



Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales  
Universidad Nacional de Córdoba

# Estudios y Aplicaciones en Magnetogasdinámica Computacional

Tesis Doctoral

Maglione Livio Sebastián

**ESTUDIOS Y APLICACIONES**  
**EN**  
**MAGNETOGASDINÁMICA COMPUTACIONAL**

**por**

**Mag. Ing. Livio Sebastián Maglione**

**Tesis presentada para la obtención del grado de Doctor en**  
**Ciencias de la Ingeniería**

**Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales**

**Universidad Nacional de Córdoba**

**Febrero 2011**

**ESTUDIOS Y APLICACIONES**  
**EN**  
**MAGNETOGASDINÁMICA COMPUTACIONAL**  
**por**  
**Mag. Ing. Livio Sebastián Maglione**

---

Prof. Dr. Sergio A. Elaskar  
Director

---

Prof. Dra. Andrea Costa  
Directora Alternata

APROBADA POR:

---

Prof. Dr. Pablo Mauas  
Jurado

---

Prof. Dr. Mario Storti  
Jurado

---

Prof. Dr. Jose Tamagno  
Jurado

---

Prof. Dr. Carlos Prato  
Director de la Carrera de Doctorado en Ciencias de la Ingeniería

---

Prof. Dr. Alejandro Brewer  
Secretario de Posgrado de la Fac. de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales

Febrero 2011

*A mi pequeña hija Lucía*

## **AGRADECIMIENTOS**

A mi Director, el Dr. Sergio Elaskar, quien con paciencia y dedicación me guió en el camino de realización de esta Tesis de doctorado, y anteriormente en el de la Tesis de Maestría. Sus invalorable aportes, su capacidad de trabajo, su ánimo y predisposición encomiable, hicieron esta tarea no sólo más sencilla sino también más agradable.

A mi Codirectora, la Dra. Andrea Costa, con quien comencé a trabajar más recientemente, pero en quien descubrí una gran investigadora, con un empuje y dedicación destacables.

Al Prof. Ing. Héctor Brito quien allá por 1995 me dio la posibilidad de incorporarme al Grupo de Mecánica Computacional (GMC) de la Fac. de Ingeniería de la Universidad Nacional de Río Cuarto. Por ser además quien me introdujo en la investigación y a quien le debo gran parte de lo logrado en este aspecto.

Al MSc. Ing. Luis Lifschitz y al MSc. Ing. Raúl Dean, por su apoyo y colaboración permanente.

A mi familia, por confiar siempre en mí, y brindarme su inagotable e incondicional cariño.

## **TABLA DE CONTENIDOS**

<b>RESUMEN .....</b>	<b>7</b>
ABSTRACT .....	8
SINTESI .....	8
<b>CAPÍTULO I.....</b>	<b>9</b>
<b>INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>9</b>
I.1 COMENTARIOS GENERALES.....	10
I.2 OBJETIVO.....	15
I.3 ORGANIZACIÓN DE LA TESIS.....	15
<b>CAPÍTULO II.....</b>	<b>17</b>
<b>MODELO MAGNETOGASDINÁMICO DE UN FLUIDO SIMPLE.....</b>	<b>17</b>
II.1 DEFINICIÓN Y APROXIMACIONES DE LA MAGNETOGASDINÁMICA (MGD).....	18
II.2 LAS ECUACIONES DE MAXWELL .....	20
II.3 CONSERVACIÓN DE LA MASA EN EL FLUIDO SIMPLE.....	21
II.4 CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO EN EL FLUIDO SIMPLE .....	21
II.5 LEY DE OHM Y ECUACIÓN DE INDUCCIÓN.....	23
II.6 CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA EN EL FLUIDO SIMPLE .....	24
II.7 FORMA CONSERVATIVA DE LAS ECUACIONES DE LA MGD DE UN FLUIDO SIMPLE .....	26
II.8 FORMA CUASI-LINEAL. MATRICES JACOBIANAS DE LOS FLUJOS .....	29
II.9 ONDAS CARACTERÍSTICAS.....	32
<b>CAPÍTULO III.....</b>	<b>36</b>
<b>SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE LA MAGNETOGASDINÁMICA IDEAL BIDIMENSIONAL Y DEPENDIENTE DEL TIEMPO .....</b>	<b>36</b>
III.1 INTRODUCCIÓN .....	37
III.2 ALGUNOS ASPECTOS MATEMÁTICOS BÁSICOS A CONSIDERAR .....	41
III.2 FORMULACIÓN EN VOLÚMENES FINITOS.....	44
III.3 SOLVER DE RIEMANN.....	47
III.4 ESQUEMA TVD.....	49
III.5 MÉTODOS DE ALTA RESOLUCIÓN. FLUJOS NUMÉRICOS.....	50
III.6 DETERMINACIÓN DEL PASO DE TIEMPO .....	55
III.7 VERIFICACIÓN DEL CÓDIGO NUMÉRICO EN LA SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE LA MGD IDEAL BIDIMENSIONALES Y DEPENDIENTES DEL TIEMPO.....	56
<b>CAPÍTULO IV.....</b>	<b>76</b>
<b>SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE LA MAGNETOGASDINÁMICA REAL BIDIMENSIONAL Y DEPENDIENTE DEL TIEMPO .....</b>	<b>76</b>

IV.1 INTRODUCCIÓN .....	77
IV.2 FORMULACIÓN EN VOLÚMENES FINITOS .....	79
IV.3 DETERMINACIÓN DEL PASO DE TIEMPO .....	79
IV.4 VERIFICACIÓN DEL CÓDIGO NUMÉRICO EN LA SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE LA MGD REAL BIDIMENSIONALES Y DEPENDIENTES DEL TIEMPO.....	81
IV.4.A TUBO DE CHOQUE MGD REAL.....	81
IV.4.B FLUJO DE HARTMANN .....	83
<b>CAPÍTULO V .....</b>	<b>88</b>
<b>UN SONIC FIX PARA LAS ECUACIONES DE LA MGD IDEAL USANDO EL ESQUEMA TVD DE HARTEN-YEE .....</b>	<b>88</b>
V.1 INTRODUCCIÓN .....	89
V.2 DESCOMPOSICIÓN ESPACIAL DE LAS FUNCIONES DISIPACIÓN .....	90
V.3 UN NUEVO SONIC FIX .....	94
<b>CAPÍTULO VI.....</b>	<b>107</b>
<b>APLICACIONES ASTROFÍSICAS .....</b>	<b>107</b>
VI.1 INTRODUCCIÓN .....	108
VI.2 DESCRIPCIÓN DE LA GEOMETRÍA, MALLADO, CONDICIONES DE BORDE E INICIALES .....	114
VI.3 RESULTADOS Y CONCLUSIONES.....	117
<b>CAPÍTULO VII .....</b>	<b>124</b>
<b>CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS DE FUTUROS TRABAJOS .....</b>	<b>124</b>
VII.1 CONSIDERACIONES FINALES.....	125
VII.2 FUTUROS TRABAJOS .....	126
<b>REFERENCIAS.....</b>	<b>128</b>
<b>APÉNDICE A.....</b>	<b>133</b>
<b>APÉNDICE B.....</b>	<b>143</b>
<b>APÉNDICE C.....</b>	<b>163</b>
<b>APÉNDICE D.....</b>	<b>168</b>
<b>APÉNDICE E.....</b>	<b>176</b>
<b>APÉNDICE F .....</b>	<b>191</b>

# Resumen

Las ecuaciones de la magnetogasdinámica real, Navier-Stokes y Maxwell, constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales en derivadas parciales hiperbólico-parabólico, donde la parte ideal es no convexa. La aproximación numérica utilizada consiste en un *solver* de Riemann aproximado junto con un esquema de alta resolución TVD. En esta Tesis se presenta un nuevo *sonic fix* para los puntos de causalidad acústica. El código computacional - desarrollado para la simulación de flujos magnetogasdinámicos bidimensionales, dependientes del tiempo, resistivos y viscosos - fue validado con los problemas de Brio y Wu, y de Hartmann. La nueva técnica probó ser robusta mediante la simulación del fenómeno de *tadpoles* que ocurren en la baja corona solar.

## ***Abstract***

*The real magnetogasdynamic, Navier-Stokes and Maxwell's equations, constitute a non linear parabolic-hyperbolic partial differential equations system. In addition, the ideal part of the magnetogasdynamic equations is not convex. The numerical approach used consists of an approximate Riemann solver with a high-order TVD scheme. In this Thesis a new sonic fix for the acoustic causality points is introduced. The computational code developed here - for 2D, time-dependent, viscous and resistive magnetogasdynamics flows, - was validated with the benchmarks of Brio and Wu, and Hartmann. The new technique proved to be robust with the simulation of observed tadpoles that occur in the low solar corona.*

## ***Sintesi***

*Le equazioni della magnetogasdinamica reale, Navier-Stokes e Maxwell, costituiscono un sistema di equazioni differenziali non lineare iperbolico-parabolico, dove l'ideale non è convesso. L'approssimazione numerica utilizzata consiste di un "solver" di Riemann approssimato insieme con uno schema di alta risoluzione TVD. Questa Tesi presenta un nuovo "sonic fix" per i punti di causalità acustica. Il codice computazionale - sviluppato per la simulazione di flussi magnetogasdinamici 2D, dipendente dal tempo, resistivi e viscoso - è stato convalidato con i problemi di Brio e Wu, e Hartmann. La nuova tecnica si è rivelato essere robusta attraverso la simulazione del fenomeno "tadpole" che si verificano nella bassa corona solare.*

# Capítulo I

## Introducción

*“Ante el universo*

*la mente humana es como un niño pequeño en una enorme biblioteca.*

*No comprende las lenguas en que están escritos sus libros.*

*Pero nota un plan determinado en su ordenación,  
un orden misterioso que no comprende,*

*sino que solo sospecha oscuramente”. Albert Einstein.*

## ***1.1 Comentarios generales***

La magnetogasdínámica (MGD) es la parte de la mecánica del continuo que estudia el movimiento de un medio gaseoso eléctricamente conductor en presencia de un campo magnético. Es necesario recordar que cuando un gas ionizado (*plasma*) se mueve dentro de un campo magnético se induce un campo eléctrico y una corriente eléctrica aparece, a su vez la interacción de la corriente con el campo magnético cambia el movimiento del fluido y por lo tanto cambia el campo magnético. El plasma es una mezcla de electrones, iones, partículas neutras y posiblemente moléculas. Por definición, se considera a un plasma como el estado de la materia compuesto por un gas ionizado con un número suficiente grande de partículas cargadas con la propiedad de apantallarse mutuamente en una distancia pequeña comparada con otras longitudes de interés físico. Esta distancia que separa el comportamiento colectivo a gran escala del comportamiento como partículas individuales a pequeña escala del gas, es del orden de la longitud de Debye. A las regiones del gas libres de campo eléctrico donde las cargas espaciales positivas y negativas casi se equilibran Langmuir les dio el nombre de plasma.

La MGD es una área interdisciplinaria que requiere la interacción de gas dinámica, electromagnetismo, física de gases ionizados, físico-química, y física cuántica [Goldston and Rutherford, 2003], [Spitzer, 1956], [Sutton and Sherman, 1965]. Un modelo MGD se basa generalmente en la suposición de que el plasma puede ser considerado como un continuo y así puede ser caracterizado por relativamente pocas cantidades macroscópicas. Los flujos MGD están gobernados por las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento, conservación de la energía, ecuaciones de Maxwell y la de estado correspondiente al fluido en estudio.

La MGD puede ser clasificada en tres modelos dependiendo de las hipótesis asumidas para el flujo y las ecuaciones que lo gobiernan [D'Ambrosio and Giordano, 2004]:

- Magnetogasdínámica Ideal: El sistema está descrito por las ecuaciones de Euler más la ecuación de inducción magnética.
- Magnetogasdínámica Real: El sistema está descrito por las ecuaciones de Navier-Stokes más la ecuación de inducción magnética.

- Magnetogasdinámica completa: Las ecuaciones de Navier-Stokes acopladas con las ecuaciones de Maxwell.

En todos los casos es posible tener varias especies y considerar reacciones químicas entre ellas, lo cual es modelado como términos fuentes.

Las ecuaciones de la MGD real para un fluido simple constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales hiperbólico-parabólico, siendo este un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no lineal, debido a que las funciones de flujo son dependientes de las variables de estado. Numéricamente es generalmente aceptado que los términos hiperbólicos son los que poseen los requerimientos más rigurosos para las técnicas de discretización [Toro, 1999]. Además, en los últimos años ha habido un notable incremento en las actividades de investigación y desarrollo orientadas al tema de problemas hiperbólicos, cubriendo un importante rango de áreas de interés científicas y tecnológicas.

La resolución de las ecuaciones de la MGD ideal (términos hiperbólicos) se basa en la utilización de ondas asociadas al problema físico. La cantidad de ondas que se producen es mayor que en las ecuaciones de Euler y la estructura de la solución es más compleja [Kantrowitz and Petschek, 1966]. El sistema de ecuaciones puede ser expresado en lo que se denomina “forma conservativa”, lo cual es particularmente muy importante a la hora de utilizar métodos numéricos como el implementado en este trabajo [LeVeque, 1992] [Toro and Clarke, 2010]. Desde esta perspectiva es posible extender a la MGD esquemas desarrollados para dinámica de gases con la finalidad de capturar las discontinuidades [LeVeque *et al.*, 1998].

Para ser preciso el sistema de ecuaciones de la MGD ideal no es estrictamente hiperbólico porque posee un autovalor nulo. Esto implica que un *solver* de Riemann no puede ser aplicado directamente. Para evitar esta limitación se utilizan las matrices jacobianas de los flujos modificadas por Powell que son no singulares [Powell, 1995]. Uno de los métodos más difundidos para calcular los flujos numéricos hiperbólicos es el *solver* de Riemann aproximado proporcionado por Roe, en conjunción con un esquema de alta resolución TVD [Roe, 1981], [Roe and Balsara, 1996], [Toro, 1999], [Toro and Clarke, 2010]. El problema que posee el *solver* de Riemann desarrollado por Roe es que sólo admite ondas de choque. Debido a esto son introducidas modificaciones para captar

las ondas de expansión y satisfacer la condición de entropía, una de ellas fue propuesta por [Harten *et al.*, 1976]. En esta Tesis se extenderá a la MGD la técnica de alta resolución TVD para la determinación de los flujos numéricos hiperbólicos desarrollada para flujos gas dinámicos por Yee, [Yee, 1989]. Además se realiza un aporte a esta técnica para las ecuaciones de la MGD descrito mas adelante y desarrollado en detalle en el capítulo quinto, [Maglione *et al.*, 2010]. Se entiende por métodos de alta resolución a aquellos que tienen por lo menos una exactitud de segundo orden en soluciones suaves y, además, pueden captar discontinuidades sin oscilaciones. Estos métodos necesitan los vectores propios derechos e izquierdos de la matriz jacobiana de los flujos, además de sus valores propios. Para evitar degeneraciones en la solución del sistema hiperbólico de la MGD se utilizan en este trabajo los vectores propios derechos e izquierdos analíticos normalizados introducidos por [Zachary *et al.*, 1994].

Asociado a un sistema hiperbólico expresado en forma conservativa se encuentran los campos característicos del mismo. Es importante observar que todos los campos característicos de un sistema hiperbólico lineal son linealmente degenerados. En las ecuaciones de Euler (sistema hiperbólico no lineal) la onda de choque y la de expansión son genuinamente no lineales mientras que la discontinuidad de contacto es linealmente degenerada. Debido a que en las ecuaciones de Euler los campos linealmente degenerados y los genuinamente no lineales se producen para todos los valores locales de las variables de estado se denomina a estas ecuaciones como convexas. En el caso de las ecuaciones de la MGD es posible demostrar que para un campo característico y para determinados valores locales de las variables de estado el producto interior entre el gradiente del valor propio asociado al campo y su vector propio derecho es nulo, mientras que para el resto de los puntos el producto interior es no nulo. Es decir el campo característico no es ni linealmente degenerado ni genuinamente no lineal. En este caso el sistema de ecuaciones es denominado no convexo [LeVeque *et al.*, 1998], [LeVeque, 2002], [Serna, 2009], [Toro, 1999].

En MGD ideal los puntos sónicos y los puntos de no convexidad son puntos de causalidad acústica [Serna, 2009]. La existencia de estos puntos genera dificultades para alcanzar soluciones numéricas precisas de las ecuaciones MGD ideales debido a que una estructura nueva puede ser producida por interacción no lineal de ondas [Courant and Friedrich, 1999]. En estos puntos es necesario aplicar un *sonic fix* en el esquema e

introducir la viscosidad artificial necesaria. Con el objetivo de mejorar la exactitud de los resultados obtenidos y de evitar oscilaciones espurias, un nuevo *sonic fix* es propuesto en esta Tesis. Con esta propuesta se logra incrementar la viscosidad numérica solamente en la vecindad de los puntos sónicos y no convexos, y no en todo el dominio. [Maglione *et al.*, 2010].

