cada elemento en el modelo representa una porción discreta de la estructura física, mientras que todos los elementos interconectados representan la estructura completa. Los elementos están conectados a otros mediante nodos compartidos. Las coordenadas de los nodos y la conectividad de los elementos representan la geometría del modelo.

El tipo de elemento, la forma y la localización, así como el número total de elementos usados en la malla, afecta a los resultados obtenidos en una simulación. A medida que la densidad de malla aumenta, el resultado del análisis converge a una única solución, mientras

que el tiempo de cálculo requerido para el análisis aumenta. La solución obtenida desde el modelo numérico es generalmente una aproximación de la solución del problema físico que esta siendo simulado. La calidad con que la simulación numérica coincide con el problema físico se determina por las aproximaciones hechas en la geometría del modelo, el comportamiento de material, las condiciones de contorno, y las cargas.

### *Propiedades de sección de los elementos*

El software ofrece un amplio rango de elementos, en muchos de los cuales la geometría no se define completamente mediante las coordenadas de los nodos. En estas situaciones se establecen datos geométricos adicionales, como propiedades físicas de los elementos necesarias para definir el modelo completamente.

### *Datos de material*

Las propiedades de material de todos los elementos se especifican mediante comportamientos, como elasticidad, inercia, plasticidad, etc., que se requieren según el tipo de análisis. Generalmente resulta difícil obtener información del material de alta calidad, sin embargo la validación de los resultados se limita por la exactitud y extensión de los datos de los materiales.

### *Cargas y condiciones de contorno*

Se implementan diversos tipos de cargas, para tratar de representar las cargas reales del problema físico modelado, para que luego se conviertan en cargas equivalentes admitidas en la formulación aplicada para realizar el análisis. Las condiciones de contorno se aplican a ciertas regiones del modelo, donde se conocen los desplazamientos y/o rotaciones.

### *Tipo de análisis*

En el software Abaqus se pueden llevar a cabo simulaciones de diferentes fenómenos físicos, sin embargo el presente proyecto se enfoca en el análisis de tensión-deformación, tanto estático como dinámico. En un análisis estático se obtiene la respuesta de largo plazo de la estructura a las cargas aplicadas. Existen análisis estáticos de diversa complejidad, mientras algunos aplican algoritmos simples, otros emplean algoritmos potentes que permiten analizar modelos inestables. En otros casos se tiene interés en la respuesta dinámica de una estructura a las cargas: como por ejemplo, el efecto de una carga repentina sobre un componente, tal como ocurre durante un impacto. Existen criterios para establecer cuando resulta necesario analizar dinámicamente un fenómeno, que se basan en la relevancia de las fuerzas inerciales frente al resto de las fuerzas que participan en el modelo.

### *Requerimientos de salida*

Una simulación genera una gran cantidad de salidas. Para evitar un excesivo uso de espacio de disco, se limitan las salidas a mostrar únicamente la información necesaria para interpretar los resultados.

Generalmente cada una de las partes del modelo de elementos finitos se define de manera interactiva utilizando un preprocesador tal como Abaqus/CAE, o mediante el uso de scripts, que permite programar y automatizar las tareas.

## 2.5 Modelos de plasticidad

Entre los requerimientos del ensayo de choque se mencionan deformaciones permanentes del cuadro, como se detalla en la sección 1.2 Objetivos del presente trabajo, de manera que se considera oportuno tratar los modelos de plasticidad. En este sentido, primero se realiza una introducción a la teoría de plasticidad incremental que incluye a la mayoría de modelos debido a la generalidad en su formulación, y posteriormente en ausencia de conocimiento preciso del modelo constitutivo de los materiales que conforman los cuerpos involucrados en el ensayo de choque, se propone el modelo de plasticidad más simple, que es la elasto-plasticidad isotrópica.

### 2.5.1 Teoría de plasticidad incremental

La teoría de plasticidad incremental (5), se basa en pocos postulados fundamentales, lo que significa que todos los modelos de respuestas elasto-plásticas tienen la misma forma general. Los modelos de plasticidad se clasifican como dependientes o independientes según la relación existente entre la respuesta constitutiva y la velocidad a la cual el material se deforma.

Se asume que la deformación se divide en dos partes: la parte elástica y la parte inelástica (plástica), que se expresa en la Ecuación (2.5-1),

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{el} \cdot \mathbf{F}^{pl} \quad (2.5-1)$$

donde:

$\mathbf{F}$  es el gradiente de deformación total

$\mathbf{F}^{el}$  es la parte completamente recuperable de la deformación

$\mathbf{F}^{pl}$  es el gradiente de deformación plástica, que se define por la Ecuación (2.5-2),

$$\mathbf{F}^{pl} = (\mathbf{F}^{el})^{-1} \cdot \mathbf{F} \quad (2.5-2)$$

$(\mathbf{F}^{el})^{-1}$  es la deformación que ocurriría si, luego de la deformación  $\mathbf{F}$ , se impidió la respuesta inelástica de alguna manera pero en el mismo tiempo la tensión en el punto se reduce a cero.

En los modelos planteados la respuesta elástica e inelástica se distinguen separando la deformación en partes recuperable (elástica) y no recuperable (inelástica), asumiendo que hay una descomposición aditiva de la velocidad de deformación, que se expresa en la Ecuación (2.5-3),

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{el} + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl} \quad (2.5-3)$$

donde:

$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$  es la velocidad de deformación total

$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{el}$  es la velocidad de deformación elástica

$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl}$  es la velocidad de deformación plástica

Esta asunción es una aproximación consistente cuando la deformación elástica es infinitesimal y cuando la velocidad de deformación  $\dot{\varepsilon}$  se mide como la parte simétrica del gradiente de velocidad  $L$ , expresado en la Ecuación (2.5-4),

$$\dot{\varepsilon} = \text{sym}[\mathbf{L}] = \text{sym} \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right] \quad (2.5-4)$$

La parte elástica de la respuesta se asume como derivada de un potencial de densidad de energía de deformación elástica  $U$ , entonces la tensión se define mediante la Ecuación(2.5-5),

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{el}} \quad (2.5-5)$$

La función de fluencia  $f$  define el límite a una región de respuesta elástica pura y se expresa en la Ecuación (2.5-6),

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \theta, H_\alpha) < 0 \quad (2.5-6)$$

donde:

$\theta$  es la temperatura

$H_\alpha$  son los parámetros de endurecimiento

La tensión, la temperatura y los parámetros de endurecimiento, que dependen del modelo particular de plasticidad, son variables de estado que se introducen para permitir a los modelos describir las complejas respuestas inelásticas observadas en los materiales reales. Sin embargo existen modelos simples que no tienen parámetros de endurecimiento.

El comportamiento de fluencia se modela con diversos sistemas de flujo inelástico independientes, siendo el sistema más simple una única función. La respuesta elástica pura se generaliza en el sistema  $i$ , y se expone en la Ecuación (2.5-7),

$$f_i(\boldsymbol{\sigma}, H_{i,\alpha}) < 0 \quad (2.5-7)$$

La condición de fluencia se expresa como  $f_i = 0$  para modelos independientes de velocidad de deformación o  $f_i \geq 0$  en los modelos dependientes de velocidad, donde la función de fluencia puede tomar valores positivos.

Cuando el material fluye inelásticamente, la parte inelástica de la deformación se define mediante la regla de flujo que expresa la Ecuación (2.5-8),

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} = \sum_i d\lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.5-8)$$

donde:

$g_i(\boldsymbol{\sigma}, \theta, H_{i,\alpha})$  es el potencial de flujo para el  $i$  sistema

$d\lambda_i$  es la velocidad de cambio de tiempo,  $dt$ , para modelos dependientes de velocidad, o es un escalar que mide la velocidad de flujo plástico en el  $i$ -ésimo sistema, cuyo valor es determinado para satisfacer la condición de flujo para modelos independientes de velocidad. La sumatoria es únicamente sobre los sistemas de fluencia activos, dado que  $d\lambda_i = 0$  si  $f_i < 0$ .

Los modelos de plasticidad proponen un conjunto de ecuaciones de evolución para los parámetros de endurecimiento, que se expresa en la Ecuación (2.5-9),

$$dH_{i,\alpha} = d\lambda_i h_{i,\alpha}(\boldsymbol{\sigma}, \theta, H_{i,\beta}) \quad (2.5-9)$$

donde:

$h_{i,\alpha}$  es la forma derivada de la ley de endurecimiento  $H_{i,\alpha}$

En los modelos se usan ecuaciones de evolución simples o complicadas, que se requieren para aproximar al comportamiento experimental observado. Las ecuaciones establecidas anteriormente definen el modelo plástico, pero debido a que están planteadas en forma derivada se deben integrar.

## 2.5.2 Elasto-plasticidad isotrópica

El modelo de elasto-plasticidad isotrópica puede ser independiente o dependiente de la velocidad de deformación y tiene una forma simple. Por tal motivo las ecuaciones algebraicas asociadas con el modelo se desarrollan en términos de una sola variable, y la matriz de rigidez del material se escribe explícitamente.

La función de fluencia de Mises con flujo asociado asume que no hay deformación plástica volumétrica; debido a que el módulo elástico es bastante grande, el cambio de volumen es pequeño. Se establecen dos tipos de deformaciones, la volumétrica  $\varepsilon_{vol}$  y la desviadora  $\mathbf{e}$ , que se definen en la Ecuación (2.5-10) y la Ecuación (2.5-11) respectivamente:

$$\varepsilon_{vol} = traza(\boldsymbol{\sigma}) \quad (2.5-10)$$

$$\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} \varepsilon_{vol} \mathbf{I} \quad (2.5-11)$$

La descomposición de la velocidad de deformación se expresa en la Ecuación (2.5-12),

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}^{el} + d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} \quad (2.5-12)$$

La Ecuación (2.5-12) se escribe en forma integrada como la Ecuación (2.5-13),

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{el} + \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} \quad (2.5-13)$$

La elasticidad es lineal e isotrópica, y se expresa en términos de dos parámetros materiales dependientes de la temperatura.

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (2.5-14)$$

$$G = \frac{E}{3(1+\nu)}$$

donde:

$E$  es el módulo de Young

$\nu$  es el coeficiente de Poisson

$K$  es el módulo de compresibilidad

$G$  es el módulo de corte

La elasticidad se escribe en sus componentes volumétrico y desviador,

$$\begin{aligned}
p &= -K \varepsilon_{vol} \\
&= -\frac{1}{3} \text{traza}(\boldsymbol{\sigma})
\end{aligned}
\tag{2.5-15}$$

donde  $p$  es la tensión de presión equivalente

$$\mathbf{S} = 2G e^{el}
\tag{2.5-16}$$

donde  $\mathbf{S}$  es la tensión desviadora

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} + p\mathbf{I}
\tag{2.5-17}$$

La regla de flujo se expresa en la Ecuación (2.5-18),

$$d\mathbf{e}^{pl} = d\bar{e}^{pl} \mathbf{n}
\tag{2.5-18}$$

donde:

$d\bar{e}^{pl}$  es la tasa de deformación plástica equivalente (escalar)

$\mathbf{n}$  es la dirección de flujo de Mises

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} &= \frac{3\mathbf{S}}{2q} \\
q &= \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S}}
\end{aligned}
\tag{2.5-19}$$

La plasticidad requiere que el material cumpla una relación uniaxial entre la tensión de deformación plástica y la tasa de deformación. Si el material es independiente de la velocidad, la condición de fluencia es:

$$q = \sigma^0(\bar{e}^{pl}, \theta)
\tag{2.5-20}$$

donde  $\sigma^0$  es la tensión de fluencia y se define en función de la deformación plástica equivalente  $\bar{e}^{pl}$  y la temperatura  $\theta$ .

Si el material es dependiente de la velocidad, se define la tasa de flujo uniaxial,

$$\dot{\bar{e}}^{pl} = h(q, \bar{e}^{pl}, \theta)
\tag{2.5-21}$$

donde  $h$  es una función conocida.

La Ecuación (2.5-21) se integra empleando algún operador para obtener el flujo plástico:

$$\begin{aligned}
\Delta \bar{e}^{pl} &= \int_0^t \dot{\bar{e}}^{pl} dt \\
&= \Delta t h(q, \bar{e}^{pl}, \theta)
\end{aligned}
\tag{2.5-22}$$

Partiendo de  $\bar{e}^{pl}|_0$  al inicio del incremento, se calcula  $\bar{e}^{pl}$  al final del incremento,

$$\bar{e}^{pl} = \bar{e}^{pl}|_0 + \Delta \bar{e}^{pl}$$

Finalmente se obtiene  $q$  en función de  $\bar{e}^{pl}$  al final del incremento:



$$q = \bar{\sigma}(\bar{e}^{pl})$$

donde  $\bar{\sigma} = \sigma_0$  para modelos independientes de velocidad y  $\bar{\sigma}$  se obtiene de la inversión de la Ecuación (2.5-22). De esta manera, los modelos independiente y dependiente de velocidad integrados dan la forma uniaxial general.

En cualquier incremento para determinar si ocurre flujo plástico, se evalúa  $q$  basado en la respuesta elástica pura. En caso de verificar que el valor de  $q$  exceda a  $\sigma^0$ , hay efectivamente flujo plástico y las ecuaciones planteadas por el modelo de plasticidad se integran y resuelven para el estado al final del incremento.

Las principales variables empleadas para monitorear el comportamiento plástico en un modelo son la energía plástica disipada  $E_p$ , y la deformación plástica equivalente  $\bar{e}^{pl}$ , que se expresan en la Ecuación (2.5-23) y la Ecuación (2.5-24) respectivamente,

$$E_p = \int_0^t \left( \int_V \boldsymbol{\sigma}^c : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} dV \right) dt \quad (2.5-23)$$

$$\bar{e}^{pl} = \sqrt{\frac{2}{3} e^{pl} : e^{pl}} \quad (2.5-24)$$

donde:

$\boldsymbol{\sigma}^c$  es la tensión derivada de la ecuación constitutiva, sin incluir los efectos de la disipación viscosa

$e^{pl}$  es el tensor de deformaciones plásticas

## 2.6 Modelos de contacto

En el ensayo de choque estudiado, un fenómeno muy importante es el contacto que ocurre entre el rodillo y el percutor, por este motivo se considera adecuado tratar los modelos para simular la interacción de contacto. El objetivo principal de las simulaciones de contacto es identificar las áreas sobre las superficies del modelo que están en contacto y calcular la presión de contacto generada.

En un análisis de elementos finitos, las condiciones de contacto son una clase especial de restricciones discontinuas, porque se aplican únicamente cuando las dos superficies están en contacto y permiten la transferencia de fuerzas desde una parte del modelo a otra. El análisis debe ser capaz de detectar cuando dos superficies están en contacto y aplicar las restricciones de contacto adecuadamente. Similarmente, el análisis debe ser capaz de detectar cuando se separan las dos superficies y eliminar las restricciones de contacto.

La inclusión de interacciones de contacto en un modelo exige considerar cuidadosamente los aspectos mencionados a continuación:

- Métodos de integración (implícito o explícito).
- Bases del contacto (elementos especiales o superficies).
- Enfoques para definir el contacto (general y pares de contacto).

- Selección de superficies (múltiples superficies y contacto propio).
- Discretización (nodo, caras).
- Formulaciones (deslizamientos, ponderación y polaridad de superficie).
- Métodos de ejecución de restricciones (directo, penalidad, multiplicadores de Lagrange).
- Modelos constitutivos mecánicos: En dirección normal y tangencial a las superficies. En dirección normal puede ser duro o blando. Dentro de los comportamientos blandos se tienen los siguientes: lineal, lineal definido por partes, exponencial, o combinación de los anteriores.
- Otros modelos constitutivos: El contacto puede incluir fenómenos como flujos eléctricos, magnéticos, porosos, térmicos, que no se tratan, porque no participan del ensayo.

Cada uno de los aspectos se desarrolla a continuación, mostrando la variedad de cuestiones que intervienen en un modelo de elementos finitos para estudiar la interacción de contacto.

### 2.6.1 Métodos de integración

A cada tipo de análisis llevado a cabo, le corresponde un método de integración, que utiliza operadores que se clasifican como implícitos o explícitos, y se tratan en las secciones 2.3.2.2.1 y 2.3.2.2.2, respectivamente. Algunos aspectos de la interacción de contacto dependen del tipo de operador utilizado y se describirán oportunamente cuando se traten estos aspectos.

### 2.6.2 Bases del contacto

En el modelo se representan las partes reales que potencialmente entrarán en contacto en la situación que se pretende analizar. Para cumplir este propósito se distinguen dos bases para modelar el contacto (6), que se describen a continuación.

#### 2.6.2.1 Contacto basado en elementos especiales

Existen situaciones donde se estudia la interacción de contacto entre cuerpos de geometrías muy particulares, como por ejemplo dos tubos concéntricos, una viga y una placa, etc. Para estos casos, las partes que contactan se representan con elementos desarrollados específicamente para modelar estas situaciones y pueden ser puntos o segmentos de línea, que simulan el comportamiento global de los cuerpos involucrados en el contexto planteado. Todos los aspectos de contacto se formulan para cada circunstancia en particular, y por ende son válidos únicamente en este caso, aprovechando para simplificar los algoritmos utilizados.

#### 2.6.2.2 Contacto basado en superficies

En la mayoría de las situaciones de contacto, las partes involucradas tienen geometrías generales y complejas, por lo tanto no es posible modelar razonablemente la realidad empleando elementos especiales simplificados. En estos casos, se requiere considerar la configuración geométrica de las superficies exteriores que podrían contactar, discretizando las mismas mediante nodos, aristas y caras.

Esta base de contacto permite modelar la totalidad de situaciones de contacto, y contiene los principales desarrollos realizados en la teoría de contacto. El modelo basado en superficies se puede usar para representar situaciones particulares que también disponen de modelos

basados en elementos especiales, pero se desaprovechan las simplificaciones y la reducción del costo computacional de este último para resolver el problema.

### 2.6.3 Enfoques para definir el contacto

En el modelo se define el contacto especificando las superficies sobre las cuales potencialmente ocurrirá la interacción, y existen dos maneras de realizarlo, el enfoque general, y el enfoque de pares de contacto, que se describen a continuación.

- **Enfoque general:** En el algoritmo de contacto se toman características definidas por defecto, que en general resultan válidas para la mayoría de los casos planteados.
- **Enfoque de pares de contacto:** En el algoritmo de contacto se define explícitamente las características de cada interacción, con una determinada intención.

### 2.6.4 Definición de la superficie

En contacto basado en superficies se selecciona una única superficie o múltiples superficies para que intervengan en las interacciones de contacto. Ambos casos se detallan a continuación.

- **Superficie única:** Se estudia el contacto en la configuración inicial, o durante el transcurso del análisis de una superficie con sigla misma, sin considerar el resto de superficies del modelo.
- **Superficies múltiples:** Se estudia el contacto, entre una superficie con otra. Este contacto se especifica para cada par de superficies o en general para todas.

### 2.6.5 Discretización

El método de elementos finitos se basa en dividir el dominio de análisis en una determinada cantidad de elementos que representan una fracción del objeto que se pretende modelar. En el caso del contacto para representar la superficie toman las siguientes entidades: caras o nodos. Ambas discretizaciones se tratan a continuación.

- **Discretización mediante caras:** Considera la región donde se estudia el contacto como un conjunto de caras pequeñas conectadas, que aproximan a la superficie real.
- **Discretización mediante nodos:** Considera un conjunto de puntos, donde cada uno tiene un área asociada, y agrupados representan la superficie sobre la cual se analiza el contacto.

### 2.6.6 Formulaciones

La formulación de los modelos de contacto, incluyen diversos aspectos como la ponderación de superficie, el seguimiento de los deslizamientos y la polaridad, que se tratan individualmente a continuación.

#### 2.6.6.1 Formulación de ponderación de superficies

Se tienen dos tipos de ponderación de superficies: maestra-esclava pura y maestra-esclava balanceada, que se describen a continuación.

- **Ponderación maestra-esclava pura:** Generalmente el contacto en un modelo de elementos finitos se aplica de manera discreta, esto se muestra para el caso de contacto duro, en el cual una superficie denominada superficie maestra puede penetrar en la otra

llamada esclava, mientras que no está permitida la situación opuesta. La adecuada elección de los roles de las superficies en el algoritmo de contacto, depende del tamaño de la superficie, la rigidez de los elementos subyacentes, y el refinamiento de la malla.

- **Ponderación maestra-esclava balanceada:** En esta ponderación se realiza el cálculo de la interacción de contacto empleado el algoritmo maestro-esclavo puro, para las dos posibilidades de intercambiar los roles de las superficies. Posteriormente las variables que representan el contacto se expresan como una combinación lineal de los dos resultados obtenidos para el algoritmo maestro-esclavo puro, de acuerdo a una determinada ponderación.

La ponderación balanceada de superficies requiere más tiempo computacional pero provee un cumplimiento más exacto de las restricciones de contacto.

#### *2.6.6.2 Formulación de deslizamientos*

Para detectar el inicio del contacto en una situación determinada, se requieren algoritmos de seguimiento de los elementos que potencialmente podrían contactar. En función de las capacidades de estos algoritmos se distinguen las distintas formulaciones de deslizamientos que pueden ser infinitesimales, pequeños y finitos. A continuación se trata cada formulación.

- **Deslizamientos infinitesimales:** El algoritmo supone que los elementos de una superficie entran en contacto siempre con los mismos elementos de la otra superficie durante el análisis. Esta hipótesis permite que el procedimiento sea computacionalmente menos costoso.
- **Deslizamientos pequeños:** Este algoritmo admite grandes movimientos absolutos de las superficies estudiadas, pero supone que ocurren pequeños deslizamientos relativos entre ambas.
- **Deslizamientos finitos:** El algoritmo localiza las posibles interacciones de contacto entre cualquier par de elementos, y estos conjuntos pueden cambiar durante el tiempo, de manera que el área de contacto se calcula en cada paso. Este algoritmo es el más completo, ya que admite deslizamientos absolutos y relativos entre los objetos en contacto, pero requiere mayor costo computacional.

#### *2.6.6.3 Formulación de polaridad*

Las caras sobre las cuales se pretende evaluar el contacto pueden provenir de la idealización de cuerpos sólidos o superficies. El algoritmo de contacto asigna por convención a cada superficie de doble cara una polaridad que se representa mediante vectores normales.

La elección de la cantidad de caras que intervienen en el análisis influye en la exactitud alcanzada, la ejecución de las restricciones de contacto, y la cantidad de memoria utilizada. Desde este punto de vista las superficies se clasifican como superficies de simple faz y superficies de doble faz, que se tratan a continuación.

- **Superficie de simple faz:** Se selecciona la cara sobre la que se pretende obtener la interacción de contacto, simplificando el análisis especialmente si están en contacto con materiales Eulerianos.

- **Superficie de doble faz:** Intervienen las caras de ambas direcciones, por lo que la formulación es más compleja y pueden ocurrir dificultades para cumplir las restricciones de contacto.

### 2.6.7 Modelos constitutivos

Los modelos constitutivos de la interacción de contacto pueden incluir el estudio de diversos fenómenos físicos. Se tiene especial interés en la interacción mecánica, por lo que no se trata el resto de los modelos constitutivos.

#### 2.6.7.1 Modelos mecánicos

El objetivo de los modelos constitutivos mecánicos de contacto es definir las ecuaciones que gobiernan el movimiento. Se descompone el comportamiento mecánico según dos direcciones, respecto a las superficies de contacto, estableciendo los comportamientos normal y tangencial, que se abordan a continuación.

#### Comportamiento normal

Existen dos tipos principales de comportamientos mecánicos en la dirección normal: el contacto duro y el contacto blando. Posteriormente se describe cada tipo, resaltando sus ventajas y limitaciones.

#### Contacto duro

En este tipo de contacto, las superficies, no están en contacto cuando el margen libre es mayor a cero, en este estado la presión de contacto es nula, para cualquier separación entre ambas y entran en contacto cuando su margen libre se reduce a cero, conservando esta condición para cualquier magnitud de presión ejercida entre las superficies. La relación entre presión de contacto e interferencia se muestra en la Figura 2.6-1 (a).

Este modelo es una buena representación de las situaciones reales, sin embargo debido a la discontinuidad que plantea durante el contacto, pueden ocurrir problemas de inestabilidades en la solución, especialmente cuando los cuerpos impactan a elevadas velocidades, por lo que surgen los modelos blandos de contacto que son aproximaciones al modelo duro que intentan superar los inconvenientes prácticos surgidos.

#### Contacto blando

Existen diversos modelos de contacto blando, todos ellos se caracterizan por permitir la interferencia entre las superficies durante el contacto. En el software de elementos finitos se plantean las siguientes variantes dentro del contacto blando:

- Modelo lineal: La presión de contacto aumenta linealmente, para valores de interferencia positivos.
- Modelo lineal por partes: La presión de contacto puede ser distinta de cero para valores de interferencia negativa. La rigidez de contacto es constante por tramos de interferencia, como se muestra en la Figura 2.6-1 (b).
- Modelo de rigidez escalada progresiva: La rigidez de contacto se incrementa a un múltiplo de su valor base, cada vez que se supera determinado intervalo de interferencia, como se muestra en la Figura 2.6-1 (c).

- Modelo exponencial:** Se utiliza una relación exponencial, para permitir relacionar la presión de contacto y la separación de la superficie, que se expone en la Figura 2.6-1 (d). En esta aproximación del contacto duro, donde la presión de contacto toma un valor no nulo para una interferencia negativa y para una interferencia cero hay una magnitud de la presión de contacto. La rigidez de contacto puede alcanzar valores grandes sino se introduce ninguna corrección en la curva, por lo que se modifica el modelo estableciendo un valor máximo de rigidez para evitar los inconvenientes ocasionados por la rigidez de contacto excesiva.

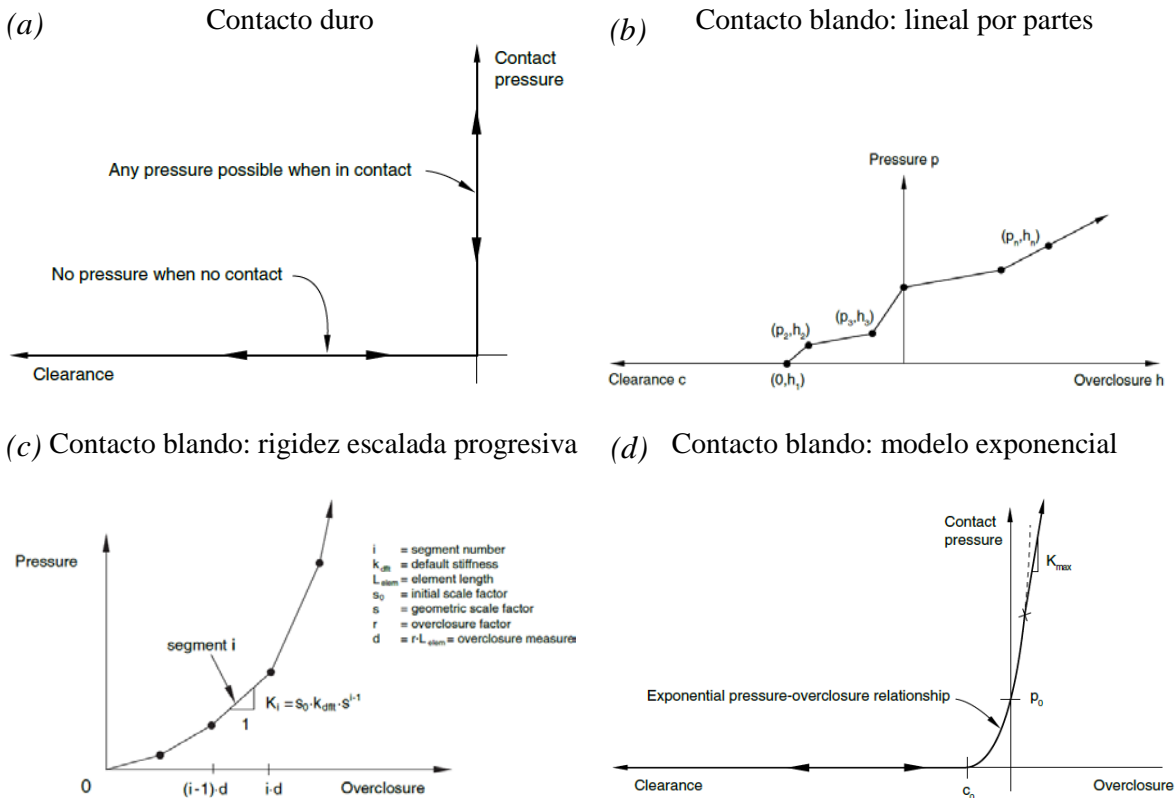


Figura 2.6-1: Modelos para la relación entre presión de contacto e interferencia, (6).

Los modelos de contacto planteados tienen establecido un comportamiento en la dirección normal, con fuerzas que tienden a separar a las superficies en contacto. Sin embargo se puede definir para ciertos modelos un comportamiento de adhesión que tiende a mantener las superficies unidas, esto se consigue definiendo valores de tensión para determinados valores de margen libre en las relaciones constitutivas.

### Comportamiento tangencial

En los modelos de contacto por defecto no se incluye ningún tipo de fricción, es decir las superficies se deslizan tangencialmente sin transmitir corte. Se puede imponer la restricción para que las superficies se mantengan unidas fijamente durante el contacto y transmitan cualquier magnitud de esfuerzo cortante. En general, existe un modelo mixto, que brinda una adecuada representación de las situaciones reales, donde siempre hay fricción entre las superficies, y esta se expresa en función de variables como la presión de contacto, la temperatura, las características de las superficies involucradas, etc. En este modelo, el corte que se puede

transmitir tiene un valor máximo, a partir del cual ocurren deslizamientos relativos entre ambas superficies. El modelo de fricción de Coulomb, se emplea habitualmente para establecer el comportamiento tangencial de las superficies de contacto.

#### **2.6.7.2 Modelos no mecánicos**

En las formulaciones de contacto se pueden incorporar diversos fenómenos físicos entre los que se mencionan flujos poroso, eléctrico, magnético y térmico, que no son relevantes en el ensayo de impacto, por lo tanto no se tratan en este proyecto.

### **2.6.8 Método de ejecución de restricciones**

Durante el tiempo en que transcurre la contacto, se deben cumplir ciertas condiciones de contorno dictadas por el modelo constitutivo empleado.

La manera de cumplir las restricciones de contacto, depende del tipo operador utilizado para integrar las ecuaciones de movimiento, que puede ser implícito o explícito, y ambos se desarrollan a continuación.

#### **2.6.8.1 Ejecución de restricciones en contacto implícitos**

Para cumplir las condiciones de contacto en procedimientos de análisis implícitos, se utilizan tres métodos: el método directo, el método de penalidad y el método de Lagrange aumentado, que se describen a continuación.

##### **2.6.8.1.1 Método directo**

El método directo se basa en el estricto cumplimiento de las relaciones entre presión de contacto e interferencia establecidas por la ecuación constitutiva del modelo elegido. De esta manera se obtienen las soluciones más exactas, pero pueden ocurrir inconvenientes de convergencia especialmente para cumplir con el contacto duro. Con el objetivo de superar estas dificultades surgen métodos que hacen cumplir de manera aproximada las restricciones impuestas por un modelo de contacto duro, con menor costo computacional, a cambio de una pequeña pérdida de exactitud en la solución.

##### **2.6.8.1.2 Método de penalidad**

El método consiste en una aproximación rígida al modelo de constitutivo duro, que da lugar a la penetración de las superficies interactuantes, permitiendo disminuir los problemas de convergencia del método directo. Dependiendo del comportamiento de la rigidez en función de la interferencia se tienen dos tipos de penalidades:

- **Penalidad lineal:** La rigidez permanece constante desde que se inicia el contacto.
- **Rigidez lineal:** A partir de determinada interferencia (negativa o positiva), la rigidez nula adquiere un valor mínimo, posteriormente crece linealmente con la interferencia, hasta un valor máximo, a partir del cual se mantiene constante para interferencias mayores.

##### **2.6.8.1.3 Método de Lagrange aumentado**

El procedimiento consiste en la aplicación del método de la penalidad, de manera iterativa hasta obtener un valor de penetración entre superficies, menor a una interferencia prefijada. En

cada nueva repetición la presión de contacto se aumenta, y posteriormente se verifica si se cumple el objetivo propuesto, para decidir si el procedimiento alcanzó la solución buscada o debe continuar calculando.

### ***2.6.8.2 Ejecución de restricciones en contactos explícitos***

Para cumplir las condiciones de contacto en procedimientos de análisis explícitos, se utilizan dos métodos: el método de penalidad y el método cinemático. Ambos se describen a continuación y se aplican sobre esquemas de ponderación maestro-esclavo puro o maestro-esclavo balanceado.

#### **2.6.8.2.1 Método de penalidad**

Este método tiene una ejecución menos estricta que el método cinemático, permitiendo tratar casos más generales de contacto. El algoritmo detecta la interferencia de ambas superficies durante el análisis, y basándose en la rigidez representativa de los elementos subyacentes a la zona de interacción, se propone una rigidez de penalidad para el contacto y se estima la fuerza de contacto. Este procedimiento se realiza una única vez suponiendo que una superficie llamada maestra puede penetrar en la otra llamada esclava. Al incorporar la rigidez de penalidad al modelo se interviene sobre el incremento de tiempo crítico para que el análisis sea estable.

#### **2.6.8.2.2 Método cinemático**

Este método ejecuta estrictamente las restricciones de contacto a través de un algoritmo predictor/corrector. Primero se avanza al estado cinemático siguiente, para predecir la configuración sin considerar las condiciones de contacto. En función de la penetración, la masa asociada con los elementos en contacto y el incremento de tiempo, se calcula una fuerza requerida para oponerse a la penetración entre las superficies. Con el intercambio de fuerzas y masas de los elementos involucrados, se obtiene una corrección de aceleración en la que se ejecutan las restricciones de contacto estrictamente y se conserva la cantidad de movimiento. Sin embargo durante el impacto se absorbe la energía cinética de los nodos que contactan. Para reducir este efecto se recomienda que las zonas de contacto, tengan mallas refinadas, para que la masa asociada a sus nodos sea pequeña y por lo tanto la pérdida de energía cinética no sea significativa.

La principal ventaja del método cinemático es que no influye sobre el límite de estabilidad para el incremento de tiempo, sin embargo no se puede aplicar en todas las situaciones de contacto.



### 3 Validación del uso del método de elementos finitos

En este capítulo se plantean modelos de situaciones físicas simples para los cuales se dispone de soluciones analíticas, con el fin de contrastar los resultados logrados mediante la utilización del método de elementos finitos. El objetivo principal es tomar contacto con el software, generar experiencia en el uso y asegurar una utilización adecuada de las herramientas numéricas, apreciando la influencia de diversos factores, como el tipo de modelo, el procedimiento de análisis, la formulación, la clase de elemento, el tamaño de malla, etc.

Se plantean análisis estáticos y dinámicos, que se describen a continuación.

#### 3.1 Análisis estático

El análisis estático se plantea con el objetivo de contrastar los resultados logrados para cargas estáticas mediante modelos analíticos y numéricos.

Se estudia la situación conocida de la viga con extremos: empotrada-libre, que se muestra en la Figura 3.1-1, con dos casos de cargas, concentrada en el extremo libre y distribuida sobre toda la longitud, indicadas en (a) y (b) respectivamente.

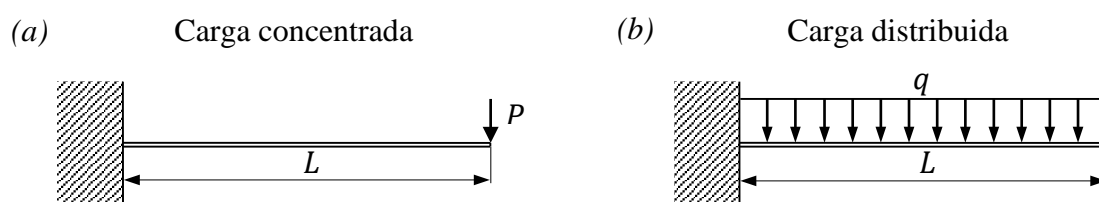


Figura 3.1-1: Modelo estático de viga empotrada-libre con soluciones analíticas conocidas.

En la Figura 3.1-2 se muestran los perfiles de vigas rectangular, circular y anular empleados en el análisis que se indican en (a), (b) y (c) respectivamente, con sus correspondientes parámetros geométricos.

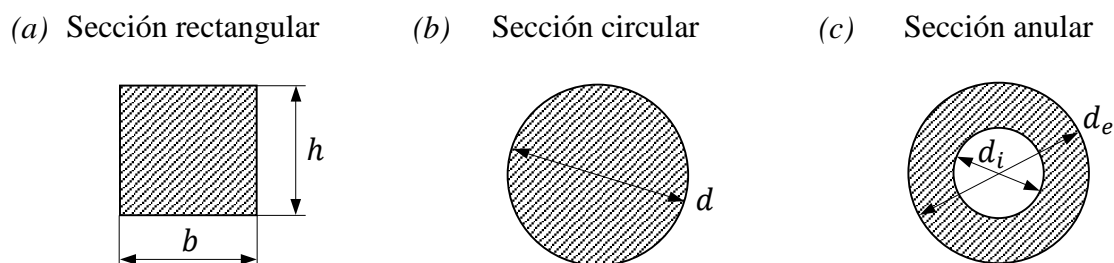


Figura 3.1-2: Perfiles de las secciones transversales propuestas para verificar los modelos.

Se resuelve analíticamente por teoría de vigas de Euler-Bernoulli y numéricamente por el método de elementos finitos, empleando elementos unidimensionales y tridimensionales para los distintos tipos de secciones. Se evalúan los resultados obtenidos para el desplazamiento en el extremo libre  $f_{max}$ .

### 3.1.1 Casos planteados

Para analizar la situación física planteada, se requiere contar con los distintos parámetros que participan del modelo. Por tal motivo a continuación se proponen valores numéricos para las dimensiones geométricas, las magnitudes de cargas y las propiedades del material.

Se eligen los siguientes valores para las dimensiones geométricas:

$$L = 1[m]$$

$$h = 0.05[m]$$

$$b = 0.05[m]$$

$$d = 0.05[m]$$

$$d_i = 0.04[m]$$

$$d_e = 0.06[m]$$

Se seleccionan las magnitudes de las cargas correspondientes a cada caso:

$$P = 100[N]$$

$$q = 100[N/m]$$

Se adopta como material acero, cuyas propiedades requeridas son el módulo de Young  $E$ , el coeficiente de Poisson  $\nu$ , que tienen los siguientes valores:

$$E = 2,1 \times 10^{11}[N/m^2]$$

$$\nu = 0,3[-]$$

Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 3.1-3, donde se separan según el caso de carga y el tipo de sección transversal de la viga. En los gráficos las abscisas son cantidad de elementos en la dirección longitudinal,  $N$  [*elementos*], y las ordenadas son deflexión en el extremo libre de la viga  $f_{max}$ , medida en [ $m$ ].

Para el modelo de vigas se utilizan 10, 20, 30 y 40 elementos por la rápida aproximación de resultados. Para el modelo tridimensional debido a la menor convergencia se propusieron 100, 150 y 200 elementos a lo largo de la dirección axial, y de acuerdo al tamaño de los mismos se forma la malla para representar cada perfil de sección transversal.

#### *Análisis de resultados*

Se toma como parámetro de referencia la cantidad de elementos a lo largo de la longitud de la viga. Este número coincide con el número total de elementos en el modelo de vigas, mientras que en el modelo tridimensional, la cantidad de elementos es superior debido a que la sección transversal se malla con más de un elemento. Generalmente existe una relación cúbica entre la cantidad de elementos en una determinada dirección y la cantidad total de elementos del modelo tridimensional. El modelo analítico es independiente de la cantidad de elementos, por lo tanto se muestra como una línea constante. En los modelos de elementos finitos adquiere importancia la cantidad de elementos, visualizándose con marcas las cantidades particulares de elementos utilizadas en cada caso y luego se realiza interpolación lineal, para trazar las curvas que muestren la convergencia de los resultados.

Los resultados de los métodos numéricos obtenidos variando la cantidad de elementos, permiten observar las siguientes cuestiones:

- El modelo unidimensional que utiliza elementos de vigas, con formulación de Euler-Bernoulli, requiere escasa cantidad de elementos para converger a la solución analítica calculada mediante la misma teoría. No obstante, se tiene un pequeño error propio de la aplicación del cálculo numérico que es depreciable a los fines prácticos.
- El modelo tridimensional que utiliza elementos hexaedros, muestra una convergencia lenta hacia la solución analítica, para todos los tipos de perfiles estudiados, siendo este modelo más costoso computacionalmente, por lo que no justifica su empleo para analizar vigas, (cuerpos tridimensionales donde la dimensión en una dirección es considerablemente mayor a las dimensiones en las otras dos direcciones).

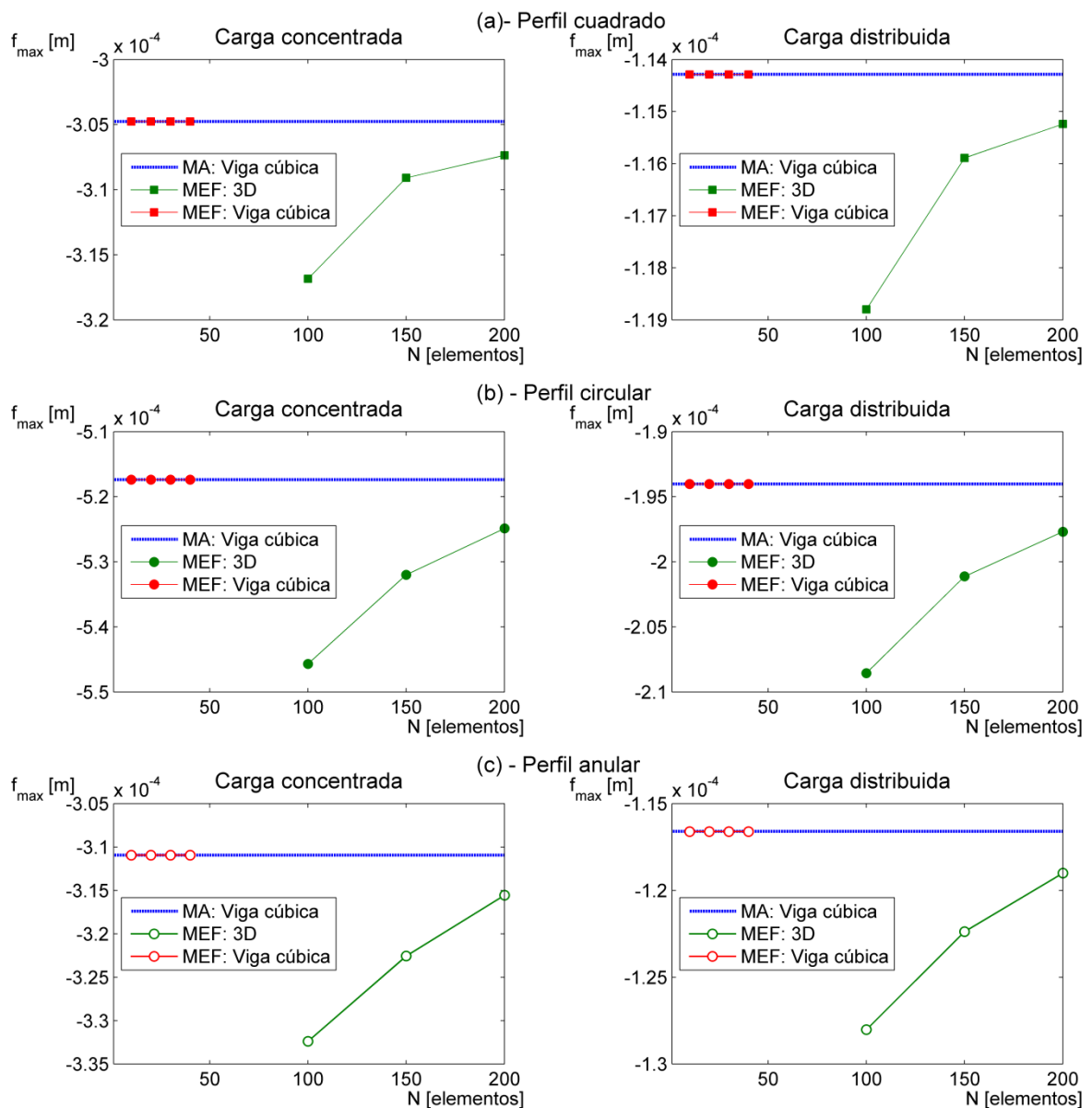


Figura 3.1-3: Desplazamiento estático en el extremo libre para vigas de distintas secciones.

## 3.2 Análisis dinámico

Cuando el período de las cargas actuantes sobre en una estructura, es pequeño respecto al período de vibración libre del modo de menor frecuencia, los efectos de inercia se convierten en significativos y es necesario tenerlos en cuenta planteado un análisis dinámico.

Un procedimiento descomposición modal se plantea para obtener información respecto al comportamiento dinámico de una estructura, y se trata a continuación.

### 3.2.1 Descomposición modal

El objetivo del procedimiento de descomposición modal es obtener los modos y frecuencias naturales para vigas. Se conocen soluciones analíticas para vibraciones axiales, torsionales y trasversales (9), bajo ciertas condiciones de apoyo. En el caso de vibraciones trasversales, se proponen diversos modelos, desde el más simple propuesto por la teoría Euler-Bernoulli, a la que se pueden adicionar separadamente el efecto cortante y la inercia rotatoria (10), hasta llegar a la teoría de Timoshenko (11), que considera simultáneamente ambos efectos.

Se contrastan los resultados analíticos propuestos por las distintas teorías, respecto aproximaciones logradas por modelos de elementos finitos, empleando elementos unidimensionales y tridimensionales para distintos tipos de secciones.

Se estudia el caso conocido de la viga con extremos: empotrada-libre, que se muestra en la Figura 3.2-1, donde no actúan cargas externas.

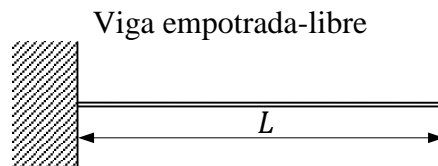


Figura 3.2-1: Modelo de viga empotrada-libre para aplicar la descomposición modal.

Se evalúan los resultados obtenidos para las frecuencias de los primeros cuatro modos naturales trasversales  $f_i$ .

### 3.2.2 Casos planteados

Para analizar la situación física planteada, se requiere disponer de los distintos parámetros que participan del modelo, que son las dimensiones geométricas y las propiedades del material. Las dimensiones geométricas de las vigas, son las mismas que las planteadas para la validación estática, y se muestran más atrás, en la Figura 3.1-2.

Se supone un material isotrópico, homogéneo, elástico lineal, cuyas propiedades requeridas son el módulo de Young  $E$ , el coeficiente de Poisson  $\nu$  y la densidad  $\rho$ , que tienen los siguientes valores:

$$E = 7 \times 10^{10} [N/m^2]$$

$$\nu = 0,33 [-]$$

$$\rho = 2860 [kg/m^3]$$

Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 3.2-2, la Figura 3.2-3, y la Figura 3.2-4, para los tipos de perfiles cuadrado, circular y anular respectivamente. En los gráficos las ordenadas son frecuencia natural  $f_n$ , medida en [Hz] y las abscisas son número de elementos a lo largo de la dirección longitudinal de la viga, N [elementos].

Los resultados analíticos se exponen como líneas constantes a lo largo del rango considerado debido a que no dependen de la cantidad de elementos.

En los análisis numéricos se visualizan mediante marcas puntuales las cantidades de elementos utilizados para cada caso particular y luego se realiza interpolación lineal, para trazar las curvas que muestran la convergencia de los resultados.

Para el modelo de vigas se utilizan 10, 20, 30 y 40 elementos por la rápida aproximación de resultados. Para el modelo tridimensional debido a la menor convergencia se propusieron 100, 150 y 200 elementos a lo largo de la dirección axial, y de acuerdo al tamaño de los mismos se forma la malla para representar cada perfil de sección transversal.

En la leyenda del gráfico se hace referencia a los siguientes modelos:

- Euler-Bernoulli: Teoría de viga delgada de Euler-Bernoulli.
- Rotatorio: Teoría de viga delgada de Euler-Bernoulli incorporando la inercia rotatoria.
- Cortante: Teoría de viga delgada de Euler-Bernoulli incorporando el efecto cortante.
- Timoshenko: Teoría de viga gruesa de Timoshenko.
- MEF Tridimensional: Método de elementos finitos con elementos tridimensionales.
- MEF Vigas: Método de elementos finitos utilizando elementos unidimensionales.

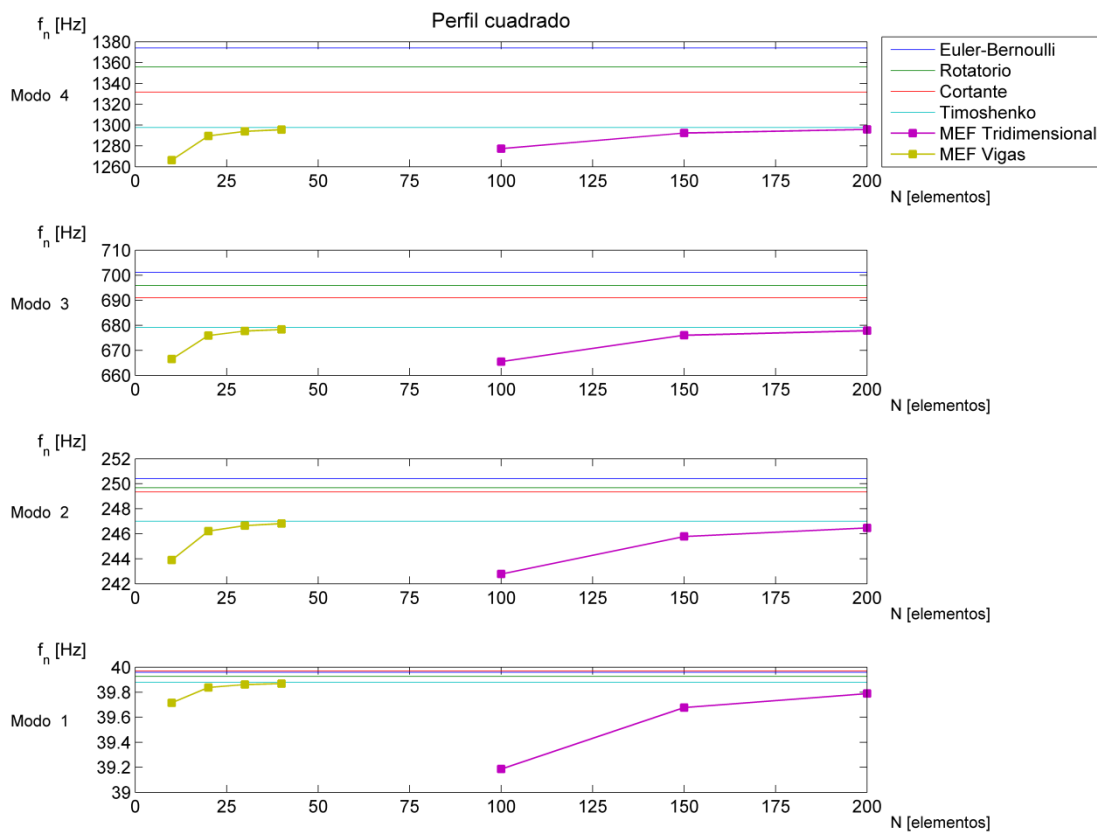


Figura 3.2-2: Frecuencia de vibración trasversal libre para viga de perfil cuadrado.

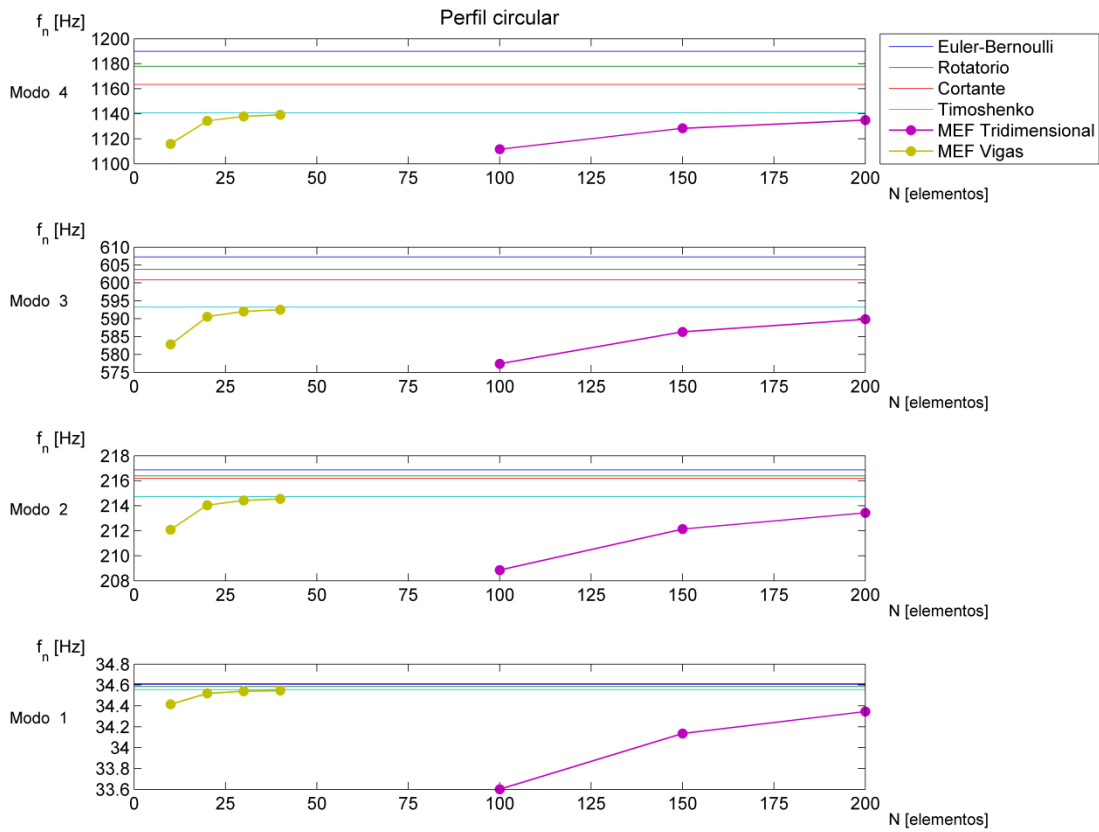


Figura 3.2-3: Frecuencia de vibración transversal libre para viga de perfil circular.

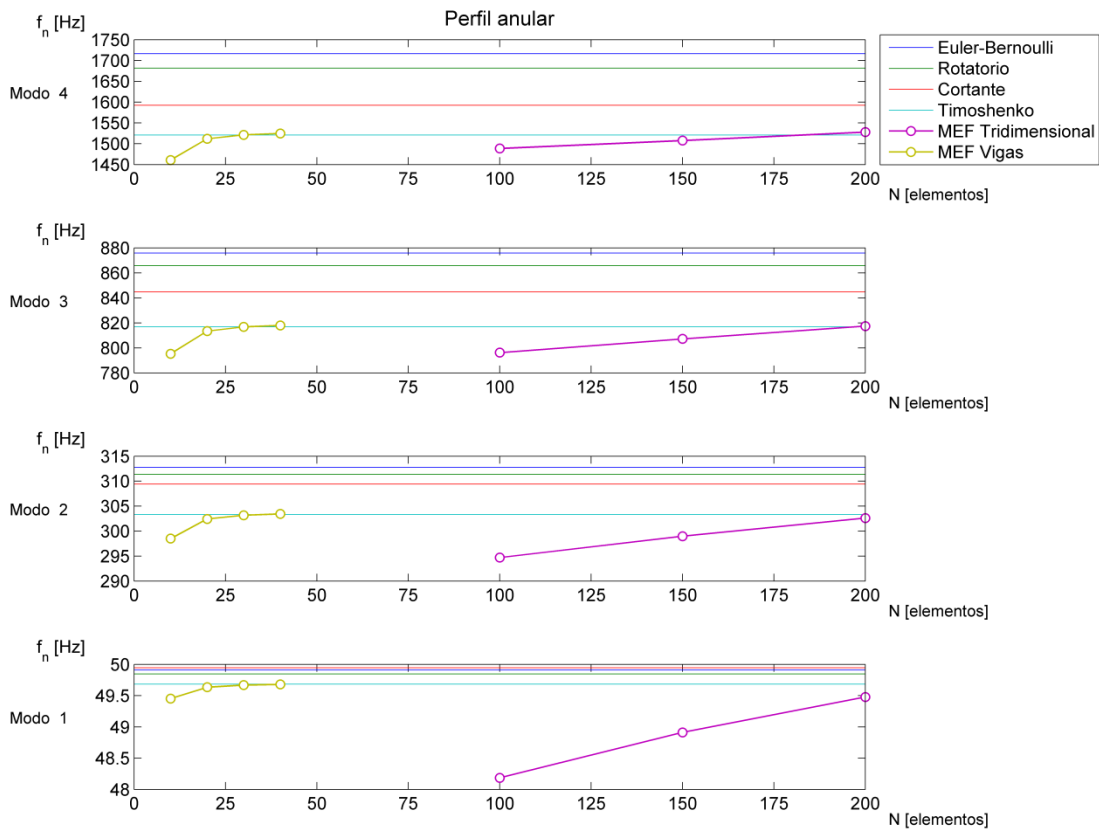


Figura 3.2-4: Frecuencia de vibración transversal libre para viga de perfil anular.

## *Análisis de resultados*

Se observa que en todos los casos existe el mismo orden entre las soluciones analíticas respecto a los valores de frecuencias previstos para cada modo. Mientras el mayor valor se estima por el modelo de Euler-Bernoulli, posteriormente en modelos que incorporan la inercia rotatoria de la sección transversal y el efecto cortante, la frecuencia calculada disminuye, y se logra el menor valor mediante el modelo de Timoshenko que considera simultáneamente ambos efectos mencionados anteriormente. Las diferencias entre las distintas estimaciones analíticas aumentan para los modos superiores.

En los resultados numéricos se observa que al incrementar la cantidad de elementos se logran valores de frecuencia superiores, tendiendo a resultados similares a los modelos analíticos.

Se observa que el modelo de vigas converge rápidamente a la solución analítica dada por el modelo de Timoshenko, como se esperaba debido a que en el modelo numérico se emplea como tipo de elemento una viga con la formulación de corte flexible.

El modelo tridimensional, requiere elevada cantidad de elementos para aproximarse a las soluciones analíticas. Al tratarse la viga como un sólido en el espacio, el mallado de las secciones transversales tiene gran influencia en los resultados logrados, y esto se manifiesta en los casos planteados que corresponden a secciones simétricas, donde las frecuencias naturales de vibración transversal obtenidas para modos simétricos difieren. En los gráficos se muestran los valores promedios obtenidos para ambas frecuencias de vibración transversal respecto a ejes principales de la sección. Las mayores diferencias relativas entre el modelo de elementos finitos tridimensional y los modelos analíticos se observan para el primer modo de vibración transversal.

En esta breve validación llevada a cabo de la aplicación del software Abaqus (7) que implementa el método de elementos finitos, para resolver modelos de situaciones estáticas y dinámicas que disponen de soluciones analíticas conocidas, permite aumentar la certeza de la correcta utilización del software empleado durante el presente trabajo y por otro lado pretende mostrar un panorama general sobre la calidad de las soluciones numéricas a un problema físico dado.





## **4 Modelos de cálculo utilizados**

En este capítulo se presentan los modelos requeridos para estudiar la simulación del ensayo de choque, caída de una masa. Cada una de las partes que participa del ensayo real se debe representar de determinada manera e incorporarse al modelo de simulación.

Primeramente, antes de proponer cualquier tipo de modelo, se estudian detalladamente las partes involucradas en el ensayo, que comprenden al cuadro, la tija, el percutor y el rodillo. Se describen cada uno de sus principales aspectos y la relevancia que tendrán en los diversos modelos planteados.

Posteriormente, luego de definir exhaustivamente las partes que participan en los modelos, se descompone la simulación del ensayo en dos situaciones, y se presentan modelos respectivos que se enfocan por un lado en el cuadro de bicicleta en la configuración de ensayo y por otro lado en el contacto ocurrido entre el percutor y el rodillo.

### **4.1 Descripción de los componentes del ensayo**

En la presente sección se estudian los cuerpos involucrados en el ensayo, desarrollando los aspectos requeridos para generar modelos de los mismos, que permitan incorporarlos a la simulación del ensayo de choque. A continuación se abordan de manera separada el cuadro de la bicicleta, el percutor y el rodillo.

#### **4.1.1 Descripción del cuadro de bicicleta**

La Norma se aplica a las bicicletas de montaña, por lo tanto como el objetivo planteado es la simulación numérica del ensayo de choque, se requiere modelar el conjunto cuadro-tija o cuadro-horquilla, según que componente pretende certificar la Norma. En esta sección se revisan las principales variantes en los cuadros de bicicletas de montaña a modo de introducción al tema. Posteriormente, se efectúa una detallada definición dimensional del cuadro. Finalmente se plantean modelos geométricos del cuadro, que permiten incorporarlo a la simulación del ensayo.

##### **4.1.1.1 Principales variantes de los cuadros de bicicleta de montaña**

Se observaron cuadros para bicicletas de montaña en los catálogos de los siguientes fabricantes:

- Canyon
- Commencal
- Exact
- Giant
- Kinesis

- Merida
- Orbea
- Pinarello
- Rocky Mountain
- Ritchey
- Santa Cruz
- Scott
- Stevens
- Trek
- Venzo

De esta amplia revisión por los catálogos de los principales fabricantes de cuadros, se enfoca especialmente en las bicicletas de montaña. Se observa una gran cantidad de variantes disponibles, que responden a diversas cuestiones, de las cuales se consideran las más relevantes:

- Tamaño de rueda
- Tipos de suspensión
- Material
- Tamaño del cuadro

Cada una de estas variables se analiza individualmente, para luego seleccionar un cuadro utilizado como referencia en el modelo de simulación del ensayo.

#### 4.1.1.1.1 Tamaño de ruedas

Los cuadros generalmente se diseñan para un determinado tamaño de rueda, pero pueden admitir dimensiones menores. Las ruedas habitualmente tienen tres tamaños:

- 26"
- 27,5"
- 29"

De manera general se puede resumir que las ruedas más pequeñas tienen menor inercia, y son más rígidas, especialmente en la dirección axial. Al aumentar el tamaño de la rueda, se disminuye el ángulo de incidencia contra obstáculos, pero se deben extender las dimensiones de los soportes, por lo que se aumenta el peso, tanto de la rueda como del cuadro.

Los dos últimos tamaños mencionados se están implementando recientemente, y no se pueden montar en todos los cuadros. De esta manera el tamaño 26" continúa siendo el más usual, por lo que se toma este como referencia para los cuadros estudiados.

#### 4.1.1.1.2 Tipo de suspensión

Los cuadros de bicicleta de montaña, pueden contar con suspensión en cada rueda, por lo que se trata individualmente cada una.

### Suspensión de adelante

La mayoría de las bicicletas de montaña, se ensamblan con horquillas que tienen algún mecanismo de suspensión. Para los fines del ensayo que se pretende estudiar, se modela un cuadro que se provee sin horquilla, ya que el ensayo exige colocar una tija maciza en su lugar y cambia los requisitos solicitados respecto al cuadro completo, como se detalla más atrás en Objetivos del presente trabajo. En caso de que se pretenda certificar la Norma tanto para el cuadro como para la horquilla, ésta debe encontrarse en su estado libre no comprimida durante la realización del ensayo.

### Suspensión de atrás

Los cuadros se clasifican de acuerdo a la presencia o no de suspensión en la rueda de atrás, distinguiendo cuadros con suspensión, y cuadros sin suspensión. A continuación se describirá cada grupo.

- **Cuadro sin suspensión:** En este caso todos los cuadros muestran diseños similares, que se aproximan a la geometría básica de una bicicleta.
- **Cuadro con suspensión:** El diseño del cuadro se adapta para incorporar el elemento resorte-amortiguador, surgiendo configuraciones geométricas más complejas, que incrementan el peso del conjunto, aumentan el costo y disipan mayor energía, lo que puede resultar beneficioso o no dependiendo de cada situación.

La Figura 4.1-1 muestra los diversos tipos de suspensión asociadas con las distintas modalidades dentro del ciclismo de montaña. En el gráfico se visualiza el recorrido de la suspensión, medido en pulgadas, para cada disciplina, con un esquema de la geometría del cuadro.

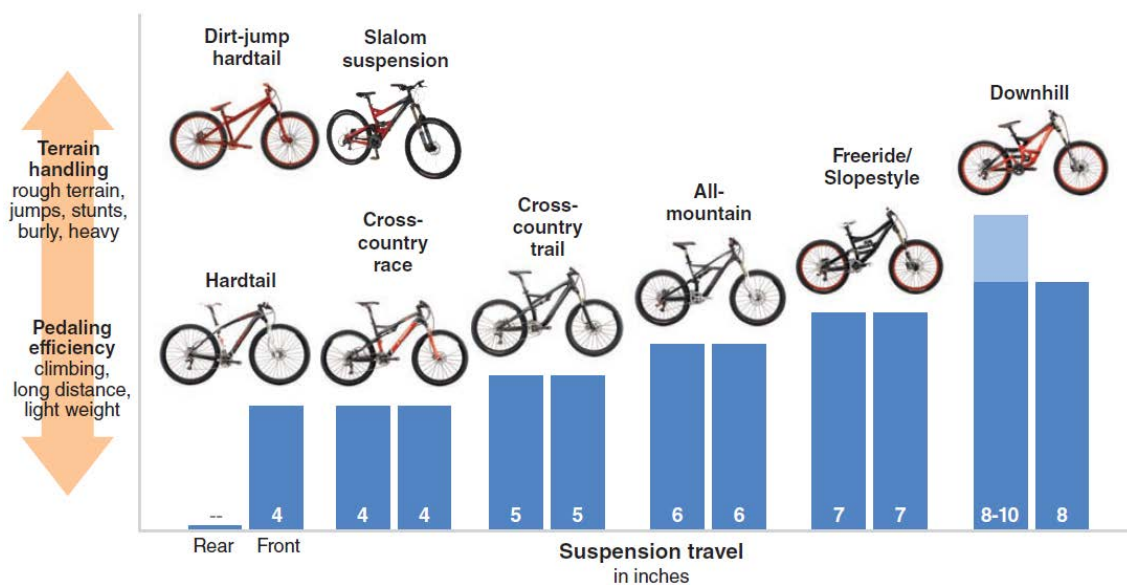


Figura 4.1-1: Recorrido de suspensión para diferentes disciplinas de Mountain Bike, (12).

Se selecciona un cuadro sin suspensión de atrás para modelar el ensayo, por lo tanto no se requiere realizar ninguna preparación sobre el cuadro, como se detalla más atrás en la sección 1.2.

#### 4.1.1.1.3 Materiales

En la actualidad, el avance tecnológico permite emplear diversos materiales en la construcción de cuadros, entre los que se mencionan:

- **Acero:** Es el material tradicional, empleado en la fabricación de cuadros, sin embargo, recientemente se utilizan otros materiales buscando menor peso, más resistencia, mejores propiedades de amortiguamiento, etc.
- **Aluminio:** Este material se utiliza ampliamente debido a su menor peso respecto al acero, y a los procesos productivos como el hidroformado que permite crear tubos de espesor variable de diversas secciones, logrando una distribución de material de acuerdo a las solicitaciones de cada zona del cuadro.
- **Titanio:** Este material presenta mejores propiedades mecánicas que los dos anteriores, pero su utilización está limitada por el elevado costo.
- **Fibra de carbono:** Este material compuesto combina excelentes propiedades mecánicas, debido a que las fibras se pueden posicionar estratégicamente en cada parte del cuadro para soportar las solicitaciones, con un bajo peso y el amortiguamiento interno que marca la diferencia respecto a los otros materiales. La principal desventaja que presenta es el elevado costo, y un complejo proceso constructivo.

#### 4.1.1.1.4 Tamaño del cuadro

Los cuadros generalmente se proveen, en diferentes tamaños. La designación de cada tamaño depende de la convención utilizada por cada fabricante, siendo habitual utilizar letras o expresar alguna dimensión característica en pulgadas.

#### *4.1.1.2 Definición dimensional del cuadro*

En la presente sección se pretende estudiar la geometría del cuadro. Por tal motivo, en primer lugar se establecen los componentes que forman el cuadro, luego se adopta un sistema coordinado respecto el cual se define la geometría. Posteriormente se selecciona un cuadro comercial, que se toma como referencia para realizar el estudio dimensional. Finalmente se tratan parámetros geométricos adicionales, que permiten desarrollar completamente la geometría del cuadro.

#### 4.1.1.2.1 Denominaciones

Existen en la actualidad, diversas variantes en la configuración geométrica de los cuadros de bicicletas de montaña como se menciona en la sección 4.1.1.1, pero se toma un cuadro convencional que no tiene ningún mecanismo de suspensión atrás, que sirve como base para modelar la simulación del ensayo.

En la Figura 4.1-2 se muestra la geometría de un cuadro de bicicleta genérico donde se señalan sus principales componentes.

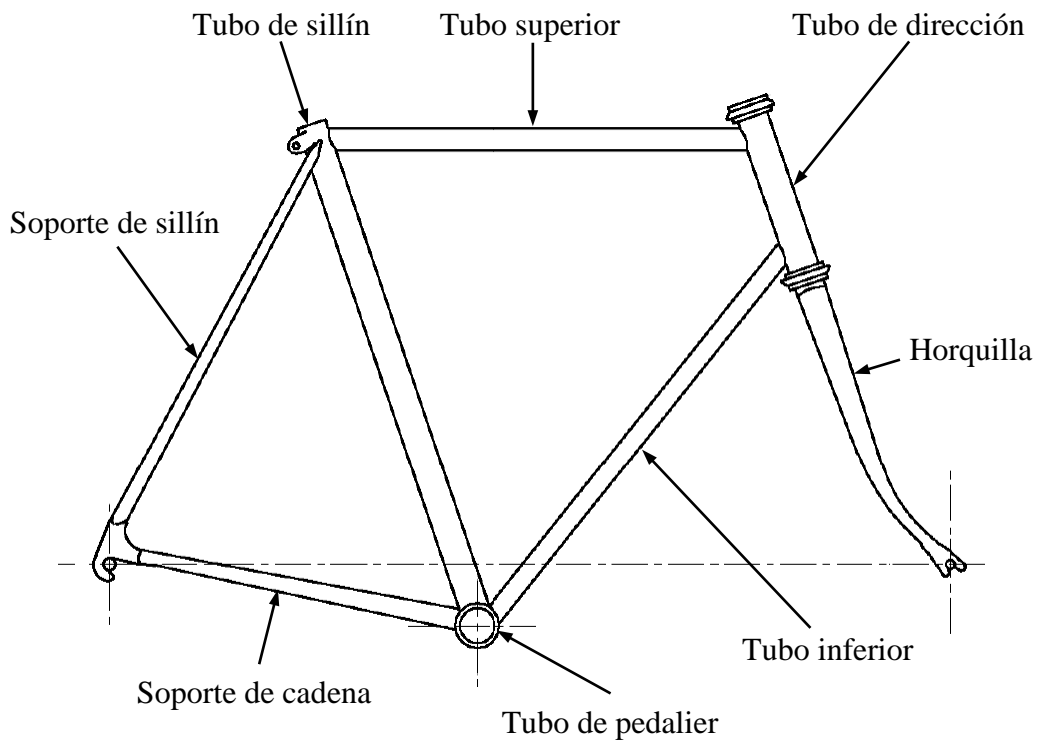


Figura 4.1-2: Principales componentes de un cuadro de bicicleta convencional.

#### 4.1.1.2.2 Sistema coordenado

El modelo geométrico se inicia con la definición de un sistema coordenado cartesiano, unido solidariamente al cuadro que tiene como origen el punto medio entre las punteras de atrás y las siguientes direcciones ortogonales, **y**: paralelo al eje de atrás, **z**: perpendicular al piso, **x**: perpendicular a los ejes anteriores. Se definen los siguientes sentidos **x**: hacia adelante, **y**: hacia la izquierda, **z**: hacia arriba. El sistema coordenado descrito se muestra en la Figura 4.1-3.

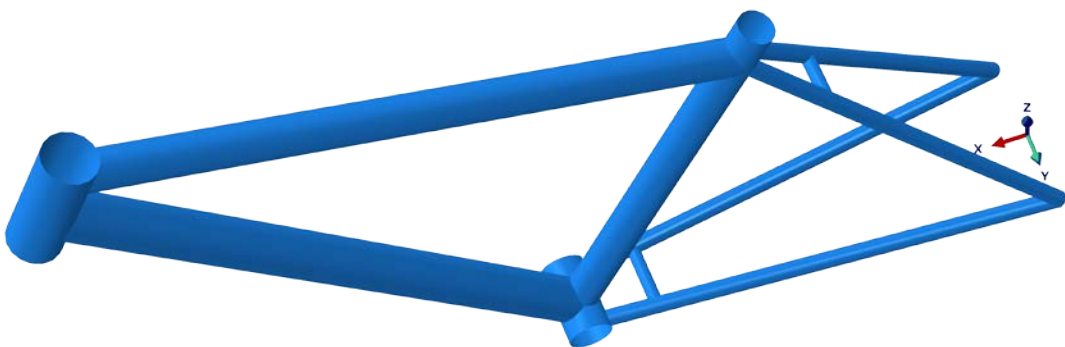


Figura 4.1-3: Sistema coordenado definido para el cuadro.

#### 4.1.1.2.3 Selección de un cuadro comercial

Se pretende representar la geometría de un cuadro, para simular el ensayo de choque, aplicando los distintos modelos planteados. No se dispone de ningún cuadro para extraer las

dimensiones, por ello se recurre a la información brindada en los catálogos, donde los fabricantes proveen la configuración geométrica general de los cuadros. De la amplia variedad de cuadros observados, se selecciona el modelo K-210 de la marca Kinesis (13), debido a que se proporciona una definición geométrica bastante completa, adicionando información referida al material.

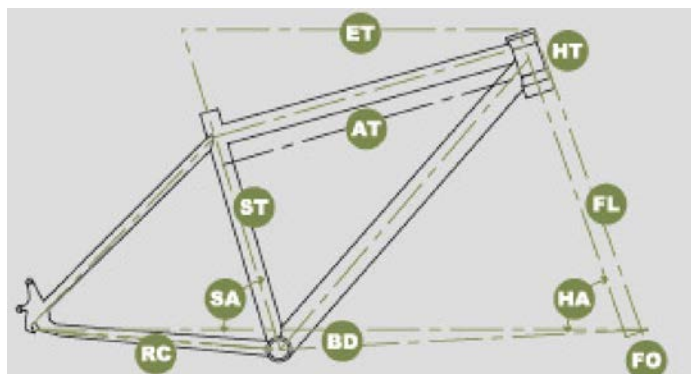


Figura 4.1-4: Esquema de la configuración geométrica para el cuadro Kinesis K-210, (13).

En la Figura 4.1-4, se muestra un esquema de la configuración geométrica plana del cuadro seleccionado, donde se definen parámetros que corresponden a longitud entre referencias geométricas medidas en  $[mm]$  y ángulos entre ejes de tubos y la horizontal, medidos en  $[^\circ]$ , cuyos valores se muestran en la Tabla 4-1 para los cinco tamaños de cuadros disponibles.

Size	ET	AT	ST	H/T	BD	RC	S/A	H/A	FL	FO
<b>XSM</b>	530	515,1	360	110	35	425	73	70,75	453	39,5
<b>SML</b>	555	534,9	380	110	35	425	73	70,75	453	39,5
<b>MED</b>	580	555,6	430	110	35	425	73	70,75	453	39,5
<b>LRG</b>	595	570,9	480	135	35	425	73	70,75	453	39,5
<b>XLG</b>	620	596,5	530	170	35	425	73	70,75	453	39,5

Tabla 4-1: Parámetros geométricos para el cuadro Kinesis K-210, (13).

De los cinco tamaños disponibles, sin pérdida de generalidad se selecciona el tamaño intermedio MED. Cada fabricante emplea nomenclaturas particulares para designar este tamaño, generalmente utilizan denominaciones propias o expresan la longitud del tubo de sillín en pulgadas.

Con el fin aclaratorio se realizan las siguientes observaciones respecto los parámetros provistos por el catálogo del fabricante:

BD: Medido verticalmente.

ST: Medido entre el eje del tubo de pedaleo y el extremo superior del tubo de sillín.

ET: Medido horizontalmente entre centros del tubo de sillín y extremo superior del tubo de dirección.

FL: Medido paralelo al tubo de dirección.

FO: Medido perpendicular al tubo de dirección.

AT: Medio entre centros del tubo de sillín y el tubo de dirección sobre el tubo superior.

#### 4.1.1.2.4 Definición de parámetros geométricos adicionales

La información brindada por el fabricante resulta insuficiente para generar un modelo geométrico del cuadro. Por lo tanto, para completar la definición, se plantea la geometría del cuadro con mayor nivel de detalle y se requiere de parámetros adicionales, que se desarrollan a continuación.

La Figura 4.1-5 muestra el tubo de sillín, donde se indica la diferencia entre el extremo superior del tubo de sillín y la intersección con el tubo superior, que se denomina  $DS$ , y se define como:

$$DS = ST - STC = 40 [mm]$$

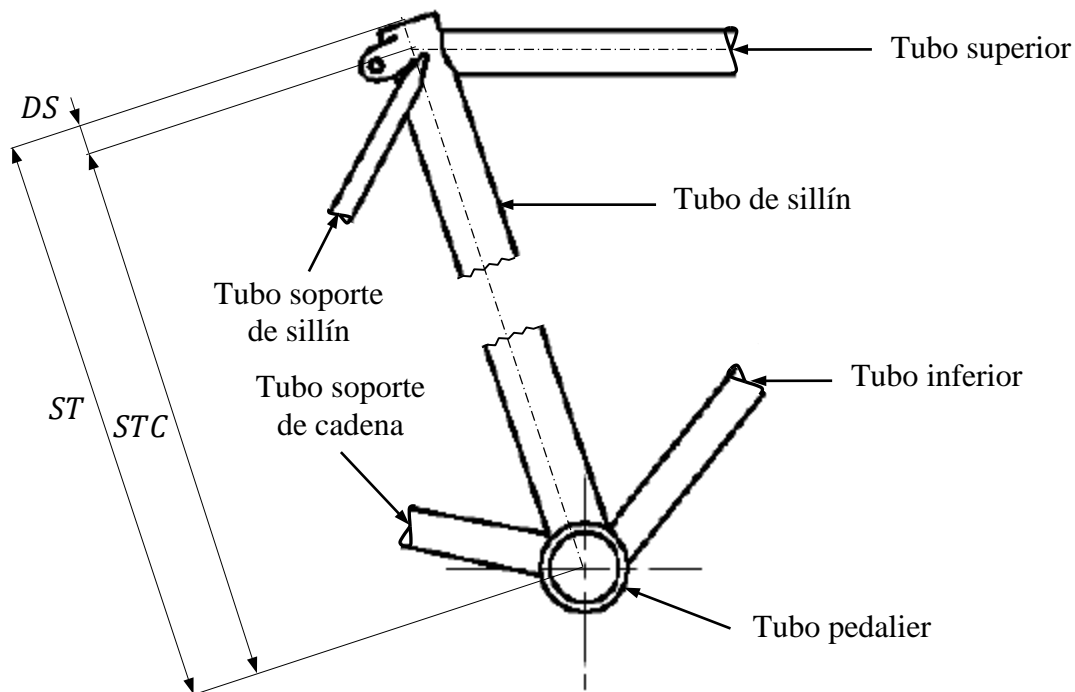


Figura 4.1-5: Detalle del tubo de sillín.

El cuadro se monta con rodado 26" ISO 665 [mm] (14), cuyo neumático tiene un diámetro exterior  $D = 665 [mm]$ , y el ancho máximo de la cubierta inflada es  $WR = 62 [mm]$ .