Como parte del trabajo se desarrollo un código computacional, el mismo ha sido verificado por medio de casos de pruebas llamados *benchmarks*, [Oberkampf and Trucano, 2002]. En esta Tesis se utilizó como *benchmark* para la MGD ideal al problema de Riemann propuesto por [Brio and Wu, 1988] [Maglione *et al.*, 2002]. El problema de Brio y Wu es un caso testigo, ampliamente usado por la comunidad científica, con el objetivo de evaluar el comportamiento de técnicas numéricas y códigos computacionales dentro de la magnetogasdinámica. Brio y Wu estudiaron la extensión a la MGD del problema de Riemann clásico considerado en dinámica de los gases (tubo de choque). En el caso de la magnetogasdinámica este *benchmark* se denomina problema de Riemann coplanar debido a que únicamente existen dos componentes no nulas de los vectores velocidad y campo magnético respectivamente.

Para la verificación del comportamiento correcto del código computacional en la solución de la parte real o parabólica se utilizaron como *benchmarks* el tubo de choque MGD real y el problema de Hartmann. Este último es un problema difusivo dominante con predominio de la parte parabólica [Molokov *et al.*, 2007]. Consiste en un flujo con densidad constante que es una extensión del flujo de Couette para fluidos eléctricamente conductores. En este problema el flujo es laminar y se desarrolla entre dos placas paralelas virtualmente infinitas moviéndose con velocidades de igual magnitud y sentido contrario. El campo aplicado es normal a las placas y de valor constante. El flujo es producido por el movimiento de las placas y se asume, en este caso, que el gradiente de presión nulo. Es claro que los fenómenos disipativos (términos parabólicos) introducen escalas de tiempo muy diferentes a los términos hiperbólicos, incluso en ciertos problemas las escalas de tiempo entre los mismos términos parabólicos (difusión viscosa, difusión magnética, difusión térmica) puede ser bastante distinta. Cuando la relación de escalas de tiempo entre los términos hiperbólicos y parabólicos es de varios órdenes de magnitud la utilización de un esquema explícito convencional implica tiempos de procesamiento totales que resultan impracticables,

debido a que se requeriría evaluar los flujos convectivos (de mayor costo computacional) siempre que se evalúen los flujos disipativos. La alternativa utilizada en esta Tesis, manteniendo un esquema de evolución en el tiempo explícito, es la técnica denominada *fractional time-stepping*, [Maglione *et al.*, 2007], [Martinez *et al.*, 2011] y [Sankaran, 2001].

Al finalizar se presentan los resultados alcanzados al aplicar la metodología desarrollada en esta Tesis para resolver las ecuaciones de la magnetogasdinámica ideal en problemas astrofísicos, y en particular para simular las estructuras llamadas *tadpoles* que se presentan en la baja corona solar. Se verá que se ha podido reproducir numéricamente las observaciones más detalladas que se conocen hasta el presente del fenómeno. Tales observaciones se han obtenido con el telescopio espacial TRACE (*Transition Region And Coronal Explorer*) de alta resolución espacial y temporal enviado con un vehículo portador Pegasus en abril de 1998. La traducción de *tadpole* al castellano es renacuajo. Esta denominación se debe a que lo que se observa tiene forma de dedos finos y oscuros que serpentean cayendo y desacelerándose hacia la superficie del sol. La física de los *tadpoles* es todavía un tema abierto. En esta Tesis se ofrece una interpretación nueva del fenómeno mostrando que las regiones de vacío son creadas por la interacción de ondas no lineales. [Maglione *et al.*, 2010].

El plasma, como fluido, no sólo aparece en aplicaciones astrofísicas, es también utilizado con fines propulsivos aeroespaciales de satélites y cuando el aire atraviesa la onda de choque formada enfrente de un vehículo hipersónico. La propulsión eléctrica de vehículos espaciales es actualmente una alternativa concreta a la propulsión química. La propulsión eléctrica puede ser definida como “la aceleración de gases para propulsión lograda por calentamiento eléctrico (efecto Joule) y/o fuerzas electromagnéticas” [Jahn, 1968], [Jahn and Choueiri, 2002]. Es importante destacar que la primera experiencia interplanetaria basada en este tipo de propulsión culminó recientemente con éxito, [Carrant, 1999], [Wang *et al.*, 2000], [Ziemer, 2001]. Por lo tanto se evidencia que hay una necesidad de simulaciones de fenómenos físicos asociados a flujos de plasma. Estas simulaciones pueden ser usadas para diseño, optimización de dispositivos y estudio de los fenómenos previamente descriptos.

## ***1.2 Objetivo***

El objetivo general de esta Tesis es avanzar en una mayor comprensión del comportamiento de flujos de plasma. A partir de este surgen una serie de objetivos específicos:

- Extender a las ecuaciones MGD técnicas numéricas elaboradas para simular flujos gas dinámicos.
- Introducir mejoras a dichas técnicas para alcanzar soluciones más precisas o robustas.
- Validar las mejoras propuestas comparando con resultados conocidos en la literatura especializada.
- Aplicar las nuevas técnicas para la reproducción de datos observacionales de estructuras de plasma en la baja corona solar.
- Contribuir a la interpretación del fenómeno astrofísico.

## ***1.3 Organización de la Tesis***

En el segundo capítulo se presentan las ecuaciones de la magnetogasdínámica real de un fluido simple junto con las hipótesis físicas fundamentales utilizadas en su deducción.

En el tercer capítulo se presenta el método numérico utilizado para resolver las ecuaciones de la MGD ideal y se utiliza como *benchmark* el problema de Riemann propuesto por [Brio and Wu, 1988].

En el cuarto capítulo se presenta la metodología empleada para resolver las ecuaciones de la MGD real. Para la verificación del correcto comportamiento del código computacional se utilizaron como *benchmarks* el tubo de choque MGD real y el problema de Hartmann, [Molokov *et al.*, 2007].

En el quinto capítulo se presenta en una primera instancia una descomposición espacial de las funciones disipación, pero el objetivo principal de este capítulo es presentar una

modificación del esquema TVD de Harten-Yee original incorporando un nuevo *sonic fix* para los puntos de causalidad acústica.

En el sexto capítulo se presenta los resultados alcanzados al aplicar la metodología desarrollada en esta Tesis para resolver las ecuaciones de la magnetogasdinámica ideal en problemas astrofísicos, y en particular en la simulación de los *tadpoles* que se presentan en la baja corona solar

En el séptimo capítulo se consignan algunas de las conclusiones extraídas del trabajo realizado y se indican algunas posibles líneas de trabajo para futuros desarrollos vinculados al tema de esta Tesis.

En el apéndice A se presenta el proceso de adimensionalización de las ecuaciones de la MGD real.

En el apéndice B se exhibe el proceso algebraico desarrollado para obtener las matrices Jacobianas de los Flujos.

En el apéndice C se muestra, siguiendo a [Powell, 1995], la matriz jacobiana de los flujos en términos de las variables primitivas modificada, junto con los valores y vectores propios asociados según [Zachary *et al.*, 1994].

En el apéndice D se encuentran otros resultados logrados para el problema de Riemann propuesto por [Brio and Wu, 1988].

En el apéndice E se encuentran los resultados obtenidos al resolver el problema de Riemann gas dinámico.

En el apéndice F se encuentra la metodología utilizada para el cálculo de los flujos numéricos implementada en el código computacional bidimensional.

## Capítulo II

# Modelo Magnetogasdínámico de un Fluido Simple

En este capítulo se presentarán las ecuaciones de la magnetogasdínámica real de un fluido simple junto con las hipótesis físicas fundamentales utilizadas en su deducción. Una vez escritas las ecuaciones en su forma conservativa adimensional se obtendrán las matrices jacobianas de los flujos. Finalmente el sistema de ocho ondas surgirá con claridad para ser utilizado en el *solver* de Riemann a introducir en el próximo capítulo.

## II.1 Definición y Aproximaciones de la Magnetogasdinámica (MGD)

La magnetogasdinámica es la parte de la mecánica del continuo que estudia el movimiento de un medio gaseoso eléctricamente conductor en presencia de un campo magnético. Es necesario recordar que cuando un gas ionizado (*plasma*) se mueve dentro de un campo magnético se induce un campo eléctrico y una corriente eléctrica aparece, a su vez la interacción de la corriente con el campo magnético cambia el movimiento del fluido y por lo tanto cambia el campo magnético.

Las aproximaciones e hipótesis utilizadas en esta Tesis en la deducción de las ecuaciones de la MGD son:

- El plasma es considerado compuesto solamente por electrones e iones en cantidades iguales, es decir globalmente neutro. En la aproximación MGD el fluido es considerado como conformado por una única especie y denominado “simple”. En el modelo magnetogasdínámico para un fluido simple en cada punto del espacio  $\underline{r}(x, y, z)$  y para un determinado tiempo se encuentran definidas cantidades equivalentes de la densidad  $\rho$ , la presión  $p$  y la velocidad promedio  $\underline{u}$ , además del campo magnético o inducción magnética  $\underline{B}$ .
- Cualquier longitud característica  $L$  es mucho mayor que la longitud de Debye. Por lo tanto el modelo de plasma utilizado en esta Tesis es un modelo de medio continuo y no un modelo cinético, esto permite considerar que las partículas en el plasma poseen un comportamiento colectivo y entonces derivar las ecuaciones de conservación de la masa, cantidad de movimiento, inducción y energía.
- El término  $\rho_q \underline{E}$  se puede despreciar en la ecuación de cantidad de movimiento a través de un análisis dimensional [Sutton and Sherman, 1965].
- Las velocidades del fluido son no relativistas,  $\|\underline{u}\| \ll c$ . Las consideraciones no relativistas permiten despreciar la masa y la cantidad de movimiento asociadas al campo que provienen de la relación de Einstein entre masa y energía [Polovin y Demutskii, 1990].

- Se desprecian los efectos de polarización, por lo cual no se realiza distinción entre el campo eléctrico  $\vec{E}$  y el desplazamiento eléctrico  $\vec{D}$ . Se asume que la permeabilidad magnética relativa del plasma es unitaria y no se realiza distinción entre la inducción magnética  $\vec{B}$  y la intensidad del campo magnético  $\vec{H}$ .
- En el caso de la MGD ideal todos los efectos disipativos son despreciados, tales son: la viscosidad  $\mu$ , la conductividad térmica  $k$  y la resistividad eléctrica  $\eta$ .

Algunas de las hipótesis anteriormente mencionadas también pueden ser expresadas de la siguiente manera, [Powell, 1995]:

$$K_n \text{ (Knudsen)} = \frac{l_{Debye}}{L} \ll 1 \quad (2.1)$$

$$\left(\frac{u}{c}\right)^2 \ll 1 \quad (2.2)$$

$$\frac{\varepsilon_0}{\tau\sigma} \ll 1 \quad (2.3)$$

$$\frac{\mu}{\rho u L} \ll 1 \quad (2.4)$$

donde  $\varepsilon_0$  es la permitividad eléctrica,  $\sigma$  es el coeficiente de conductividad eléctrica y  $\tau$  es el tiempo característico del problema.

En [Sutton and Sherman, 1965] es posible encontrar más detalles sobre las aproximaciones de la MGD. Argumentos respecto a los límites de validez de la MGD ideal y los efectos disipativos se encuentran desarrollados en [Biskamp, 1997].

## II.2 Las Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell constituyen un conjunto de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que describen como los campos magnéticos y eléctricos se generan, interactúan y propagan. Estas son:

$$\nabla \cdot \underline{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_q \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0 \quad (2.6)$$

$$\nabla \times \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \quad (2.7)$$

$$\nabla \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \quad (2.8)$$

donde  $\underline{j}$  es la densidad de corriente,  $\rho_q$  la densidad de carga, “ $\cdot$ ” indica producto escalar y “ $\times$ ” indica producto vectorial.

La relación existente entre la permeabilidad magnética  $\mu_0$  y la permitividad eléctrica  $\epsilon_0$  con la velocidad de la luz en el vacío  $c$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (2.9)$$

permite en la magnetogasdinámica no relativista anular el término de la corriente de desplazamiento en la Ec. (2.8). Esto implica que los procesos que se estudian son relativamente “lentos” y quedan fuera, por ejemplo, las ondas electromagnéticas.

Es interesante comentar que si no se está interesado en determinar la densidad de carga, la Ec. (2.5) puede ser omitida sin afectar al sistema de las ecuaciones de la MGD

que desarrollamos a continuación. Es decir sigue siendo posible determinar el campo eléctrico pero no la densidad de carga.

### ***II.3 Conservación de la Masa en el Fluido Simple***

La ecuación de conservación de la masa en su forma diferencial para un fluido simple o también denominada ecuación de continuidad es:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0 \quad (2.10)$$

El primer término de la ecuación representa la variación local de la densidad de masa, y el segundo el flujo de masa por unidad de volumen.

### ***II 4 Conservación de la Cantidad de Movimiento en el Fluido Simple***

La ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en su forma diferencial para un fluido simple ionizado y globalmente neutro es:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \underline{u}) + \nabla \cdot (\rho \underline{u} \underline{u}) - \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} = \underline{j} \times \underline{B} \quad (2.11)$$

En la cual el primer término del lado izquierdo representa la variación local de la cantidad de movimiento, el segundo el flujo de cantidad de movimiento por unidad de volumen, el tercero la fuerza mecánica aplicada sobre el fluido por unidad de volumen y el término del lado derecho la fuerza electromagnética por unidad de volumen.

El tensor de tensiones esta dado por

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\tau}} - \underline{I} p \quad (2.12)$$

donde  $\underline{I}$  es el tensor unitario,  $\underline{\underline{\tau}}$  es el tensor de tensiones viscoso expresado como

$$\underline{\underline{\tau}} = \mu \left[ \nabla \underline{\underline{u}} + (\nabla \underline{\underline{u}})^T - \frac{2}{3} \underline{\underline{I}} (\nabla \cdot \underline{\underline{u}}) \right] \quad (2.13)$$

y  $\mu$  es la viscosidad (en general función de la temperatura).

El segundo miembro de la Ec. (2.11) representa una fuerza de volumen, producida por el efecto del campo magnético, que se agrega a la clásica ecuación de la mecánica de los fluidos. Reemplazando en la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento (2.11) la expresión del tensor de tensiones (2.12) se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \underline{\underline{u}}) + \nabla \cdot (\rho \underline{\underline{u}} \underline{\underline{u}}) + \nabla \cdot (\underline{\underline{I}} p) - \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{j}} \times \underline{\underline{B}} \quad (2.14)$$

El término de fuerza electromagnética, luego de un trabajo algebraico y habiendo introducido la Ec.(2.8) sin el termino de corriente de desplazamiento, resulta:

$$\underline{\underline{j}} \times \underline{\underline{B}} = \frac{1}{\mu_o} (\nabla \times \underline{\underline{B}}) \times \underline{\underline{B}} = \frac{1}{\mu_o} \left[ \nabla \cdot (\underline{\underline{B}} \underline{\underline{B}}) - \frac{1}{2} \nabla (\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{B}}) - (\nabla \cdot \underline{\underline{B}}) \underline{\underline{B}} \right] \quad (2.15)$$

Considerando la Ec.(2.6):

$$\underline{\underline{j}} \times \underline{\underline{B}} = \frac{1}{\mu_o} \left[ \nabla \cdot (\underline{\underline{B}} \underline{\underline{B}}) - \frac{1}{2} \nabla (\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{B}}) \right] \quad (2.16)$$

Finalmente se obtiene la ecuación de la cantidad de movimiento para fluido simple:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \underline{\underline{u}}) + \nabla \cdot \left[ \rho \underline{\underline{u}} \underline{\underline{u}} - \frac{1}{\mu_o} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{I}} \left( p + \frac{1}{2} \frac{\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{B}}}{\mu_o} \right) \right] = \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} \quad (2.17)$$

La comparación de las ecuaciones de cantidad de movimiento entre un fluido simple conductor y uno no conductor muestra el agregado de dos términos, uno proporcional al

producto tensorial del campo magnético por sí mismo, el cual actúa como una fuerza adicional, y otro proporcional al cuadrado del modulo del mismo que actúa como una presión escalar en el fluido.

### ***II.5 Ley de Ohm y Ecuación de Inducción***

La Ley de Ohm generalizada es una expresión de la relación entre la densidad de corriente con el campo eléctrico, el campo magnético y la presión electrónica. La ecuación resultante bajo la aproximación de que la masa del electrón es mucho menor que la del ión es [Udrea, 1999]:

$$\frac{m_e}{n_e^2} \frac{\partial \tilde{j}}{\partial t} = \tilde{E} + \tilde{u} \times \tilde{B} - \frac{1}{n_e} \tilde{j} \times \tilde{B} + \frac{1}{n_e} \nabla \cdot \tilde{p}_e - \tilde{\eta} \cdot \tilde{j} \quad (2.18)$$

donde  $m_e$ ,  $\tilde{p}_e$ ,  $n_e$  son la masa del electrón, el tensor de presión electrónica y la cantidad de electrones respectivamente por unidad de volumen y  $\tilde{\eta}$  es el tensor de resistividad eléctrica del plasma.

Es posible expresar el tensor de presiones del electrón en términos del tensor de tensiones del conjunto de electrones  $\tilde{\tau}_e$  y la presión escalar del electrón  $p_e$  como:

$$\tilde{p}_e = \tilde{\tau}_e + I p_e \quad (2.19)$$

La aproximación consistente en que las frecuencias características del plasma son mucho menores que la frecuencia del electrón permite despreciar el término del lado izquierdo de la Ec. (2.18). La divergencia del tensor tensiones del electrón, debido a su pequeña magnitud relativa a los otros términos, es usualmente despreciada. Obteniéndose:

$$\tilde{E} + \tilde{u} \times \tilde{B} = \frac{1}{n_e} \tilde{j} \times \tilde{B} - \frac{1}{n_e} \nabla p_e + \tilde{\eta} \cdot \tilde{j} \quad (2.20)$$

El primer término del lado derecho es la contribución del efecto Hall a la ley de Ohm. Debido a que el término de Hall requiere un tratamiento especial por cuestiones de estabilidad en la solución [Udrea, 1999] y aún se está trabajando en modelos que representen con exactitud el término relacionado con la presión electrónica, la ley de Ohm que se usa actualmente incluye solamente efectos resistivos, [Sutton and Sherman, 1965]:

$$\underline{E} + \underline{u} \times \underline{B} = \underline{\eta} \cdot \underline{j} \quad (2.21)$$

Reemplazando la expresión para el campo eléctrico dada por (2.21) en la Ec.(2.7), y luego introduciendo la Ec. (2.8) sin el término de corriente de desplazamiento, resulta la expresión que se denomina ecuación de inducción magnética:

$$\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{u} \underline{B} - \underline{B} \underline{u}) = -\nabla \times \left[ \frac{1}{\mu_0} \underline{\eta} \cdot (\nabla \times \underline{B}) \right] \quad (2.22)$$

## ***II.6 Conservación de la Energía en el Fluido Simple***

La ecuación de conservación de la energía para un fluido simple en su forma diferencial puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho u^2 + \epsilon \right) + \nabla \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \rho u^2 + \epsilon \right) \underline{u} \right] + \nabla \cdot \underline{q} - \quad (2.23)$$

$$\nabla \cdot (\underline{u} \cdot \underline{\tau}) + \nabla \cdot (p \underline{u}) = \underline{E} \cdot \underline{j}$$

donde  $\epsilon$  es la energía interna,  $T$  la temperatura y  $\underline{q}$  el flujo de calor dado por la ley de Fourier:

$$\underline{q} = -\underline{k} \cdot \nabla T \quad (2.24)$$

donde  $\underline{\underline{k}}$  denota al tensor de conductividad térmica.

El miembro derecho de (2.23) representa el término adicional a la ecuación de la energía de un fluido no conductor. Dicho término representa la energía obtenida por efecto Joule debida a la transferencia entre energía electromagnética y térmica por los choques entre partículas cargadas. Se define la energía total  $e$  como la suma de la energía interna, la energía cinética y la energía asociada al campo magnético:

$$e = \epsilon + \frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_o} \quad (2.25)$$

donde  $B^2 = \underline{B} \cdot \underline{B}$ .

Para poder insertar la energía total bajo la derivada temporal es necesario sumar a ambos miembros de la Ec.(2.23) la Ec. (2.22) multiplicada por el campo magnético a través de un producto interior; luego introducir las Ecs. (2.21) y (2.8) sin el término de corriente de desplazamiento, para a posteriori trabajar algebraicamente. Así finalmente se obtiene la ecuación de conservación de la energía:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ \left( e + p + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_o} \right) \underline{u} - (\underline{B} \cdot \underline{u}) \frac{\underline{B}}{\mu_o} \right] = \\ \nabla \cdot \left\{ \underline{u} \cdot \underline{\underline{\tau}} + \underline{\underline{k}} \cdot \nabla T - \frac{1}{\mu_o^2} \left[ \underline{\eta} \cdot (\nabla \times \underline{B}) \right] \times \underline{B} \right\} \end{aligned} \quad (2.26)$$

La deducción de las ecuaciones anteriormente expuestas (conservación de la masa, conservación de la cantidad de movimiento, inducción y conservación de la energía) se encuentran discutidas con mayor grado de detalle junto con las hipótesis simplificativas en [Polovin and Demutskii, 1990], [Sutton and Sherman, 1965], [Scott, 2005].

## II.7 Forma Conservativa de las Ecuaciones de la MGD de un Fluido Simple

Las ecuaciones de la magnetogasdínámica pueden ser expresadas en lo que se denomina “forma conservativa”, lo cual es particularmente muy importante a la hora de utilizar métodos numéricos como el implementado en esta Tesis. La forma conservativa consiste en escribir el sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDP) como:

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{f}_h(\underline{U}) = \nabla \cdot \underline{f}_p(\underline{U}, \nabla \underline{U}) \quad (2.27)$$

donde  $\underline{U}$  es el vector de las variables conservativas o vector de variables de estado,  $\underline{f}_h(\underline{U})$  es el tensor de flujo hiperbólico y  $\underline{f}_p(\underline{U}, \nabla \underline{U})$  es el tensor de flujo parabólico.

Las ecuaciones de conservación de la masa (2.10), conservación de la cantidad de movimiento (2.17), inducción magnética (2.22) y conservación de la energía (2.26) expresadas en la forma (2.27) son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \underline{u} \\ \underline{B} \\ e \end{bmatrix} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} \rho \underline{u} \\ \rho \underline{u} \underline{u} - \frac{1}{\mu_o} \underline{B} \underline{B} + I \left( p + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_o} \right) \\ \underline{u} \underline{B} - \underline{B} \underline{u} \\ \left( e + p + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_o} \right) \underline{u} - (\underline{B} \cdot \underline{u}) \frac{\underline{B}}{\mu_o} \end{bmatrix} = \\ \nabla \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{\tau} \\ \underline{E}_r \\ \underline{u} \cdot \underline{\tau} + \underline{k} \cdot \nabla T - \frac{1}{\mu_o^2} \left[ \underline{\eta} \cdot (\nabla \times \underline{B}) \right] \times \underline{B} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.28)$$

con

$$\nabla \cdot \underline{\underline{E}}_r = -\nabla \times \left[ \frac{1}{\mu_o} \underline{\underline{\eta}} \cdot (\nabla \times \underline{\underline{B}}) \right] \quad (2.29)$$

Este sistema de EDP (2.28) - (2.30) se cierra introduciendo una ecuación de estado. La ecuación de estado para un gas ideal define una relación entre la presión, densidad y temperatura del plasma y esta dada por:

$$p = \rho R T \quad (2.30)$$

donde  $R$  es la constante del gas.

El sistema de EDP (2.28) - (2.30) conforma uno hiperbólico—parabólico, donde la parte parabólica corresponde al lado derecho de (2.28) y representa como las variables conservativas decaen en el tiempo debido a los efectos viscosos y resistivos del fluido. Para resolver un problema específico el sistema debe ser acompañado por un conjunto de condiciones iniciales y de contorno, donde las condiciones iniciales expresan los valores que asumen las variables conservativas al comienzo de la simulación y las condiciones de contorno especifican los valores que asumen las variables conservativas y/o sus gradientes en las fronteras del dominio y describen como el fluido interactúa con el medio exterior.

El sistema de ecuaciones (2.28) en forma adimensional – ver apéndice A – se transforma en:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}} \begin{bmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho} \underline{\underline{u}} \\ \underline{\underline{B}} \\ \bar{e} \end{bmatrix} + \bar{\nabla} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\rho} \underline{\underline{u}} \\ \bar{\rho} \underline{\underline{u}} \underline{\underline{u}} - \underline{\underline{B}} \underline{\underline{B}} + I \left( \bar{p} + \frac{1}{2} \bar{B}^2 \right) \\ \underline{\underline{u}} \underline{\underline{B}} - \underline{\underline{B}} \underline{\underline{u}} \\ \left( \bar{e} + \bar{p} + \frac{1}{2} \bar{B}^2 \right) \underline{\underline{u}} - (\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{u}}) \underline{\underline{B}} \end{bmatrix} = \quad (2.31)$$

$$\bar{\nabla} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\bar{\tau}}{\bar{\zeta}} \\ R_e A_l \\ \frac{\bar{E}_r}{L_u A_l} \\ \frac{\bar{u} \cdot \bar{\tau}}{R_e A_l} - \frac{\left[ \bar{\eta} \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{B}) \right] \times \bar{B}}{L_u A_l} + \frac{\bar{k} \cdot \bar{\nabla} \bar{T}}{P_e A_l} \end{bmatrix}$$

con

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{E}_r = -\bar{\nabla} \times \left[ \bar{\eta} \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{B}) \right] \quad (2.32)$$

$$\bar{\tau} = \bar{\mu} \left[ \bar{\nabla} \bar{u} + (\bar{\nabla} \bar{u})^T - \frac{2}{3} \bar{I} (\bar{\nabla} \cdot \bar{u}) \right] \quad (2.33)$$

Por cuestiones de simplicidad en la escritura no se utilizarán más a posteriori las variables barradas y se entenderá que las variables ya se encuentran en forma adimensional.

Cuando se resuelven las ecuaciones de la magnetogasdínámica ideal la parte parabólica de (2.31) no es considerada, con lo cual el sistema de EDP se reduce a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \underline{u} \\ \underline{B} \\ e \end{bmatrix} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} \rho \underline{u} \\ \rho \underline{u} \underline{u} - \underline{B} \underline{B} + \bar{I} \left( p + \frac{1}{2} B^2 \right) \\ \underline{u} \underline{B} - \underline{B} \underline{u} \\ \left( e + p + \frac{1}{2} B^2 \right) \underline{u} - (\underline{B} \cdot \underline{u}) \underline{B} \end{bmatrix} = \underline{0} \quad (2.34)$$

Es importante la variación que presenta el coeficiente de viscosidad con la temperatura. [DiCapua, 1971] y [Villani, 1982] han mostrado que la disipación por efecto de la viscosidad es un efecto de segundo orden.

## II.8 Forma Cuasi-Lineal. Matrices Jacobianas de los Flujos

El sistema de ecuaciones dado por las Ecs. (2.28) y (2.29) es, evidentemente, válido para cualquier sistema de coordenadas por estar escrito en forma tensorial [White, 2005]. A pesar de que variables dependientes vectoriales, como los campos de velocidad y de la inducción magnética, posean tres componentes, se considera en esta Tesis que éstas sólo dependen de tres variables independientes constituidas por dos coordenadas espaciales y el tiempo. En términos generales no debe confundirse movimiento “bidimensional”, o “2D” con movimiento “plano”, ya que éste último se define en base a hipótesis más restrictivas que el primero. Si se introduce un sistema de coordenadas cartesianas la Ec. (2.34) puede ser escrita en el caso bidimensional como:

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{F}_h}{\partial x} + \frac{\partial \underline{G}_h}{\partial y} = \frac{\partial \underline{F}_p}{\partial x} + \frac{\partial \underline{G}_p}{\partial y} \quad (2.35)$$

donde  $\underline{U}$  es denominado vector de variables conservativas

$$\underline{U} = \left( \rho, \rho u_x, \rho u_y, \rho u_z, B_x, B_y, B_z, e \right)^T \quad (2.36)$$

y  $\underline{F}_h$ ,  $\underline{G}_h$  son los vectores que especifican los flujos hiperbólicos

$$\underline{F}_h = \left( \begin{array}{c} \rho u_x \\ \rho u_x^2 - B_x^2 + p + \frac{1}{2} B^2 \\ \rho u_x u_y - B_x B_y \\ \rho u_x u_z - B_x B_z \\ 0 \\ u_x B_y - u_y B_x \\ u_x B_z - u_z B_x \\ \left( e + p + \frac{1}{2} B^2 \right) u_x - (\underline{B} \cdot \underline{u}) B_x \end{array} \right) \quad (2.37)$$

$$\underline{G}_h = \begin{pmatrix} \rho u_y \\ \rho u_x u_y - B_x B_y \\ \rho u_y^2 - B_y^2 + p + \frac{1}{2} B^2 \\ \rho u_z u_y - B_z B_y \\ u_y B_x - B_y u_x \\ 0 \\ u_y B_z - B_y u_z \\ \left( e + p + \frac{1}{2} B^2 \right) u_y - (\underline{B} \cdot \underline{u}) B_y \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

Introduciendo las matrices jacobianas de los flujos (donde el subíndice  $c$  resalta que la derivación ha sido realizada respecto a las variables conservativas)

$$[A_c] = \frac{\partial \underline{F}_h}{\partial \underline{U}} \quad [B_c] = \frac{\partial \underline{G}_h}{\partial \underline{U}} \quad (2.39)$$

el lado izquierdo del sistema de ecuaciones (2.35) puede entonces escribirse en una forma cuasi-lineal como:

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + [A_c] \frac{\partial \underline{U}}{\partial x} + [B_c] \frac{\partial \underline{U}}{\partial y} = \frac{\partial \underline{F}_p}{\partial x} + \frac{\partial \underline{G}_p}{\partial y} \quad (2.40)$$

Resulta de utilidad en la comprensión del fenómeno físico, en lo que a resultados respecta, y en lo referente a mediciones de laboratorio la utilización de las variables primitivas

$$\underline{W} = \left( \rho, u_x, u_y, u_z, B_x, B_y, B_z, p \right)^T \quad (2.41)$$

Por consiguiente, el sistema dado por (2.40) queda expresada en términos de las variables primitivas de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial t} + [A_p] \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x} + [B_p] \frac{\partial \tilde{W}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{F}_p}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{G}_p}{\partial y} \quad (2.42)$$

donde las reglas de transformación utilizadas para expresar las matrices jacobianas de los flujos en función de las variables primitivas son:

$$[A_p] = \left( \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{U}} \right) [A_c] \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{W}} \right) \quad (2.43)$$

$$[B_p] = \left( \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{U}} \right) [B_c] \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{W}} \right)$$

con

$$[A_p] = \begin{bmatrix} u_x & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_x & 0 & 0 & -\frac{B_x}{\rho} & \frac{B_y}{\rho} & \frac{B_x}{\rho} & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & u_x & 0 & -\frac{B_y}{\rho} & -\frac{B_x}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_x & -\frac{B_z}{\rho} & 0 & -\frac{B_x}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_y & -B_x & 0 & -u_y & u_x & 0 & 0 \\ 0 & B_z & 0 & -B_x & -u_z & 0 & u_x & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & 0 & (\gamma - 1) \underline{u} \cdot \underline{B} & 0 & 0 & u_x \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

$$\left[ B_p \right] = \begin{bmatrix}
 u_y & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & u_y & 0 & 0 & -\frac{B_y}{\rho} & -\frac{B_x}{\rho} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & u_y & 0 & \frac{B_x}{\rho} & -\frac{B_y}{\rho} & \frac{B_z}{\rho} & -\frac{1}{\rho} \\
 0 & 0 & 0 & u_y & 0 & -\frac{B_z}{\rho} & -\frac{B_y}{\rho} & 0 \\
 0 & -B_y & B_x & 0 & u_y & -u_x & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & B_z & -B_y & 0 & -u_z & u_y & 0 \\
 0 & 0 & \gamma p & 0 & 0 & (\gamma - 1) \underline{u} \cdot \underline{B} & 0 & u_y
 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

En el apéndice B, se presenta la deducción detallada de estas matrices.

## II.9 Ondas características

La resolución de las ecuaciones de la MGD ideal se basa en la utilización de ondas asociadas al problema físico. Una importante característica de la MGD es la cantidad de ondas que se producen, estas juegan un papel importante en el fenómeno físico y en la obtención de la solución de dicho fenómeno.