La separación entre punteras de atrás más ampliamente utilizada en cuadros de bicicleta de montaña es  $WA = 135[mm]$ , (15), (16), y (17).

En la Figura 4.1-6, se muestra un esquema de la región de atrás del cuadro con la rueda montada, para observar la ubicación del tubo unión de soportes de sillín y los parámetros definidos para posicionarlo, sin que ocurran interferencias con la parte exterior de la cubierta.

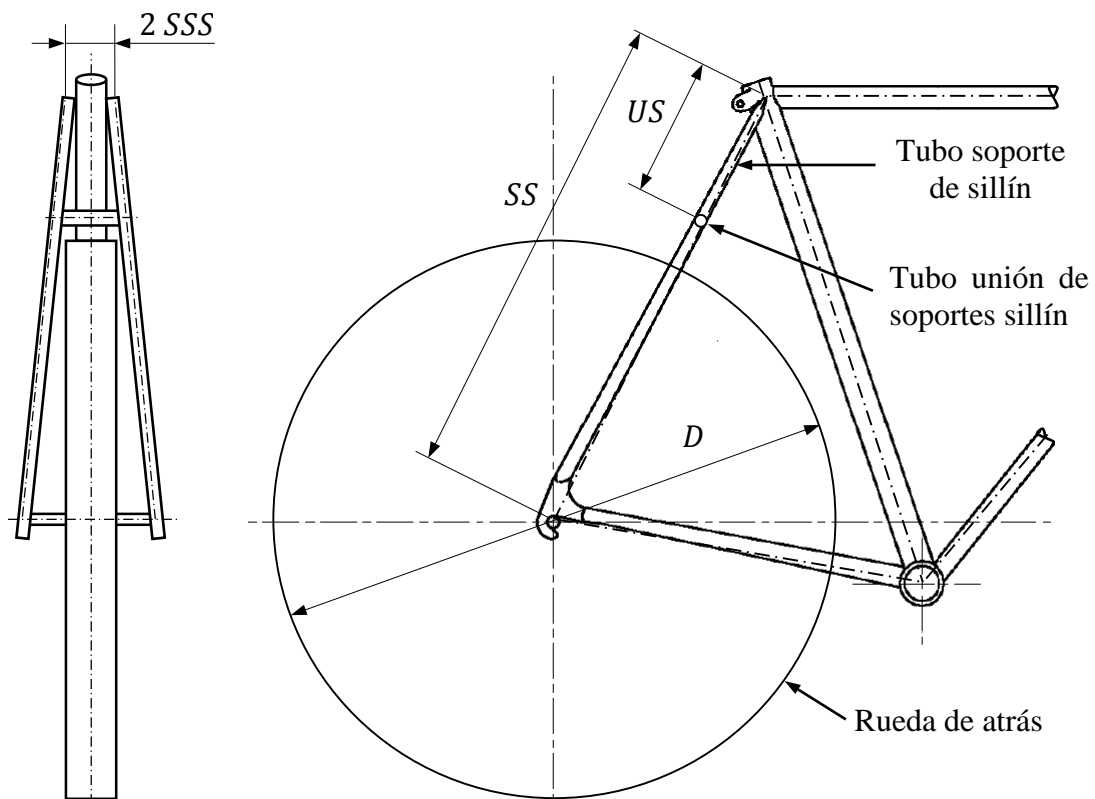


Figura 4.1-6: Configuración geométrica de los tubos soportes de sillín.

La longitud del soporte de sillín, proyectada sobre el plano de simetría, se denomina  $SS$  y está definida en función de otros parámetros geométricos mencionados anteriormente,

$$SS = \sqrt{\left(\sqrt{RC^2 - BC^2} - ST \cdot \cos(SA)\right)^2 + \left(-BC + ST \cdot \sen(SA)\right)^2} = 458 \text{ [mm]}$$

La distancia medida sobre el soporte de sillín, proyectada sobre el plano de simetría desde la intersección con el tubo sillín hasta la unión de soportes de sillín, se denomina  $US$ . Para que no ocurra interferencia entre la rueda de atrás y la unión de soportes de sillín se debe cumplir la siguiente condición:

$$US < SS - D/2$$

Se define la proporción sobre la longitud del soporte de sillín sobre la cual se encuentra la unión de soportes de sillín, medido desde la intersección del tubo de sillín,  $PSA$  como:

$$PSA = \frac{US}{SS}$$

Los valores admitidos para la proporción son:

$$0 < PSA < \frac{SS - D/2}{SS}$$

$$0 < PSA < 0,27$$

Se emplea un valor comprendido entre los límites planteados  $PSA = 0,25$ .



La distancia entre el plano de simetría y los extremos superiores de los tubos soportes de sillín es  $SSS = 7[mm]$ .

La separación entre los dos soportes de sillín medida a la distancia donde se ubica el radio exterior de la rueda  $WS$ , se define como:

$$WS = 2 \cdot SSS + \frac{WA - 2 \cdot SSS}{SS} \cdot (SS - D/2) = 47,2 [mm]$$

En la Figura 4.1-7, se muestra la disposición de los tubos soportes de cadena con la rueda de atrás. Suponiendo que los dos soportes de cadena están unidos sobre el tubo de pedaliar, separados por una distancia  $WI$ , la separación entre ambos medida a la distancia donde se ubica el radio exterior de la rueda  $WC$  es:

$$WC = WI + \frac{WA - WI}{SS} \cdot (RC - D/2)$$

Para definir la longitud del tubo del tubo pedaliar  $WP$ , existen diversas normas, en función del tipo de cuadro, la marca y el país de origen, (18). Se adopta la normativa ISO, de manera que se tiene el siguiente valor:

$$WP = 68[mm]$$

La distancia  $WI$  está condicionada por un valor máximo  $WP$  y a un valor mínimo  $WM$ , necesario para el montaje de la rueda de atrás,

$$WM < WI < WP$$

El valor mínimo  $WM$  se expresa en función de parámetros geométricos:

$$WM = WA - 2 \cdot (WA - WR) \cdot RC/D = 41,7 [mm]$$

Por lo tanto los valores para  $WI$  deben cumplir:

$$41,7 [mm] < WI < 68[mm]$$

Se propone  $WI = 50 [mm]$ , y se obtiene la separación  $WC$ :

$$WC = 69 [mm]$$

El ancho del neumático de atrás  $WR$ , que se coloca sobre el cuadro está limitado por la separación de los soportes de cadena y los soportes de sillín, que se expresa respectivamente en las siguientes condiciones:

$$WR < WC \rightarrow WR < 69 [mm]$$

$$WR < WS \rightarrow WR < 47,2 [mm]$$

En caso de no cumplir la condición es necesario curvar ligeramente los soportes hacia afuera, para asegurar que no ocurra interferencia con ningún ancho de rueda de atrás montada en el cuadro. Esta solución se observa usualmente en los cuadros.

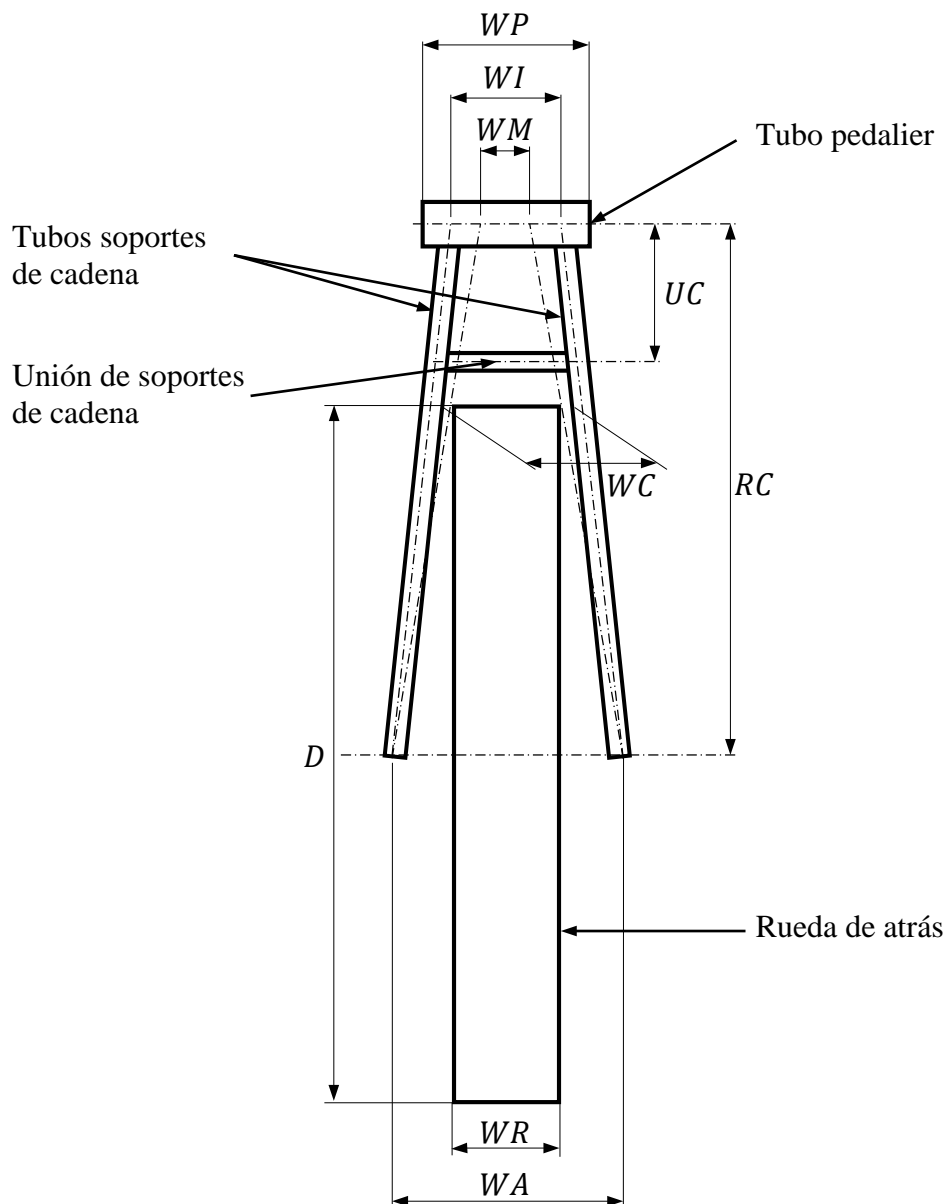


Figura 4.1-7: Configuración geométrica de los tubos soportes de cadena.

Con la dimensión  $WI$ , el cuadro propuesto tiene una separación entre los soportes de cadena de aproximadamente  $WC = 69 [mm]$ , medidos a la distancia donde se ubica el radio exterior de la rueda. Como el cuadro está previsto para los neumáticos de tamaño 26" para los cuales el ancho máximo de la cubierta inflada es de  $62 [mm]$ , entre los tubos soportes de cadena queda un margen libre a ambos lados de la rueda, mientras que la separación entre los tubos soportes de sillín es menor, por lo tanto los mismos son curvados levemente hacia afuera.

Cabe aclarar que las dimensiones tomadas se miden respecto los ejes de las secciones transversales de los tubos, que se consideran vigas rectas. En la realidad los tubos pueden no ser rectos y admiten alguna curvatura para evitar interferencia con otros componentes del cuadro, que no se consideran en los modelos propuestos.

La longitud del soporte de cadena, proyectada sobre el plano de simetría, se denomina  $RC$  y se define como parámetro geométrico provisto por el fabricante del cuadro. La distancia medida sobre el soporte de cadena proyectada sobre el plano de simetría desde la intersección con el tubo pedalier hasta la unión de soporte es  $UC$ .

Para que no ocurra interferencia entre la rueda de atrás y la unión de soportes de cadena se debe cumplir la siguiente condición:

$$UC < RC - D/2$$

Se define la proporción sobre la longitud del soporte de cadena sobre la cual se encuentra la unión de soportes de cadena, medido desde la intersección del tubo de pedalier,  $PSC$  como:

$$PSC = \frac{UC}{RC}$$

Los valores admitidos para la proporción, se encuentran limitados:

$$0 < PSC < \frac{RC - D/2}{RC}$$

$$0 < PSC < 0,22$$

Se emplea un valor comprendido entre los límites planteados  $PSC = 0,15$ .

La longitud del tubo inferior no está establecida con los parámetros geométricos dados, sino que se define mediante los nodos extremos. Uno de los puntos se encuentra en la mitad del tubo pedalier, pero la ubicación del otro punto extremo no está establecida. Ante la indefinición del punto de intersección del tubo inferior con el tubo de dirección, se plantea una hipótesis adicional, que la distancia sobre el tubo de dirección entre el extremo superior y el tubo superior  $DHS$  es proporcional a la distancia entre el extremo inferior y el tubo inferior  $DHI$ , y se expresa como  $DHI \propto DHS$ . Se selecciona la siguiente relación entre los parámetros  $DHI = 1,6 DHS$ . Estas distancias se muestran en la Figura 4.1-8 que abarca la zona del tubo de dirección.

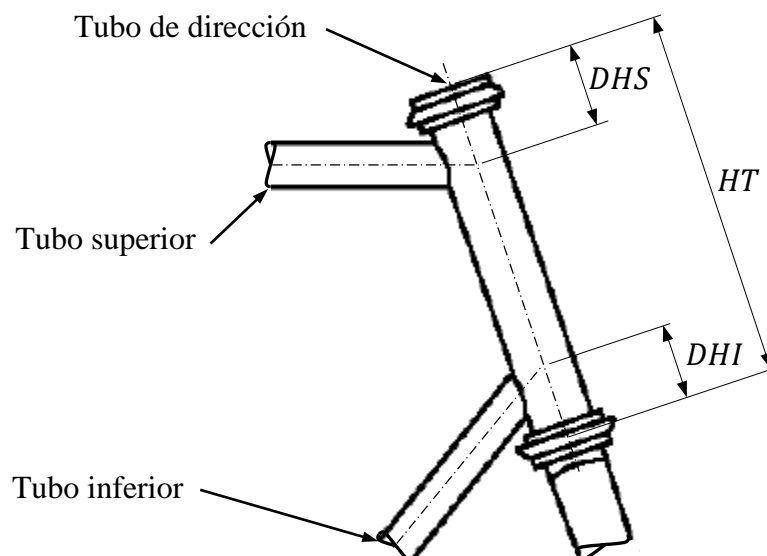


Figura 4.1-8: Detalle del tubo de dirección.

En la Figura 4.1-9 se muestran las condiciones necesarias para posicionar el tubo superior.

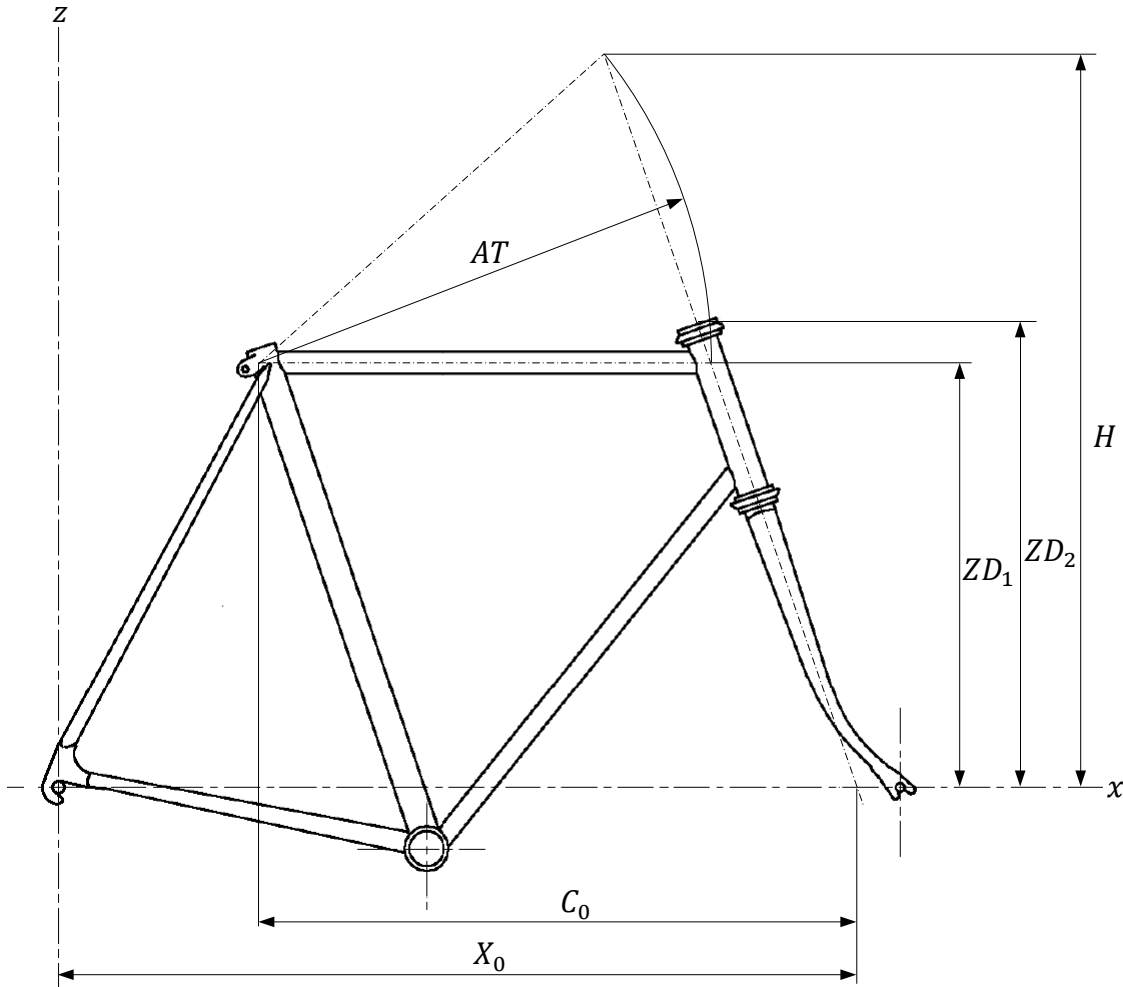


Figura 4.1-9: Configuración geométrica para definir el tubo superior.

Se definen las siguientes variables geométricas adicionales:

$$H = (HT + FL)\text{sen}(HA) - FO \text{cos}(HA)$$

$$X_0 = \sqrt{RC^2 - BC^2} - (H + BD)\text{cotan}(SA) + ET + H \text{cotan}(HA)$$

$$C_0 = -ET + (H + BD)\text{cotan}(SA) - H \text{cotan}(HA) - STC \text{cos}(SA)$$

Para cumplir con la longitud del tubo superior  $AT$ , se parte del punto establecido sobre el tubo de sillín, y se pretende encontrar la intersección con el eje de dirección, establecida por la siguiente ecuación cuadrática:

$$A \cdot ZD^2 + B \cdot ZD + C = 0$$

Los coeficientes del polinomio se definen como:

$$A = 1 + \text{cotan}^2(HA)$$

$$B = -2(-C_0 \cdot \text{cotan}(HA) - BD + STC \cdot \text{sen}(SA))$$

$$C = C_0^2 + (-BD + STC \cdot \text{sen}(SA))^2 - AT^2$$

Las raíces  $ZD_1^2$  representan las alturas para las cuales es posible la intersección entre el eje del tubo de dirección y el tubo superior.

$$ZD_1^2 = (-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC})/2A$$

Físicamente se debe cumplir que  $ZD < H$ , para que el tubo superior contacte el intervalo del eje de dirección donde se encuentra el tubo de dirección, generalmente corresponde a  $ZD_1$ , (ver Figura 4.1-9). En caso de que ambas raíces cumplan con la condición planteada anteriormente se selecciona la mayor  $ZD_2$ .

### 4.1.1.3 Modelos geométricos del cuadro

La representación del cuadro en un modelo de elementos finitos requiere contar con la definición completa de la configuración geométrica del mismo. El proceso constructivo del modelo geométrico del cuadro, consiste en etapas ordenadas que se asocian a la creación de tres entidades: los nodos extremos, los segmentos y las secciones transversales, que se describen a continuación.

#### Nodos extremos

Partiendo de la Tabla 4-1 de dimensiones provista por el fabricante, y las dimensiones adicionales que se desarrollan en la sección anterior, se define la ubicación espacial de los nodos que determinan los extremos de los componentes del cuadro. Según la ubicación de los nodos extremos, respecto al plano de simetría se clasifican los modelos geométricos, como planos o tridimensionales.

- Modelos planos: Todos los nodos extremos se encuentran en el mismo plano.
- Modelos tridimensionales: No todos los nodos extremos son contenidos por un único plano de simetría.

#### Segmentos

Cada componente del cuadro se define por un segmento que une dos nodos extremos, de manera que cada parte del cuadro se asocia a dos números que representan los puntos extremos.

#### Secciones transversales

Cada componente del cuadro, tiene una determinada sección transversal, y de acuerdo a la variación respecto a la longitud del segmento se clasifican en, continuas, continuas por tramos o variables. A continuación se describe cada tipo de sección.

- Secciones continuas: Se requiere un único perfil para definir la sección en todo el componente.
- Secciones continuas por tramos: Se divide la longitud total del componente en varios intervalos, tomando distancias fijas o proporcionales, y sobre cada tramo se asocian los datos de un perfil.

- Secciones variables: Se establece un sistema coordinado de referencia, para que luego mediante una función analítica se exprese la variación de los parámetros que definen el perfil de la sección sobre la longitud del componente.

Las secciones se concretan en el modelo de elementos finitos mediante elementos de vigas y cáscaras, que se tratan a continuación:

- Elementos de vigas: Los perfiles que se encuentran en un cuadro son anulares y circulares, y se pueden modelar mediante vigas. Al suponerse todas las secciones como anulares, se definen completamente a través de su radio y su espesor. Las secciones circulares se consideran un caso particular donde el espesor es igual al radio, sin pérdida de generalidad en la definición.
- Elementos de cáscaras: Los perfiles anulares que se utilizan en el cuadro generalmente tienen espesor pequeño comparado con el diámetro, por lo que puede ser útil modelarlos con elementos de cáscara.

De esta manera, se define la ubicación de nodos, que permiten construir los modelos geométricos del cuadro. Posteriormente se desarrollarán un modelo plano y un modelo tridimensional.

#### 4.1.1.3.1 Modelo plano

Se considera que el cuadro de la bicicleta que está formado por vigas rectas que unen las posiciones teóricas de los nodos extremos. La mayoría de los componentes, tiene sus ejes medios contenidos en un plano vertical de simetría x-z. Sin embargo existen tubos que no están contenidos en el plano de simetría, y se clasifican según su dirección como perpendiculares e inclinados, ambos se mencionan a continuación.

##### **Tubos perpendiculares respecto al plano de simetría:**

- Tubo pedalier
- Tubo unión de tubos soportes de sillín
- Tubo unión de tubos soportes de cadena

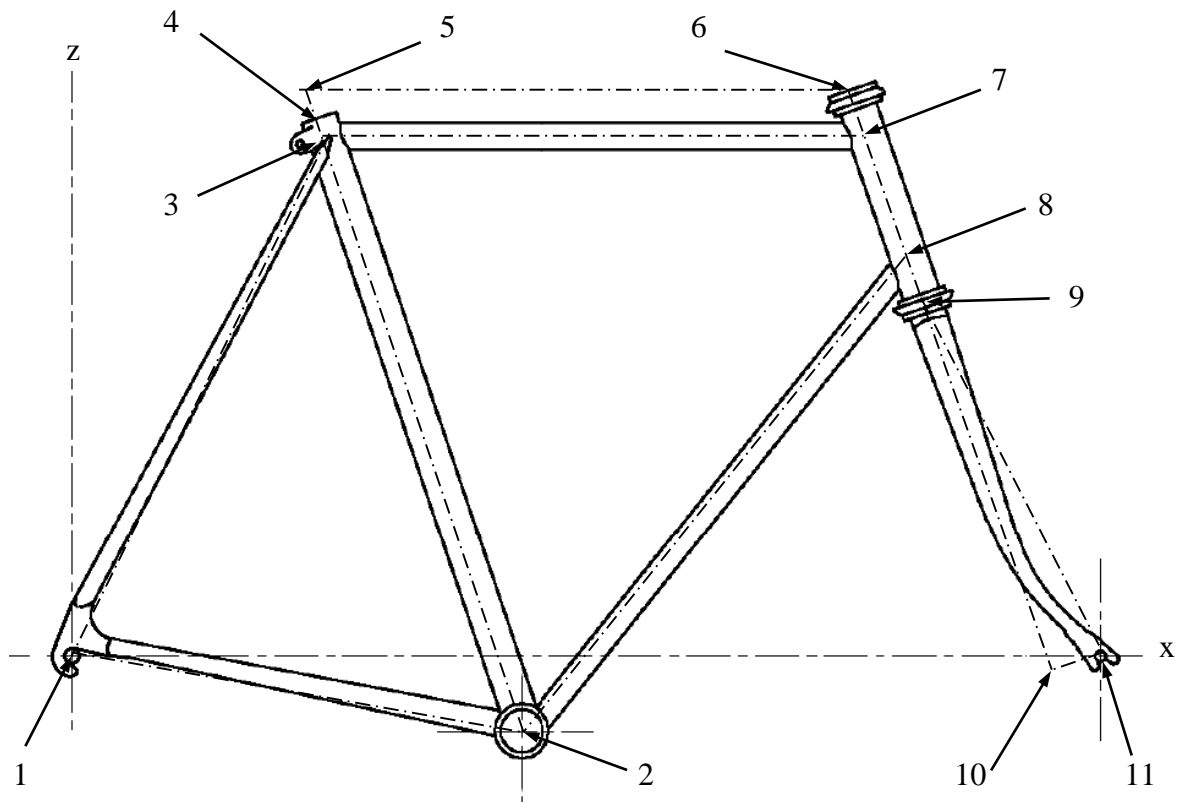
##### **Tubos inclinados respecto al plano de simetría:**

- Tubo soporte de cadena izquierdo
- Tubo soporte de cadena derecho
- Tubo soporte de sillín izquierdo
- Tubo soporte de sillín derecho

Se plantea el cuadro como un pórtico plano, en donde todas las vigas tienen sus ejes medios sobre el plano de simetría debido a que:

- Los tubos perpendiculares al plano de simetría tienen escasa longitud respecto al resto de los tubos y se considera despreciable la energía de deformación que pueden almacenar frente al resto de los tubos, comportándose de manera similar a una unión que aporta elevada rigidez a la estructura. Por lo tanto estos componentes no participan del modelo plano.
- Los tubos que no son paralelos ni perpendiculares al plano de simetría presentan pequeña inclinación respecto al plano simétrico, por lo que se consideran sus proyecciones respecto a este plano. Debido a la simetría del cuadro, las proyecciones de la parte izquierda y la parte derecha coinciden, por lo tanto se considera un único tubo equivalente, al que se asignan una sección que tiene el doble del área e inercia de los tubos izquierdo y derecho que representa.

En la Figura 4.1-10, se muestran los nodos extremos que definen el modelo geométrico plano del cuadro.



*Figura 4.1-10: Representación del modelo plano del cuadro.*

Los puntos de referencia necesarios para representar la geometría del cuadro, se ubican en un plano vertical x-z, y se identifican en la Tabla 4-2.

Identificación del punto	Denominación
1	Eje de atrás
2	Pedalier
3	Tubo de sillín-Tubo superior
4	Tubo de sillín (Extremo superior)
5	Tubo de sillín (Proyección)
6	Tubo de dirección (Extremo superior)
7	Tubo de dirección-Tubo superior
8	Tubo de dirección-Tubo inferior
9	Tubo de dirección (Extremo inferior)
10	Horquilla (Inferior)
11	Eje de adelante

Tabla 4-2: Nomenclatura de los nodos que definen el modelo plano del cuadro.

Las coordenadas espaciales de los nodos que definen el modelo plano del cuadro, se desarrollan a partir de los parámetros planteados anteriormente.

Eje de atrás: Por la definición del sistema de coordenadas.

$$x_1 = 0$$

$$z_1 = 0$$

Pedalier:

$$x_2 = \sqrt{RC^2 - BC^2}$$

$$z_2 = -BC$$

Tubo de sillín-Tubo superior:

$$x_3 = \sqrt{RC^2 - BC^2} - STC \cdot \cos(SA)$$

$$z_3 = -BC + STC \cdot \sin(SA)$$

Tubo de sillín (Extremo superior):

$$x_4 = \sqrt{RC^2 - BC^2} - ST \cdot \cos(SA)$$

$$z_4 = -BC + ST \cdot \sin(SA)$$

Tubo de sillín (Proyección):

$$x_5 = \sqrt{RC^2 - BC^2} - ((HT + FL) \cdot \sin(HA) - F0 \cdot \cos(HA) + BC) \cdot \cotan(SA)$$

$$z_5 = (HT + FL) \cdot \sin(HA) - F0 \cdot \cos(HA)$$

Tubo de dirección (Extremo superior):

$$x_6 = \sqrt{RC^2 - BC^2} - ((HT + FL) \cdot \sin(HA) - F0 \cdot \cos(HA) + BC) \cdot \cotan(SA) + ET$$

$$z_6 = (HT + FL) \cdot \sin(HA) - F0 \cdot \cos(HA)$$

Tubo de dirección -Tubo superior:

$$x_7 = \sqrt{RC^2 - BC^2} - (H + BD) \cdot \cotan(SA) + ET + H \cdot \cotan(HA) - ZD \cdot \cotan(HA)$$

$$z_7 = (FL + HT - DHS) \cdot \sin(HA) - F0 \cdot \cos(HA)$$



Tubo de dirección -Tubo inferior:

$$x_8 = \sqrt{RC^2 - BC^2} - ((HT + FL) \cdot \text{sen}(HA) - F0 \cdot \text{cos}(HA) + BC) \cdot \text{cotan}(SA) + ET + (HT - DHI) \cdot \text{cos}(HA)$$

$$z_8 = (FL + DHI) \cdot \text{sen}(HA) - F0 \cdot \text{cos}(HA)$$

Tubo de dirección (Extremo inferior):

$$x_9 = \sqrt{RC^2 - BC^2} - ((HT + FL) \cdot \text{sen}(HA) - F0 \cdot \text{cos}(HA) + BC) \cdot \text{cotan}(SA) + ET + HT \cdot \text{cos}(HA)$$

$$z_9 = FL \cdot \text{sen}(HA) - F0 \cdot \text{cos}(HA)$$

Tubo de dirección (Proyección):

$$x_{10} = \sqrt{RC^2 - BC^2} - ((HT + FL) \cdot \text{sen}(HA) - F0 \cdot \text{cos}(HA) + BC) \cdot \text{cotan}(SA) + ET + (HT + FL) \cdot \text{cos}(HA)$$

$$z_{10} = -F0 \cdot \text{cos}(HA)$$

Eje adelante:

$$x_{11} = \sqrt{RC^2 - BC^2} - ((HT + FL) \cdot \text{sen}(HA) - F0 \cdot \text{cos}(HA) + BC) \cdot \text{cotan}(SA) + ET + (HT + FL) \cdot \text{cos}(HA) + F0 \cdot \text{sen}(HA)$$

$$z_{11} = 0$$

Los segmentos que definen los ejes de los componente se identifican en la Tabla 4-3, con sus respectivos nodos extremos.

Identificación del segmento	Punto 1	Punto 2
<b>Tubo superior</b>	7	3
<b>Tubo inferior</b>	8	2
<b>Tubo de dirección</b>	6	9
<b>Tubos soporte de sillín</b>	1	3
<b>Tubo de sillín</b>	2	4
<b>Tubos soporte de cadena</b>	1	2
<b>Eje de dirección</b>	6	9
<b>Eje de extremo</b>	9	11

Tabla 4-3: Segmentos de ejes de los componentes que forman el modelo plano del cuadro.

Cabe recalcar que ciertos componentes cuyo eje es perpendicular al plano de simetría no participan del modelo bidimensional del cuadro.

#### 4.1.1.3.2 Modelo tridimensional

Un modelo geométrico tridimensional del cuadro, se construye en base a la definición del modelo plano, pero además requiere la utilización de un conjunto de parámetros que permiten establecer las posiciones de los nodos en el espacio. La mayoría de los puntos de referencia necesarios para representar la geometría del cuadro, se ubican en un plano vertical x-z, respecto el cual el modelo es simétrico, sin embargo algunos nodos se proyectan fuera de dicho plano, entre los cuales están:

- Los extremos de atrás de soportes de sillín y soportes de cadena, que se vinculan con la separación de las punteras y longitud del eje de atrás (Puntos 1 y 3).
- Los extremos del tubo pedalier, establecidos por longitud del eje de pedalier (Puntos 4 y 8).
- La intersección del tubo pedalier con los soportes de cadena, condicionados por el ancho de la rueda de atrás (Puntos 5 y 7).
- La intersección de los soportes de sillín con el tubo sillín, relacionado con el tamaño de las secciones transversales de estos tubos (Puntos 9 y 11).
- Los extremos del tubo de unión de soportes de sillín, relacionados con el radio de la rueda de atrás (Puntos 20 y 21).
- Los extremos del tubo de unión de soportes de cadena, relacionados con el radio de la rueda de atrás (Puntos 22 y 23).

Generalmente la elección de estas dimensiones no es libre, sino que se ajusta a determinadas normas, para garantizar el correcto ensamble de los elementos accesorios al cuadro.

En la Figura 4.1-11 se muestran los nodos extremos que definen el modelo geométrico tridimensional del cuadro. Los puntos 13 y 18 se requieren para la construcción del modelo geométrico, pero físicamente no forman parte del cuadro por lo que no se muestran en la representación, mientras que el nodo 2 representa el origen del sistema de coordenadas adoptado.

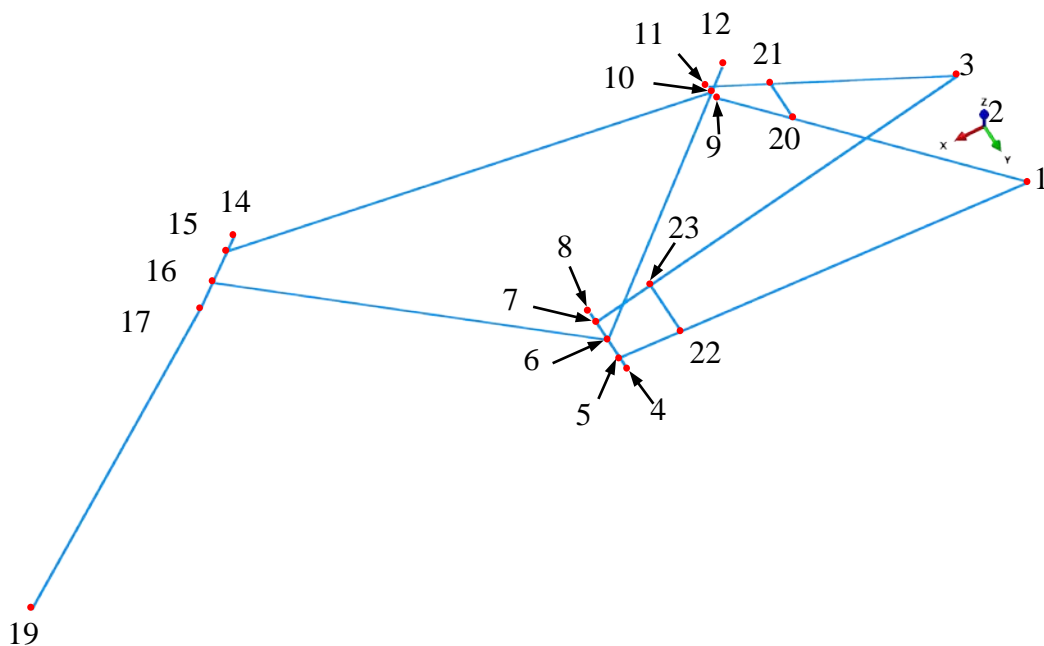


Figura 4.1-11: Representación del modelo tridimensional del cuadro.

Los puntos de referencia para representar la geometría tridimensional del cuadro se identifican en la Tabla 4-4.

Identificación del punto	Denominación
1	Eje de atrás Izq.
2	Eje de atrás Med.
3	Eje de atrás Der.
4	Tubo pedalier Izq.
5	Tubo pedalier-Soporte de cadena Izq.
6	Tubo pedalier-Tubo de sillín
7	Tubo pedalier-Soporte de cadena Der.
8	Tubo pedalier Der.
9	Tubo superior-Soporte de sillín Izq.
10	Tubo sillín-Tubo superior
11	Tubo superior-Soporte de sillín Der.
12	Tubo de sillín (Extremo superior)
13	Tubo de sillín (Proyección)
14	Tubo de dirección (Extremo superior)
15	Tubo de dirección-Tubo superior
16	Tubo de dirección-Tubo inferior
17	Tubo de dirección (Extremo inferior)
18	Tubo de dirección (Proyección)
19	Eje de adelante Med.
20	Unión soporte de sillín Izq.
21	Unión soporte de sillín Der.
22	Unión soporte de cadena Izq.
23	Unión soporte de cadena Der.

Tabla 4-4: Nomenclatura de nodos que definen el modelo tridimensional del cuadro.

Las coordenadas espaciales de los nodos que definen el modelo tridimensional del cuadro, se desarrollan a partir de los parámetros planteados.

Eje de atrás Izq.:

$$\begin{aligned}x_1 &= 0 \\y_1 &= WA/2 \\z_1 &= 0\end{aligned}$$

Eje de atrás Med.: Por la definición del sistema de coordenadas.

$$\begin{aligned}x_2 &= 0 \\y_2 &= 0 \\z_2 &= 0\end{aligned}$$

Eje de atrás Der.:

$$\begin{aligned}x_3 &= 0 \\y_3 &= -WA/2 \\z_3 &= 0\end{aligned}$$

Tubo pedalier Izq.:

$$x_4 = \sqrt{RC^2 - BC^2}$$

$$y_4 = WP/2$$

$$z_4 = -BC$$

Tubo pedalier-Soporte de cadena Izq.:

$$x_5 = \sqrt{RC^2 - BC^2}$$

$$y_5 = WI/2$$

$$z_5 = -BC$$

Tubo pedalier-Tubo de sillín:

$$x_6 = \sqrt{RC^2 - BC^2}$$

$$y_6 = 0$$

$$z_6 = -BC$$

Tubo pedalier-Soporte de cadena Der.:

$$x_7 = \sqrt{RC^2 - BC^2}$$

$$y_7 = -WI/2$$

$$z_7 = -BC$$

Tubo pedalier Der.:

$$x_8 = \sqrt{RC^2 - BC^2}$$

$$y_8 = -WP/2$$

$$z_8 = -BC$$

Tubo superior- Soporte de sillín Izq.:

$$x_9 = \sqrt{RC^2 - BC^2} - STC \cdot \cos(SA)$$

$$y_9 = SSS$$

$$z_9 = -BC + STC \cdot \sin(SA)$$

Tubo de sillín-Tubo superior:

$$x_{10} = \sqrt{RC^2 - BC^2} - STC \cdot \cos(SA)$$

$$y_{10} = 0$$

$$z_{10} = -BC + STC \cdot \sin(SA)$$

Tubo superior- Soporte de sillín Der.:

$$x_{11} = \sqrt{RC^2 - BC^2} - STC \cdot \cos(SA)$$

$$y_{11} = -SSS$$

$$z_{11} = -BC + STC \cdot \sin(SA)$$

Tubo de sillín (Extremo superior):

$$x_{12} = \sqrt{RC^2 - BC^2} - ST \cdot \cos(SA)$$

$$y_{12} = 0$$

$$z_{12} = -BC + ST \cdot \sin(SA)$$

Tubo de sillín (Proyección):

$$x_{13} = \sqrt{RC^2 - BC^2} - ((HT + FL) \cdot \sin(HA) - FO \cdot \cos(HA) + BD) \cdot \cotan(SA)$$

$$y_{13} = 0$$

$$z_{13} = (HT + FL) \cdot \text{sen}(HA) - FO \cdot \text{cos}(HA)$$

Tubo de dirección (Extremo superior):

$$x_{14} = \sqrt{RC^2 - BC^2} - ((HT + FL) \cdot \text{sen}(HA) - FO \cdot \text{cos}(HA) + BD) \cdot \text{cotan}(SA) + ET$$

$$y_{14} = 0$$

$$z_{14} = (HT + FL) \cdot \text{sen}(HA) - FO \cdot \text{cos}(HA)$$

Tubo de dirección-Tubo superior:

$$x_{15} = \sqrt{RC^2 - BC^2} - ((HT + FL) \cdot \text{sen}(HA) - FO \cdot \text{cos}(HA) + BD) \cdot \text{cotan}(SA) + ET + DH \cdot \text{cos}(HA)$$

$$y_{15} = 0$$

$$z_{15} = (FL + HT - DH) \cdot \text{sen}(HA) - FO \cdot \text{cos}(HA)$$

Tubo de dirección-Tubo inferior:

$$x_{16} = \sqrt{RC^2 - BC^2} - ((HT + FL) \cdot \text{sen}(HA) - FO \cdot \text{cos}(HA) + BD) \cdot \text{cotan}(SA) + ET + (HT - DH) \cdot \text{cos}(HA)$$

$$y_{16} = 0$$

$$z_{16} = (FL + DH) \cdot \text{sen}(HA) - FO \cdot \text{cos}(HA)$$

Tubo de dirección (Extremo inferior):

$$x_{17} = \sqrt{RC^2 - BC^2} - ((HT + FL) \cdot \text{sen}(HA) - FO \cdot \text{cos}(HA) + BD) \cdot \text{cotan}(SA) + ET + HT \cdot \text{cos}(HA)$$

$$y_{17} = 0$$

$$z_{17} = FL \cdot \text{sen}(HA) - FO \cdot \text{cos}(HA)$$

Tubo de dirección (Proyección):

$$x_{18} = x_{12} + (HT + FL) \cdot \text{cos}(HA)$$

$$y_{18} = 0$$

$$z_{18} = -FO \cdot \text{cos}(HA)$$

Eje de adelante Med.:

$$x_{19} = \sqrt{RC^2 - BC^2} - ((HT + FL) \cdot \text{sen}(HA) - FO \cdot \text{cos}(HA) + BD) \cdot \text{cotan}(SA) + ET + (HT + FL) \cdot \text{cos}(HA) + FO \cdot \text{sen}(HA)$$

$$y_{19} = 0$$

$$z_{19} = 0$$

Unión soporte de sillín Izq.:

$$x_{20} = x_9 + PSA \cdot (x_1 - x_9)$$

$$y_{20} = y_9 + PSA \cdot (y_1 - y_9)$$

$$z_{20} = z_9 + PSA \cdot (z_1 - z_9)$$

Unión soporte de sillín Der.:

$$x_{21} = x_{11} + PSA \cdot (x_3 - x_{11})$$

$$y_{21} = y_{11} + PSA \cdot (y_3 - y_{11})$$

$$z_{21} = z_{11} + PSA \cdot (z_3 - z_{11})$$

Unión soporte de cadena Izq.:

$$x_{22} = x_5 + PSC \cdot (x_1 - x_5)$$

$$y_{22} = y_5 + PSC \cdot (y_1 - y_5)$$

$$z_{22} = z_5 + PSC \cdot (z_1 - z_5)$$

Unión soporte de cadena Der.:

$$x_{23} = x_7 + PSC \cdot (x_3 - x_7)$$

$$y_{23} = y_7 + PSC \cdot (y_3 - y_7)$$

$$z_{23} = z_7 + PSC \cdot (z_3 - z_7)$$

Los segmentos que definen los ejes de los componentes se identifican en la Tabla 4-5, con sus respectivos nodos extremos.

Identificación del segmento	Punto 1	Punto 2
Tubo superior	15	10
Tubo inferior	16	6
Tubo de dirección	14	17
Tubo unión soportes de sillín	20	21
Tubo soporte de sillín Izq.	1	9
Tubo soporte de sillín Der.	3	11
Tubo de sillín	12	6
Tubo unión soportes de cadena	22	23
Tubo soporte de cadena Izq.	1	5
Tubo soporte de cadena Der.	3	7
Tubo pedalier	4	8
Eje de dirección	14	17
Eje de extremo	17	19

Tabla 4-5: Segmentos de ejes de los componentes que forman el modelo tridimensional del cuadro.

#### 4.1.2 Descripción del percutor

Uno de los cuerpos que participa del impacto, es el percutor, para el cual la Norma establece requerimientos de masa y geométricos, que se mencionan a continuación:

- Masa del percutor:  $m_{per} = 22,5 [kg]$
- Forma cilíndrica
- Diámetro del percutor:  $d_{per} = 0.15 [m]$

En la Figura 4.1-12 se muestra un esquema del percutor, que tiene forma cilíndrica, por lo tanto su geometría se establece completamente mediante la definición del diámetro y la altura.

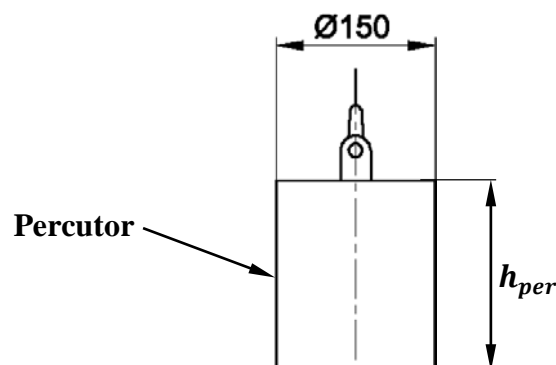


Figura 4.1-12: Esquema del percutor requerido por la Norma.

Para definir completamente la geometría, se requiere conocer la altura del percutor  $h_{per}$ . En función de la información disponible, existen una cantidad de variables a determinar, que dependen del material empleado.

Suponiendo que el material del rodillo es homogéneo  $\rho_{per} = cte$ , la masa total del percutor  $m_{per}$ , se expresa según la Ecuación (4.1-1),

$$m_{per} = \rho_{per} h_{per} \frac{\pi \cdot d_{per}^2}{4} \quad (4.1-1)$$

Por lo tanto la masa del percutor se expresa como función de parámetros geométricos y del material. Se establece una relación de densidad-altura que cumplen con el peso del percutor establecido por la Norma, expresado por la Ecuación (4.1-2) y que se muestra en la Figura 4.1-13, donde las abscisas son altura del percutor  $h_{per}$ , medida en [m] y las ordenadas son densidad del material  $\rho_{per}$ , medida en [kg/m<sup>3</sup>].

$$h_{per} = \rho_{per} \frac{4}{m_{per} \cdot \pi \cdot d_{per}^2} \quad (4.1-2)$$

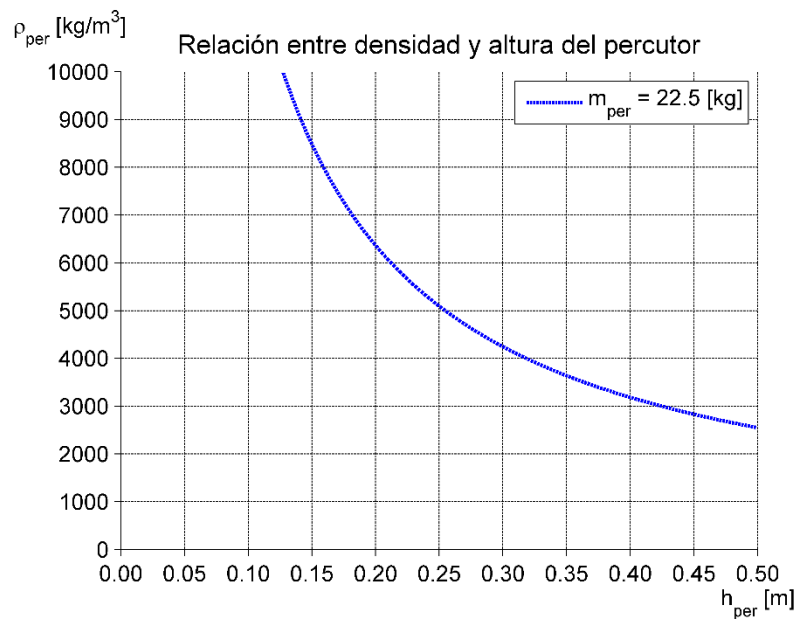


Figura 4.1-13: Curva de relación densidad-altura del percutor.

Una vez definido el material del percutor, se determina la densidad, y se establece la altura para cumplir con el peso establecido por la Norma.

Los parámetros constitutivos del material involucrados en el ensayo se mencionan a continuación:

$E$ : Modulo de elasticidad

$\nu$ : Coeficiente de Poisson

$\sigma_f$ : Tensión de fluencia

$\sigma_r$ : Tensión de rotura

$\sigma_p(\epsilon_p)$ : Comportamiento plástico

### 4.1.3 Descripción del rodillo

Uno de los cuerpos que participa del impacto, es el rodillo, para el cual la Norma establece requerimientos de masa y geométricos, que se mencionan a continuación:

- Masa del rodillo:  $m_{rod} \leq 1$  [kg]
- Diámetro de sección radial:  $d \leq 0.055$  [m]
- Radio de sección axial:  $R = 0.2$  [m]

En la Figura 4.1-14 se muestra un esquema del rodillo, donde se visualizan los parámetros geométricos que lo definen.

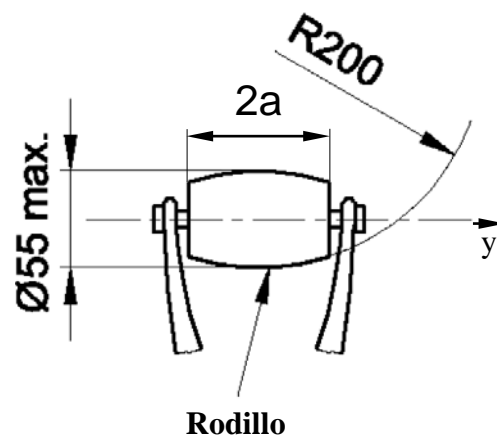


Figura 4.1-14: Esquema del rodillo colocado sobre el extremo de la horquilla.

Para definir completamente la geometría, se requiere conocer el semiancho del rodillo  $a$ . En función de la información disponible, existen una cantidad de variables a determinar, que dependen del material empleado. La masa del rodillo  $m_{rod}$  se define como:

$$m_{rod} = \int_V \rho_{rod} dV$$

Suponiendo que el material del rodillo es homogéneo, la densidad del rodillo  $\rho_{rod} = cte$ , se puede extraer fuera de la integral:

$$m_{rod} = \rho_{rod} \int_V dV$$

El volumen del rodillo se define como:

$$V_{rod} = \int_V dV$$

El volumen se calcula integrando el área de la sección  $A(y)$ , perpendicular al eje  $y$ , entre ambos extremos, como se expone en la Ecuación (4.1-3),



$$V_{rod} = \int_{-a}^a A(y) dy \quad (4.1-3)$$

El área de la sección transversal al eje  $y$ , se muestra en la Ecuación (4.1-4),

$$A(y) = \pi [r(y)]^2 \quad (4.1-4)$$

El radio del percutor respecto el eje  $y$ , se establece en la Ecuación (4.1-5),

$$r(y) = \frac{d}{2} - R + \sqrt{R^2 - y^2} \quad (4.1-5)$$

Integrando analíticamente se obtiene la masa del rodillo, que se expresa en la Ecuación (4.1-6).

$$m_{rod} = \rho_{rod} \pi \left[ a \left( \frac{d^2}{2} - 2dR + 4R^2 \right) + (d - 2R) \left( a\sqrt{R^2 - a^2} + R^2 \text{sen}^{-1} \left( \frac{a}{R} \right) \right) - \frac{2}{3} a^3 \right] \quad (4.1-6)$$

Por lo tanto la masa del rodillo se expresa como función de parámetros geométricos y materiales:

$$m_{rod} = f(\rho_{rod}, d, a, R) \quad (4.1-7)$$

donde:

$$2a = \text{Ancho del rodillo}$$

La masa del rodillo es función del material empleado y de tres variables geométricas:

- $d$ : Se establece por la Norma.
- $R$ : Se establece por la Norma.
- $a$ : Se limita superiormente por la separación entre los brazos de la horquilla.

Por lo tanto, luego de cumplir la Norma, se plantea la Ecuación (4.1-7) como:

$$m_{rod} = f(\rho_{rod}, a)$$

En la Figura 4.1-15 se establece una región de las configuraciones de densidad-ancho posibles que se ubica a la derecha del semiancho ancho entre los brazos de la horquilla, y debajo de la curva de peso máximo del rodillo. En el gráfico las abscisas son semiancho del rodillo  $a$ , medido en  $[m]$  y las ordenadas son densidad del material  $\rho_{rod}$ , medida en  $[kg/m^3]$ .

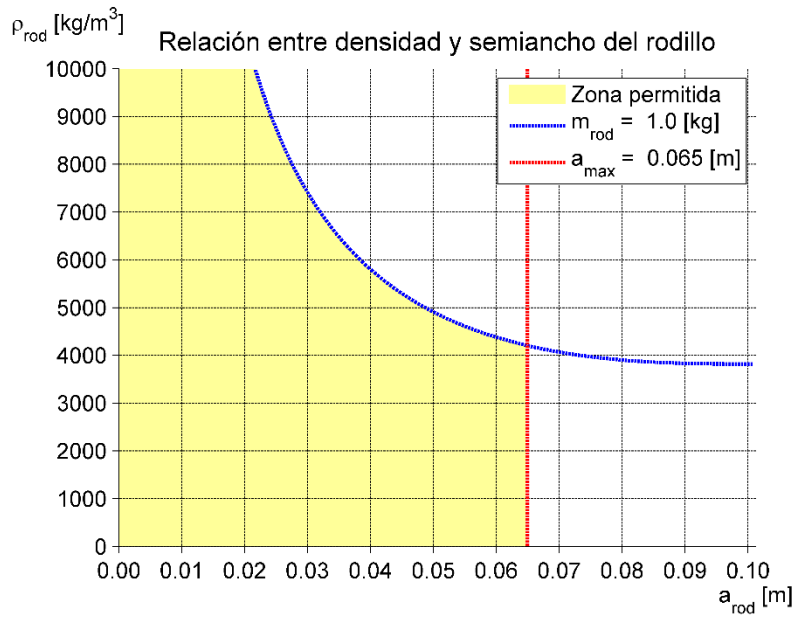


Figura 4.1-15: Zona de densidad-semiancho de rodillo permitidas por la Norma.

Una vez definido el material del rodillo, se determina la densidad, y se establece un ancho máximo para no superar el peso establecido por la Norma.

Los parámetros constitutivos del material involucrados en el ensayo se mencionan a continuación:

- $E$ : Modulo de elasticidad
- $\nu$ : Coeficiente de Poisson
- $\sigma_f$ : Tensión de fluencia
- $\sigma_r$ : Tensión de rotura
- $\sigma_p(\epsilon_p)$ : Comportamiento plástico

## 4.2 Modelos planteados

En la presente sección se descompone la simulación del ensayo en dos situaciones, y se presentan los respectivos modelos que muestran dos enfoques. En una primera parte se proponen modelos del conjunto cuadro-tija en la configuración de ensayo, para obtener las propiedades representativas. Luego se propone un modelo orientado a los cuerpos que impactan, es decir el rodillo y el percutor, para finalmente evaluar los principales parámetros del contacto entre ambos.

### 4.2.1 Modelos del conjunto cuadro-tija en la configuración de ensayo

La Norma establece la disposición del cuadro, y la preparación del mismo para la realización del ensayo, que se muestra en la Figura 4.2-1. Existen diversas maneras de representar la situación planteada por el ensayo real. En el presente trabajo se formulan dos grupos de modelos, los modelos de elementos finitos y los modelos de masas concentradas, que se describen a continuación.

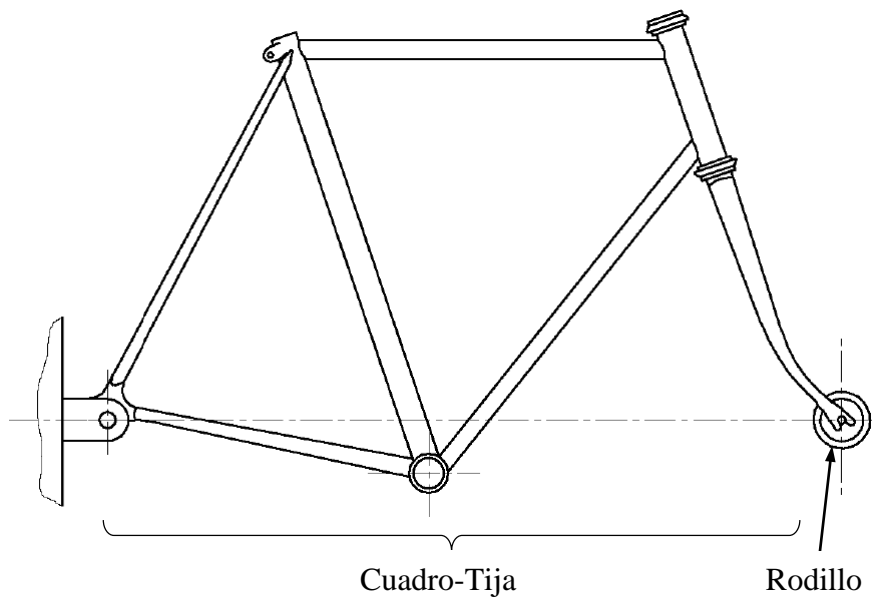


Figura 4.2-1: Conjunto cuadro-tija en la configuración de ensayo

#### 4.2.1.1 Modelos de elementos finitos del conjunto cuadro-tija

La implementación del conjunto cuadro-tija en la configuración de ensayo mediante el método de elementos finitos, requiere la formulación de un modelo donde cada componente se incorpora mediante un tipo de elemento. En este sentido se plantean dos modelos: un modelo de vigas y un modelo de cáscaras. Ambos se implementan mediante el software Abaqus, y a continuación se tratan los aspectos generales de cada uno.

##### 4.2.1.1.1 Modelo de vigas

El cuadro de bicicleta se compone por partes tridimensionales, que se pueden modelar con elementos de vigas. La validez del modelo de vigas para representar un sólido tridimensional se basa en la hipótesis de esbeltez de los componentes, que consiste en que las dimensiones de la sección transversal son pequeñas comparadas con la longitud típica a lo largo de la viga. La longitud típica se refiere a la distancia entre apoyos o de tramos en donde no ocurren cambios bruscos de sección transversal (5).

Los componentes del cuadro tienen distintas longitudes y secciones transversales, por lo tanto la esbeltez es variable, la validez del modelo de vigas es más apropiado en algunos componentes que en otros, pero en general todos los componentes son esbeltos y se propone aplicar el modelo de vigas para estudiar el cuadro.

El elemento viga utilizado en el método de elementos finitos es una línea unidimensional que tiene rigidez asociada con la deformación axial, el cambio de curvatura, la torsión y puede admitir deformación de corte transversal según la formulación empleada.

El proceso de construcción de un modelo de elementos finitos, se facilita y ordena mediante módulos que agrupan tareas enfocadas en determinados aspectos del modelo.

Se propone realizar diversas simulaciones del comportamiento del conjunto cuadro-tija por lo tanto existen aspectos generales a todos los modelos y aspectos particulares que dependen del análisis que se pretenda realizar. A continuación se desarrollan los aspectos comunes a todos

los modelos. Posteriormente, para cada análisis en particular se tratan los aspectos necesarios, para completar cada modelo específico, entre los que se mencionan pasos de cálculo, cargas actuantes, requerimientos de salida.

### Aspectos generales del modelo de vigas

Se utilizan todas las herramientas de software necesarias para lograr una representación apropiada de la situación real. A continuación se detallan los aspectos generales del modelo.

### Partes

Las piezas que participan de todos los análisis son: el cuadro, la tija maciza y el rodillo. Cada una de estas se representa con una parte del modelo de elementos finitos de la manera que se menciona a continuación:

- El cuadro: Se modela por vigas rectas que unen las posiciones teóricas de los nodos extremos.
- La tija maciza: Se representa mediante vigas rectas que unen las posiciones teóricas de los nodos extremos.
- El rodillo: Se modela por un punto que tiene inercia asociada, cuya magnitud es la masa del rodillo.

### Materiales

En el modelo propuesto, el cuadro y la tija maciza se representan por un conjunto de elementos finitos, y se requieren establecer sus propiedades mediante el comportamiento del material. La Norma, no menciona ningún material en particular para la realización del cuadro, sin embargo exige que la tija maciza sea construida de acero. Para dar generalidad al modelo de elementos finitos, se definen dos materiales distintos para asignar al cuadro y a la tija maciza. A cada material se asigna comportamientos, que se tendrán en cuenta o no según el tipo análisis.

### Elasticidad

Se establece el módulo de Young  $E$  y el coeficiente de Poisson  $\nu$ .

### Plasticidad

Además del comportamiento elástico general, se introduce un comportamiento plástico del material mediante la curva de plastificación. Se establece una relación entre la tensión verdadera  $\sigma$  y la deformación plástica verdadera  $\varepsilon^{pl}$ , que se manifiesta en una tabla de pares ordenados  $\sigma(\varepsilon^{pl})$ , que debe incluir el inicio de la fluencia  $\sigma(\varepsilon^{pl} = 0)$ .

Para conocer la curva de plastificación, se debe realizar un ensayo con la pieza real. Sin embargo, para los fines del presente modelo, se consideran suficientes los valores disponibles obtenidos de las propiedades del material que son:

$\sigma_f$ : Tensión de fluencia

$\sigma_r$ : Tensión de rotura

$\varepsilon_r$ : Alargamiento de rotura

En forma general la tabla de plastificación del material se basa en dos puntos relevantes: la tensión de fluencia  $\sigma(0) = \sigma_f$  que corresponde a plastificación nula, y la tensión de rotura  $\sigma(\varepsilon_{max}) = \sigma_r$  que corresponde a la deformación plástica máxima  $\varepsilon_{max}$ . La definición de ambos puntos de la curva de plastificación se expone en la Tabla 4-6, donde se muestra el fenómeno del material, indicando la tensión verdadera  $\sigma$  y la deformación plástica verdadera  $\varepsilon_p$ .

Fenómeno	$\sigma$	$\varepsilon_p$
Fluencia	$\sigma_f$	0
Rotura	$\sigma_r$	$\varepsilon_{max} = \ln(1 + \varepsilon_r) - \sigma_r/E$

Tabla 4-6: Definición de la curva de plastificación para el modelo de vigas del cuadro.

El comportamiento plástico del material, se tiene en cuenta en los análisis no lineales.

### Inercia

La inercia del material, se introduce al modelo estableciendo la densidad  $\rho$ . Cabe destacar que este comportamiento se utiliza únicamente en análisis dinámicos.

### Ensamble

Se incluyen las siguientes instancias que participan del ensamble:

- Cuadro
- Tija maciza
- Rodillo

Las piezas que forman parte del modelo, se posicionan como indica el ensayo, según la Norma, y se muestran en la Figura 4.2-2.

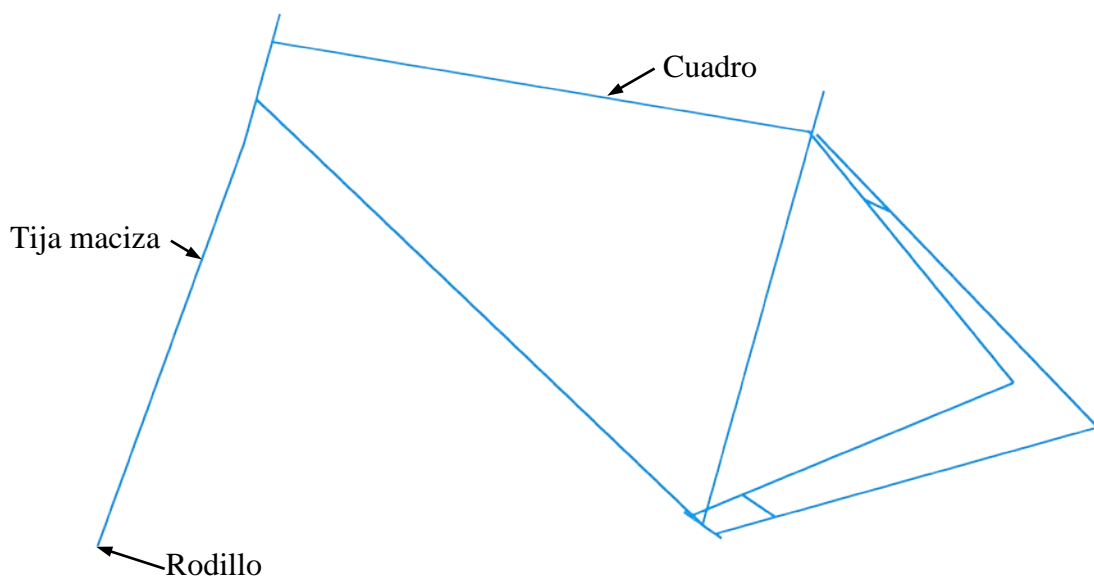


Figura 4.2-2: Ensamble del conjunto cuadro-tija en la configuración de ensayo.

## Restricciones

Luego de posicionarse, se vinculan entre sí las distintas partes y regiones de una misma parte no concurrentes del modelo de vigas.

El percutor se fija al extremo inferior de la tija maciza. Por otro lado la tija maciza se vincula al cuadro mediante restricciones que representan los rodamientos, ubicados en los extremos superior e inferior del tubo de dirección. De esta manera ambas partes quedan acopladas por dos puntos, que transmiten desplazamientos y rotaciones en todas las direcciones, no existiendo ningún contacto en otra región.

En el modelo tridimensional, el tubo de sillín y los tubos soportes de sillín, tienen sus ejes no concurrentes, porque existe una separación, que depende de los perfiles de las secciones transversales, para permitir una unión adecuada entre los tubos. El modelo de vigas tiene puntos que no coinciden en su posición, pero que están vinculados, por este motivo se utiliza una restricción equivalente a una viga recta de rigidez infinita que acopla el punto 10 sobre el tubo de sillín con los puntos esclavos 9 y 11 que representan los extremos superiores de los soportes de sillín izquierdo y derecho respectivamente. Esta característica del modelo se expone detalladamente en la Figura 4.2-3.

Estas situaciones donde los ejes de vigas no son concurrentes se pueden presentar en otras regiones del cuadro, pero son pequeñas y no se consideran en el modelo geométrico del cuadro.

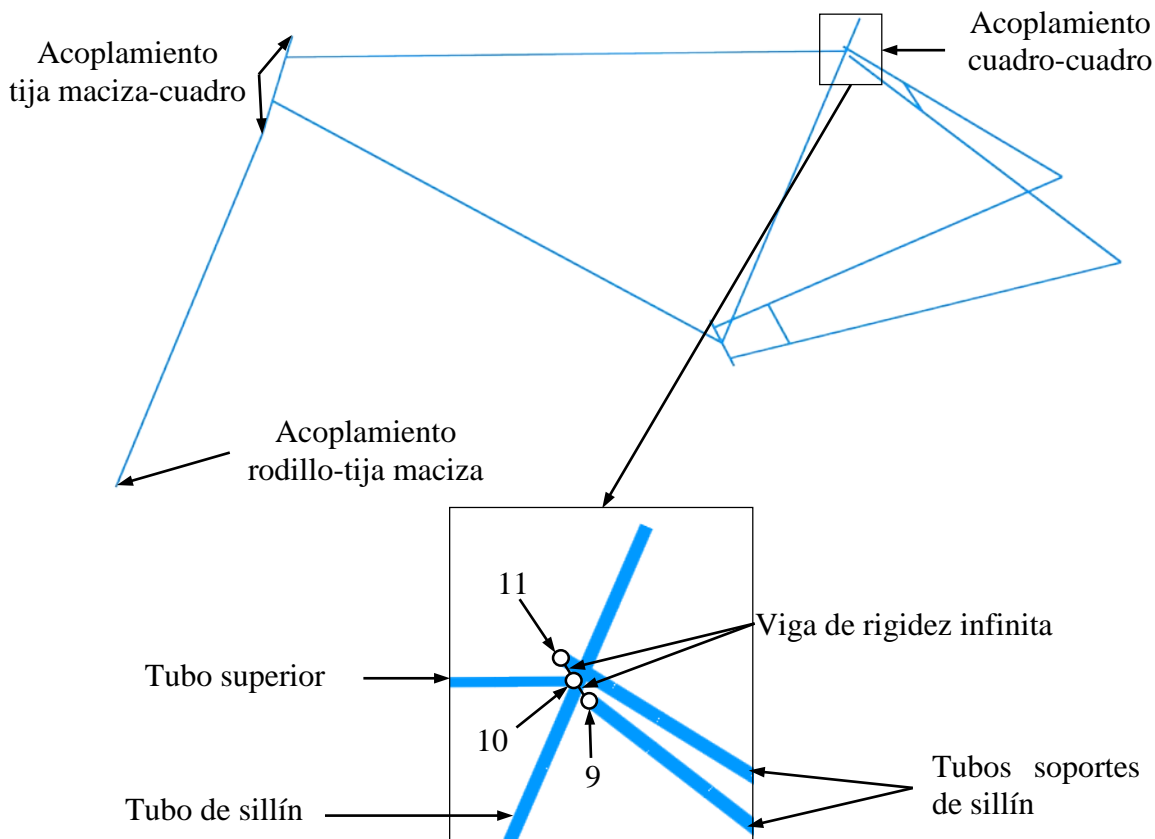


Figura 4.2-3: Restricciones que acoplan las partes del modelo.

### Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno se muestran en la Figura 4.2-4, donde las restricciones de desplazamiento se indican con flechas de punta simple de color anaranjado y las fijaciones de rotaciones se representan con flechas de punta doble de color azul.

En las punteras de atrás se restringieron los desplazamientos en las tres direcciones y se fijaron las rotaciones respecto los ejes 'x' y 'z'. Por otra parte las rotaciones del cuadro respecto el eje de atrás en dirección 'y' se suponen libres, despreciando cualquier tipo de rozamiento entre ambos. En el extremo delantero se restringen los desplazamientos en las direcciones 'y' y 'z', que físicamente representan un sistema de guías que permite el desplazamiento únicamente en la dirección 'x' que interesa en el ensayo. Como no se menciona ninguna restricción adicional, se dejan completamente libres las rotaciones en este punto.

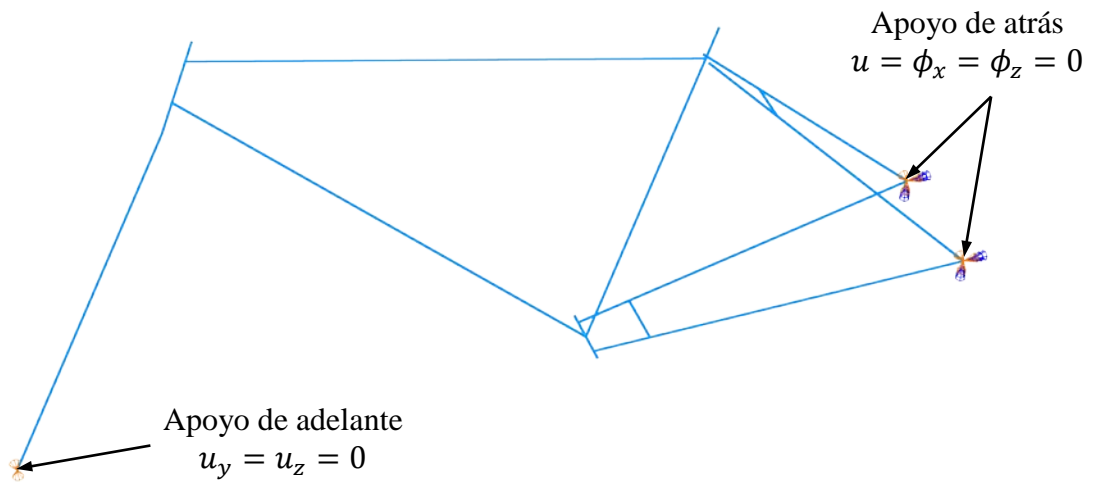


Figura 4.2-4: Condiciones de contorno para el modelo del conjunto cuadro-tija.

### Malla

Se aplica un control global de malla para determinar el tamaño de malla, manejando el factor de tamaño mínimo y el desvío máximo. Se siembra el cuadro y la tija maciza con nodos que se distribuyen separados uniformemente a lo largo de la longitud total de las vigas.

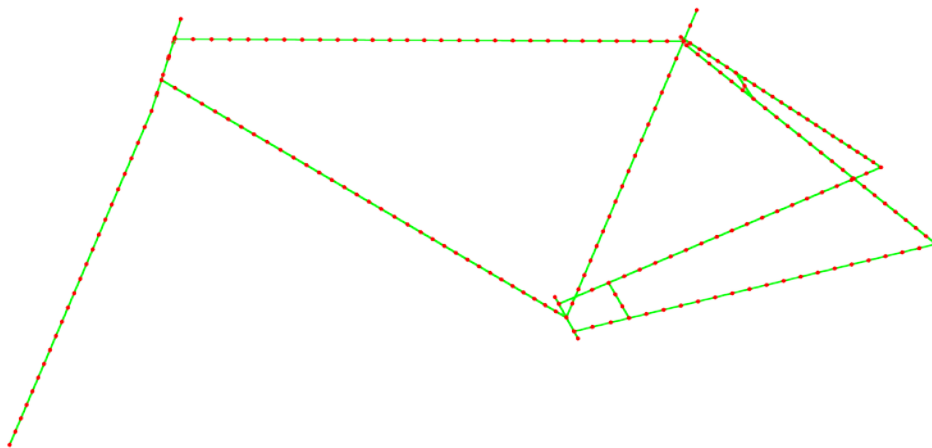


Figura 4.2-5: Malla de elementos de viga para el conjunto cuadro-tija.

En la Figura 4.2-5 se muestra la malla formada por los elementos de vigas que se definen mediante dos nodos extremos que se representan mediante círculos rojos.

### Secciones

Una sección para el modelo de vigas consiste básicamente en la asociación entre un perfil y un material. El perfil representa una forma geométrica, y los parámetros necesarios para definirlo. Por un lado el perfil tiene asociado propiedades como el área, la inercia, el área de corte, etc., por otro lado el material aporta propiedades como los módulos de elasticidad y de corte, etc.

Luego de crear la sección de cada componente del cuadro, se asigna a la región geométrica correspondiente. Posteriormente se establece la orientación de la sección, quedando definidos los ejes que permiten analizar el modelo e interpretar los resultados. Cada eje se asocia a un sistema coordenado local, donde la dirección 3 corresponde al eje de la viga, mientras que las restantes están contenidas en el plano de la sección transversal. Para los tubos ubicados sobre plano de simetría el eje  $\mathbf{n}_1$  toma la dirección perpendicular a este. Para los tubos que no se encuentran sobre el plano de simetría, el eje  $\mathbf{n}_1$  se elige para tener su componente máxima en dirección perpendicular al plano simétrico. El eje  $\mathbf{n}_2$  queda definido trivialmente luego de establecer los dos ejes restantes. La orientación de las secciones se muestra en la Figura 4.2-6.

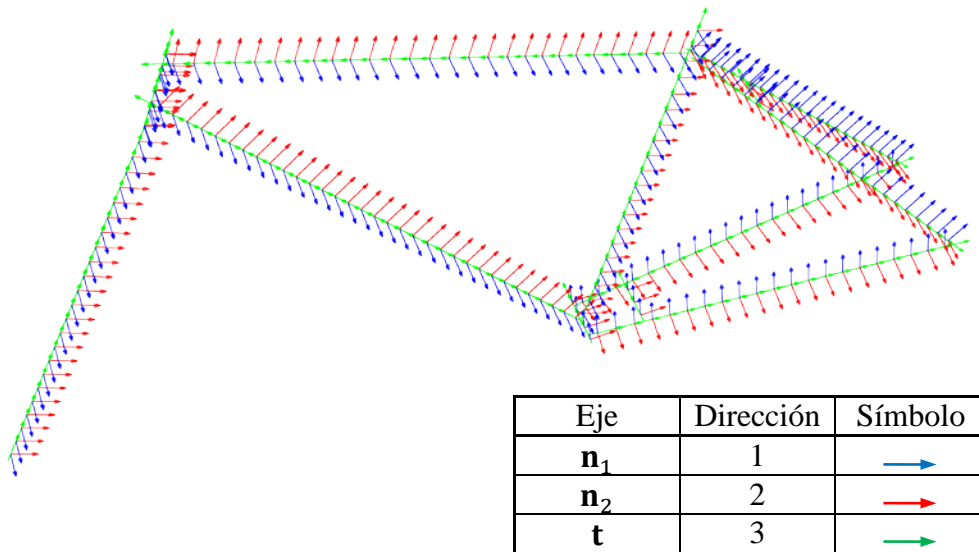


Figura 4.2-6: Orientación de las secciones de vigas asignadas al modelo del cuadro.

El análisis de elementos finitos se plantea en forma general para un modelo tridimensional de cuadro. El modelo plano se trata como un caso particular donde no hay nodos extremos ubicados fuera del plano de simetría x-y. La proyección de estos puntos se controla mediante el valor los siguientes parámetros geométricos:

$WA$  es la separación entre las punteras de atrás

$WP$  es la longitud del tubo pedalier

$WI$  es la separación entre soportes de cadena sobre el tubo pedalier

$SSS$  es la separación entre el tubo de sillín y tubos de soporte de sillín



Si se estos parámetros tienden simultáneamente a cero, el modelo tridimensional se transforma en plano, y aquí radica utilidad del planteo tridimensional general en el análisis de elementos finitos.

$$\lim_{(W_A, W_P, W_I, SSS) \rightarrow (0,0,0,0)} \{Modelo\ tridimensional\} = Modelo\ plano$$

El planteo de un modelo tridimensional general, tiene como objetivo permitir contrastar los resultados numéricos obtenidos para ambas geometrías, la plana y la tridimensional.

#### 4.2.1.1.2 Modelo de cáscaras

Los componentes del cuadro de bicicleta son esbeltos y se pueden representar mediante vigas cuyas secciones transversales pueden ser clasificadas como solidas o de pared delgada.

En la Figura 4.2-7, se muestran los diversos modelos de elementos finitos disponibles para representar los componentes dependiendo del tipo de sección transversal.

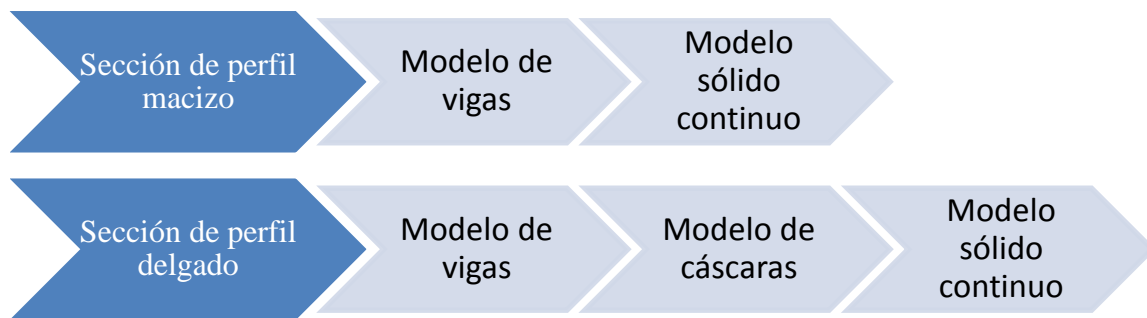


Figura 4.2-7: Posibilidad de evolución en los modelos de elementos finitos del conjunto cuadro-tija.

Para analizar los componentes que tienen secciones sólidas el modelo de vigas brinda una buena representación, y para alcanzar una mayor calidad en los resultados se debe utilizar un modelo de sólido continuo general, que aumenta el costo computacional, no justificando su aplicación, por lo tanto en el presente trabajo dichas partes se abordan mediante el modelo de vigas.

Para incrementar la calidad en la representación de los componentes que tienen secciones de pared delgada, para se puede aplicar un modelo intermedio antes de recurrir al modelo de sólido continuo general, que es el modelo de superficies. Este se basa en la hipótesis de que un cuerpo tridimensional, en una dirección tiene una dimensión que es pequeña comparada con las dimensiones en las dos direcciones restantes.

El software de elementos finitos (7), ofrece dos tipos de elementos de cáscara, los convencionales y los continuos, que se muestran en la Figura 4.2-8 y se describen a continuación.