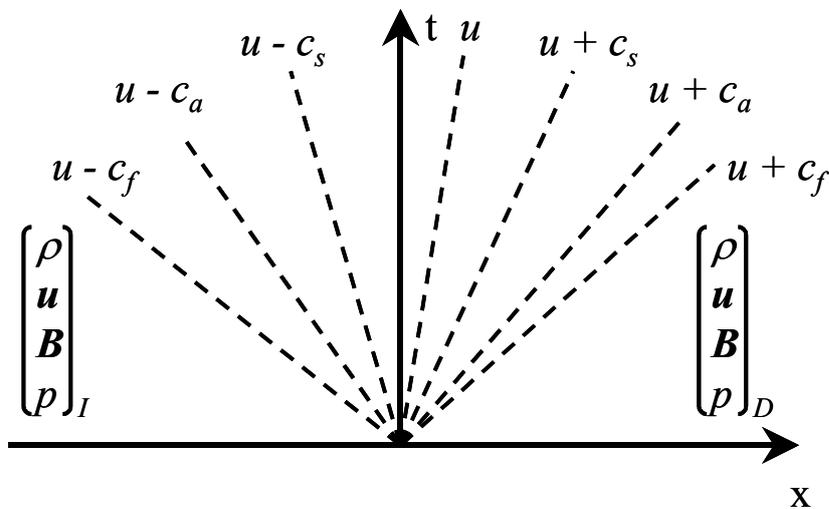


Figura 2-1: Sistema de ocho ondas del problema unidimensional en la MGD.

Asociados a los autovalores de las matrices jacobianas de los flujos (2.44) y (2.45) se encuentran las velocidades de las ondas. Tanto las ondas como sus velocidades están indicadas en la Figura 2-1, en el caso particular de que la velocidad sea en la dirección  $x$  son:

- Onda Entrópica  $\lambda_e = u_x$  (2.46)

- Ondas Alfvén  $\lambda_a = u_x \pm c_a$  (2.47)

- Ondas Magneto-acústicas rápidas  $\lambda_f = u_x \pm c_f$  (2.48)

- Ondas Magneto-acústicas lentas  $\lambda_s = u_x \pm c_s$  (2.49)

donde  $c_a$  es la velocidad Alfvén

$$c_a = \frac{B_x}{\sqrt{\rho}} \quad (2.50)$$

y  $c_f$ ,  $c_s$  son respectivamente las velocidades magneto-acústica rápida y lenta. Definidas como (la velocidad magneto-acústica rápida corresponde al signo más delante de la raíz cuadrada):

$$c_{f,s}^2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{\gamma p + B^2}{\rho} \pm \sqrt{\left( \frac{\gamma p + B^2}{\rho} \right)^2 - 4 \frac{\gamma p B_x^2}{\rho^2}} \right] \quad (2.51)$$

El restante autovalor es idénticamente cero (sistema no estrictamente hiperbólico) y debido a que la formulación en variables primitivas es equivalente a la en variables conservativas este aparece en ambas. Un *solver* de Riemann no podría trabajar con este valor nulo por lo que se utilizan las matrices jacobianas de los flujos modificadas por [Powell, 1995] que son no singulares. El criterio utilizado por Powell para modificar las matrices se basa en:

- Los vectores y valores propios correspondientes a las siete ondas asociadas al problema unidimensional permanecen sin cambios.
- El valor propio asociado a la nueva octava onda es igual a  $u$ .
- Los vectores propios derechos e izquierdos asociados a la nueva octava onda tienen sentido físico.
- En el caso unidimensional el problema de Riemann de ocho ondas se reduce al problema de Riemann de siete ondas.

Esto transforma el sistema de EDP ideal dado por Ec. (2.34) en el siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \underline{u} \\ \underline{B} \\ e \end{bmatrix} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} \rho \underline{u} \\ \rho \underline{u} \underline{u} - \underline{B} \underline{B} + I \left( p + \frac{1}{2} B^2 \right) \\ \underline{u} \underline{B} - \underline{B} \underline{u} \\ \left( e + p + \frac{1}{2} B^2 \right) \underline{u} - (\underline{B} \cdot \underline{u}) \underline{B} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{B} \\ \underline{u} \\ \underline{B} \cdot \underline{u} \end{bmatrix} (\nabla \cdot \underline{B}) \quad (2.52)$$

Estas modificaciones introducen un término de fuente proporcional a  $\nabla \cdot \underline{B}$ , es decir igual a cero. La matriz jacobiana de los flujos modificada, asociada al eje  $x$ , se encuentra transcrita en el apéndice C, junto con los autovalores y los vectores propios derechos e izquierdos. Tales vectores tienen incorporadas las modificaciones introducidas por [Zachary *et al.*, 1994] que evitan degeneraciones en la solución del sistema hiperbólico de la MGD.

Es importante agregar que la técnica de [Powell, 1995] es sólo uno de los posibles métodos para mantener numéricamente en cero a la divergencia del campo magnético. En el ámbito de la Magnetogasdinámica (MGD) hay básicamente cuatro técnicas principales. Estas son: a) la técnica de Powell o también conocida como de ocho ondas, “8-wave formulation”, b) CT o “constrained transport” de [Evans y Hawley, 1988], c) “projection scheme” de [Brackbill y Barnes, 1980], y finalmente la d) consistente en reescribir completamente las ecuaciones de la MGD en términos del vector potencial magnético. Una detallada discusión sobre estos métodos se encuentra en [LeVeque *et al.*, 1998], [Tóth, 2000] y [Udrea, 1999]. Asociado a esto se encuentra el hecho de que

mantener divergencia en cero es un problema que aparece en la MGD multidimensional, mientras que en el caso unidimensional esta propiedad se satisface automáticamente ya que implica una componente constante del campo magnético en la dirección bajo análisis. Es interesante notar cómo Powell pone énfasis en éste hecho en el título de su publicación mencionándolo entre paréntesis, “An approximate Riemann solver for magnetohydrodynamics (that works in more than one dimension)”. Al utilizar la técnica de Powell aparece un término vectorial en el lado derecho que es proporcional a la divergencia del campo magnético, Ec. (2.52). Al nivel del sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales sólo se han agregado términos que son iguales a cero al sistema de ecuaciones en forma conservativa, mientras que desde el punto de vista numérico los esquemas basados en la técnica de [Roe, 1981] a menudo fallaban al solucionar problemas MGD multidimensionales debido a la acumulación de errores en la  $\nabla \cdot \underline{B}$ . Powell menciona al respecto “It is only by writing the equations in this slightly non-conservative form that the singularity related to  $\text{div B}$  can be removed”. En la comparación entre las diferentes técnicas llevadas adelante por Tóth se menciona “Using the non-conservative form, Powell arrived at a new discretization, the eight-wave Riemann solver (the eighth wave is associated with the propagation of  $\text{div B}$ ) together with the non-conservative source terms above, that was found to be numerically robust”.

## **Capítulo III**

# **Solución de las Ecuaciones de la Magnetogasdinámica Ideal Bidimensional y Dependiente del Tiempo**

En este capítulo se presenta el método numérico empleado para resolver las ecuaciones de la magnetogasdinámica ideal bidimensional y dependiente del tiempo de un fluido simple. El esquema numérico es presentado de forma tal que pueda ser extendido en el Cap. IV para la solución de los términos parabólicos. En primera instancia se mostrará la importancia de la forma conservativa de las ecuaciones y las dificultades que aparecen en la solución de los sistemas hiperbólicos. A posteriori, se introducirán algunos conceptos matemáticos fundamentales y se presentara el método numérico TVD de alta resolución. Finalmente se presentarán los resultados obtenidos al verificar el código numérico desarrollado a través del *benchmark* propuesto por Brio y Wu.

### III.1 Introducción

Se considera la solución del sistema hiperbólico en forma conservativa presentado en la Sección VII del Capítulo II. Por razones conceptuales se analiza primero el siguiente caso unidimensional

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{u}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \underline{f}(\underline{u}(x, t)) = 0 \quad (3.1)$$

donde  $\underline{f}(\underline{u}(x, t))$  es denominada función flujo del sistema y  $\underline{u}(x, t)$  representa la distribución espacial de las variables de estado al tiempo  $t$ , las cuales para casos inestacionarios cambian a medida que el tiempo evoluciona. En general las funciones flujo son no lineales en  $\underline{u}$  y en la mayoría de los casos no es posible obtener soluciones exactas de sistemas no lineales de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDP), como es la situación planteada en esta Tesis. Se genera entonces la necesidad de desarrollar y estudiar métodos numéricos para alcanzar una solución aproximada. Hay una dificultad especial asociada con la solución de sistemas tales como el (3.1) que es la formación de discontinuidades (ondas de choque en el caso de la dinámica de gases y MGD) y debe considerarse con cuidado en el desarrollo del método numérico.

Algunas aplicaciones donde se utilizan formas conservativas son [LeVeque, 1992] [LeVeque *et al.*, 1998] [Toro and Clarke, 2010]:

- Las ecuaciones de Euler en la dinámica de gases. Parte de la teoría de leyes de conservación fue desarrollada con estas ecuaciones en mente y muchos métodos numéricos nacieron específicamente para estos sistemas.
- Predicciones meteorológicas. Los frentes climáticos son esencialmente discontinuidades de presión y temperatura. En estos casos los efectos viscosos y disipativos causan que estos frentes pueden tener un ancho de kilómetros en lugar de milímetros como es usual en la aerodinámica.
- Modelos astrofísicos. Llevan a sistemas de leyes de conservación similares a las ecuaciones de Euler para la densidad de materia en el espacio.

- El modelo de la dinámica de formación de una estrella también requiere de las leyes conservativas.
- Otras como: ondas producidas por explosiones, propagación de ondas en sólidos elásticos, el flujo de los glaciares, la separación de especies químicas por cromatografía y problemas de flujo de multifases en materiales porosos dan lugar a diferentes sistemas de leyes de conservación.

En particular las ecuaciones de la magnetogasdínámica ideal, como se demostró en el capítulo anterior, forman un sistema hiperbólico que puede ser expresado en forma conservativa. Un *benchmark* característico que ilustra el complejo comportamiento de las soluciones de leyes de conservación es el “problema del tubo de choque” de dinámica de gases. Consiste en un tubo lleno con gas e inicialmente dividido por una membrana en dos secciones. El gas está en reposo y tiene mayor densidad y presión en una mitad del tubo que en la otra. En el tiempo  $t = 0$ , la membrana se quita o rompe repentinamente, y el gas fluye desde la zona de alta presión hacia la zona de baja presión. La estructura de este flujo resulta ser muy interesante, involucrando tres ondas distintas que separan regiones en las que las variables de estado son constantes. En dos de esas ondas hay discontinuidad en algunas de las variables de estado. La onda de choque se propaga en la región de baja presión, la densidad y la presión saltan a valores más elevados a través de ella y todas las variables de estado son discontinuas. Luego la onda asociada a la discontinuidad de contacto produce un cambio en la densidad y la temperatura pero la velocidad y presión permanecen constantes. El frente de la tercera onda se mueve en dirección opuesta y posee una estructura diferente, todas las variables de estado son continuas y hay una transición progresiva. Esta onda se llama onda de expansión y la densidad del gas disminuye cuando la onda lo atraviesa. Este importante caso testigo fue resuelto para la situación bidimensional y los resultados se presentan en el próximo capítulo.

*Dificultades Matemáticas:* Las soluciones discontinuas comentadas no satisfacen las EDP en todos los puntos, debido a que las derivadas no están definidas en las discontinuidades. Por lo tanto se debe introducir la formulación integral de las ecuaciones diferenciales, la cual permite soluciones discontinuas. La formulación integral es fundamental en el desarrollo y análisis de métodos numéricos. Otra dificultad

matemática que aparece es la posibilidad de falta de unicidad de la solución. Por lo general hay más de una solución integral para los mismos datos iniciales. El hecho de que las ecuaciones tengan otras soluciones es el resultado de que son sólo un modelo de la realidad y algunos efectos físicos se ignoran como puede ser la viscosidad en el caso gasdinámico ideal. Para subsanar este problema se apela a la segunda ley de la termodinámica, la cual permite asegurar que la entropía se incrementará al pasar el gas a través de la onda de choque, y es por lo tanto una condición suficiente para reconocer esta discontinuidad que es físicamente correcta y especificar una única solución. Para otros sistemas de leyes de conservación es posible derivar una condición similar y por analogía es llamada “condición de entropía”.

*Dificultades Numéricas:* Cuando se intenta calcular numéricamente las soluciones aparecen una nueva cantidad de problemas. Si se computan las soluciones discontinuas de leyes de conservación usando métodos estándares desarrollados bajo la suposición de soluciones suaves se obtendrán resultados numéricos de muy mala calidad. En la Figura 3-1 se muestran algunos resultados numéricos para el problema de tubo de choque discutido con anterioridad. Si se usa el Método de Godunov – exacto de primer orden – se obtienen resultados que son engañosos en regiones cerca de discontinuidades, debido a que este método tiene una “viscosidad numérica” que alisa demasiado la solución. Si se intenta usar un método estándar de segundo orden, como el método de Mac Cormack, el cual elimina la viscosidad numérica, aparecen oscilaciones en la solución. Se logra una mejoría al combinar un método estándar de diferencias finitas en regiones suaves con algún procedimiento explícito para rastrear la ubicación de las discontinuidades. A esta aproximación se la conoce habitualmente como “Shock Tracking”. En problemas unidimensionales esta aproximación es factible, pero cuando se trabaja con más dimensiones espaciales las discontinuidades quedan a lo largo de curvas o superficies y aunque el seguimiento del choque es todavía posible, se torna mucho más complicado.

Lo ideal es tener un método numérico que produzca aproximaciones a las soluciones discontinuas en forma automática y sin un esquema de captura explícita. En los últimos años se ha avanzado mucho en este campo, y hoy se encuentran disponibles una variedad de estos métodos, llamados métodos de *Shock Capturing*.

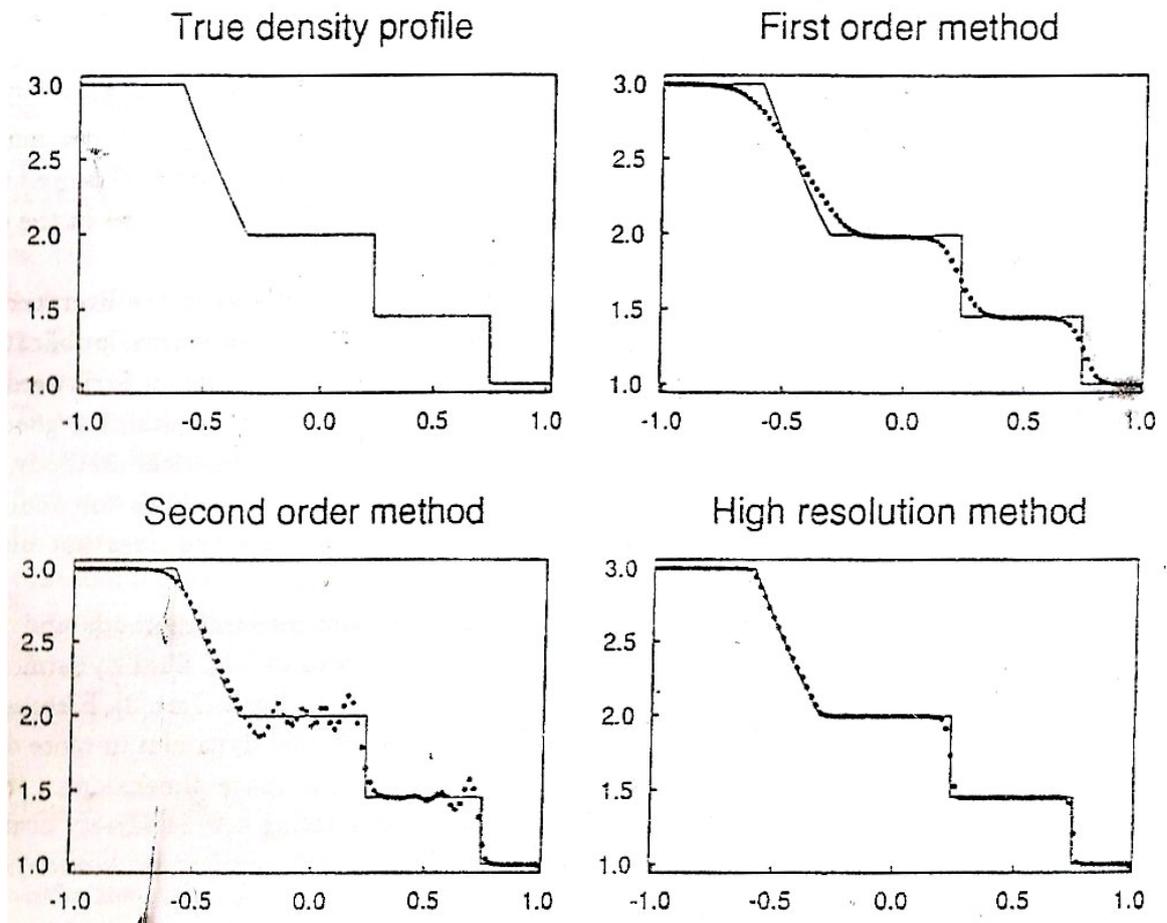


Figura 3-1: Soluciones al problema del tubo de choque proporcionadas por distintos métodos numéricos [LeVeque, 1992].