**Elementos de cáscara convencionales:** Modelan un cuerpo mediante una superficie de referencia ideal, en la cual el espesor se define mediante las propiedades de la sección, cuyos nodos tienen desplazamientos y rotaciones como grados de libertad.

**Elementos de cáscara continuos:** Modelan el cuerpo mediante la ubicación de los nodos sobre una geometría tridimensional. Se diferencia del elemento tridimensional general por las restricciones aplicadas. Los nodos tienen desplazamientos únicamente como grado de libertad.

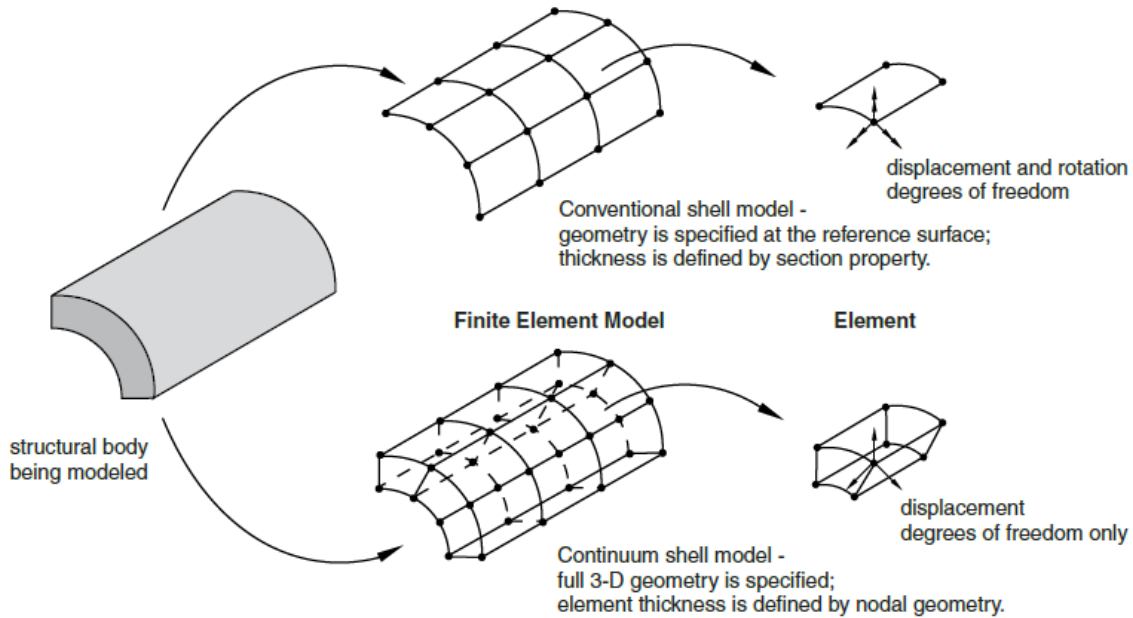


Figura 4.2-8: Diferencias entre elementos de cáscara convencionales y continuas, (5).

Se seleccionan los elementos de superficie convencionales para modelar los componentes que tienen sección de pared delgada, debido al costo computacional elevado que implica la utilización de elementos continuos, no resultando adecuados para utilizar en procesos de integración explícitos. Por lo tanto los componentes del cuadro que tienen sección de pared delgada, anteriormente representados con una línea en el modelo de vigas, ahora requieren la creación de las superficies ideales en el espacio, planteando un procedimiento adicional, que se basa en el proceso constructivo de un cuadro real.

De esta manera surge un modelo mixto donde los componentes de perfil sólido se modelan mediante elementos de viga, y los componentes de secciones de pared delgada se representan mediante elementos de cáscara. A continuación se describen los aspectos necesarios para construir el modelo general. Posteriormente para cada análisis específico se detallan los aspectos particulares adicionales.

#### Aspectos generales del modelo de cáscaras

Se utilizan todas las herramientas de software necesarias para lograr una representación apropiada de la situación real. A continuación se detallan los aspectos generales del modelo, que son las partes, los materiales, el ensamble, las restricciones, las condiciones de contacto, la malla, y las secciones.

## Partes

Las piezas que participan de todos los análisis son: el cuadro, la tija maciza y el rodillo. Cada una de estas se representa con una parte del modelo de elementos finitos de la manera que se menciona a continuación:

- Cuadro: Un modelo de superficies cilíndricas cuyos ejes rectos unen las posiciones teóricas de los nodos extremos.
- Tija maciza: Un modelo de vigas rectas que unen las posiciones teóricas de los nodos extremos.
- Rodillo: Un punto que tiene inercia asociada, cuya magnitud es la masa del rodillo.
- Soporte de puntera de atrás izquierda: Un punto que no tiene masa asociada, necesario para aplicar las condiciones de apoyo.
- Soporte de puntera de atrás derecha: Un punto que no tiene masa asociada, necesario para aplicar las condiciones de apoyo.

## Materiales

Se definen dos materiales distintos para asignar al cuadro y a la tija maciza. A cada material se asigna las propiedades que se requieren para cada análisis específico. En general el material tiene los siguientes comportamientos:

### Elasticidad

Se establece el módulo de Young  $E$  y el coeficiente de Poisson  $\nu$ .

### Plasticidad

Además del comportamiento elástico general, se introduce un comportamiento plástico del material mediante la curva de plastificación. Se establece una relación entre la tensión verdadera  $\sigma$  y la deformación plástica verdadera  $\varepsilon^{pl}$ , que se manifiesta en una tabla de pares ordenados  $\sigma(\varepsilon^{pl})$ , que debe incluir el inicio de la fluencia  $\sigma(\varepsilon^{pl} = 0)$ .

Para conocer la curva de plastificación, se debe realizar un ensayo con la pieza real. Sin embargo para los fines del modelo, se consideran suficientes los valores disponibles obtenidos de las propiedades del material que son:

$\sigma_f$ : Tensión de fluencia

$\sigma_r$ : Tensión de rotura

$\varepsilon_r$ : Alargamiento de rotura

En forma general la tabla de plastificación del material se basa en dos puntos relevantes: la tensión de fluencia  $\sigma(0) = \sigma_f$  que corresponde a plastificación nula, y la tensión de rotura  $\sigma(\varepsilon_{max}) = \sigma_r$  que corresponde a la deformación plástica máxima  $\varepsilon_{max}$ . La definición de ambos puntos de la curva de plastificación se expone en la Tabla 4-7, donde se muestra el fenómeno del material, indicando la tensión verdadera  $\sigma$  y la deformación plástica verdadera  $\varepsilon_p$ .

Fenómeno	$\sigma$	$\epsilon_p$
Fluencia	$\sigma_f$	0
Rotura	$\sigma_r$	$\epsilon_{max} = \ln(1 + \epsilon_r) - \sigma_r/E$

Tabla 4-7: Definición de la curva de plastificación para el modelo de superficies del cuadro.

El comportamiento plástico del material, se tiene en cuenta en los análisis no lineales.

### Inercia

La inercia del material, se introduce al modelo estableciendo la densidad  $\rho$ .

### Ensamble

Se incluyen las siguientes instancias que participan del ensamble:

- Cuadro
- Tija maciza
- Rodillo
- Soporte de puntera de atrás izquierda
- Soporte de puntera de atrás derecha

Las piezas se posicionan como indica el ensayo, según la Norma (1), y se exponen en la Figura 4.2-9.



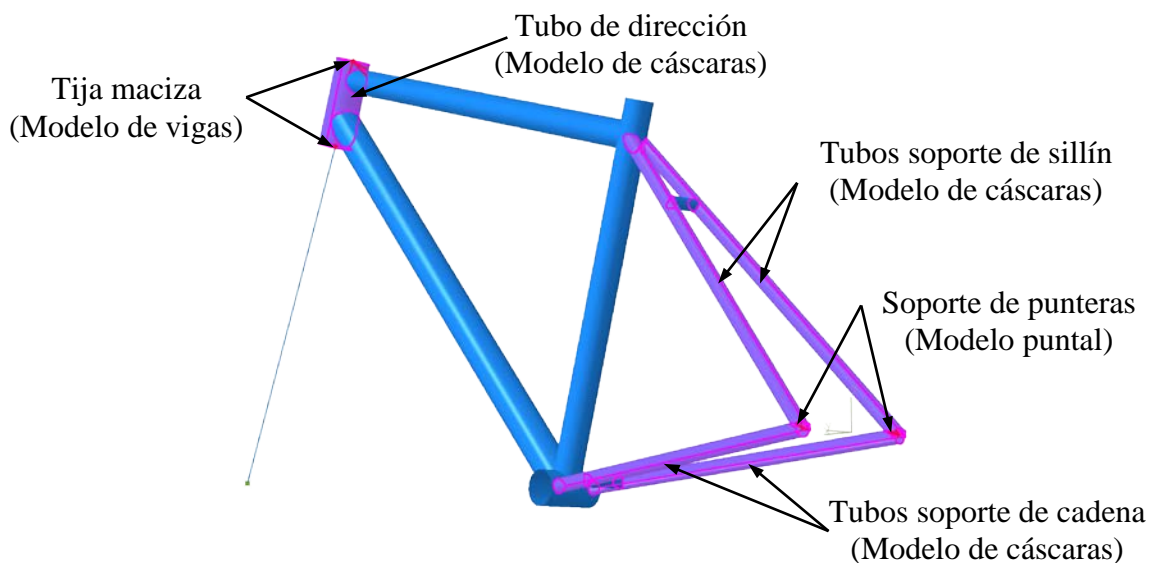
Figura 4.2-9: Ensamble del conjunto cuadro-tija en la configuración de ensayo.

### Restricciones

Las instancias que integran el modelo de elementos finitos se deben relacionar, intentando representar las condiciones físicas reales. Debido a que en el ensamble participan nodos y elementos estructurales de distinta naturaleza como vigas y cáscaras, se requiere aplicar restricciones de acoplamiento basados en superficie, para vincular las siguientes pares de regiones del modelo:

- Las cáscaras tridimensionales que forman el tubo de dirección con las vigas que modelan la tija maciza.
- Las cáscaras tridimensionales que forman los tubos soporte de asiento y los tubos soporte de cadena con los puntos sobre los que se aplican las condiciones de contorno.

Se establecen acoplamientos cinemáticos que vinculan un punto de control y la región de nodos ubicados sobre la superficie, que se exponen en la Figura 4.2-10, donde se representan en color rojo y púrpura respectivamente. Si bien se muestran los tubos completos utilizados para definir las superficies de acoplamiento cinemático, la restricción se aplica únicamente sobre todos los nodos que se encuentran a una distancia menor a un radio de influencia especificado.



*Figura 4.2-10: Restricciones que acoplan las regiones del modelo de distinto tipo.*

### *Condiciones de contorno*

Las condiciones de contorno se exponen en la Figura 4.2-11, donde las restricciones de desplazamiento se muestran con flechas de punta simple de color anaranjado y las fijaciones de rotaciones se representan con flechas de punta doble de color azul.

En las punteras de atrás se restringieron los desplazamientos en las tres direcciones y se fijaron las rotaciones respecto los ejes 'x' y 'z'. Por otra parte las rotaciones del cuadro respecto el eje de atrás en dirección 'y' se suponen libres, despreciando cualquier tipo de rozamiento entre ambos.

En el extremo delantero se restringen los desplazamientos en las direcciones 'y' y 'z', que físicamente representan un sistema de guías que permite el desplazamiento únicamente en la dirección 'x' que interesa en el ensayo. Como no se menciona ninguna restricción adicional, se dejan completamente libres las rotaciones en este punto.

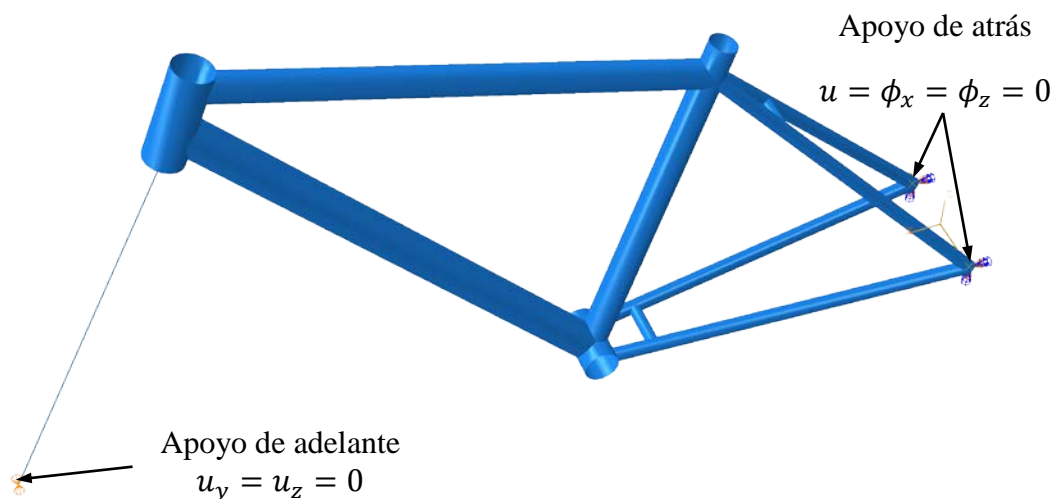


Figura 4.2-11: Condiciones de contorno del modelo de cáscaras del cuadro.

### Malla

La tija en todos los modelos de elementos finitos planteados, se representa mediante elementos de vigas, por lo tanto en este modelo mixto de vigas y cáscaras, se mantiene la malla planteada en el modelo de vigas, descrita en la sección 4.2.1.1.1.

La principal diferencia entre el modelo de vigas y el modelo mixto de vigas y cáscaras reside en el mallado del cuadro.

El mallado de una viga no ofrece demasiadas variantes, mientras que para mallar un tubo con elementos de superficie existen una serie de factores que se deben tener en cuenta. Si bien el software ofrece opciones por defecto que efectúan la tarea de mallado automáticamente, resulta interesante conocer las diferentes variantes y manejar los distintos aspectos, como la forma de elemento, la técnica y el tipo de elemento, que se describen a continuación.

### Forma de elemento

Los elementos de superficie son de dos formas, cuadriláteros o triángulos. La malla puede contener una única forma de elemento, o permitir la existencia de ambas formas en la misma. Se prefiere el elemento cuadrilátero, debido a que requiere menor densidad de malla, pero en ciertas regiones para que no resulten elementos distorsionados, se permite la generación de elementos triangulares.

### Técnica de mallado

Se disponen de tres técnicas de mallado: La técnica estructurada, la de barrido y la libre.

La técnica estructurada consiste en generar un patrón de elementos predefinidos, que se aplica únicamente en regiones de cáscaras limitadas por tres, cuatro y cinco aristas.

En todas las regiones donde es posible, se aplica esta técnica de mallado. Como la geometría del cuadro es compleja, se realizan una serie de particiones para definir subregiones en donde se pueda implementar esta técnica. Primeramente se crean dos planos perpendiculares entre sí, sobre el eje axial de cada tubo, y posteriormente se introducen algunos planos

transversales. Se realizan particiones basadas en estos planos. En la Figura 4.2-12 se muestra el modelo del cuadro con las superficies particionadas.

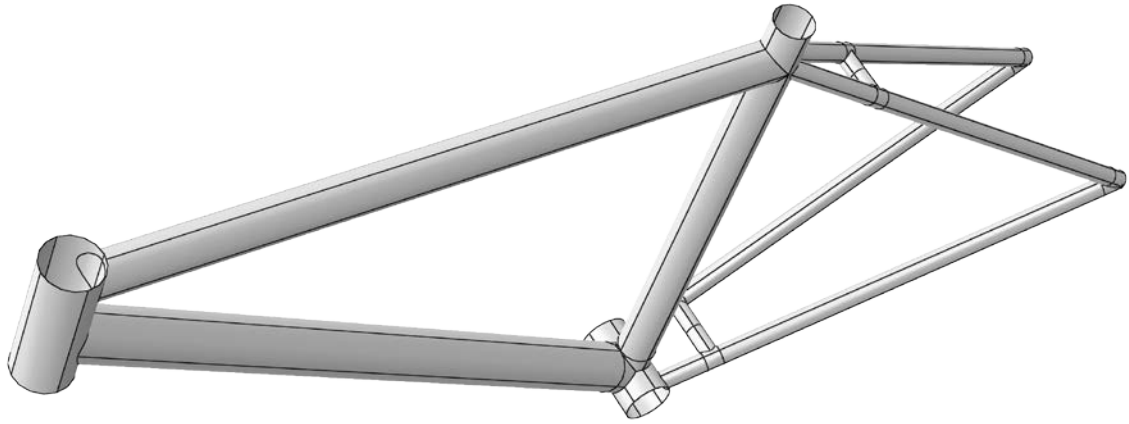
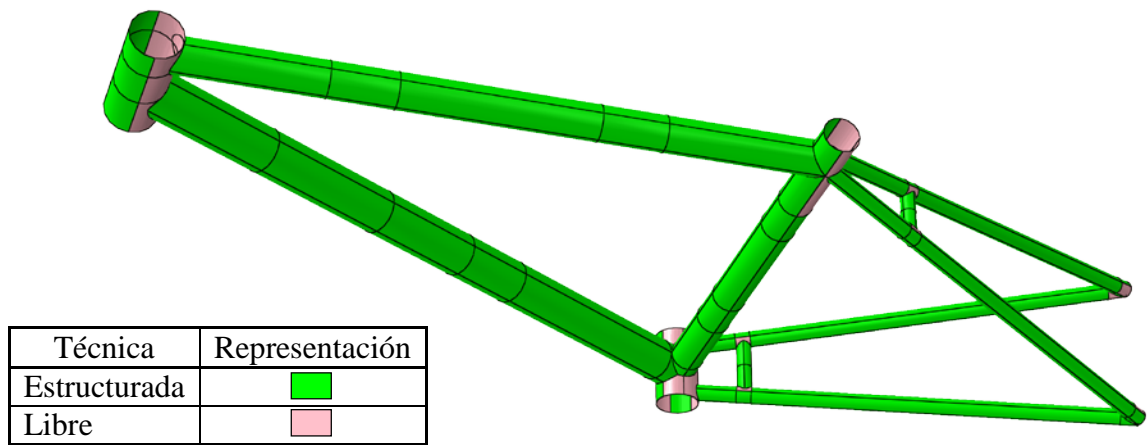


Figura 4.2-12: Particiones axiales y transversales sobre los tubos del cuadro.

En ciertas regiones que no cumplen con los requisitos necesarios para aplicar la técnica de mallado estructurada, o resultan elementos distorsionados, se aplica la técnica de mallado libre que se basa en la malla de las regiones adyacentes. En la Figura 4.2-13 se muestran las técnicas de mallado utilizadas para modelar cada región del cuadro.



Técnica	Representación
Estructurada	■
Libre	■

Figura 4.2-13: Técnicas empleadas para mallar el cuadro con elementos de cáscaras.

### Tipo de elemento

En el modelo mixto de vigas y cáscaras se encuentran diversas formas de elementos, para cada una se asocia un tipo de elemento, que se indican en la Tabla 4-8.

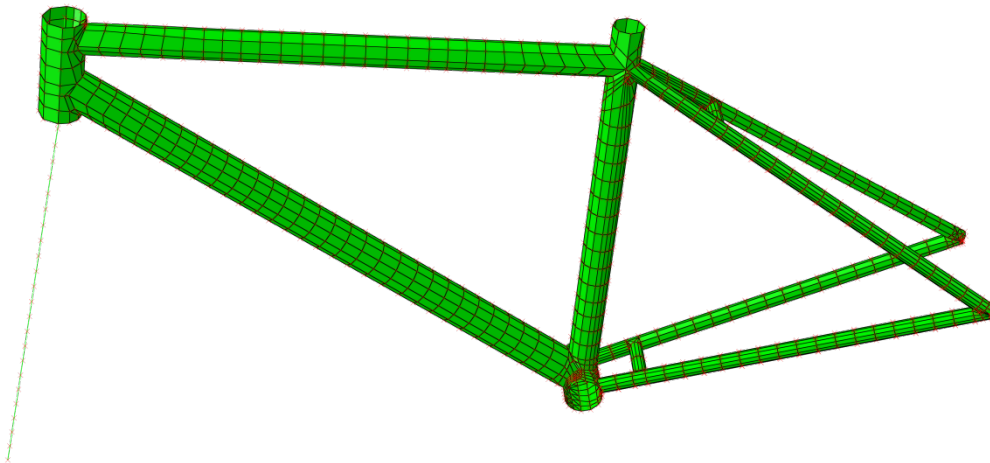
Tipo de modelo	Forma de elemento	Tipo de elemento
Viga	Línea	B31
Cáscara	Triángulo	S3
Cáscara	Cuadrilátero	S4

Tabla 4-8: Asociación entre el modelo, la forma y el tipo de elemento.

Para el caso de los elementos de vigas se continúan utilizando los elementos B31, que se emplearon en el modelo de vigas del cuadro. Cabe reiterar que este elemento consiste en una viga tridimensional de interpolación lineal, que tiene formulación de corte flexible.

Los elementos de superficie se designan con 'S', mientras que el número posterior indica la cantidad de nodos. Se emplea la integración completa debido a que el tamaño del modelo no es relativamente grande.

Las partes del modelo se siembran globalmente con nodos en las aristas, estableciendo el tamaño de la malla, el factor de desvío máximo y el factor de tamaño mínimo. Finalmente, se genera una malla de 2789 elementos de cáscara para el cuadro y 28 elementos de viga para modelar la tija maciza, que se muestran en la Figura 4.2-14.



*Figura 4.2-14: Malla de elementos de vigas y cáscaras, para el conjunto cuadro-tija.*

### *Secciones*

Dado que se emplearon elementos de cáscaras convencionales, la geometría modelada se compone de superficies ideales que no tienen espesor, por lo tanto este parámetro geométrico se incorpora al modelo mediante la asignación de las secciones correspondientes.

Se crean secciones de cáscaras homogéneas, para cada tubo o tramo de tubo. Se considera que todo el cuadro es del mismo material, por lo tanto se asocian las propiedades de este a todas las secciones. El espesor puede ser constante, pero para dar mayor generalidad al modelo se admiten espesores variables. Para ello en los tubos que tienen espesor variable se establece un sistema coordinado de referencia en uno de sus extremos, donde la dirección 'x' local coincide con el eje del tubo. Luego se definen funciones analíticas que se emplean en la definición del espesor, que dependen únicamente de la coordenada espacial axial, ya que el espesor no varía en la dirección circunferencial. Desde el punto de vista teórico se puede emplear cualquier función matemática para definir el espesor, pero se selecciona una aproximación lineal entre dos valores de espesores de referencia extremos.

El espesor definido mediante una función analítica se basa en los elementos o en los nodos, y ambos se detallan a continuación.



- **Espesor basado en los elementos:** El espesor de cada elemento de cáscara es constante, y corresponde al espesor que establece la función analítica en la coordenada del centroide del elemento. De esta manera mientras más pequeños son los elementos, menor es la discontinuidad de espesores en las aristas que limitan a elementos adyacentes.
- **Espesor basado en los nodos:** El espesor se calcula en cada nodo, por lo tanto varía linealmente dentro de cada elemento, no presentando discontinuidades en los límites del elemento. Sin embargo, en la intersección de dos superficies, que compartan un nodo se asigna el mismo espesor para ambas.

En el presente modelo se adopta el espesor basado en elementos, debido a que permite considerar dos espesores diferentes en una arista compartida por tubos distintos, que no es posible de otra manera. Por otro lado debido a que los elementos de cáscaras no tienen gran tamaño las discontinuidades de espesor entre elementos adyacentes de un mismo tubo no son significativas.

Todas las propiedades de la sección se obtienen durante cada paso de análisis realizando la integración mediante la regla de Simpson que utiliza 5 puntos a través del espesor de la cáscara.

Los tubos que tienen espesor variable en la dirección axial se mencionan a continuación:

- Tubo dirección
- Tubo superior
- Tubo inferior
- Tubo sillín

Las superficies ideales representan la cara exterior de los tubos, debido a que se supone que tienen diámetro exterior constante. Por lo tanto se ubica la cara externa de la sección coincidiendo con la superficie ideal. Este procedimiento exige una correcta definición de la normal saliente de cada superficie. El posicionamiento de la superficie no afecta al cálculo de la masa del modelo, pero sí influye en propiedades como la inercia de la sección, a pesar de que el espesor es pequeño.

#### ***4.2.1.2 Modelos puntuales del conjunto cuadro-tija***

En la presente sección se pretende aproximar el comportamiento del conjunto cuadro-tija en la configuración de ensayo a través de un modelo más simple que el modelo de elementos finitos planteado en la sección anterior. Para ello se propone un sistema de masas puntuales conectadas en serie a través de resortes lineales, que se expone en la Figura 4.2-15, donde se muestra la manera en que se representan las partes. El conjunto de cuadro-tija se representa por la combinación en serie de las masas  $m_0, \dots, m_{N-1}$ , mediante los resortes de rigidez lineal  $k_1, \dots, k_N$ . Por otra parte el rodillo o extremo de la tija se representa por la masa  $m_N$ .

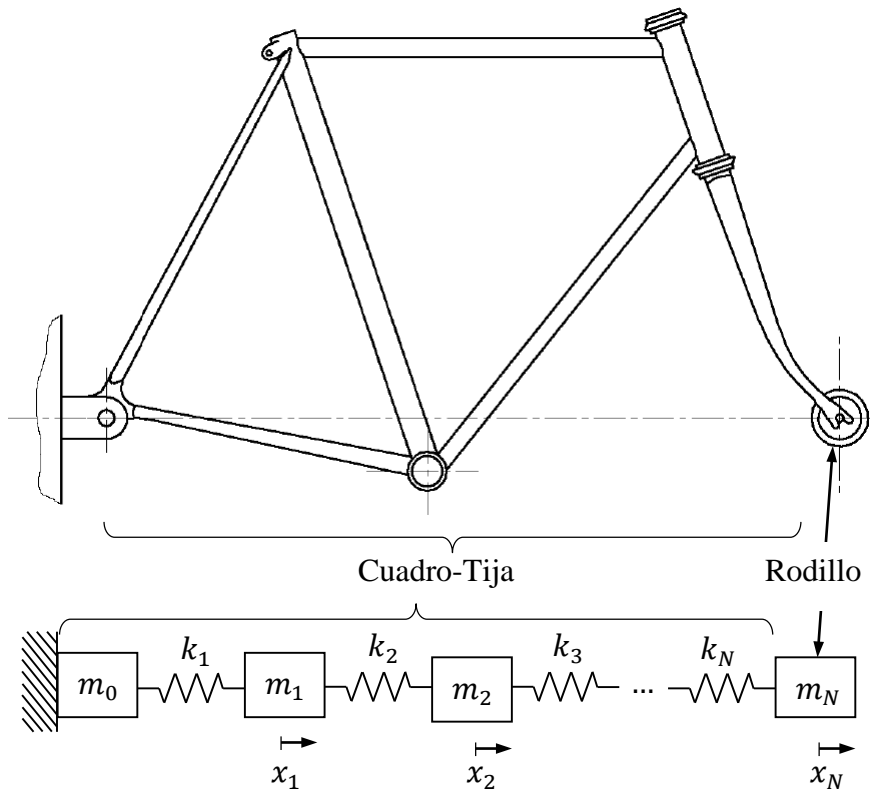


Figura 4.2-15: Modelo lineal de masas puntuales que representa al conjunto cuadro-tija.

A continuación se estudia la respuesta libre del modelo propuesto, para ello se plantea la matriz de inercia  $[M]$  y la matriz de rigidez  $[K]$ , que son:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_N \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & \dots & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & \dots & 0 \\ 0 & -k_3 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & k_{n-1} + k_n & -k_n \\ 0 & 0 & \dots & -k_n & k_n \end{bmatrix}$$

La respuesta libre del sistema se formula como:

$$[K]\{X\} + [M]\{\ddot{X}\} = \{0\}$$

Se propone una solución de la siguiente forma:

$$\{x(t)\} = \{X\}^{\lambda t}$$

El sistema plantea un problema de valores propios:

$$([K] + \lambda^2[M])\{X\}^{\lambda t} = \{0\}$$

Para obtener soluciones no triviales,  $\{X\} \neq 0$ , debe cumplirse la condición expuesta en la Ecuación (4.2-1), que se denomina ecuación característica,

$$\det([K] + \lambda^2[M]) = 0 \quad (4.2-1)$$

donde  $\lambda^2 = (i\omega)^2$

La Ecuación (4.2-1) se puede expresar nuevamente de la siguiente forma:

$$\det([K] - \omega^2[M]) = 0$$

Para aproximar el comportamiento dinámico del sistema de masas concentradas al del modelo obtenido mediante elementos finitos se imponen tres condiciones, que se describen a continuación.

### *Condición de frecuencias naturales*

Las  $N$  frecuencias naturales del sistema de masas concentradas, deben ser iguales a  $N$  frecuencias naturales obtenidas para el modelo de elementos finitos del conjunto de cuadro-tija. El conjunto real, se compone de cuerpos sólidos, que tienen una distribución continua de masa, por lo que tiene infinitos modos y frecuencias naturales. En el modelo de elementos finitos, se tiene una cantidad limitada de modos, pero para los fines prácticos se considera una escasa cantidad de estos, de los cuales se seleccionan las  $N$  frecuencias mediante un determinado criterio.

Expresando la ecuación característica de forma factorizada, se muestra claramente que los valores donde se anula, corresponden a los valores propios:

$$\det([K] - \omega^2[M]) = (\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2) \cdots (\omega^2 - \omega_N^2)$$

Se forma un sistema con las ecuaciones para cada frecuencia natural  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$

$$\left. \begin{aligned} \det([K] - \omega_1^2[M]) &= 0 \\ \det([K] - \omega_2^2[M]) &= 0 \\ &\vdots \\ \det([K] - \omega_N^2[M]) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Sistema de } N \text{ ecuaciones}$$

Este sistema de ecuaciones no es lineal, debido al producto de elementos tanto de las matrices de inercia como de rigidez, por lo que debe resolverse numéricamente.

### *Condición de rigidez*

Se impone que la rigidez en el extremo del modelo de masas concentradas sea equivalente a la rigidez estática del cuadro. La rigidez de  $N$  resortes conectados en serie es:

$$k_{equi} = \frac{1}{\sum_1^N \frac{1}{k_i}} \text{ con } k_i > 0$$

### Condición de masa

La suma de las masas del modelo concentrado es igual a la masa del conjunto cuadro- tija maciza.

$$m_{equi} = \sum_0^N m_i \text{ con } m_i > 0$$

En este caso  $m_0$  representa la masa asociada con el apoyo, por lo tanto no tiene ningún grado de libertad dinámico, de manera que no influye en la respuesta obtenida. Se considera que el resto de las masas  $m_1, m_2, \dots, m_N$ , cada una tiene un grado de libertad dinámico, que son los desplazamientos  $x_1, x_2, \dots, x_N$  respectivamente.

### Casos particulares del modelo general

A partir del modelo general de masas concentradas, se pueden proponer diversos modelos particulares según la cantidad de grados de libertad dinámicos considerados. La construcción del modelo requiere conocer el valor de los parámetros físicos del sistema, que son las masas y rigideces, para tal fin se utiliza la información obtenida mediante descomposición modal. Es decir para plantear un sistema de  $N$  grados de libertad, se seleccionan los  $N$  modos más relevantes obtenidos mediante la descomposición modal del modelo de elementos finitos.

Se tiene interés particular en modelar el comportamiento del grado de libertad  $x_N$ , que corresponde al desplazamiento del extremo de tija maciza o rodillo que se representa por el elemento de inercia  $m_N$ . Por lo tanto se deben seleccionar mediante algún criterio los modos naturales de vibración extraídos por el procedimiento de descomposición modal a la geometría modelada mediante elementos finitos. Generalmente, mediante el procedimiento de descomposición modal, se extrae una cantidad fija de modos ordenados de menor a mayor según su frecuencia. El factor de participación modal en el grado de libertad desplazamiento en la dirección 'x', que corresponde a la dirección de impacto, indica la predominancia de cada modo en este grado de libertad, por lo tanto se seleccionan  $N$  modos que tengan el factor de participación modal de mayor valor absoluto. Por otro lado luego de realizar la elección de los modos, para comprobar la calidad del modelo se tiene en cuenta la sumatoria de masa efectiva en dicho grado de libertad, que representa la masa activa en cada uno de los modos seleccionados. Mientras más alto sea la sumatoria de masa efectiva, respecto la masa total del modelo, mejor se representa el comportamiento dinámico del modelo continuo con un modelo de masas puntuales.

Todos los parámetros se extraen del análisis de descomposición modal, y junto con las restricciones de inercia y rigidez se forma un sistema de ecuaciones, que se resuelve para encontrar los parámetros físicos del sistema de masas concentradas. A continuación se desarrollan casos particulares del modelo general para 1 y 2 grados de libertad.

## Sistema de un grado de libertad N=1

En la Figura 4.2-16 se muestra un sistema de un grado de libertad dinámico, utilizado para aproximar el comportamiento del conjunto cuadro-tija maciza en el extremo que se representa mediante la masa  $m_1$ .

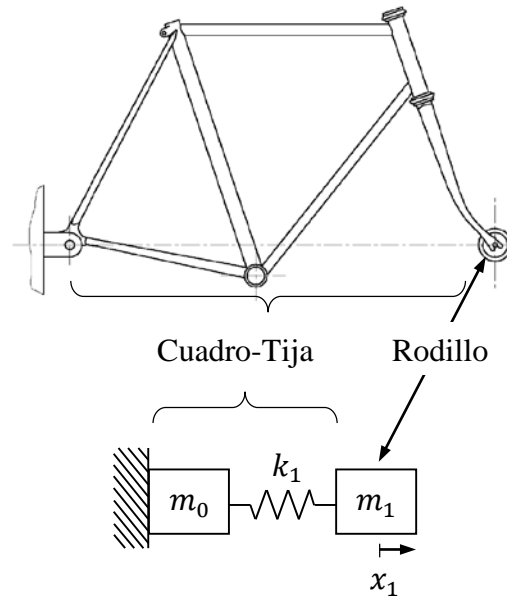


Figura 4.2-16: Modelo lineal de un grado de libertad dinámico del conjunto cuadro-tija.

Los parámetros físicos del sistema son:

$$[M] = [m_1]$$

$$[K] = [k_1]$$

Se proponen la condición de frecuencia que se menciona a continuación:

$$\det([K] - \omega^2[M]) = k_1 - \omega_1^2 m_1 = 0$$

La condición de masa se expresa como:

$$m_{equi} = m_0 + m_1$$

Finalmente se la condición de rigidez se indica como:

$$k_{equi} = \frac{1}{\frac{1}{k_1}} = k_1$$

Este es el modelo más simple, que tiene una única frecuencia natural  $\omega_1$  y la rigidez equivalente es  $k_1$ , a partir de ambos se obtiene la masa en el extremo  $m_1$ . El resto de la masa del modelo  $m_0$  se obtiene de la masa total y se supone que no tiene ningún grado de libertad porque tiene todos sus movimientos restringidos por el apoyo.

## Sistema de dos grados de libertad N=2

En la Figura 4.2-17 se muestra un sistema de dos grados de libertad dinámicos, utilizado para aproximar el comportamiento del conjunto cuadro-tija maciza en el extremo que se representa mediante la masa  $m_2$ .

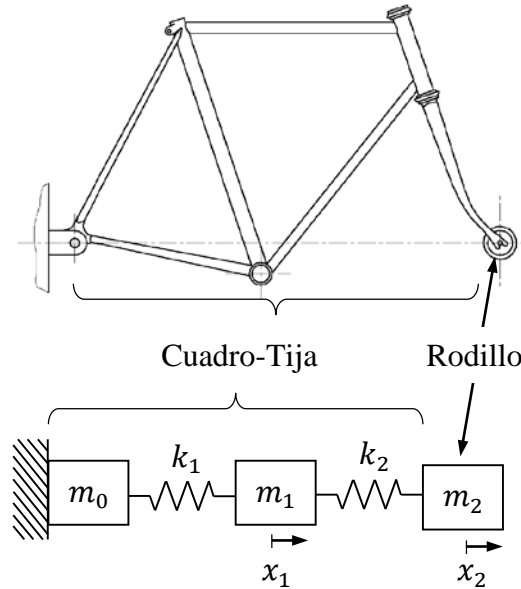


Figura 4.2-17: Modelo lineal de dos grados de libertad dinámicos del conjunto cuadro-tija.

Los parámetros físicos del sistema son:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

Se proponen dos condiciones de frecuencia, que se mencionan a continuación:

$$\det([K] - \omega_1^2[M]) = \omega_1^4[m_1m_2] + \omega_1^2[-k_2m_1 - (k_1 + k_2)m_2] + k_1k_2 = 0$$

$$\det([K] - \omega_2^2[M]) = \omega_2^4[m_1m_2] + \omega_2^2[-k_2m_1 - (k_1 + k_2)m_2] + k_1k_2 = 0$$

La condición de masa se expresa como:

$$m_{equi} = m_0 + m_1 + m_2$$

Finalmente se la condición de rigidez se indica como:

$$k_{equi} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$$

## 4.2.2 Modelo de contacto entre el percutor y el rodillo

Uno de los fenómenos más importantes involucrados en el ensayo de choque es el contacto que ocurre entre el percutor y rodillo o extremo de tija maciza. Por este motivo se pretende estudiar la interacción que ocurre entre ambos cuerpos durante el impacto. Para ello en esta sección del trabajo se enfoca en la representación del impacto planteado por el ensayo de choque, caída de una masa, se propone el modelo del choque, se definen las variables más relevantes, se analiza su comportamiento y la manera en que se relacionan entre sí.

En la Figura 4.2-18 se muestran los componentes reales que participan de choque y la manera en que se representa cada uno, exponiendo el estado libre o separado y el estado de contacto o acoplado. El percutor y el rodillo se modelan mediante cuerpos tridimensionales. Como el objetivo es estudiar las variables involucradas en el contacto, el cuadro se representa por un resorte de rigidez lineal, introducido al modelo para establecer un vínculo entre el rodillo y el entorno.

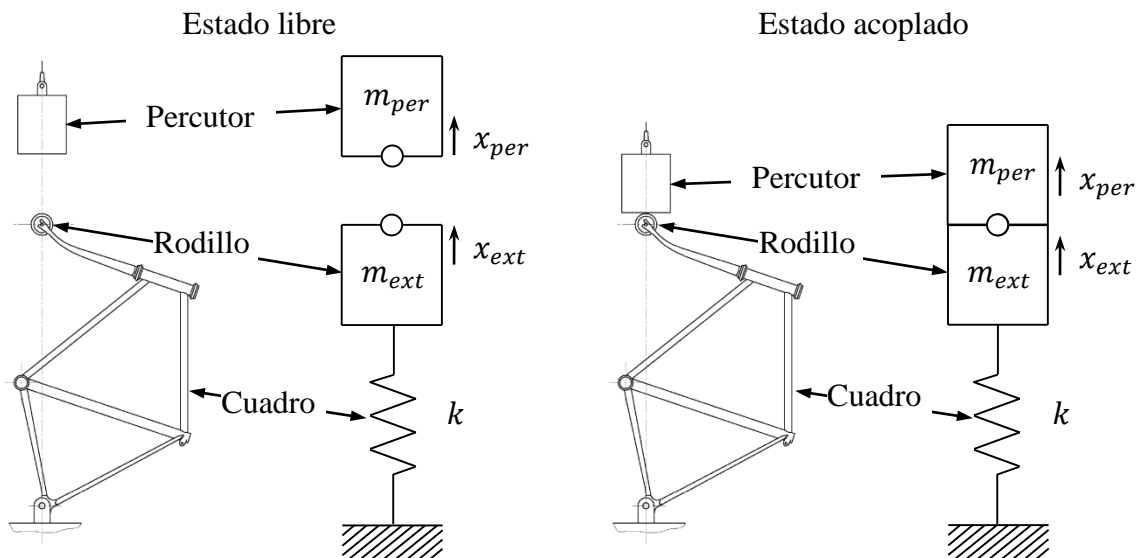


Figura 4.2-18: Modelo propuesto para estudiar la interacción de contacto.

La situación planteada anteriormente, se pretende implementar mediante el método de elementos finitos, por lo que requiere utilizar las herramientas del software disponibles para elaborar un modelo que se detalla a continuación.

### 4.2.2.1 Implementación mediante el método de elementos finitos

Los requerimientos establecidos por la Norma para los cuerpos involucrados en impacto que son el percutor y el rodillo, se describen detalladamente en las secciones 4.1.2 y 4.1.3, respectivamente. En la presente sección se realiza un modelo de elementos finitos, para centrar el estudio en el contacto, por lo que los cuerpos que impactan tienen una representación tridimensional, mientras que el conjunto cuadro-tija se representa empleando un conector equivalente.

A continuación se tratan los aspectos más relevantes del modelo, que se manejan mediante los módulos del software de elementos finitos.

## Partes

En el modelo de contacto participan las siguientes partes: el percutor y el rodillo. A continuación se describen las cuestiones requeridas para lograr una definición completa de la geometría de cada pieza y la manera en que se representan en el modelo de elementos finitos.

### Percutor

La definición geométrica del percutor depende de la densidad del material que lo constituye, para cumplir con el requerimiento de masa de la Norma.

Dado el diámetro de percutor exigido por la Norma, se puede obtener de un redondo comercial (19), (20), de 6", 152,4 [mm], que luego se mecanice para lograr un cilindro de 150 [mm].

Se consiguen comercialmente los redondos de estas dimensiones, en los siguientes tipos de acero:

- aceros al carbono SAE 1026, 1040 y 1045
- aceros de baja aleación SAE 4140 y 8620

Debido a que los cuerpos están sometidos al fenómeno de impacto se seleccionan aceros de baja aleación. Dentro de las opciones se tiene SAE 4140 que es un acero de medio carbono aleado con cromo-molibdeno y SAE 8620 que es un acero de bajo carbono aleado con cromo-níquel-molibdeno.

Se selecciona un acero SAE 8620, porque la presencia de níquel y molibdeno, causa un balance de las propiedades mecánicas que cobra especial relevancia en piezas de grandes dimensiones como el percutor, que tiene gran diámetro.

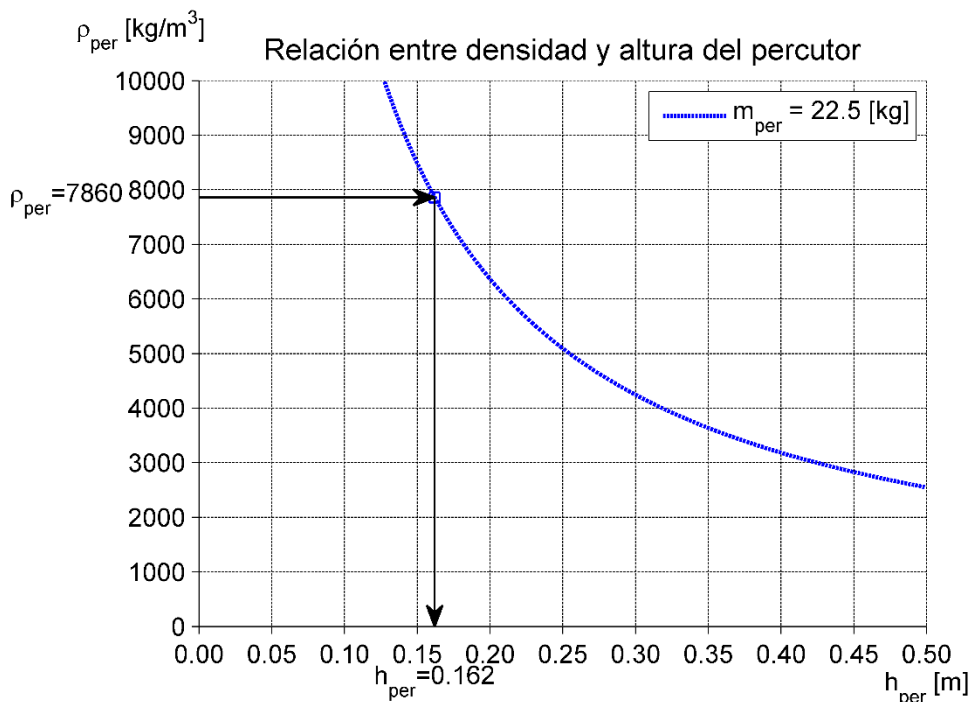


Figura 4.2-19: Relación seleccionada entre densidad y altura del percutor.



Una vez seleccionado el material del percutor, a partir de la densidad  $\rho_{per}$ , se obtiene la altura  $h_{per}$ , que se expone en la Figura 4.2-19, donde las abscisas son altura del percutor en [m] y las ordenadas son densidad del material en [kg/m<sup>3</sup>].

Se tienen los siguientes valores:

$$\rho_{per} = 7860 \left[ \frac{kg}{m^3} \right]$$

$$h_{per} = 0,162 [m]$$

La altura es el último parámetro requerido para construir el modelo geométrico del percutor. Finalmente en el software de elementos finitos se define un sólido deformable en tres dimensiones, construido a partir de la revolución, que se muestra en la Figura 4.2-20.

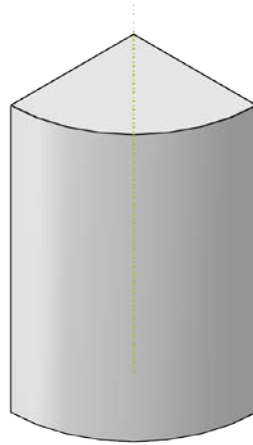


Figura 4.2-20: Representación geométrica de un cuarto del percutor.

### Rodillo

La definición geométrica del rodillo depende de la densidad del material que lo constituye, para cumplir con el requerimiento de masa de la Norma. Para construir el rodillo, se puede partir de un redondo comercial, (19), (20), de 3", 76.2 [mm], que luego se mecanice para lograr la forma exigida por la Norma. Se selecciona el mismo material que el percutor, es decir acero SAE 8620.

Una vez seleccionado material del rodillo, a partir de la densidad  $\rho_{rod}$ , se obtiene el semiancho  $a_{rod}$ , según la Figura 4.2-21. En el gráfico las abscisas son semiancho del rodillo en [m] y las ordenadas son densidad del material en [kg/m<sup>3</sup>].

Se tienen los siguientes valores:

$$\rho_{rod} = 7860 \left[ \frac{kg}{m^3} \right]$$

$$a_{rod} = 0,0281[m]$$

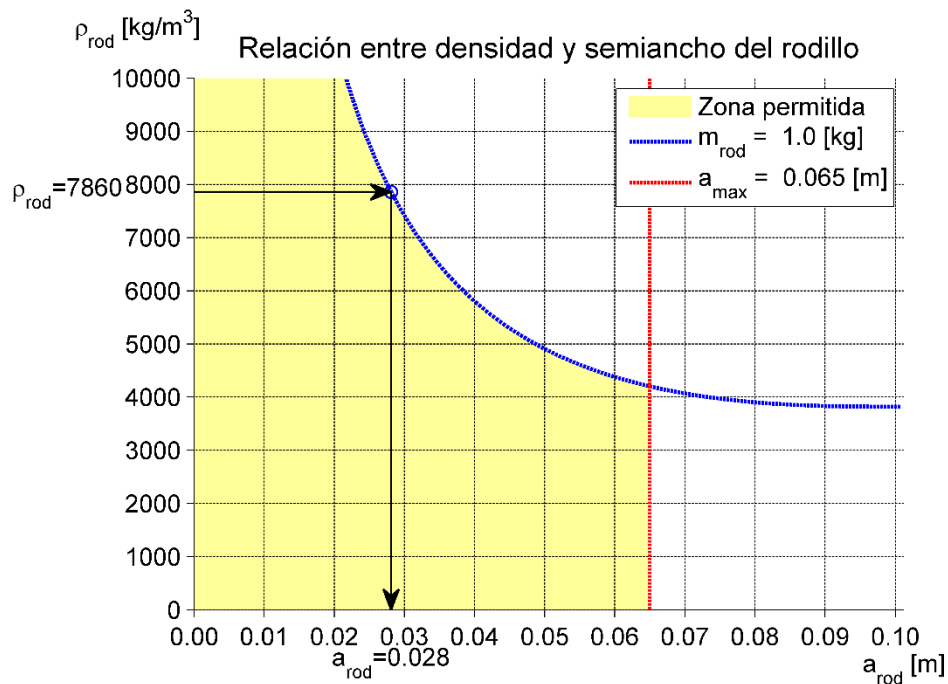


Figura 4.2-21: Relación seleccionada entre densidad y semiancho del rodillo.

El ancho es el último parámetro requerido para construir el modelo geométrico del rodillo. Finalmente en el software de elementos finitos se define un sólido deformable en tres dimensiones, construido a partir de la revolución, que se muestra en la Figura 4.2-22.

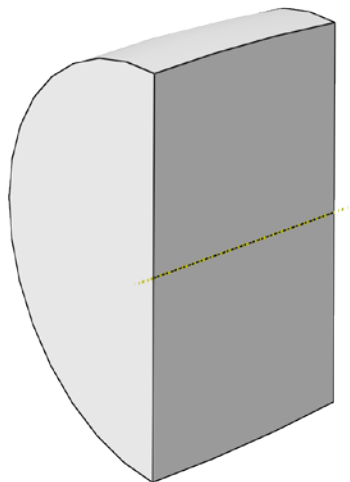


Figura 4.2-22: Representación geométrica de un cuarto de rodillo.

## Material

Si bien se selecciona el mismo material para el percutor y el rodillo, para hacer el modelo más general se definen dos materiales distintos para asignar a cada cuerpo. A cada material se incorporan los comportamientos de inercia, elasticidad y plasticidad, que se aplican dependiendo del tipo de análisis. A continuación se establece la manera en que se ingresan las propiedades del material para cada comportamiento.

## Inercia

Se define la densidad del material  $\rho$ .

## Elasticidad

Se establece el módulo de Young  $E$  y el coeficiente de Poisson  $\nu$ .

## Plasticidad

Se establece una relación entre la tensión verdadera  $\sigma$  y la deformación plástica verdadera  $\varepsilon^{pl}$ , que se manifiesta en una tabla de pares ordenados  $\sigma(\varepsilon^{pl})$ , que debe incluir el inicio de la fluencia  $\sigma(\varepsilon^{pl} = 0)$ .

Para conocer la curva de plastificación, se debe realizar un ensayo con la pieza real. Sin embargo para los fines de la simulación del ensayo de caída del percutor, se consideran suficientes los valores disponibles obtenidos de las propiedades del material (21) que son:

$\sigma_f$ : Tensión de fluencia

$\sigma_r$ : Tensión de rotura

$\varepsilon_r$ : Alargamiento de rotura

En forma general la tabla de plastificación del material se basa en dos puntos relevantes: la tensión de fluencia  $\sigma(0) = \sigma_f$  que corresponde a plastificación nula, y la tensión de rotura  $\sigma(\varepsilon_{max}) = \sigma_r$  que corresponde a la deformación plástica máxima  $\varepsilon_{max}$ . La definición de ambos puntos de la curva de plastificación se expone en la Tabla 4-9, donde se muestra el fenómeno del material, indicando la tensión verdadera  $\sigma$  y la deformación plástica verdadera  $\varepsilon_p$ .

Fenómeno	$\sigma$	$\varepsilon_p$
Fluencia	$\sigma_f$	0
Rotura	$\sigma_r$	$\varepsilon_{max} = \ln(1 + \varepsilon_r) - \sigma_r/E$

Tabla 4-9: Definición de la curva de plastificación para los cuerpos que impactan.

El software de elementos finitos, realiza interpolación lineal de la tabla de plastificación dentro del dominio dado, y supone que se mantiene constante fuera, asumiendo un comportamiento plástico perfecto, debido a que no se propone ningún mecanismo de falla a los materiales, porque se supone que durante el impacto los cuerpos no alcanzarán la rotura. Para verificar que no ocurra la falla del percutor y el rodillo, se observa que el valor de plastificación equivalente no supere el máximo permitido  $\varepsilon_{max}$ , que se obtiene de la tabla de propiedades mecánicas del material.

Las propiedades mecánicas de los materiales del rodillo y del percutor difieren debido a la diferencia de tamaño de las piezas.

En la Figura 4.2-23, se observan las curvas de plastificación, para ambos cuerpos que impactan. En el gráfico las abscisas son deformación plástica verdadera  $\varepsilon_p$ , adimensional y las ordenadas son tensión verdadera  $\sigma$ , medida en  $[Pa]$ .

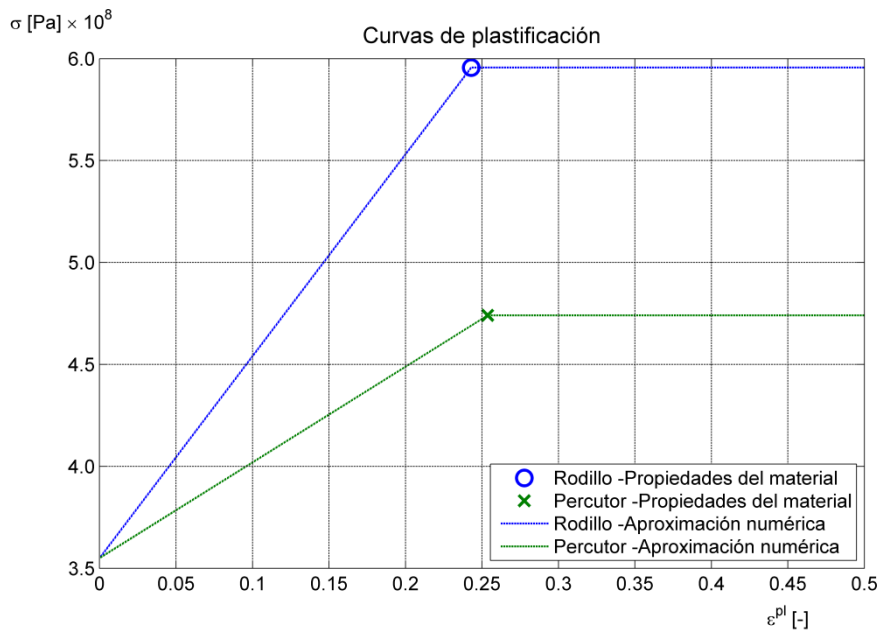


Figura 4.2-23: Curva de plastificación del percutor y del rodillo.

### Secciones

Se crearon dos secciones sólidas homogéneas, para cada uno de los materiales y se asignaron respectivamente a cada uno de los cuerpos.

### Ensamble

Se incluyen las siguientes instancias que participan del ensamble del ensayo:

- Percutor
- Rodillo
- Punto de referencia: Representa el apoyo que fija al cuadro y permite relacionar el impacto con el entorno.
- Conector axial: Representa el comportamiento del conjunto cuadro-tija. De esta manera vincula el punto de referencia y la cara exterior del rodillo, mediante una sección que tiene un comportamiento elástico lineal, con un valor de rigidez equivalente al cuadro  $K_T$ , que se obtiene de un análisis estático. Como se analiza una porción simétrica que representa un cuarto del ensayo, la rigidez utilizada en el modelo  $K_S$  es:

$$K_S = \frac{K_T}{4}$$

En la Figura 4.2-24 se muestran los cuerpos en la posición que tienen un instante antes del impacto. Se supone que inicialmente el percutor y el rodillo se encuentran perfectamente alineados, por lo tanto el contacto ocurre en el centro de ambos. El percutor es un cuerpo que presenta simetría axial, mientras que el rodillo tiene dos planos de simetría ZX e YZ, por lo tanto se simplifica el modelo aprovechando la simetría geométrica, dando las correspondientes

condiciones de apoyo y cargas. De esta manera se reduce la cantidad de grados de libertad, ahorrando esfuerzo computacional y tiempo de cálculo.

Las instancias que representan al rodillo y al percutor están separadas por una pequeña distancia  $sc = 0,0001$  [m], que se señala en la zona ampliada de la Figura 4.2-24. Se debe garantizar que cuando se mallan las superficies no ocurran interferencias entre los cuerpos antes de comenzar el análisis, para evitar inconvenientes en el algoritmo de contacto. En caso contrario se requiere establecer las condiciones de contacto iniciales, cuyo procedimiento resulta dificultoso.

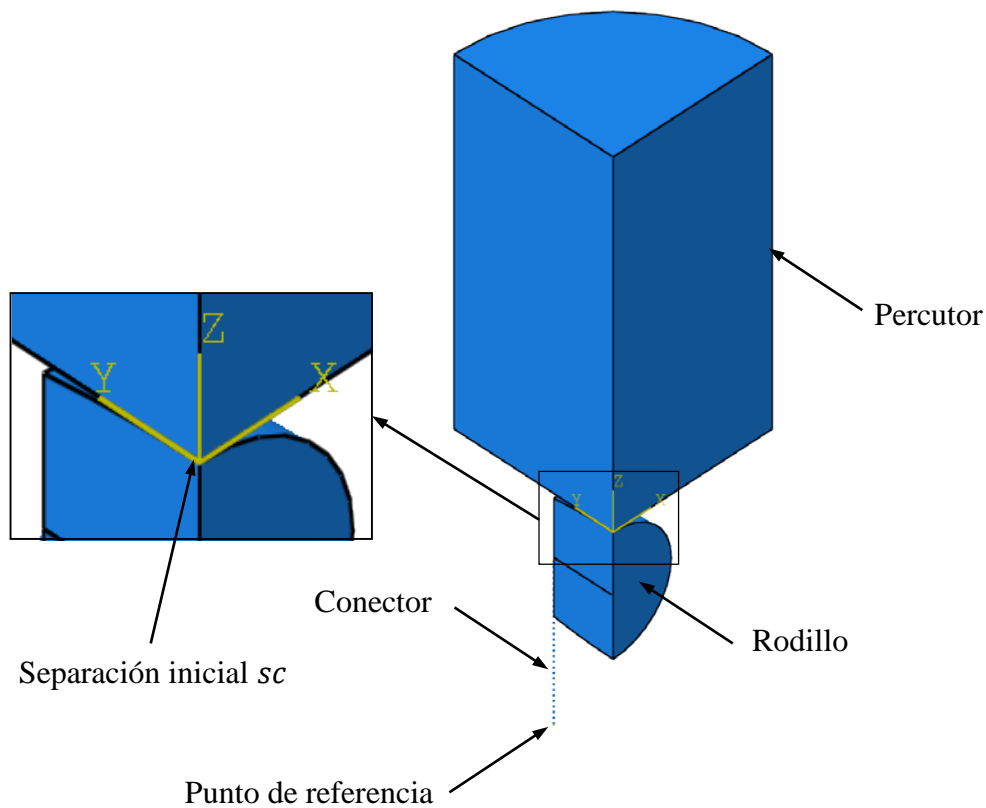


Figura 4.2-24: Instancias que participan en el ensamble del modelo de contacto.

### Condiciones de apoyo

Las condiciones de apoyo del modelo de elementos finitos, provienen de dos fuentes, la representación de condiciones de apoyo reales del ensayo y la representación de condiciones de apoyo debidas a la simetría del modelo.

Sobre los planos de simetría se restringe el desplazamiento perpendicular, y las rotaciones paralelas. Estas condiciones de apoyo se muestran en la Figura 4.2-25 con flechas de anaranjadas de punta simple y flechas de punta doble azul respectivamente.

El punto de referencia que representa el piso y tiene todos sus grados de libertad bloqueados.

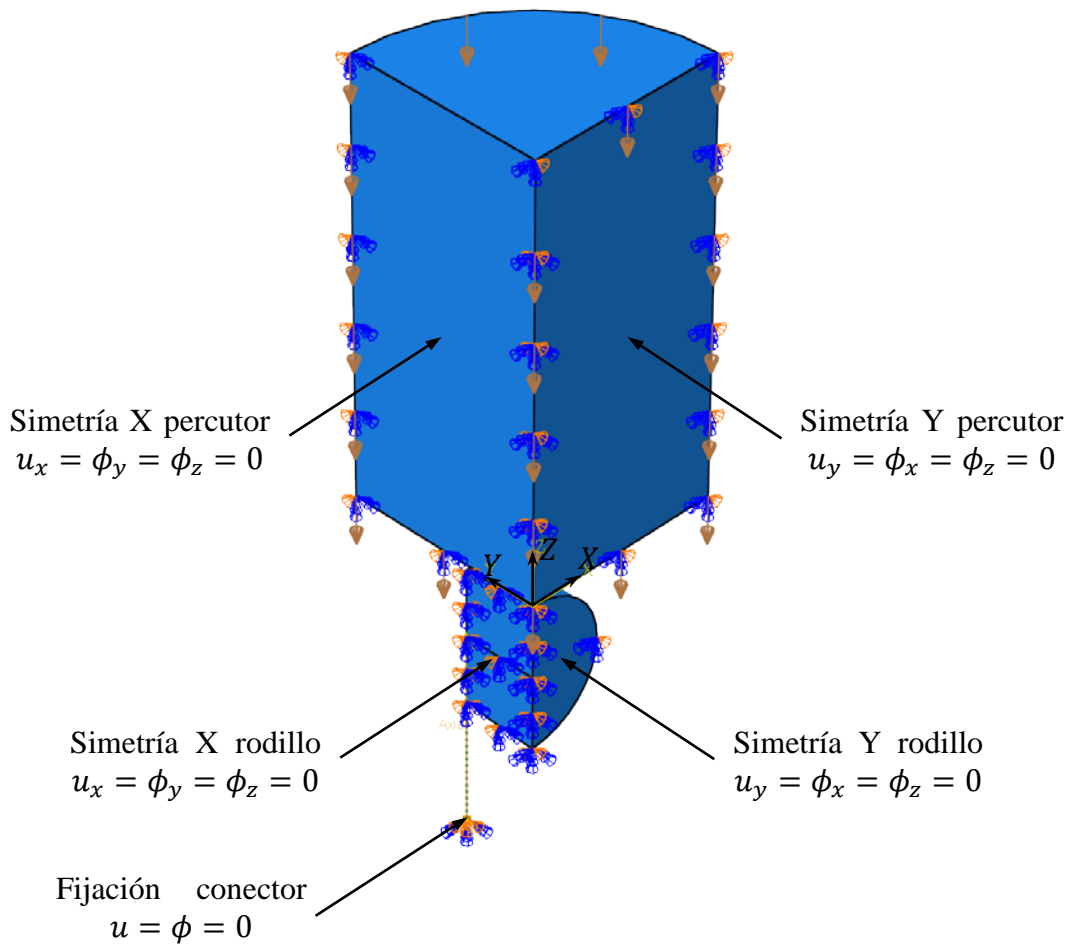


Figura 4.2-25: Condiciones de apoyo y cargas planteadas en el modelo de contacto.

### Restricciones

Debido a que en el modelo participan elementos continuos como los sólidos tridimensionales y estructurales como el conector axial, se requiere la aplicación de restricciones de acoplamiento basados en superficies, para vincular ambas partes.

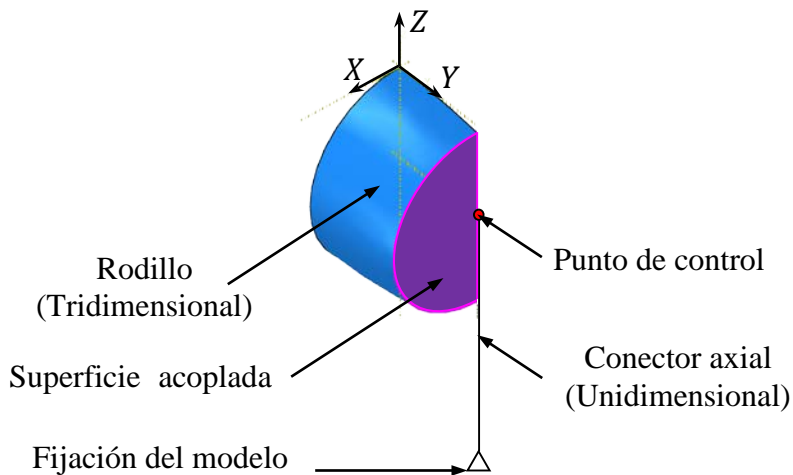


Figura 4.2-26: Restricciones de acoplamiento entre el percutor y el conector axial.

Se establece un acoplamiento cinemático entre un punto de control sobre el extremo del conector axial y la región de nodos ubicados sobre la superficie lateral del rodillo. Ambos se representan en color rojo y púrpura respectivamente, en la Figura 4.2-26.

### *Cargas*

El percutor experimenta una aceleración  $a$ , en dirección Z, en sentido negativo, cuya magnitud es la gravedad terrestre, que representa el peso del percutor y se muestra en la Figura 4.2-25 mediante los vectores color marrón.

$$a = -9,80665\checkmark \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

### *Campos predefinidos*

En el paso de análisis inicial se define un campo de velocidad  $v$ , en dirección Z, en sentido negativo, cuya magnitud es la velocidad de caída del percutor en el instante anterior al impacto.

$$v = -2,657\checkmark \left[ \frac{m}{s} \right]$$

### *Propiedades de interacción*

Al iniciar el análisis los cuerpos se encuentran a una pequeña distancia, para que no ocurran conflictos numéricos en el modelo. Mientras que el rodillo se encuentra en reposo, el percutor tiene una velocidad equivalente a la caída inicial y una aceleración dada por la gravedad, de manera que en los incrementos de tiempo sucesivos ocurre el inminente contacto entre ambos cuerpos. Para admitir este comportamiento en el modelo de elementos finitos se definen las propiedades de interacción, estableciendo los comportamientos en las direcciones tangencial y normal con respecto a las superficies de contacto, que se tratan a continuación.

#### **Comportamiento tangencial**

Se emplea una formulación de penalidad, direccionalmente isotrópica, donde se establece el coeficiente de fricción. El modelo permite manejar la tensión cortante para establecer o no límites, y controlar el deslizamiento relativo entre ambas superficies en contacto. Se establece el coeficiente de fricción  $\mu = 0,3$ , sin embargo no tiene demasiada relevancia en el modelo porque el interés del análisis radica sobre el comportamiento en dirección normal.

#### **Comportamiento normal**

Se emplea un modelo de presión de interferencia duro, pero las restricciones de contacto no se ejecutan estrictamente sino que se aproximan mediante el método de penalidad, y se permite la separación de las superficies luego del contacto, sin ningún modelo de adhesión.

Las propiedades de contacto, se aplican a la interacción de todas las superficies que puedan entrar en contacto durante el análisis, empleando una formulación maestra-esclava balanceada, que se aplica por defecto en el algoritmo explícito de contacto general.

### *Mallado*

Se siembran las aristas, con una cantidad fija de nodos, utilizando una distribución que varía linealmente a lo largo de la longitud. Los nodos se concentran en la zona de contacto, para

que el modelo tenga capacidad de detectar el comportamiento donde se esperan gradientes elevados de tensión y deformación. Por otro lado, esta concentración en la región de contacto provoca la distorsión en la forma de los elementos ubicados en los sitios alejados.

Luego de definir los nodos sobre las aristas, se genera una malla de elementos hexaedros mediante la técnica de barrido respetando los ejes de simetría de ambos cuerpos del modelo. Se seleccionan los elementos hexaedros respecto a los tetraedros, porque se recomiendan (6), para casos donde no hay una alta densidad en la malla, por lo que los resultados logrados mediante convergen más rápidamente y son menos sensibles a las distorsiones de forma del elemento.

Se revisa la biblioteca de elementos explícitos del software, ya que el análisis utiliza un procedimiento dinámico explícito. A la malla se asignan elementos denominados C3D8, donde 'C' indica análisis de tensión- desplazamientos continuo, '3D' modelado en el espacio y '8' señala la cantidad de nodos de cada elemento. Es decir que se utilizan hexaedros lineales de 8 nodos en el espacio. Se elige un elemento de primer orden porque resulta apropiado para problemas altamente no lineales como los que involucran contacto o deformaciones plásticas.

Se genera una malla de 6336 elementos para el percutor y 810 para el rodillo, que se exponen en la Figura 4.2-27. El modelo no tiene tamaño relativamente grande, de manera que no justifica el empleo de elementos con integración reducida, por lo tanto se utiliza la integración completa evitando los inconvenientes planteados en la integración reducida, y los correspondientes controles. Los materiales utilizados para modelar los cuerpos no tienen un coeficiente de Poisson elevado  $\nu = 0,3 < 0,5$  de manera que su comportamiento no es cercano a la incompresibilidad, por lo tanto no requieren aplicar elementos híbridos, sino que es suficiente utilizar elementos con la formulación regular de desplazamientos.

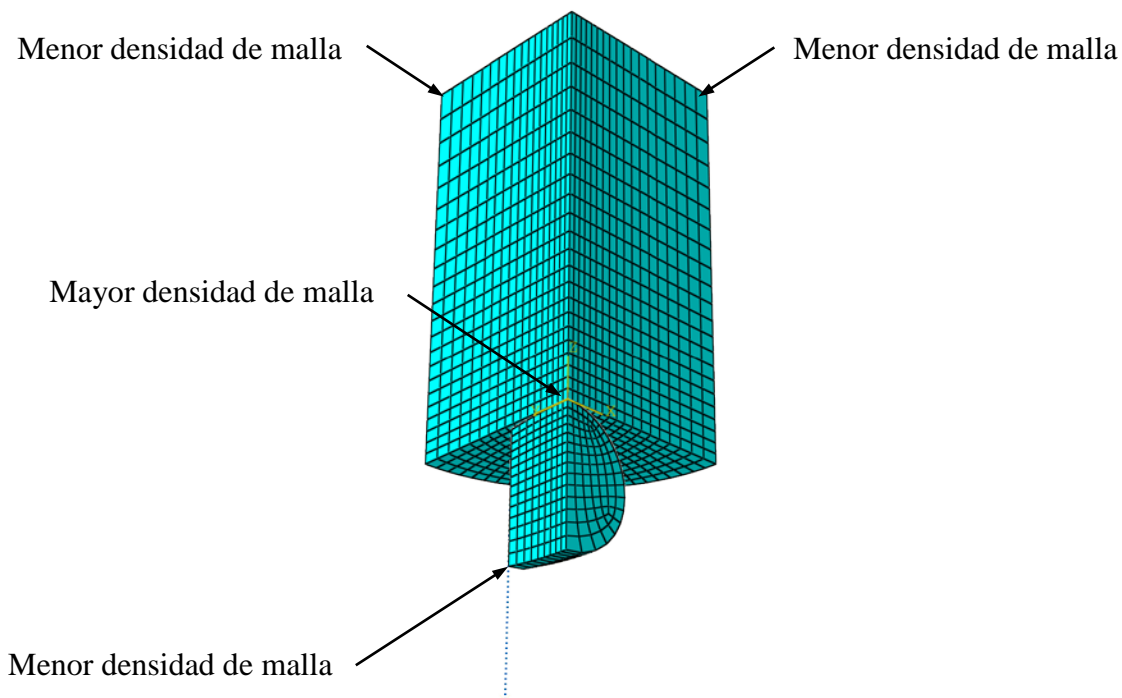


Figura 4.2-27: Malla de elementos hexaedros para modelar los cuerpos que impactan.



## 5 Análisis de componentes previo a las simulaciones numéricas

En este capítulo se desarrollan distintos análisis a los componentes involucrados en el ensayo de choque para obtener los parámetros que representan su participación en la simulación. Primero se trata el comportamiento del conjunto cuadro-tija en la configuración de ensayo establecido por la Norma. Luego se centra en estudiar la interacción de contacto ocurrida entre los cuerpos que participan del ensayo. Finalmente se estiman los parámetros de contacto, empleando modelos analíticos de la fuerza de contacto.

### 5.1 Análisis del comportamiento del cuadro-tija en la configuración de ensayo

En la presente sección se plantean una serie de análisis con el objetivo de obtener las propiedades representativas del conjunto, que permitan incorporarlo de manera más simplificada en la simulación del ensayo.

En la sección anterior se detallan los aspectos generales de dos modelos de elementos finitos del conjunto cuadro-tija: un modelo de vigas y un modelo mixto de cáscaras y vigas. Existen aspectos particulares de los modelos que dependen específicamente del análisis llevado a cabo, entre los que se destacan los pasos de análisis, las cargas, los requerimientos de salida, los conectores, las interacciones, etc. Estos aspectos particulares se tratan oportunamente cuando se desarrolla cada análisis.

Para validar los resultados numéricos obtenidos mediante la aplicación del método de elementos finitos, se analizan modelos simplificados que admiten resolución analítica o se comparan las aproximaciones logradas por los distintos modelos numéricos.

Se pretende estudiar el ensayo de choque, caída del percutor, que se debe representar de manera dinámica, pero se inicia desde un análisis estático, para que luego de sucesivas aproximaciones llegar a un modelo dinámico cercano a la situación física que se pretende estudiar. Cada modelo planteado tiene un objetivo y brinda determinada información.

Los análisis que se aplican al conjunto de cuadro-tija maciza, de manera general se clasifican como estáticos y dinámicos.

Los análisis estáticos tienen como objetivo obtener el valor de rigidez y exponen la distribución de energía elástica acumulada entre los componentes, que se relaciona con la contribución de cada uno al desplazamiento del rodillo, colocado en el extremo de la tija.

Los análisis dinámicos tienen por objetivo obtener las propiedades inerciales del conjunto cuadro-tija, para utilizar en modelos simplificados que simulen el ensayo real.

### 5.1.1 Análisis estático

Se toma el conjunto cuadro-tija o cuadro-horquilla en la configuración especificada por la Norma, y se coloca una carga estática donde impacta el percutor, para obtener un valor que represente la rigidez estática. Se describe detalladamente la situación planteada y se proponen dos maneras de resolverla. Finalmente se define un caso concreto, se aplican los métodos descritos y se obtienen los resultados, para poder ser contrastados.

El conjunto se representa mediante una estructura que tiene dos tipos de apoyos:

- Apoyo de atrás: Limita los desplazamientos vertical y horizontal.
- Apoyo de adelante: Limita el desplazamiento vertical.

Se propone una única fuerza exterior, que actúa en dirección horizontal, en sentido hacia atrás sobre el apoyo de adelante, cuya magnitud aumenta lentamente de 0 a  $P$ , para estudiar el efecto que provoca una carga estática, que tiene el mismo punto de aplicación, dirección y sentido que la carga dinámica que ocurre durante el ensayo, originada por el impacto del rodillo sobre el percutor.

La magnitud de la fuerza externa no es relevante ya que el problema planteado es lineal, siempre y cuando la carga sea pequeña. Por otra parte varía lentamente, por lo que su período es grande respecto al mayor período natural del conjunto cuadro-tija, entonces se desprecian los efectos de inercia y resulta válido realizar un el análisis estático.

En la Figura 5.1-1, se ilustra el modelo del conjunto cuadro-tija en el análisis estático, con la carga exterior y los apoyos.

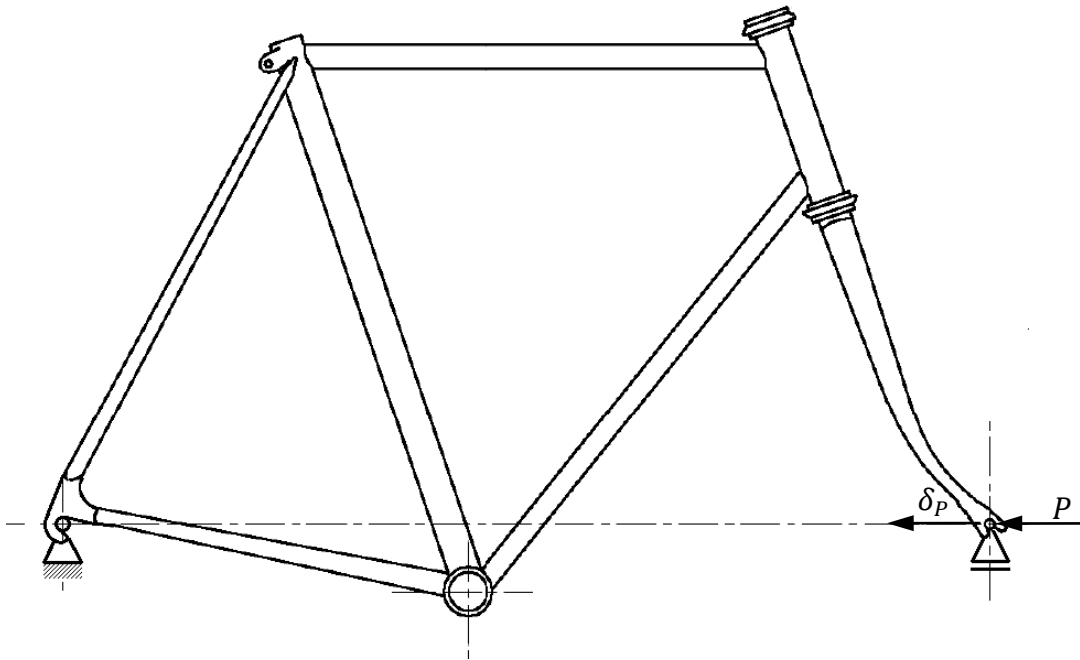


Figura 5.1-1: Análisis estático del modelo plano del cuadro.

Las reacciones desconocidas son:

- Fuerza horizontal en el apoyo de atrás.
- Fuerza vertical en el apoyo de atrás.
- Fuerza vertical en el apoyo de adelante.

Las ecuaciones que provee la estática en el plano son:

- Sumatoria de fuerzas horizontales.
- Sumatoria de fuerzas verticales.
- Sumatoria de momentos.

Existen diversas maneras de resolver el problema estático planteado. A continuación se detalla la resolución por el método de las fuerzas y por el método de elementos finitos.

### 5.1.1.1 Resolución por el método de las fuerzas

La aplicación del método de las fuerzas, además de permitir obtener la rigidez en el extremo, brinda información respecto a la distribución de energía de deformación elástica almacenada en cada parte del cuadro, que se relaciona con la contribución de cada componente al desplazamiento en el extremo.

La cantidad de reacciones incógnitas que presenta el problema es igual a la cantidad de ecuaciones que provee la estática en el plano, por lo tanto la estructura, no presenta hiperestaticidad externa. Es decir que las reacciones de apoyo se pueden determinar conociendo la geometría y cargas externas de la estructura.

La estructura presenta hiperestaticidad interna, por lo tanto se deben cortar algunos tubos para obtener una estructura isostática, que se denomina isostática fundamental.

En el pórtico se deben cortar dos vigas para obtener una estructura isostática. Si bien existen varias posibilidades de realizar los cortes, no cualquier par de cortes permiten cumplir el objetivo. Dentro del conjunto de cortes correctos posibles, en todos se obtiene el mismo resultado, las diferencias radican en la simplicidad de resolver la estructura isostática resultante.

La Tabla 5-1 muestra los cortes posibles, que transforman la estructura hiperestática interna en isostática:

Propuesta	Corte 1	Corte 2
1	Tubo soporte de sillín	Tubo de sillín
2	Tubo de sillín	Tubo superior
3	Tubo de sillín	Tubo inferior
4	Tubo de sillín	Tubo soporte de cadena
5	Tubo de sillín	Tubo de dirección
6	Tubo soporte de sillín	Tubo inferior
7	Tubo soporte de cadena	Tubo superior
8	Tubo soporte de cadena	Tubo inferior
9	Tubo soporte de sillín	Tubo de dirección
10	Tubo soporte de cadena	Tubo de dirección

Tabla 5-1: Posibilidades de cortes que transforman la estructura hiperestática en isostática.

Luego de observar cuidadosamente, la estructura planteada se decide realizar la propuesta N° 2, que consiste en cortar los siguientes tubos:

- Tubo de sillín (Cerca de la intersección con el tubo superior).
- Tubo superior (Cerca de la intersección con tubo de sillín).

A cada componente lo consideramos como una viga en el plano, por lo tanto cada uno tiene tres solicitaciones.

- Esfuerzo axial.
- Esfuerzo de corte.
- Momento flector.

De esta manera por cada corte realizado se tienen tres incógnitas: por lo tanto se consigue un sistema hiperestático de grado 6. De esta manera se formula un sistema de 6 ecuaciones con 6 incógnitas, que representan los esfuerzos de las vigas. Las reacciones de apoyo se obtienen del isostático fundamental, debido a que dependen de las cargas externas. Se plantean los siguientes estados de cargas a la estructura:

- Estado 0: Considerando únicamente a la carga externa.
- Estados 1, ..., 6: Proponiendo cargas unitarias donde se realizaron los cortes.