Los rasgos característicos de los mismos son:

- Al menos exactitud de segundo orden en regiones donde la solución es suave.
- Determinación de discontinuidades sin excesivas dificultades.
- Ausencia de oscilaciones falsas.
- Consistencia con la forma integral de las leyes de conservación.
- Límites de estabilidad no-lineal que junto con la consistencia, permiten demostrar la convergencia cuando la grilla es refinada.
- Una forma discreta de la condición de entropía, que permite concluir que la solución aproximada converge a la solución física correcta.

Los métodos con exactitud y propiedades indicadas anteriormente se los conoce a menudo como “métodos de alta resolución”. Debido a que el estudio de estabilidad de la mayoría de los métodos usados, en estos sistemas de ecuaciones, es bastante complicado y casi imposible, para obtener convergencia de los resultados y garantizar que oscilaciones espúreas no se produzcan, un criterio utilizado es que la variación total de la solución no se incremente en el tiempo. A los métodos que poseen esta propiedad se los denomina *Total Variation Diminishing* o simplemente TVD.

Sobre la base de las consideraciones vertidas en los párrafos anteriores, en esta Tesis se emplea un método TVD de alta resolución, y en las secciones siguientes se encuentran detalles del mismo.

### ***III.2 Algunos Aspectos Matemáticos Básicos a Considerar***

Como vimos en el Cap. II el sistema de ecuaciones (3.1) puede ser escrito en su forma cuasi-linear introduciendo la matriz jacobiana de los flujos, obteniéndose para el caso unidimensional,

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + [A_c](U) \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} = 0 \quad (3.2)$$

**Def. I:** El sistema (3.2) es denominado hiperbólico en el punto  $(x,t)$  si  $[A]$  tiene  $m$  valores propios reales  $\lambda$  y un correspondiente conjunto de  $m$  vectores propios derechos  $r$  linealmente independientes. El sistema es denominado como estrictamente hiperbólico si todos los valores propios son distintos.

**Def. II:** Si en el sistema (3.2)  $[A]$  es constante y asumiendo que el sistema es hiperbólico es posible desacoplar el sistema en una forma canónica introduciendo las denominadas *variables características*  $w$  (no confundir con primitivas o conservativas). La solución general de (3.2) es,

$$\tilde{U}(x, t) = \sum_{i=1}^m w_i(x, t) r^i \quad (3.3)$$

donde  $r$  son los vectores propios derechos de  $[A]$  y  $w$  son las variables características. La solución puede ser interpretada como la superposición de  $m$  ondas propagándose con una velocidad igual al valor propio correspondiente de  $[A]$ .

**Def. III:** Considerando el sistema (3.2) (caso no lineal), y expresando

$$\frac{d\lambda(u)}{du} = f''(u) \quad (3.4)$$

$\lambda(u)$  es una función monótonamente creciente de  $u$  si  $f''(u) > 0$  (flujo convexo)

$\lambda(u)$  es una función monótonamente decreciente de  $u$  si  $f''(u) < 0$  (flujo cóncavo)

$\lambda(u)$  tiene extremo si  $f''(u) = 0$  para algún  $u$  (flujo no convexo, no cóncavo)

La propiedad de monotonía de la velocidad característica tiene profundas consecuencias en el comportamiento de la solución.

**Def. IV:** Campos característicos. Considerando un sistema hiperbólico de leyes de conservación, las velocidades características  $\lambda$  definen un campo denominado:

linealmente degenerado si

$$\nabla \lambda_i(\tilde{U}) \cdot \tilde{r}^i(\tilde{U}) = 0, \quad \forall \tilde{U} \in \mathfrak{R}^m \quad (3.5)$$

genuinamente no lineal si

$$\nabla \lambda_i(\tilde{U}) \cdot \tilde{r}^i(\tilde{U}) \neq 0, \quad \forall \tilde{U} \in \mathfrak{R}^m \quad (3.6)$$

Es importante observar que todos los campos característicos de un sistema hiperbólico lineal son linealmente degenerados. En las ecuaciones de Euler unidimensionales

(sistema hiperbólico no lineal) la onda de choque y la de expansión son genuinamente no lineales mientras que la discontinuidad de contacto es linealmente degenerada. Las ecuaciones de Euler son convexas a pesar de que poseen ambos campos característicos, los genuinamente no lineales y los linealmente degenerados. En el caso de las ecuaciones de la MGD es posible demostrar que para un campo característico y para determinados valores locales de las variables de estado el producto interior es nulo mientras que para el resto de los puntos es no nulo. Es decir el campo característico no es ni linealmente degenerado ni genuinamente no lineal. En este caso el sistema de ecuaciones es denominado *no Convexo*.

**Def. V:** Condición de Rankine – Hugoniot.

$$f(u(x_L, t)) - f(u(x_R, t)) = S[u(x_L, t) - u(x_R, t)] \quad (3.7)$$

Donde  $S$  es la velocidad de la discontinuidad. Solamente si se verifica que:

$$f(\underline{U}) = [A]\underline{U} \quad (3.8)$$

la Ec. (3.7) se reduce a:

$$[A](\underline{U}_R - \underline{U}_L) = S(\underline{U}_R - \underline{U}_L) \quad (3.9)$$

Implica que la diferencia de los vectores de estado debe ser un vector propio derecho de la matriz jacobiana de los flujos y que  $S$  debe ser el valor propio asociado. Esta última expresión se satisface para sistemas lineales. Las Ecs. de Euler también verifican esta última expresión porque satisfacen la propiedad de homogeneidad. Las condiciones de Rankine – Hugoniot para las ecuaciones de la MGD pueden ser observadas en [Kennel *et al.*, 1989].

**Def. VI:** Para una ley de conservación escalar convexa, una discontinuidad propagándose con una velocidad  $S$  satisface la *condición de entropía de Lax* si:

$$f'(u(x_L, t)) > S > f'(u(x_R, t)) \quad (3.10)$$

**Def. VII:** Propiedad de Homogeneidad.

$$F(\underline{U}) = [A(\underline{U})](\underline{U}) \quad (3.11)$$

Las ecuaciones de Euler junto con la ecuación de estado para gases perfectos satisfacen esta propiedad y es la base de los esquemas numéricos del tipo *Flux vector splitting*.

**Def. VIII:** Método Conservativo. Un esquema conservativo para una ley de conservación escalar es un método numérico de la forma,

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} [f_{i-\frac{1}{2}} - f_{i+\frac{1}{2}}] \quad (3.12)$$

$$f_{i+\frac{1}{2}} = f_{i+\frac{1}{2}}(u_{i-l_L}^n, u_{i+l_R}^n)$$

Donde  $f$  es el flujo numérico. Un requerimiento fundamental del flujo numérico es la condición de consistencia,

$$f_{i+\frac{1}{2}}(v, \dots, v) = f(v) \quad (3.13)$$

### **III.2 Formulación en Volúmenes Finitos**

El sistema hiperbólico de EDP en forma conservativa (2.31) para el caso ideal y sin términos fuentes está dado por:

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{f}_h(\underline{U}) = \underline{0} \quad (3.14)$$

Discretizando el dominio en celdas e introduciendo una forma integral de (3.14) se obtiene la formulación en volúmenes finitos en la celda  $c$ ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \underline{U} d\tau + \int_{V_c} \nabla \cdot \underline{f}_h(\underline{U}) d\tau = 0 \quad (3.15)$$

Se asume como hipótesis que las variables conservativas son constantes en cada celda, lo cual es fundamental como se verá más adelante para aplicar un método derivado del de [Godunov, 1959] y en particular la contribución introducida por [Roe, 1981]. Existen otros métodos que introducen variaciones parabólicas o lineales en las variables conservativas dentro de las celdas, pero en el código elaborado durante el desarrollo de la Tesis se consideran constantes. Si se aplica el teorema de la divergencia a (3.15):

$$V_c \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \oint_{\Omega_c} \underline{f}_h(\underline{U}) \cdot d\vec{\sigma} = 0 \quad (3.16)$$

donde  $V_c$  es el volumen de la celda  $c$ ,  $\Omega_c$  su frontera y  $d\vec{\sigma}$  un vector asociado al elemento de área infinitesimal orientado.

Aproximando la derivada de las variables conservativas con respecto al tiempo por medio de una aproximación en diferencias finitas de primer orden se obtiene:

$$\left. \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} \right|_{t=t_n} \approx \frac{\underline{U}^{n+1} - \underline{U}^n}{\Delta t} \quad (3.17)$$

donde

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n$$

$\underline{U}^n$  es la solución aproximada de la Ec. (3.14) al tiempo  $t_n$ .

Expresando la integral de superficie en (3.16) por una sumatoria sobre todas las caras de la celda

$$\oint_{\Omega_c} f_h(\underline{U}) \cdot d\sigma \approx \sum_{i=1}^{caras} \underline{F}(\underline{U}^n) \cdot \underline{n}_i A_i \quad (3.18)$$

donde

$\underline{F}(\underline{U}^n)$  es el tensor de flujo numérico.

$\underline{n}_i$  es un vector unitario normal a la cara  $i$

$A_i$  es el área de la cara  $i$ .

Reemplazando las aproximaciones (3.17) y (3.18) en la Ec. (3.16) se tiene una fórmula para la actualización temporal de la solución al sistema hiperbólico.

$$\underline{U}^{n+1} = \underline{U}^n - \frac{\Delta t}{V_c} \sum_{i=1}^{caras} \underline{F}(\underline{U}^n) \cdot \underline{n}_i A_i \quad (3.19)$$

Al observar la formula (3.19) de actualización de las variables conservativas en el tiempo se concluye que es un esquema explícito. LeVeque considera que los métodos explícitos aplicados en sistemas hiperbólicos son más eficientes que los implícitos, usados con un adecuado paso de tiempo, y además afirma que los métodos implícitos son raramente usados en este tipo de sistemas de EDP [LeVeque, 1992] [LeVeque, 2002]. En problemas hiperbólicos-parabólicos, aparecen normalmente zonas del dominio donde los efectos difusivos son importantes, por ende el tamaño de las celdas debe ser considerablemente menor que en el resto del dominio. En estos casos las condiciones de estabilidad de la solución fuerzan a los sistemas explícitos a utilizar pasos de tiempo de menor orden, incrementándose los tiempos de computación totales. Los esquemas implícitos se presentan como una alternativa competitiva para solucionar este inconveniente.

Existen tres alternativas muy difundidas para extender los esquemas numéricos desarrollados para el caso escalar no lineal a sistemas no lineales. Estos son: el *solver* de Riemann exacto, el *solver* de Riemann aproximado y la técnica de *flux-vector*

*splitting*, [Yee, 1989]. El método más utilizado para calcular los flujos numéricos es el *solver* de Riemann aproximado proporcionado por Roe, este es implementado en este trabajo en conjunción con un esquema de alta resolución TVD [Roe, 1981], [Roe and Balsara, 1996] [Toro, 1999], [Toro and Clarke, 2010].

### ***III.3 Solver de Riemann***

Godunov en 1959 introdujo la información proveniente del método de las características en un método conservativo y desarrolló un algoritmo que resolvía las ecuaciones de Euler unidimensionales [Godunov, 1959]. Asumía que las variables conservativas eran constantes en cada celda y encontraba entonces la solución exacta del problema de Riemann local. Recordemos que un problema de Riemann consta de un sistema de ecuaciones diferenciales en forma conservativa junto con datos iniciales que consisten en dos estados constantes separados por una discontinuidad en una o más de las variables conservativas. Entonces Godunov obtenía la solución en el dominio completo resolviendo una secuencia de problemas de Riemann locales.

Para sistemas de leyes de conservación multidimensional la solución exacta es difícil de obtener, y surgió una modificación muy importante al método introducido por Godunov realizada por Roe; [Roe, 1981]. Él generalizó un algoritmo desarrollado con el objeto de resolver el caso unidimensional y escalar para solucionar un sistema de EDP no lineales unidimensional, Roe busca la solución a un problema similar considerando una matriz jacobiana de los flujos constante en cada celda y representativa de las condiciones locales. La propiedad que debe satisfacer la matriz jacobiana de los flujos es la de homogeneidad, Ec. (3.11), para que sea representativa de las condiciones locales. Dicho de otra manera, que contenga la información física necesaria y suficiente para obtener la solución del sistema no lineal original, estos conceptos son presentados con claridad en [LeVeque, 2002], [Toro, 1999] y [Toro and Clarke, 2010].

El problema que posee el seguidor de Riemann desarrollado por Roe es que sólo admite ondas de choque. Por esta razón deben introducirse modificaciones para captar las ondas de expansión y satisfacer la condición de entropía, una de estas modificaciones fue propuesta por [Harten *et al.*, 1976].

Para obtener un algoritmo bidimensional recordemos las leyes de conservación para el caso de la MGD bidimensional ideal dadas en su forma cuasi-lineal Ec. (2.44):

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + [A_c] \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} + [B_c] \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} = 0 \quad (3.20)$$

donde  $[A_c], [B_c]$  son las matrices jacobianas de los flujos. Si se denota con subíndices en fracciones a los bordes de las celdas del dominio discretizado, como se muestra en la Figura 3-2, la formula para la actualización temporal (3.19) se transforma en:

$$\tilde{U}_{ij}^{n+1} = \tilde{U}_{ij}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \overline{F_{i+\frac{1}{2};j}^n} - \overline{F_{i-\frac{1}{2};j}^n} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left( \overline{G_{i;j+\frac{1}{2}}^n} - \overline{G_{i;j-\frac{1}{2}}^n} \right) \quad (3.21)$$

donde  $\overline{F_{i+\frac{1}{2};j}^n}$  es el vector de flujo numérico de las variables conservativas obtenido en la interfase de la celda  $(ij)$  para un tiempo  $n$ . Este no debe ser confundido con el dado en la Ec. (2.37-2.38) en el segundo capítulo y por esta razón se lo denota barrado.

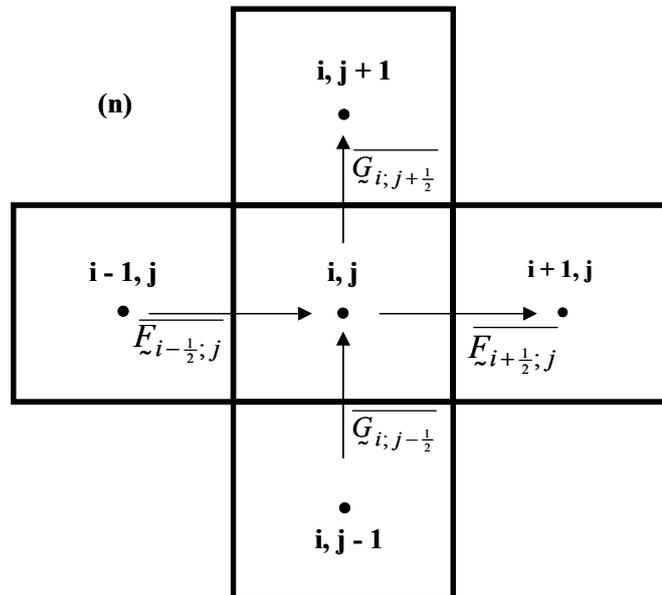


Figura 3-2: Esquema de evolución espacial del método numérico bidimensional para un tiempo  $n$ .

### III.4 Esquema TVD

En esta sección se discutirá brevemente una forma de análisis de estabilidad que permite probar convergencia de los resultados, esta ha sido desarrollada para el caso escalar y extendida en la práctica a sistemas de EDP con resultados exitosos.

Para un sistema de EDP general con condiciones iniciales arbitrarias una prueba de convergencia o estabilidad no ha sido encontrada.

LeVeque demuestra que si la solución es generada por un método numérico en forma conservativa con un flujo numérico Lipschitz continuo y consistente con alguna ley de conservación escalar; entonces si el método es TV *total variation* estable el método es convergente [LeVeque, 1992].

Un modo de asegurar que un método sea TV estable es requerir que la variación total no se incremente a medida que el tiempo evoluciona. Este requerimiento da a lugar a una muy importante clase de métodos denominados TVD. La variación total de un esquema se define en función de la solución en un tiempo  $n$ , como

$$TV(\tilde{U}^n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |\tilde{U}_{i+1}^n - \tilde{U}_i^n| \quad (3.22)$$

El esquema es TVD si la variación total de la solución en el paso de tiempo  $n+1$  es menor o igual a la variación total en el paso de tiempo  $n$ , es decir

$$TV(\tilde{U}^{n+1}) \leq TV(\tilde{U}^n) \quad (3.23)$$

En esta Tesis, para llegar a un esquema TVD con un método de alta resolución se obtendrán los flujos numéricos hiperbólicos de la Ec. (3.21) siguiendo la propuesta de [Yee, 1989] con las modificaciones introducidas en el Cap. V.

### III.5 Métodos de Alta Resolución. Flujos Numéricos.

Recordemos que se entiende por métodos de alta resolución a aquellos que tienen por lo menos una exactitud de segundo orden en soluciones suaves y, además, pueden captar discontinuidades sin oscilaciones. La idea principal detrás de cualquier método de alta resolución es intentar usar un método de orden elevado, pero modificarlo con el objeto de incrementar la disipación numérica en la vecindad de una discontinuidad. Análisis de algunos métodos de alta resolución se encuentran en [Balbas *et al.*, 2004], [Colella, 1984], [LeVeque, 2002], [Toro, 1999], [Toro and Clarke, 2010] y [Zalesak, 1987]. Un camino es considerar al flujo numérico como una combinación de un flujo de orden elevado y uno de bajo orden.

Un flujo de alto orden puede ser expresado como la suma de uno de bajo orden más una corrección:

$$\overline{F}^H = \overline{F}^L + \left( \overline{F}^H - \overline{F}^L \right) \quad (3.24)$$

donde la corrección está dada por el segundo término del lado derecho.

Si la magnitud de la corrección es limitada por los datos se tiene un método con limitador de flujo, el cual es uno de los métodos de alta resolución más difundidos, expresándose el flujo numérico como:

$$\overline{F} = \overline{F}^L + \Phi \left( \overline{F}^H - \overline{F}^L \right) \quad (3.25)$$

donde  $\Phi$  es la función limitadora, la cual tiene como objeto cambiar suavemente el esquema entre una exactitud alta y baja. En regiones del espacio donde la solución es suave la función limitadora debe ser unitaria para que el esquema logre allí una buena aproximación. En regiones donde hay gradientes pronunciados la función limitadora debe tomar valores cercanos a cero y así se eviten falsas oscilaciones que no representan la realidad física.

El flujo numérico de bajo orden siguiendo el esquema propuesto por [Yee, 1989] es

$$\overline{F_{i+\frac{1}{2}}^L} = \frac{F_i + F_{i+1}}{2} - \frac{1}{2} \text{sgn}([\Lambda]_{i+\frac{1}{2}})(F_{i+1} - F_i) \quad (3.26)$$

donde  $[\Lambda]$  es una matriz diagonal con los elementos iguales a los valores propios de la matriz jacobiana de los flujos modificada por [Powell, 1995] derivada en términos de la variables conservativas.

La matriz jacobiana de los flujos modificada junto con sus valores propios asociados, se encuentran en el apéndice C. Tales valores tienen incorporadas las modificaciones de [Roe and Balsara, 1996].

La función signo se aplica a cada uno de los elementos de  $[\Lambda]$  y se expresa como:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

Sobre la base de lo expresado en la Sección (III.3) y reescribiendo la Ec. (3.11) se obtiene:

$$F_{i+1} - F_i = [A_c]_{i+\frac{1}{2}}(U_{i+1} - U_i) \quad (3.28)$$

Introduciendo la descomposición espectral de la matriz jacobiana de los flujos en la Ec. (3.28)

$$F_{i+1} - F_i = ([R_c][\Lambda][L_c])_{i+\frac{1}{2}}(U_{i+1} - U_i) \quad (3.29)$$

donde:

$[R_c]$  es la matriz formada con los vectores propios derechos de la matriz jacobiana de los flujos expresada en función de las variables conservativas.

$[L_c]$  es la matriz formada con los vectores propios izquierdos de la matriz jacobiana de los flujos expresada en función de las variables conservativas.

Reemplazando la Ec. (3.29) en la Ec. (3.26) se obtiene

$$\overline{F_{i+\frac{1}{2}}^L} = \frac{1}{2} \left\{ F_i + F_{i+1} - \text{sgn}([\Lambda]_{i+\frac{1}{2}}) ([R_c][\Lambda][L_c])_{i+\frac{1}{2}} (U_{i+1} - U_i) \right\} \quad (3.30)$$

Se define la proyección de las variables conservativas, evaluadas en el centro de la celda, sobre el m-esimo vector propio izquierdo  $l_c^m$ , expresado en términos de las variables conservativas y evaluado en la interfase de la celda, como:

$$\alpha_{i+\frac{1}{2}}^m = l_{c\ i+\frac{1}{2}}^m \cdot (U_{i+1} - U_i) \quad (3.31)$$

Es importante comentar que la matriz jacobiana de los flujos tiene una gran cantidad de información física en sus vectores y valores propios. Los valores propios representan las velocidades de propagación de las ondas. La proyección de la diferencia, en la interfase, de las variables conservativas con el m-esimo vector propio izquierdo, Ec. (3.31), indica el cambio llevado a cabo en un estado intermedio entre la m-esima característica y la anterior. Finalmente, en el espacio de estado, que representa en cada uno de sus ejes a una componente del vector  $U$ , los vectores propios derechos son tangentes a la dirección de propagación de las ondas.

Introduciendo la Ec. (3.31) en la Ec. (3.30) se obtiene:

$$\overline{F_{i+\frac{1}{2}}^L} = \frac{1}{2} \left\{ F_i + F_{i+1} - \sum_m \left( |\lambda^m| \alpha_{i+\frac{1}{2}}^m r^m \right)_{i+\frac{1}{2}} \right\} \quad (3.32)$$

donde  $\lambda^m$  es el m-esimo valor propio de la matriz jacobiana de los flujos y  $r^m$  es su m-esimo vector propio derecho.

Como se mencionó anteriormente un *solver* de Roe produce sólo ondas de choque, para poder captar correctamente las ondas de expansión Yee en su esquema introduce una función que cambia el valor absoluto del valor propio por una variación parabólica

$$\psi(x) = \begin{cases} |x| & |x| \geq \delta \\ \frac{1}{2\delta}(x^2 + \delta^2) & |x| < \delta \end{cases} \quad (3.33)$$

Es importante destacar que en vista de los resultados obtenidos en el desarrollo de la Tesis se ha logrado comprobar que el parámetro  $\delta$  desempeña un papel primordial. Debido a esto se realizó un estudio que muestra la sensibilidad de la solución a la variación del mismo y las conclusiones obtenidas se encuentran en el próximo capítulo. Introduciendo la Ec. (3.33) en la Ec. (3.32) se obtiene la forma final del flujo de bajo orden:

$$\overline{F_{i+\frac{1}{2}}^L} = \frac{1}{2} \left\{ F_i + F_{i+1} - \sum_m \sigma(\lambda_{i+\frac{1}{2}}^m) \alpha_{i+\frac{1}{2}}^m r_{i+\frac{1}{2}}^m \right\} \quad (3.34)$$

La Ec. (3.34) es modificada por [Harten *et al.*, 1976], [Harten, 1983] y [Yee, 1989] teniendo en consideración la Ec. (3.25) y que el esquema es TVD, obteniéndose así la forma final del flujo numérico para un instante  $n$  como

$$\overline{F_{i+\frac{1}{2};j}^n} = \frac{1}{2} \left\{ F_{i+1} + F_i + \sum_m r_{i+\frac{1}{2}}^m \Phi_{i+\frac{1}{2}}^m \right\}_{;j}^{(n)} \quad (3.35)$$

donde la función limitadora esta dada por:

$$\Phi_{i+\frac{1}{2}}^m = (g_{i+1}^m + g_i^m) - \sigma(\lambda_{i+\frac{1}{2}}^m + \gamma_{i+\frac{1}{2}}^m) \alpha_{i+\frac{1}{2}}^m \quad (3.36)$$

con

$$g_i^m = S \max \left\{ 0, \min \left[ \frac{1}{2} \sigma_{i+\frac{1}{2}}^m |\alpha_{i+\frac{1}{2}}^m|, \frac{S}{2} \sigma_{i-\frac{1}{2}}^m \alpha_{i-\frac{1}{2}}^m \right] \right\} \quad (3.37)$$

$$S = \text{sgn}(\lambda_{i+\frac{1}{2}}^m) \quad (3.38)$$

$$\gamma_{i+\frac{1}{2}}^m = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^m} (g_{i+1}^m - g_i^m) & \alpha_{i+\frac{1}{2}}^m \neq 0 \\ 0 & \alpha_{i+\frac{1}{2}}^m = 0 \end{cases} \quad (3.39)$$

donde para esquemas explícitos,

$$\sigma(z) = \frac{1}{2} \left[ \psi(z) - \frac{\Delta t}{\Delta x} z^2 \right] \quad (3.40)$$

La función limitadora dada en la Ec. (3.36) y en la Ec. (3.37) se denomina Minmod. Además de esta existen otras tales como Superbee, van Leer y van Albada, pero debido a la experiencia vertida por [Elaskar *et al.*, 2000] y [Elaskar and Brito, 2001] en el desarrollo de un código que resuelve las ecuaciones de la MGD unidimensional y dependientes del tiempo, y las sugerencias aportadas en [Shumlak and Udrea, 2001] se optó por la aquí presentada.

El flujo numérico dado por la Ec. (3.35) es introducido en la Ec. (3.21) para obtener la evolución temporal de las variables conservativas. De forma similar a lo realizado para obtener el flujo numérico en la dirección  $x$  se logra el flujo numérico en la dirección  $y$ , pero en el transcurso de la Tesis se encontró una forma computacionalmente más eficiente que será presentada en la próxima sección.

Debido a que la expresión de los vectores propios es más simple en la forma primitiva que en la forma conservativa la Ec. (3.31) se transforma en

$$\alpha_{i+\frac{1}{2}}^m = \underline{l}_{p\ i+\frac{1}{2}}^m \cdot (W_{i+1} - W_i) \quad (3.41)$$

donde  $\underline{l}_p^m$  es el m-esimo vector propio izquierdo de la matriz jacobiana de los flujos en términos de las variables primitivas.

Los vectores propios derechos e izquierdos expresados en función de las variables primitivas se encuentran transcritos en el apéndice C. Tales vectores tienen incorporadas las modificaciones, a través de la normalización, introducidas por [Zachary *et al.*, 1994] que evitan degeneraciones en la solución del sistema hiperbólico de la MGD.

La metodología para el cálculo de los flujos numéricos implementada en el código computacional bidimensional se encuentra detallada en el apéndice F.

### ***III.6 Determinación del Paso de Tiempo***

A diferencia de la mecánica de fluidos de medios no conductores la MGD permite la existencia de varias ondas, lo cual está íntimamente relacionado con el paso de tiempo utilizado en la discretización temporal. Si bien para aplicaciones en ingeniería espacial como la propulsión por plasma, la velocidad del fluido es la cantidad más relevante, desde el enfoque numérico la onda de mayor velocidad es la que limita el paso de tiempo. Durante el desarrollo de esta Tesis se comprobó que el incremento de tiempo no debe ser constante. En los primeros instantes de tiempo las distintas ondas se encuentran muy próximas y son necesarios intervalos de tiempo muy pequeños para captarlas adecuadamente, a posteriori cuando las ondas se separan no es necesario pasos de tiempo tan pequeños y debido a que el tiempo total de simulación es relativamente grande es conveniente incrementar el intervalo y disminuir el costo computacional. Por lo que se implementó un intervalo de tiempo variable, extendiendo la forma

convencional utilizada en mecánica de fluidos de medios no conductores, ver [Chung, 2002], a la MGD de la forma:

$$\Delta t' = \frac{\text{Min}\{|\Delta x|, |\Delta y|\}_{\Omega}}{\text{Max}\{|u_x|, |u_y|, |u_z|\}_{\Omega} + \text{Max}\{|c_{fx}|, |c_{fy}|\}_{\Omega}} \quad (3.42)$$

donde  $u_x, u_y, u_z$  son las componentes del vector velocidad,  $c_{fx}, c_{fy}$  son las velocidades magneto-acústicas rápidas en el dominio  $\Omega$ .

El criterio de Courant, Friedrichs y Lewy normalmente abreviado CFL establece una condición necesaria pero no suficiente de estabilidad. Para métodos numéricos basados en diferencias finitas con tres puntos, aplicados en EDP lineales, el número CFL debe ser menor a la unidad [LeVeque, 1992]. Considerando lo anterior y la Ec. (3.42) finalmente se obtiene el intervalo de tiempo implementado en el código numérico:

$$\Delta t_h = CFL \Delta t' \quad (3.43)$$

Durante el desarrollo de esta Tesis y por cuestiones de estabilidad de la solución no se pudo alcanzar un valor unitario para el CFL y en general se trabajó con valores entre 0.5 y 0.9 según el problema a resolver.

### ***III.7 Verificación del código numérico en la solución de las ecuaciones de la MGD ideal bidimensionales y dependientes del tiempo***

Una práctica indispensable es que cuando un nuevo código es escrito se lo verifique a través de una serie de pruebas llamadas *benchmarks*, [Oberkampf and Trucano, 2002]. Los resultados producidos por el código son comparados con resultados experimentales y analíticos en los cuales la comunidad científica tiene gran confianza por ser las “soluciones exactas” de problemas de mecánica de fluidos u “observaciones exactas” de fenómenos de física de fluidos. Este capítulo presenta simulaciones usadas para validar

y ganar confianza en la capacidad del código para resolver problemas físicos descritos por el modelo MGD ideal.

En lo que respecta a la malla utilizada para discretizar la geometría se optó por una estructurada, si bien estas tienen limitaciones en cuanto a la variedad de geometrías que pueden modelar son computacionalmente menos costosas y más simples de implementar. Además, las no estructuradas presentan dificultades a la hora de usar los esquemas de alta resolución. De todos modos las mallas no estructuradas también son utilizadas para resolver las ecuaciones de la MGD, [Tanaka, 1994].

En las mallas de volúmenes finitos las variables conservativas (3.7) pueden ser calculadas en los vértices de las celdas o en los centros de las mismas. En el código desarrollado se utilizó un esquema centrado en las celdas debido a que este es compatible con los flujos especificados con anterioridad.

En esta sección se presentan los resultados obtenidos para el problema de Riemann propuesto por [Brio and Wu, 1988]. El problema de Riemann gas dinámico también fue utilizado como *benchmark* pero los resultados son presentados en el apéndice E. El problema de Brio y Wu es un importante caso testigo, ampliamente usado por la comunidad científica – [Keppens, 2003], [Powell, 1995], [Sankaran, 2001], [Serna, 2009], [Tóth, 2000], [Udrea, 1999], entre otras –, con el objetivo de evaluar el comportamiento de técnicas numéricas y códigos computacionales dentro de la magnetogasdinámica. Brio y Wu estudiaron la extensión a la MGD del problema de Riemann clásico considerado en dinámica de los gases (tubo de choque). En el caso de la magnetogasdinámica este *benchmark* se denomina problema de Riemann coplanar debido a que únicamente existen dos componentes no nulas de los vectores velocidad y campo magnético respectivamente.

El método de verificación del código numérico siempre consiste en utilizar una solución numérica unidimensional de alta calidad (debido a la ausencia de solución analítica), que como se explicó en la sección II.9 no tiene problemas asociados a la  $\nabla \cdot \mathbf{B}$ , para comparar con la solución numérica obtenida por el código bidimensional. Es por esta razón que en la Tesis se generaron gráficos en donde aparece una comparación cuantitativa entre los resultados 2D obtenidos y la solución de referencia 1D provista por [Brio and Wu, 1988].

El problema de Riemann analizado en esta sección se diferencia del problema de Riemann de la dinámica de gases, analizado en el apéndice E, en que el campo magnético no es idénticamente nulo. Éste no sólo posee un salto inicial en densidad y presión sino que posee una discontinuidad inicial en la componente  $y$  del campo magnético, mientras que su componente  $x$  asume un valor constante distinto de cero.

El problema de Riemann es unidimensional si se considera una dirección de referencia coincidente con la dirección de propagación. En una situación general la discontinuidad, que separa a los estados constantes, puede ubicarse de forma tal que la misma no sea paralela a ninguno de los lados de las celdas. Debido a que la dirección de propagación es perpendicular a la discontinuidad, esta dirección tampoco coincidirá con la orientación de las celdas. Por lo tanto el esquema numérico, aun habiendo una dirección de propagación predeterminada, debe resolver un problema 2D.

Entonces, para lograr el objetivo de validar el funcionamiento del código computacional bidimensional desarrollado, la discontinuidad debe ser rotada. Debido a que la malla utilizada es regular la velocidad del flujo no es colineal con las direcciones normales a las caras de las celdas de volúmenes finitos, obligando al código a resolver un problema de características netamente bidimensionales. La geometría anteriormente descrita se encuentra esquematizada en la Figura 3-3.