Se logra el siguiente sistema de ecuaciones de compatibilidad:

$$\begin{aligned}
 \delta_{10} + X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + X_4\delta_{14} + X_5\delta_{15} + X_6\delta_{16} &= 0 \\
 \delta_{20} + X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + X_4\delta_{24} + X_5\delta_{25} + X_6\delta_{26} &= 0 \\
 \delta_{30} + X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + X_4\delta_{34} + X_5\delta_{35} + X_6\delta_{36} &= 0 \\
 \delta_{40} + X_1\delta_{41} + X_2\delta_{42} + X_3\delta_{43} + X_4\delta_{44} + X_5\delta_{45} + X_6\delta_{46} &= 0 \\
 \delta_{50} + X_1\delta_{51} + X_2\delta_{52} + X_3\delta_{53} + X_4\delta_{54} + X_5\delta_{55} + X_6\delta_{56} &= 0 \\
 \delta_{60} + X_1\delta_{61} + X_2\delta_{62} + X_3\delta_{63} + X_4\delta_{64} + X_5\delta_{65} + X_6\delta_{66} &= 0
 \end{aligned}$$

Expresado de manera matricial se tiene:

$$\begin{bmatrix}
 \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \delta_{14} & \delta_{15} & \delta_{16} \\
 \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \delta_{24} & \delta_{25} & \delta_{26} \\
 \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} & \delta_{34} & \delta_{35} & \delta_{36} \\
 \delta_{41} & \delta_{42} & \delta_{43} & \delta_{44} & \delta_{45} & \delta_{46} \\
 \delta_{51} & \delta_{52} & \delta_{53} & \delta_{54} & \delta_{55} & \delta_{56} \\
 \delta_{61} & \delta_{62} & \delta_{63} & \delta_{64} & \delta_{65} & \delta_{66}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 X_1 \\
 X_2 \\
 X_3 \\
 X_4 \\
 X_5 \\
 X_6
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 -\delta_{10} \\
 -\delta_{20} \\
 -\delta_{30} \\
 -\delta_{40} \\
 -\delta_{50} \\
 -\delta_{60}
 \end{bmatrix}$$

Expresando en notación compacta se tiene:

$$[\delta][X] = [-\delta_0]$$

Resolviendo el sistema se obtienen las solicitaciones desconocidas. Se requiere que el determinante no sea nulo, para que la matriz no sea singular (los elementos de la diagonal principal todos positivos). Se invierte la matriz de  $\delta$  y posteriormente premultiplica a la matriz de resultados para obtener las solicitaciones desconocidas.

$$[\delta]^{-1}[\delta][X] = [\delta]^{-1}[-\delta_0]$$

$$[I][X] = [\delta]^{-1}[-\delta_0]$$

$$[X] = [\delta]^{-1}[-\delta_0]$$

donde:

$[\delta]$  es la matriz de flexibilidad del sistema

$[X]$  es el vector de solicitaciones

$[I]$  es la matriz identidad.

Las solicitaciones de las vigas se expresan como con una combinación lineal de los estados propuestos. Los componentes de la matriz de flexibilidad se obtienen del producto de las solicitaciones.

Planteando el principio de trabajos virtuales, se plantea el trabajo virtual externo  $TVE$ , realizado por las cargas externas que varían desde un valor nulo hasta su valor final  $F_e$  como:

$$TVE = \frac{1}{2} \sum F_e \delta_e$$

De todas las fuerzas exteriores que actúan en la estructura, las reacciones en apoyos no tienen desplazamiento, por lo tanto la única carga exterior cuyo punto de aplicación tiene desplazamiento  $\delta_P$ , es la fuerza sobre el apoyo delantero  $P$ , por lo tanto el  $TVE$  es:

$$TVE = \frac{1}{2} P \cdot \delta_P$$

El trabajo virtual interno  $TVI$  es:

$$TVI = \frac{1}{2} \int_{est} N \varepsilon + \frac{1}{2} \int_{est} M \chi + \frac{1}{2} \int_{est} Q \gamma$$

donde:

$\varepsilon$  es el alargamiento específico

$\chi$  es la curvatura de flexión

$\gamma$  es la distorsión angular

$N$  es el esfuerzo normal

$M$  es el momento flector

$Q$  es el esfuerzo cortante

Si las cargas externas se aplican lentamente, sobre un sistema lineal, el principio de trabajos virtuales establece la siguiente igualdad:

$$TVI = TVE$$

$$\frac{1}{2} P \cdot \delta_P = \frac{1}{2} \int_{est} N \varepsilon + \frac{1}{2} \int_{est} M \chi + \frac{1}{2} \int_{est} Q \gamma$$

De esta forma se conoce el desplazamiento provocado por la carga estática aplicada, y como contribuyen las diversas partes del cuadro con sus deformaciones.

La integral definida en el trabajo virtual interno, se efectúa sobre el conjunto cuadro-tija completo, que en este caso se considera formado por elementos unidimensionales, y las propiedades se expresan en función de la longitud y se integran en esta dirección.

Las ecuaciones constitutivas relacionan las tensiones con las deformaciones, y para pequeñas deformaciones se suponen lineales, y se expresan como:

$$\varepsilon = \frac{N}{AE}$$

$$\chi = \frac{M}{IE}$$

$$\gamma = \frac{Q}{A_c G}$$

donde:

$G$  es el modulo de elasticidad transversal

$E$  es el módulo de elasticidad longitudinal

$A$  es el área de la sección transversal

$I$  es el momento de inercia de segundo orden

$A_c$  es el área de corte

Las deformaciones dentro de las integrales de  $TVI$  se obtienen a partir de las sollicitaciones, las propiedades geométricas y el material. Por lo tanto quedan en función del cuadrado de las sollicitaciones, es decir que no son negativas.

$$P \cdot \delta_p = \int_{est} \frac{N^2}{AE} + \int_{est} \frac{M^2}{IE} + \int_{est} \frac{Q^2}{A_c G}$$

Cada una de las deformaciones interna de la estructura contribuye con una determinada fracción al desplazamiento del extremo.

Posteriormente se verifica el equilibrio de fuerzas y momentos en los nodos, que resulta de las contribuciones de los apoyos y las vigas que se conectan a cada nudo. La distribución de esfuerzos depende de la geometría de la estructura, las secciones y el material de la viga. De esta manera se pueden proponer distintos diseños y ver la influencia en el desplazamiento del extremo. Se entiende por diseño a un conjunto de parámetros entre los que se mencionan:

- Ubicación de los nodos extremos de cada tubo.
- Propiedades de la sección transversal de cada tubo.
- Propiedades del material de cada tubo.

Se debería encontrar la sección que tiene la máxima sollicitación de cada tramo, adoptar un criterio de tensión combinada, para obtener una tensión equivalente que se compare con la tensión de fluencia, y verificar si ocurren deformaciones plásticas. Si esto sucede el principio de trabajos virtuales no se puede aplicar, porque incumple sus hipótesis. Sin embargo realizado este análisis se obtienen las secciones que experimenten deformaciones plásticas, bajo una carga estática. Esto orienta a un redimensionamiento, modificando el diseño para minimizar las deformaciones permanentes en las vigas que se manifiestan en el desplazamiento permanente del extremo delantero que mide el ensayo.

Si las cargas externas aplicadas sobre la estructura, tienen una elevada variación respecto al período del menor modo de vibración del conjunto, la hipótesis planteada por el principio de trabajos virtuales que iguala los trabajos interno y externo no se cumple porque adquiere importancia la energía cinética, debido al movimiento de la masa asociada a la estructura.

La resolución del problema estático mediante el método de las fuerzas es una manera de obtener la rigidez horizontal en el extremo delantero del conjunto, para pequeñas deformaciones cuando las cargas aplicadas no modifican significativamente la configuración geométrica de la estructura no cargada, ni se alcanza la fluencia en ninguna de las regiones del cuadro.

#### *5.1.1.2 Resolución por el método de elementos finitos*

El análisis estático, que se resuelve analíticamente mediante el método de las fuerzas en la sección anterior, ahora se implementa aplicando el método de elementos finitos. Para poder llevar a cabo este análisis se utiliza un modelo cuyos aspectos generales se describen más atrás, en la sección 4.2.1.1 y se requieren definir aspectos particulares para el análisis estático, como los pasos de análisis, las cargas, los tipos de elementos y los requerimientos de salida que se tratan a continuación.

#### *Pasos de análisis*

El análisis estático de elementos finitos consiste en los siguientes pasos:

- Paso inicial: Con la geometría definida, se establecen las condiciones de contorno.
- Procedimiento estático general: La magnitud de la carga propuesta se aplica en incrementos desde cero hasta su valor final, obteniendo sucesivos estados de equilibrio. Este procedimiento de análisis es uno de los más básicos, aplicando el método de la rigidez, que implica la resolución de un sistema de ecuaciones, para lo cual se emplean métodos iterativos, si se presentan no linealidades. El algoritmo calcula la matriz de rigidez del sistema que debe ser positiva, por lo tanto no admite fenómenos de inestabilidades como el pandeo, para cuyo caso se requieren otros tipos de pasos de análisis que emplean distintos algoritmos.

#### *Cargas*

La única carga externa aplicada es una fuerza concentrada sobre el extremo delantero del cuadro, en dirección 'x', en sentido hacia atrás.

### *Tipos de elementos*

La geometría del cuadro se modela mediante elementos de vigas tridimensionales, que quedan definidos por dos nodos extremos establecidos durante el proceso de mallado de la estructura. En el análisis estático realizado se utilizaron dos tipos de elementos, que se denominan B33 y B31; ambos se describen a continuación.

#### **Elemento B33**

Se trata de un elemento de viga tridimensional, de formulación cúbica, que emplea las ecuaciones de Euler-Bernoulli, donde las secciones transversales permanecen perpendiculares al eje de la viga. Las restricciones de corte se cumplen trivialmente, por lo tanto no se considera la deformación por corte. Esta formulación se denomina cúbica, porque integra rotaciones de sección exactamente cuadráticas, para obtener los desplazamientos transversales cúbicos de las secciones. Se recomienda aplicar cuando la dimensión de la sección transversal no supera 1/15 de la longitud axial típica de la viga, (5).

#### **Elemento B31**

Se trata de un elemento de viga tridimensional, cuya formulación de corte flexible, emplea las ecuaciones de Timoshenko, donde considera además de las rotaciones por flexión, las distorsiones provocadas por el efecto de corte. Esta formulación requiere estimar el área de corte de la sección. Se recomienda aplicar cuando la dimensión de la sección transversal no supera 1/8 de la longitud axial típica de la viga, (5).

### *Requerimientos de salida*

Los resultados solicitados del análisis estático mediante elementos finitos son:

- $\delta_p$  [m]: El desplazamiento del extremo de adelante en la dirección 'x'.
- $E_E$  [J]: La energía de deformación elástica acumulada en cada componente.

#### **5.1.1.3 Casos planteados**

En base a la revisión de información técnica provista por los fabricantes de tubos (22) y (23) se proponen los componentes para conformar el cuadro, a modo ilustrativo del análisis estático. Se trata de vigas rectas, de sección constante a lo largo de su longitud, que se consideran de manera genérica como perfiles anulares definidos mediante dos parámetros geométricos, el diámetro  $d$  y el espesor  $t$ . Una situación particular ocurre cuando el radio es igual al espesor en cuyo caso se tiene una sección circular maciza. Este tipo de sección se emplea para representar la tija maciza mencionada en la Norma.

En la Figura 5.1-2 se detallan los parámetros geométricos que definen los perfiles anular y circular que se encuentran en el modelo del conjunto cuadro-tija.



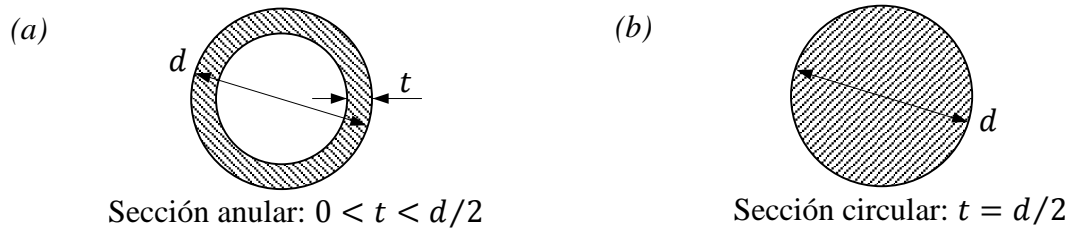


Figura 5.1-2: Esquema de las secciones transversales empleadas para el modelo del cuadro. (a) Sección anular; (b) Sección circular.

En la Tabla 5-2, se muestran los parámetros geométricos para definir el perfil, el material con que están constituidos y si el componente participa del modelo plano, o tiene representación únicamente en un modelo tridimensional.

Componente del modelo	Perfil		Material	Modelo plano
	$d$ [mm]	$t$ [mm]		
Eje de extremo	50,0	25,0	Acero	✓
Eje de dirección	30,0	15,0	Acero	✓
Tubo de dirección	40,0	7,0	Aluminio	✓
Tubo superior	31,8	4,0	Aluminio	✓
Tubo inferior	40,0	4,0	Aluminio	✓
Tubo de sillín	31,8	4,6	Aluminio	✓
Soportes de sillín	18,0	2,0	Aluminio	✓
Soportes de cadena	18,0	2,0	Aluminio	✓
Unión sillín	7,0	1,0	Aluminio	✗
Unión cadena	7,0	1,0	Aluminio	✗
Tubo pedalier	20,0	3,2	Aluminio	✗

Tabla 5-2: Secciones utilizadas en el modelo de vigas del cuadro.

En el análisis estático, se requiere establecer un comportamiento elástico del material, que se define mediante el módulo de elasticidad y el módulo de Poisson. La densidad no participa del análisis estático, pero se considera para obtener información adicional respecto a la distribución de masa del modelo. Se establecen los valores estimados para los parámetros plásticos de los materiales, aunque estos no intervienen en el análisis estático. En la Tabla 5-3, se muestran las propiedades del acero y el aluminio que constituyen el cuadro y la tija respectivamente.

Material	Acero	Aluminio
Densidad [ $kg/m^3$ ]	7860	2680
Módulo de elasticidad [ $GPa$ ]	210	70
Módulo de Poisson [-]	0,30	0,33
Límite de elasticidad [ $MPa$ ]	355	241
Límite de rotura [ $Mpa$ ]	601	290
Deformación máxima [-]	0.278	0.078

Tabla 5-3: Propiedades de los materiales utilizados en los modelos de cuadro y la tija.

Generalmente en la fabricación de cuadros se emplean los siguientes tipos de aluminio:

- AISI-SAE 6061, que es una aleación de aluminio forjable, que contiene magnesio y silicio.
- AISI-SAE 7075, que es una aleación de aluminio forjable, que contiene cinc, magnesio y cobre.

En ambos materiales se puede realizar un tratamiento térmico en solución y envejecido artificial, que se denomina (-T6), para obtener buenas propiedades mecánicas, (24). En la Tabla 5-3 se seleccionaron los valores mínimos entre ambos, para admitir la posibilidad de que el cuadro se realice con cualquiera de los dos materiales.

La geometría de cada componente del modelo se muestra en la Tabla 5-4, donde se detalla el área de la sección transversal  $A$ , en  $[m^2]$ , el área de corte  $A_c$ , en  $[m^2]$ , la inercia  $I$ , en  $[m^4]$ , y la longitud  $L$ , en  $[m]$ .

Parte del cuadro	Geometría			
	$A [m^2]$	$A_c [m^2]$	$I [m^4]$	$L [m]$
<b>Eje de tija</b>	1,963E-03	1,748E-03	4,909E-04	0,4547
<b>Eje de dirección</b>	7,069E-04	6,291E-04	1,767E-04	0,1100
<b>Tubo dirección</b>	4,013E-04	2,127E-04	1,003E-04	0,1100
<b>Tubo superior</b>	1,872E-04	9,924E-05	4,681E-05	0,5556
<b>Tubo inferior</b>	2,388E-04	1,265E-04	5,969E-05	0,6514
<b>Tubo de sillín</b>	2,132E-04	1,130E-04	5,329E-05	0,3900
<b>Soporte sillín</b>	6,833E-05	3,621E-05	1,708E-05	0,4583
<b>Soporte cadena</b>	5,149E-05	2,729E-05	1,287E-05	0,4250
<b>Unión sillín</b>	4,084E-05	2,165E-05	1,021E-05	0,0443
<b>Unión cadena</b>	4,084E-05	2,165E-05	1,021E-05	0,0585
<b>Tubo pedalier</b>	2,388E-04	1,265E-04	5,969E-05	0,0700

Tabla 5-4: Propiedades geométricas de las vigas que componen el modelo.

El área de corte  $A_c$ , se obtiene de la siguiente manera:

$$A_c = kA$$

donde:

$k$  es el factor de corte

$A$  es el área de la sección transversal

Existen diversas propuestas para el valor de  $k$ , en este trabajo se adopta la estimación realizada por Cowper, (25), que también se utiliza en el software de elementos finitos, y se muestra en la Tabla 5-5 para cada tipo de perfil que participa del modelo.

Perfil de la sección	$k [-]$
<b>Anular</b>	0,52
<b>Circular</b>	0,89

Tabla 5-5: Factor de corte estimado por Cowper para las vigas anulares y circulares.

Se resuelve la situación estática planteada para el conjunto cuadro-tija maciza, empleando dos métodos de solución. El método de las fuerzas, que se aplica utilizando una planilla de cálculo y el método de la rigidez que se aplica mediante el software de elementos finitos Abaqus.

Dentro del método de las fuerzas, se usa un modelo de vigas plano, en un caso despreciando la deformación por corte, según la teoría de Euler, y posteriormente considerando la deformación por corte, que corresponde a la teoría de Timoshenko. Por otra parte se aplica el método de elementos finitos, sobre un modelo tridimensional de vigas, que emplea los dos tipos de formulaciones y un modelo de superficies convencionales.

En la Tabla 5-6 se exponen los valores de energía de deformación elástica acumulada final  $E_E$ , medida en [J], para cada componente y para la totalidad del modelo. Además se muestran los valores de desplazamiento en el extremo de la tija maciza  $\delta_P$ , medido en [m], y la rigidez de conjunto cuadro-tija  $k$ , medida en [N/m], para una carga en el extremo cuya magnitud es  $P = 1[N]$ .

Componente		Método de las fuerzas		Método de elementos finitos		
		Modelo de vigas		Modelo de vigas		Modelo de superficies
		Euler	Timoshenko	Euler	Timoshenko	
$E_E$ [J]	Eje Extremo	2,02E-07	2,03E-07	2,02E-07	2,04E-07	2,04E-07
	Eje Dirección	1,51E-07	1,53E-07	1,97E-07	1,62E-07	2,45E-08
	Tubo Dirección	2,07E-07	2,34E-07	1,57E-07	2,67E-07	9,70E-08
	Tubo Superior	1,23E-06	1,23E-06	1,23E-06	1,25E-06	1,09E-06
	Tubo Inferior	2,07E-06	2,08E-06	2,07E-06	2,10E-06	2,09E-06
	Tubo Sillín	2,86E-07	2,90E-07	2,92E-07	2,91E-07	2,30E-07
	Soporte Sillín	4,14E-09	4,14E-09	3,94E-09	4,23E-09	5,96E-09
	Soporte Cadena	4,07E-08	4,07E-08	4,08E-08	4,09E-08	4,63E-08
	Unión Sillín	0,00E+00	0,00E+00	2,64E-13	3,52E-13	2,39E-11
	Unión Cadena	0,00E+00	0,00E+00	4,56E-12	4,34E-12	1,72E-10
	Tubo Pedalier	0,00E+00	0,00E+00	3,91E-10	1,93E-09	5,46E-08
	TOTAL	4,18E-06	4,24E-06	4,19E-06	4,33E-06	3,85E-06
$\delta_P$ [m]		8,37E-06	8,47E-06	8,38E-06	8,66E-06	7,70E-06
K [N/m]		119541	118032	119328	115467	129910

Tabla 5-6: Energía de deformación elástica, desplazamiento en el extremo y rigidez del conjunto obtenidos mediante el método de las fuerzas y el método de elementos finitos.

Resulta interesante observar la contribución de los diferentes componentes del modelo al desplazamiento del extremo, que se expone en el gráfico circular de la Figura 5.1-3, donde se muestran la participaciones relativas en la energía de deformación elástica, provistas por el método de las fuerzas, aplicado a un modelo de vigas plano que utiliza la formulación de Timoshenko.

### Contribución al desplazamiento horizontal del extremo

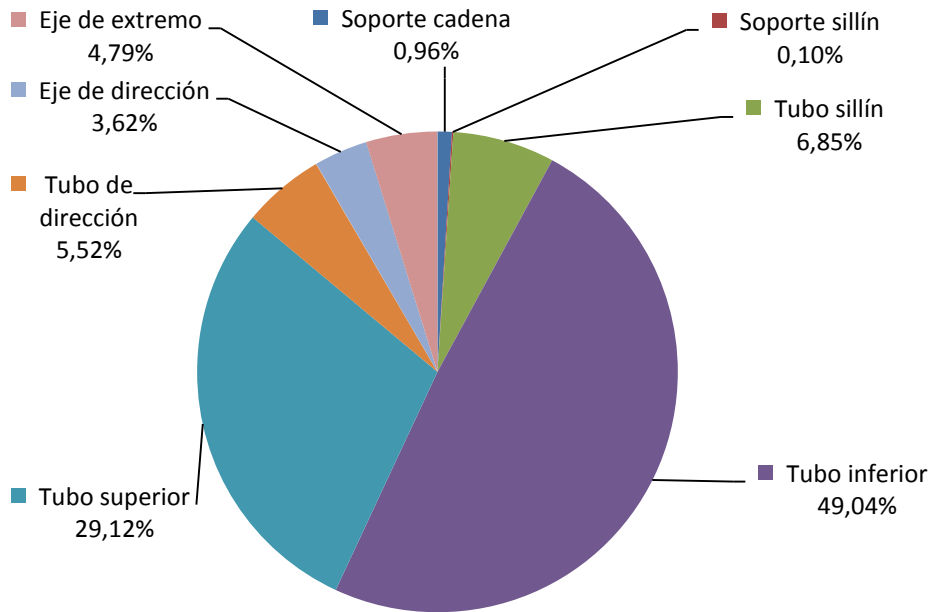


Figura 5.1-3: Contribuciones relativas de los componentes al desplazamiento en el extremo según modelo de vigas plano, con formulación de Timoshenko.

La Norma no menciona ningún requisito respecto a la masa del cuadro, pero se considera importante observar la distribución de masa, que se expone en el gráfico circular de la Figura 5.1-4, donde se muestran las masas relativas respecto a la masa total del cuadro.

### Distribución de masa del cuadro

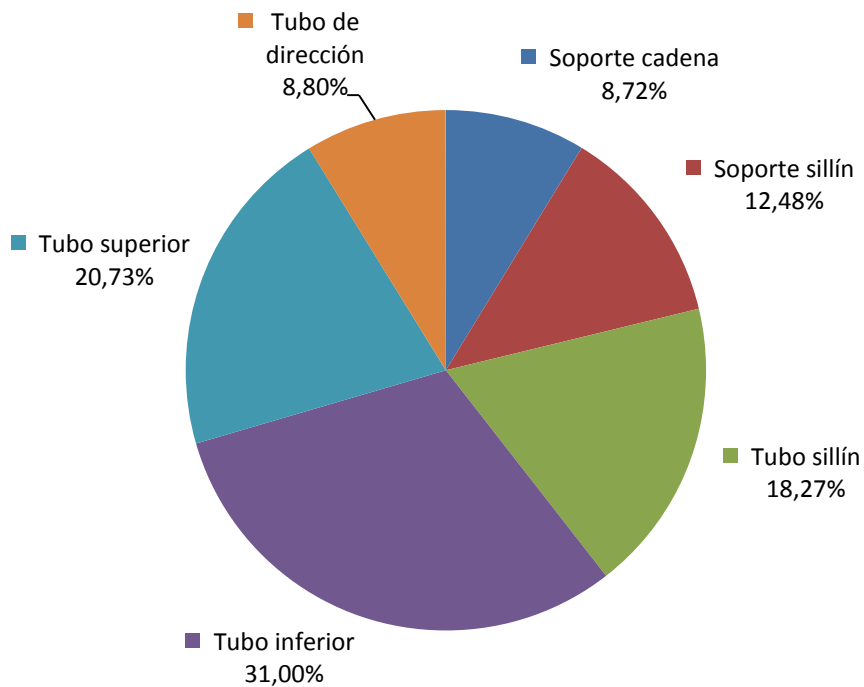


Figura 5.1-4: Contribuciones relativas de los componentes a la masa total del cuadro.

El método de las fuerzas tiene la capacidad de mostrar el tipo de deformación en que se acumula la energía elástica de cada componente en particular, que se exponen en porcentajes relativos en la Figura 5.1-5, donde se grafican en forma de barras apiladas las deformaciones axiales, transversales y flexionales para cada parte del cuadro.

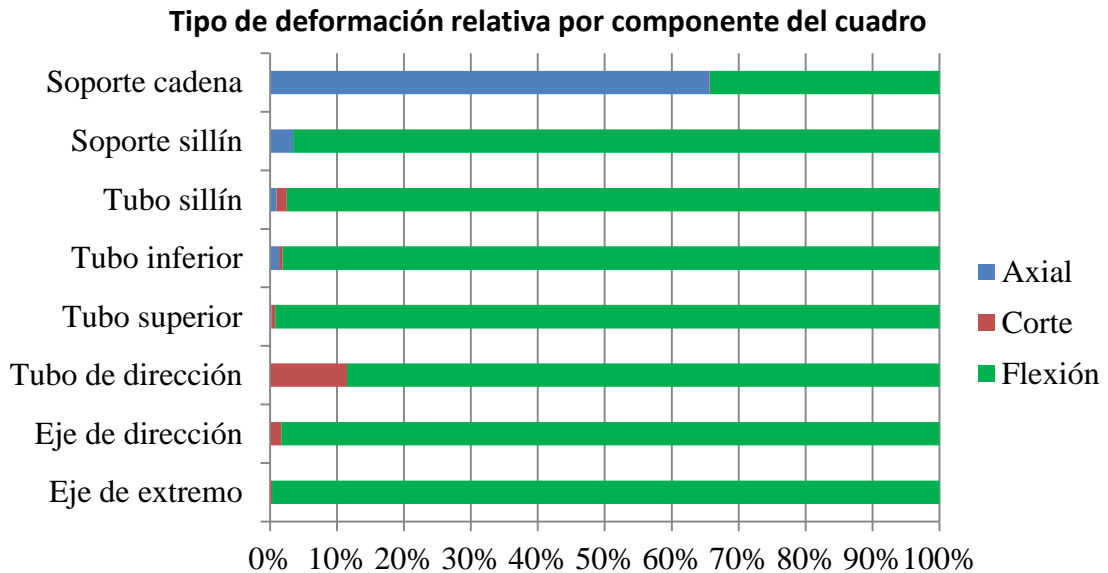


Figura 5.1-5: Tipos de deformación elástica relativa en cada componente.

#### 5.1.1.4 Análisis de resultados

En los casos planteados se observan dos aspectos, la energía elástica y la masa, cuyos resultados se analizan a continuación.

#### Análisis de la energía elástica

En la mayoría de los componentes analizados la mayor energía de deformación almacenada se debe a la sollicitación de flexión, por lo tanto en estos componentes el tipo de deformación que más contribuye al desplazamiento del extremo de adelante es la curvatura de flexión y representa más del 90% de la deformación total. En estos casos las deformaciones restantes se pueden despreciar sin cometer grandes errores.

Los tubos soportes de cadena constituyen una excepción al comportamiento flexional general, debido a que la energía de deformación por flexión no es mayoritaria como el resto de los componentes del cuadro y en estos casos las deformaciones normales no se pueden despreciar.

En los componentes de menor esbeltez, que corresponden a los tramos del tubo de dirección, las deformaciones por corte transversal se vuelven importantes. En estos casos de vigas cortas se obtiene las mayores diferencias entre el modelo cúbico de Euler-Bernoulli y el modelo de corte flexible de Timoshenko.

El tubo inferior es el que mayor contribución tiene sobre el desplazamiento del extremo de adelante, y eventualmente debería ser redimensionado.

El método de las fuerzas se aplica a un modelo de vigas plano, mientras que el método de elementos finitos se aplica sobre un modelo tridimensional. No se observan diferencias significativas entre ambos modelos estáticos, demostrando la validez de las hipótesis simplificativas adoptadas en el modelo plano. Esto se puede demostrar, observando que la energía de deformación almacenada en los tubos excluidos del modelo plano es despreciable frente al resto de los componentes del cuadro considerados. Por lo tanto el modelo plano brinda una idea general de la distribución de flexibilidad del cuadro y es una aproximación que muestra una elevada relación entre la calidad lograda y el costo computacional invertido.

Finalmente el modelo mixto de elementos de vigas y cáscaras, de la tija y el cuadro respectivamente, permite obtener una mejor aproximación que el modelo de vigas puro. En forma general el modelado con elementos de cáscaras predice una mayor rigidez, que se atribuye a una mejor representación del cuadro especialmente en las intersecciones de tubos, donde el modelo de vigas puede presentar deficiencias. Este efecto se acrecienta en los componentes de menor longitud como el tubo de dirección en la zona de las intersecciones con el tubo superior y el tubo inferior.

### **Análisis de la masa**

La masa del cuadro reside principalmente en el tubo inferior y el tubo superior. Ambos reúnen la mitad de la masa total. Sobre estos componentes, se justifica realizar un redimensionamiento para mejorar el aprovechamiento del material.

### **5.1.2 Análisis dinámicos**

Al conjunto cuadro-tija maciza, posicionados en la configuración de ensayo, se realizan análisis dinámicos, para obtener las propiedades inerciales que representen su comportamiento. La siguiente sección comprende dos etapas, que se diferencian por la presencia o no de cargas externas.

En una primera sección se estudia la respuesta libre mediante el procedimiento de descomposición modal. En la siguiente sección se obtiene la respuesta ante una carga dinámica, resolviendo las ecuaciones de movimiento mediante dos procedimientos de integración: la superposición modal y la integración directa.

#### **5.1.2.1 Respuesta libre**

Los procedimientos modales son válidos para pequeñas deformaciones de sistemas lineales, por lo tanto no consideran plastificación ni otros fenómenos no lineales. El ensayo que se pretende simular, incluye el impacto del percutor y el rodillo involucrando cargas repentinas, y exige considerar modos de frecuencias elevadas, por lo tanto no se puede aplicar este procedimiento para simular el ensayo, sin embargo sirve para brindar información del comportamiento general del sistema. A continuación se plantea el procedimiento de descomposición modal sobre un modelo de elementos finitos del conjunto cuadro-tija y posteriormente se aplica a un modelo de masas concentradas que tiene un comportamiento análogo en el extremo delantero.

#### 5.1.2.1.1 Implementación mediante el método de elementos finitos

Para poder llevar a cabo el análisis de descomposición modal se dispone de un modelo, cuyos aspectos generales se describen en la sección 4.2.1.1 y se requiere definir los aspectos particulares como los pasos de análisis, y los requerimientos de salida, que se tratan a continuación.

##### *Pasos de análisis*

- Paso inicial: Se crea el modelo geométrico, se asocia el material y se aplican las condiciones de contorno.
- Procedimiento de descomposición modal: Se extraen los modos y las frecuencias naturales. Se puede especificar un determinado rango de frecuencias de interés, o se considera una cantidad fija modos. En este caso se toman los primeros 10 modos. Se utiliza el método de extracción Lanczos por defecto.

##### *Requerimientos de salida*

Se tiene interés en el desplazamiento del extremo delantero por lo tanto se analizan los parámetros asociados al grados de libertad 1, que corresponde al desplazamiento en la dirección 'x', y se extraen las siguientes variables de salida:

- $\alpha[-]$ : Modos ordenados por frecuencias de menor a mayor.
- $f_{\alpha}[\text{Hz}]$ : Frecuencia natural del modo.
- $m_{\alpha}[-]$ : Masa generalizada.
- $\Gamma_{\alpha 1}[-]$ : Factor de participación modal en dirección x.
- $m_{\alpha 1}^{ef}[\text{kg}]$ : Masa específica en dirección x.

#### 5.1.2.2 Respuesta a carga dinámica

Recapitulando, en la sección anterior se aplica el procedimiento de descomposición modal a un modelo de elementos finitos del conjunto cuadro-tija y a un modelo de masas concentradas que se obtiene en base a los parámetros modales asociados al primer modelo, para lograr aproximar el comportamiento libre.

Para verificar la calidad de ajuste del modelo de masas concentradas, se propone una determinada carga dinámica en ambos modelos, se obtienen las respuestas y se comparan los resultados.

Las características de la carga se definen en la Tabla 5-7, donde se muestran en forma genérica los tiempos y las amplitudes, estableciendo los siguientes intervalos:

$t_0 - t_1$ : Intervalo de rampa creciente

$t_1 - t_2$ : Intervalo de rampa decreciente

$t_2 - t_3$ : Intervalo libre

Tiempo	Amplitud
$t_0$	0
$t_1$	$F_0$
$t_2$	0
$t_3$	0

Tabla 5-7: Definición de amplitud de la fuerza genérica.

Se plantea un caso particular de la carga triangular que ocurre cuando se cumple la siguiente condición:

$$t_2 = 2 t_1$$

Entonces se tiene un pulso triangular simétrico, que se muestra en la Figura 5.1-6, donde las abscisas indican el tiempo en forma genérica y las ordenadas indican la fuerza de contacto en forma genérica.

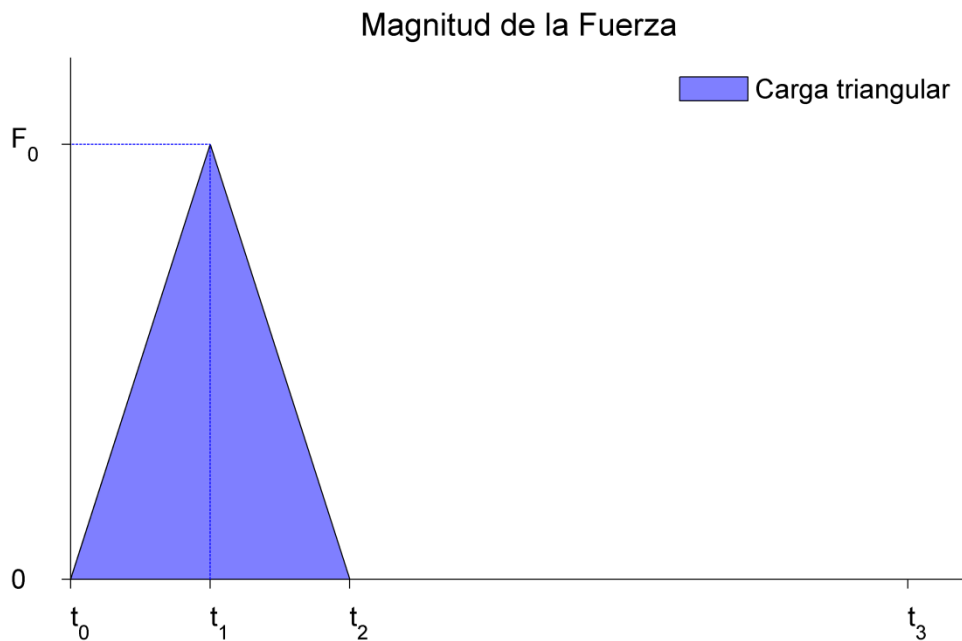


Figura 5.1-6: Amplitud de la fuerza propuesta para contrastar la respuesta dinámica.

Para que los componentes de un determinado modo se muestren en la respuesta dinámica, el período de la carga  $P_c$  y el período natural del modo de interés  $P_n$ , deben cumplir la Inecuación (5.1-1),

$$P_c \leq \frac{P_n}{2} \tag{5.1-1}$$

Se expresa la relación (5.1-1) en función de la frecuencia del modo  $f_n$ , como:

$$f_n = \frac{1}{P_n} \therefore P_c \leq \frac{1}{2f_n}$$



#### 5.1.2.2.1 Implementación mediante el método de elementos finitos

Para obtener la respuesta dinámica del conjunto cuadro-tija, se aplican dos procedimientos, la superposición modal y la integración directa de las ecuaciones de movimiento. La implementación de ambos procedimientos mediante el método de elementos finitos se trata a continuación.

##### 5.1.2.2.1.1 Superposición modal

Para implementar el análisis de superposición modal mediante el método de elementos finitos se dispone de un modelo, que requiere diferentes aspectos generales que se describen en la sección 4.2.1.1 y aspectos particulares como los pasos de análisis, y los requerimientos de salida, que se tratan a continuación.

##### *Pasos de análisis*

- Paso inicial: Se crea el modelo geométrico, se asocia el material y se aplican las condiciones de contorno.
- Procedimiento de descomposición modal: Se extraen los modos y las frecuencias naturales. Se puede especificar un determinado rango de frecuencias de interés, o se considera una cantidad fija modos. En este caso se toman los primeros 10 modos. Se utiliza el método de extracción Lanczos por defecto.
- Procedimiento de superposición modal: Luego de obtener los parámetros modales, asociados al conjunto cuadro-tija, se integraron las coordenadas generalizadas, para obtener la respuesta ante la carga propuesta.

##### *Requerimientos de salida*

Se solicita como resultado del procedimiento de superposición modal las siguientes variables cinemáticas:

- $a$  [ $m/s^2$ ]: Aceleración del rodillo.
- $v$  [ $m/s$ ]: Velocidad del rodillo.
- $u$  [ $m$ ]: Desplazamiento del rodillo.

##### 5.1.2.2.1.2 Integración directa

Para implementar el análisis de integración directa mediante el método de elementos finitos se dispone de un modelo, cuyos aspectos generales se describen en la sección 4.2.1.1 y requiere aspectos particulares como los pasos de análisis, los requerimientos de salida, y el mallado que se tratan a continuación.

##### *Pasos de análisis*

- Paso inicial: Se crea el modelo geométrico, se asocia el material y se aplican las condiciones de contorno.

- Procedimiento dinámico explícito: Se integran directamente las ecuaciones de movimiento, utilizando un operador explícito. Para que el procedimiento sea estable se adoptan incrementos de tiempo pequeños, que se estiman automáticamente de manera global. No se introduce ningún tipo de amortiguamiento de conjunto asociado al procedimiento.

### *Requerimientos de salida*

Se solicita como resultado del procedimiento de integración directa las siguientes variables:

- $a [m/s^2]$ : Aceleración del rodillo.
- $v [m/s]$ : Velocidad del rodillo.
- $u [m]$ : Desplazamiento del rodillo.

### *Mallado*

Las disposiciones de mallado se tratan de forma general para todos los tipos análisis, en la sección 4.2.1.1, sin embargo cuando se aplica un procedimiento directo de integración explícita, condicionalmente estable, el mallado del modelo juega un papel clave. El software calcula una estimación del incremento de tiempo estable, basándose en las propiedades del material y el tamaño de los elementos que forman la malla. Una vez que se definen las propiedades del material, se puede actuar sobre la malla controlando el tamaño del elemento más pequeño de cada parte. En este sentido, se seleccionan las técnicas y los algoritmos de mallado, controlando el factor de elemento mínimo, para lograr que el tamaño de los elementos sea lo más homogéneo posible. De esta manera el tamaño de elemento adecuado resulta de una solución de compromiso entre elementos grandes para aumentar el incremento de tiempo crítico y elementos pequeños para lograr una buena calidad en la representación geométrica.

## **5.1.3 Casos planteados**

En la presente sección se aplican a un caso particular los diferentes análisis propuestos a los modelos del conjunto cuadro-tija, en la configuración de ensayo. En una primera parte se describe brevemente el procedimiento seguido para proponer un modelo de cuadro. Posteriormente, una vez que se define un cuadro en particular se efectúan los análisis propuestos, y se tratan los resultados obtenidos de cada uno.

### ***5.1.3.1 Procedimiento para proponer el cuadro analizado***

Se pretende aplicar los análisis del conjunto cuadro-tija a un caso particular. En este sentido se propone un cuadro cuyas dimensiones geométricas generales se basan en los cuadros comerciales y se emplea con fines ilustrativos de la implementación de las herramientas desarrolladas.

En un caso real donde se disponga de información detallada de la geometría y el material del cuadro, se podrán realizar inferencias respecto las posibles mejoras que se pueden proponer, en dicho caso particular.

Se supone que las posiciones espaciales de los extremos que definen los componentes del cuadro están establecidas y no se modifican. Sin embargo algunas de estas posiciones se pueden cambiar posteriormente, pero la mayoría se determinan para cumplir con ciertos requerimientos dimensionales que permiten el ensamble del cuadro con todos sus accesorios.

Dentro de las dos variantes de certificación que ofrece la Norma, se elige tomar un cuadro que se provee por el fabricante sin horquilla, por lo que se sigue el procedimiento de preparación que se describe en la sección 1.2, y el requerimiento principal del ensayo es lograr una deformación permanente máxima en el extremo delantero que no supere 10 [mm]. Este propósito se cumple trivialmente si se aumentan las secciones de los tubos, sin embargo esta acción ocasiona un incremento de la masa total del cuadro. Por lo tanto se pretende cumplir el requerimiento especificado en la Norma, pero conseguirlo con una utilización eficiente del material, para obtener un peso acorde a los cuadros comerciales.

Para lograr los objetivos planteados, se realiza un primitivo proceso de optimización, donde inicialmente se toman todas secciones de los tubos anulares de espesor constante, y se observan las deformaciones de cada componente del cuadro. El estudio se enfoca en aquellos componentes que muestran las mayores deformaciones, y que se mencionan a continuación:

- Tubo inferior
- Tubo superior
- Tubo de dirección
- Tubo sillín

Se supone que todos los tubos son redondos de diámetro exterior constante a lo largo de la longitud total. En los componentes que muestran las mayores deformaciones mencionados anteriormente, se definen tramos en los cuales varía el espesor y la longitud relativa de cada tramo respecto la longitud total.

En la Figura 5.1-7, se detalla la manera en que se modelan los tubos de espesor variable. En (a) se muestra la variación de espesores de un típico tubo que se logra con los procesos constructivos actuales, que permiten conseguir tres tramos de espesores constantes distintos, con transición gradual entre secciones. Para representar el tubo en el modelo de elementos finitos de vigas, se proponen las siguientes opciones:

- 3 secciones constantes, con variaciones abruptas en la mitad de la longitud de transición, como se expone en (b).
- 5 secciones constantes, de las cuales 3 representan las secciones constantes reales con sus correspondientes longitudes y 2 representan la transición con un espesor medio entre las secciones adyacentes, con sus respectivas longitudes, como se muestra en (c).

Esta simplificación de tramos de espesor constante se utiliza en el modelo de vigas, debido a que el software no permite perfiles que varíen linealmente a lo largo de la longitud de la viga, cuando las propiedades de la sección se obtienen mediante la integración durante el análisis.

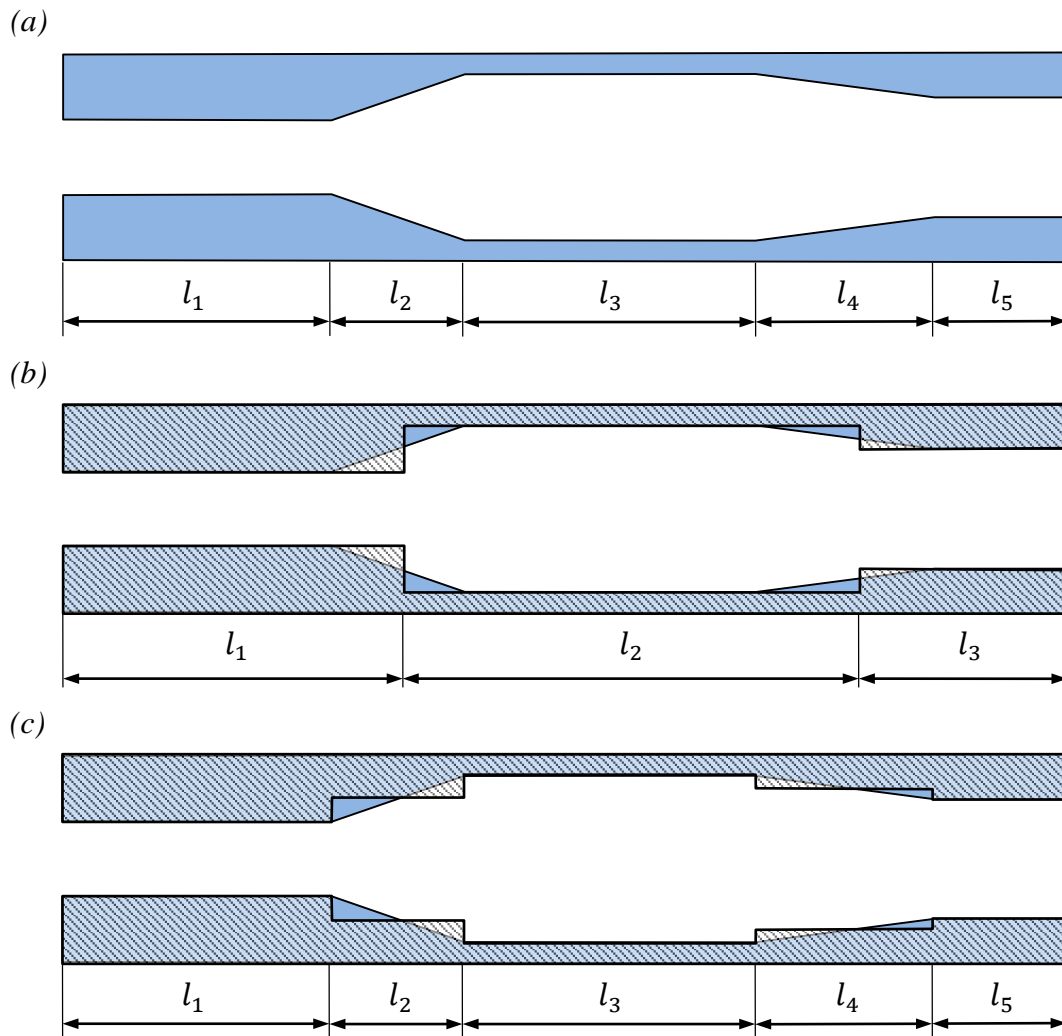


Figura 5.1-7: Representación de secciones de espesor variable.

(a) Tubo de espesor variable real; (b) Representación del tubo por tres tramos de sección constante; (c) Representación del tubo por cinco tramos de sección constante.

La implementación del cuadro en el modelo de elementos finitos debe ser lo suficientemente general, debido a que se utiliza para realizar todos los análisis planteados y luego se emplea para simular el ensayo de choque, donde ocurre un fenómeno de impacto altamente no lineal. Parte de las no linealidades se deben al comportamiento del material, por lo tanto las propiedades de la sección varían durante el análisis y requieren que se calculen en cada incremento de tiempo y se deben utilizar perfiles constantes por tramos de vigas.

En el modelo de cáscaras con elementos finitos, se permite una variación de espesor, controlada por una función analítica que establece el espesor en el centroide de cada elemento de cáscara.

Luego de realizar una propuesta estructural para el cuadro, se tienen en cuenta:

- El desplazamiento permanente medido en el extremo de la tija maciza.
- La distribución de plastificación equivalente sobre los componentes del cuadro.
- La masa de cada componente y total del cuadro.

Una vez que se logra cumplir el objetivo principal de deformación permanente admisible, se estudia un refinamiento de secciones transversales en busca de un menor peso.

En base a las dimensiones de tubos observadas en catálogos de fabricantes, se proponen los espesores y los diámetros para los perfiles. Posteriormente observando la plastificación equivalente máxima, se van reequilibrando las secciones hasta obtener un diseño que cumpla con los requerimientos de la Norma (1).

En la búsqueda de la geometría para el cuadro existen otras opciones de menor peso, pero se prioriza la distribución de la plastificación, y se arriba a la configuración expuesta en la Tabla 5-8, donde se muestra la denominación de cada uno de los tramos de sección constante, la proporción respecto a la longitud total del componente  $p$ , adimensional, el diámetro externo  $d_e$ , medido en  $[mm]$ , y el espesor  $t$ , medido en  $[mm]$ .

Tramo	$p$ [-]	$d_e$ [mm]	$t$ [mm]
<b>Tubo Sup Extremo Ade</b>	0,10	31,80	3,00
<b>Tubo Sup Transición Ade</b>	0,10	31,80	2,50
<b>Tubo Sup Medio</b>	0,20	31,80	2,00
<b>Tubo Sup Transición Atr</b>	0,10	31,80	1,70
<b>Tubo Sup Extremo Atr</b>	0,50	31,80	1,40
<b>Tubo Inf Extremo Ade</b>	0,20	40,00	3,00
<b>Tubo Inf Transición Ade</b>	0,15	40,00	2,30
<b>Tubo Inf Medio</b>	0,15	40,00	1,60
<b>Tubo Inf Transición Atr</b>	0,10	40,00	1,30
<b>Tubo Inf Extremo Atr</b>	0,40	40,00	1,00
<b>Tubo Sil Extremo Sup</b>	0,25	31,80	1,60
<b>Tubo Sil Transición Sup</b>	0,10	31,80	1,20
<b>Tubo Sil Medio</b>	0,30	31,80	0,80
<b>Tubo Sil Transición Inf</b>	0,10	31,80	1,20
<b>Tubo Sil Extremo Inf</b>	0,25	31,80	1,60
<b>Tubo Sop Sil</b>	1,00	15,00	1,50
<b>Tubo Sop Cad</b>	1,00	15,00	1,20
<b>Tubo Uni Sil</b>	1,00	12,00	1,00
<b>Tubo Uni Cad</b>	1,00	12,00	1,10
<b>Tubo Dir Sup</b>	0,25	44,00	2,00
<b>Tubo Dir Med</b>	0,35	44,00	2,80
<b>Tubo Dir Inf</b>	0,40	44,00	3,60
<b>Tubo Ped</b>	1,00	40,00	2,40
<b>Eje Ext</b>	1,00	40,00	20,00
<b>Eje Dir</b>	1,00	30,00	15,00

Tabla 5-8: Dimensiones de las secciones de los componentes del modelo.

En la Figura 5.1-8 se muestran los espesores adoptados para los diferentes componentes del cuadro, que oscilan entre 0,8 – 3.6 [mm], y se visualizan claramente los tubos de secciones variables y los tubos de secciones constantes a lo largo de toda su longitud.

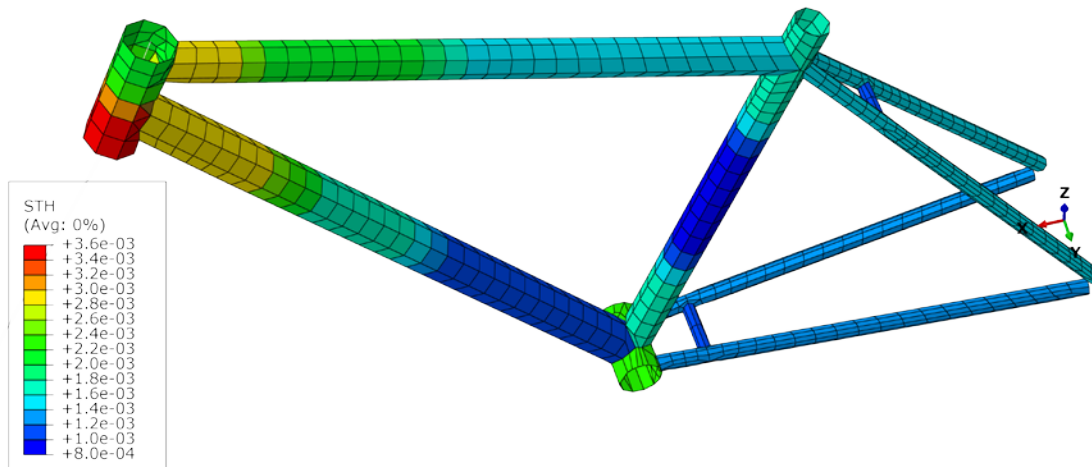


Figura 5.1-8: Distribución de espesores de los tubos del cuadro propuesto.

### 5.1.3.2 Resultados del análisis estático

Se realiza un análisis estático mediante el método de elementos finitos, empleando tres tipos de elementos: vigas cúbicas, vigas flexibles y cáscaras. En la Figura 5.1-9 se muestran los resultados separados según cada componente particular, para observar las contribuciones en la masa, medida en [kg] y en la energía elástica, medida en [J], correspondiente a la deformación que ocasiona una carga unitaria aplicada en el extremo de la tija maciza.

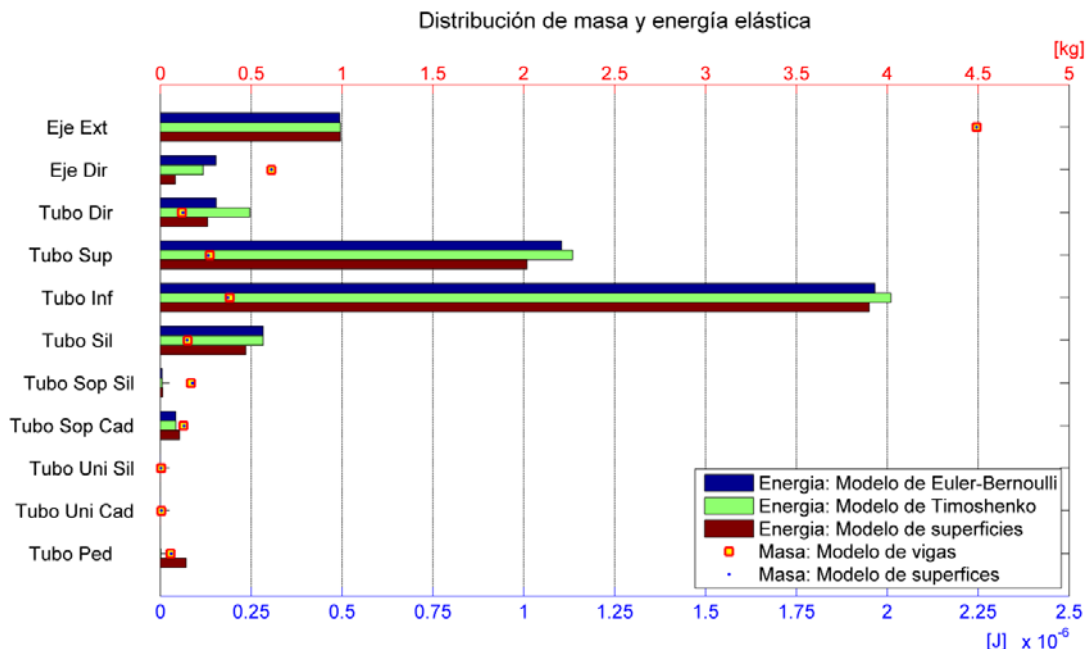


Figura 5.1-9: Distribución de masa y energía elástica obtenida en el análisis estático.

### Análisis de resultados

En el análisis estático de la geometría propuesta se observaron dos aspectos, la masa y la energía elástica, cuyos resultados se tratan a continuación.

## Análisis de la masa

La masa de los componentes del cuadro es un aspecto secundario, porque no es requerida por la Norma, pero se considera útil mostrarla, para ver su relación con la energía elástica, orientando a un uso eficiente del material. La masa calculada mediante elementos de vigas y cáscaras no presenta mayores diferencias.

La Norma establece que la tija maciza debe ser de acero, pero no define su sección transversal. Como se selecciona un perfil circular de gran diámetro, aporta una elevada rigidez al sistema y es la masa mayoritaria del ensayo estático. En el análisis estático lineal, la masa no afecta a los resultados pero cobra relevancia en el estudio dinámico, donde la inercia del extremo tiene influencia en el comportamiento observado.

## Análisis de la energía elástica

El estudio de la energía de deformación elástica de los componentes ante una carga unitaria muestra los siguientes aspectos:

En los componentes perpendiculares al plano de simetría, la energía de deformación interna es despreciable. En el caso particular del tubo de pedalier, el modelo de cáscaras es capaz de mostrar deformaciones que el modelo de vigas no, esto se atribuye a la escasa esbeltez del tubo, no cumpliendo adecuadamente la hipótesis del modelo de vigas.

Los tubos que acumulan mayor energía son el tubo inferior, el tubo superior y el tubo sillín. Por este motivo se utilizaron secciones de espesor variable en estos componentes. En estos casos el modelo de cáscaras siempre estima menor energía de deformación elástica, que ocasiona una mayor rigidez.

La tija maciza, que se compone por el eje de dirección y el eje extremo, siempre se modela utilizando elementos de vigas debido a que presenta sección circular. Las diferencias que surgen cuando el cuadro se modela con elementos de cáscara, se atribuyen al acoplamiento entre ambas instancias que se representan con elementos de distinta naturaleza.

Planteando la carga en el extremo delantero, mediante el análisis estático se obtiene la rigidez de dos maneras distintas: por la definición de rigidez y por consideraciones energéticas, en ambos casos se arriba a los mismos resultados para cada modelo, que se exponen en la Tabla 5-9, donde se muestran los valores de energía de deformación elástica acumulada total  $E_E$ , medida en [J], para cada modelo, los valores de desplazamiento en el extremo de la tija maciza  $\delta_P$ , medido en [m], y la rigidez de conjunto  $k$ , medida en [N/m].

Parámetro	Modelo de vigas		Modelo de superficies
	Euler-Bernoulli	Timoshenko	
$E_E$ [J]	4,2014E-06	4,3387E-06	3,9936E-06
$\delta_P$ [m]	8,4028E-06	8,6773E-06	7,9871E-06
$k$ [N/m]	119008	115243	125201

Tabla 5-9: Resumen de los resultados del análisis estático del cuadro.

### 5.1.3.3 Resultados de los análisis dinámicos

Los resultados del análisis dinámico del conjunto cuadro-horquilla se separan en comportamiento libre y comportamiento con carga, que se desarrollan a continuación.

#### 5.1.3.3.1 Resultado del análisis dinámico libre

El análisis dinámico libre del conjunto cuadro-tija en la configuración de ensayo se efectúa sobre dos tipos de modelos, un modelo de elementos finitos y un modelo de masas concentradas. Los resultados de ambos análisis se tratan a continuación.

#### Resultado de modelo de elementos finitos

Se efectúa un análisis de descomposición modal al conjunto cuadro-tija en la configuración de ensayo mediante el modelo de vigas y el modelo de cáscaras, cuyos resultados obtenidos se exponen en la Tabla 5-10 y la Tabla 5-11 respectivamente. En ambas tablas se exponen los 10 primeros modos naturales  $\alpha$ , mostrando la frecuencia natural  $f_\alpha$ , medida en [Hz], la masa generalizada  $m_\alpha$ , el factor de participación modal en la dirección 'x'  $\Gamma_{\alpha 1}$ , y la masa específica en la dirección 'x'  $m_{\alpha 1}^{ef}$ , medida en [kg].

$\alpha$ [-]	$f_\alpha$ [Hz]	$m_\alpha$ [-]	$\Gamma_{\alpha 1}$ [-]	$m_{\alpha 1}^{ef}$ [kg]
1	18,581	1,7882	1,3759E-15	3,3852E-30
2	29,273	3,4146	1,2246	5,1209
3	129,34	0,27971	-3,0949E-15	2,6791E-30
4	227,61	0,28403	-2,4922E-14	1,7642E-28
5	269,03	0,20741	-0,16337	0,0055357
6	278,40	0,29176	1,5274E-14	6,8063E-29
7	288,81	1,6831	0,94623	1,5069
8	371,28	0,11245	-1,2592E-10	1,7828E-21
9	383,34	0,59617	1,1035E-10	7,2593E-21
10	387,86	0,10092	0,16456	0,0027329

Tabla 5-10: Variables modales obtenidas empleando los primeros 10 modos naturales mediante el modelo de vigas con formulación de corte flexible.

$\alpha$ [-]	$f_\alpha$ [Hz]	$m_\alpha$ [-]	$\Gamma_{\alpha 1}$ [-]	$m_{\alpha 1}^{ef}$ [kg]
1	18,967	1,7758	-0,00055742	5,5176E-07
2	30,424	3,4233	1,2219	5,1107
3	141,72	0,26304	-7,3814E-05	1,4332E-09
4	242,62	0,31084	-0,00094217	2,7593E-07
5	257,86	0,19104	0,095123	0,0017286
6	284,94	0,2347	-0,0018029	7,6286E-07
7	292,42	2,2512	0,81815	1,5069
8	355,44	0,11423	-0,00034866	1,3887E-08
9	394,50	0,68563	0,00004821	1,5935E-09
10	416,34	0,14034	0,29559	0,012262

Tabla 5-11: Variables modales obtenidas empleando los primeros 10 modos naturales mediante el modelo de superficies.



Para facilitar la interpretación de los resultados del procedimiento de descomposición modal, además de tener en cuenta los parámetros, se exponen la forma de los modos, en la Figura 5.1-10, donde se muestra la configuración geométrica del conjunto cuadro-tija en su estado inicial y posteriormente, la forma deformada tridimensional de cada modo. Se colorean los modelos teniendo en cuenta la componente de desplazamiento en la dirección 'x', designada U1, que se expresa de manera adimensional, debido a que el procedimiento de descomposición modal presenta una indefinición en la magnitud de la deformación, por lo tanto se normaliza utilizando algún criterio, en este caso se elige el criterio de desplazamiento máximo unitario.

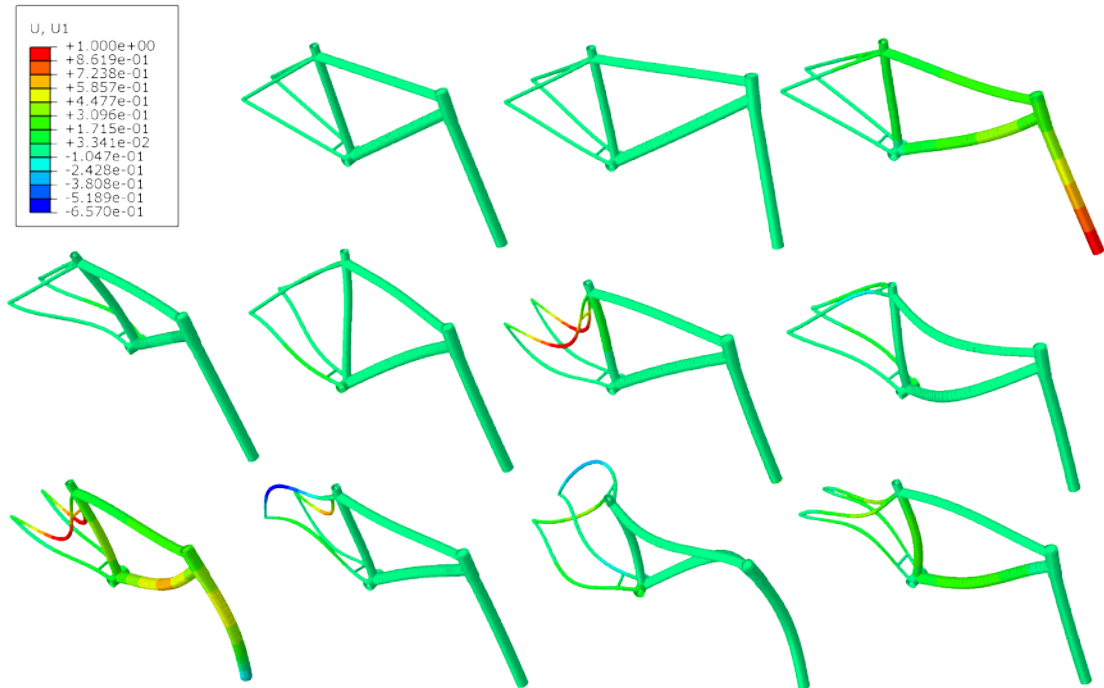


Figura 5.1-10: Forma de los primeros 10 modos naturales del conjunto cuadro-tija.

En la Figura 5.1-11 se muestra la contribución de los modos de acuerdo a la masa modal efectiva en la dirección x, para ver su participación acumulada respecto al total.

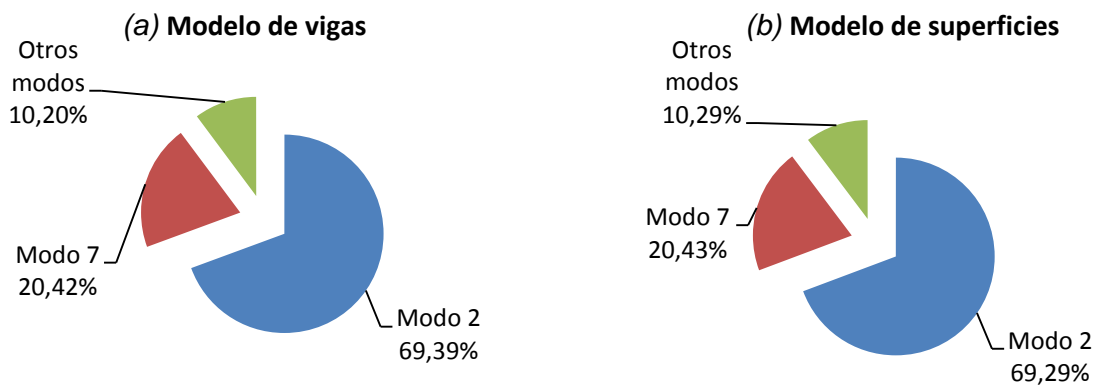


Figura 5.1-11: Contribuciones de los modos a la masa específica en la dirección x. (a) Modelo de vigas del cuadro; (b) Modelo de superficies del cuadro.

## Análisis de resultados

Se está interesado en el comportamiento en el extremo de la tija por lo tanto se observa el factor de participación modal en el grado de libertad dinámico 1 que corresponde al desplazamiento en la dirección x.

Si bien los modos más bajos presentan la menor energía de excitación, en el caso de este ensayo la relevancia de los modos se basa en el factor de participación modal. De esta manera si se pretende seleccionar una determinada cantidad de modos para representar el comportamiento de la estructura, se eligen los modos con el mayor valor absoluto de factor de participación modal. Posteriormente la suma de la masa generalizada de los modos extraídos se contrasta respecto la masa total del modelo.

Las formas modales que mayor influencia tienen en el desplazamiento del extremo, se muestran en la Figura 5.1-12, donde se visualizan en forma superpuesta, la configuración no deformada y la deformada de los modos 2 y 7, para resaltar el desplazamiento en el extremo de la tija.

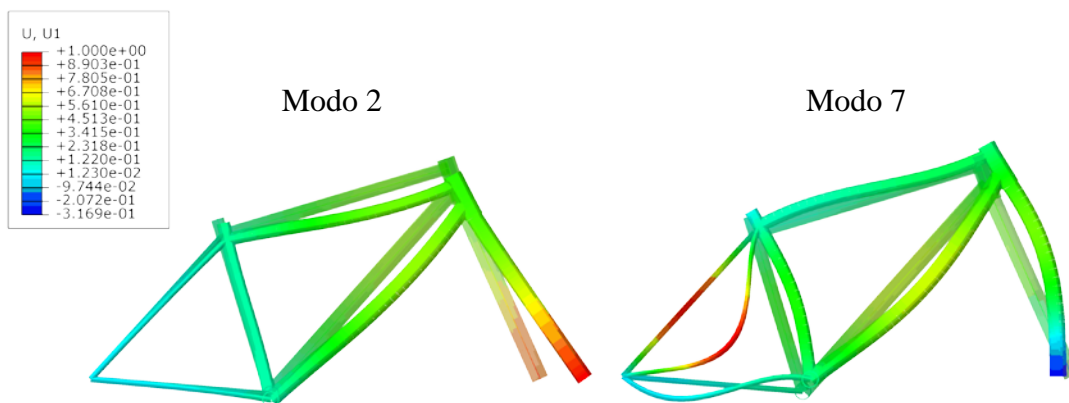


Figura 5.1-12: Deformadas de los dos modos más relevantes del conjunto cuadro-tija.

En ambos modelos propuestos, la masa modal efectiva considerada en el análisis es aproximadamente el 90 % de la masa total y se reúne por una escasa cantidad de modos, por lo tanto el comportamiento dinámico libre de la estructura se representa convenientemente empleando dichos modos. La diferencia de la masa modal efectiva respecto a la masa total del modelo se atribuye al resto de los modos no considerados debido al truncamiento durante la descomposición modal y a la fracción de masa de elementos correspondientes a los apoyos que tienen restringidos el movimiento en la dirección x. Estos corresponden a las punteras de atrás del cuadro donde se ubican los apoyos, y este efecto se atenúa refinando la malla.

### Resultado de modelo de masas concentradas

Conociendo los parámetros del conjunto cuadro-tija obtenidos mediante la aplicación del procedimiento de descomposición al modelo de elementos finitos, se plantea un modelo de  $N$  masas concentradas que representa el sistema real. Se requieren tener valores para la masa  $m_{equi}$  y la rigidez  $k_{equi}$ . Estos se seleccionan de alguno de los modelos propuestos, en este caso se adoptan los resultados del modelo de vigas de Timoshenko, que se expresan a continuación:

$$m_{equi} = 7,390 [kg]$$

$$k_{equi} = 115243 [N/m]$$

A continuación se resuelve numéricamente para los casos  $N = 1,2$

### Sistemas de un grado de libertad dinámico $N=1$

En la Figura 5.1-13 se muestra el modelo de un grado de libertad que representa al conjunto cuadro-tija en la configuración de ensayo, indicando el valor de los parámetros físicos del sistema para el caso particular propuesto.

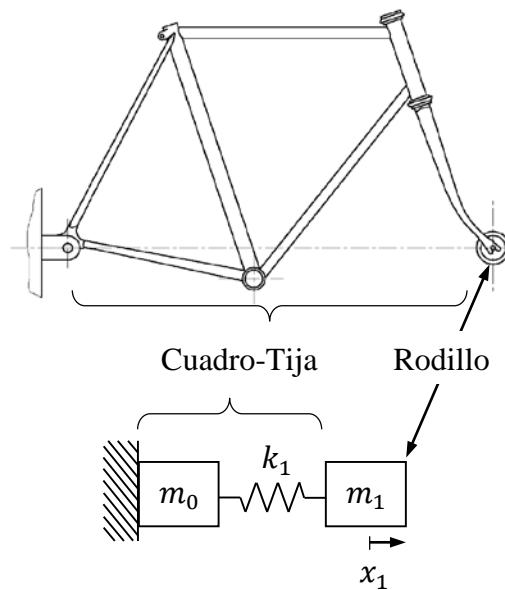


Figura 5.1-13: Modelo lineal de un grado de libertad dinámico.

Los parámetros del sistema tienen los siguientes valores:

$$k_1 = 115243 [N/m]$$

$$m_1 = 3,401 [kg]$$

$$m_0 = 3,983 [kg]$$

La activa masa del modelo puntual es  $3,401 [kg]$ , mientras que el resto de la masa no participa del movimiento. Este sistema tiene una única frecuencia natural que es de  $\omega_1 = 183,928 [rad/s]$ , coincidiendo con la frecuencia del modo que tiene mayor masa específica en la dirección 'x'.

### Sistemas de dos grados de libertad dinámicos $N=2$

En la Figura 5.1-14 se muestra el modelo de dos grados de libertad que representa al conjunto cuadro-tija en la configuración de ensayo, indicando el valor de los parámetros físicos del sistema para el caso particular propuesto.

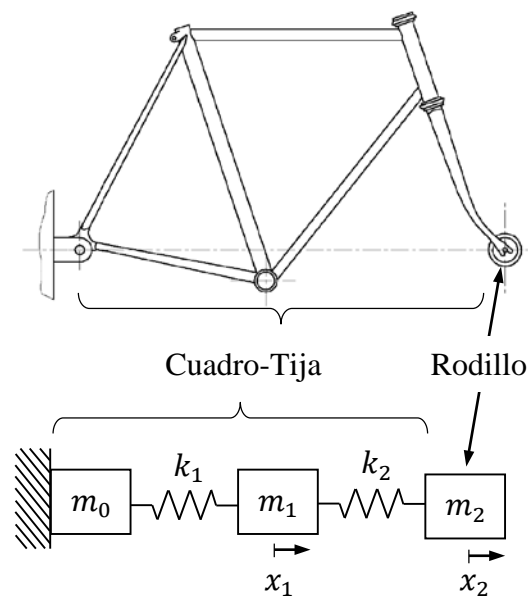


Figura 5.1-14: Modelo lineal de dos grados de libertad dinámicos.

Los parámetros del sistema tienen los siguientes valores:

$$k_1 = 123.484 \times 10^3 [N/m]$$

$$k_2 = 1701.532 \times 10^3 [N/m]$$

$$m_0 = 3,9051 [kg]$$

$$m_1 = 0.6704 [kg]$$

$$m_2 = 2.8131 [kg]$$

La activa masa del modelo puntual es 3,4849 [kg], mientras que el resto de la masa no participa del movimiento. Este sistema tiene dos modos cuyas frecuencias naturales son  $\omega_1 = 183,928 [rad/s]$  y  $\omega_2 = 1837,329 [rad/s]$ .

### 5.1.3.3.2 Resultado del análisis dinámico con carga

En la siguiente sección se presentan los resultados obtenidos para el comportamiento del cuadro-tija en la configuración de ensayo, ante una carga dinámica. El análisis se enfoca en las variables cinemáticas en el extremo de la tija maciza o rodillo. Para resolver las ecuaciones de movimiento se implementan dos procedimientos, el modal y el directo, cuyos resultados se tratan a continuación.

### Resultado del procedimiento modal a una carga dinámica

Se aplica una carga para contrastar la respuesta dinámica del modelo de vigas y cáscaras con el modelo de masas concentradas.

En la sección anterior, mediante la descomposición modal se obtienen las variables modales asociadas al modelo. Se selecciona el modelo de masas concentradas de dos grados de libertad dinámico, que toma como referencia los modos 2 y 7 extraídos del modelo de elementos

finitos. En el análisis, el modo de interés de frecuencia más alta, es el modo 7, cuya frecuencia es  $f_n = 292,42 [Hz]$ . Se calcula el valor de período de carga máximo  $P_c$ , para que los efectos dinámicos sobre la estructura sean importantes.

$$P_c \leq \frac{1}{2 \cdot 292,42 [Hz]}$$

$$P_c \leq 1,71 \times 10^{-3} [s]$$

De esta manera el valor máximo del período de la carga a aplicar, debe ser menor a  $1,71 \times 10^{-3} [s]$ , para que los componentes del modo 7 se muestren en la respuesta dinámica. El intervalo total de estudio  $t_0 - t_3$ , se selecciona para que el período de la menor frecuencia natural considerada se incluya completamente en el análisis. La magnitud de la carga no tiene relevancia, porque aplicando el procedimiento modal se supone que el sistema se comporta de manera lineal. En la Figura 5.1-15 se muestra la forma de la carga donde las abscisas son tiempo medido en  $[s]$  y las ordenadas son fuerza medida en  $[N]$ .

Parámetros de carga

$$F_0 = 10 [N]$$

$$t_0 = 0,0 \times 10^{-3} [s]$$

$$t_1 = 0,8 \times 10^{-3} [s]$$

$$t_2 = 1,6 \times 10^{-3} [s]$$

$$t_3 = 3,5 \times 10^{-3} [s]$$

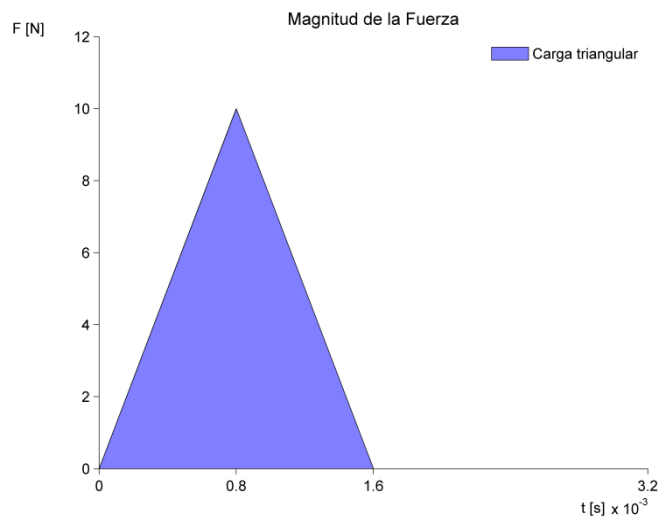


Figura 5.1-15: Magnitud de la fuerza propuesta para contrastar modelos.

Se toma como referencia la suma de masa específica en la dirección 'x', de los modos considerados del modelo de vigas, para estimar la masa activa total del modelo de masas concentradas, y se trata esta de manera relativa como un factor de la masa específica de los dos modos más relevantes del modelo de elementos finitos.

Se ajustan los valores de los parámetros físicos del modelo puntual, para que la diferencia respecto al modelo de vigas sea mínima, y posteriormente en la Figura 5.1-16 se muestran los resultados para las variables cinemáticas obtenidos mediante el procedimiento modal aplicado a ambos modelos del conjunto cuadro-tija. En el gráfico las abscisas son tiempo medido en  $[s]$ , mientras que las ordenadas son aceleración, velocidad y desplazamiento, medidos en  $[m/s^2]$ ,  $[m/s]$ , y  $[m]$  respectivamente.

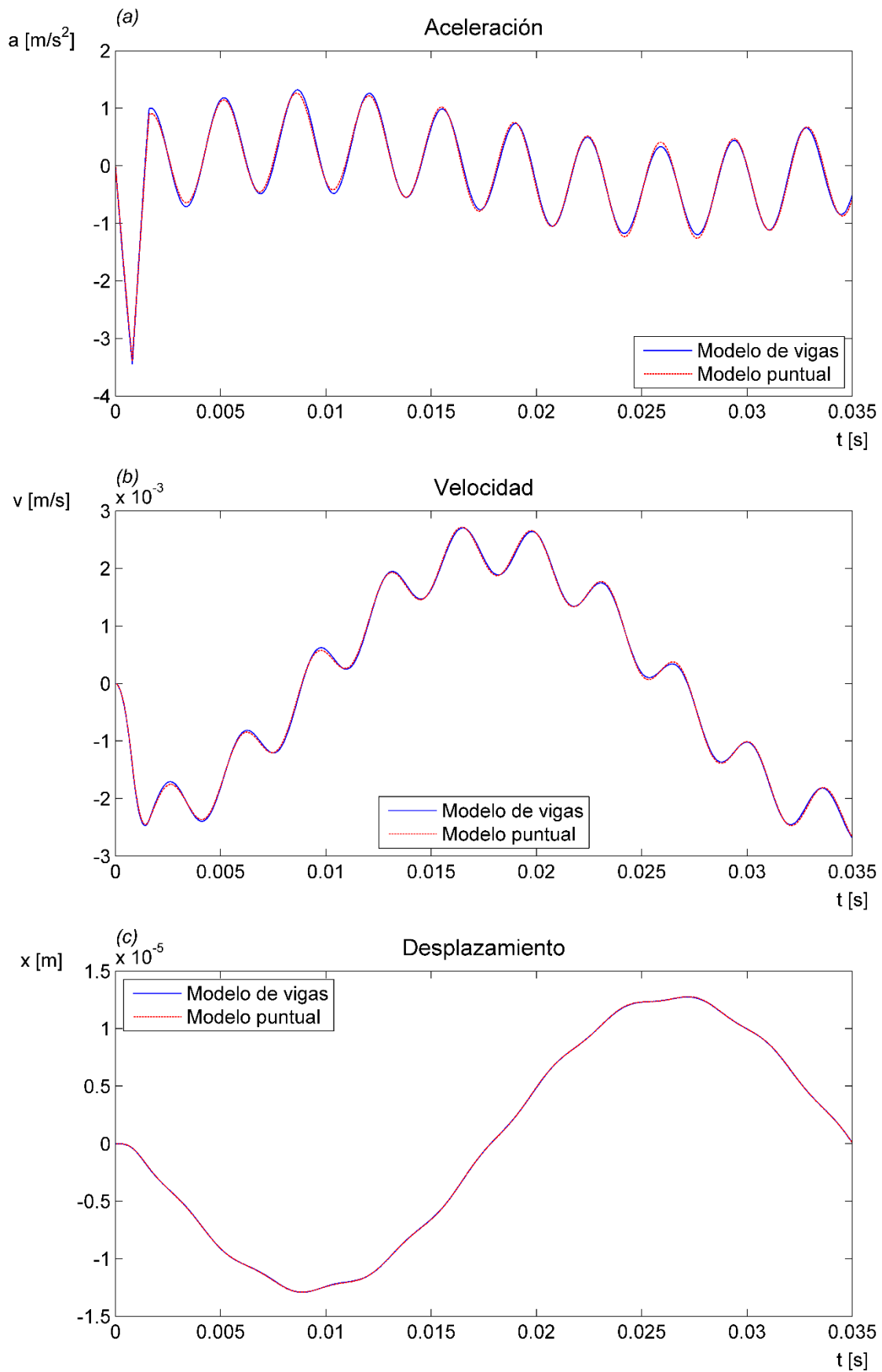


Figura 5.1-16: Variables cinemáticas según el modelo de vigas y el modelo puntual.  
 (a) Aceleración; (b) Velocidad; (c) Desplazamiento.

## *Análisis de resultados*

Se observan especialmente las gráficas de aceleración, debido a que esta variable posteriormente se integra sucesivamente para obtener la velocidad y el desplazamiento respectivamente, y las diferencias entre los resultados de ambos modelos se vuelven despreciables.

La duración de la carga es menor al período de los primeros 7 modos del modelo de vigas, de manera que se puede ver la influencia de estos modos en la respuesta obtenida. Además el incremento de tiempo de cálculo utilizado para integrar las ecuaciones es menor a la mitad del período del modo máximo para que el análisis sea capaz de detectar este componente de la respuesta.

En el gráfico de aceleración se aprecian los dos modos principales que componen la respuesta del modelo puntual. El modo inferior tiene un período cercano a la ventana de tiempo considerada, y se muestra como una única onda, mientras que el segundo modo considerado se muestra como aproximadamente nueve ondas que se adicionan respecto a la respuesta del modo anterior. Por otra parte el modelo de vigas del cuadro, calcula la respuesta mediante la superposición de los primeros 10 modos, debido a ello surgen diferencias entre ambos modelos. La diferencia de aceleración alcanza un máximo de  $0,0973[m/s^2]$  en  $0,00160[s]$ , por lo que no es significativa, si se tiene en cuenta el grado de simplificación logrado a partir de un sistema que emplea 10 grados que se representa únicamente con dos grados de libertad.

Cabe recalcar que el modelo de masas concentradas y el modelo de vigas tienen un comportamiento dinámico similar, y no tienen ningún tipo de amortiguamiento externo, salvo el intrínseco del procedimiento de integración numérica.

### **Resultado del procedimiento directo a una carga dinámica**

La validez de la aplicación del modelo de superposición modal, que se basa en la integración de unos pocos grados de libertad, exige el cumplimiento de ciertas condiciones como pequeños desplazamientos, comportamiento elástico, etc. Cuando no se cumplen dichas condiciones, se recurre a la integración directa de las ecuaciones de movimiento.

El modelo del cuadro representado mediante elementos finitos, se somete a la carga triangular planteada en el caso anterior, y luego se resuelve empleando la superposición modal y la integración directa de las ecuaciones de movimiento.

Si se aplican ambos procedimientos de integración para obtener la respuesta dinámica del modelo puntual se consiguen exactamente los mismos resultados debido a que se tiene una cantidad finita de modos, y todos estos se consideran en el procedimiento modal.

En la Figura 5.1-17 se muestran los resultados para las variables cinemáticas obtenidos mediante el modelo de elementos finitos aplicando ambos procedimientos de integración. En el gráfico las abscisas son tiempo medido en  $[s]$  y las ordenadas son aceleración, velocidad y desplazamiento, medidos en  $[m/s^2]$ ,  $[m/s]$  y  $[m]$  respectivamente.

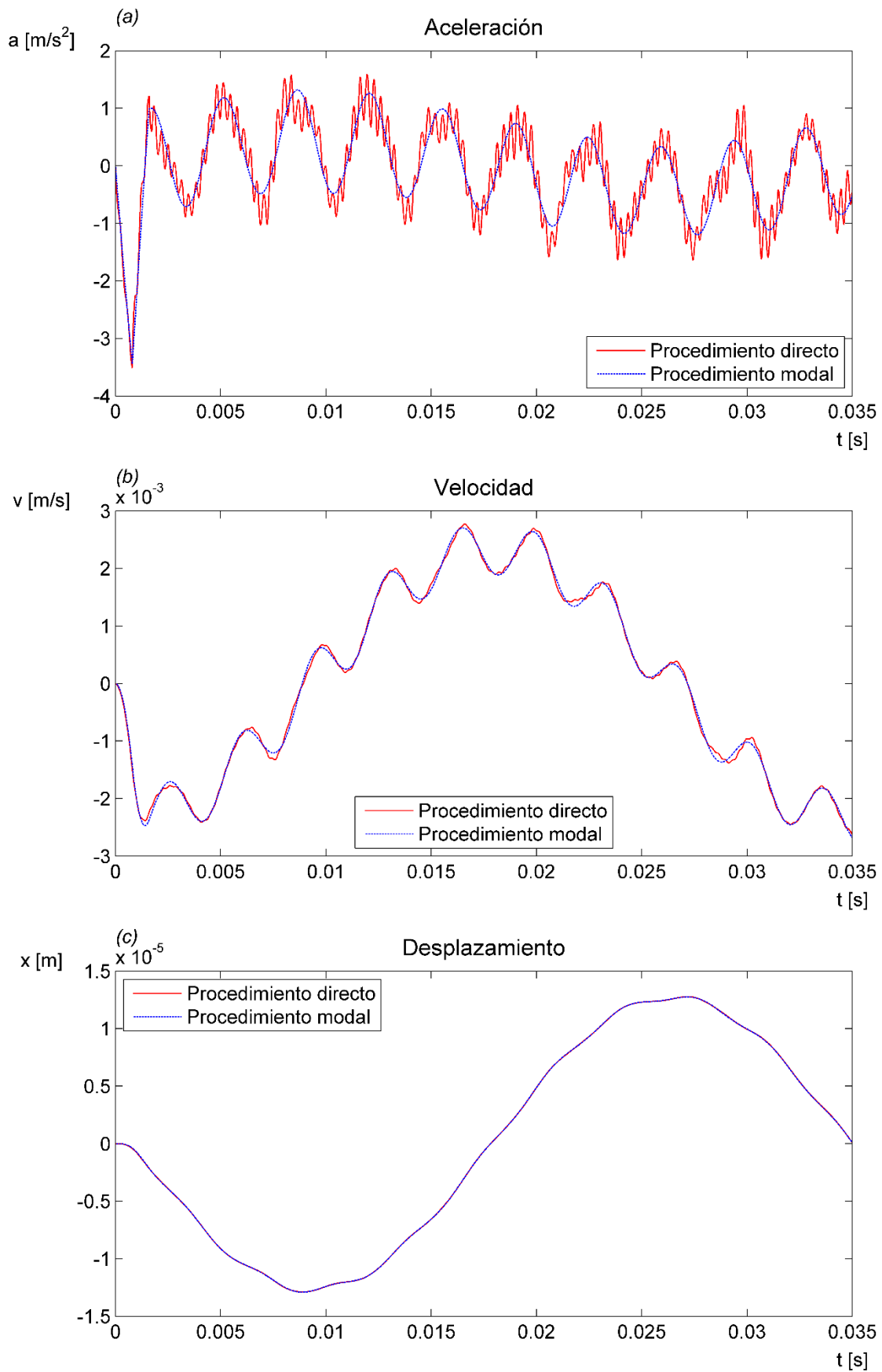


Figura 5.1-17: Variables cinemáticas según dos procedimientos de integración.  
 (a) Aceleración; (b) Velocidad; (c) Desplazamiento.



## *Análisis de resultados*

El modelo de superposición modal considera los 10 primeros modos, sin embargo como se menciona anteriormente son únicamente dos los modos que tienen la mayor relevancia en la respuesta. La frecuencia más alta de los modos considerados es  $387,86[Hz]$ , por lo tanto no se observan en la respuesta dinámica modal componentes superiores a esta frecuencia.

Por otro lado en el procedimiento de integración directa de las ecuaciones de movimiento, se emplea un método explícito, que es condicionalmente estable. El tiempo de incremento, se elige automáticamente mediante el algoritmo que emplea el software de elementos finitos, para este caso es de  $7.5 \times 10^{-7}[s]$ , por lo que permite distinguir frecuencias superiores en la respuesta que no se detectan en el modelo modal.

En el gráfico de velocidad se aprecian pequeñas diferencias entre los modelos, sin embargo luego de la segunda integración de la aceleración para obtener el desplazamiento, las diferencias se vuelven prácticamente imperceptibles.

Se puede decir que la diferencia entre los resultados de los dos métodos de integración son los modos superiores que no se consideran, al truncar la cantidad de modos extraídos durante la descomposición modal. Las contribuciones de estos modos superiores no son importantes respecto los modos utilizados en el análisis modal. Con ambos modelos se logran resultados similares, siempre y cuando el sistema tenga un comportamiento lineal, en cuyo caso se prefiere el procedimiento modal.

## **5.2 Análisis del choque entre el percutor y el rodillo**

Para implementar el análisis del impacto que ocurre durante el ensayo de choque mediante el método de elementos finitos, se dispone de un modelo, cuyos aspectos generales se describen en la sección 4.2.2 y requiere aspectos particulares como los pasos de análisis y los requerimientos de salida, que se tratan a continuación.

### *Pasos de análisis*

El análisis de elementos finitos realizado consta de los siguientes pasos:

- **Paso inicial:** Se establecen las condiciones de apoyo, los campos predefinidos de velocidad y las aceleraciones.
- **Procedimiento dinámico explícito:** Se resuelven las ecuaciones de movimiento de manera directa para obtener aceleraciones, velocidades y desplazamientos durante un tiempo establecido. Este análisis tiene por objetivo estudiar el período de contacto, por lo tanto tiene escasa duración incluyendo un único impacto. No se considera ningún tipo de amortiguamiento adicional.

### *Requerimientos de salida*

Debido a que se emplea un modelo simétrico, que representa un cuarto del modelo completo, se dividen por cuatro las propiedades extensivas utilizadas. Estas incluyen la rigidez de conector, las masas del percutor y del rodillo, las fuerzas, las áreas de contacto, las energías

involucradas, etc. Por otra parte las propiedades intensivas como los desplazamientos, las velocidades, las aceleraciones, las presiones de contacto, las tensiones y las deformaciones son equivalentes a las del modelo completo, sin simetría.

Se calcula la aceleración de cuerpo rígido del percutor y del rodillo, para posteriormente extraer las velocidades y los desplazamientos. La fuerza ejercida entre los cuerpos que impactan es la principal variable de interés. En el análisis dinámico de integración directa explícita utilizado, se tiene en cuenta el período en el cual la fuerza de contacto no es nula, para definir la duración del contacto.

*Definición del contacto:*  $\begin{cases} F_{con} = 0 \rightarrow \text{No hay contacto} \\ F_{con} \neq 0 \rightarrow \text{Hay contacto} \end{cases}$

Se estudia el comportamiento del resto de las variables en el intervalo definido por la fuerza de contacto no nula. Se modifican algunas variables del modelo para analizar su influencia en los resultados obtenidos.

La fuerza de contacto se obtiene de la integral de la presión sobre la base del percutor. Se tiene en cuenta la componente en la dirección del impacto Z, debido a la simetría del modelo las componentes paralelas a la superficie de contacto se equilibran mutuamente.

$$F_{con} = \int_{A_{con}} P_{con} dA_{con}$$

Desde el punto de vista analítico, se obtienen los mismos resultados calculando la integral sobre la superficie del rodillo o del percutor, sin embargo se elige la superficie del percutor, que se indica en la Figura 5.2-1, porque es plana y la resolución numérica requiere menor esfuerzo de cálculo.

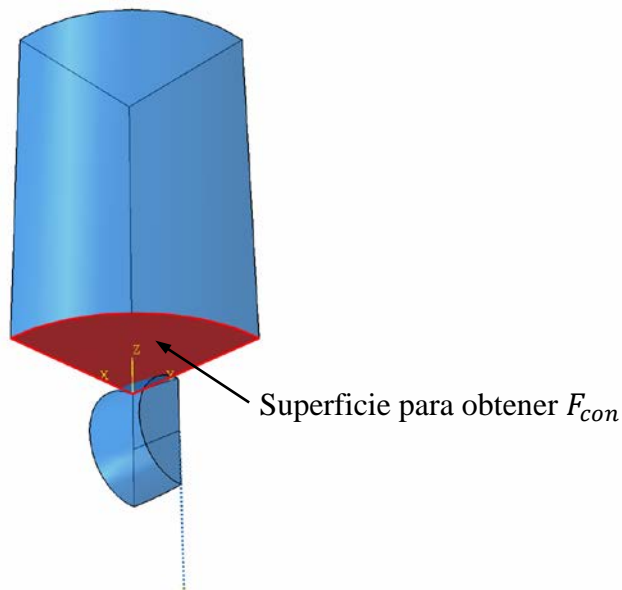


Figura 5.2-1: Superficie utilizada para obtener la fuerza de contacto.

### 5.2.1 Casos planteados

En la presente sección se implementa el análisis al modelo de choque, estudiando el comportamiento de las principales variables involucradas, entre las que se mencionan la velocidad de impacto, la magnitud de la fuerza, el período de contacto, la disipación plástica, y el coeficiente de restitución.

A continuación se propone un rango de velocidades de impacto similares a las que ocurren en el ensayo y se estudia el comportamiento del resto de las variables mencionadas anteriormente. Se supone que las deformaciones plásticas son pequeñas y no modifican el comportamiento posterior de los cuerpos. De esta manera la simulación numérica del impacto para cada velocidad se obtiene de los cuerpos sin deformación plástica previa, mientras que en el ensayo real la deformación plástica se acumula en los sucesivos impactos.

El comportamiento obtenido para el percutor y el rodillo depende principalmente del límite de elasticidad y curva de plastificación de cada material. Por otra parte se dispone de la rigidez equivalente del cuadro  $K_T$ , cuyo valor se obtiene del análisis estático.

$$K_T = 115243 \left[ \frac{N}{m} \right]$$

Como se estudia una porción simétrica que representa un cuarto del ensayo, la rigidez empleada en el modelo  $K_S$  se define como:

$$K_S = \frac{K_T}{4} = 28810,75 \left[ \frac{N}{m} \right]$$

Se implementa en el software Abaqus, el modelo de contacto, para extraer los resultados que se exponen a continuación.

En la Figura 5.2-2 se representan paramétricamente las curvas de fuerza de contacto obtenidas para distintas velocidades de impacto del percutor sobre el rodillo. En el gráfico las abscisas son tiempo de contacto  $t$ , medido en [s], y las ordenadas son fuerza de contacto  $F$ , medida en [N]. Se toma como referencia la velocidad de impacto inicial  $v = 2,657 [m/s]$ , que corresponde a la caída del percutor desde la altura establecida por la Norma y se muestran otras velocidades.

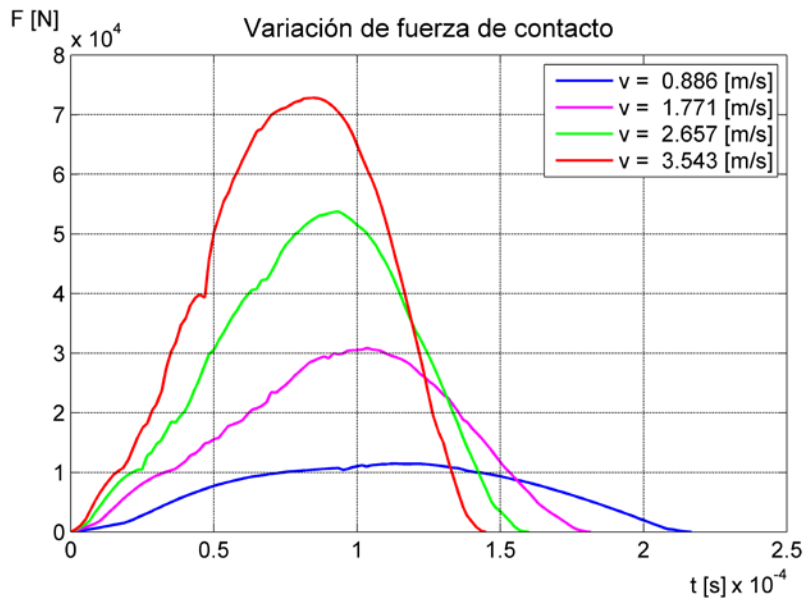


Figura 5.2-2: Variación de la fuerza de contacto para distintas velocidades de impacto.

La fuerza de contacto se caracteriza por parámetros, entre los que están la magnitud, la duración y el impulso total, cuyos comportamientos se analizan a continuación.

En la Figura 5.2-3, las abscisas son velocidad de impacto  $v$ , medida en  $[m/s]$ , y las ordenadas son magnitud de fuerza de contacto  $F_{max}$ , medida en  $[N]$ . Se observa que la magnitud del impacto aumenta aproximadamente proporcional a la velocidad.

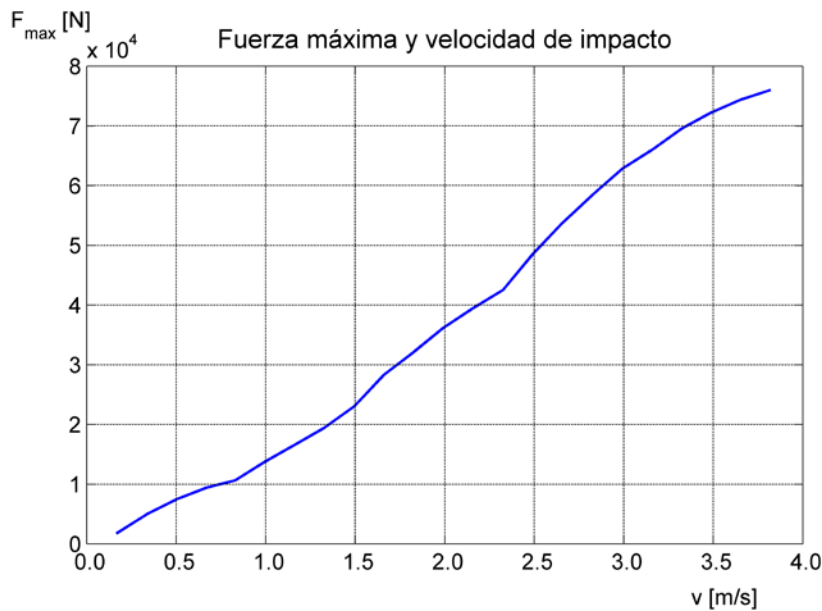


Figura 5.2-3: Magnitud de la fuerza de contacto para distintas velocidades de impacto.

En la Figura 5.2-4, las abscisas son velocidad de impacto  $v$ , medida en  $[m/s]$ , y las ordenadas son tiempo de contacto  $t_D$ , medido en  $[s]$ . Se observa que la duración del contacto se reduce con el incremento de la velocidad.

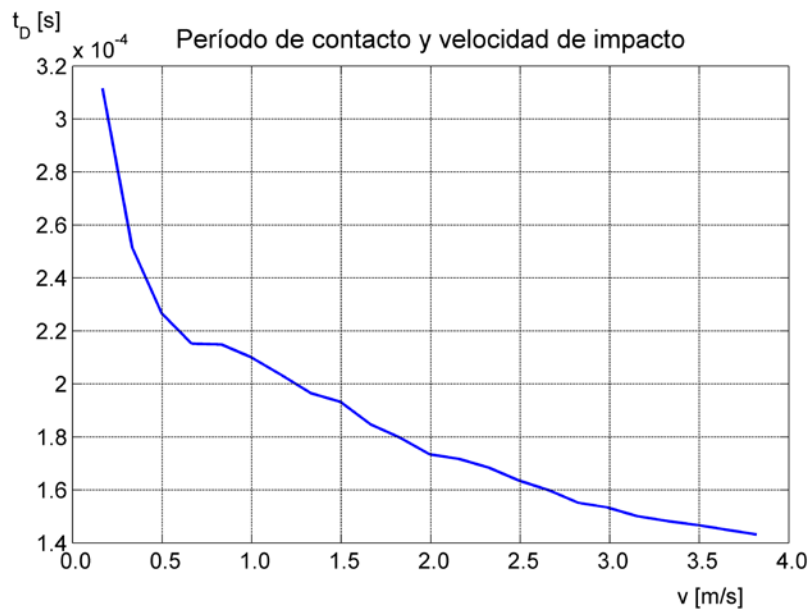


Figura 5.2-4: Período de contacto para diferentes velocidades de impacto.

En la Figura 5.2-5, las abscisas son velocidad de impacto  $v$ , medida en  $[m/s]$ , y las ordenadas son impulso de fuerza de contacto  $I$ , medido en  $[Ns]$ . El impulso es evidente que aumente aproximadamente linealmente con la velocidad, sin embargo ocurre disipación de energía durante el contacto, debido a la fricción y la plastificación, por lo tanto no se cumple la igualdad entre el impulso y la variación de cantidad de movimiento del percutor.

$$\int_0^{t_D} F(t)dt \neq m_{per} \cdot \Delta v_{per}$$

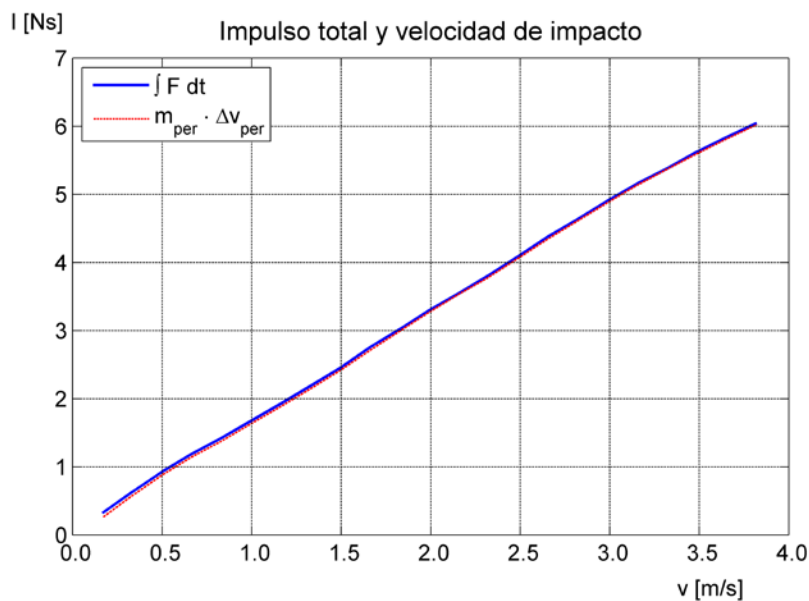


Figura 5.2-5: Impulso total para impacto entre cuerpos a diferentes velocidades.

En la Figura 5.2-6 se representan paramétricamente las curvas de impulso obtenidas para distintas velocidades de impacto. En el gráfico las abscisas son tiempo  $t$ , medido en [s], y las ordenadas son impulso de fuerza de contacto  $I$ , medido en [Ns].

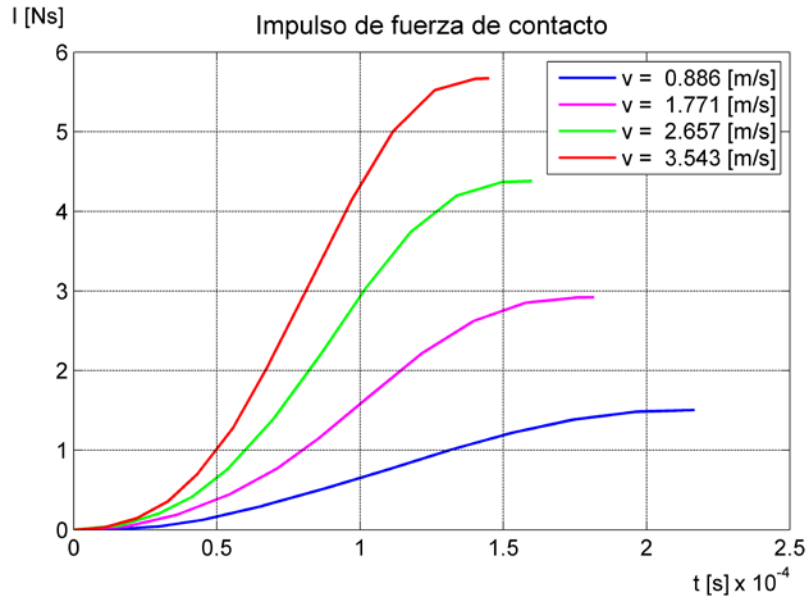


Figura 5.2-6: Variación del impulso para distintas velocidades de impacto.

En la Figura 5.2-7, las abscisas son velocidad de impacto  $v$ , medida en [m/s], y las ordenadas son energía plástica disipada  $E_p$ , medida en [J], para cada uno de los cuerpos que participan del impacto.

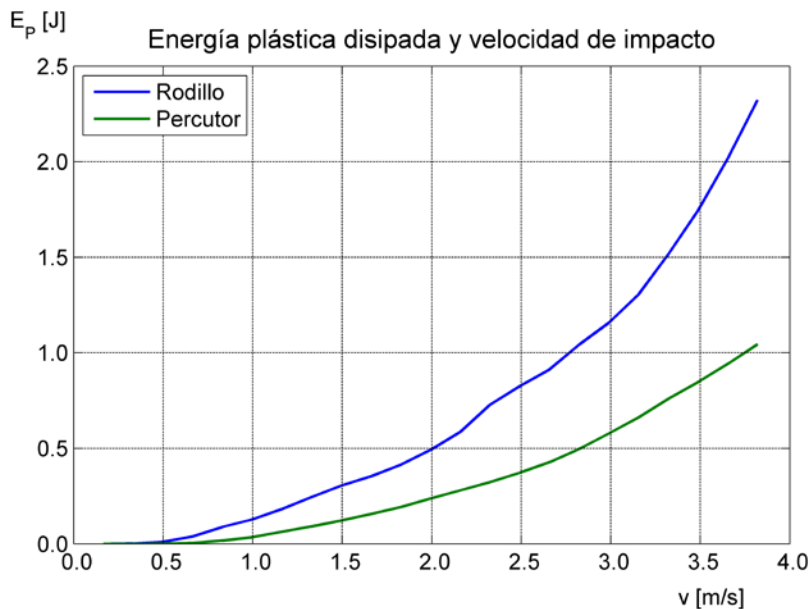


Figura 5.2-7: Energía plástica disipada para distintas velocidades de impacto.

Se observa que la energía plástica disipada durante el choque, aumenta con la velocidad de impacto y para todas las velocidades el rodillo experimenta mayor plastificación que el

percutor. Los valores de energía plástica obtenidos dependen de las propiedades de plastificación de los materiales, y de la geometría de los cuerpos.

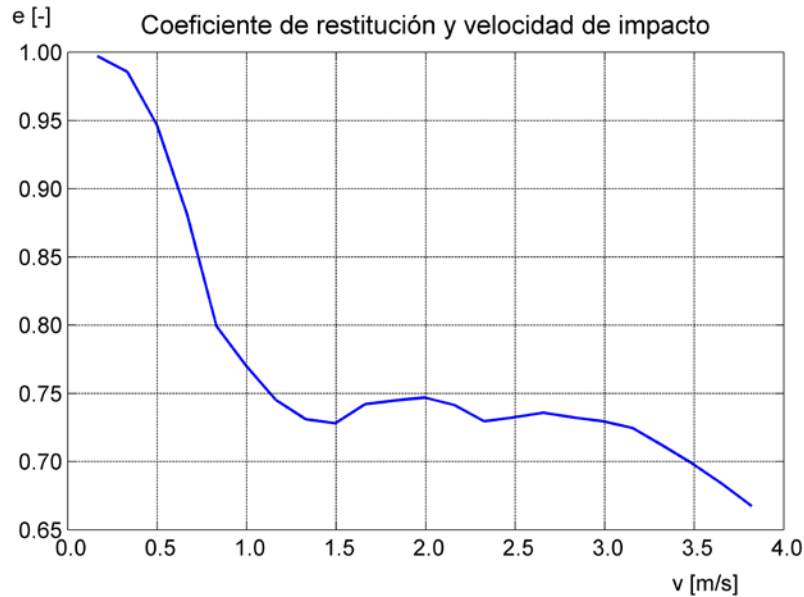


Figura 5.2-8: Coeficiente de restitución en función de la velocidad de impacto.

En la Figura 5.2-8, las abscisas son velocidad de impacto  $v$ , medida en  $[m/s]$ , y las ordenadas son coeficiente de restitución  $e$ , adimensional, y muestran que en general el coeficiente de restitución disminuye al aumentar la velocidad de impacto, por la disminución de energía cinética debido a la disipación por fricción y por plastificación de los cuerpos luego del choque.

Para velocidades de impacto bajas, la fuerza de contacto no provoca grandes deformaciones plásticas, por lo que se observa un choque principalmente elástico, donde el coeficiente de restitución tiende a ser unitario, para velocidades de impacto que tienden a cero.

Para velocidades de impacto comprendidas en el intervalo  $(0.5 - 1.0) [m/s]$ , se observa una disminución abrupta de la restitución, debido a que la fuerza de contacto ocasiona la deformación plástica de los cuerpos, en la zona de contacto.

Para velocidades de impacto superiores a  $(1.0 - 3.0) [m/s]$ , el factor de restitución decrece lentamente. Para velocidades superiores, el factor de restitución disminuye considerablemente, debido a la gran magnitud que alcanzan las deformaciones plásticas, y escapan al alcance de este estudio, porque no ocurrirán en el ensayo de caída del percutor.

Los resultados obtenidos dependen en gran medida del material utilizado y del modelo aplicado para representar su comportamiento. Si bien el rodillo o extremo de la tija debe ser de acero, no se establece dicha restricción para el percutor, que se podría construir con otro material, cumpliendo con las restricciones geométricas y de masa establecidas en la Norma.

Al variar las velocidades de impacto se obtiene el comportamiento general de las variables relevantes del análisis, que se resume en la Tabla 5-12.

Velocidad del impacto	Coefficiente restitución	Duración del contacto	Magnitud del impacto	Deformación plástica
↑	↓	↓	↑	↑
↓	↑	↑	↓	↓

Tabla 5-12: Comportamiento general de las variables del modelo según la velocidad de impacto.

### 5.3 Estimación de parámetros de contacto

Durante el tiempo que transcurre el contacto, entre el percutor y el rodillo, existe una interacción entre ambos cuerpos. En la presente sección se pretende modelar la fuerza de contacto lograda con los métodos numéricos, mediante modelos analíticos que basan en las siguientes variables explicativas:

- Desplazamiento relativo.
- Velocidad relativa.

Se proponen modelos para expresar la fuerza de contacto en función de las variables cinemáticas o de parámetros que dependen de una o más de estas.

Tanto el percutor como el rodillo, son cuerpos sólidos deformables, las variables planteadas, son de tipo vectorial y en general pueden cambiar de un punto a otro en todo el interior del dominio. A través de la aplicación del método de elementos finitos, la geometría se representa mediante una determinada cantidad de elementos, donde para cada uno se obtienen distintos valores para las propiedades. Realizando la integración de cada variable en cuestión a lo largo del volumen completo del cuerpo, se obtiene un valor promedio, que equivale al de un cuerpo similar al real pero que es rígido y se toma como representativo de la propiedad en interés.

La diferencia entre las propiedades cinemáticas de cuerpo rígido entre el percutor y el extremo o rodillo se utilizan como referencia para analizar el impacto:

$$(x_{per} - x_{ext}) = x_{rel} : \text{Desplazamiento relativo}$$

$$(v_{per} - v_{ext}) = v_{rel} : \text{Velocidad relativa}$$

$$(a_{per} - a_{ext}) = a_{rel} : \text{Aceleración relativa}$$

Se proponen diversos modelos analíticos para expresar la fuerza de contacto en función del tiempo, que luego se contrastan con el resultado obtenido por el método numérico. La calidad del ajuste logrado se representa mediante el coeficiente de determinación  $R^2$ , que se obtiene para cada modelo analítico planteado, y se define de la Ecuación (5.3-1),

$$R^2 = \frac{VE}{VT} = \frac{VT - VNE}{VT} = 1 - \frac{VNE}{VT} \quad (5.3-1)$$



donde:

$$VT = \sum (y - \bar{y})^2 : \text{Varianza total}$$

$$VE = \sum (\hat{y} - \bar{y})^2 : \text{Varianza explicada}$$

$$VNE = \sum (y - \hat{y})^2 : \text{Varianza no explicada}$$

$\bar{y}$  es el promedio

$\hat{y}$  es el valor del modelo analítico

$y$  es el valor del modelo numérico

Se proponen tres modelos analíticos que admiten representación física: Kelvin-Voigt, histerético, y Maxwell. A continuación se detallan las variables en que se basa cada modelo, la forma de carga, se establecen los parámetros que lo rigen y se calcula la bondad del ajuste lograda.

### 5.3.1 Modelo de Kelvin-Voigt

Se modela el impacto entre el percutor y el rodillo o extremo de la tija maciza utilizando un modelo de dos grados de libertad, cuya fuerza de contacto  $F_{cont}$  se expresa como:

$$F_{cont} = c_c \cdot v_{rel}(t) + k_c \cdot x_{rel}(t)$$

donde:

$c_c$  es el amortiguamiento viscoso de contacto

$k_c$  es la rigidez lineal de contacto

Durante el contacto hay un acoplamiento que se expresa como un resorte lineal y amortiguador viscoso actuando en paralelo. Resulta difícil estimar el valor que mejor se adapta a la realidad, pero se visualiza su influencia en el comportamiento de la respuesta. El valor de rigidez y amortiguamiento viscoso equivalente entre el percutor y el extremo, se estima conociendo el desplazamiento y la velocidad vertical relativa promedio de cuerpo rígido.

Para esto se realiza una regresión lineal múltiple, (26) donde se tiene:

$$Y = \{F_{cont}\} : \text{Variable dependiente}$$

$$X = [X_1 \ X_2] : \text{Variables explicativas}$$

$$X_1 = \{x_{rel}\}$$

$$X_2 = \{v_{rel}\}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ c \end{bmatrix} : \text{Parámetros a estimar}$$

La estimación de los parámetros es:

$$B = (X' \cdot X)^{-1} \cdot X' \cdot Y$$

### 5.3.2 Modelo histerético

Se modela el impacto entre el percutor y el rodillo o extremo de la tija maciza utilizando un modelo de dos grados de libertad, cuya fuerza de contacto  $F_{cont}$  se expresa como:

$$F_{cont} = k_c \pi \beta_h \operatorname{sgn}(v_{rel}(t)) |x_{rel}(t)| + k_c \cdot x_{rel}(t)$$

donde:

$k_c$  es la rigidez lineal de contacto

$\beta_h$  es el amortiguamiento histerético de contacto

Durante el contacto hay un acoplamiento que se expresa como un resorte lineal y un amortiguador histerético actuando en paralelo. El desplazamiento relativo tiene el mismo signo durante el contacto, mientras que la velocidad cambia de signo. Por lo tanto en la definición de la fuerza de contacto se tienen dos comportamientos según el signo de la velocidad.

$$F_{cont} = (1 + \pi \beta_h) \cdot k_c \cdot x_{rel}(t) \rightarrow \text{Durante el acercamiento}$$

$$F_{cont} = (1 - \pi \beta_h) \cdot k_c \cdot x_{rel}(t) \rightarrow \text{Durante el alejamiento}$$

Los parámetros  $k_c$  y  $\beta_h$  se obtienen indirectamente, resolviendo un sistema de ecuaciones lineales.

$$(1 + \pi \beta_h) \cdot k_c = k^{acer}$$

$$(1 - \pi \beta_h) \cdot k_c = k^{alej}$$

Sumando miembro a miembro, se obtiene  $k_c$ :

$$2 \cdot k_c = k^{acer} + k^{alej}$$

$$k_c = \frac{k^{acer} + k^{alej}}{2}$$

Restando miembro a miembro, se obtiene  $\beta_h$ :

$$(2\pi \beta_h) \cdot k_c = k^{acer} - k^{alej}$$

$$\beta_h = \frac{k^{acer} - k^{alej}}{2\pi \cdot k_c}$$

Expresando  $k_c$  en función de  $k^{acer}$  y  $k^{alej}$  tenemos:

$$\beta_h = \frac{k^{acer} - k^{alej}}{\pi \cdot (k^{acer} + k^{alej})}$$

Este modelo es equivalente a un resorte lineal que tiene dos valores distintos de rigidez que dependen del sentido de la velocidad relativa entre ambos cuerpos:

$$F_{cont}^{acer} = k^{acer} \cdot x_{rel}(t)$$

$$F_{cont}^{alej} = k^{alej} \cdot x_{rel}(t)$$

Desde el punto de vista práctico, se separa el período de contacto según el sentido de la velocidad y luego se aplica la regresión lineal para obtener la rigidez de cada etapa.

Para el acercamiento, se presentan las siguientes variables:

$$Y^{acer} = \{F_{cont}^{acer}\} : \text{Variable dependiente}$$

$$X^{acer} = [X_1^{acer}] : \text{Variable explicativa}$$

$$X_1^{acer} = \{x_{rel}^{acer}\}$$

$$B^{acer} = [b_1^{acer}] = [k^{acer}] : \text{Parámetro a estimar}$$

La estimación de los parámetros es:

$$B^{acer} = (X^{acer'} \cdot X^{acer})^{-1} \cdot X^{acer'} \cdot Y^{acer}$$

Para el alejamiento, se presentan las siguientes variables:

$$Y^{alej} = \{F_{cont}^{alej}\} : \text{Variable dependiente}$$

$$X^{alej} = [X_1^{alej}] : \text{Variable explicativa}$$

$$X_1^{alej} = \{x_{rel}^{alej}\}$$

$$B^{alej} = [b_1^{alej}] = [k^{alej}] : \text{Parámetro a estimar}$$

La estimación de los parámetros es:

$$B^{alej} = (X^{alej'} \cdot X^{alej})^{-1} \cdot X^{alej'} \cdot Y^{alej}$$

Finalmente con los dos valores de rigidez  $k^{alej}$  y  $k^{acer}$ , se calculan los parámetros del modelo  $k_c$  y  $\beta_h$ .

### 5.3.3 Modelo de Maxwell

La fuerza de contacto según este modelo se expresa de dos maneras:

$$F_{cont} = k_c \cdot x_{rel}(t) + k_{c1} \cdot x_d(t)$$

$$F_{cont} = k_c \cdot x_{rel}(t) + c_c \cdot v_d(t)$$

donde:

$k_c$  es la rigidez de contacto

$k_{c1}$  es la rigidez de Maxwell

$c_c$  es el amortiguamiento de Maxwell

Se plantea la existencia de un nodo  $d$ , que no tiene masa asociada, cuyas variables cinemáticas se expresan respecto al rodillo, obteniendo la siguiente ecuación de equilibrio de fuerzas:

$$k_{c1} \cdot x_d = c_c \cdot (v_{rel} - v_d)$$

Aplicando propiedad distributiva y reordenando tenemos:

$$k_{c1} \cdot x_d = c_c \cdot v_{rel} - c_c \cdot v_d$$

$$c_c \cdot v_d + k_{c1} \cdot x_d = c_c \cdot v_{rel}$$

Dividiendo por  $c_c$ , con la condición  $c_c \neq 0$ , para que no sea un modelo elástico puro.

$$v_d + \frac{k_{c1}}{c_c} \cdot x_d = v_{rel}$$

La ecuación anterior se expresa convenientemente de la siguiente manera:

$$\frac{x_d(t)}{dt} + \frac{k_{c1}}{c_c} \cdot x_d(t) = v_p^r(t)$$

Así se manifiesta claramente, que es una ecuación diferencial lineal de primer orden, cuya solución es:

$$x_d(t) = e^{-\alpha(t-t_0)} \left( x_{d0} + \int_{t_0}^t v_p^r(\xi) e^{\alpha(\xi-t_0)} d\xi \right)$$

donde el parámetro  $\alpha$  se define como:

$$\alpha = \frac{k_{c1}}{c_c}$$

La condición inicial se establece en:

$$x_{d0} = 0$$

Inicialmente se desconoce el valor del parámetro  $\alpha$ , pero para cada valor propuesto se obtiene una forma para el desplazamiento  $x_d^r(t)$ , y se plantea una regresión lineal múltiple para obtener los parámetros  $k_c$  y  $k_{c1}$ .

$$F_{cont} = k_{c1} \cdot x_d(t) + k_c \cdot x_{rel}(t)$$

Para esto se realiza una regresión lineal múltiple donde se tiene:

$$Y = \{F_{cont}\}: \text{Variable dependiente}$$

$$X = [X_1 \ X_2]: \text{Variables explicativas}$$

$$X_1 = \{x_{rel}\}$$

$$X_2 = \{x_d\}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_c \\ k_{c1} \end{bmatrix}: \text{Parámetros a estimar}$$

La estimación de los parámetros es:

$$B = (X' \cdot X)^{-1} \cdot X' \cdot Y$$

Se verifica que ambas rigideces estimadas por regresión sean positivas:

$$k_c > 0 \text{ y } k_{c1} > 0$$

Posteriormente, se obtiene el coeficiente de determinación del modelo, para seleccionar el valor del parámetro  $\alpha$  que más se ajusta a los resultados obtenidos por el modelo de elementos finitos. Finalmente se calcula  $c_c$ , empleando la definición:

$$c_c = \frac{k_{c1}}{\alpha}$$

Cabe destacar que los valores propuestos para  $\alpha$  deben cumplir que  $\alpha > 0$ , para que los tres parámetros  $k_c$ ,  $k_{c1}$  y  $c_c$  sean positivos y el modelo tenga sentido físico.

### 5.3.4 Resultados

En esta sección se presentan los resultados obtenidos, para la estimación de los parámetros de contacto de tres modelos teóricos, a partir del análisis de un modelo de elementos finitos del choque entre el percutor y el extremo de la horquilla/tija maciza, que se describe en la sección 4.2.2.

Se toma como referencia el primer impacto ocurrido, cuya velocidad  $v$ , corresponde a la caída libre del percutor desde la altura  $h = 0,360$  [m] establecida por la Norma.

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,80665 \left[ \frac{m}{s^2} \right] \cdot 0,360 [m]} = 2,657 \left[ \frac{m}{s} \right]$$

Luego analizar la interacción de choque que ocurre en modelo que representa un cuarto de ensayo mediante elementos finitos, se dispone del comportamiento de las siguientes variables:

- $F_{con}(t)$
- $x_{rel}(t)$
- $v_{rel}(t)$

Todas las magnitudes extensivas, obtenidas para un modelo que representa un cuarto de ensayo se multiplican por 4, exponiendo los resultados para el modelo completo.

En Figura 5.3-1 las abscisas son tiempo  $t$ , medido en [s] y las ordenadas son fuerza de contacto  $F$ , medida en [N]. Los parámetros que representan la carga, son el período  $t_d$ , la fuerza máxima  $F_{max}$ , el tiempo en que ocurre la fuerza máxima  $t_{max}$  y el impulso  $I_0$ . Los valores numéricos se exponen a continuación:

$$t_d = 1.599 \times 10^{-4} [s]$$

$$F_{max} = F(t_{max}) = 53743 [N]$$

$$t_{max} = 0,933 \times 10^{-4} [s]$$

$$I_0 = 4.382 [Ns]$$

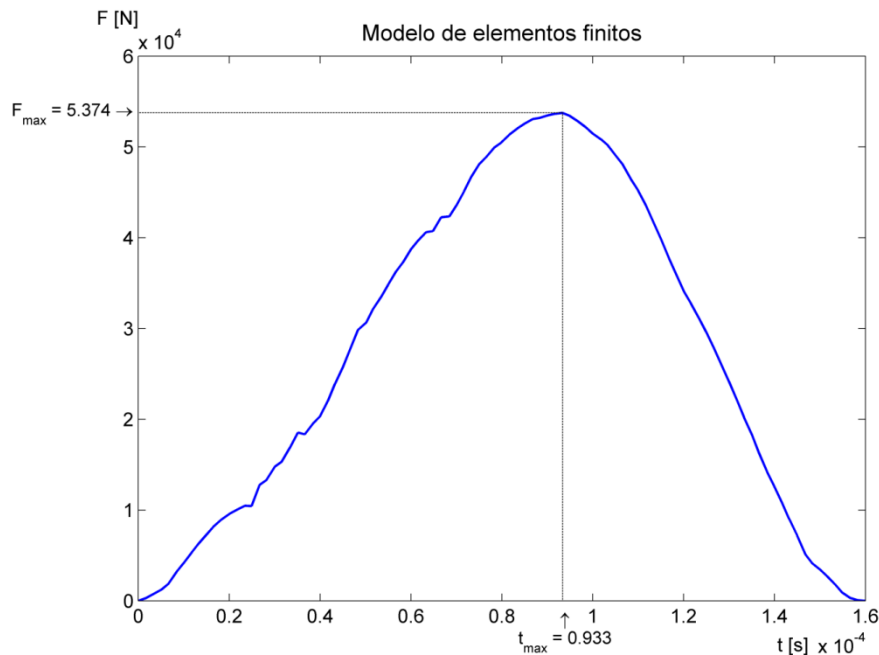


Figura 5.3-1: Fuerza de contacto para el primer impacto entre el percutor y el rodillo.

Se estudia el desplazamiento relativo entre el percutor y el rodillo durante la duración del contacto. Se tienen en cuenta dos aspectos de diferente índole: por un lado la diferencia entre las posiciones de los centros de masa respecto al inicio del contacto, y por otro lado la penetración ocurrida en el nodo donde impactan ambos cuerpos. Ambos resultados obtenidos por el método de elementos finitos se muestran de forma superpuesta en la Figura 5.3-2. En el gráfico las abscisas son tiempo  $t$ , medido en [s] y las ordenadas son desplazamiento relativo entre el percutor y el rodillo  $x_{rel}$ , medido en [m].

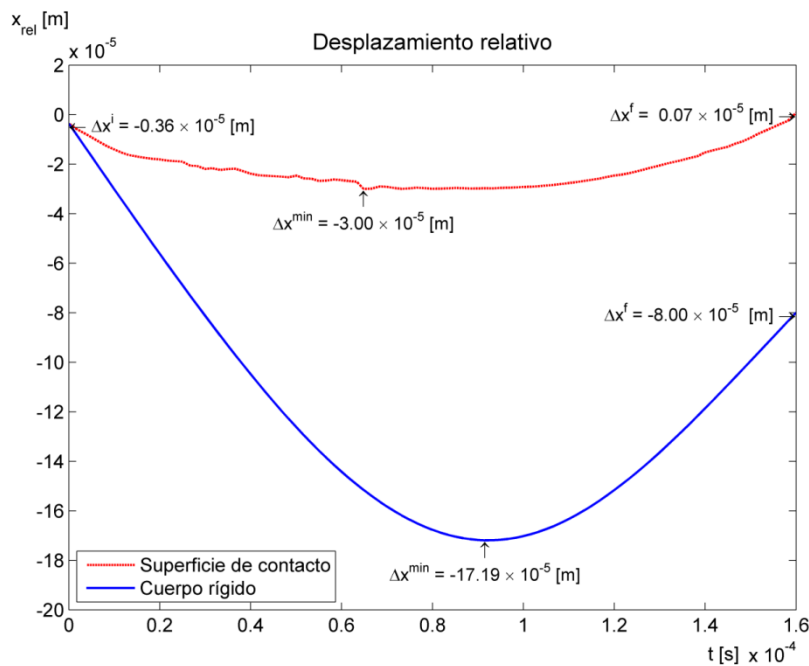


Figura 5.3-2: Desplazamientos relativos entre el percutor y el rodillo.

Se observa que el contacto se inicia cuando existe una separación entre los cuerpos de  $\Delta x^i = -3,6 \times 10^{-6}[m]$ , esto se debe al incremento de tiempo y a la discretización de las superficies que emplea el algoritmo para detectar el contacto. Ocurre un desplazamiento relativo mínimo  $\Delta x^{min} = -1,72 \times 10^{-4}[m]$ , de ambos cuerpos, considerados como rígidos, es decir se acercan las posiciones de sus centros de masa. Cuando finaliza la fuerza de contacto calculada, la distancia relativa entre ambos cuerpos es  $\Delta x^f = -8,00 \times 10^{-5}[m]$ , de esta manera la separación entre centros de masa no coincide con la del inicio del contacto. Esta diferencia de posiciones relativas se interpreta físicamente como la deformación permanente experimentada por los cuerpos, durante del contacto.

La penetración entre las superficies en la región de contacto tiene un valor máximo de  $\Delta x^{min} = -3 \times 10^{-5}[m]$ , y al finalizar el contacto es de  $\Delta x^f = 7 \times 10^{-7}[m]$ , que expresa la separación relativa de la superficies y por consiguiente la finalización de la fuerza de contacto transmitida. Si bien se establece un modelo de contacto duro, que teóricamente no permite penetración, la ejecución de esta restricción se realiza mediante la penalidad, es decir colocando una rigidez entre los cuerpos, cuyo valor se calcula en base a las propiedades de los elementos subyacentes a la superficie de contacto.

Se estudia el comportamiento de la diferencia de velocidades de cuerpo rígido entre el percutor y el rodillo durante el período de contacto, que se muestra en la Figura 5.3-3. En el gráfico las abscisas son tiempo  $t$ , medido en  $[s]$  y las ordenadas son velocidad relativa entre el percutor y el rodillo  $v_{rel}$ , medida en  $[m/s]$ .

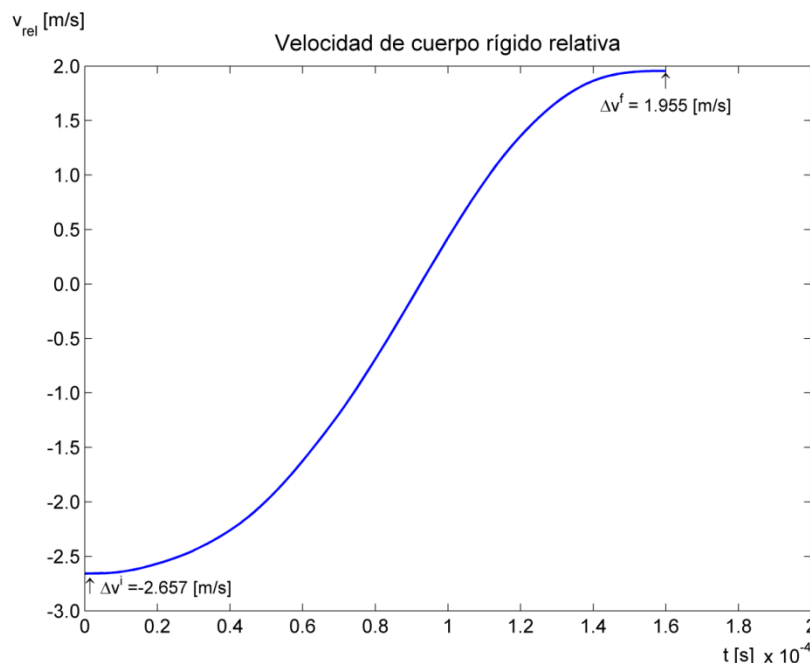


Figura 5.3-3: Diferencia de velocidad de cuerpo rígido entre el rodillo y el percutor.

El comportamiento de la velocidad se resume por el modelo de Newton que propone un coeficiente de restitución  $e$ , cuyo valor se calcula como:

$$e = -\frac{\Delta v^f}{\Delta v^i} = -\frac{1,955 \text{ [m/s]}}{-2.658 \text{ [m/s]}} = 0,733 \text{ [-]}$$

Todos los modelos analíticos proponen una fuerza que tiene la misma duración  $t_d$  que la obtenida mediante el método de elementos finitos, pero difieren en el resto de los parámetros y expresan sus capacidades para representar el resultado numérico.

Los modelos analíticos cuyos parámetros se obtienen mediante el método de la regresión lineal cumplen trivialmente con la igualdad de impulso, por lo que este valor no se tiene en cuenta.

A continuación se muestran los resultados de los modelos analíticos planteados para representar la fuerza de contacto obtenida mediante el método de elementos finitos.

### Modelo de Kelvin-Voigt

En la Figura 5.3-4 se contrasta la estimación lograda por el modelo de Kelvin-Voigt para la fuerza de contacto, y el resultado extraído mediante el método de elementos finitos. En el gráfico las abscisas son tiempo  $t$ , medido en [s] y las ordenadas son fuerza de contacto  $F$ , medida en [N].

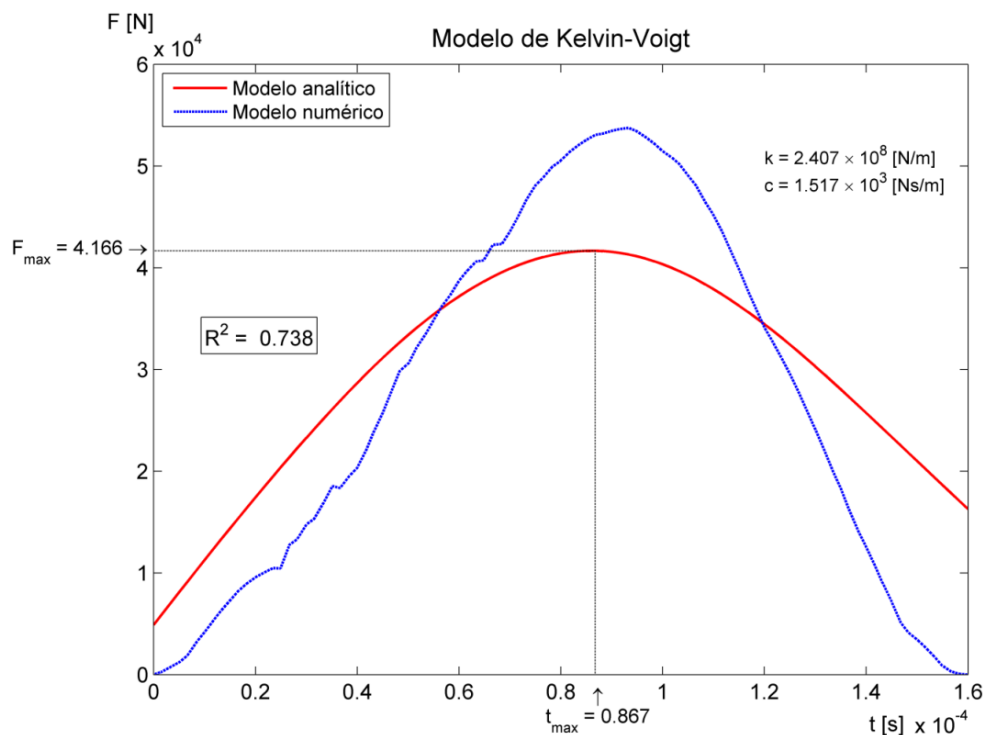


Figura 5.3-4: Comparación entre el modelo numérico y el modelo de Kelvin-Voigt.

Los parámetros del modelo de Kelvin-Voigt son:

$$k = 2,407 \times 10^8 \left[ \frac{N}{m} \right]$$

$$c = 1,517 \times 10^3 \left[ \frac{N}{m/s} \right]$$



Luego de conocer los parámetros de contacto, la fuerza de contacto se expresa como:

$$F_{cont} = 1,517 \times 10^3 \left[ \frac{N}{m/s} \right] \cdot v_{rel} + 2,407 \times 10^8 \left[ \frac{N}{m} \right] \cdot x_{rel}$$

Se observa que en el modelo analítico el valor máximo de fuerza es menor y ocurre antes que en el modelo numérico.

El planteo del modelo es muy simple, pero la mayor deficiencia es la discontinuidad de fuerza en los extremos del período de contacto, especialmente en la finalización, que se atribuye a que la variable explicativa  $\Delta x^f \neq 0$ .

### Modelo de histerético

En la Figura 5.3-5 se contrasta la estimación lograda por el modelo histerético para la fuerza de contacto, y el resultado extraído mediante el método de elementos finitos. En el gráfico las abscisas son tiempo  $t$ , medido en [s] y las ordenadas son fuerza de contacto  $F$ , medida en [N].

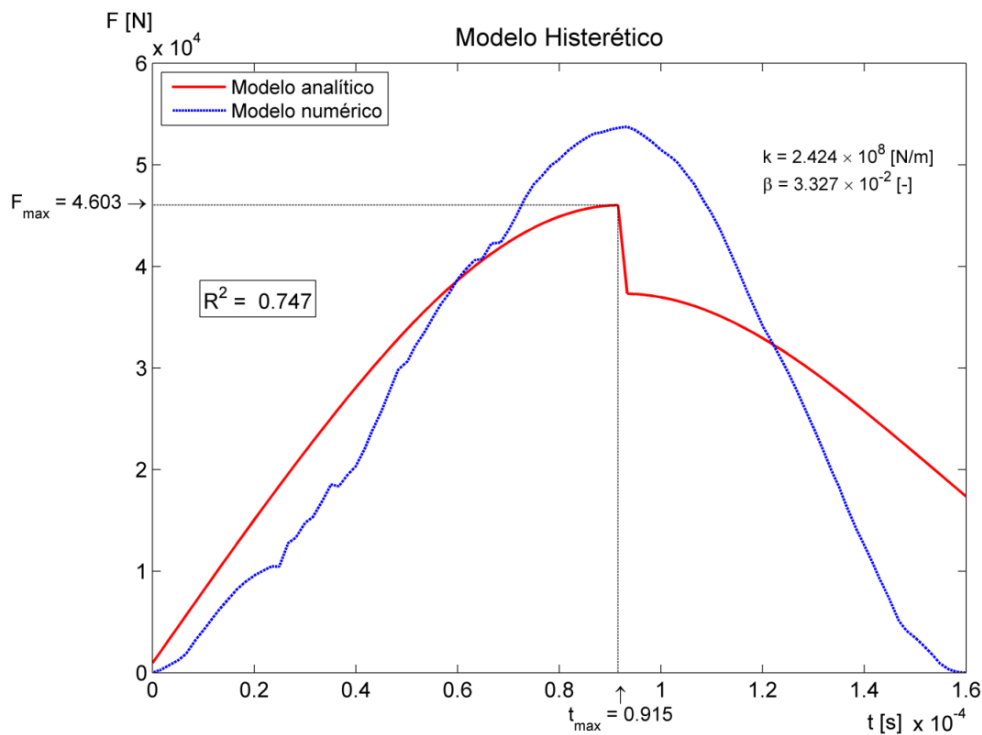


Figura 5.3-5: Comparación entre el modelo numérico y el modelo histerético.

Los parámetros del modelo histerético son:

$$k = 2,424 \times 10^8 \left[ \frac{N}{m} \right]$$

$$\beta = 3,327 \times 10^{-2} \text{ [-]}$$

Luego de conocer los parámetros de contacto, la fuerza de contacto se expresa como:

$$F_{cont} = 2,424 \times 10^8 \left[ \frac{N}{m} \right] \cdot (\pi \cdot 3,327 \times 10^{-2} [-] \cdot \text{sgn}(v_{rel}) |x_{rel}| + x_{rel})$$

Este modelo plantea básicamente dos valores de rigidez, dependiendo si los cuerpos se acercan o se alejan. La principal falencia que presenta es la discontinuidad de fuerza que ocurre cuando se opone el sentido de la velocidad relativa, y la magnitud del cambio es proporcional al parámetro  $\beta$ .

### Modelo de Maxwell

En la Figura 5.3-6 se contrasta la estimación lograda por el modelo de Maxwell para la fuerza de contacto, y el resultado extraído mediante el método de elementos finitos. En el gráfico las abscisas son tiempo  $t$ , medido en [s] y las ordenadas son fuerza de contacto  $F$ , medida en [N].

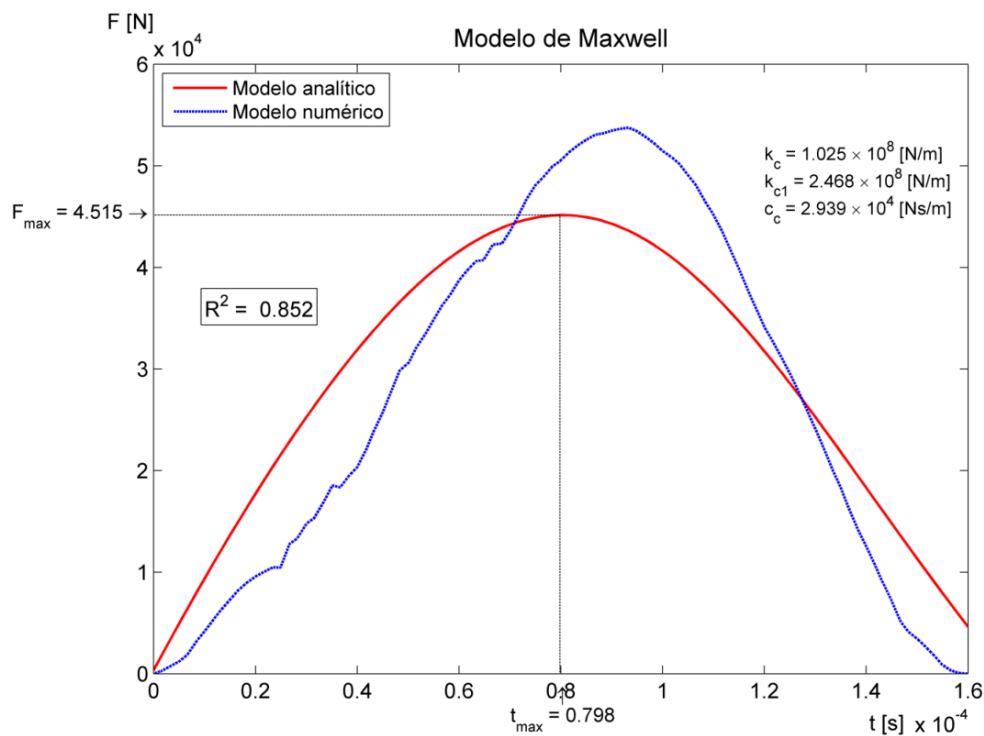


Figura 5.3-6: Comparación entre el modelo numérico y el modelo de Maxwell.

Los parámetros del modelo de Maxwell son:

$$k_c = 1,025 \times 10^8 \text{ [N/m]}$$

$$k_{c1} = 2,468 \times 10^8 \text{ [N/m]}$$

$$c_c = 2,939 \times 10^4 \text{ [Ns/m]}$$

Luego de conocer los parámetros, la fuerza de contacto se expresa de dos maneras:

$$F_{cont} = 1,025 \times 10^8 \text{ [N/m]} \cdot x_{rel} + 2,468 \times 10^8 \text{ [N/m]} \cdot x_d$$

$$F_{cont} = 1,025 \times 10^8 \text{ [N/m]} \cdot x_{rel} + 2,939 \times 10^4 \text{ [Ns/m]} \cdot v_d$$

La continuidad al finalizar el contacto, presenta una diferencia que se puede atribuir a un desplazamiento relativo que no es nulo  $\Delta x^f \neq 0$ . La carga máxima estimada ocurre antes y tiene una magnitud menor que la prevista mediante modelo de elementos finitos.

### *Análisis de resultados*

La Tabla 5-13 resume los principales resultados obtenidos para cada modelo, que se contrastan respecto al método de elementos finitos. En la tabla se muestra el tipo de modelo, el coeficiente de determinación  $R^2$ , el tiempo en que ocurre la fuerza máxima  $t_{max}$  en [s], la magnitud de la fuerza  $F_{max}$  en [N] y la continuidad en los extremos.

<b>Tipo</b>	<b>Modelo</b>	<b>R<sup>2</sup></b>	<b>t<sub>max</sub></b>	<b>F<sub>max</sub></b>	<b>Continuidad</b>
<b>Numérico</b>	Elementos finitos	1,000	9,6051E-05	53416	Si
<b>Analítico</b>	Kelvin-Voigt	0,761	8,7941E-05	41245	No
<b>Analítico</b>	Histerético	0,769	9,6051E-05	46110	No
<b>Analítico</b>	Maxwell	0,840	8,7941E-05	43823	No

*Tabla 5-13: Parámetros relevantes de los modelos para la fuerza de contacto.*

Para evaluar un modelo, no se considera únicamente el factor de determinación, sino que tiene en cuenta además el cumplimiento de la continuidad de la fuerza en los extremos y en el interior del intervalo de contacto. Ninguno de los modelos analíticos simples, estima una fuerza continua, esta limitación se debe a las no linealidades que ocurren durante el fenómeno de impacto, que no se representa adecuadamente mediante elementos de comportamiento lineal.

Cabe recalcar que para estimar los parámetros de los modelos analíticos, se toma como referencia el primer impacto que ocurre entre el percutor y el rodillo o extremo de tija.



## 6 Simulación numérica del ensayo de choque

En este capítulo se presenta la simulación matemática del *ensayo de choque, caída de una masa* que involucra un fenómeno de contacto ocurrido entre el percutor y el extremo de la tija maciza o rodillo. La situación se aborda estudiando los cuerpos involucrados de distinta manera. En este sentido primero se desarrollan los modelos de masas concentradas y posteriormente se tratan los modelos de elementos finitos.

### 6.1 Simulación del ensayo mediante masas concentradas

Los modelos de simulación de masas concentradas se basan en la suposición básica de que los cuerpos que impactan son masas puntuales, donde cada una tiene una magnitud de masa que es igual a la masa total del cuerpo que representa. En general estos modelos, utilizan las variables de cuerpo rígido de los objetos involucrados.

En el presente trabajo, los modelos puntuales se proponen con el objetivo de obtener una visión macroscópica o en sentido promedio del comportamiento de:

- Las variables cinemáticas de los cuerpos involucrados en el contacto.
- La fuerza de contacto entre el percutor y el rodillo.

La aplicación de cada modelo particular permite obtener las respuestas para el comportamiento global durante el fenómeno de contacto, expresada mediante una escasa cantidad de parámetros, que brindan una interpretación física y en algunos casos admiten ser representados por componentes conocidos como un resorte elástico o un amortiguador viscoso.

En esta sección se proponen hipótesis simplificativas generales y particulares de cada uno de los modelos. Luego se muestra una representación gráfica que permite una clara interpretación de la situación analizada. Posteriormente, a partir de los diagramas de cuerpo libre, se plantean las ecuaciones de equilibrio de fuerzas verticales que rigen el movimiento de los cuerpos involucrados durante la interacción de contacto. Se obtienen ecuaciones diferenciales de segundo orden, que se deben integrar para obtener soluciones. En algunos casos se dispone de soluciones analíticas, mientras que en otros casos se recurre a la resolución numérica, planteando la formulación de espacio de estado que se trata en el Apéndice 9.1, la cual se implementa numéricamente mediante el método de Dormand Prince que emplea la formulación de Runge-Kutta de 4° y 5° orden, que se describe en el Apéndice 9.2. Finalmente se desarrollan las respuestas comunes a todos los modelos, que corresponden a los comportamientos libres del percutor y del extremo.

Algunos de los modelos para implementarse requieren parámetros de contacto, que se estiman a partir de los resultados logrados en el análisis de choque tratado en la sección 5.3. Posteriormente en la sección 6.1.7 se exponen los resultados obtenidos de la aplicación de los modelos de simulación del ensayo mediante cuerpos puntuales, que se implementan utilizando el software Matlab (27).

En el modelo de masas concentradas, los cuerpos no ocupan espacio y se representan por una coordenada espacial solidaria, cuya ubicación es arbitraria y no tiene significado dentro del modelo puntual. Sin embargo en el esquema planteado para cada modelo se grafica un cuerpo para enfatizar que en realidad la coordenada tiene masa asociada, permitiendo distinguirla de puntos que representan grados de libertad que no tienen masa asociada.

Los distintos enfoques propuestos se diferencian en la forma que plantean el contacto entre ambas masas concentradas y se mencionan a continuación:

- Modelo plástico perfecto sin considerar la masa del extremo.
- Modelo plástico perfecto considerando la masa del extremo.
- Modelo elástico perfecto.
- Modelo de Newton (Coeficiente de restitución).
- Modelo de Kelvin-Voigt.
- Modelo de Maxwell.

Todos los modelos proponen la existencia de dos grados de libertad dinámicos, que se acoplan o no en determinadas circunstancias debido a la presencia del fenómeno de contacto, y plantean las siguientes hipótesis generales:

- Se considera que todos los grados de libertad corresponden a traslaciones verticales, despreciando desplazamientos en cualquier otra dirección o rotaciones de los cuerpos involucrados.
  - Por convención se toman positivos los desplazamientos, las velocidades y las aceleraciones hacia arriba.
  - El extremo de la horquilla-tija maciza se encuentra en reposo, en la posición de equilibrio estático libre antes del primer impacto.
  - Se toma como referencia para el análisis la posición de equilibrio con el percutor apoyado sobre el rodillo o extremo de la tija maciza.
  - Se inicia la simulación con la caída del percutor en el tiempo  $t = 0$ .
  - Se conserva la cantidad de movimiento luego del impacto.
- A continuación se tratan cada uno de los modelos.

### 6.1.1 Modelo plástico perfecto

En este modelo se distinguen dos estados de los cuerpos involucrados en el impacto:

- Estado de contacto
- Estado separado

Para definir el estado se basa en dos condiciones. El estado de contacto comienza luego del cumplimiento de la condición de contacto, y el estado separado comienza con la condición de separación.

Cuando el desplazamiento del extremo y del percutor coinciden comienza un nuevo contacto  $i$ , y esta coordenada corresponde a un desplazamiento inicial  $X_{0i}$ .

El modelo plástico perfecto propone que en el impacto las velocidades de los cuerpos se igualan instantáneamente. Por lo tanto la velocidad inicial luego del contacto  $i$  –ésimo entre el percutor y el extremo debido a la conservación de cantidad de movimiento es:

$$V_{oi} = \frac{v_{ext} \cdot m_{ext} + v_{per} \cdot m_{per}}{m_{ext} + m_{per}}$$

donde:

$v_{ext}$  es la velocidad del extremo o rodillo antes del impacto  $i$

$v_{per}$  es la velocidad del percutor antes del impacto  $i$

$V_{oi}$  es la velocidad del conjunto luego del impacto  $i$

El percutor no está unido solidariamente al extremo durante el contacto, por lo tanto luego del impacto, permanece en contacto siempre que la aceleración del conjunto  $a_{con}$  cumpla con las siguientes condiciones:

- $a_{con} \geq -g$  El percutor permanece en contacto con el extremo
- $a_{con} < -g$  El percutor se separa del extremo

Luego de la separación se tienen dos comportamientos que denominamos libres:

- El percutor se acelera hacia abajo debido a la acción de la gravedad.
- El extremo retorna a su posición de equilibrio estático.

El contacto se rige por las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del extremo y se mantendrá mientras se cumpla la condición de aceleración del percutor expuesta anteriormente.

El modelo implica repetir el procedimiento para cada ciclo separado-contacto, hasta que no ocurran más separaciones y se alcance el equilibrio estático del sistema.

Se plantean dos tipos de modelos plásticos, en función de la masa del extremo:

- Se desprecia la masa del extremo  $m_{ext} = 0$
- Se considera la masa del extremo  $m_{ext} > 0$

A continuación se desarrollan individualmente cada uno de estos modelos.

### 6.1.1.1 Modelo plástico perfecto despreciando la masa del extremo

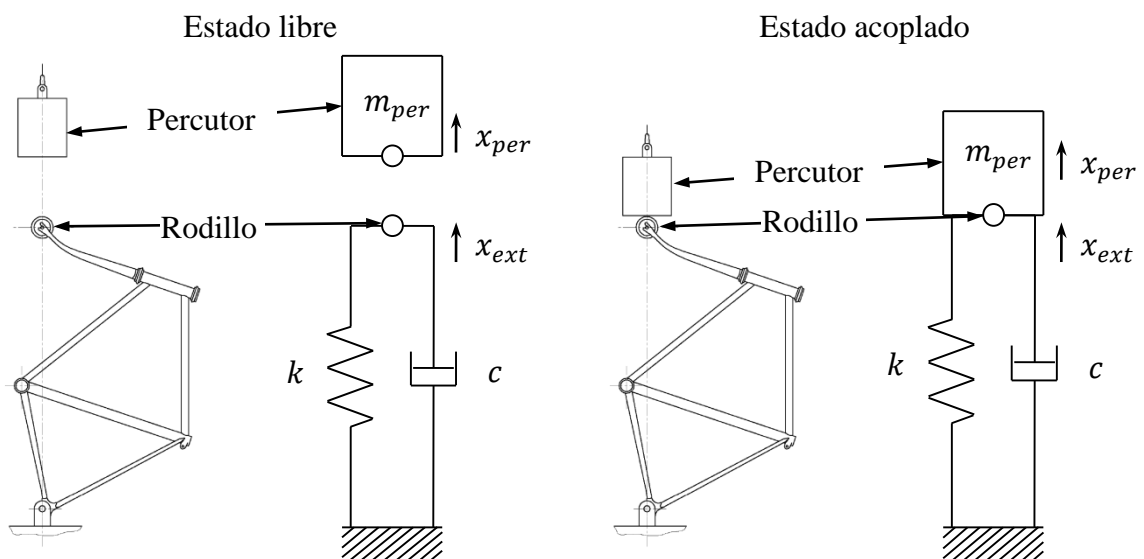


Figura 6.1-1: Diagrama del modelo plástico perfecto despreciando la masa del extremo.

En la Figura 6.1-1 se muestra la representación de las partes que participan del ensayo de choque, según el modelo plástico perfecto despreciando la masa del extremo, para los estados libre y acoplado.

El modelo desprecia la masa del cuadro asociada al desplazamiento vertical del extremo y considera únicamente la masa de percutor.

A continuación se tratan los comportamientos del estado acoplado y los estados libre de los cuerpos involucrados.

#### 6.1.1.1.1 El comportamiento del conjunto percutor-extremo durante el contacto

Se desarrolla el comportamiento del conjunto para dos modelos de amortiguamiento del conjunto cuadro-tija, el viscoso y el histerético, que se tratan a continuación.

##### **Comportamiento del cuadro-tija con amortiguamiento viscoso**

Las propiedades del sistema son:

$$m = m_{per} + m_{ext} : \text{Masa del conjunto}$$

$$m = m_{per} \because m_{ext} = 0$$

$k$ : Rigidez equivalente del cuadro

$c$ : Amortiguamiento viscoso equivalente del cuadro

Se tiene un sistema sujeto a las condiciones iniciales:

$$X_0 = x_{cont} - x_{ref} : \text{Desplazamiento inicial}$$

$$V_0 = v_{per} : \text{Velocidad inicial}$$

donde:

$$x_{ref} = 0 : \text{Posición de equilibrio estático del conjunto}$$

$$x_{cont} : \text{Posición de inicio de contacto}$$

Por lo tanto tenemos un sistema de un grado de libertad con amortiguamiento viscoso sujeto a condiciones inicial cuya respuesta analítica se desarrolla en la sección 6.1.6.

##### **Comportamiento del cuadro-tija con amortiguamiento histerético**

Mediante los diagramas de cuerpo libre del conjunto percutor-extremo, se plantea el equilibrio de fuerzas verticales sobre el conjunto como:

$$-m_{con}(a_{con} + g) - k \cdot ((x_{con} - \delta_{est}) + \pi\beta_h \cdot \text{sgn}(v_{con})|x_{con} - \delta_{est}|) = 0$$

$$m_{con} = m_{per} + m_{ext} : \text{Masa del conjunto}$$

$$m_{con} = m_{per} \because m_{ext} = 0$$

Se obtiene la aceleración vertical como:

$$a_{con} = \frac{1}{m_{con}} [-k \cdot ((x_{con} - \delta_{est}) + \pi\beta_h \cdot \text{sgn}(v_{con})|x_{con} - \delta_{est}|)] - g$$



La aceleración del conjunto  $a_{con}$  se integra numéricamente. Para ello se plantea la formulación de espacio de estado donde se tiene:

$$\begin{aligned}\{X_1\} &= \{q\} = \{x_{con}\} : \text{Vector desplazamiento} \\ \{X_2\} &= \{\dot{X}_1\} = \{\dot{q}\} = \{v_{con}\} : \text{Vector velocidad} \\ \{\dot{X}_2\} &= \{\ddot{X}_1\} = \{\ddot{q}\} = \{a_{con}\} : \text{Vector aceleración}\end{aligned}$$

Se adopta la siguiente convención para el vector solución

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{con} \\ v_{con} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X(1) \\ X(2) \end{Bmatrix}$$

La derivada respecto al tiempo del vector solución es:

$$\{\dot{X}\} = \begin{Bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_{con} \\ a_{con} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{dX(1)}{dt} \\ \frac{dX(2)}{dt} \end{Bmatrix}$$

Los componentes del vector de velocidad:

$$\frac{dX(1)}{dt} = v_{con} = X(2)$$

$$\frac{dX(2)}{dt} = a_{con} = \frac{1}{m_{con}} \left[ -k \cdot (x_{con} - \delta_{est}) + \pi\beta_h \cdot \text{sgn}(v_{con}) |x_{con} - \delta_{est}| \right] - g$$

$$\frac{dX(2)}{dt} = a_{con} = \frac{1}{m_{con}} \left[ -k \cdot (X(1) - \delta_{est}) + \pi\beta_h \cdot \text{sgn}(X(2)) |X(1) - \delta_{est}| \right] - g$$

Se requieren dos condiciones iniciales:

$x_{0ext}$ : Posición al iniciar el contacto

$v_{0ext}$ : Velocidad al iniciar el contacto

Se integran numéricamente las dos ecuaciones para obtener la velocidad y el desplazamiento de los cuerpos durante la duración del contacto.

#### 6.1.1.1.2 El comportamiento del extremo libre

Se desarrolla el comportamiento del extremo para dos modelos de amortiguamiento del conjunto cuadro-tija, el viscoso y el histerético, que se tratan a continuación.

##### **Comportamiento del cuadro-tija con amortiguamiento viscoso**

Mediante los diagramas de cuerpo libre del cuadro y horquilla-tija maciza se plantea el equilibrio de fuerzas verticales sobre el extremo como:

$$k \cdot x_{ext} + c \cdot v_{ext} = 0$$

Las respuestas para el desplazamiento  $x_{ext}(t)$ , la velocidad  $v_{ext}(t)$  y la aceleración  $a_{ext}(t)$  del extremo de la tija o rodillo se exponen a continuación:

$$x_{ext}(t) = x_{fi} e^{-(t-t_{fi})\frac{k}{c}}$$

$$v_{ext}(t) = -\frac{k}{c} x_{fi} e^{-(t-t_{fi})\frac{k}{c}}$$

$$a_{ext}(t) = \left(\frac{k}{c}\right)^2 x_{fi} e^{-(t-t_{fi})\frac{k}{c}}$$

donde:

$x_{fi}$  es el desplazamiento al finalizar el contacto  $i$

$t_{fi}$  es el tiempo al finalizar el contacto  $i$

$k$  es la rigidez equivalente al cuadro

$c$  es el amortiguamiento viscoso equivalente al cuadro

### Comportamiento del cuadro-tija con amortiguamiento histerético

Mediante los diagramas de cuerpo libre del cuadro y horquilla-tija maciza se plantea el equilibrio de fuerzas verticales sobre el extremo, que expresa la Ecuación (6.1-1).

$$k \cdot (x_{ext} + \pi\beta_h \cdot \text{sgn}(v_{ext})|x_{ext}|) = 0 \quad (6.1-1)$$

En la expresión (6.1-1) no se puede despejar la velocidad para integrarse y obtener el desplazamiento, por lo tanto en general se cumplen las siguientes condiciones:

$k \neq 0$  La rigidez del cuadro no es nula

$\beta_h \neq 0$  La constante de fricción no es nula

Se analizan los posibles comportamientos de  $x_{ext}$  y  $v_{ext}$ , obteniendo en todas las situaciones la misma respuesta, donde el extremo retorna inmediatamente a su posición de equilibrio estático con  $v_{ext} \rightarrow \pm\infty$  según  $\text{sgn}(x_{ext})$ , debido a que cualquier desequilibrio de fuerzas actúa sobre un nodo sin masa, ya que no se considera la masa asociada al extremo en este modelo plástico.