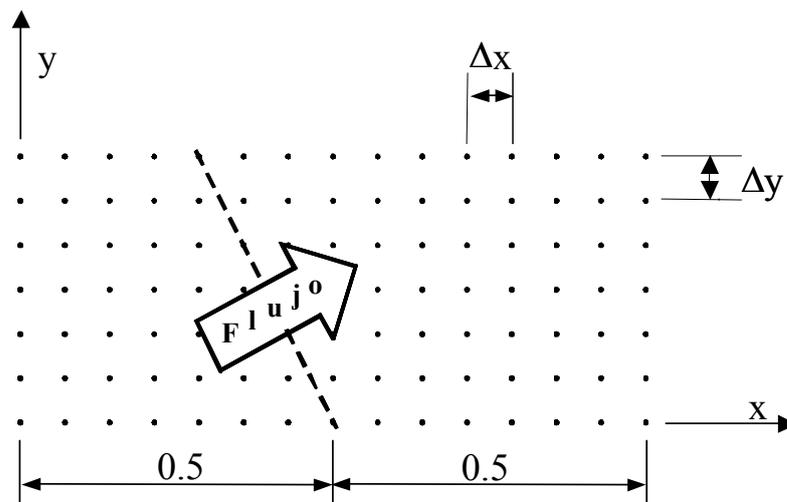


Figura 3-3: Esquema conceptual del problema bidimensional.

En las simulaciones realizadas el ángulo que forma la discontinuidad con la dirección vertical es de  $18,4^\circ$ . Este procedimiento de verificación de un código bidimensional fue observado en múltiples publicaciones consultadas, entre ellas [Powell, 1995], [Shumlak and Udrea, 2001], [Sankaran, 2001], [Serna, 2009], [Tóth, 2000].

Respecto a los parámetros de simulación utilizados, en la discretización espacial se implemento una malla con 1000 nodos, entendiéndose por nodos a los centros de las celdas, en la dirección horizontal y 350 nodos en la dirección vertical con:

$$\Delta x = 0.001 \quad \Delta y = 0.001 \quad (3.44)$$

Es importante comentar que el intervalo a lo largo de la dirección  $y$  no es necesario que sea igual al correspondiente según la dirección  $x$ , el código puede trabajar con celdas rectangulares si las características del problema lo requiriesen. La aproximación temporal utilizada fue:

$$CFL = 0.4 \quad (3.45)$$

$$\Delta t \sim O(10^{-5} - 10^{-3}) [s]$$

Los resultados mostrados en esta sección se obtuvieron considerando como condiciones iniciales las dadas por [Brio and Wu, 1988]:

$$W_{\sim} = \begin{pmatrix} \rho \\ u_x \\ u_y \\ u_z \\ B_x \\ B_y \\ B_z \\ p \end{pmatrix} \quad W_{\sim i} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.75 \\ 1.0 \\ 0.0 \\ 1.0 \end{pmatrix} \quad W_{\sim d} = \begin{pmatrix} 0.125 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.75 \\ -1.0 \\ 0.0 \\ 0.1 \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

Al simular el caso bidimensional del problema de Riemann los resultados obtenidos son posteriormente rotados (para poder ser comparados con la solución 1D verificada previamente [Elaskar *et al.*, 2000], [Elaskar and Brito, 2001]) quedando expresados en una base ortonormal dextrógira donde uno de los versores coincide con la dirección normal a la discontinuidad, otro es perpendicular al plano formado por la malla, denotado en las figuras como transversal 2, y el tercero es ortonormal a los dos anteriores, denotado como transversal 1.

Cabe aclarar que las condiciones iniciales dadas por (3.46) al simular el caso bidimensional deben ser expresadas en la base anteriormente mencionada.

Resultados obtenidos con 500 pasos de tiempo lo que equivale a  $t \cong 0.03024$  [s] se muestran en las Figuras 3-4/16.

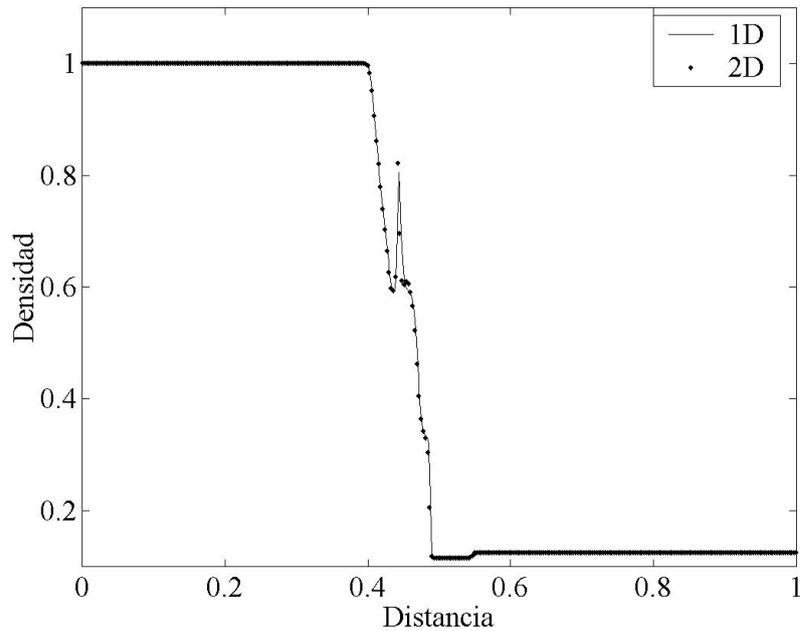


Figura 3-4: Variación de la densidad en la dirección del flujo. MGD500.

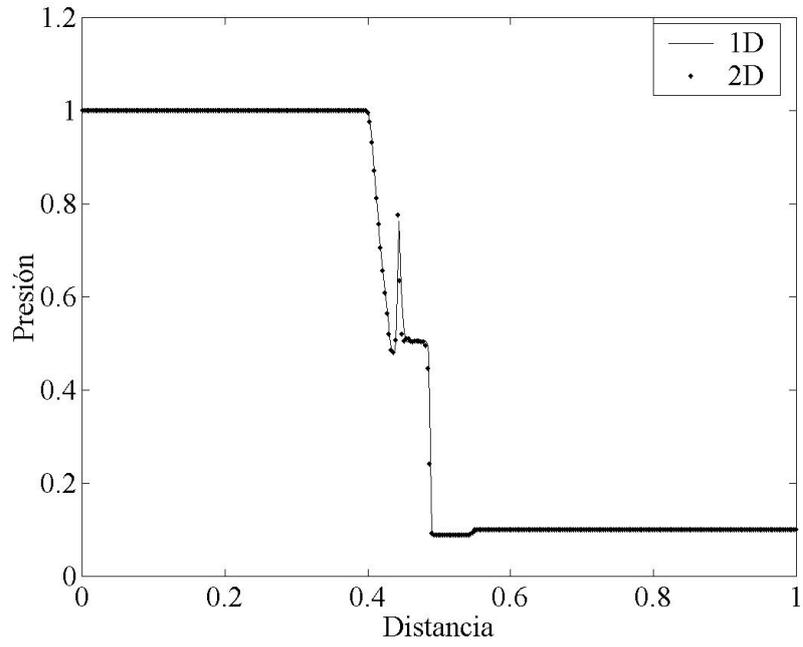


Figura 3-5: Variación de la presión en la dirección del flujo. MGD500.

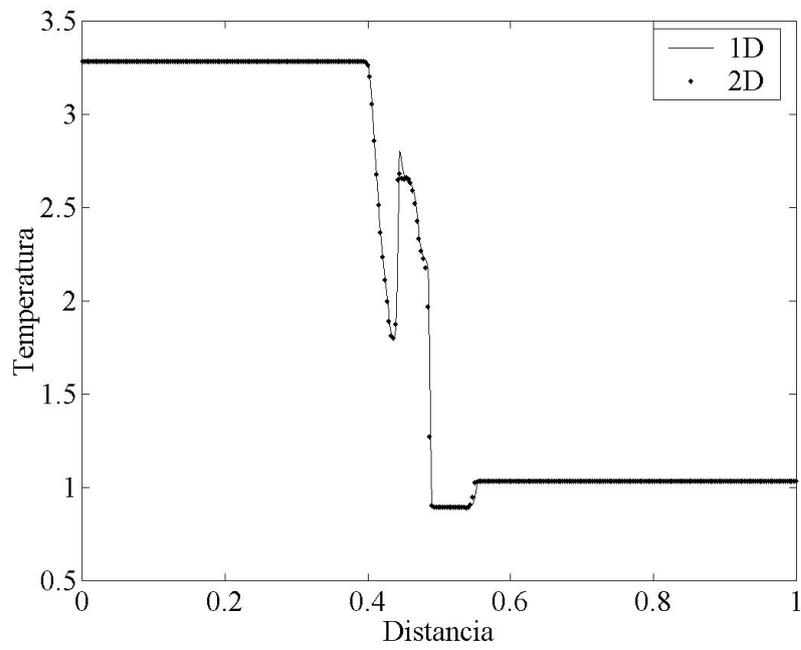


Figura 3-6: Variación de la temperatura en la dirección del flujo. MGD500.

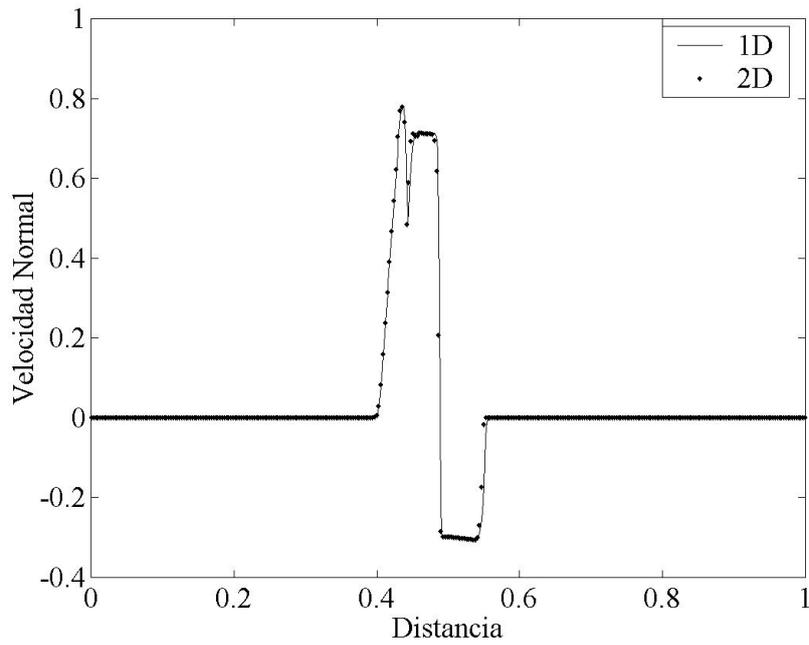


Figura 3-7: Variación de la componente de la velocidad en la dirección del flujo. MGD500.

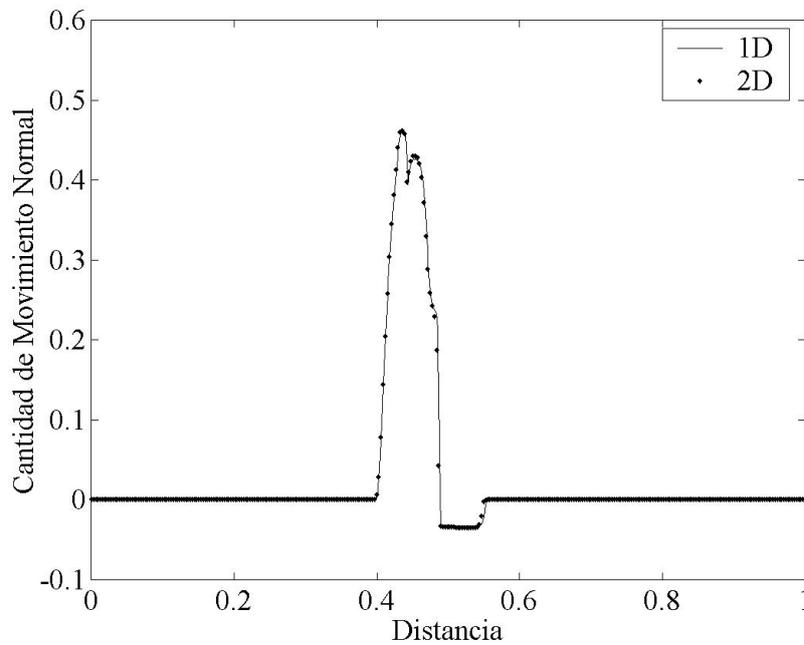


Figura 3-8: Variación de la componente de la cantidad de movimiento en la dirección del flujo. MGD500.

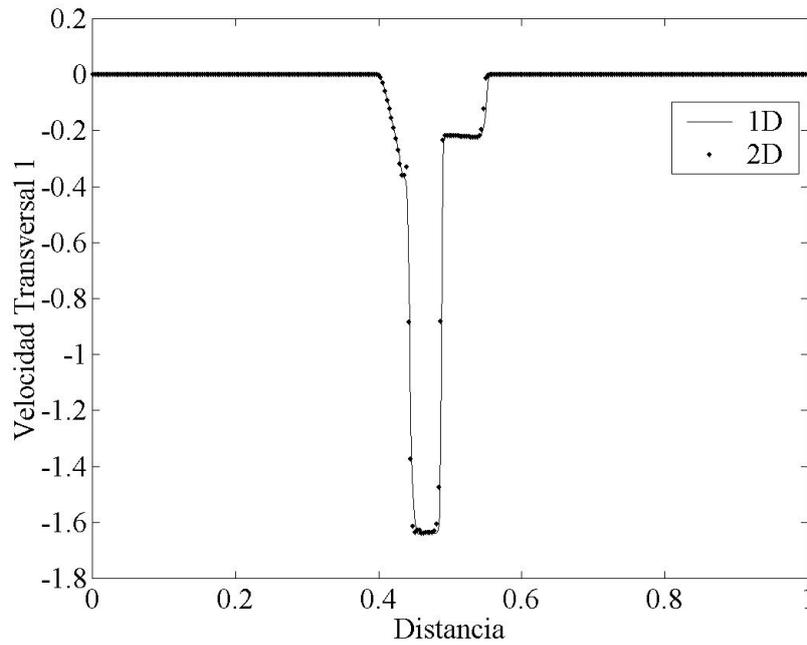


Figura 3-9: Variación de la componente de la velocidad en la dirección transversal al flujo 1. MGD500.

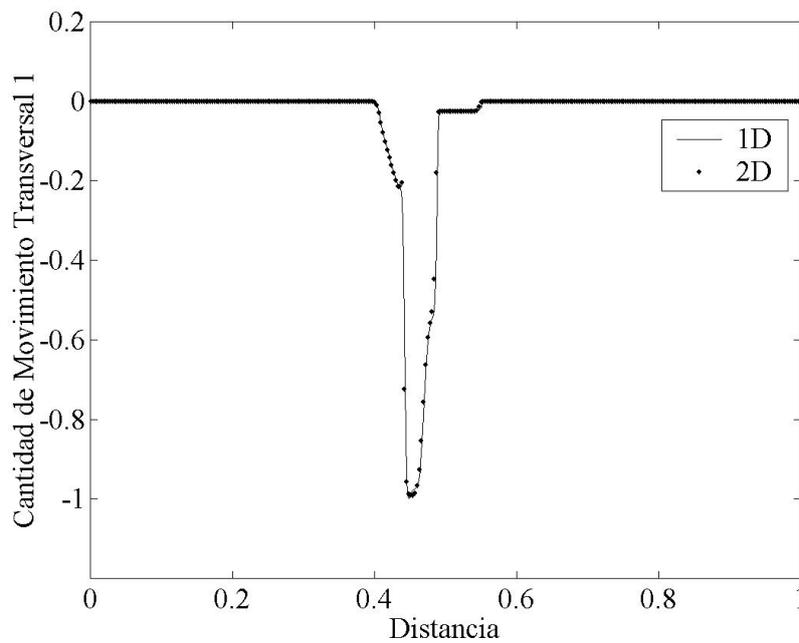


Figura 3-10: Variación de la componente de la cantidad de movimiento en la dirección transversal al flujo 1. MGD500.

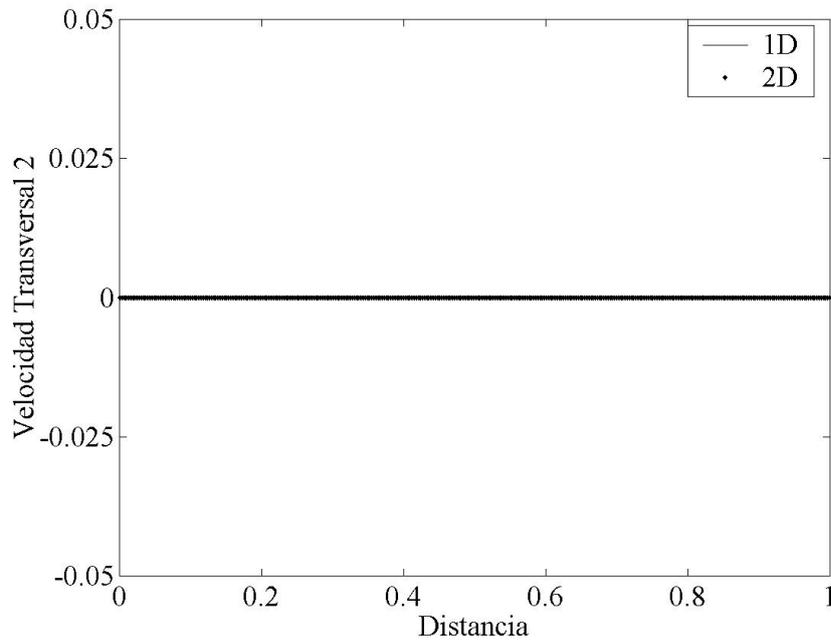


Figura 3-11: Variación de la componente de la velocidad en la dirección transversal al flujo 2. MGD500.