#### 6.1.1.1.3 El comportamiento del percutor libre

Las ecuaciones que rigen el comportamiento libre del percutor son comunes a todos los modelos puntuales propuestos y se desarrollan posteriormente en la sección 6.1.6.

#### 6.1.1.2 Modelo plástico perfecto considerando la masa del extremo

En la Figura 6.1-2 se muestra la representación de las partes que participan del ensayo de choque, según el modelo plástico perfecto considerando la masa del extremo, para los estados libre y acoplado.

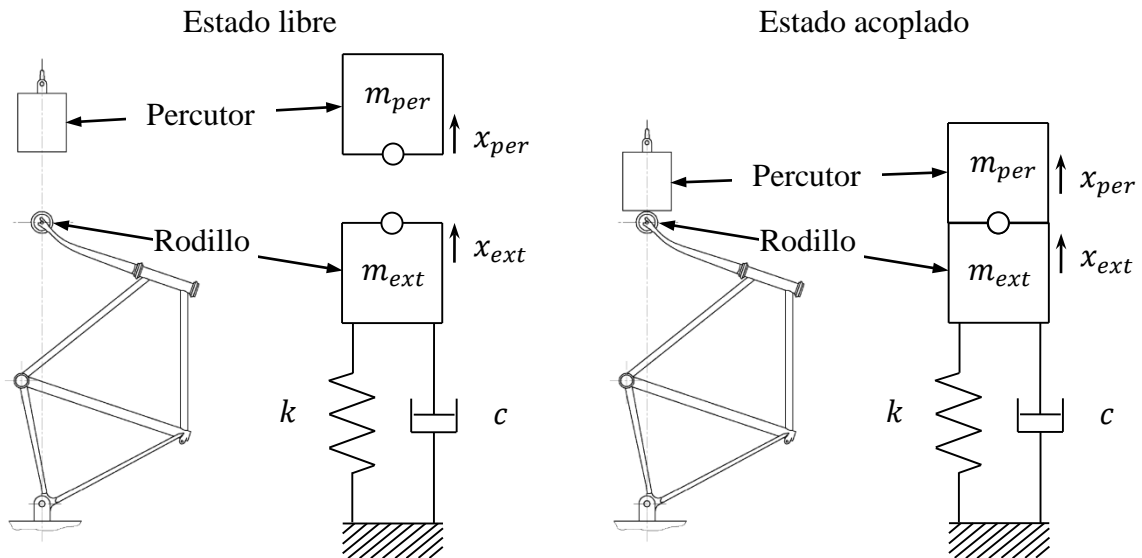


Figura 6.1-2: Diagrama del modelo plástico perfecto considerando la masa del extremo.

El modelo considera la masa de percutor y además tiene en cuenta la masa del conjunto cuadro-tija asociada al desplazamiento vertical del extremo.

La masa del extremo de la tija o rodillo se establece por la Norma, pero en un principio se desconoce la masa total asociada con el grado de libertad que corresponde al desplazamiento vertical del extremo de la horquilla o tija maciza. El valor de masa que mejor representa el comportamiento real se obtiene a partir de los análisis dinámicos del conjunto cuadro-tija en la configuración de ensayo que se describen en la sección 5.1.2.1 donde se estudia la respuesta dinámica libre.

A continuación se tratan los comportamientos de los estados acoplado y libre de los cuerpos que participan del impacto.

#### 6.1.1.2.1 El comportamiento del conjunto percutor-extremo durante el contacto

Se desarrolla el comportamiento del conjunto para dos modelos de amortiguamiento del cuadro, el viscoso y el histerético, que se tratan a continuación.

##### Comportamiento del cuadro-tija con amortiguamiento viscoso

Mientras los cuerpos están en contacto se define una masa equivalente que es la suma de la masa del percutor y la masa del extremo asociada al movimiento vertical.

Las propiedades del sistema son:

$m = m_{ext} + m_{per}$  : Masa de conjunto

$k$ : Rigidez equivalente del cuadro

$c$ : Amortiguamiento viscoso equivalente del cuadro

Se tiene un sistema sujeto a las condiciones iniciales:

$X_0 = x_{cont} - x_{ref}$  : Desplazamiento inicial

$V_0 = \frac{v_{ext} \cdot m_{ext} + v_{per} \cdot m_{per}}{m_{ext} + m_{per}}$  : Velocidad inicial

donde:

$x_{ref} = 0$ : Posición de equilibrio estático del conjunto

$x_{cont} =$  Posición de inicio de contacto

Por lo tanto tenemos un sistema de un grado de libertad con amortiguamiento viscoso sujeto a condiciones inicial cuya respuesta analítica se desarrolla posteriormente en la sección 6.1.6.

### Comportamiento del cuadro-tija con amortiguamiento histerético

Mediante los diagramas de cuerpo libre del conjunto percutor-extremo, se plantea el equilibrio de fuerzas verticales sobre el conjunto como:

$$-(m_{per} + m_{ext})(a_{con}) - (m_{per}g) - k \cdot ((x_{con} - \delta_{est}) + \pi\beta_h \cdot \text{sgn}(v_{con})|x_{con} - \delta_{est}|) = 0$$

Se obtiene la aceleración vertical del conjunto  $a_{con}$  como:

$$a_{con} = \frac{1}{(m_{per} + m_{ext})} [-k((x_{con} - \delta_{est}) + \pi\beta_h \cdot \text{sgn}(v_{con})|x_{con} - \delta_{est}|) - g \cdot m_{per}]$$

La aceleración del conjunto se integra numéricamente. Para ello se plantea la formulación de espacio de estado donde se tiene:

$\{X_1\} = \{q\} = \{x_{con}\}$  : Vector desplazamiento

$\{X_2\} = \{\dot{X}_1\} = \{\dot{q}\} = \{v_{con}\}$  : Vector velocidad

$\{\dot{X}_2\} = \{\ddot{X}_1\} = \{\ddot{q}\} = \{a_{con}\}$  : Vector aceleración

Se adopta la siguiente convención para el vector solución

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{con} \\ v_{con} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X(1) \\ X(2) \end{Bmatrix}$$

La derivada respecto al tiempo del vector solución es:

$$\{\dot{X}\} = \begin{Bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_{con} \\ a_{con} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{dX(1)}{dt} \\ \frac{dX(2)}{dt} \end{Bmatrix}$$

Los componentes del vector velocidad:

$$\frac{dX(1)}{dt} = v_{con} = X(2)$$

$$\frac{dX(2)}{dt} = a_{con} = \frac{1}{(m_{per} + m_{ext})} [-k((x_{con} - \delta_{est}) + \pi\beta_h \cdot \text{sgn}(v_{con})|x_{con} - \delta_{est}|) - g \cdot m_{per}]$$

$$\frac{dX(2)}{dt} = a_{con} = \frac{1}{(m_{per} + m_{ext})} [-k((X(1) - \delta_{est}) + \pi\beta_h \cdot \text{sgn}(X(2))|X(1) - \delta_{est}|) - g \cdot m_{per}]$$

Se requieren dos condiciones iniciales:

$x_{0con}$ : Posición al iniciar el contacto

$v_{0con}$ : Velocidad al iniciar el contacto

Se integran numéricamente las dos ecuaciones para obtener la velocidad y el desplazamiento de los cuerpos en contacto.

### 6.1.1.2.2 El comportamiento libre del percutor y del extremo

Las ecuaciones que rigen el comportamiento libre del percutor y del extremo son comunes a todos los modelos puntuales propuestos y se desarrollan posteriormente en la sección 6.1.6.

### 6.1.2 Modelo elástico perfecto

En la Figura 6.1-3 se muestra la representación de las partes que participan del ensayo de choque, según el modelo elástico perfecto para el estado libre y el contacto instantáneo.

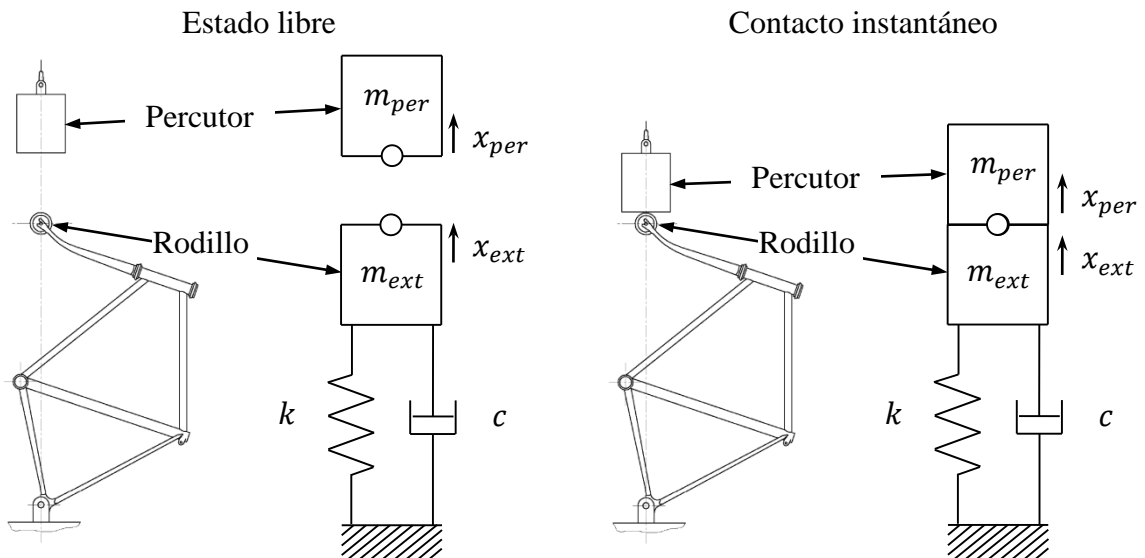


Figura 6.1-3: Diagrama del modelo elástico perfecto.

El modelo de impacto elástico perfecto se basa en dos hipótesis:

- Se conserva la cantidad de movimiento, que se expresa en la Ecuación (6.1-2),

$$v_{per}^i \cdot m_{per} + v_{ext}^i \cdot m_{ext} = v_{per}^f \cdot m_{per} + v_{ext}^f \cdot m_{ext} \quad (6.1-2)$$

- Se conserva la energía cinética, que se manifiesta mediante la Ecuación (6.1-3),

$$\frac{1}{2} m_{per} \cdot (v_{per}^i)^2 + \frac{1}{2} m_{ext} \cdot (v_{ext}^i)^2 = \frac{1}{2} m_{per} \cdot (v_{per}^f)^2 + \frac{1}{2} m_{ext} \cdot (v_{ext}^f)^2 \quad (6.1-3)$$

Los superíndices i y f de las variables representan los estados antes y después del impacto respectivamente. El cumplimiento simultáneo de las Ecuaciones (6.1-2) y (6.1-3) representa un choque perfectamente elástico.

Suponiendo que se conocen las velocidades en el instante anterior al impacto, se calculan las velocidades del extremo y del rodillo luego,

$$v_{ext}^f = \frac{(m_{ext} - m_{per}) \cdot v_{ext}^i + 2 \cdot m_{per} \cdot v_{per}^i}{m_{ext} + m_{per}} : \text{Velocidad final del extremo}$$

$$v_{per}^f = \frac{2 \cdot m_{per} \cdot v_{ext}^i + (m_{ext} - m_{per}) \cdot v_{per}^i}{m_{ext} + m_{per}} : \text{Velocidad final del percutor}$$

A partir de la Ecuación (6.1-2) se calcula la velocidad del centro de masa  $V_{cm}$ , antes del impacto como:

$$V_{cm} = \frac{v_{ext}^i \cdot m_{ext} + v_{per}^i \cdot m_{per}}{m_{ext} + m_{per}}$$

Utilizando la velocidad del centro de masa antes del impacto, las velocidades del extremo y del percutor luego del impacto son:

$$v_{ext}^f = 2 \cdot V_{cm} - v_{ext}^i : \text{Velocidad final del extremo}$$

$$v_{per}^f = 2 \cdot V_{cm} - v_{per}^i : \text{Velocidad final del percutor}$$

En este modelo, el contacto tiene duración ideal instantánea, por lo tanto el percutor y el conjunto cuadro y horquilla o tija maciza tienen un comportamiento libre.

Las ecuaciones que rigen el comportamiento libre del percutor y del extremo son comunes a todos los modelos puntuales propuestos y se desarrollan posteriormente en la sección 6.1.6.

### 6.1.3 Modelo de Newton

En la Figura 6.1-4 se muestra la representación de las partes que participan del ensayo de choque, según el modelo de Newton para el estado libre y el contacto instantáneo.

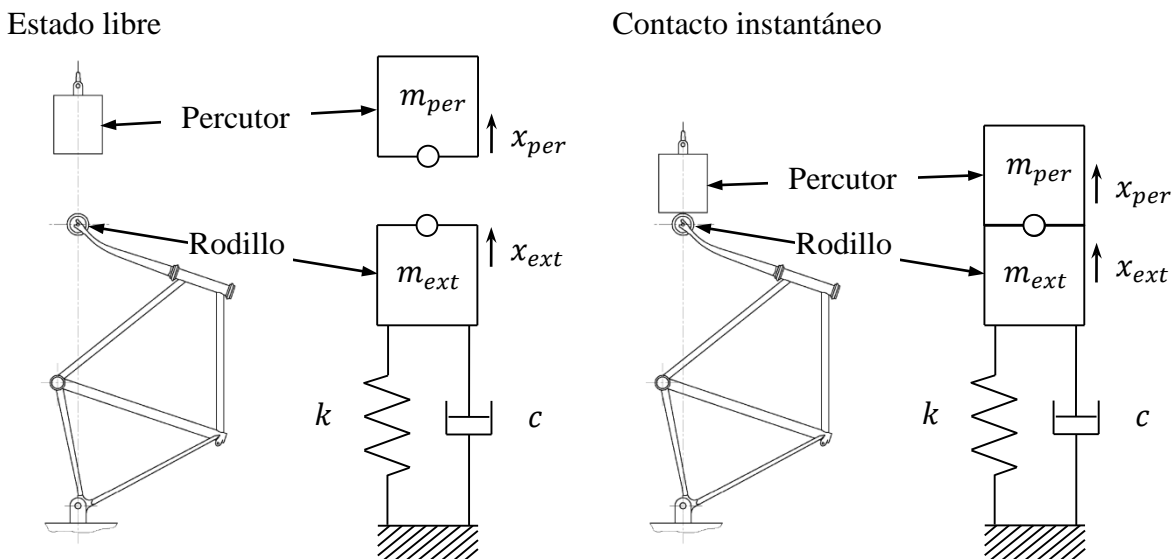


Figura 6.1-4: Diagrama del modelo de Newton.

El modelo de impacto de Newton se basa en tres hipótesis:

- Se conserva la cantidad de movimiento, antes y después de cada contacto, expresado en la Ecuación (6.1-2),

$$v_{per}^i \cdot m_{per} + v_{ext}^i \cdot m_{ext} = v_{per}^f \cdot m_{per} + v_{ext}^f \cdot m_{ext} \quad (6.1-2)$$

- La energía cinética luego del impacto puede variar.
- La relación entre velocidades relativas antes y después del impacto es constante, y se rige por la Ecuación (6.1-4),

$$e = -\frac{\Delta v^f}{\Delta v^i} = -\frac{(v_{per}^f - v_{ext}^f)}{(v_{per}^i - v_{ext}^i)} \text{ con } 0 \leq e \leq 1 \quad (6.1-4)$$

donde  $e$  es el coeficiente de restitución, y dependiendo del valor se tienen los siguientes tipos de choques:

$$e = 0 \quad \therefore \text{Choque plástico perfecto}$$

$$0 < e < 1 \quad \therefore \text{Choque parcialmente elástico}$$

$$e = 1 \quad \therefore \text{Choque elástico perfecto}$$

Suponiendo que se conocen las velocidades en el instante antes del impacto se obtienen las velocidades del extremo y del percutor luego del impacto.

$$v_{ext}^f = \frac{(m_{ext} - m_{per} \cdot e) \cdot v_{ext}^i + m_{per} \cdot (1 + e)v_{per}^i}{m_{ext} + m_{per}} : \text{Velocidad final del extremo}$$

$$v_{per}^f = \frac{m_{per} \cdot (1 + e)v_{ext}^i + (m_{ext} - m_{per} \cdot e) \cdot v_{per}^i}{m_{ext} + m_{per}} : \text{Velocidad final del percutor}$$

A partir de la Ecuación (6.1-2) se calcula la velocidad del centro de masa  $V_{cm}$  antes del impacto como:

$$V_{cm} = \frac{v_{ext}^i \cdot m_{ext} + v_{per}^i \cdot m_{per}}{m_{ext} + m_{per}}$$

Utilizando la velocidad del centro de masa antes del impacto, las velocidades del extremo y del percutor luego del impacto son:

$$v_{ext}^f = (1 + e) \cdot V_{cm} - e \cdot v_{ext}^i : \text{Velocidad final del extremo}$$

$$v_{per}^f = (1 + e) \cdot V_{cm} - e \cdot v_{per}^i : \text{Velocidad final del percutor}$$

Para cualquier valor de coeficiente de restitución  $e \neq 0$ , las velocidades de ambos cuerpos luego del impacto son distintas, por lo tanto no permanecen en contacto, sino que chocan y se separan inmediatamente, iniciando un nuevo estado libre.

El coeficiente de restitución se relaciona con la deformación plástica de los cuerpos que chocan, por lo tanto depende de la velocidad de impacto y se expresa como  $e = f(\Delta v^i)$ .

Las ecuaciones que rigen el comportamiento libre del percutor y del extremo son comunes a todos los modelos puntuales propuestos y se desarrollan posteriormente en la sección 6.1.6.

### 6.1.4 Modelo de Kelvin-Voigt

En la Figura 6.1-5 se muestra la representación de las partes que participan del ensayo de choque, según el modelo de Kelvin-Voigt, para los estados libre y acoplado.

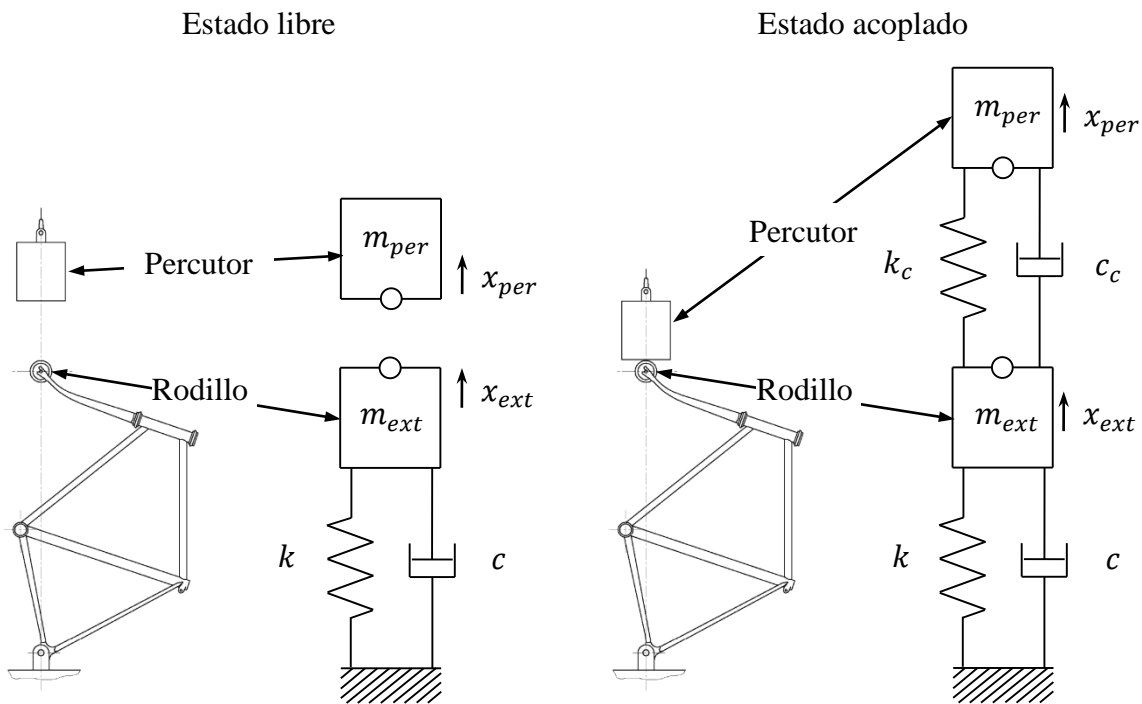


Figura 6.1-5: Diagrama del modelo de Kelvin-Voigt.

A continuación se tratan los comportamientos del estado acoplado y el estado libre de los cuerpos involucrados.

#### 6.1.4.1 El comportamiento del conjunto percutor-extremo durante el contacto

Se desarrolla el comportamiento del conjunto para dos modelos de amortiguamiento del cuadro, el viscoso y el histerético, que se tratan a continuación.

#### Comportamiento del sistema con amortiguamiento viscoso

Supone que entre ambos cuerpos tenemos dos elementos colocados en paralelo:

- Un resorte lineal de rigidez  $k_c$
- Un amortiguador viscoso de coeficiente de amortiguamiento  $c_c$

La magnitud de la fuerza de contacto que actúa sobre ambas masas es:

$$F_{cont} = c_c \cdot v_{rel} + k_c \cdot x_{rel}$$

$$F_{cont} = -(a_{per} + g) \cdot m_{per}$$



Mediante los diagramas de cuerpo libre del percutor y el extremo se plantea:

Equilibrio de fuerzas verticales sobre el percutor

$$-(a_{per} + g) \cdot m_{per} - (x_{per} - x_{ext}) \cdot k_c - (v_{per} - v_{ext}) \cdot c_c = 0$$

Equilibrio de fuerzas verticales sobre el extremo

$$-(a_{ext}) \cdot m_{ext} + (x_{per} - x_{ext}) \cdot k_c - (x_{ext} - \delta_{st}) \cdot k + (v_{per} - v_{ext}) \cdot c_c - v_{ext} \cdot c = 0$$

$$-(a_{ext}) \cdot m_{ext} - (c + c_c) \cdot v_{ext} + c_c \cdot v_{per} - (k + k_c) \cdot x_{ext} + k_c \cdot x_{per} + k \cdot \delta_{st} = 0$$

Se obtiene la aceleración del extremo  $a_{ext}$  y la aceleración del percutor  $a_{per}$

$$a_{ext} = \frac{1}{m_{ext}} [-(k + k_c) \cdot x_{ext} + k_c \cdot x_{per} - (c + c_c) \cdot v_{ext} + c_c \cdot v_{per} + k \cdot \delta_{st}]$$

$$a_{per} = \frac{1}{m_{per}} [-(x_{per} - x_{ext}) \cdot k_c - (v_{per} - v_{ext}) \cdot c_c] - g$$

Las aceleraciones se integran numéricamente. Para ello se plantea la formulación de espacio de estado, donde se tiene:

$$\{X_1\} = \{q\} = \begin{Bmatrix} x_{ext} \\ x_{per} \end{Bmatrix} : \text{Vector de desplazamientos}$$

$$\{X_2\} = \{\dot{X}_1\} = \{\dot{q}\} = \begin{Bmatrix} v_{ext} \\ v_{per} \end{Bmatrix} : \text{Vector de velocidades}$$

$$\{\dot{X}_2\} = \{\ddot{X}_1\} = \{\ddot{q}\} = \begin{Bmatrix} a_{ext} \\ a_{per} \end{Bmatrix} : \text{Vector de aceleraciones}$$

Se adopta la siguiente convención para el vector solución

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{ext} \\ x_{per} \\ v_{ext} \\ v_{per} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X(1) \\ X(2) \\ X(3) \\ X(4) \end{Bmatrix}$$

La derivada respecto al tiempo del vector solución es:

$$\{\dot{X}\} = \begin{Bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_{ext} \\ v_{per} \\ a_{ext} \\ a_{per} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{dX(1)}{dt} \\ \frac{dX(2)}{dt} \\ \frac{dX(3)}{dt} \\ \frac{dX(4)}{dt} \end{Bmatrix}$$

Los componentes del vector velocidad:

$$\frac{dX(1)}{dt} = v_{ext} = X(3)$$

$$\frac{dX(2)}{dt} = v_{per} = X(4)$$

$$\frac{dX(3)}{dt} = a_{ext} = \frac{1}{m_{ext}} \left[ -(k + k_c) \cdot x_{ext} + k_c \cdot x_{per} - (c + c_c) \cdot v_{ext} + c_c \cdot v_{per} + k \cdot \delta_{st} \right]$$

$$\frac{dX(3)}{dt} = a_{ext} = \frac{1}{m_{ext}} \left[ -(k + k_c) \cdot X(1) + k_c \cdot X(2) - (c + c_c) \cdot X(3) + c_c \cdot X(4) + k \cdot \delta_{st} \right]$$

$$\frac{dX(4)}{dt} = a_{per} = \frac{1}{m_{per}} \left[ -(x_{per} - x_{ext}) \cdot k_c - (v_{per} - v_{ext}) \cdot c_c \right] - g$$

$$\frac{dX(4)}{dt} = a_{per} = \frac{1}{m_{per}} \left[ -(X(2) - X(1)) \cdot k_c - (X(4) - X(3)) \cdot c_c \right] - g$$

Se tienen 4 ecuaciones diferenciales de primer orden, por lo tanto se requieren 4 condiciones iniciales: 2 desplazamientos y 2 velocidades, donde:

$x_{0ext}$  es la posición del extremo al iniciar el contacto

$x_{0per}$  es la posición del percutor al iniciar el contacto

$v_{0ext}$  es la velocidad del extremo al iniciar el contacto

$v_{0per}$  es la velocidad del percutor al iniciar el contacto

Se integran numéricamente las 4 ecuaciones para obtener las velocidades y los desplazamientos de los cuerpos en contacto.

Durante el planteo de los diagramas de cuerpo libre, se estudian las fuerzas verticales que actúan en los cuerpos del modelo puntual. La acción de la gravedad terrestre interviene, por lo que merece un análisis cuidadoso y se considera oportuno aclarar el tratamiento seguido en el extremo y el percutor.

El extremo se considera una masa concentrada cuya magnitud, representa a la masa real y a una masa adicional para obtener el comportamiento dinámico equivalente. La gravedad terrestre que actúa sobre la masa del extremo, ocasiona una fuerza constante que se equilibra por las reacciones de apoyos, no participando de la interacción de contacto. Por ello se considera que la masa del extremo, se encuentra en equilibrio estático y no se tiene en cuenta la acción de la gravedad sobre el extremo. En las ecuaciones del percutor se considera la aceleración de la gravedad porque no se utiliza como referencia la posición de equilibrio estático.

En el instante anterior al impacto, la aceleración del percutor  $a_{per} = -g$ , coincide con la aceleración luego del impacto si no hay amortiguamiento  $c_c = 0$ . Para cualquier valor de amortiguamiento mayor  $c_c > 0$ , surge una fuerza  $F_d = c_c(v_{per} - v_{ext})$  proporcional a la diferencia de velocidades, por lo que se presenta una discontinuidad de aceleraciones en ambos cuerpos. El surgimiento de esta fuerza instantánea es un comportamiento poco realista que se puede mejorar empleando otro modelo, como el propuesto por Maxwell.

### Comportamiento del sistema con amortiguamiento histerético

Supone que entre ambos cuerpos tenemos dos elementos colocados en paralelo:

- Un resorte lineal de rigidez  $k_c$
- Un amortiguador histerético de coeficiente de amortiguamiento  $\beta_c$

La magnitud de la fuerza de contacto que actúa sobre ambas masas es:

$$F_{cont} = k_c \cdot [x_{rel} + \beta_c \pi \cdot \text{sgn}(v_{rel}) |x_{rel}|]$$

$$F_{cont} = -(a_{per} + g) \cdot m_{per}$$

Mediante los diagramas de cuerpo libre del percutor y el extremo se plantea:

Equilibrio de fuerzas verticales sobre el percutor

$$-(a_{per} + g) \cdot m_{per} - k_c [(x_{per} - x_{ext}) + \beta_c \pi \cdot \text{sgn}(v_{per} - v_{ext}) |x_{per} - x_{ext}|] = 0$$

Equilibrio de fuerzas verticales sobre el extremo

$$-(a_{ext}) \cdot m_{ext} - k_c [+ \beta_c \pi \cdot \text{sgn}(v_{ext}) |x_{ext} - \delta_{st}|] + k_c [(x_{per} - x_{ext}) + \beta_c \pi \cdot \text{sgn}(v_{per} - v_{ext}) |x_{per} - x_{ext}|] = 0$$

Se obtiene la aceleración del extremo  $a_{ext}$  y la aceleración del percutor  $a_{per}$

$$a_{ext} = \frac{1}{m_{ext}} [-k [(x_{ext} - \delta_{st}) + \beta_c \pi \cdot \text{sgn}(v_{ext}) |x_{ext} - \delta_{st}|] + k_c [(x_{per} - x_{ext}) + \beta_c \pi \cdot \text{sgn}(v_{per} - v_{ext}) |x_{per} - x_{ext}|]]$$

$$a_{ext} = \frac{1}{m_{ext}} [-k [(x_{ext} - \delta_{st}) + \beta_c \pi \cdot \text{sgn}(v_{ext}) |x_{ext} - \delta_{st}|] + k_c [(x_{rel}) + \beta_c \pi \cdot \text{sgn}(v_{rel}) |x_{rel}|]]$$

$$a_{per} = \frac{1}{m_{per}} [-k_c [(x_{per} - x_{ext}) + \beta_c \pi \cdot \text{sgn}(v_{per} - v_{ext}) |x_{per} - x_{ext}|]] - g$$

$$a_{per} = \frac{1}{m_{per}} [-k_c [(x_{rel}) + \beta_c \pi \cdot \text{sgn}(v_{rel}) |x_{rel}|]] - g$$

Las aceleraciones se integran numéricamente. Para ello se plantea la formulación de espacio de estado, donde tenemos:

$$\{X_1\} = \{q\} = \begin{Bmatrix} x_{ext} \\ x_{per} \end{Bmatrix} : \text{Vector de desplazamientos}$$

$$\{X_2\} = \{\dot{X}_1\} = \{\dot{q}\} = \begin{Bmatrix} v_{ext} \\ v_{per} \end{Bmatrix} : \text{Vector de velocidades}$$

$$\{\dot{X}_2\} = \{\ddot{X}_1\} = \{\ddot{q}\} = \begin{Bmatrix} a_{ext} \\ a_{per} \end{Bmatrix} : \text{Vector de aceleraciones}$$

Se adopta la siguiente convención para el vector solución

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{ext} \\ x_{per} \\ v_{ext} \\ v_{per} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X(1) \\ X(2) \\ X(3) \\ X(4) \end{Bmatrix}$$

La derivada respecto al tiempo del vector solución es:

$$\{\dot{X}\} = \begin{Bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_{ext} \\ v_{per} \\ a_{ext} \\ a_{per} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{dX(1)}{dt} \\ \frac{dX(2)}{dt} \\ \frac{dX(3)}{dt} \\ \frac{dX(4)}{dt} \end{Bmatrix}$$

Los componentes del vector velocidad:

$$\frac{dX(1)}{dt} = v_{ext} = X(3)$$

$$\frac{dX(2)}{dt} = v_{per} = X(4)$$

$$\begin{aligned} \frac{dX(3)}{dt} = a_{ext} = \frac{1}{m_{ext}} & \left[ -k[(X(1) - \delta_{st}) + \beta\pi \cdot \text{sgn}(X(3))|(X(1) - \delta_{st})|] \right. \\ & \left. + k_c[(X(2) - X(1)) + \beta_c\pi \cdot \text{sgn}(X(4) - X(3))|X(2) - X(1)|] \right] \end{aligned}$$

$$\frac{dX(4)}{dt} = a_{per} = \frac{1}{m_{per}} \left[ -k_c[(x_{per} - x_{ext}) + \beta_c\pi \cdot \text{sgn}(v_{per} - v_{ext})|x_{per} - x_{ext}|] \right] - g$$

$$\frac{dX(4)}{dt} = a_{per} = \frac{1}{m_{per}} \left[ -k_c[(X(2) - X(1)) + \beta\pi \cdot \text{sgn}(X(4) - X(3))|X(2) - X(1)|] \right] - g$$

Se tienen 4 ecuaciones diferenciales de primer orden, por lo tanto se requieren 4 condiciones iniciales: 2 desplazamientos, y 2 velocidades, donde:

$x_{0ext}$  es la posición del extremo al iniciar el contacto

$x_{0per}$  es la posición del percutor al iniciar el contacto

$v_{0ext}$  es la velocidad del extremo al iniciar el contacto

$v_{0per}$  es la velocidad del percutor al iniciar el contacto

Se integran numéricamente las 4 ecuaciones para obtener las velocidades y los desplazamientos de los cuerpos en contacto.

El contacto finaliza cuando la fuerza de contacto se anula,

$$F_{cont} = 0 \therefore -(a_{per} + g) \cdot m_{per} = 0$$

La masa del percutor se establece por la Norma, por lo tanto:

$$m_{per} \neq 0 \therefore -(a_{per} + g) = 0 \therefore a_{per} = -g$$

$$k_c \cdot [x_{rel} + \beta\pi \cdot \text{sgn}(v_{rel})|x_{rel}|] = 0$$

### 6.1.4.2 El comportamiento libre del percutor y del extremo

Las ecuaciones que rigen el comportamiento libre del percutor y del extremo son comunes a todos los modelos puntuales propuestos y se desarrollan posteriormente en la sección 6.1.6.

### 6.1.5 Modelo de Maxwell

En la Figura 6.1-6 se muestra la representación de las partes que participan del ensayo de choque, según el modelo de Maxwell, para los estados libre y acoplado.

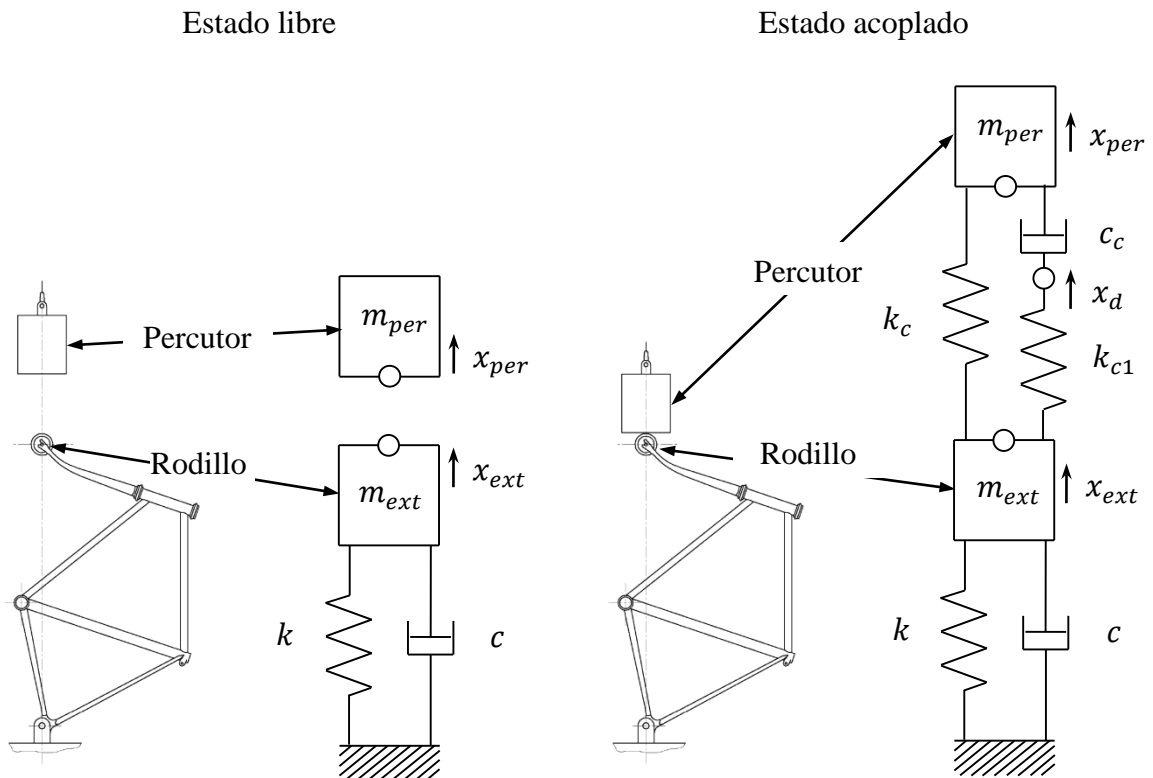


Figura 6.1-6: Diagrama del modelo de Maxwell.

A continuación se tratan los comportamientos del estado acoplado y los estados libre de los cuerpos involucrados.

### 6.1.5.1 El comportamiento del conjunto percutor-extremo durante el contacto

Se desarrolla el comportamiento del conjunto para dos modelos de amortiguamiento del cuadro, el viscoso y el histerético, que se tratan a continuación.

## Comportamiento del sistema con amortiguamiento viscoso

A partir del modelo de contacto de Kelvin-Voigt, se adiciona en serie al amortiguador viscoso un resorte lineal de rigidez  $k_{c1}$ .

Se toma en cuenta una nueva coordenada espacial  $x_d$ , que representa el desplazamiento de la unión resorte-amortiguador, medida respecto la posición de equilibrio estático.

La magnitud de la fuerza de contacto que actúa sobre ambas masas es:

$$F_{cont} = k_{c1} \cdot (x_d - x_{ext}) + k_c \cdot (x_{per} - x_{ext})$$

$$F_{cont} = c_c \cdot (v_{per} - v_d) + k_c \cdot (x_{per} - x_{ext})$$

$$F_{cont} = -(a_{per} + g) \cdot m_{per}$$

Mediante los diagramas de cuerpo libre del percutor y el extremo se plantea:

Equilibrio de fuerzas verticales sobre el extremo

$$-(a_{ext}) \cdot m_{ext} - c \cdot v_{ext} + (x_d - x_{ext}) \cdot k_{c1} - k \cdot (x_{ext} - \delta_{st}) + k_c \cdot (x_{per} - x_{ext}) = 0$$

$$-(a_{ext}) \cdot m_{ext} - c \cdot v_{ext} + k_c \cdot x_{per} + k_{c1} \cdot x_d - (k + k_c + k_{c1}) \cdot x_{ext} + k \cdot \delta_{st} = 0$$

Equilibrio de fuerzas verticales sobre el percutor

$$-(a_{per} + g) \cdot m_{per} - (x_{per} - x_{ext}) \cdot k_c - (x_d - x_{ext}) \cdot k_{c1} = 0$$

$$-(a_{per} + g) \cdot m_{per} + (k_c + k_{c1}) \cdot x_{ext} - k_{c1} \cdot x_d - k_c \cdot x_{per} = 0$$

Equilibrio de fuerzas verticales en la unión de Maxwell

$$-k_{c1} \cdot (x_d - x_{ext}) + c_c \cdot (v_{per} - v_d) = 0$$

Todas las coordenadas se tomaron desde un sistema de referencia inercial.

Se obtiene la aceleración del extremo  $a_{ext}$ , la aceleración del percutor  $a_{per}$ , y la velocidad de la unión de Maxwell  $v_d$ , que se expresan a continuación.

$$a_{ext} = \frac{1}{m_{ext}} [-(k + k_c + k_{c1}) \cdot x_{ext} + k_c \cdot x_{per} + k_{c1} \cdot x_d - c \cdot v_{ext} + k \cdot \delta_{st}]$$

$$a_{per} = \frac{1}{m_{per}} [(k_c + k_{c1}) \cdot x_{ext} - k_c \cdot x_{per} - k_{c1} \cdot x_d] - g$$

$$v_d = v_{per} + (x_{ext} - x_d) \frac{k_{c1}}{c_c}$$

Las aceleraciones se integran numéricamente, para ello se plantea la formulación de espacio de estado, donde tenemos:

$$\{X_1\} = \{q\} = \begin{Bmatrix} x_{ext} \\ x_{per} \\ x_d \end{Bmatrix} : \text{Vector de desplazamientos}$$

$$\{X_2\} = \{\dot{X}_1\} = \{\dot{q}\} = \begin{Bmatrix} v_{ext} \\ v_{per} \\ v_d \end{Bmatrix} : \text{Vector de velocidades}$$

$$\{\dot{X}_2\} = \{\ddot{X}_1\} = \{\ddot{q}\} = \begin{Bmatrix} a_{ext} \\ a_{per} \\ a_d \end{Bmatrix} : \text{Vector de aceleraciones}$$

Se adopta la siguiente convención para el vector solución

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} X(1) \\ X(2) \\ X(3) \\ X(4) \\ X(5) \\ X(6) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{ext} \\ x_{per} \\ x_d \\ v_{ext} \\ v_{per} \\ v_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix}$$

La derivada respecto al tiempo del vector solución es:

$$\{\dot{X}\} = \begin{Bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_{ext} \\ v_{per} \\ v_d \\ a_{ext} \\ a_{per} \\ a_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{dX(1)}{dt} \\ \frac{dX(2)}{dt} \\ \frac{dX(3)}{dt} \\ \frac{dX(4)}{dt} \\ \frac{dX(5)}{dt} \\ \frac{dX(6)}{dt} \end{Bmatrix}$$

Los componentes del vector velocidad:

$$\frac{dX(1)}{dt} = v_{ext} = X(4)$$

$$\frac{dX(2)}{dt} = v_{per} = X(5)$$

$$\frac{dX(3)}{dt} = v_d = v_{per} + (x_{ext} - x_d) \frac{k_{c1}}{c_c}$$

$$\frac{dX(3)}{dt} = v_d = X(5) + (X(1) - X(3)) \frac{k_{c1}}{c_c}$$

$$\frac{dX(4)}{dt} = a_{ext} = \frac{1}{m_{ext}} \left[ -(k + k_c + k_{c1}) \cdot x_{ext} + k_c \cdot x_{per} + k_{c1} \cdot x_d - c \cdot v_{ext} + k \cdot \delta_{st} \right]$$

$$\frac{dX(4)}{dt} = a_{ext} = \frac{1}{m_{ext}} [-(k + k_c + k_{c1}) \cdot X(1) + k_c \cdot X(2) + k_{c1} \cdot X(3) - c \cdot X(4) + k \cdot \delta_{st}]$$

$$\frac{dX(5)}{dt} = a_{per} = \frac{1}{m_{per}} [(k_c + k_{c1}) \cdot x_{ext} - k_c \cdot x_{per} - k_{c1} \cdot x_d] - g$$

$$\frac{dX(5)}{dt} = a_{per} = \frac{1}{m_{per}} [(k_c + k_{c1}) \cdot X(1) - k_c \cdot X(2) - k_{c1} \cdot X(3)] - g$$

La aceleración de la unión de Maxwell  $a_d$ , no interesa debido a que no tiene masa asociada, por lo tanto no genera fuerzas inerciales.

Se tienen 5 ecuaciones diferenciales de primer orden, por lo tanto se requieren 5 condiciones iniciales: 3 desplazamientos y 2 velocidades, donde:

$x_{0ext}$  es la posición del extremo al iniciar el contacto

$x_{0per}$  es la posición del percutor al iniciar el contacto

$x_{0d}$  es la posición de la unión de Maxwell al iniciar el contacto

$v_{0ext}$  es la velocidad del extremo al iniciar el contacto

$v_{0per}$  es la velocidad del percutor al iniciar el contacto

Se integran numéricamente las 5 ecuaciones para obtener las velocidades y los desplazamientos de los cuerpos en contacto y de la unión de Maxwell.

### Comportamiento del sistema con amortiguamiento histerético

Se adiciona en serie al amortiguador histerético un resorte lineal de rigidez  $k_{c1}$ . Se toma en cuenta una nueva coordenada espacial  $x_d$  que es el desplazamiento de la unión resorte-amortiguador, medida respecto la posición de equilibrio estático.

La magnitud de la fuerza de contacto que actúa sobre ambas masas es:

$$F_{cont} = k_{c1} \cdot (x_d - x_{ext}) + k_c \cdot (x_{per} - x_{ext})$$

$$F_{cont} = k_c [\pi \beta_c \cdot \text{sgn}(v_{per} - v_d) |x_{per} - x_d| + (x_{per} - x_{ext})]$$

$$F_{cont} = -(a_{per} + g) \cdot m_{per}$$

Mediante los diagramas de cuerpo libre del percutor y el extremo se plantea:

Equilibrio de fuerzas verticales sobre el extremo

$$-(a_{ext}) \cdot m_{ext} - c \cdot v_{ext} + (x_d - x_{ext}) \cdot k_{c1} - k \cdot (x_{ext} - \delta_{st}) + k_c \cdot (x_{per} - x_{ext}) = 0$$

$$-(a_{ext}) \cdot m_{ext} - c \cdot v_{ext} + k_c \cdot x_{per} + k_{c1} \cdot x_d - (k + k_c + k_{c1}) \cdot x_{ext} + k \cdot \delta_{st} = 0$$

Equilibrio de fuerzas verticales sobre el percutor

$$-(a_{per} + g) \cdot m_{per} - (x_{per} - x_{ext}) \cdot k_c - (x_d - x_{ext}) \cdot k_{c1} = 0$$

$$-(a_{per} + g) \cdot m_{per} + (k_c + k_{c1}) \cdot x_{ext} - k_{c1} \cdot x_d - k_c \cdot x_{per} = 0$$



Equilibrio de fuerzas verticales en la unión de Maxwell

$$-k_{c1} \cdot (x_d - x_{ext}) + k_{c1}\pi\beta_c \cdot \text{sgn}(v_{per} - v_d)|x_{per} - x_d| = 0$$

$$k_{c1} \cdot (x_d - x_{ext}) = k_{c1}\pi\beta_c \cdot \text{sgn}(v_{per} - v_d)|x_{per} - x_d|$$

$$\frac{k_{c1}}{k_{c1}\pi\beta_c} \cdot (x_d - x_{ext}) = \text{sgn}(v_{per} - v_d)|x_{per} - x_d|$$

Todas las coordenadas se toman desde un sistema de referencia inercial.

Se obtiene la aceleración del extremo  $a_{ext}$ , la aceleración del percutor  $a_{per}$ , que se expresan a continuación,

$$a_{ext} = \frac{1}{m_{ext}} [-(k + k_c + k_{c1}) \cdot x_{ext} + k_c \cdot x_{per} + k_{c1} \cdot x_d - c \cdot v_{ext} + k \cdot \delta_{st}]$$

$$a_{per} = \frac{1}{m_{per}} [(k_c + k_{c1}) \cdot x_{ext} - k_c \cdot x_{per} - k_{c1} \cdot x_d] - g$$

La velocidad de la unión de Maxwell  $v_d$  no se puede despejar, por lo tanto el modelo no admite amortiguamiento de contacto histerético.

Este tipo de amortiguamiento, respecto el amortiguamiento viscoso utiliza las mismas ecuaciones, porque anteriormente fueron planteadas utilizando la fuerza elástica del resorte  $k_{c1}$ , y se diferencian únicamente en la definición de la velocidad de la unión de Maxwell  $v_d$ .

Si las ecuaciones se plantean utilizando la fuerza en el amortiguador, se modifican los desarrollos, pero se obtienen los mismos resultados.

### **Finalización del contacto**

La integración de las ecuaciones planteadas se realiza hasta la finalización del contacto y que ocurre con el cumplimiento de determinada situación. A continuación se tratan diversas condiciones de finalización.

#### Condición de desplazamiento relativo

El contacto finaliza cuando los desplazamientos del percutor y del extremo coinciden

$$(x_{per} - x_{ext}) = 0$$

La fuerza elástica sobre el resorte  $k_c$  es nula y permite la existencia de una fuerza de tracción entre ambos cuerpos antes de separarse, que se debería comprobar si tiene correspondencia con lo observado en los datos experimentales.

Físicamente significa que cuando el percutor y el extremo están finalizando el contacto su distancia relativa es:

$$(x_{per} - x_{ext}) \rightarrow 0^-$$

Mientras que la fuerza de compresión del resorte  $k_c$  es proporcional al desplazamiento relativo:

$$k_c \cdot (x_{per} - x_{ext}) \rightarrow 0^-$$

Ambos cuerpos se alejan con determinada velocidad por lo tanto, la fuerza sobre la unión de Maxwell está dada por:

$$c_c \cdot (v_{per} - v_d) \rightarrow \geq 0$$

La suma de la fuerza elástica pura y la de la unión de Maxwell produce una fuerza resultante de adhesión entre ambos cuerpos al finalizar el contacto.

#### Condición para asegurar que la fuerza de contacto no es negativa

$$F_{cont} \geq 0$$

$$k_{c1} \cdot (x_d - x_{ext}) + k_c \cdot (x_{per} - x_{ext}) \geq 0$$

Físicamente significa que el contacto ocurre hasta que la fuerza de contacto se anula. Sin embargo no coinciden los desplazamientos relativos en el inicio y el fin de contacto.

#### Condición que la unión de Maxwell no transmita tracción

Esta condición se puede plantear indistintamente de dos maneras:

$$(x_d - x_{ext}) \leq 0: \text{Condición de desplazamiento}$$

$$(v_{per} - v_d) \leq 0: \text{Condición de velocidad}$$

$$k_{c1} \cdot (x_d - x_{ext}) = c_c \cdot (v_{per} - v_d) \text{ Por equilibrio de fuerzas en la unión de Maxwell}$$

Físicamente significa que el amortiguamiento actúa únicamente cuando el percutor y el extremo se acercan. De esta manera coinciden los desplazamientos relativos en el inicio y fin del contacto.

#### **6.1.5.2 El comportamiento libre del percutor y del extremo**

Las ecuaciones que rigen el comportamiento libre del percutor y del extremo son comunes a todos los modelos puntuales propuestos y se desarrollan posteriormente en la sección 6.1.6.

#### **6.1.6 Respuestas libres comunes a los modelos puntuales**

En esta sección se tratan las respuestas libres de los cuerpos que participan del impacto, que se aplican en todos los modelos puntuales. Primero se describe la ecuación que rige la caída libre del percutor, y luego se describe el comportamiento libre de un sistema de masa-resorte-amortiguador de un grado de libertad que representa al extremo de la tija.

##### *Comportamiento libre del percutor*

El percutor cuando no se encuentra en contacto con el rodillo o extremo de la tija, está sometido únicamente a la acción de la gravedad terrestre  $g$ , manifestando un comportamiento de caída libre, que se describe a continuación.

Mediante los diagramas de cuerpo libre del percutor, se plantean las ecuaciones de equilibrio de fuerzas verticales, que expresan:

$$m_{per} \cdot (-a_{per} - g) = 0 \therefore a_{per} = -g$$

Se obtiene la aceleración  $a_{per}(t)$ , la velocidad  $v_{per}(t)$  y el desplazamiento  $x_{per}(t)$ :

$$a_{per}(t) = -g$$

$$v_{per}(t) = V_{fi} - g \cdot (t - t_{fi})$$

$$x_{per}(t) = X_{fi} + V_{fi} \cdot (t - t_{fi}) - g \cdot (t - t_{fi})^2$$

donde:

$X_{fi}$  es el desplazamiento luego de finalizar el contacto  $i$

$V_{fi}$  es la velocidad luego de finalizar el contacto  $i$

### Comportamiento libre del extremo o rodillo

Se desarrolla el comportamiento del conjunto cuadro y horquilla-tija maciza para dos modelos de amortiguamiento del cuadro, el viscoso y el histerético, que se tratan a continuación.

#### Comportamiento del cuadro-tija con amortiguamiento viscoso

Se trata de un sistema de un grado de libertad con amortiguamiento viscoso sujeto a condiciones iniciales, con las siguientes propiedades:

$m$  es la masa del extremo

$k$  es la rigidez equivalente al cuadro

$c$  es el amortiguamiento viscoso equivalente del cuadro

Se tiene un sistema sujeto a las condiciones iniciales:

$$X_0 = x_{cont} - x_{ref} : \text{Desplazamiento inicial libre}$$

$$V_0 = v_{cont} : \text{Velocidad inicial libre}$$

$$x_{ref} = \frac{m_{per} \cdot g}{k} : \text{Posición de equilibrio estático del extremo}$$

$$x_{cont} = \text{Posición al finalizar el contacto}$$

$$v_{cont} : \text{Velocidad al finalizar el contacto}$$

A continuación se desarrolla la respuesta analítica. Primero se obtiene el amortiguamiento crítico  $c_{cr}$ :

$$c_{cr} = 2\sqrt{km}$$

Se calcula el factor de amortiguamiento del sistema:

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km_{con}}}$$

Dependiendo del factor de amortiguamiento el tipo de sistema se clasifica como:

- Subamortiguado  $\zeta < 1$
- Amortiguamiento crítico  $\zeta = 1$
- Sobreamortiguado  $\zeta > 1$

El desplazamiento  $x(t)$ , la velocidad  $v(t)$  y la aceleración  $a(t)$  para cada tipo de sistema se exponen a continuación.

### Sistema subamortiguado

$$x(t) = A_0 e^{-\zeta \omega_n t} \text{sen}(\omega_d t + \varphi_d)$$

$$v(t) = -A_0 \omega_n e^{-\zeta \omega_n t} \text{sen}(\omega_d t + \varphi_d - \psi)$$

$$a(t) = A_0 \omega_n^2 e^{-\zeta \omega_n t} \text{sen}(\omega_d t + \varphi_d - 2\psi)$$

donde:

$$A_0 = \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{V_0 + \zeta \omega_n X_0}{\omega_d}\right)^2} : \text{Amplitud}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} : \text{Frecuencia circular natural}$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} : \text{Frecuencia circular amortiguada}$$

$$\varphi_d = \text{arc tan}\left(\frac{\omega_d X_0}{v_0 + \zeta \omega_n X_0}\right) : \text{Fase inicial}$$

$$\psi = \text{arc cos}(\zeta) : \text{Diferencia de fase}$$

### Sistema críticamente amortiguado

$$x(t) = (e^{-\omega_n t}) [X_0 + (V_0 + \omega_n X_0)t]$$

$$v(t) = -\omega_n X_0 e^{-\omega_n t} + [V_0 + \omega_n X_0] (e^{-\omega_n t}) (1 - \omega_n t)$$

$$a(t) = (\omega_n)^2 X_0 e^{-\omega_n t} + [V_0 + \omega_n X_0] [(-\omega_n e^{-\omega_n t}) (2 - \omega_n t)]$$

### Sistema sobreamortiguado

$$x(t) = (e^{-\zeta \omega_n t}) \left[ X_0 \cosh(\omega'_d t) + \frac{V_0 + \zeta \omega_n X_0}{\omega'_d} \text{senh}(\omega'_d t) \right]$$

$$v(t) = (e^{-\zeta \omega_n t}) \left\{ X_0 [-\zeta \omega_n \cosh(\omega'_d t) + \omega'_d \text{senh}(\omega'_d t)] + [V_0 + \zeta \omega_n X_0] \left[ -\frac{\zeta \text{senh}(\omega'_d t)}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} + \cosh(\omega'_d t) \right] \right\}$$

$$a(t) = (e^{-\zeta \omega_n t}) \left\{ [X_0 (\omega'_d)^2 \cdot \cosh(\omega'_d t) + \omega'_d (V_0 + \zeta \omega_n X_0) \cdot \text{senh}(\omega'_d t)] \right. \\ \left. + \left[ (\zeta \omega_n)^2 \left( X_0 \cdot \cosh(\omega'_d t) + \frac{(V_0 + \zeta \omega_n X_0) \cdot \text{senh}(\omega'_d t)}{\omega'_d} \right) \right] \right. \\ \left. + [(-2\zeta \omega_n) ((V_0 + \zeta \omega_n X_0) \cdot \cosh(\omega'_d t) + X_0 \omega'_d \cdot \text{senh}(\omega'_d t))] \right\}$$

donde:

$$\omega'_d = \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Para el caso de sistemas con amortiguamiento viscoso, se cuenta con las expresiones analíticas de los desplazamientos, las velocidades y las aceleraciones, que se aprovechan directamente o se realizan sucesivas integraciones numéricas de la aceleración para obtener las velocidades y los desplazamientos respectivamente.

### Comportamiento del cuadro-tija con amortiguamiento histerético

Mediante los diagramas de cuerpo libre del extremo, se plantea:

Equilibrio de fuerzas verticales sobre el extremo

$$-(m_{ext})(a_{ext}) - k \cdot ((x_{ext} - \delta_{est}) + \pi\beta_h \cdot \text{sgn}(v_{ext})|x_{ext} - \delta_{est}|) = 0$$

Se obtiene la aceleración del extremo vertical  $a_{ext}$

$$a_{ext} = \frac{1}{(m_{ext})} [-k \cdot ((x_{ext} - \delta_{est}) + \pi\beta_h \cdot \text{sgn}(v_{con})|x_{ext} - \delta_{est}|)]$$

La aceleración del extremo se integra numéricamente, para ello se plantea la formulación de espacio de estado donde tenemos:

$$\{X_1\} = \{q\} = \{x_{ext}\} : \text{Vector desplazamiento}$$

$$\{X_2\} = \{\dot{X}_1\} = \{\dot{q}\} = \{v_{ext}\} : \text{Vector velocidad}$$

$$\{\dot{X}_2\} = \{\ddot{X}_1\} = \{\ddot{q}\} = \{a_{ext}\} : \text{Vector aceleración}$$

Se adopta la siguiente convención para el vector solución,

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{ext} \\ v_{ext} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X(1) \\ X(2) \end{Bmatrix}$$

La derivada respecto al tiempo del vector solución es:

$$\{\dot{X}\} = \begin{Bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_{ext} \\ a_{ext} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{dX(1)}{dt} \\ \frac{dX(2)}{dt} \end{Bmatrix}$$

Los componentes del vector velocidad:

$$\frac{dX(1)}{dt} = v_{ext} = X(2)$$

$$\frac{dX(2)}{dt} = a_{ext} = \frac{1}{(m_{ext})} [-k \cdot ((x_{ext} - \delta_{est}) + \pi\beta_h \cdot \text{sgn}(v_{con})|x_{ext} - \delta_{est}|)]$$

$$\frac{dX(2)}{dt} = a_{ext} = \frac{1}{(m_{ext})} [-k \cdot ((X(1) - \delta_{est}) + \pi\beta_h \cdot \text{sgn}(X(2))|X(1) - \delta_{est}|)]$$

Se requieren dos condiciones iniciales:

$x_{0ext}$  es la posición al finalizar el contacto

$v_{0ext}$  es la velocidad al finalizar el impacto

Se integran numéricamente las dos ecuaciones para obtener la velocidad y el desplazamiento libre del extremo. En el presente trabajo se utiliza el software Matlab (27), mediante la función ode45, para resolver las ecuaciones.

### 6.1.7 Resultados

Anteriormente se desarrollan cinco modelos analíticos de masas concentradas con la finalidad de representar el comportamiento macroscópico de los cuerpos involucrados en el ensayo de impacto. En la sección 5.3 se contrastan los resultados numéricos y analíticos para el primer impacto, y mediante la regresión se ajustan los valores de los parámetros que representan el contacto entre el rodillo y el percutor requeridos por cada modelo analítico, para recrear los resultados ante situaciones específicas.

En los modelos puntuales propuestos se reconocen dos formas de disipación de energía mecánica; la que ocurre en el interior del conjunto cuadro-tija, que se representa mediante el amortiguamiento y la que ocurre en el contacto que se representa de diversas maneras según cada modelo.

Desde el punto de vista macroscópico se define el coeficiente de restitución global  $e_{global}$ , que se obtiene de manera indirecta comparando la altura de rebote máxima del percutor, alcanzada luego del primer impacto, que se expresa en la Ecuación (6.1-5),

$$e_{global} = -\frac{v^f}{v^i} = -\frac{\sqrt{2gh^f}}{-\sqrt{2gh^i}} = \sqrt{\frac{h^f}{h^i}} \quad (6.1-5)$$

donde:

$h^i$  es la altura inicial de caída del percutor

$h^f$  es la altura de rebote máxima del percutor

El coeficiente de restitución global, es efecto de la disipación total del sistema y se estima para todos los modelos a partir de los resultados logrados mediante el análisis de elementos finitos, cuyo valor es  $e_{MEF} = 0,687[-]$ .

El cuadro se modela mediante un sistema de un único grado de libertad, al cual se impone el cumplimiento de las siguientes condiciones:

- La frecuencia natural coincide con la del modo que tiene mayor participación modal en la dirección del impacto, obtenida mediante el análisis de descomposición modal, desarrollado en la sección 5.1.2.1.
- La rigidez equivalente del modelo puntual  $k_{cua}$ , coincide con la rigidez estática obtenida para la geometría del conjunto cuadro-tija, mediante el análisis estático realizado en la sección 5.1.1.

Por lo tanto, la masa equivalente ubicada en el extremo  $m_{ext}$ , se estima para cumplir las condiciones mencionadas. Los valores estimados para los parámetros del sistema son:

$$k_{cua} = 115243 [N/m]$$

$$m_{ext} = 3,401 [kg]$$

Se observa que el valor obtenido para la masa del extremo es mayor a la masa puntual del rodillo, debido a que hay inercia de la tija maciza asociada al extremo.

En los modelos puntuales la energía disipada por el conjunto cuadro-tija durante el ensayo, se representa mediante dos modelos de amortiguamiento: el viscoso y el histerético, que se controlan mediante los parámetros  $c_{cua}$  y  $\beta_{cua}$  respectivamente, y cuyos valores se desconocen en un principio. Para cada valor particular de amortiguamiento se consigue un coeficiente de restitución global que se compara con el obtenido mediante los modelos de elementos finitos, para lograr la estimación de los parámetros de amortiguamiento que mejor representan el comportamiento macroscópico observado.

De esta manera los parámetros que rigen a cada uno de los modelos puntuales se estiman directamente de los resultados logrados por el análisis de elementos finitos, excepto los parámetros de amortiguamiento del conjunto cuadro-tija, que se ajustan en cada modelo puntual para cumplir con el coeficiente de restitución global. Cuando se cuenta con el valor numérico de todos los parámetros de cada modelo, se implementan en Matlab (27) obteniendo los resultados para el comportamiento de las variables cinemáticas, que se exponen a continuación.

### *Modelo plástico perfecto*

Para el modelo plástico perfecto considerando la masa del extremo, mediante el método de elementos finitos se estiman tres parámetros que se mencionan a continuación:

$$k_{cua} = 115243 [N/m]$$

$$m_{ext} = 3,401 [kg]$$

$$e_{MEF} = 0,687[-]$$

Este modelo es simple y no utiliza parámetros que representen el contacto de los cuerpos que impactan. La implementación del modelo requiere ajustar el valor de amortiguamiento del conjunto cuadro-tija para cumplir el coeficiente de restitución global.

En la Figura 6.1-7 se muestra la relación entre el coeficiente de restitución global y el valor de amortiguamiento para dos modelos, el viscoso en (a) y el histerético en (b). En los gráficos las abscisas son amortiguamiento viscoso  $c$ , medido en  $[Ns/m]$  y amortiguamiento histerético  $\beta$  adimensional; y las ordenadas son coeficiente de restitución global  $e_{global}$  adimensional. Mediante interpolación se obtienen los siguientes valores de amortiguamiento.

$$c_{cuadro} = 250 [Ns/m]$$

$$\beta_{cuadro} = 0,0657 [-]$$

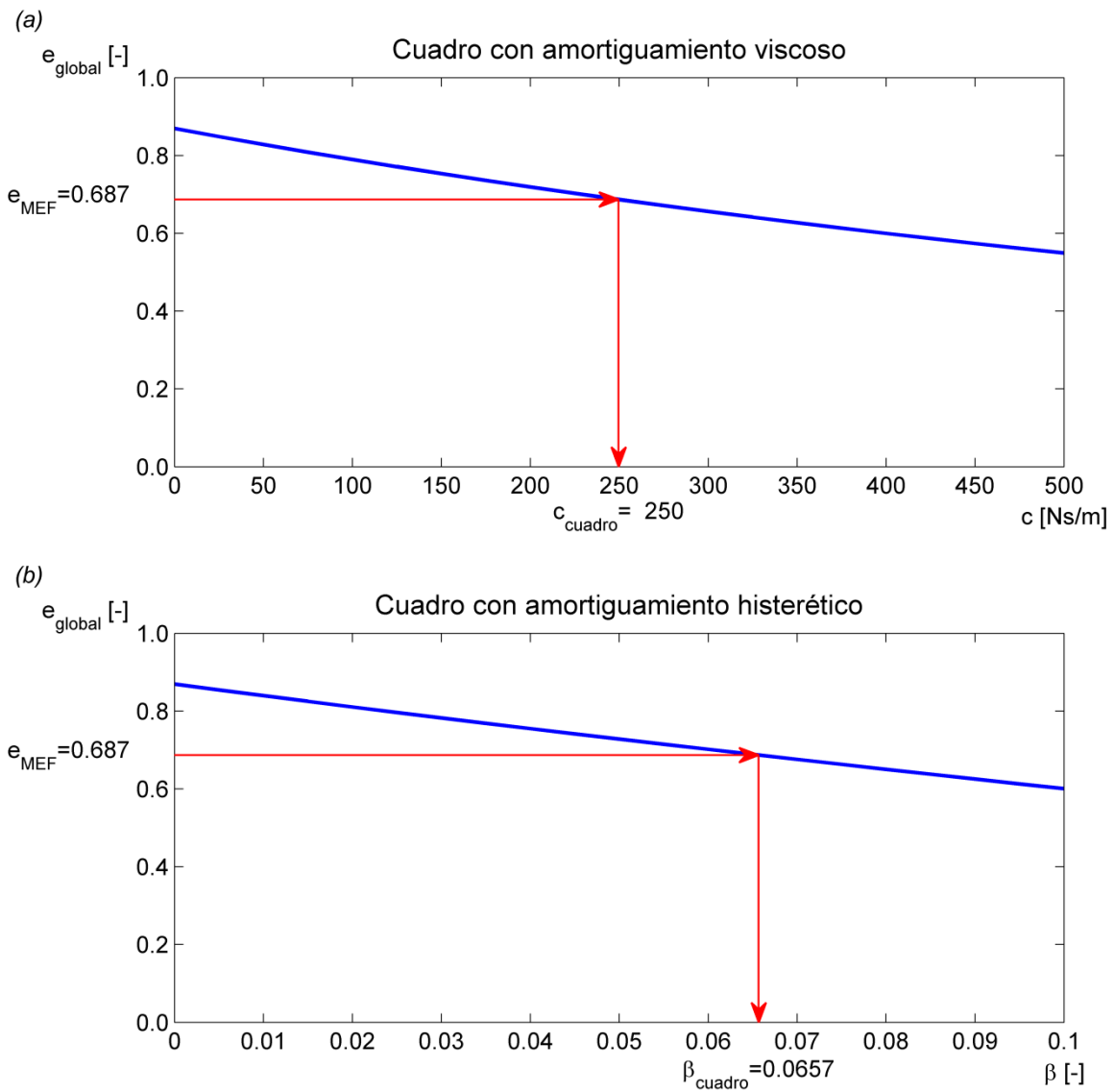


Figura 6.1-7: Estimación del amortiguamiento del cuadro según el modelo plástico perfecto. (a) Amortiguamiento viscoso; (b) Amortiguamiento hysterético.

Se dispone de todos los parámetros requeridos para el modelo plástico perfecto, por consiguiente en la Figura 6.1-8 y la Figura 6.1-9 se representa el comportamiento cinemático macroscópico ocurrido durante el ensayo, para los modelos de amortiguamiento del cuadro viscoso e hysterético respectivamente. En cada figura las abscisas son tiempo medido en [s] y las ordenadas son desplazamiento, velocidad y aceleración medidos en [m], [m/s] y [m/s<sup>2</sup>] respectivamente.



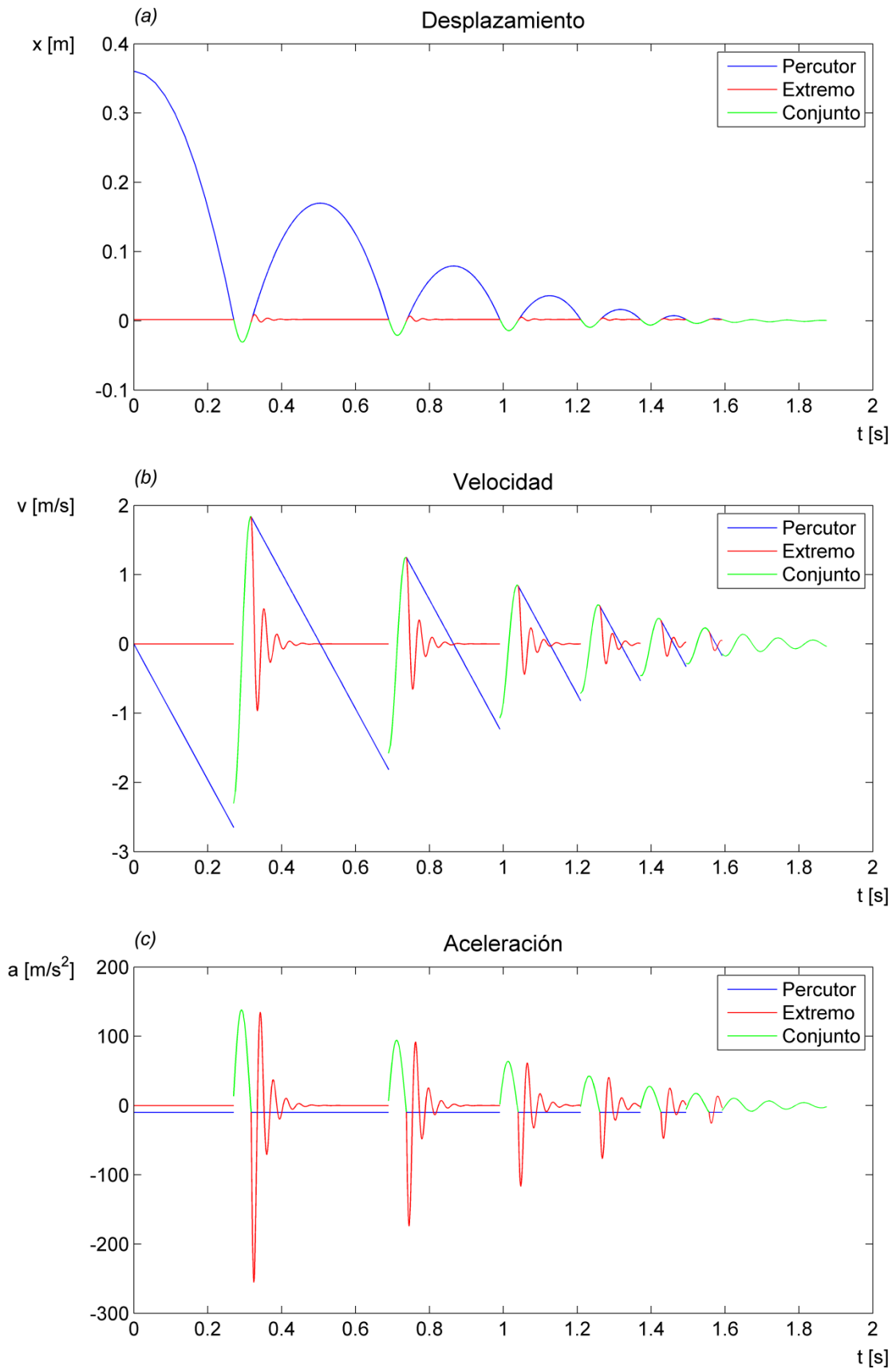


Figura 6.1-8: Resultados del modelo plástico perfecto con amortiguamiento viscoso del cuadro. (a) Desplazamiento; (b) Velocidad; (c) Aceleración.

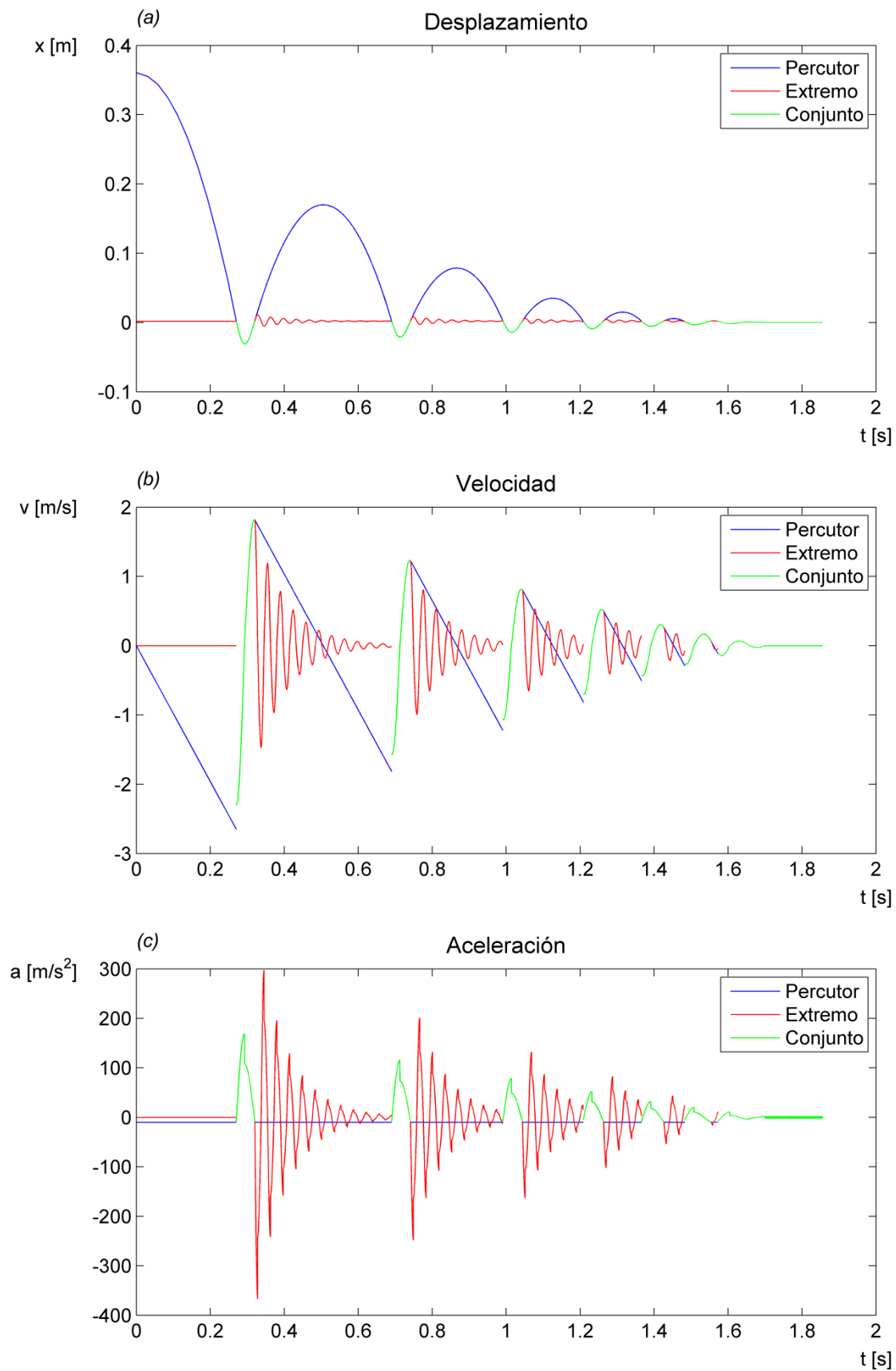


Figura 6.1-9: Resultados del modelo plástico perfecto con amortiguamiento histerético del cuadro. (a) Desplazamiento; (b) Velocidad; (c) Aceleración.

## Análisis de resultados

En el modelo con amortiguamiento viscoso suceden 8 ciclos de estados separado-contacto, hasta que finalmente no ocurren más separaciones. Debido a la disipación, la respuesta decrece rápidamente.

En el modelo con amortiguamiento histerético suceden 7 ciclos de estados separado-contacto, hasta que finalmente no ocurren más separaciones. Se observan discontinuidades en la aceleración debido a que la fuerza de disipación depende del signo de la velocidad.

En el modelo plástico planteado, la disipación durante el impacto se debe a la igualación instantánea de las velocidades, que involucra valores infinitos de aceleraciones en el inicio del contacto. Los cuerpos que impactan deberían sufrir grandes deformaciones permanentes para semejarse a lo estimado por el modelo plástico, mientras que el modelo de elementos finitos predice pequeñas deformaciones.

Para cumplir con el coeficiente de restitución global observado en el modelo de elementos finitos se proponen valores excesivos de amortiguamiento al cuadro que no se condicen con la respuesta libre observada. Por lo tanto el modelo plástico logra una representación limitada del fenómeno de impacto que ocurre durante el ensayo.

### *Modelo elástico perfecto*

Para el modelo elástico perfecto, mediante el método de elementos finitos se estiman tres parámetros que se mencionan a continuación:

$$k_{cua} = 115243 [N/m]$$

$$m_{ext} = 3,401 [kg]$$

$$e_{MEF} = 0,687[-]$$

Este modelo es simple y no utiliza parámetros que representen el contacto de los cuerpos que impactan. La implementación del modelo requiere ajustar el valor de amortiguamiento del conjunto cuadro-tija para cumplir el coeficiente de restitución global.

En la Figura 6.1-10 se muestra la relación entre el coeficiente de restitución global y el valor de amortiguamiento para dos modelos, el viscoso en (a) y el histerético en (b). En los gráficos las abscisas son amortiguamiento viscoso  $c$ , medido en  $[Ns/m]$  y amortiguamiento histerético  $\beta$  adimensional; y las ordenadas son coeficiente de restitución global  $e_{global}$  adimensional. Mediante interpolación se obtienen los siguientes valores de amortiguamiento.

$$c_{cuadro} = 218 [Ns/m]$$

$$\beta_{cuadro} = 0,0654 [-]$$

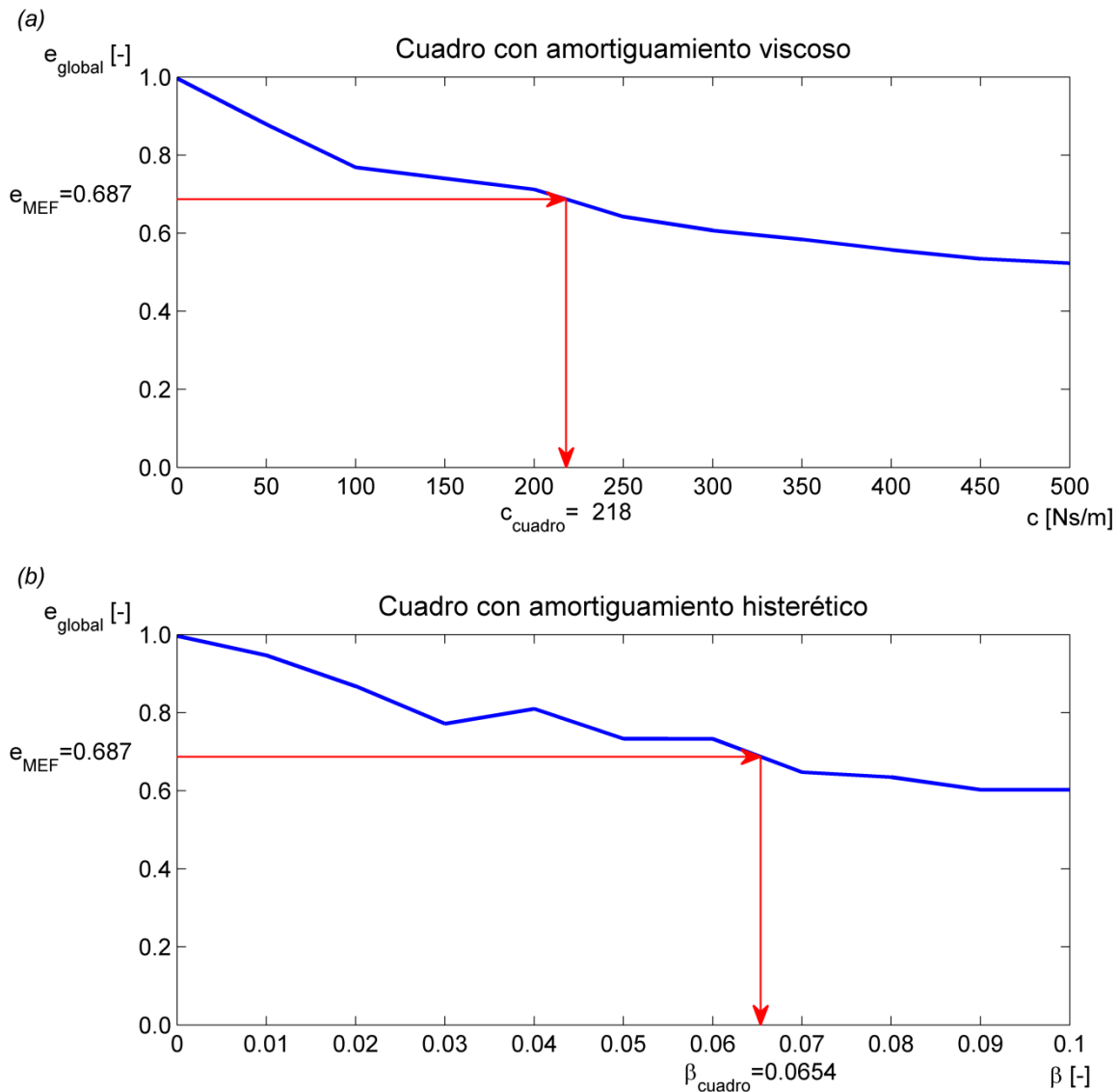


Figura 6.1-10: Estimación de amortiguamiento del cuadro según el modelo elástico perfecto. (a) Amortiguamiento viscoso; (b) Amortiguamiento hysterético.

En el modelo elástico perfecto, no hay ningún tipo de disipación entre los cuerpos que impactan, por lo tanto si el cuadro no tiene amortiguamiento, el coeficiente de restitución tiende a ser unitario, verificando la conservación de energía total del sistema.

De esta manera para ajustar el comportamiento de este modelo de masas concentradas, a los resultados logrados mediante el método de elementos finitos, el único parámetro que se maneja es el amortiguamiento del cuadro, que según el tipo de modelo se estima el valor.

Se dispone de todos los parámetros requeridos para el modelo elástico perfecto, por consiguiente en la Figura 6.1-11 y la Figura 6.1-12 se representa el comportamiento cinemático macroscópico ocurrido durante el ensayo, para los modelos de amortiguamiento del cuadro viscoso e hysterético respectivamente. En cada figura las abscisas son tiempo medido en [s] y las ordenadas son desplazamiento, velocidad y aceleración medidos en [m], [m/s] y [m/s<sup>2</sup>] respectivamente.

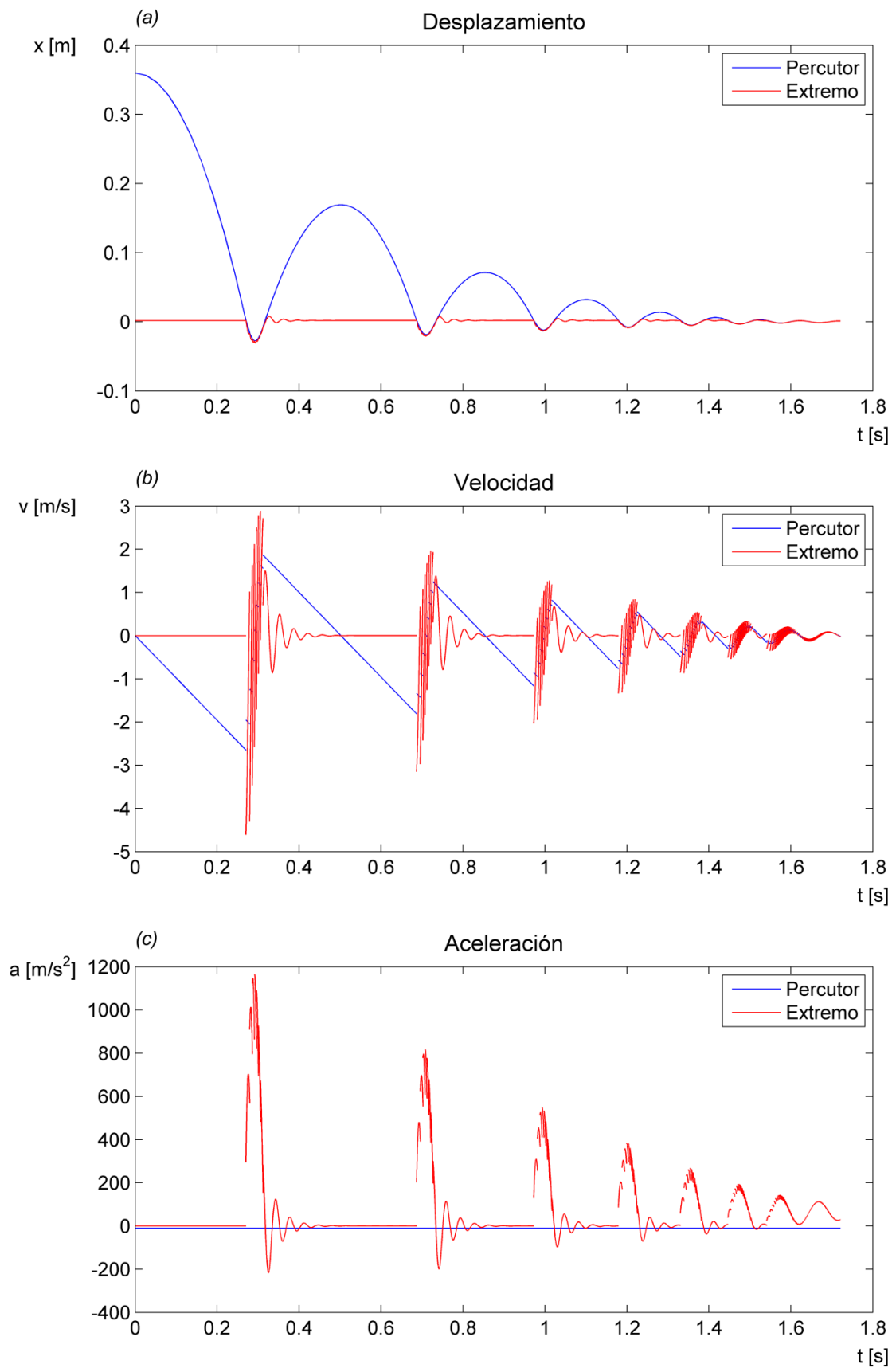


Figura 6.1-11: Resultados del modelo elástico perfecto con amortiguamiento viscoso del cuadro. (a) Desplazamiento; (b) Velocidad; (c) Aceleración.

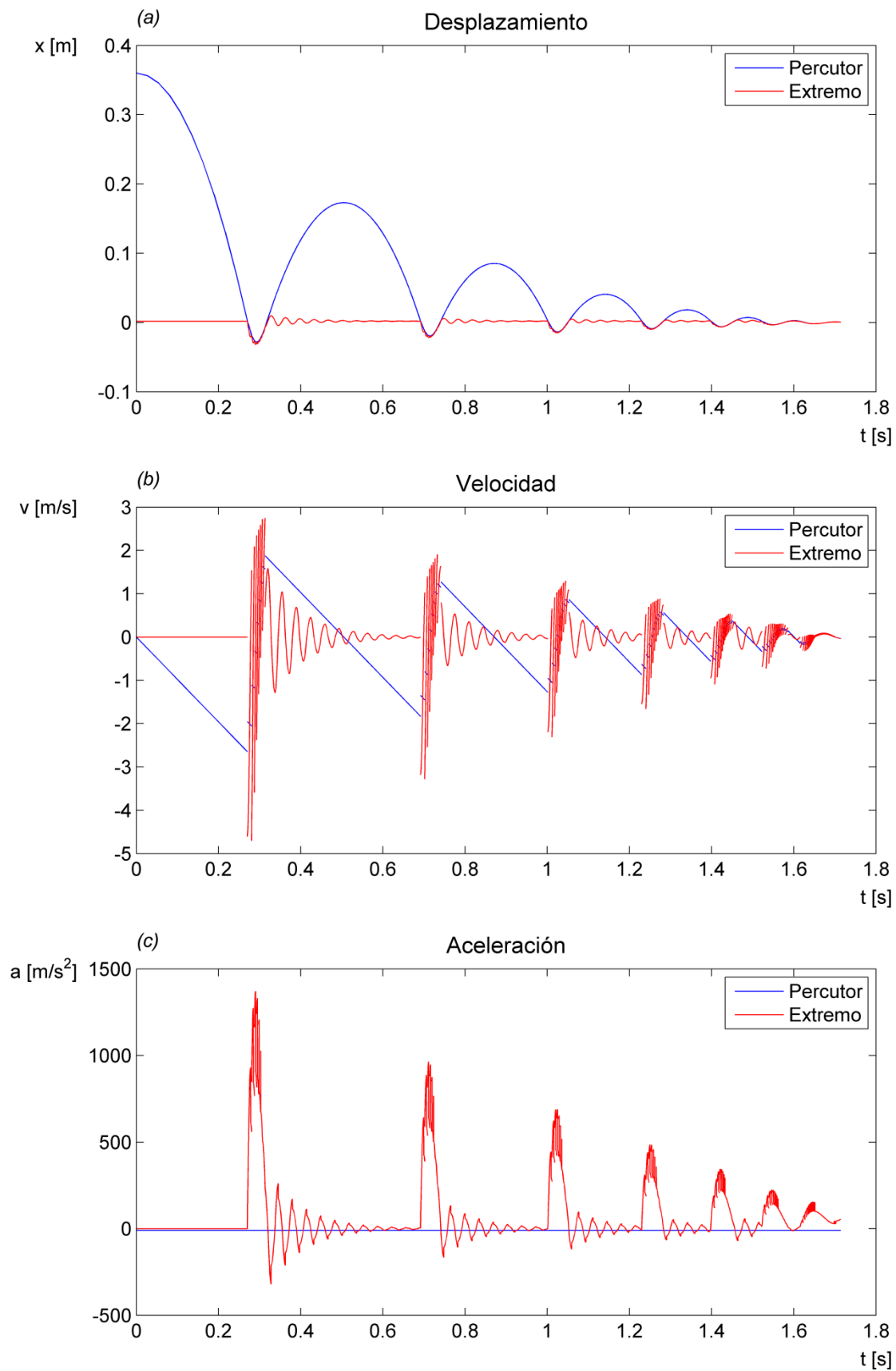


Figura 6.1-12: Resultados del modelo elástico perfecto con amortiguamiento histerético del cuadro. (a) Desplazamiento; (b) Velocidad; (c) Aceleración.

## Análisis de resultados

En el modelo elástico perfecto, el contacto es instantáneo y no manifiesta comportamiento de conjunto entre ambos cuerpos. Durante el impacto, en un tiempo infinitesimal, ocurre el intercambio de cantidad de movimiento entre el percutor y el extremo, presentando discontinuidad en las velocidades, y valores de aceleración no acotados. Debido a que el choque se supone elástico perfecto no hay ningún mecanismo de disipación de contacto, por lo que durante el impacto se conserva el total de la energía cinética y el factor de restitución obtenido está completamente regido por el modelo de amortiguamiento del cuadro.

### Modelo de Newton

Para el modelo de Newton, mediante el método de elementos finitos se estiman tres parámetros que se mencionan a continuación:

$$k_{cua} = 115243 [N/m]$$

$$m_{ext} = 3,401 [kg]$$

$$e_{MEF} = 0,687[-]$$

En el modelo para simular el ensayo de choque se reconocen dos formas de disipación de energía, la que ocurre en el interior del conjunto cuadro-tija, que se representa mediante el amortiguamiento y la que ocurre en el contacto que se representa por el coeficiente de restitución planteado por Newton.

Como se menciona anteriormente el coeficiente de restitución global, depende del amortiguamiento del cuadro, y de la restitución de cada choque. En la sección 5.2 se extraen los resultados del análisis de contacto mediante elementos finitos. Se observa que el coeficiente de restitución del choque depende de diversas variables, entre las más importantes la diferencia de velocidades antes del impacto  $\Delta v^i$ . Durante la simulación ocurren contactos reiterados, donde a cada uno le corresponde un valor de coeficiente de restitución, que se expresa como  $e_{choque} : f(\Delta v^i)$ .

En la Figura 6.1-13, se muestra la relación entre el coeficiente de restitución global y el valor de amortiguamiento para dos modelos, el viscoso en (a) y el histerético en (b). En los gráficos las abscisas son amortiguamiento viscoso  $c$ , medido en  $[Ns/m]$  y amortiguamiento histerético  $\beta$  adimensional; y las ordenadas son coeficiente de restitución global  $e_{global}$  adimensional. Mediante interpolación se obtienen los siguientes valores de amortiguamiento.

$$c_{cuadro} = 190 [Ns/m]$$

$$\beta_{cuadro} = 0,0509 [-]$$

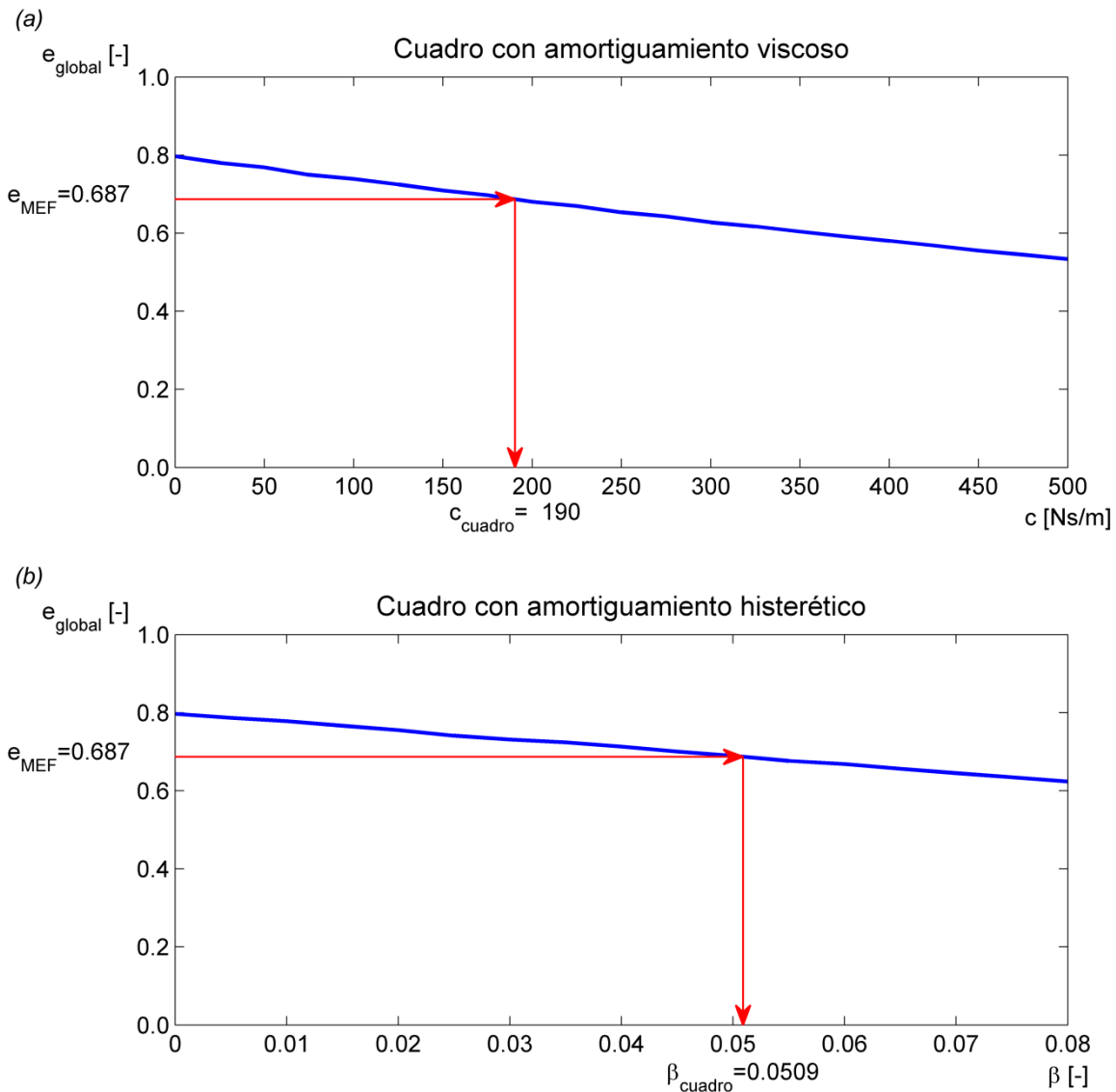


Figura 6.1-13: Estimación del amortiguamiento del cuadro según el modelo de Newton. (a) Amortiguamiento viscoso; (b) Amortiguamiento histerético.

Por lo tanto para ajustar el comportamiento de este modelo de masas concentradas, a los resultados logrados mediante el método de elementos finitos, el único parámetro que se maneja es el amortiguamiento del cuadro, según el tipo de modelo se estima el valor.

Se dispone de todos los parámetros requeridos para el modelo de Newton, por consiguiente en la Figura 6.1-14 y la Figura 6.1-15 se representa el comportamiento cinemático macroscópico ocurrido durante el ensayo, para los modelos de amortiguamiento del cuadro viscoso e histerético respectivamente. En cada figura las abscisas son tiempo medido en [s] y las ordenadas son desplazamiento, velocidad y aceleración medidos en [m], [m/s] y [m/s<sup>2</sup>] respectivamente.



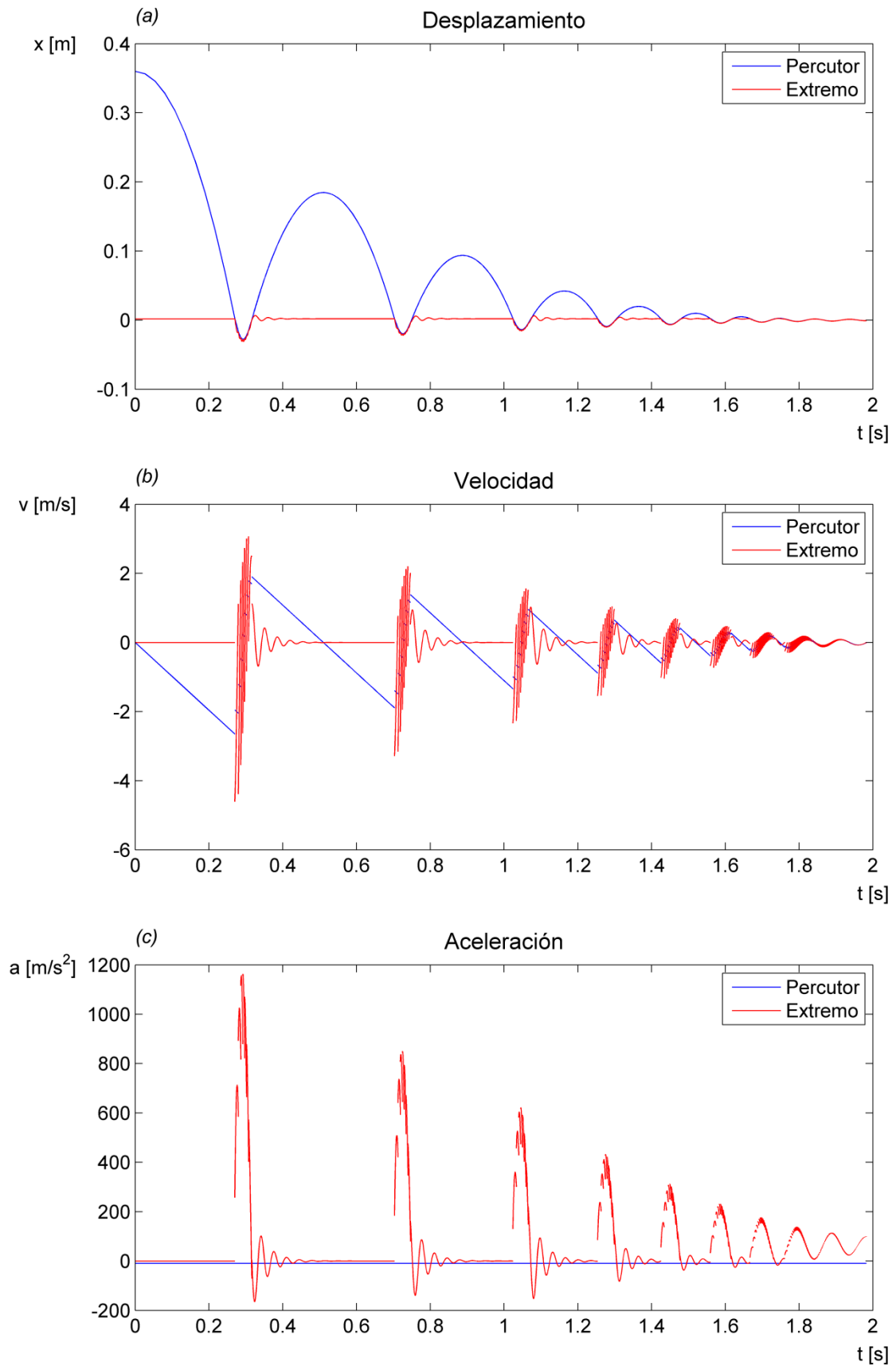


Figura 6.1-14: Resultados del modelo de Newton con amortiguamiento viscoso del cuadro. (a) Desplazamiento; (b) Velocidad; (c) Aceleración.

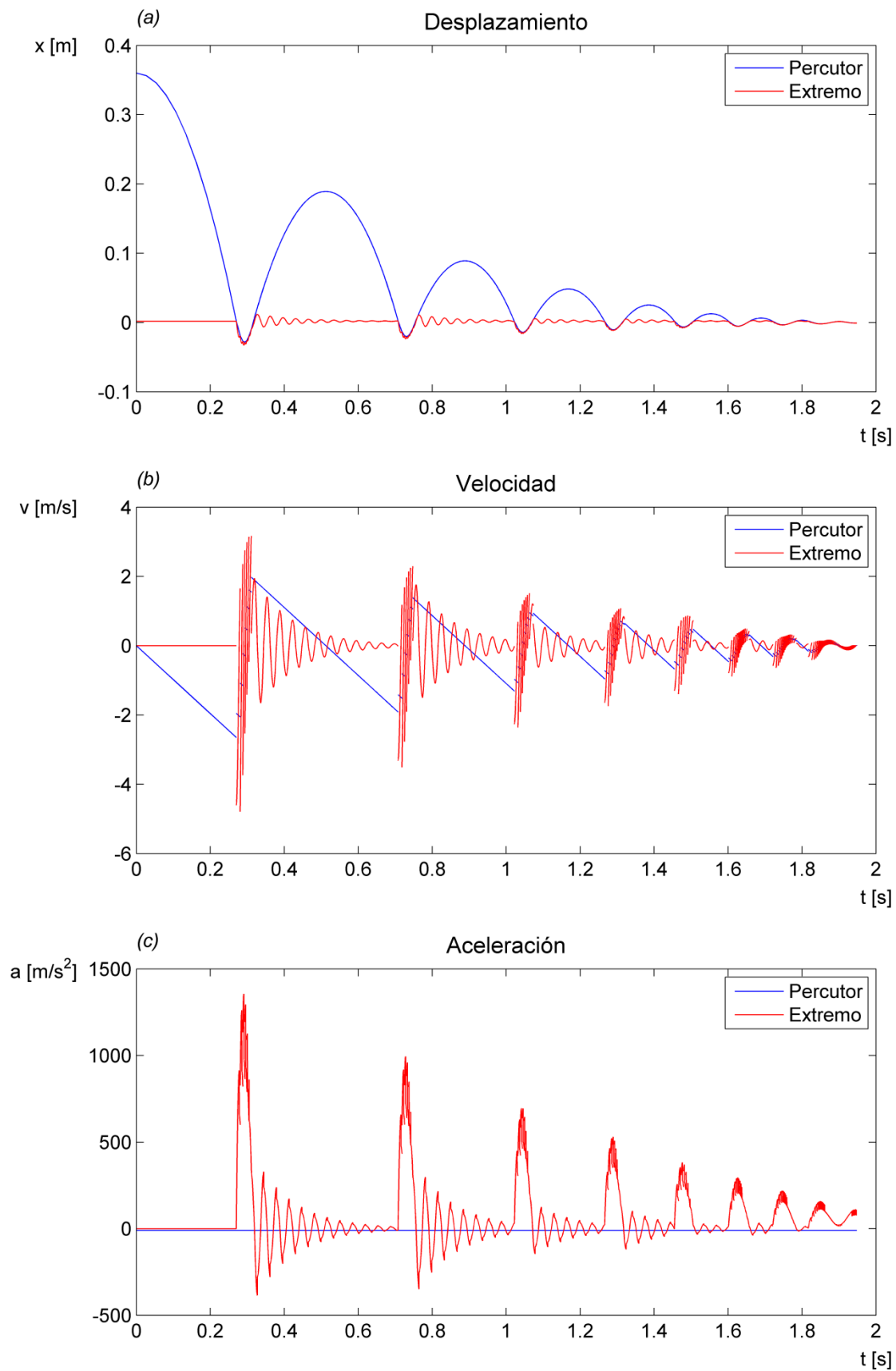


Figura 6.1-15: Resultados del modelo de Newton con amortiguamiento histerético del cuadro. (a) Desplazamiento; (b) Velocidad; (c) Aceleración.

## Análisis de resultados

La disipación de energía que ocurre específicamente en el choque de ambos cuerpos, se expresa mediante el coeficiente de restitución de choque  $e_{choque}$ . Debido a la definición teórica del modelo, todos los impactos tienen duración instantánea. En ciertos intervalos, se observa la ocurrencia de una elevada cantidad de choques, que se interpreta como un único contacto macroscópico. La acción sucesiva de los impactos reiterados ocasiona la transferencia de la cantidad de movimiento total entre el percutor y el rodillo. En el modelo de Newton cada uno de los impactos cumple la relación establecida por  $e_{choque}$ . El efecto de los impactos reiterados, además de la disipación externa, se manifiesta mediante un coeficiente de restitución global  $e_{global}$ , que se observa indirectamente a partir de la altura de rebote.

### Modelo de Kelvin-Voigt

El conjunto cuadro-tija se representa mediante la rigidez  $k_{cua}$ , que se obtiene del análisis estático y la masa asociada al extremo  $m_{ext}$ , que se estima mediante análisis dinámico del modelo de un grado de libertad, cuyos valores se expresan a continuación:

$$k_{cua} = 115243 \text{ [N/m]}$$

$$m_{ext} = 3,401 \text{ [kg]}$$

$$e_{MEF} = 0,687[-]$$

En base al análisis dinámico de impacto realizado mediante elementos finitos, se estiman las propiedades de rigidez y amortiguamiento de los cuerpos durante el contacto:

$$k_{con} = 2.4 \times 10^8 \left[ \frac{N}{m} \right]$$

$$c_{con} = 1.5 \times 10^3 \left[ \frac{N}{m/s} \right]$$

$$\beta_{con} = 3,3 \times 10^{-2}[-]$$

Para representar el cuadro y el contacto, se tienen dos modelos de amortiguamiento para cada uno, por lo tanto se presentan cuatro variantes en las formas de disipación.

En función de los parámetros conocidos del modelo, se estiman los parámetros de cada modelo de amortiguamiento del cuadro, que se muestran en la Figura 6.1-16. En los gráficos las abscisas son amortiguamiento viscoso  $c$ , medido en  $[Ns/m]$  y amortiguamiento histerético  $\beta$  adimensional; y las ordenadas son coeficiente de restitución global  $e_{global}$  adimensional. Mediante la interpolación en los respectivos gráficos se obtienen los valores de amortiguamiento para el cuadro, según cada forma de disipación de contacto:

- Con amortiguamiento viscoso de contacto

$$c_{cua} = 193 \left[ \frac{N}{m/s} \right]$$

$$\beta_{cua} = 0,0662 [-]$$

- Con amortiguamiento histerético de contacto

$$c_{cua} = 196 \left[ \frac{N}{m/s} \right]$$

$$\beta_{cua} = 0,0495 [-]$$

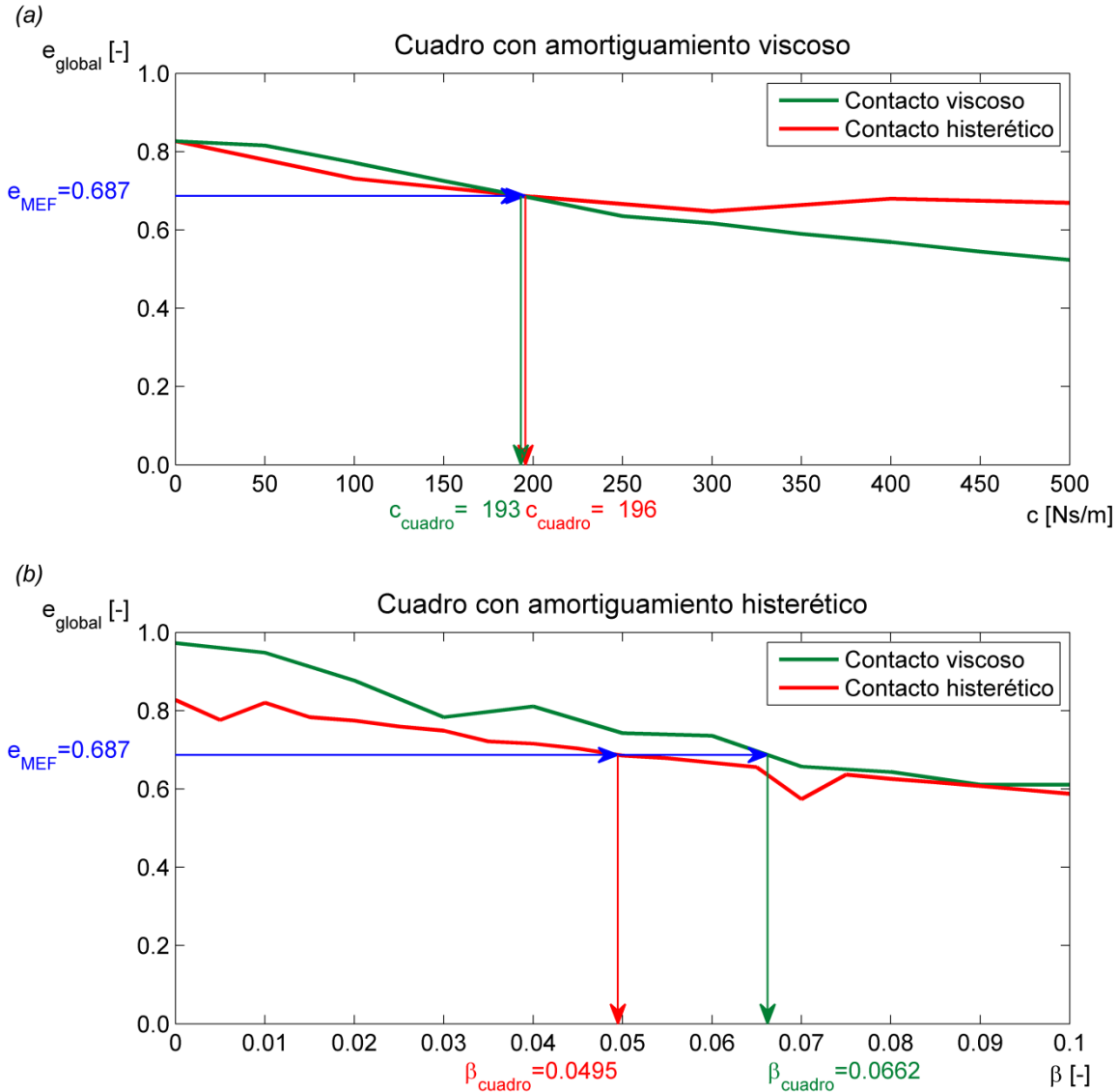


Figura 6.1-16: Estimación del amortiguamiento del cuadro según el modelo de Kelvin-Voigt. (a) Amortiguamiento viscoso; (b) Amortiguamiento histerético.

Se dispone de todos los parámetros requeridos para el modelo de Kelvin-Voigt, por consiguiente en la Figura 6.1-17 y la Figura 6.1-18 se representa el comportamiento cinemático macroscópico ocurrido durante el ensayo, para los modelos de amortiguamiento viscoso e histerético respectivamente. En cada figura las abscisas son tiempo medido en [s] y las ordenadas son desplazamiento, velocidad y aceleración medidos en [m], [m/s] y [m/s<sup>2</sup>] respectivamente.

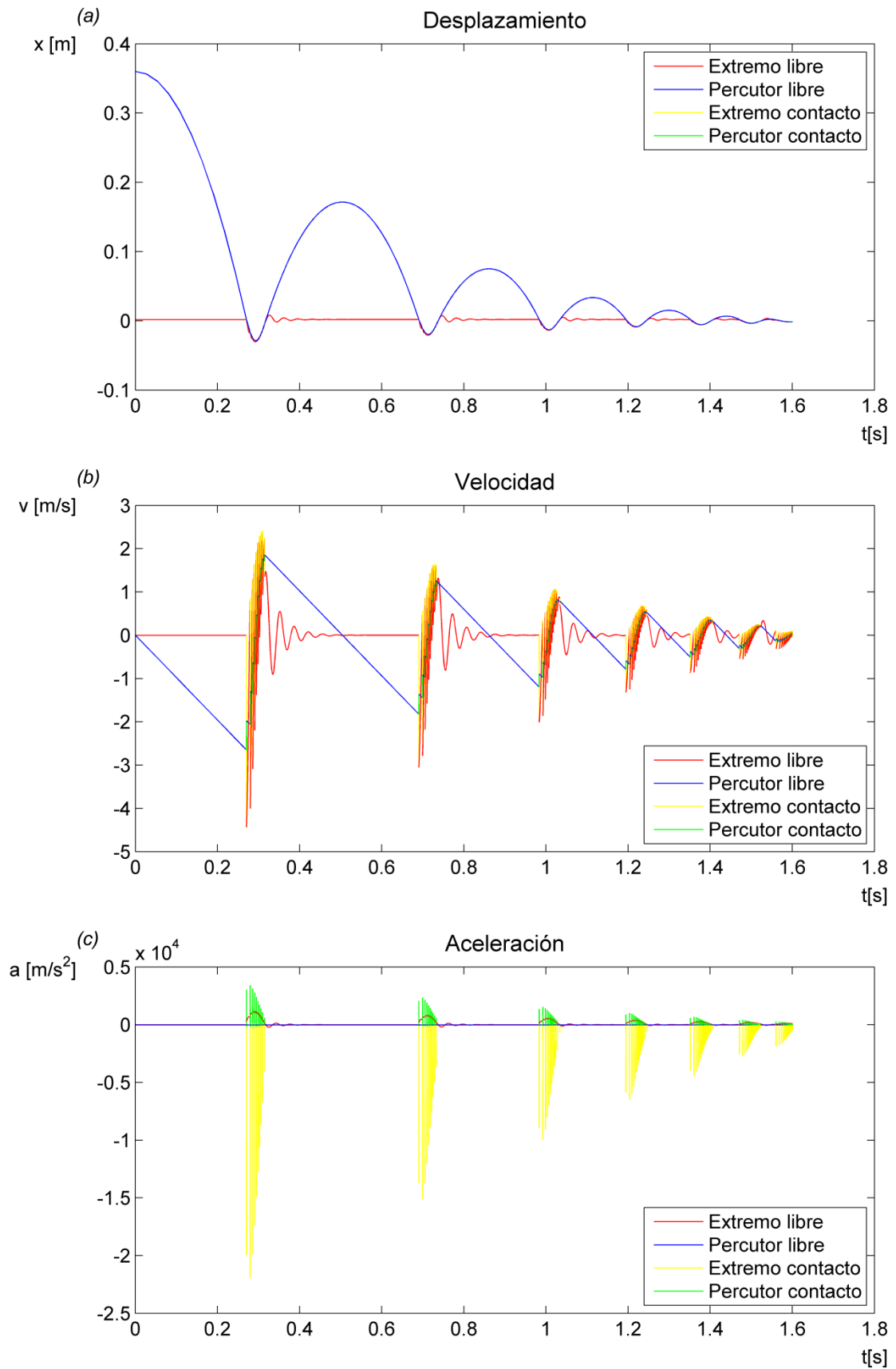


Figura 6.1-17: Resultados del modelo de Kelvin-Voigt con amortiguamiento de cuadro y de contacto, ambos viscosos.

(a) Desplazamiento; (b) Velocidad; (c) Aceleración.

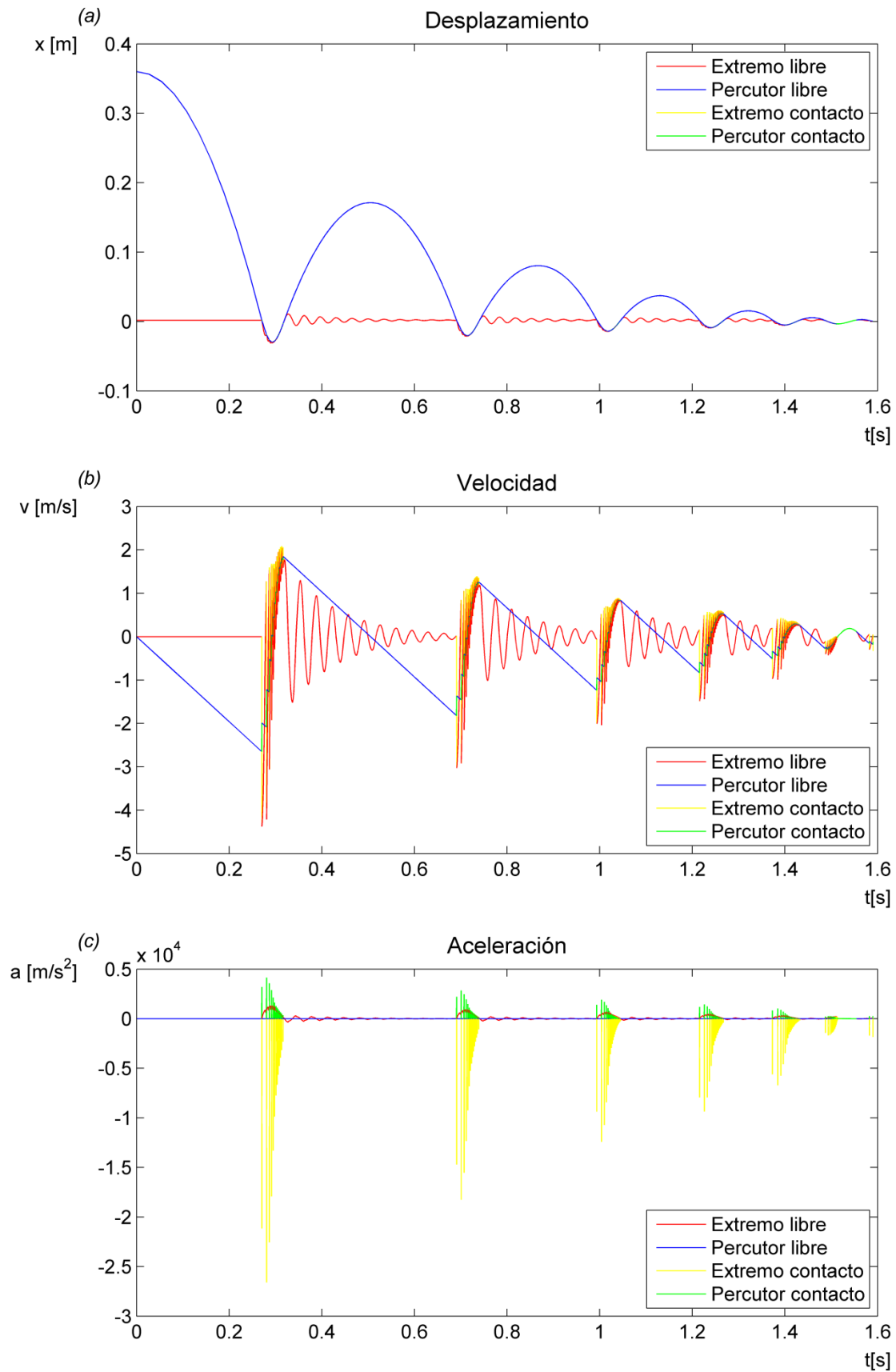


Figura 6.1-18: Resultados del modelo de Kelvin-Voigt con amortiguamiento de cuadro y de contacto, ambos hysteréticos.

(a) Desplazamiento; (b) Velocidad; (c) Aceleración.

## Análisis de resultados

Las estimaciones para los parámetros de amortiguamiento del cuadro, con ambos modelos de amortiguamiento de contacto, tienen el mismo orden de magnitud, presentando pequeñas diferencias relativas.

En los gráficos de aceleración, se observan picos de escasa duración que se atribuyen, a la elevada rigidez que acopla al extremo con el percutor durante el contacto.

Este modelo a diferencia de los anteriores estima valores de aceleración que están acotados por lo tanto no presenta discontinuidades en las velocidades.

### Modelo de Maxwell

El conjunto cuadro-tija se representa mediante la rigidez  $k_{cua}$ , que se obtiene del análisis estático y la masa asociada al extremo  $m_{ext}$ , que se estima mediante análisis dinámico del modelo de un grado de libertad.

$$k_{cua} = 115243 [N/m]$$

$$m_{ext} = 3,401 [kg]$$

$$e_{MEF} = 0,687[-]$$

En base al análisis dinámico de impacto realizado mediante elementos finitos, se estiman tres parámetros para modelar el contacto, cuyos valores se mencionan a continuación:

$$k_c = 1,025 \times 10^8 [N/m]$$

$$k_{c1} = 2,468 \times 10^8 [N/m]$$

$$c_c = 2,939 \times 10^4 [Ns/m]$$

En la Figura 6.1-19 se muestra la relación entre el coeficiente de restitución global y el valor de amortiguamiento del cuadro para dos modelos, el viscoso en (a) y el histerético en (b).

En los gráficos las abscisas son amortiguamiento viscoso  $c$ , medido en  $[Ns/m]$  y amortiguamiento histerético adimensional; y las ordenadas son coeficiente de restitución global  $e_{global}$  adimensional. Mediante la interpolación se encuentra un valor de amortiguamiento viscoso del cuadro para cumplir con el coeficiente de restitución obtenido por el modelo de elementos finitos.

$$c_{cua} = 245 [Ns/m]$$

Para el caso de amortiguamiento histerético del cuadro, se evalúan valores hasta  $\beta = 0,32$ , y se obtiene un coeficiente de restitución superior a lo estimado por modelo de elementos finitos. Debido a la naturaleza inestable de la respuesta, se presentan problemas numéricos para valores de amortiguamiento superiores. De esta manera no se puede modelar el ensayo usando un modelo de contacto de Maxwell, con amortiguamiento histerético del cuadro.

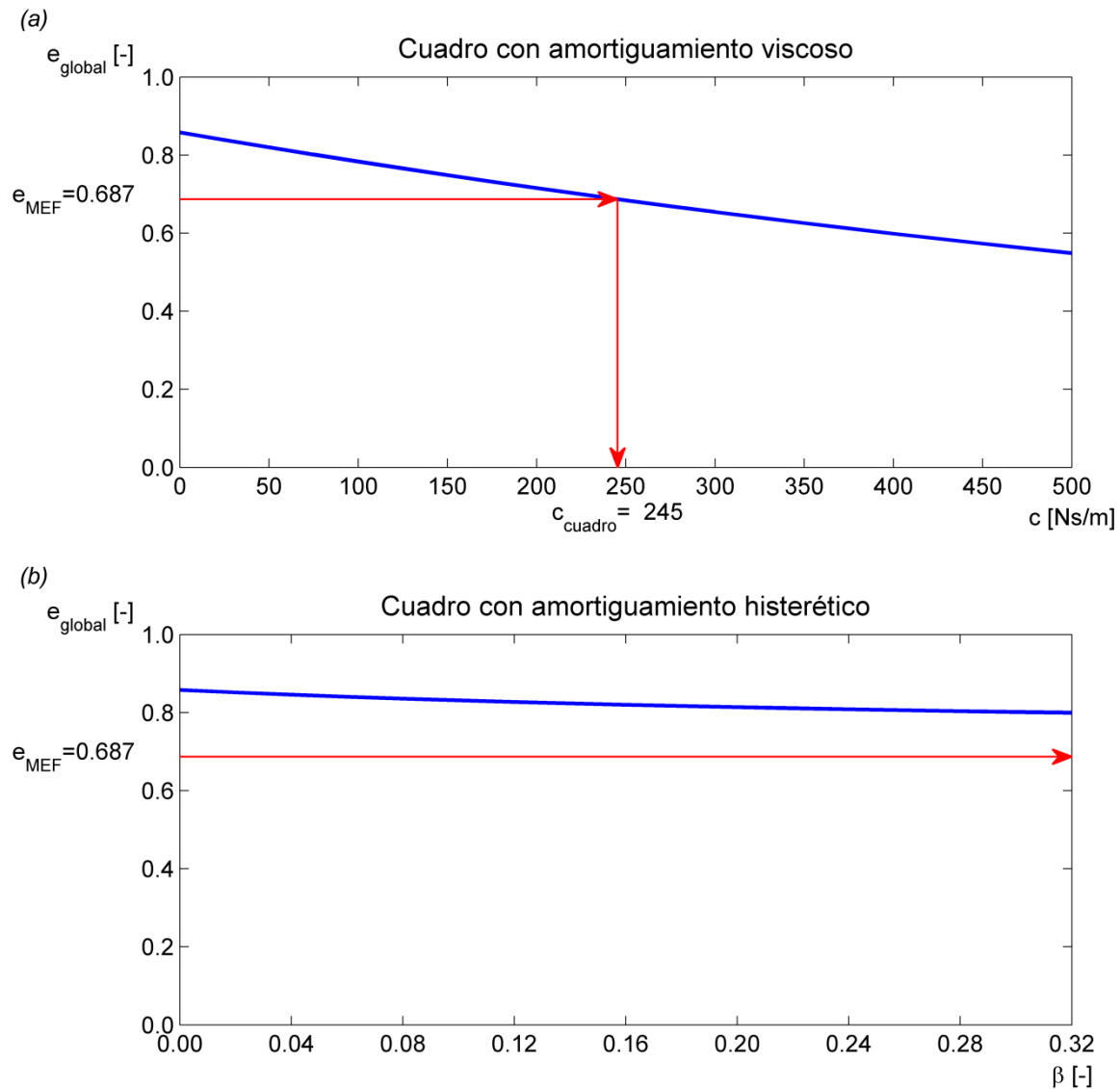


Figura 6.1-19: Estimación del amortiguamiento del cuadro según el modelo de Maxwell. (a) Amortiguamiento viscoso; (b) Amortiguamiento histerético.

Se dispone de todos los parámetros requeridos por el modelo de Maxwell, para amortiguamiento viscoso del cuadro, y se representa el comportamiento cinemático macroscópico ocurrido durante el ensayo, en la Figura 6.1-20. En el gráfico las abscisas son tiempo medido en [s] y las ordenadas son desplazamiento, velocidad y aceleración medidos en [m], [m/s] y [m/s<sup>2</sup>] respectivamente.



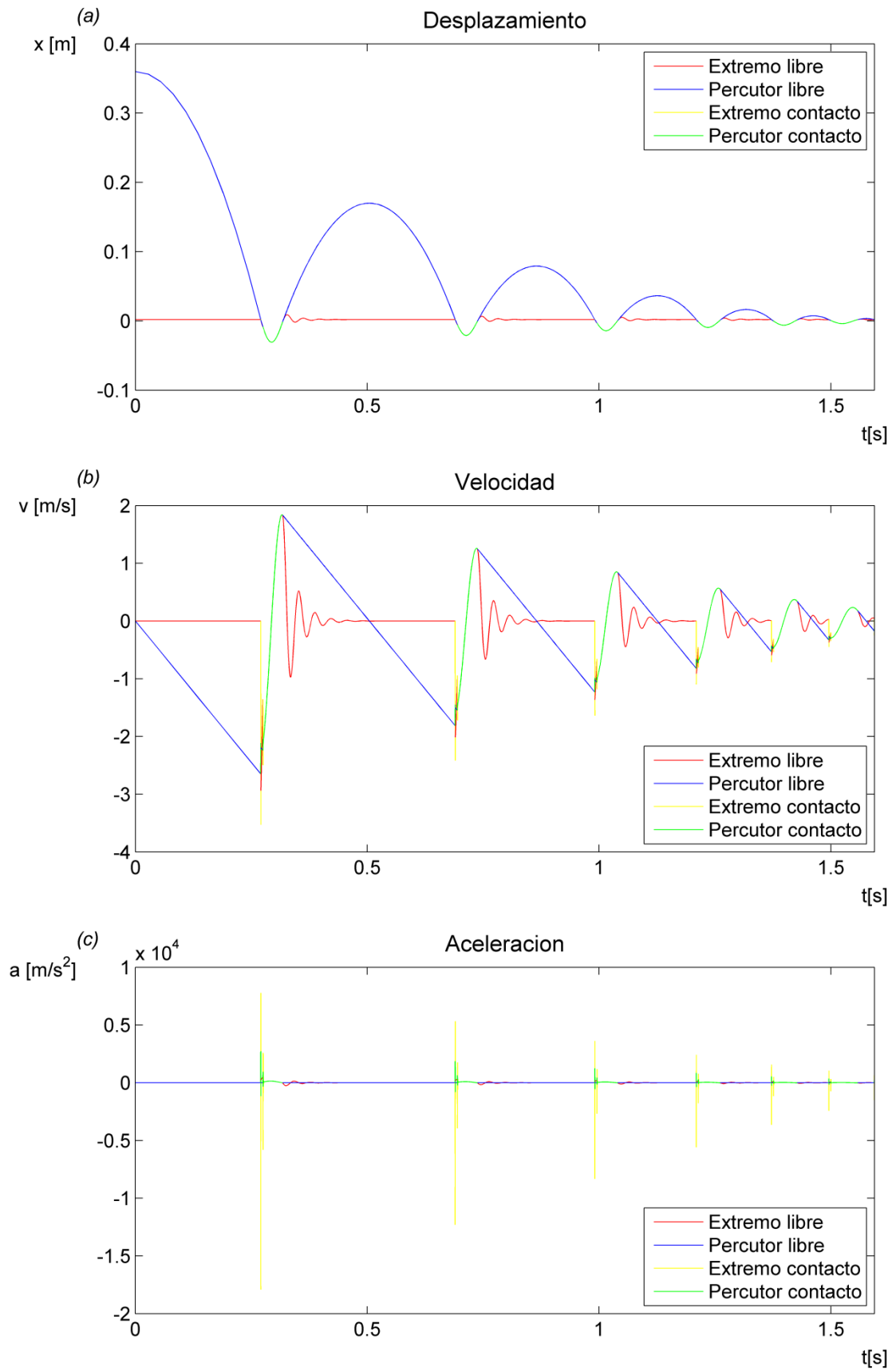


Figura 6.1-20: Resultados del modelo de Maxwell con amortiguamiento viscoso del cuadro. (a) Desplazamiento; (b) Velocidad; (c) Aceleración.

## Análisis de resultados

El modelo de Maxwell permite utilizar únicamente un amortiguamiento viscoso del cuadro, para cumplir con el coeficiente de restitución global logrado mediante el modelo de contacto de elementos finitos. El valor de amortiguamiento estimado es similar al propuesto por el resto de los modelos puntuales. Este es el único modelo que predice aceleraciones continuas durante la duración del ensayo.

Todos los modelos puntuales, pueden mostrar su capacidad para representar el comportamiento macroscópico de los cuerpos que impactan, mediante el ajuste de los parámetros correspondientes. La principal limitación que presentan estos modelos es la incapacidad de representar las deformaciones plásticas, por lo tanto no es posible estimar un valor para el desplazamiento permanente del rodillo, que exige la Norma.

A partir del coeficiente de restitución macroscópico observado en la respuesta de los modelos de elementos finitos, todos los modelos puntuales estiman valores de amortiguamiento para el cuadro, que tienen el mismo orden de magnitud entre sí, pero debido al rápido decremento de las respuestas, expone que los valores de amortiguamiento son superiores a las estimaciones realizadas mediante elementos finitos.

### 6.2 Simulación del ensayo mediante elementos finitos

Las potentes herramientas computacionales disponibles en la actualidad, permiten modelar los fenómenos físicos ocurridos en el ensayo. En este sentido se plantea la simulación del ensayo de choque, caída de una masa, aplicando el método de elementos finitos, donde los cuerpos que impactan, el rodillo y el percutor, se representan primero como masas puntuales que presentan ciertas limitaciones y posteriormente como cuerpos tridimensionales. A continuación se describen ambos modelos.

#### 6.2.1 Modelo de simulación de impacto con cuerpos puntuales

En la Figura 6.2-1 se muestran los componentes reales que participan de choque y la manera en que se representa cada uno. Como el objetivo es estudiar el comportamiento del cuadro ante el impacto, este componente se modela mediante vigas y cáscaras. Por otra parte el percutor y el rodillo se representan mediante cuerpos puntuales, y se estudia la forma adecuada de vincularlos para abordar las condiciones de contacto.

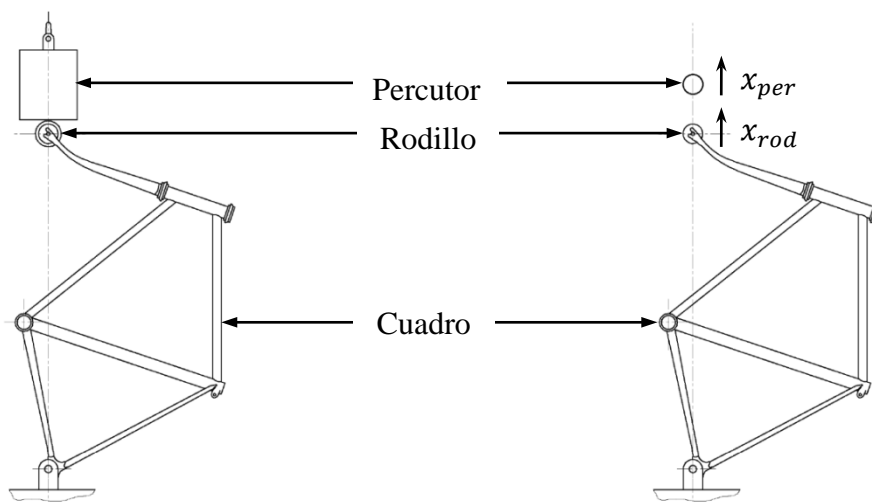


Figura 6.2-1: Modelo de simulación mediante impacto de cuerpos puntuales.

La situación planteada anteriormente, se pretende implementar mediante el método de elementos finitos, por lo que se utilizan las herramientas del software disponibles para elaborar un modelo que se detalla a continuación.

### 6.2.1.1 Implementación en software de elementos finitos

En el modelo de elementos finitos del conjunto cuadro-tija utilizado en el capítulo 5.1.2.2.1.2, para realizar el análisis dinámico mediante el procedimiento de integración directa, se reemplaza la carga triangular por el impacto de dos masas puntuales que representan al percutor y al rodillo, para estudiar sus comportamientos.

El ensayo real se inicia con el percutor situado a una altura  $h = 0,360 [m]$ , sobre el rodillo. Sin embargo la simulación del ensayo comienza un instante anterior al primer contacto, evitando representar la caída libre inicial del percutor para disminuir el volumen de cálculos numéricos, debido al incremento de tiempo pequeño requerido por el procedimiento de integración explícito. De esta manera se proporciona al percutor una velocidad inicial  $v$ , equivalente a la velocidad de caída libre en el instante antes del impacto, que se calcula como:

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,80665 \left[ \frac{m}{s^2} \right] \cdot 0,360 [m]} = 2,657 \left[ \frac{m}{s} \right]$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad terrestre.

Se toma el modelo del cuadro-tija descrito en la sección 4.2.1.1, al que se adiciona una masa puntual, para representar el percutor, cuya masa es  $m_{per} = 22,5 [kg]$  establecida por la Norma (1).

Físicamente el percutor cae libremente sin ningún apoyo, pero en la simulación se imponen restricciones a los desplazamientos en direcciones horizontales.

Para representar el peso del percutor  $P_{per}$ , se aplica sobre la masa una fuerza concentrada, dirigida hacia abajo, cuya magnitud es:

$$P_{per} = m_{per} \cdot g = 22,5 [kg] \cdot 9,80665 \left[ \frac{m}{s^2} \right] = 220,65 [N]$$

Se utiliza un conector axial para vincular ambas masas puntuales entre sí, simulando las condiciones de contacto. En la Figura 6.2-2, se visualiza el comportamiento del conector que representa un modelo de contacto duro, es decir que el contacto ocurre cuando la distancia entre los cuerpos es nula. Durante este estado se puede transmitir cualquier magnitud de fuerza de compresión entre ambos cuerpos, y se representa en el gráfico con la línea roja. Cuando los cuerpos se encuentran separados, no ejercen ninguna fuerza, y este comportamiento se muestra con la línea azul.

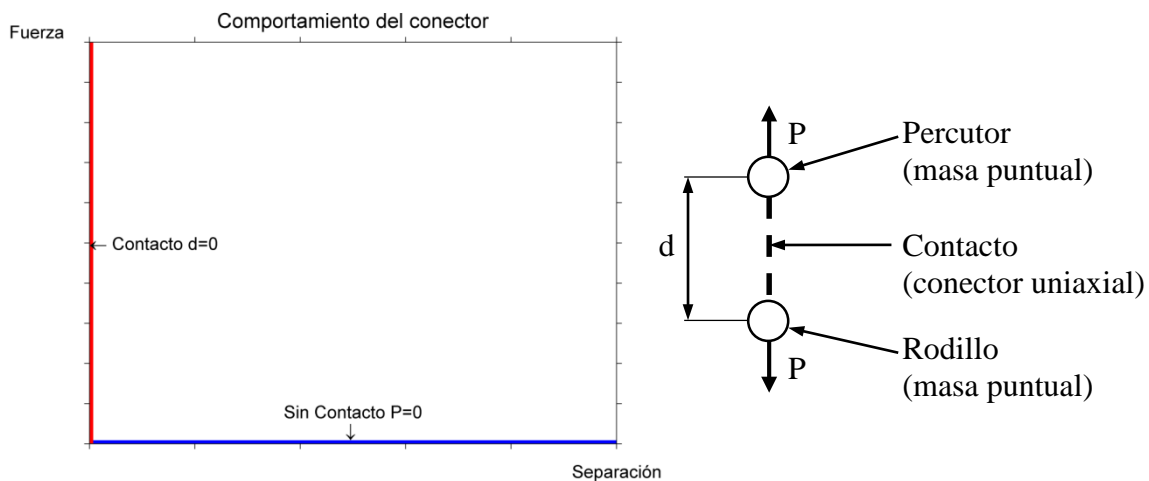


Figura 6.2-2: Relación entre la fuerza de contacto y la separación de las masas puntuales.

Anteriormente en la descripción del método de integración explícito, se menciona que emplea la regla de diferencia central, integrando exactamente aceleraciones constantes. El análisis del ensayo manifiesta que el percutor presenta dos estados: el libre y el contacto. Durante el estado libre su aceleración corresponde a la gravedad terrestre, y durante el impacto que ocurre en un incremento de tiempo hay una aceleración constante, cuya integral es igual a la variación de velocidad experimentada en el contacto, como se muestra en la Figura 6.2-3.

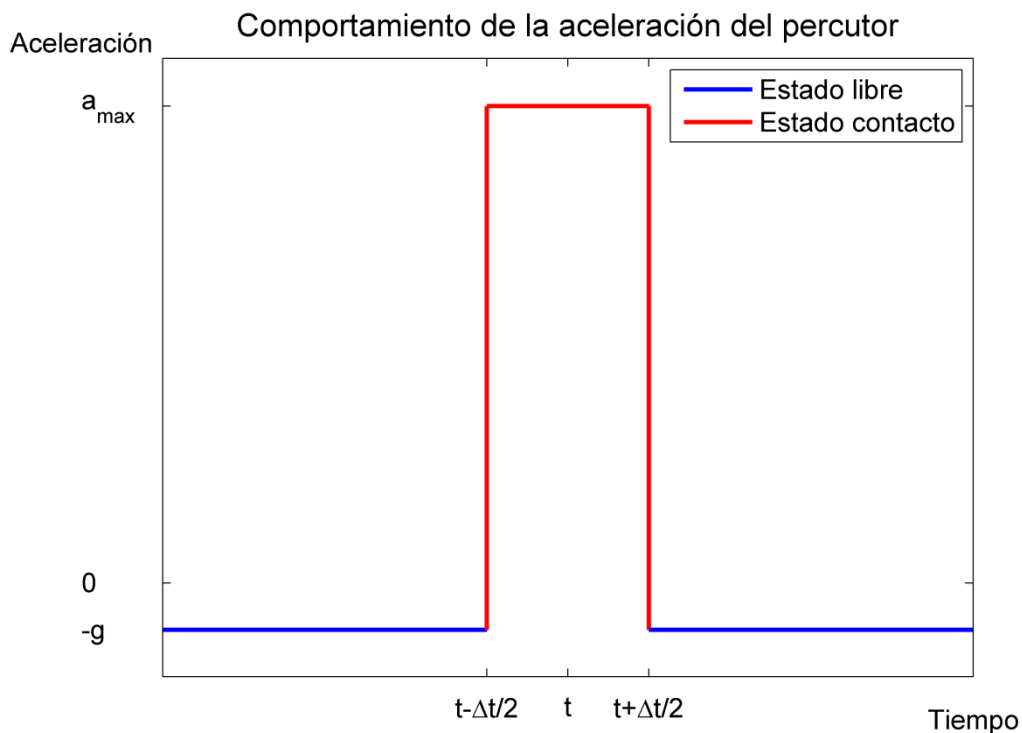


Figura 6.2-3: Aceleración del percutor durante un contacto puntual.

La magnitud de la fuerza obtenida aumenta, al disminuir el incremento de tiempo  $\Delta t$  empleado en el análisis numérico explícito, tendiendo a una magnitud infinita de duración nula, cuya integral es en todos los casos el impulso del percutor.

El modelo de choque puntual con el conector representa un contacto duro equivale a una rigidez infinita entre los cuerpos durante el período de contacto. La aceleración teórica entre ambos cuerpos es un pulso ideal, pero mediante el método explícito se modela mediante una aceleración rectangular como se muestra en la Figura 6.2-4.

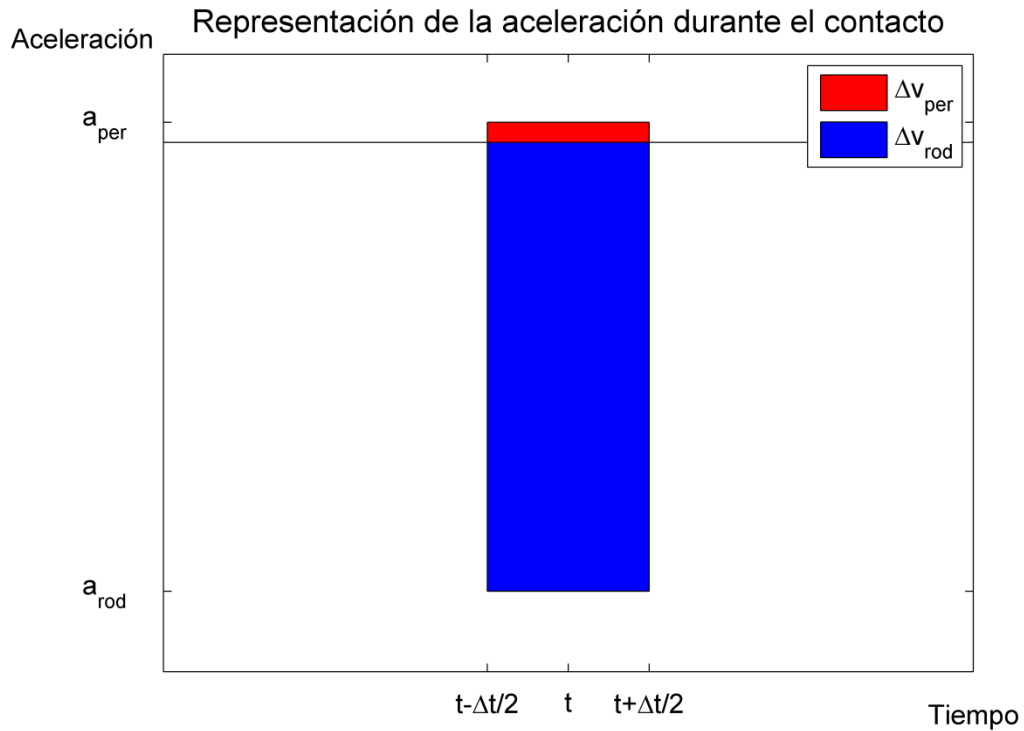


Figura 6.2-4: Representación de las aceleraciones durante un impacto puntual.

Las variaciones de velocidad de los cuerpos durante el impacto se calculan como:

$$\Delta v_{rod} = \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} a_{rod} dt \quad \Delta v_{per} = \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} a_{per} dt$$

En la Figura 6.2-4 se muestran  $\Delta v_{rod}$  y  $\Delta v_{per}$ , ambas representadas por el área coloreada, son inversamente proporcionales a las masas, para cumplir con la conservación de cantidad de movimiento durante el impacto puntual, que se expresa en la Ecuación (6.2-1).

$$I = m_{per} \cdot \Delta v_{per} = m_{rod} \cdot \Delta v_{rod} \quad (6.2-1)$$

El modelo de impacto de masas concentradas únicamente estima una fuerza que se mantiene durante el incremento de tiempo adoptado para la integración explícita, y cuya magnitud es la necesaria para cumplir el intercambio de cantidad de movimiento del impacto. La aceleración máxima  $a_{max}$ , alcanzada por cada masa puntual depende del paso de cálculo adoptado  $t_{adop}$ , y mediante sucesivos refinamientos  $t_{adop}$  tiende a un pulso ideal representado por la función delta Dirac.

$$\lim_{t_{adop} \rightarrow 0} [a_{max}] = \infty$$

La Figura 6.2-5 muestra que se debe emplear un incremento de tiempo  $\Delta t_{adop}$  menor que  $\Delta t_{crit}$ , para que el método de integración explícito sea estable. Resulta difícil calcular el valor exacto del límite de estabilidad, sin embargo el software de elementos finitos realiza una estimación conservativa del mismo para garantizar la estabilidad del procedimiento, que se basa en cada elemento o en el modelo global. Los factores que se consideran en la determinación son el tamaño de malla y la velocidad del sonido en los materiales que conforman el modelo.

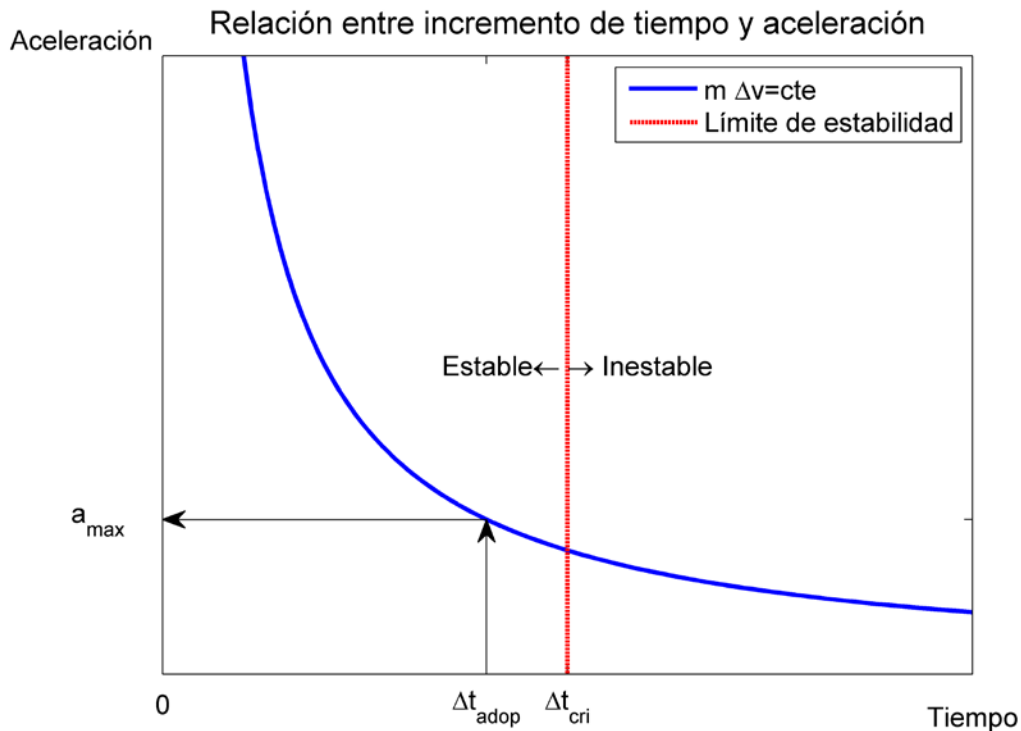


Figura 6.2-5: Relación entre el incremento de tiempo y la aceleración máxima.

La simulación del ensayo mediante masas puntuales representa adecuadamente el comportamiento macroscópico de los cuerpos durante los estados libres, pero no resulta apropiada para modelar el contacto. Por tal motivo, posteriormente los cuerpos involucrados en el choque se representan mediante elementos finitos tridimensionales, para realizar un análisis más detallado durante la interacción de contacto.

### Casos planteados

Las ecuaciones de movimiento se resuelven en un intervalo de 1.2 [s] a partir del primer impacto, y el comportamiento de las variables cinemáticas del percutor y del rodillo se muestran en la Figura 6.2-6. En los gráfico las abscisas son tiempo medido en [s] y en ordenadas aceleración, velocidad y desplazamiento, medidos en  $[m/s^2]$ ,  $[m/s]$  y  $[m]$  respectivamente. Se grafican las respuestas cada 5 incrementos de tiempo.

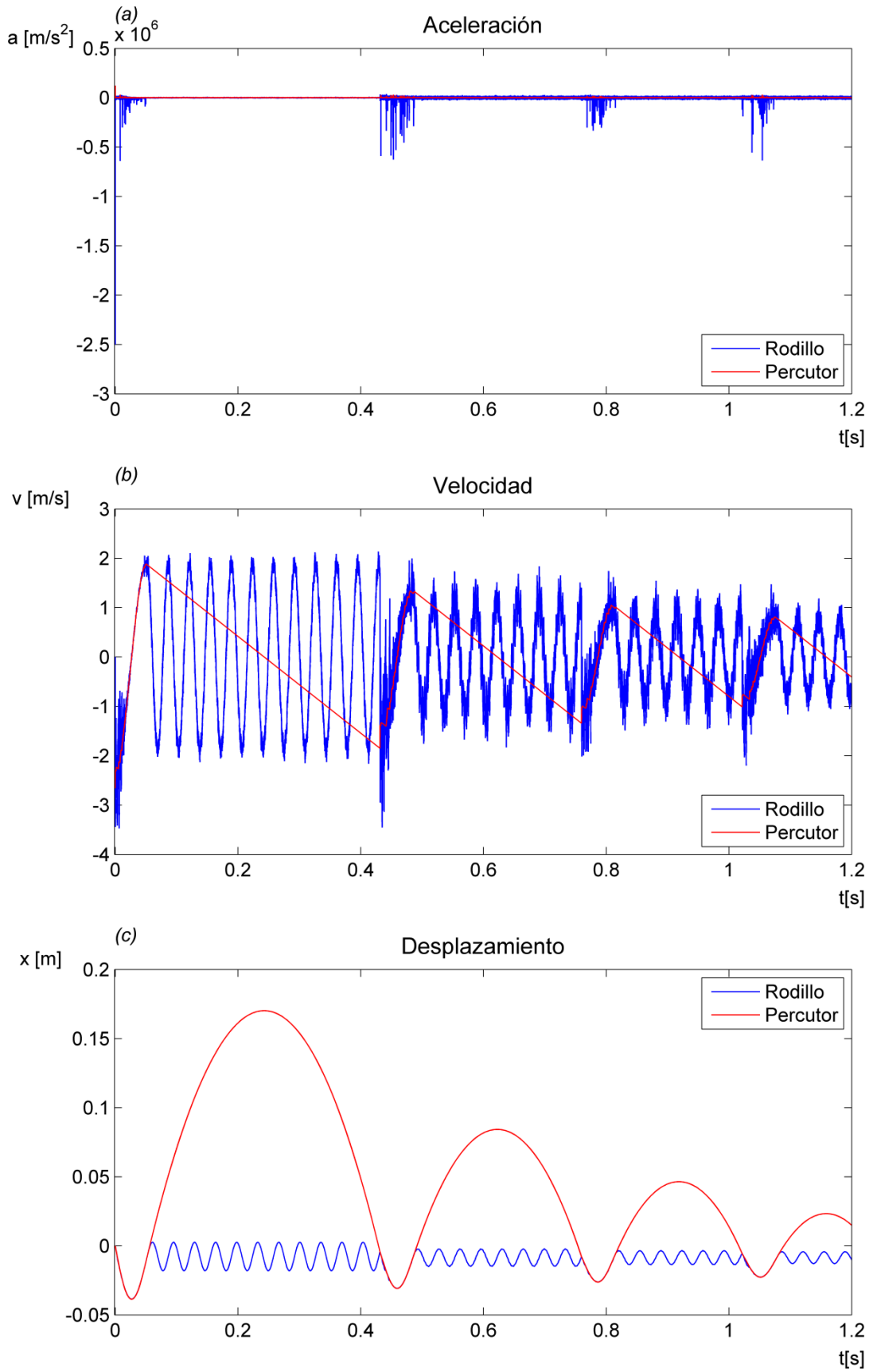


Figura 6.2-6: Variables cinemáticas obtenidas mediante el modelo de impacto puntual. (a) Aceleración; (b) Velocidad; (c) Desplazamiento.

### Análisis de resultados

En el gráfico de aceleración se observan picos, que corresponden a contacto puntuales, producidos por la interacción de contacto duro cuya magnitud depende del tiempo de incremento utilizado en el proceso de integración explícito, que en este caso es de  $7,48 \times 10^{-7}$  [s]. De esta manera se pone en evidencia la limitación del modelo de impacto puntual, para predecir la fuerza de contacto, tendiendo a pulsos ideales cuando se reduce el incremento de tiempo.

En la Figura 6.2-7 se muestran de manera superpuesta los comportamientos de la energía plástica disipada, y el desplazamiento permanente del extremo, provistos por el análisis dinámico del modelo de vigas del cuadro, durante un intervalo de 1,2 [s] a partir del primer impacto, para observar la manera en que se interrelacionan ambas variables. En el gráfico las abscisas son tiempo  $t$ , medido en [s]; las ordenadas son posición de los cuerpos  $x$ , medida en [m] por un lado, y energía plástica disipada por el cuadro  $E_p$ , medida en [J] por el otro lado.

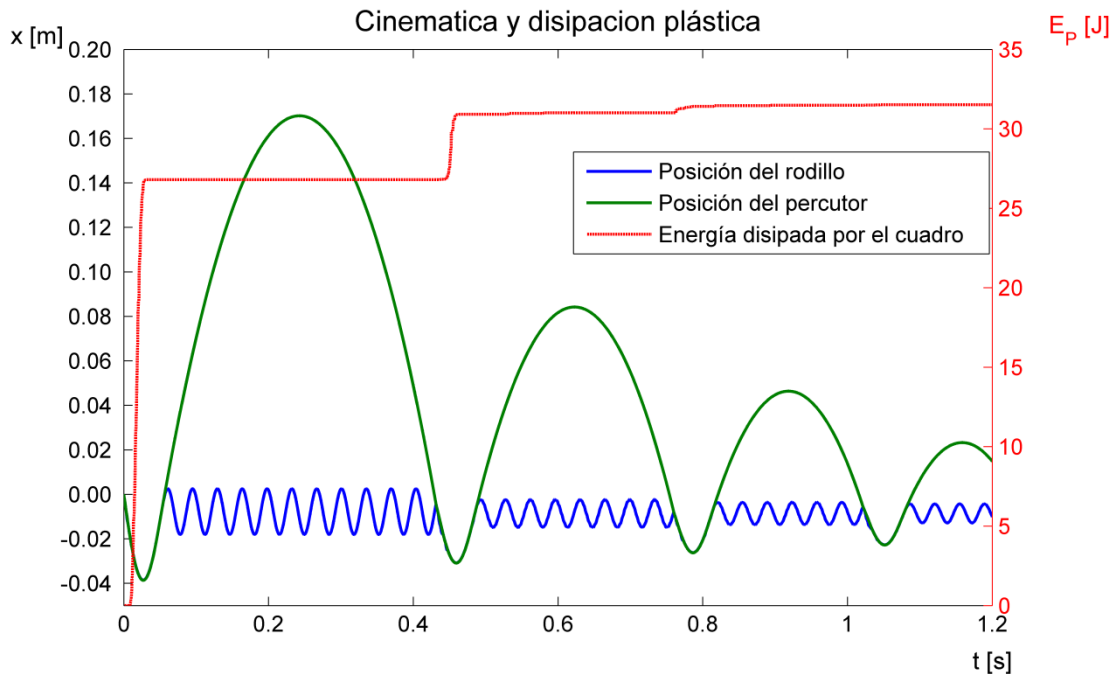


Figura 6.2-7: Cinemática y disipación plástica obtenida mediante modelo de vigas.

La disipación de energía en el cuadro, debido a la deformación plástica de sus componentes, ocurre durante el contacto entre el percutor y el rodillo, finalizando cuando el percutor alcanza su altura mínima. Luego durante el resto del período de contacto y el estado separado no ocurren deformaciones plásticas por lo que la energía se mantiene constante. La mayor parte de la energía se disipa en el primer impacto cuando ocurre una variación repentina, mientras que en los sucesivos impactos, la transformación de energía disminuye significativamente. Por lo tanto, luego de pocos impactos, el percutor rebota a una altura a partir de la cual los choques posteriores no logran incrementar la deformación plástica del cuadro. Los resultados numéricos avalan esta hipótesis, y a los fines prácticos se consideran los dos



primeros impactos. Si se continúa la simulación del ensayo hasta que los cuerpos alcancen el equilibrio estático, se obtendrían los mismos resultados.

En la Figura 6.2-8, se muestra de manera superpuesta la evolución de la energía plástica disipada y el desplazamiento permanente del extremo, provista por el análisis dinámico del modelo de superficies del cuadro, durante un intervalo de 0,55 [s]. En el gráfico las abscisas son tiempo medido en [s]; las ordenadas son posición de los cuerpos  $x$ , medida en [m] por un lado, y energía plástica disipada por el cuadro  $E_p$ , medida en [J] por el otro lado. No se justifica continuar el análisis luego del segundo impacto debido a que este modelo tiene alto costo computacional, y no se incrementa significativamente la energía plástica disipada.

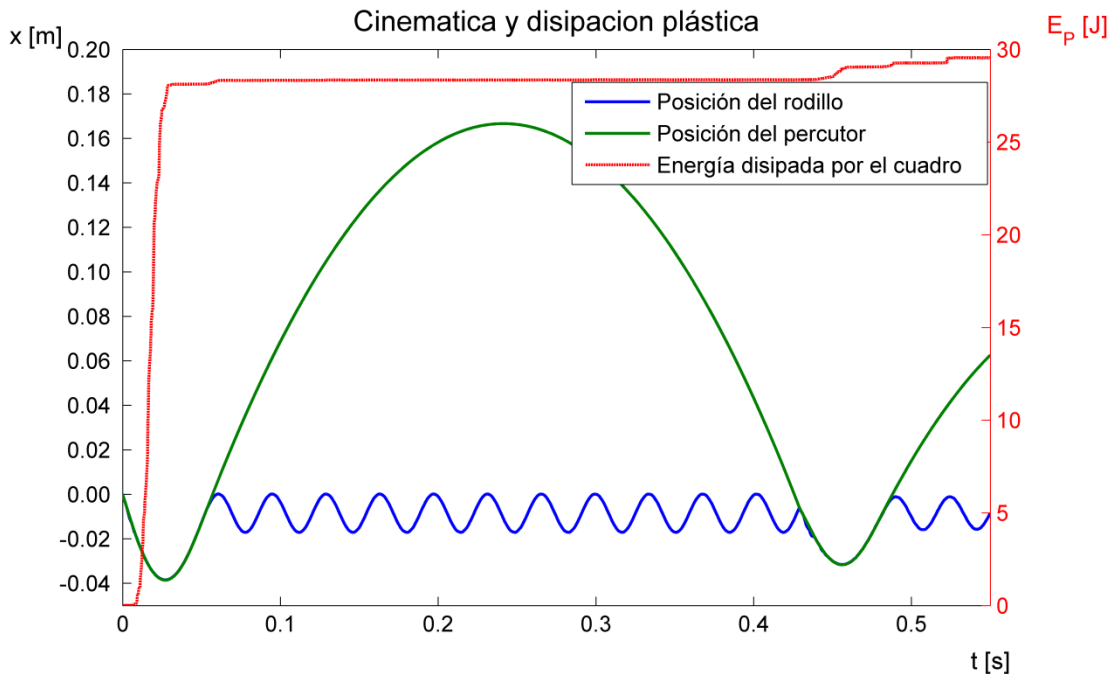


Figura 6.2-8: Cinemática y disipación plástica obtenida mediante modelo de superficies.

Para obtener el desplazamiento permanente del extremo en el ensayo se requiere que el sistema alcance el equilibrio estático. El análisis dinámico explícito realizado para simular el ensayo finaliza antes de alcanzar el equilibrio estático, por lo tanto se debe estimar el desplazamiento permanente del extremo. Para tal fin, se toma una ventana de tiempo, donde el rodillo se encuentre separado del percutor, suponiendo que oscila simétricamente respecto la posición de equilibrio estático, se elige un intervalo mayor que el período de oscilación, y se obtienen los valores de desplazamiento mínimo y máximo que denominamos  $dp_{min}$  y  $dp_{max}$ . Posteriormente se calcula un promedio  $dp_{prom}$  como valor representativo del desplazamiento permanente del extremo. En la Figura 6.2-9 se muestran las ventanas de tiempo utilizadas para estimar el desplazamiento permanente del extremo, para los modelos de vigas y de superficies del cuadro. En el gráfico las abscisas son tiempo  $t$ , medido en [s] y las ordenadas son desplazamiento respecto la posición inicial  $x$ , medido en [m].

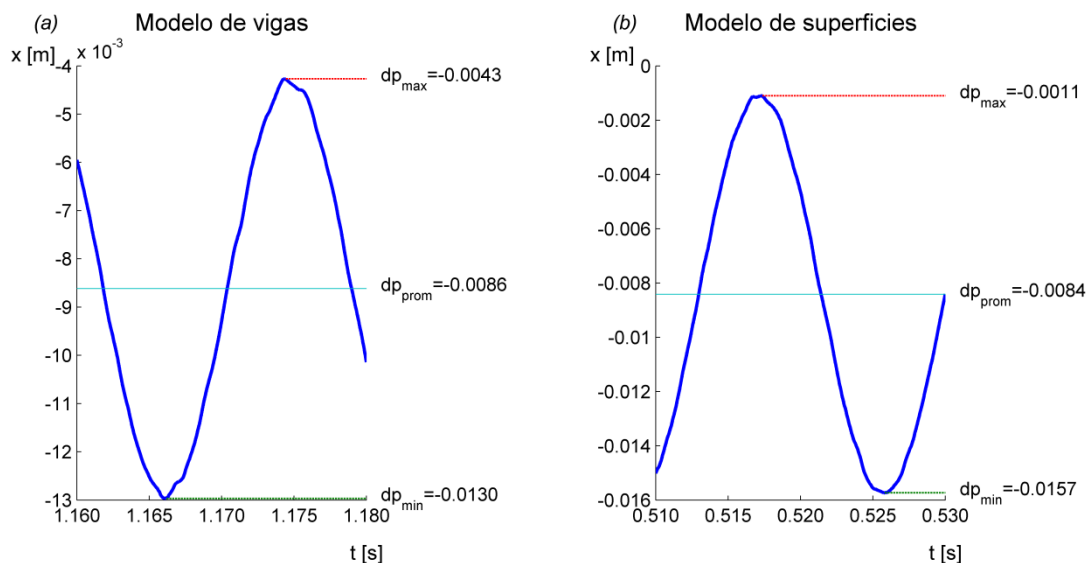


Figura 6.2-9: Estimación del desplazamiento permanente del extremo antes del equilibrio. (a) Modelo de vigas del cuadro; (b) Modelo de superficies del cuadro.

En el análisis dinámico del cuadro en la configuración de ensayo que se expone en la sección 5.1.3.3.1, se obtienen las frecuencias naturales de los primeros modos naturales, las cuales son superiores a 25 [Hz], que corresponde a un período de 0,04 [s]. Se considera prudente adoptar esta duración para la ventana, la cual contiene al período de una oscilación libre del extremo y se estima que la posición de equilibrio estático es  $d_e^{vig} = -0,0086 [m]$  y  $d_e^{sup} = -0,0084 [m]$ , para los modelos de vigas y superficies respectivamente, cumpliendo ambos con lo requerido por la Norma (1),  $d_e > -0,01[m]$ .

La distribución de plastificación equivalente en cada elemento de viga se muestra en la Figura 6.2-10. Los elementos de vigas empleados tienen una única sección de integración ubicada entre los dos extremos.

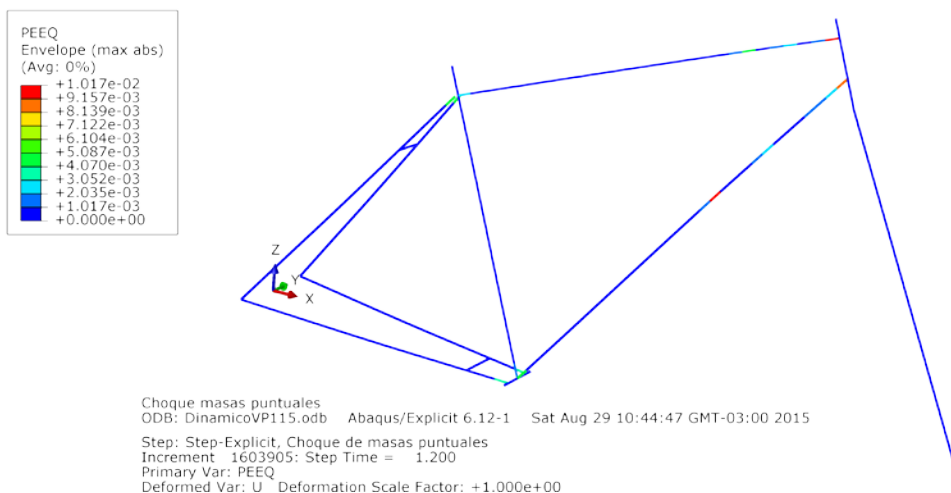


Figura 6.2-10: Plastificación equivalente luego del impacto según el modelo de vigas del cuadro.

La plastificación equivalente máxima es aproximadamente 1,0 %, y ocurre en regiones del tubo inferior y del tubo superior. Además se observa que componentes experimentaron deformaciones permanentes de menor magnitud, mientras que la mayor parte del cuadro participa elásticamente del ensayo de impacto.

Los puntos de integración de cada sección se definen según el perfil seleccionado para la viga y la orientación de las direcciones principales.

La plastificación equivalente PEEQ, se obtiene en cada punto de integración de cada sección, en un elemento de viga. Para presentar los resultados, en un modelo de vigas se selecciona una forma de visualizarlos, ya que se cuenta con la posibilidad de mostrar un único valor para cada sección. Como se menciona anteriormente, en una sección hay una cantidad variable de puntos de integración, por lo tanto se elige el valor máximo como representativo de la sección y se muestra tal cual fue obtenido en cada elemento, sin ser promediado con los valores de los elementos adyacentes, cualquiera sea la diferencia entre ellos.

La distribución de plastificación equivalente en cada elemento de cáscara se muestra en la Figura 6.2-11.

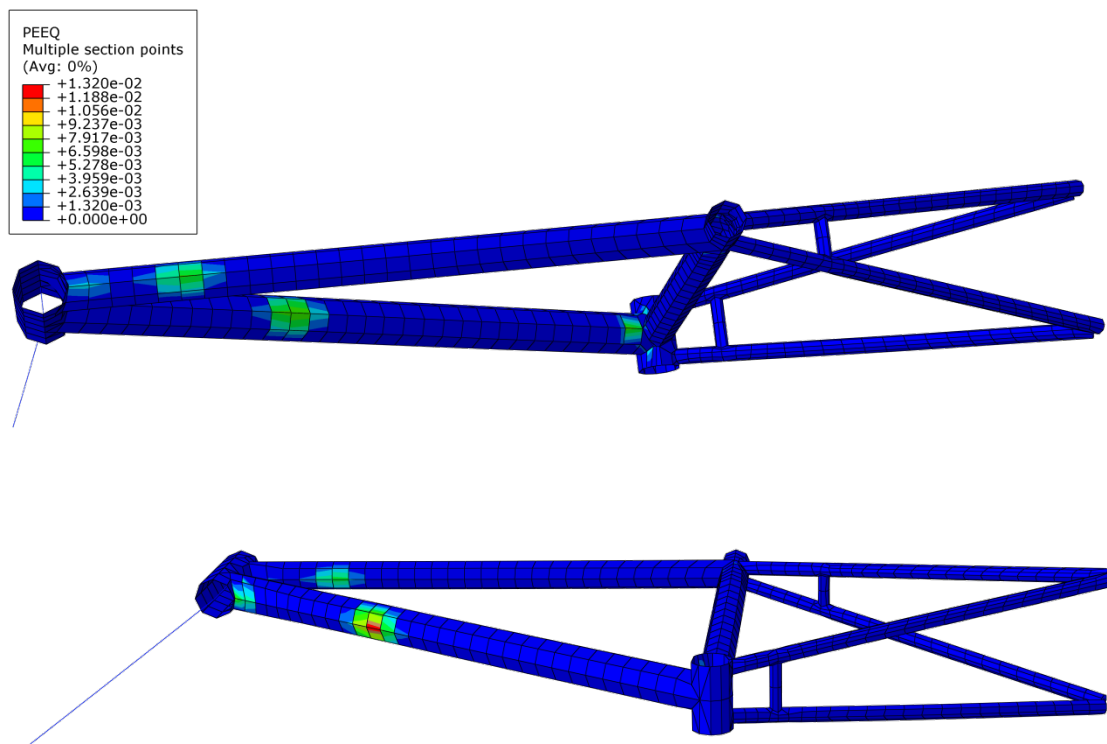


Figura 6.2-11: Plastificación equivalente luego del impacto según el modelo de superficie del cuadro.

En el modelo de cáscaras, luego del primer impacto, se alcanza la deformación plástica máxima de 1,32 %. Se realiza una cuidadosa inspección de las zonas donde se detectan los máximos valores de plastificación, para corroborar que no ocurran en elementos con distorsión, y que no hay variaciones bruscas entre elementos adyacentes. Si no se cumplen estas condiciones, los resultados del modelo pueden ser incorrectos debido a una deficiencia en el mallado. Este aspecto se regula controlando el tamaño y la forma permitida para los elementos.

La malla de elementos de cáscaras que representan al cuadro, en su mayoría está formada por cuadriláteros, sin embargo en determinadas regiones se admiten elementos triangulares. Se tienen 1 y 4 puntos de integración para los elementos triangulares y cuadriláteros respectivamente. En cada punto de integración se obtiene el valor de plastificación y mediante la interpolación lineal se obtienen los valores sobre cada elemento completo que se exponen en la Figura 6.2-11.

En la Figura 6.2-12 se muestra en detalle la región del cuadro donde ocurren las mayores plastificaciones, que se localizan sobre los tubos superior e inferior, cerca de la intersección con el tubo de dirección. Las deformaciones plásticas se concentran en varias zonas y se muestran en cada elemento tal cual se obtienen del análisis sin realizar el promedio con elementos adyacentes, por lo que se observan pequeñas discontinuidades entre estos. En el interior de cada elemento, la plastificación se estima interpolando linealmente a partir de los valores calculados en los puntos de integración de la sección.

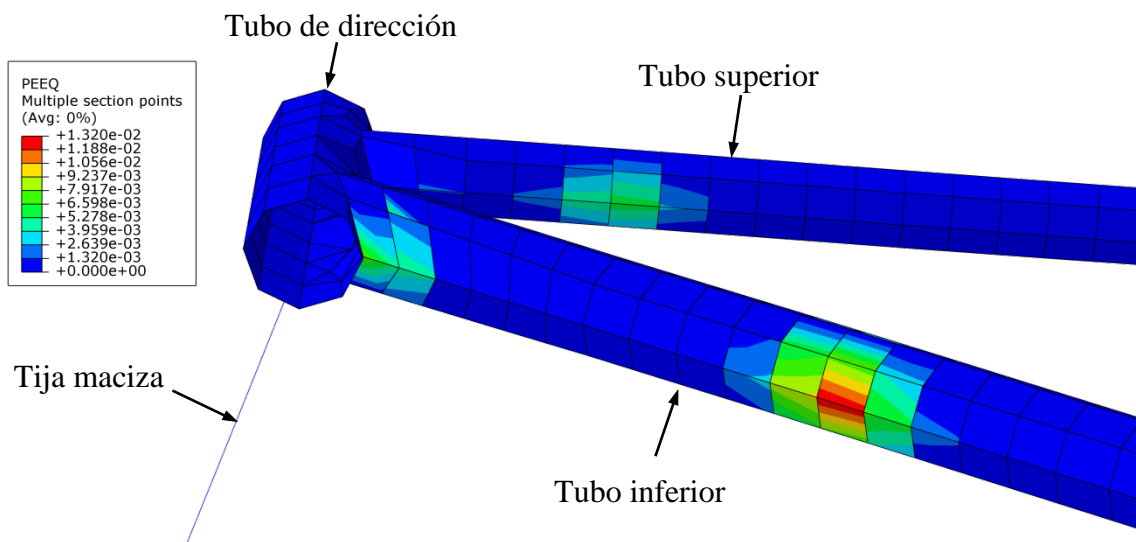


Figura 6.2-12: Zonas de mayor plastificación equivalente luego del impacto.

Los principales resultados para el comportamiento plástico logrados mediante el modelo de vigas y superficies del cuadro, se contrastan en la Figura 6.2-13 donde se muestra la distribución de deformaciones permanentes sobre los componentes del ensayo luego del primer impacto, que se resume en los valores finales de energía plástica disipada  $E_p$ , medida en [J], y la plastificación equivalente máxima de cada parte  $\epsilon_{max}^{pl}$ , adimensional. Se observa una correspondencia entre ambas variables estudiadas, cumpliendo que en los componentes donde no hay plastificación equivalente no se disipa energía plástica, por lo que no contribuyen a la deformación permanente del extremo. Existen componentes que no experimentan plastificación, y ésta se concentra en una escasa cantidad de partes, entre los que están el tubo inferior, el tubo superior, el tubo de sillín, el tubo de dirección, el tubo de pedalier, y los tubos soportes de cadena, alcanzando el máximo valor en el tubo inferior.

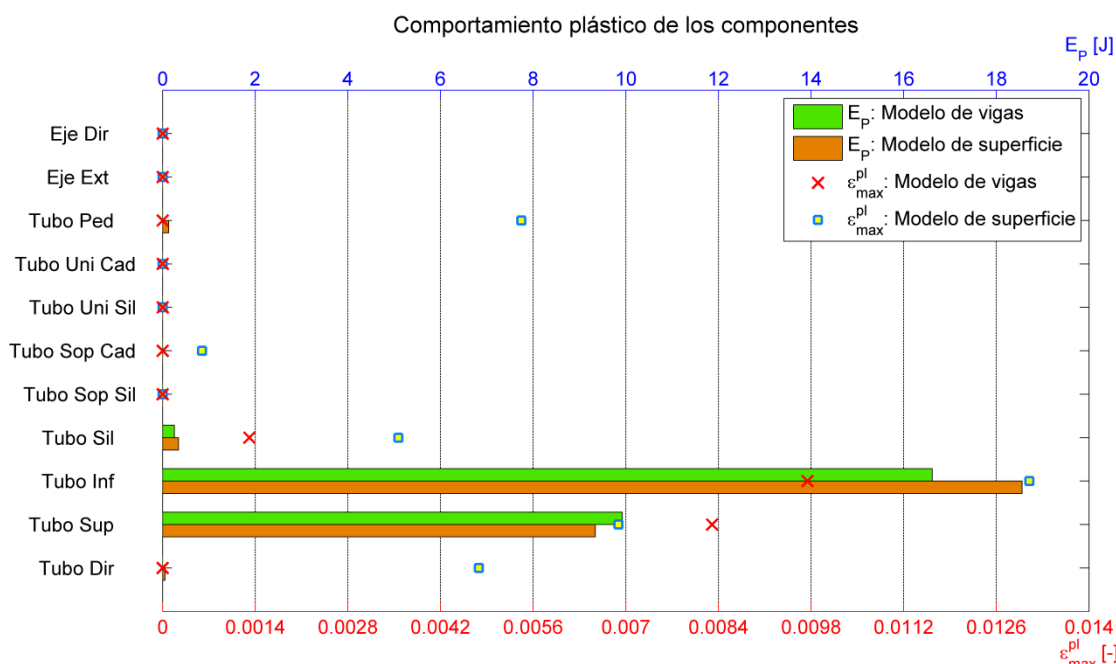


Figura 6.2-13: Distribución de plastificación sobre los componentes del ensayo.

Luego de obtener los resultados mediante el modelo de vigas puro y el modelo mixto de vigas y cáscaras, se considera oportuno mencionar las características del sistema numérico planteado para resolver ambos modelos. Para ello en la Tabla 6-1, se especifican los componentes estructurales y para cada tipo de modelo se menciona la cantidad de elementos utilizados para representar cada componente, la cantidad de puntos de integración, que se utilizan en el análisis y la cantidad que se seleccionan para mostrar los resultados obtenidos.

Componente	Modelo de vigas			Modelo de vigas y cáscaras		
	Elementos	Puntos de integración		Elementos	Puntos de integración	
		Mostrados	Calculados		Mostrados	Calculados
Eje Ext	23	184	391	23	92	391
Eje Dir	5	40	85	5	20	85
Tubo Dir	7	56	56	70	440	1100
Tubo Sup	29	232	232	224	1792	4480
Tubo Inf	33	264	264	248	1984	4960
Tubo Sil	20	160	160	220	1724	4310
Tubo Sop Sil	46	368	368	480	3840	9600
Tubo Sop Cad	42	336	336	476	3808	9520
Tubo Uni Sil	2	16	16	16	128	320
Tubo Uni Cad	3	24	24	16	128	320
Tubo Ped	4	32	32	88	560	1400
<b>TOTAL</b>	<b>214</b>	<b>1712</b>	1964	<b>1866</b>	<b>14516</b>	36486

Tabla 6-1: Resumen de los aspectos numéricos de los modelos del ensayo.

En la Figura 6.2-14, se detalla el posicionamiento de los puntos de integración sobre las secciones. Las vigas de perfiles anulares y circulares tienen respectivamente 8 y 17 puntos de

integración, que se muestran en (a) y (b). Sin embargo en ambos perfiles se seleccionan 8 puntos ubicados sobre el contorno exterior del perfil para visualizar los resultados. Las secciones de cáscaras convencionales, tienen 5 puntos de integración a través del espesor y se muestran únicamente los resultados en 2 de estos que se ubican sobre ambas caras del elemento de superficie, que corresponden a los puntos 1 y 5, que se exponen en (c).

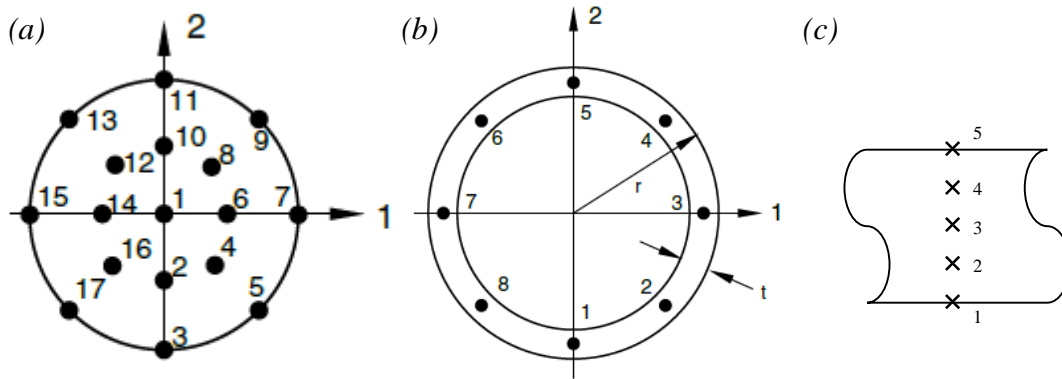


Figura 6.2-14: Distribución de puntos de integración de secciones de vigas y cáscaras. (a) Sección de viga perfil circular; (b) Sección de viga perfil anular; (c) Sección de cáscara.

De manera general, sin considerar las distintas formulaciones empleadas por los modelos, con sus correspondientes limitaciones y capacidades, el modelo de superficies tiene mayor cantidad de puntos de integración, donde se calculan los resultados de plastificación equivalente, por lo que permite estimar un valor más alto para esta variable. De esta manera demuestra mayor aptitud para estudiar las deformaciones ocurridas en el cuadro, permitiendo detectar fenómenos localizados que no se perciben en el modelo de vigas. Como desventaja se puede decir, que debido a la mayor cantidad de elementos necesarios para modelar la geometría, estos tienen menor tamaño, por lo que el incremento de tiempo estable disminuye requiriendo más pasos de cálculo para completar el análisis, y aumentando el costo computacional.

Ambos modelos coinciden en las regiones donde ocurrirán las plastificaciones, sin embargo el modelo de superficie brinda mayor precisión en la localización sobre la sección transversal, mientras que el modelo de vigas se limita a predecir únicamente un segmento axial que representa el perfil de viga completo.

Cabe destacar que en los análisis dinámicos de impacto puntual, los cuerpos que contactan no pueden disipar energía, por lo tanto toda la transformación ocurre en el cuadro y la tija maciza. Esta hipótesis es conservativa, ya que supone condiciones más severas que las reales, donde ambos cuerpos que impactan (rodillo y percutor), aportan flexibilidad al sistema e incluso disipan energía durante el contacto, como se muestra en la Figura 5.2-7, para diferentes velocidades de impacto.

Durante el proceso de proponer una geometría de cuadro, para aplicar los distintos análisis, se observa que pequeñas variaciones en las dimensiones seleccionadas tienen influencia en los resultados logrados. Por lo tanto la geometría del cuadro se elige a los fines de ilustrar los procedimientos de simulación desarrollados, quedando fuera del alcance de este trabajo, la búsqueda de un diseño optimizado al cumplimiento de ensayo de caída del percutor

propuesto por la Norma. Se entiende además, que lograr un cuadro optimizado para un determinado ensayo, no garantiza la capacidad del mismo a tener buen desempeño frente a otros ensayos que además deba cumplir, ni a las condiciones sometidas durante el servicio, que pueden diferenciarse de las propuestas durante el ensayo.

En la Figura 6.2-15, se muestra la fuerza dada durante el primer impacto que ocurre entre el rodillo y el percutor considerados como cuerpos puntuales. En el gráfico las abscisas son tiempo  $t$ , medido en [s] y las ordenadas son fuerza de contacto  $F$ , medida en [N]. Como se emplea un procedimiento de integración directo explícito, para analizar un impacto puntual, las magnitudes de fuerzas obtenidas dependen del incremento de tiempo adoptado, que se estima mediante el software de elementos finitos para cada modelo, garantizando la estabilidad del procedimiento numérico.

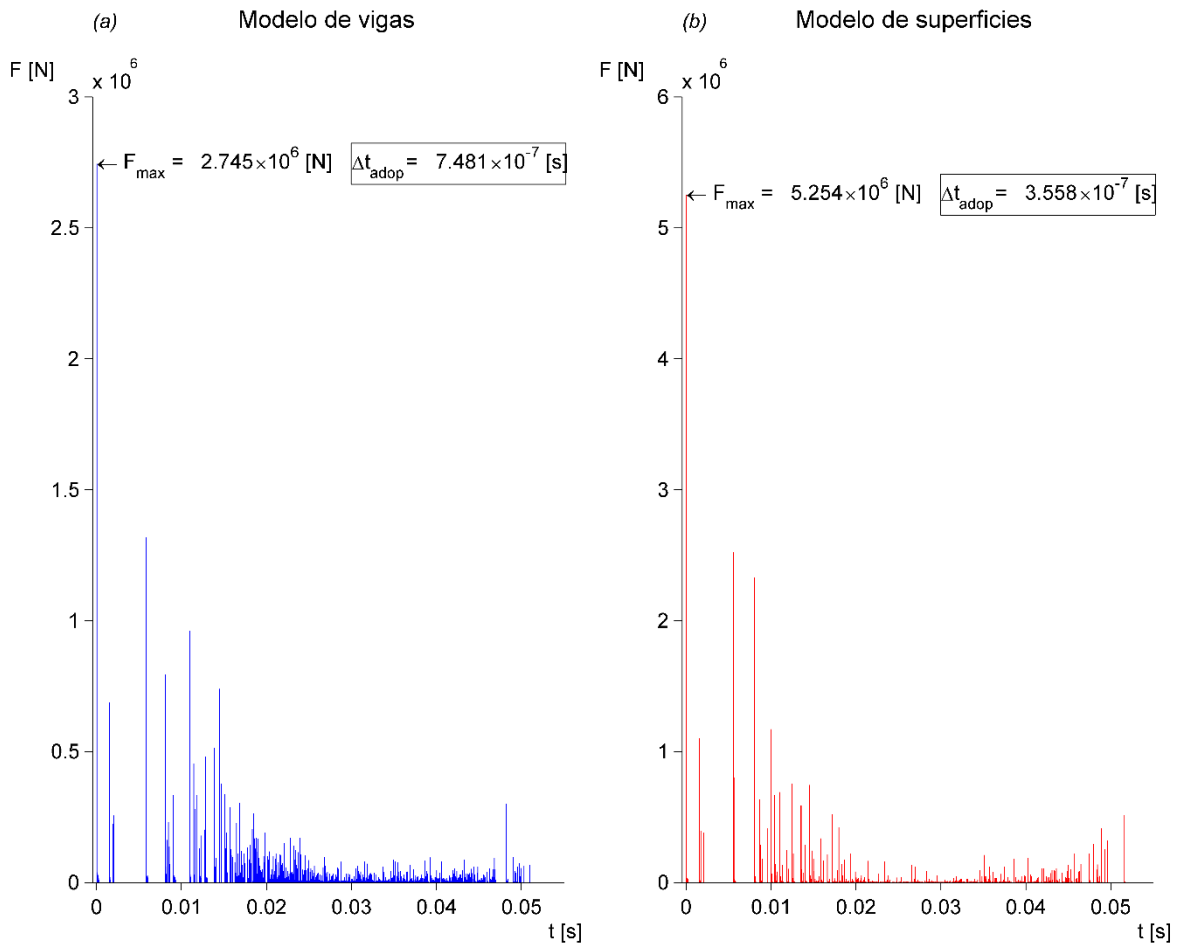


Figura 6.2-15: Fuerza de contacto obtenida mediante el choque de cuerpos puntuales. (a) Modelo de vigas; (b) Modelo de superficies.

Los resultados observados corresponden a la representación de impulsos ideales que ocurren si el incremento de tiempo tiende a cero. Presentados de esta forma se dificulta la comparación entre el modelo de vigas y el modelo de superficies, por lo que se calcula el impulso integrando ambas fuerzas a lo largo de la duración del primer contacto.

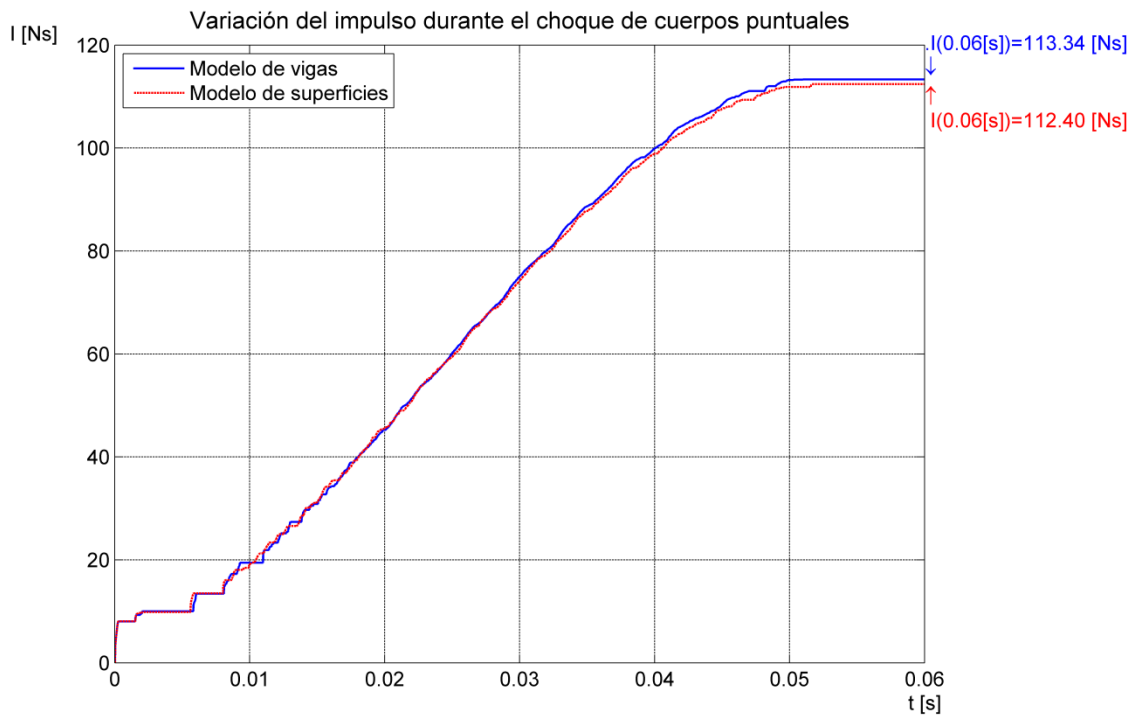


Figura 6.2-16: Impulso de contacto obtenido mediante el choque de cuerpos puntuales.

En la Figura 6.2-16, se muestra la variación del impulso durante el primer choque que ocurre entre el rodillo y el percutor considerados como cuerpos puntuales. En el gráfico las abscisas son tiempo  $t$ , medido en [s] y las ordenadas son impulso de la fuerza de contacto  $I$ , medido en [Ns]. Los modelos de vigas y superficies del cuadro, estiman una variación de impulso similar, a pesar de presentar diferentes magnitudes de fuerzas de contacto, que ocasionan comportamientos equivalentes en la estructura.

## 6.2.2 Modelo de simulación de impacto con cuerpos tridimensionales

En la sección anterior se simula numéricamente el ensayo de choque, caída de una masa, mediante cuerpos puntuales, que presentan limitaciones en la estimación de las aceleraciones y las fuerzas de contacto. Por este motivo, en la presente sección, se emplean cuerpos tridimensionales que representan al percutor y al rodillo. Esta situación planteada, se pretende implementar mediante el método de elementos finitos, por lo que se utilizan las herramientas del software disponibles para elaborar un modelo que se detalla a continuación.

### 6.2.2.1 Implementación en software de elementos finitos

El modelo de elementos finitos de impacto de cuerpos tridimensionales se basa en los mismos aspectos que el modelo de choque de cuerpos puntuales desarrollado anteriormente, al que se realizan adaptaciones en el ensamble, las restricciones, y las condiciones de contorno. Estas cuestiones del modelo se consideran a continuación.



## Ensamble

Se incluyen todas las instancias que participan del ensayo de impacto, que se representan de diversas maneras:

- Cuadro: Un modelo de superficies cilíndricas cuyos ejes rectos unen las posiciones teóricas de los extremos.
- Tija maciza: Un modelo de vigas rectas que unen las posiciones teóricas de los nodos extremos.
- Rodillo: Un sólido tridimensional.
- Percutor: Un sólido tridimensional.
- Soporte de puntera de atrás izquierda: Un punto para aplicar las condiciones de apoyo.
- Soporte de puntera de atrás derecha: Un punto para aplicar las condiciones de apoyo.

En la Figura 6.2-17 se muestran las piezas posicionadas como indica el ensayo, según la Norma, y el modelo seleccionado para representar cada una en la simulación.

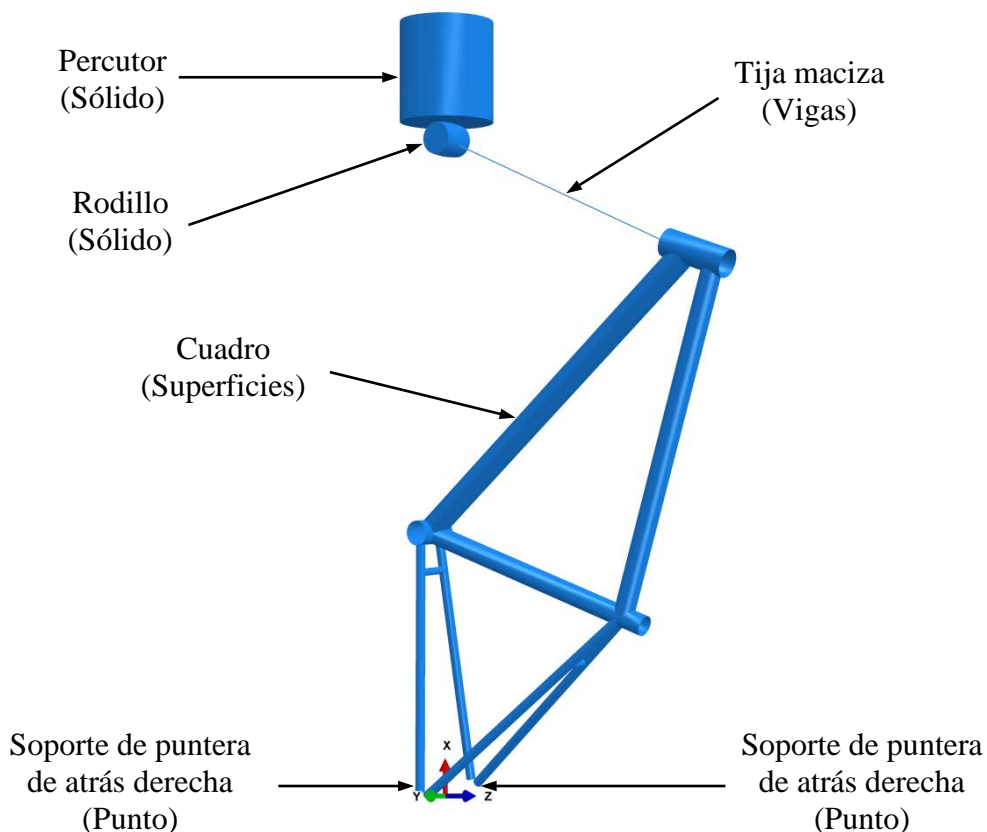


Figura 6.2-17: Ensamble de instancias que participan de la simulación del ensayo.

## Restricciones

En el ensamble participan nodos y elementos estructurales de distinta naturaleza como vigas, cáscaras, y sólidos continuos por lo tanto se requiere aplicar restricciones de acoplamiento basados en superficie, para vincular las siguientes regiones del modelo:

- Las cáscaras que forman el tubo de dirección con las vigas que modelan la tija maciza.
- Las cáscaras que forman los tubos soporte de asiento y tubos soporte de cadena con los puntos de soporte sobre los que se aplican las condiciones de contorno.
- El nodo extremo de la tija maciza con la superficie del rodillo, que se representa por un sólido continuo.

Se establecen acoplamientos cinemáticos que vinculan un punto de control y la región de nodos ubicados sobre la superficie. Las dos primeras restricciones mencionadas se describen en la sección 4.2.1.1.2, cuando se desarrolla el modelo del conjunto cuadro-tija en la configuración de ensayo. La última restricción se muestra en la Figura 6.2-18, donde se representa el punto de control sobre el extremo de la tija en rojo y la superficie acoplada completa del rodillo en púrpura. Sin embargo, para definir el acoplamiento cinemático, la restricción se aplica únicamente sobre todos los nodos de la superficie del rodillo que se encuentran a una distancia menor a un radio de influencia especificado.

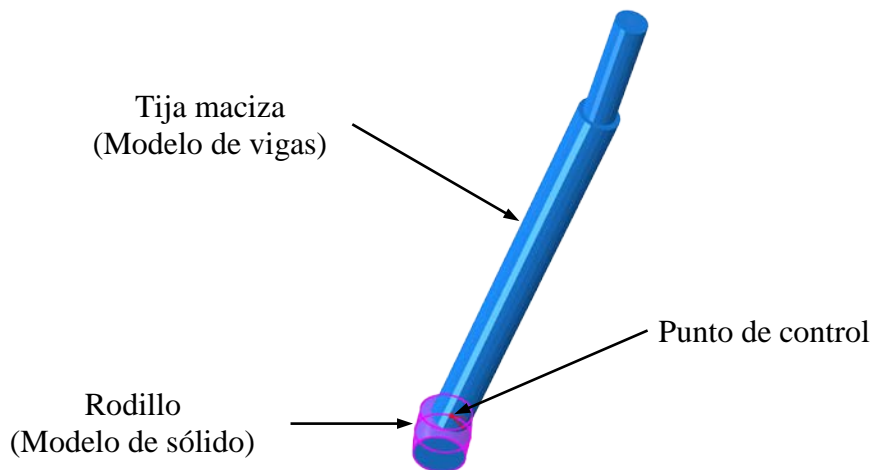


Figura 6.2-18: Restricción que acopla al rodillo y la tija maciza.

### Condiciones de contorno

La única condición de contorno que se aplica al modelo, es la fijación de los puntos de soporte, que se acoplan cinemáticamente a las punteras de atrás, para sostener al cuadro. Por lo tanto no se aplica ninguna condición sobre el rodillo y el percutor.

### Casos planteados

Las ecuaciones de movimiento se resuelven en un intervalo de 0,06 [s] a partir del primer impacto debido a que durante este período ocurre la mayor disipación plástica del modelo.

El comportamiento de las variables cinemáticas de cuerpo rígido, del percutor y del rodillo se muestran en la Figura 6.2-19. En los gráfico las abscisas son tiempos medido en [s] y en ordenadas aceleración, velocidad y desplazamiento, medidos en  $[m/s^2]$ ,  $[m/s]$  y  $[m]$  respectivamente.

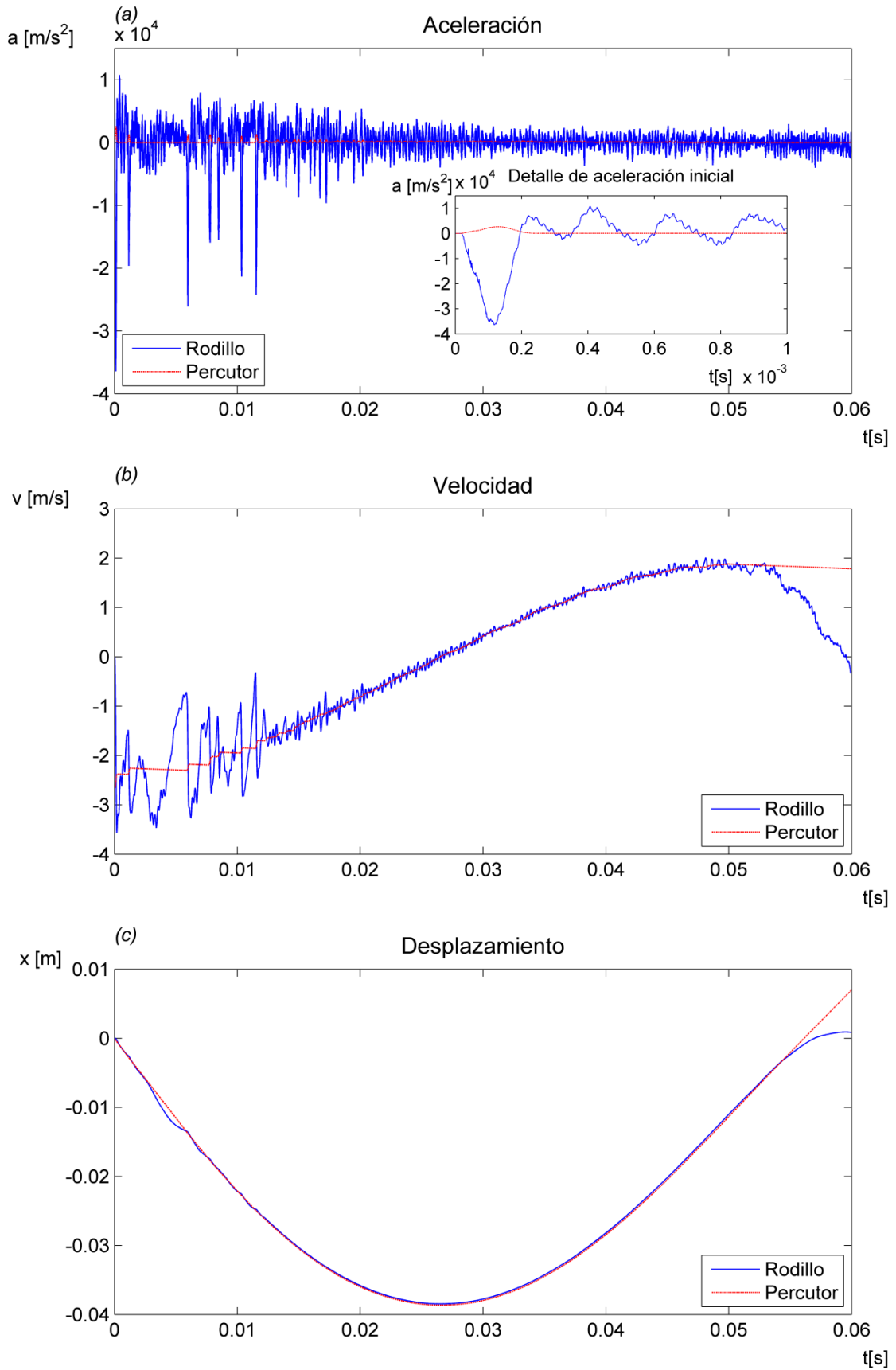


Figura 6.2-19: Variables cinemáticas obtenidas mediante el modelo de impacto de cuerpos tridimensionales.

(a) Aceleración; (b) Velocidad; (c) Desplazamiento.

## Análisis de resultados

En el gráfico de aceleración ( $a$ ) se observa un comportamiento de alta frecuencia. Para mostrar detalladamente lo que ocurre durante el inicio del contacto se realiza una ampliación que abarca un período de  $1 \times 10^{-3}$  [s], permitiendo observar que la aceleración tiene una variación suave, no ocurriendo cambios repentinos como en el impacto de cuerpos puntuales. Por otro lado los valores de aceleración máximos alcanzados son menores a los obtenidos mediante el impacto de cuerpos puntuales debido a que el modelo de impacto de cuerpos tridimensionales incorpora la flexibilidad del rodillo y del percutor.

El incremento de tiempo crítico estimado para realizar la integración numérica de las ecuaciones es de  $1,9 \times 10^{-7}$  [s], permitiendo capturar la respuesta de alta frecuencia de los cuerpos involucrados en el choque.

En la Figura 6.2-20, se muestra representado mediante barras horizontales, la energía plástica disipada por cada uno de los componentes  $E_p$ , medida en [J], y por otro lado se indica mediante puntos, la plastificación equivalente máxima alcanzada  $\varepsilon_{max}^{pl}$ , adimensional. Se exponen de manera superpuesta los resultados obtenidos mediante el impacto de cuerpos puntuales y tridimensionales. Se puede observar de manera general que el modelo de choque puntual, estima valores de plastificación superiores a los calculados mediante el modelo de choque de cuerpos tridimensionales.

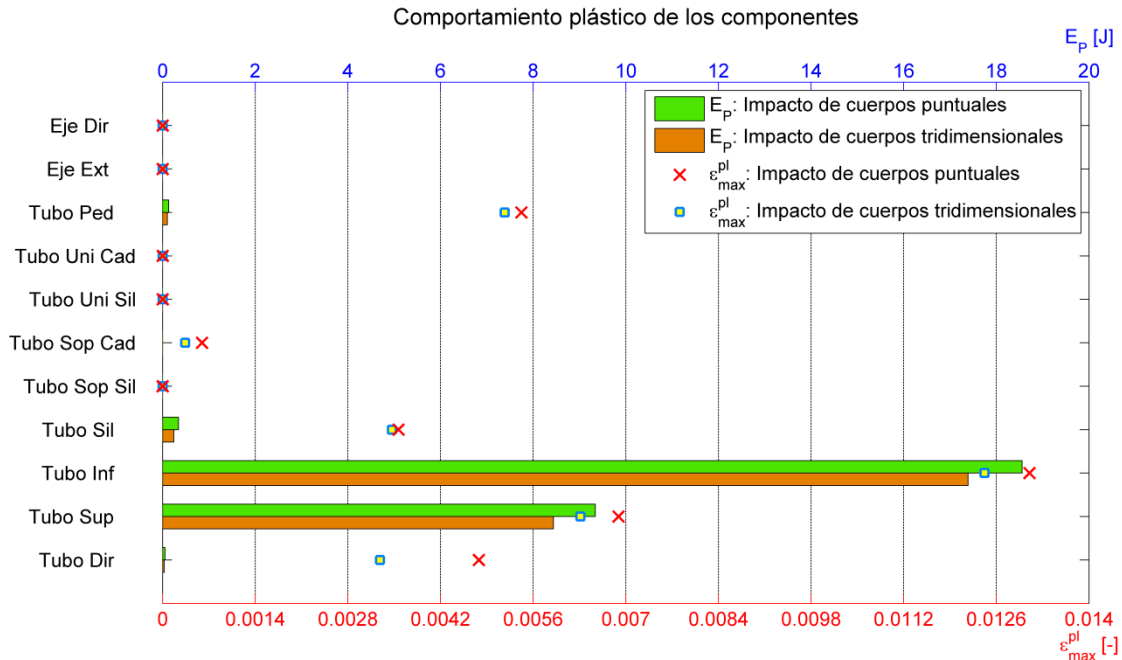


Figura 6.2-20: Distribución de plastificación sobre los componentes del ensayo.

En el modelo de simulación del ensayo de choque con el percutor y el rodillo representados como cuerpos tridimensionales, permite que todos los componentes tengan capacidad de disipar energía debido a la fluencia plástica. Para estudiar la distribución de disipación plástica se reunieron los componentes del modelo en cuatro grupos: el cuadro, la tija, el rodillo y el percutor, analizando la variación de energía plástica durante el primer impacto.

En la Figura 6.2-21, se muestra la variación de la energía plástica de las instancias que participan del ensayo. En el gráfico las abscisas son tiempo  $t$ , medido en [s], y las ordenadas son energía plástica disipada  $E_p$ , medida en [J].

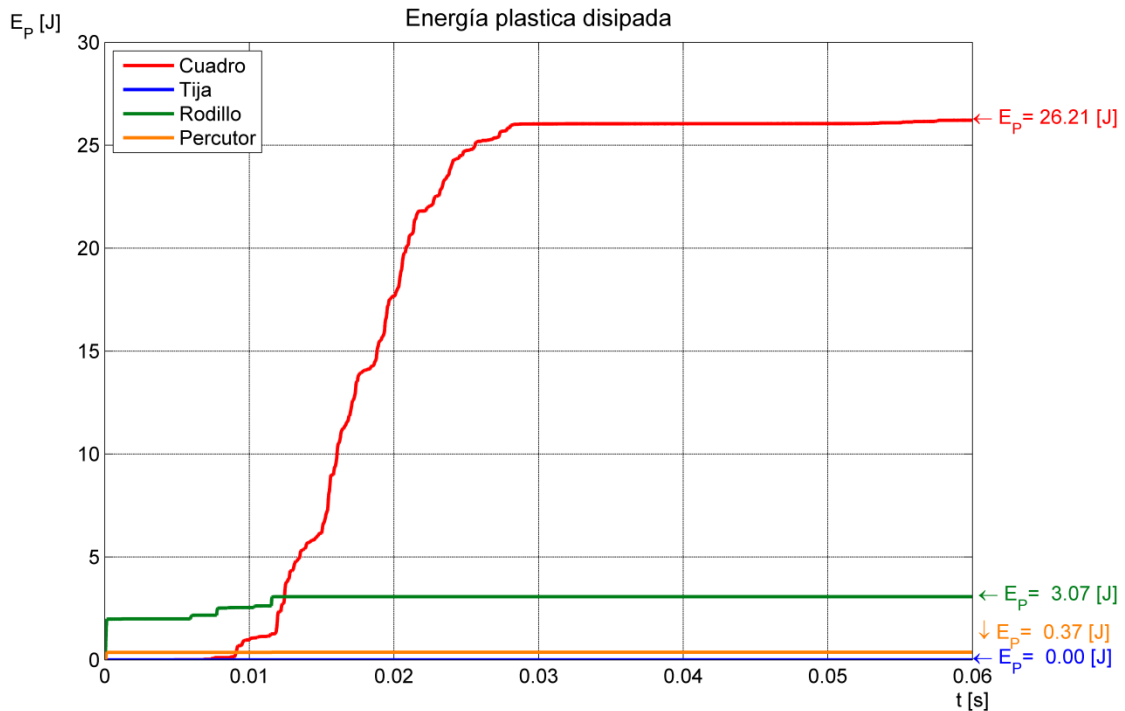


Figura 6.2-21: Variación de energía plástica sobre los componentes del ensayo.

La tija maciza no experimenta ninguna deformación plástica durante el impacto, debido a que es de acero y presenta un mayor límite de fluencia que el aluminio. El percutor y el rodillo, en donde ocurre el fenómeno de impacto, experimentan pequeñas deformaciones plásticas que son despreciables frente a las ocurridas en el cuadro.

La variación de la energía plástica respecto al tiempo, permite observar un desfase transitorio de la disipación entre el cuadro y los cuerpos que impactan. Primero se plastifican el percutor y el rodillo, luego se deforma plásticamente el cuadro. Este fenómeno se explica mediante los efectos dinámicos del impacto inicial, que se propagan por la estructura a la velocidad del sonido en forma de ondas de presión.

Anteriormente en el modelo de impacto de cuerpos puntuales, el contacto se representaba por un conector, y sobre este se estimaba la fuerza de contacto, que era discontinua y dependía del tiempo de incremento adoptado para integrar las ecuaciones. En el modelo de impacto de cuerpos tridimensionales, la fuerza de contacto se obtiene integrando la componente de la presión de contacto en la dirección del impacto, sobre el percutor.

La fuerza de contacto entre el percutor y el rodillo, se expone en la Figura 6.2-22, donde en abscisas se muestra tiempo  $t$ , medido en [s], y en ordenadas la fuerza de contacto  $F$ , medida en [N]. Se grafica de manera superpuesta el impulso de la fuerza de contacto  $I$  medido en [Ns].

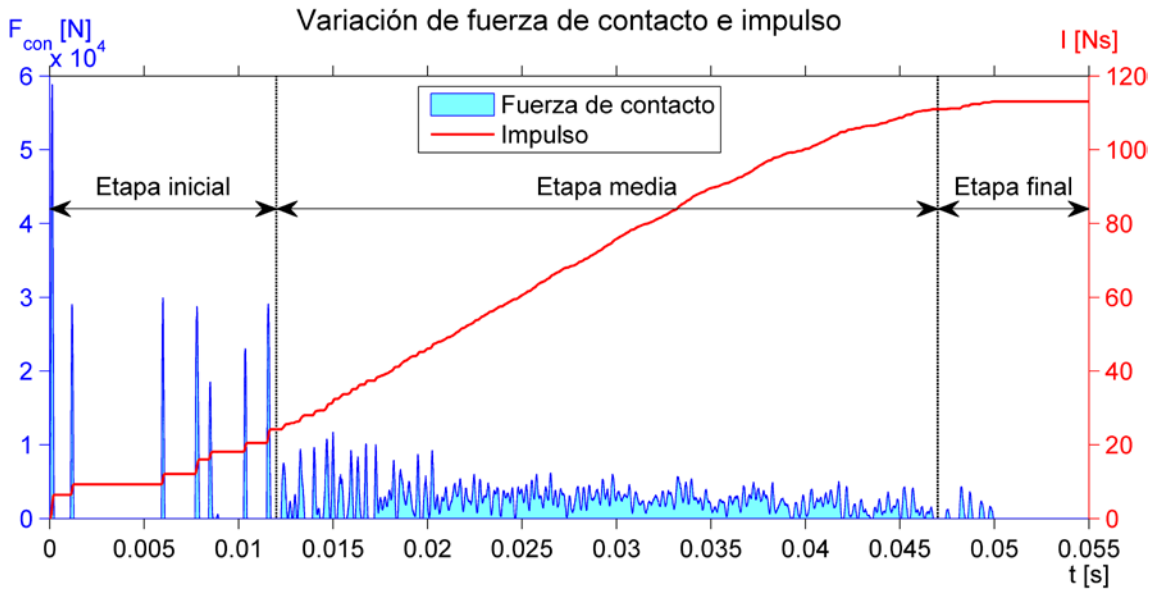


Figura 6.2-22: Fuerza de contacto entre el percutor y el rodillo.

El análisis dinámico explícito se inicia en 0 [s], con el percutor separado del rodillo, a una distancia de  $5 \times 10^{-5}$  [m], para evitar problemas con el algoritmo de inicialización de contacto, y finaliza luego de  $55 \times 10^{-3}$  [s], abarcando el primer contacto macroscópico. Durante este período se distinguen tres etapas, que se describen a continuación.

En la Figura 6.2-23, se expone la etapa inicial del contacto, que abarca hasta  $12 \times 10^{-3}$  [s]. En este período ocurren algunos choques repentinos de escasa duración, y gran magnitud, observando que el primer impacto provoca la máxima fuerza de contacto, que es de aproximadamente  $6 \times 10^4$  [N]. Por otra parte en estos pocos impactos se transfiere alrededor del 21 % del impulso.

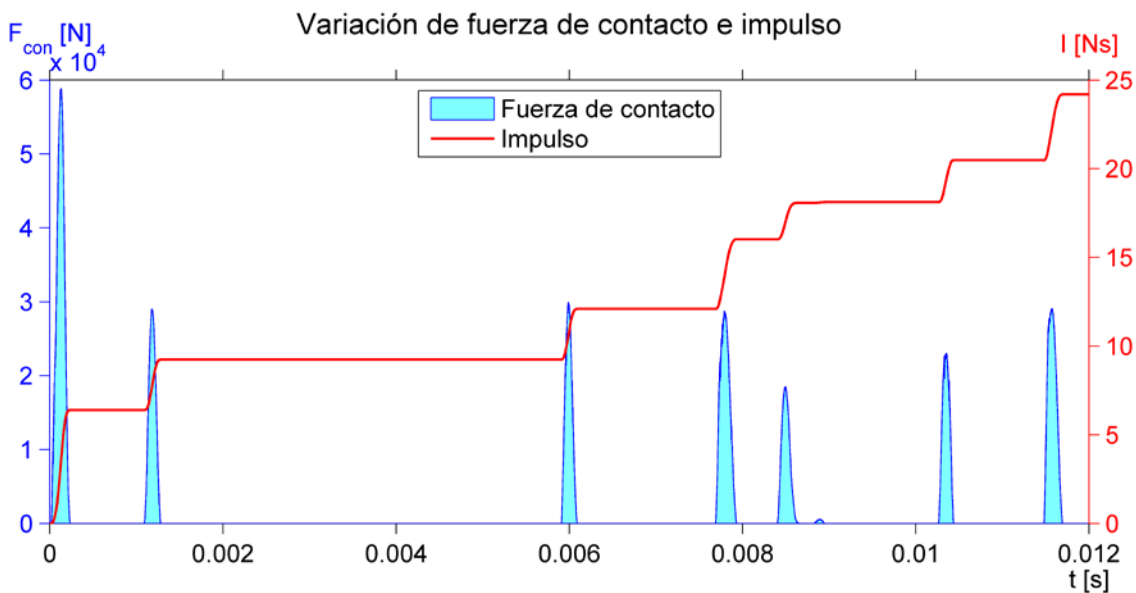


Figura 6.2-23: Etapa inicial de la fuerza de contacto entre el percutor y el rodillo.

En la Figura 6.2-24 se expone la etapa media, que abarca desde  $12 \times 10^{-3}$  [s] hasta  $47 \times 10^{-3}$  [s] y se caracteriza por interacciones de mayor duración que incluyen varios picos de fuerza de magnitudes menores sin que ocurra la separación. En esta etapa se trasfiere el 77% de la cantidad de movimiento.

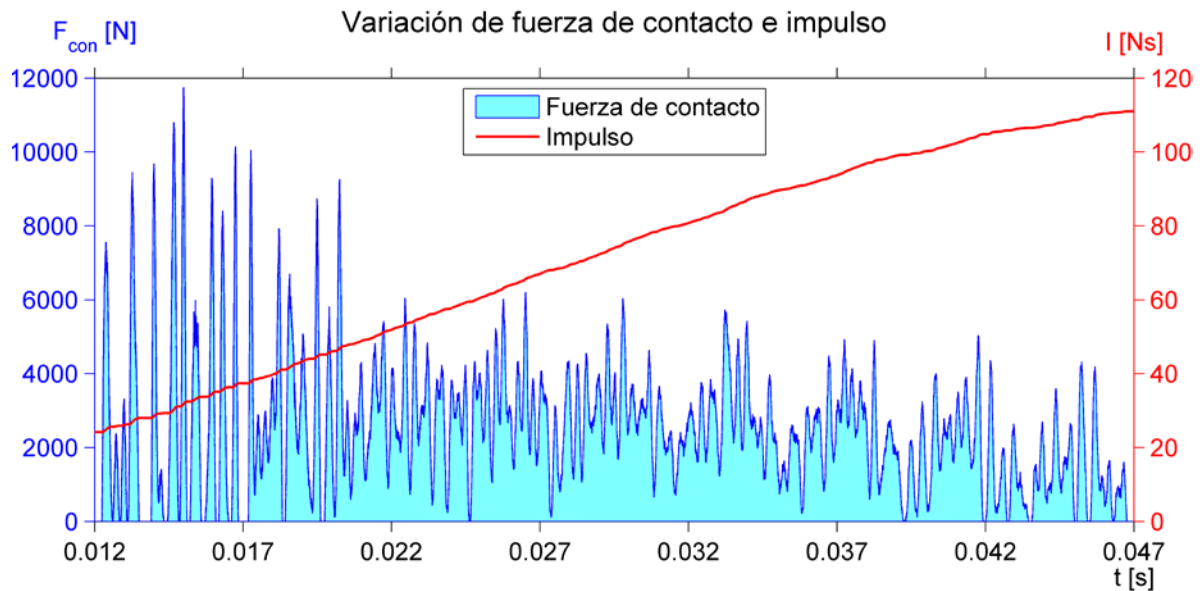


Figura 6.2-24: Etapa media de la fuerza de contacto entre el percutor y el rodillo.

En la Figura 6.2-25, se expone la etapa final, que abarca desde  $47 \times 10^{-3}$  [s] hasta  $55 \times 10^{-3}$  [s] y muestra fuerzas repentinas debido a pequeños contactos intermitentes, que ocurren cuando el percutor se aleja, hasta salir de la zona de vibración libre del rodillo, para separarse iniciando un estado de movimiento libre. En estos impactos finales se trasfiere aproximadamente el 2% de la cantidad de movimiento.

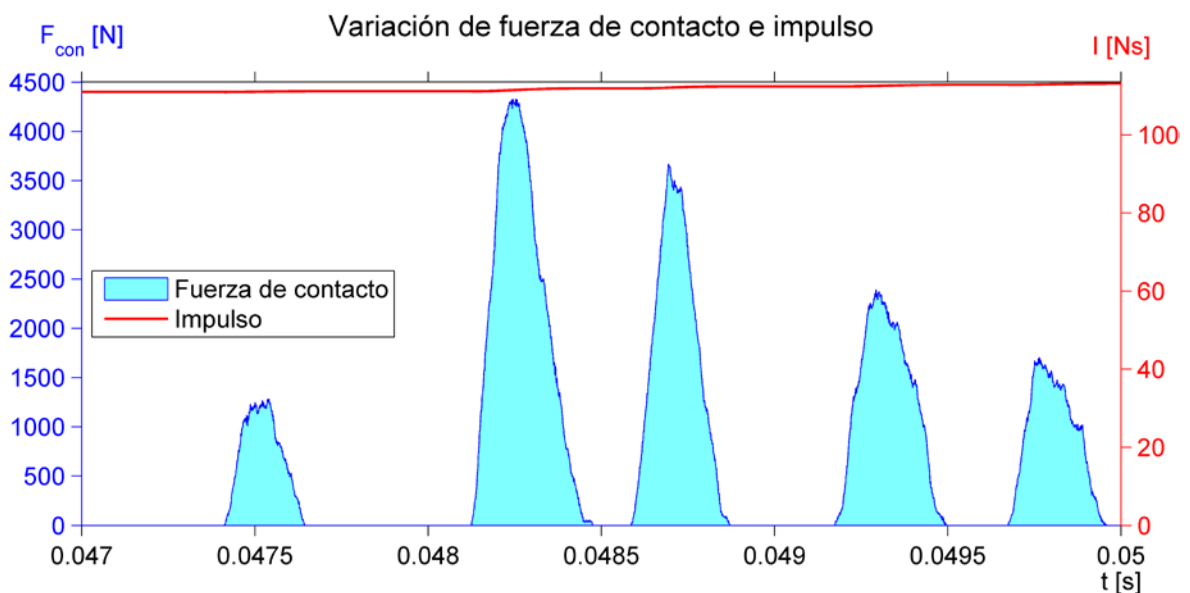


Figura 6.2-25: Etapa final de la fuerza de contacto entre el percutor y el rodillo.

La interacción entre el rodillo y el percutor consiste en múltiples contactos y separaciones, de escasa duración que se observan desde un punto de vista macroscópico como un único contacto aparente que se mantiene aproximadamente durante un semiperíodo de vibración libre del conjunto rodillo-percutor en un intervalo de  $5 \times 10^{-3}$  [s].

Generalmente cuando se estudia el choque entre dos cuerpos se logra una fuerza de contacto única que presenta forma de campana y posteriormente los cuerpos se separan. En el caso del ensayo planteado, los cuerpos que impactan tienen frecuencias naturales elevadas, y durante el choque ocurren una serie de contactos intermitentes debido a la interacción de ambos cuerpos, hasta completar la transferencia de la cantidad de movimiento. Este fenómeno desde el punto de vista macroscópico se observa como un único contacto.

La fuerza de contacto que se logra modelar mediante el impacto de cuerpos tridimensionales, tiene componentes de alta frecuencia, que corresponden a la frecuencia de ondas de sonido, y de hecho cuando ocurre el impacto las vibraciones de los cuerpos originan perturbaciones en presión del aire adyacente, que se propagan y se pueden oír.

Al tratarse de interacciones de alta frecuencia, tanto el impacto de cuerpos puntuales como cuerpos tridimensionales, ocasionan durante el primer contacto macroscópico, una transferencia de cantidad de movimiento hacia el cuadro de aproximadamente 113 [Ns], que se realiza en múltiples contactos, y a pesar de que las fuerzas de contacto difieren, presentan un impulso similar, generando los mismos efectos dinámicos en el cuadro.

De esta manera los efectos experimentados por el cuadro, debidos al impacto propuesto en el ensayo de choque caída de una masa, planteado por la Norma, por tratarse de una interacción de alta frecuencia, son equivalentes a la aplicación de un determinado valor de impulso, en un tiempo menor al semiperíodo de vibración de modo dominante del conjunto rodillo-percutor en contacto.

Dada esta situación no se justifica el modelado mediante sólidos continuos del rodillo y del percutor, ya que aumenta considerablemente el tamaño del sistema numérico a resolver, y se alcanzan resultados similares. Por lo tanto los cuerpos que participan del impacto se modelan como masas puntuales relacionadas por un conector adecuado que represente el contacto. Los resultados obtenidos de esta manera, son conservativos debido a que se analiza un choque más severo donde se desprecia la flexibilidad que aportan los cuerpos que impactan, y la pequeña disipación de energía plástica.

En este sentido el modelo se debe centrar en lograr una representación apropiada del cuadro, que es el componente estudiado, donde ocurre la mayor cantidad de disipación de energía plástica. Como el cuadro está formado por tubos de pared delgada, resulta adecuado representarlo con elementos de cáscaras, que presentan capacidad para mostrar la ubicación y los valores de plastificación.



## 7 Conclusiones

Las conclusiones del presente proyecto se enfocan por una parte a los aspectos técnicos, en lo que respecta a la simulación numérica del ensayo de choque y por otra parte a las cuestiones académicas. Finalmente se exponen las posibilidades de continuar el proyecto, planteando los posibles trabajos futuros.

### 7.1 Conclusiones respecto a la simulación numérica del ensayo

Los diseñadores y fabricantes de bicicletas de montaña deben cumplir con las exigencias de la Norma *UNE-EN 14766: Bicicletas de montaña - Requisitos de seguridad y métodos de ensayo*, que se encuentra ampliamente difundida en la actualidad, buscando que sus productos sean tan seguros como sea posible. Algunos de los ensayos propuestos en la Norma, presentan factibilidad para ser simulados mediante modelos computacionales que representan la situación física real. En el presente Proyecto Integrador se realizó la simulación numérica del ensayo de choque, caída de una masa.

Durante el transcurso del trabajo se necesitaron comprender e interpretar los fenómenos físicos que ocurren durante el ensayo. Posteriormente se desarrollaron y aplicaron diversos modelos para representar la prueba real. Se realizaron análisis de complejidad progresiva que aportaron conocimiento de la situación y facilitaron un abordaje global del proyecto. Mediante la utilización de variados modelos del cuadro de bicicleta y la implementación de las herramientas numéricas propuestas se cumplieron los objetivos planteados.

Del desarrollo del trabajo es posible destacar las siguientes conclusiones:

- El ensayo real exige observar el desplazamiento permanente en el extremo, mientras que la simulación del ensayo brinda información adicional como los valores cuantitativos de plastificación en cada región, que contribuyen al resultado de la prueba y resultan útiles para orientar el diseño del cuadro a los requisitos de la Norma.
- Se seleccionó la manera más conveniente de modelar los cuerpos que participan en la simulación, para lograr una relación elevada entre la calidad de los resultados y el costo de implementación numérica. El rodillo y el percutor, que son los cuerpos que impactan, se pueden representar mediante masas concentradas, porque presentan elevada rigidez y

experimentan pequeñas deformaciones plásticas. La tija maciza se modela adecuadamente mediante elementos de vigas, debido a que es esbelta, presenta sección transversal circular y participa elásticamente durante el ensayo. El cuadro está formado por tubos delgados, por lo tanto es apropiado representarlo con elementos de cáscaras, y en este componente ocurren las mayores deformaciones plásticas.

- La mayor parte de energía plástica se disipa en el primer impacto, por lo tanto el análisis dinámico no se realiza hasta alcanzar el equilibrio estático del sistema, sino que el desplazamiento permanente del extremo de la tija o rodillo, se estima mediante la respuesta libre del cuadro en la configuración de ensayo, porque el comportamiento dinámico está dominado únicamente por dos modos naturales.
- Para que el cuadro cumpla con los requerimientos de la Norma, con un bajo peso, se debe tener una distribución equilibrada de las secciones, centrandose la atención en los tubos inferior y superior, porque las deformaciones plásticas de estos componentes son las que más contribuyen al desplazamiento permanente del extremo, limitado por la Norma.
- Se demostró que es posible realizar la simulación del ensayo disponiendo de una PC con el software adecuado, ahorrando los recursos humanos y materiales que requiere la realización del ensayo real, sin reemplazarlo completamente y la calidad de los resultados alcanzados están condicionados por el conocimiento de los datos reales del ensayo y una posterior calibración del modelo.
- La implementación práctica de las simulaciones brinda la posibilidad de proponer geometrías que aún no se han construido, para evaluar sus aptitudes al ensayo de impacto, y eventualmente en base a las máximas deformaciones plásticas alcanzadas, redimensionar las secciones, para lograr una distribución lo más homogénea posible sobre la totalidad del cuadro, que minimice el desplazamiento permanente en el extremo.

## 7.2 Conclusiones académicas

El Proyecto Integrador, que se propuso en el ámbito del Departamento de Estructuras, involucró en su realización el aporte de otras áreas de la Ingeniería, planteando situaciones que se abordaron mediante la combinación de múltiples asignaturas de la carrera, cumpliendo efectivamente con la misión integradora. El desarrollo del trabajo requirió profundizar en el manejo de herramientas numéricas, resultando de utilidad para aplicar a otras situaciones. Durante el proceso, se presentaron problemas y desafíos, que luego de encontrar la forma de resolverlos, aportaron conocimientos y experiencia para poder continuar avanzando hacia la

culminación del proyecto. El autor del presente trabajo quiere manifestar en definitiva su satisfacción, desde el punto de vista del aprendizaje, con el trabajo realizado, su conformidad con el proceso seguido para lograrlo y la importancia de los resultados alcanzados.

### **7.3 Trabajos futuros**

El trabajo realizado en el presente Proyecto Integrador puede ser utilizado como plataforma para encarar la solución diversos aspectos que fueron detectados y escaparon a su propio alcance. Algunas de estas posibilidades de trabajo futuro se describen a continuación:

- Llevar a cabo el relevamiento preciso de la geometría de un cuadro determinado, proponiendo un modelo con mayor nivel de detalle, para que luego de efectuar el ensayo real, se contrasten los resultados y se calibren los modelos planteados, con los datos empíricos logrados.
- Aumentar las precisiones en el comportamiento de los materiales, tanto del cuadro como los accesorios utilizados durante el ensayo, incluyendo un modelo que estime la rotura y considere la posibilidad de que el cuadro se construya con materiales compuestos.
- Plantear la simulación de otros ensayos, exigidos por la Norma, proponiendo un paquete integral que contenga diversos modelos.



## 8 Bibliografía

1. **AENOR.** *Bicicleta de montaña: Requisitos de seguridad y métodos de ensayo.* Madrid : AENOR, 2006. UNE -EN 14766.
2. **IRAM.** *Bicicletas - Requisitos de seguridad.* 2006. 40020:2006.
3. **AENOR.** *Requisitos para seguridad de bicicletas.* 2014. ISO 4210.
4. **Bhatti, M. Asghar.** *Fundamental Finite Element Analysis and Applications.* s.l. : John Wiley & Sims, 2005.
5. **Dassault Systèmes Simulia Corp.** *Abaqus - Theory Manual.* 2012.
6. —. *Abaqus - Analysis User's Manual.* 2012.
7. —. *Abaqus Software.* 2012.
8. —. *Getting Started with Abaqus.* 2012.
9. **Rao, Singiresu S.** *Vibraciones Mecánicas.* s.l. : Pearson, 2012.
10. *Cálculo de frecuencias naturales para vigas elásticas con efecto cortante e inercia rotacional.* **Botello, Miguel Ángel Morales y Salvador.** s.l. : Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, 2005, Vol. 21.
11. **Sánchez-Patón, Alberto Rodero.** *Análisis de Estado Tensional de Vigas de Tipo Laminado Sometidas a Cargas Dinámicas.* s.l. : Proyecto Fin de Carrera - Universidad Carlos III de Madrid, 2010.
12. **Lopes, Braian y McCormack, Lee.** *Mastering Mountain Bike Skills.* s.l. : Human Kinetics, 2010.
13. **Bikes, Kinesis.** *Kinesis Catalog.* 2013.
14. **ISO.** *Bicycle tyres and rims.* Sexta edición. 2014. ISO 5775.
15. **Redciclista.** *Biciblog.* [En línea] 2014. <http://biciblog.com/material/medidas-en-la-bicicleta>.
16. **Sheldon Brown.** *Bicycle Frame/Hub Spacing.* [En línea] 2014. <http://www.sheldonbrown.com/frame-spacing>.
17. **Mtbymas.** [En línea] 2011. <http://www.mtbymas.com/2011/08/medidas-y-estandares>.
18. **Wikipedia.** *Bottom bracket.* [En línea] [http://www.wikipedia.org/wiki/Bottom\\_bracket](http://www.wikipedia.org/wiki/Bottom_bracket).
19. **Acindar Grupo ArcelorMittal.** [En línea] <http://www.acindar.com.ar>.

20. Aceros Borroni. [En línea] <http://www.acerosborroni.com>.
21. Cia General de Aceros. *SAE 8620 Aceros para cementación de alta resistencia*. Bogota : s.n.
22. Columbus. *Colombus Catalog*. 2015.
23. Reynolds Technology. [En línea] <http://reynoldstechnology.biz/>.
24. Smith, William Fortune y Hashemi, Javad. *Fundamentos de la ciencia e ingeniería de materiales*. México : McGRAW-HILL, 2006.
25. *The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory*. Cowper, G. R. 1966, Journal de Applied Mechanics, Vol. 33, págs. 335-340.
26. Rojo Abuín, José Manuel. *Regresión lineal múltiple*. Madrid : Instituto de Economía y Geografía, 2007.
27. MathWorks. *Matlab*.
28. Balakumar Balachandran, Edward B. Magrab. *Vibraciones*. s.l. : Thomson, 2006.
29. Rojo, José Manuel. *Regresión lineal múltiple*. Madrid : Instituto de Economía y Geografía, 2007.
30. Goicolea, José M. *Estructuras sometidas a impacto*. Madrid : Universidad Politecnica de Madrid.
31. *Learn Abaqus script in one hour*. Overvelde, J. T. B. 2010.
32. Barker, Jonh. *3D Space Frame Example*. [En línea] <http://www.csa.ru/CSA/CADS/docs/ansys/tut2/bike.html>.

## 9 Apéndice

### 9.1 Formulación de espacio de estado

La formulación de espacio de estado (28), es un método que tiene como objetivo determinar la respuesta de un sistema de varios grados de libertad que admite una matriz de amortiguamiento arbitraria. Este método se basa en un procedimiento de la teoría de ecuaciones diferenciales, donde las ecuaciones rectoras del sistema se transforman en un conjunto de ecuaciones de primer orden llamado forma espacio de estado.

La forma general de las ecuaciones rectoras de movimiento de un sistema lineal de N grados de libertad se expone en la Ecuación (9.1-1),

$$[M]\{\ddot{q}\} + [[C] + [G]]\{\dot{q}\} + [[K] + [H]]\{q\} = \{F\} \quad (9.1-1)$$

donde:

$\{q\}$  es el vector de coordenadas generalizadas

$\{\dot{q}\}$  es el vector de velocidad

$\{\ddot{q}\}$  es el vector de aceleración

$[M]$  es la matriz de inercia

$[C]$  es la matriz de amortiguamiento

$[G]$  es la matriz giroscópica

$[K]$  es la matriz de rigidez

$[H]$  es la matriz de circulatoria

$\{F\}$  es el vector de fuerzas

Se definen los siguientes vectores:

$$\{Y_1\} = \{q\}$$

$$\{Y_2\} = \{\dot{Y}_1\} = \{\dot{q}\}$$

$$\{\dot{Y}_2\} = \{\ddot{q}\}$$

Sustituyendo estos vectores en la Ecuación (9.1-1) se obtiene la Ecuación (9.1-2),

$$[M]\{\dot{Y}_2\} + [[C] + [G]]\{Y_2\} + [[K] + [H]]\{Y_1\} = \{F\} \quad (9.1-2)$$

Se pretende obtener la derivada de los vectores:

$$\{\dot{Y}_1\} = [I]\{Y_2\}$$

Si existe la inversa de la masa  $[M]^{-1}$ , podemos expresar la Ecuación (9.1-2) como:

$$\{\dot{Y}_2\} + [M]^{-1}[[C] + [G]]\{Y_2\} + [M]^{-1}[[K] + [H]]\{Y_1\} = [M]^{-1}\{F\}$$

$$\{\dot{Y}_2\} = -[M]^{-1}[[C] + [G]]\{Y_2\} - [M]^{-1}[[K] + [H]]\{Y_1\} + [M]^{-1}\{F\}$$

Combinando los dos conjuntos de ecuaciones planteamos lo siguiente:

El vector de estado  $\{Y\}$ , de dimensión  $(2N \times 1)$  es:

$$\{Y\} = \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix}$$

La derivada del vector de estado respecto el tiempo es:

$$\{\dot{Y}\} = \begin{Bmatrix} \dot{Y}_1 \\ \dot{Y}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{Bmatrix}$$

Se obtiene un sistema de  $2N$  ecuaciones diferenciales de primer orden.

$$\{\dot{Y}\} = [A]\{Y\} + [B]\{F\} \quad (9.1-3)$$

La Ecuación (9.1-3) se conoce como la forma espacio de estado de la Ecuación (9.1-1).

Las matrices de estado  $[A]$  y  $[B]$  se definen como:

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[[K] + [H]] & -[M]^{-1}[[C] + [G]] \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{Bmatrix} [0] \\ [M]^{-1} \end{Bmatrix}$$

Esta forma de ecuaciones se puede resolver de diversas maneras, siendo adecuadas para implementar mediante métodos numéricos.

## 9.2 Método de Runge-Kutta

Un problema de valores iniciales se plantea como:

$$y' = f(t, y) \quad y(t_0) = y_0$$

donde  $y$  es una función desconocida de tiempo que se pretende conocer, e  $y'$  es la derivada de la función respecto el tiempo. Conociendo el valor actual de la función  $y_n = y(t_n)$ , se busca avanzar un incremento de tiempo  $h = t_{n+1} - t_n$  y obtener una aproximación numérica del valor de la función  $y_{n+1} = y(t_{n+1})$ .

Para cumplir el objetivo los métodos de Runge-Kutta plantean de manera general:

$$\begin{cases} k_i = hf \left( x_n + c_i h, y_n + \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j \right) & i = 1, 2, \dots, s. \\ y_{n+1} = y_n + \sum_{j=1}^s b_j k_j \end{cases}$$

Cada una de las evaluaciones de la función  $k_i$  es una etapa.

El método se representa por medio de su tablero de Butcher:



$$\begin{array}{c|cccc}
 c_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\
 c_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \\
 \hline
 & b_1 & b_2 & \cdots & b_s
 \end{array}$$

Se puede escribir en notación compacta definiendo

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_s)^T,$$

$$b = (b_1, b_2, \dots, b_s),$$

$$A = a_{ij}$$

$$\frac{c|A}{|b}$$

En el caso particular que  $a_{ij} = 0$  para  $j > i, i = 1, 2, \dots, s$ , es decir la matriz  $A$  es triangular inferior estricta, entonces cada uno de los  $k_i$  vienen dados explícitamente en términos de los calculados anteriormente,  $k_j, j = 1, 2, \dots, i - 1$ . El método es explícito y en el tablero de Butcher, se omiten los ceros colocados en la diagonal principal y por encima de la misma.

El método de (Dormand-Prince 1980), se basa en el método de Runge-Kutta explícito, donde los coeficientes del método se eligen para minimizar el error de la solución de quinto orden, por ello el método es adecuado cuando la solución se usa para continuar la integración. Se evalúa el valor de la función seis veces para calcular el valor en el próximo incremento  $y_{n+1}$  empleando las soluciones de cuarto y quinto orden.

Posteriormente se considera el error como la diferencia entre las soluciones de distinto orden. Esta estimación del error se emplea para controlar el incremento de tiempo tomado, por lo que el método se encuadra dentro de los métodos de Runge-Kutta adaptativos.

La tabla de Butcher del método de Dormand-Prince 1980 es:

0							
1/5	1/5						
3/10	3/40	9/40					
4/5	44/45	-56/15	32/9				
8/9	19372/6561	-25360/2187	64448/6561	-212/729			
1	9017/3168	-355/33	46732/5247	49/176	-5103/18656		
1	35/384	0	500/1113	125/192	-2187/6784	11/84	
5 orden	5179/57600	0	7571/16695	393/640	-92097/339200	187/2100	1/40
4 orden	35/384	0	500/1113	125/192	-2187/6784	11/84	0
Diferencia	71/57600	0	-71/16695	71/1920	-17253/339200	22/525	-1/40

El método de Dormand-Prince 1980, se emplea en el presente trabajo para integrar las ecuaciones rectoras de movimiento planteadas en los modelos de masas concentradas, implementado mediante la función ode45 del software Matlab, (27).