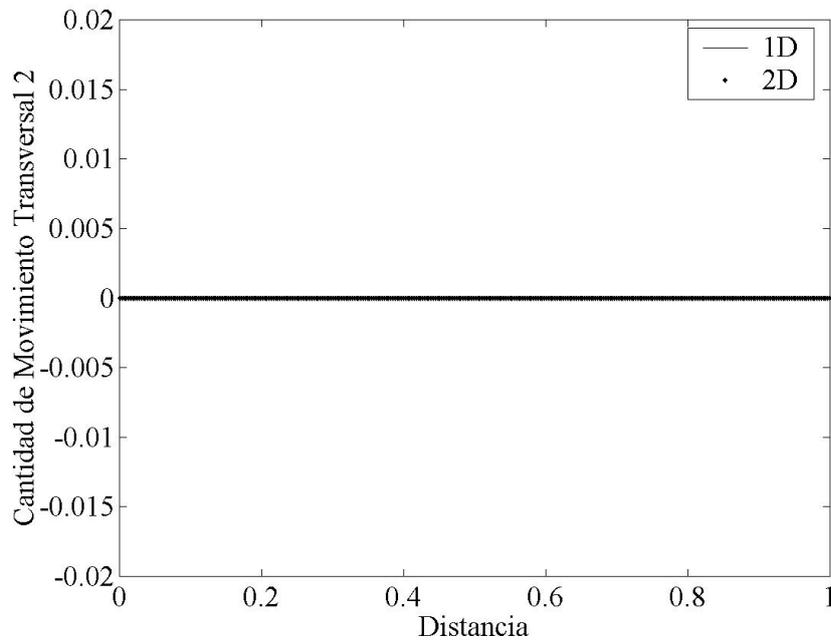


Figura 3-12: Variación de la componente de la cantidad de movimiento en la dirección transversal al flujo 2. MGD500.

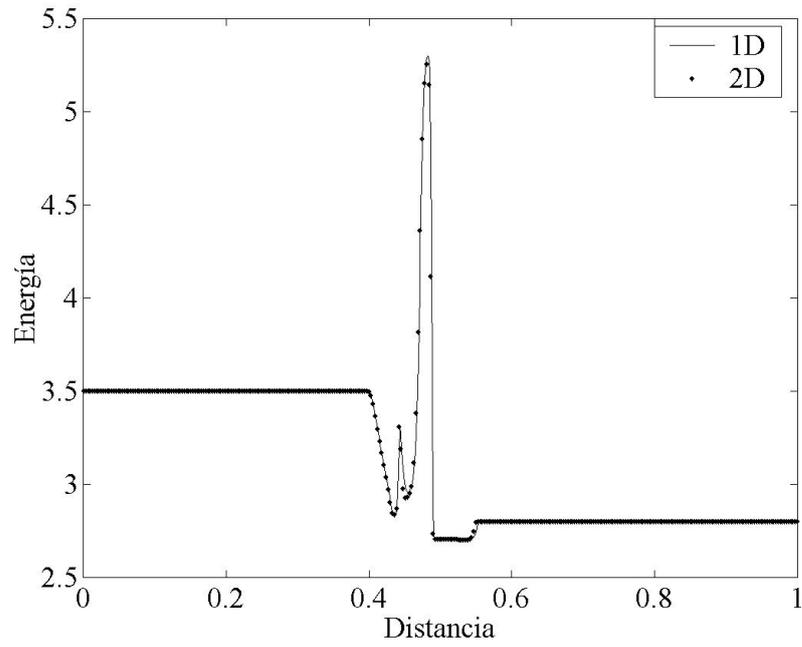


Figura 3-13: Variación de la energía total en la dirección del flujo. MGD500.

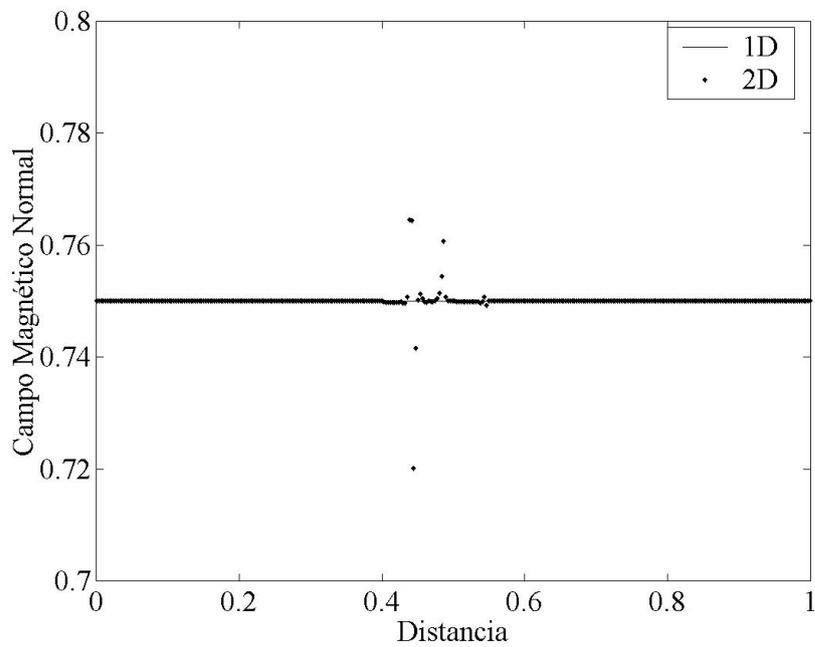


Figura 3-14: Variación de la componente del campo magnético en la dirección del flujo. MGD500.

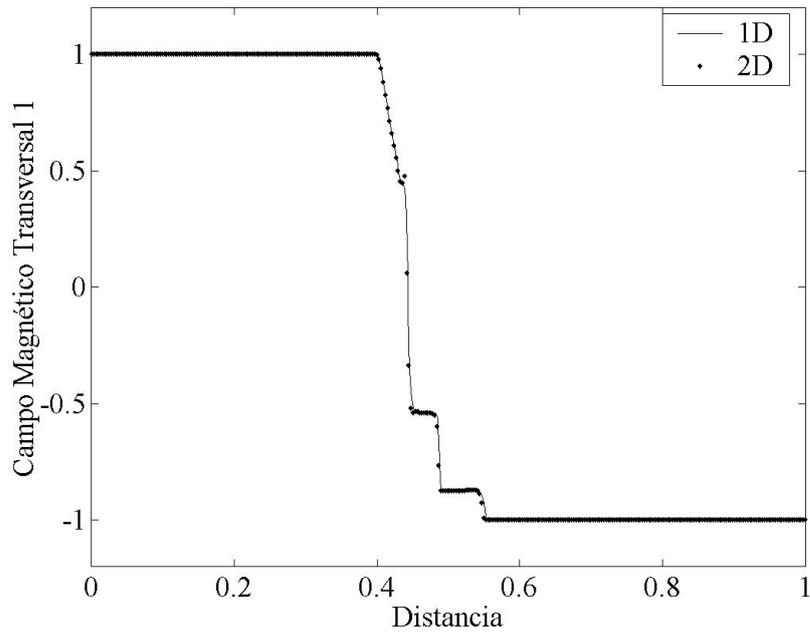


Figura 3-15: Variación de la componente del campo magnético en la dirección transversal al flujo 1. MGD500.

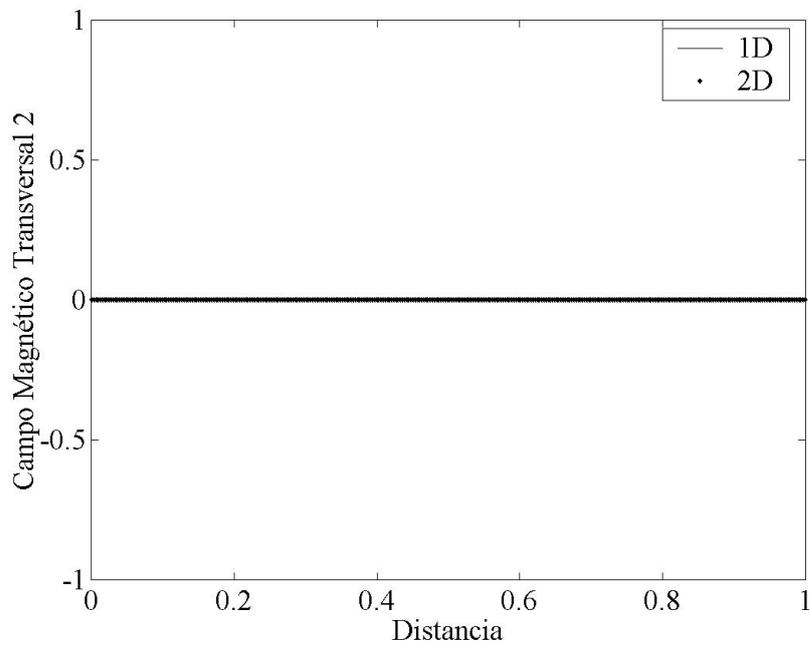


Figura 3-16: Variación de la componente del campo magnético en la dirección transversal al flujo 2. MGD500.

En las figuras anteriores se puede observar como el código captó correctamente en los primeros instantes las ocho ondas que intervienen en el fenómeno físico. Sólo pequeñas perturbaciones aparecen en el campo magnético normal, tales son inferiores al 4%.

Se presentan a posteriori en las Figuras 3-17/29 los resultados logrados con 1000 pasos de tiempo  $t \cong 0.07643$  [s] a los fines de mostrar el adecuado desempeño del código después que las ondas son capturadas y su posterior evolución en el tiempo. Es intención del autor mostrar resultados luego de los primeros instantes de tiempo porque en general en las publicaciones consultadas tales resultados no se observan. Para tener un cogido computacional que logre captar correctamente la solución en los primeros instantes y en los posteriores se requiere, aparte del conocimiento físico del fenómeno, una correcta calibración del software.

Si se analiza la Figura 3-7, correspondiente a la velocidad normal, se puede concluir que, al contrario del problema de tubo de choque de la dinámica de gases, el problema de Riemann de la magnetogasdinámica no es un problema físico (obsérvese el cambio de sentido de la velocidad). El problema introducido por Brio y Wu se extiende al infinito por lo tanto se podría decir que “no tiene bordes”. En un tubo de choque real lleno con un plasma magnetizado el campo magnético tiene que cumplir ciertas condiciones en las paredes del tubo, es decir deben satisfacerse las ecuaciones de Maxwell en los bordes del dominio. Esas condiciones de frontera influyen fuertemente en la evolución del campo magnético y modifican la naturaleza de las ondas presentes en el plasma. Además inicialmente el campo magnético es discontinuo no satisfaciendo las Ecs. de Maxwell. Como lo menciona Zachary no debe sorprender entonces que la solución numérica aparezca entonces como no física [Zachary *et al.*, 1994].

Mientras que el problema de Riemann de la dinámica de gases 1D tiene solución analítica en el problema de Riemann de la MGD unidimensional tal solución no ha sido observada, Sankaran comenta la existencia de la misma pero no hace ninguna referencia al respecto [Sankaran, 2001].

Analizando los resultados mostrados en las Figuras 3-17, 18, 19 y 20 se puede concluir que en la Figura 3-17, correspondiente a la densidad, se distinguen de izquierda a derecha, primero la onda de expansión que viaja hacia la izquierda, una onda compuesta, una discontinuidad de contacto, una onda de choque lenta y una onda de

expansión que viaja hacia la derecha. Nótese que sólo aparecen cinco ondas y no ocho esto se debe a que en el problema de Riemann coplanar se elimina la componente  $z$  (transversal 2) de los vectores velocidad y campo magnético reduciéndose el sistema de EDP a uno de seis ondas. Además se debe recordar que siguiendo la técnica de Powell dos se colapsan quedando sólo cinco ondas distintas.

Una pequeña perturbación menor al 1% aparece en el valle de la velocidad normal, Figura 3-20. Al igual que en paso de tiempo anterior pequeños errores pueden apreciarse en el campo magnético normal, Figura 3-27. Estos siguen siendo menores al 4% pero con la diferencia de que perturbaciones se han propagado más hacia los bordes y existe una mayor cantidad de ellas. Los errores que se observan en el campo magnético normal pueden disminuir considerablemente si en la componente correspondiente del flujo numérico se trabaja sólo con los flujos físicos y se anula la contribución proporcionada por las funciones limitadoras, pero como el código fue desarrollado para propósitos generales, el autor prefirió mostrar los errores que se presentan en este problema en particular.

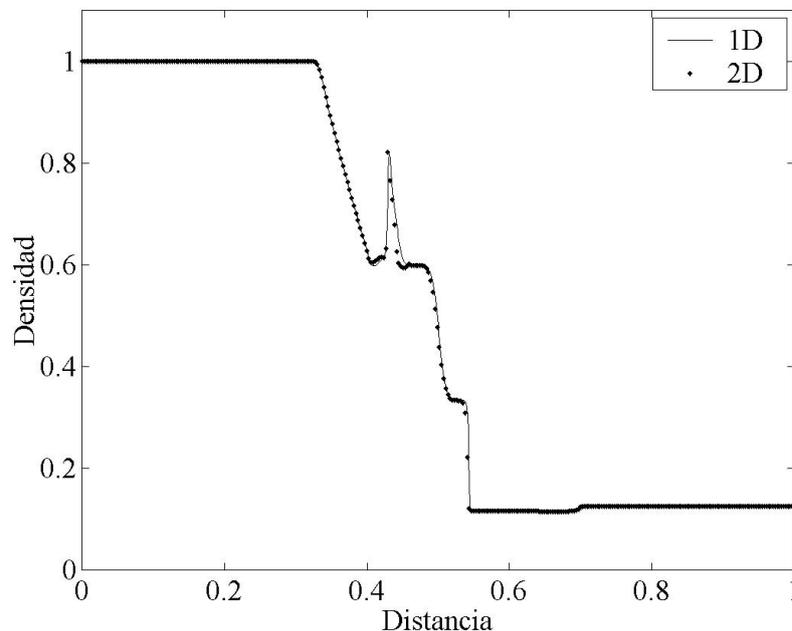


Figura 3-17: Variación de la densidad en la dirección del flujo. MGD1000.

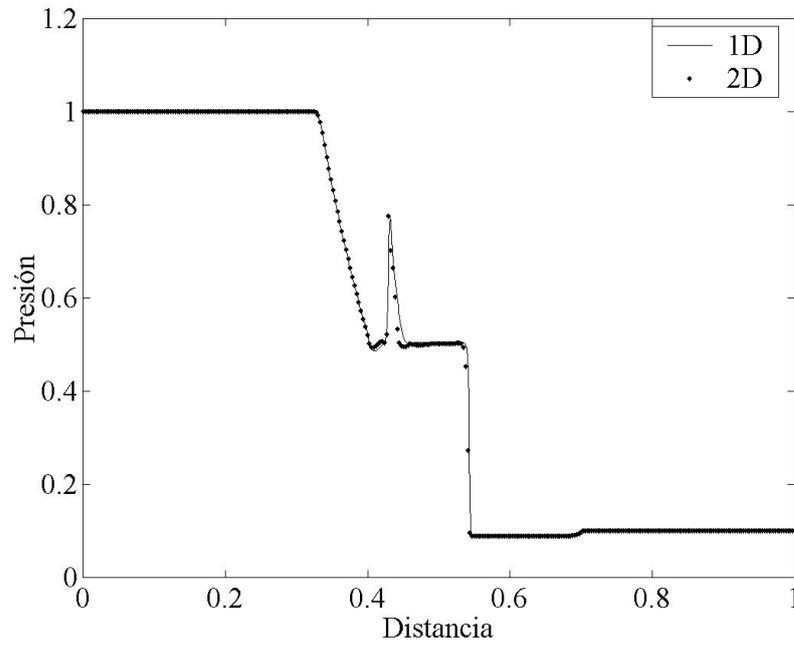


Figura 3-18: Variación de la presión en la dirección del flujo. MGD1000.

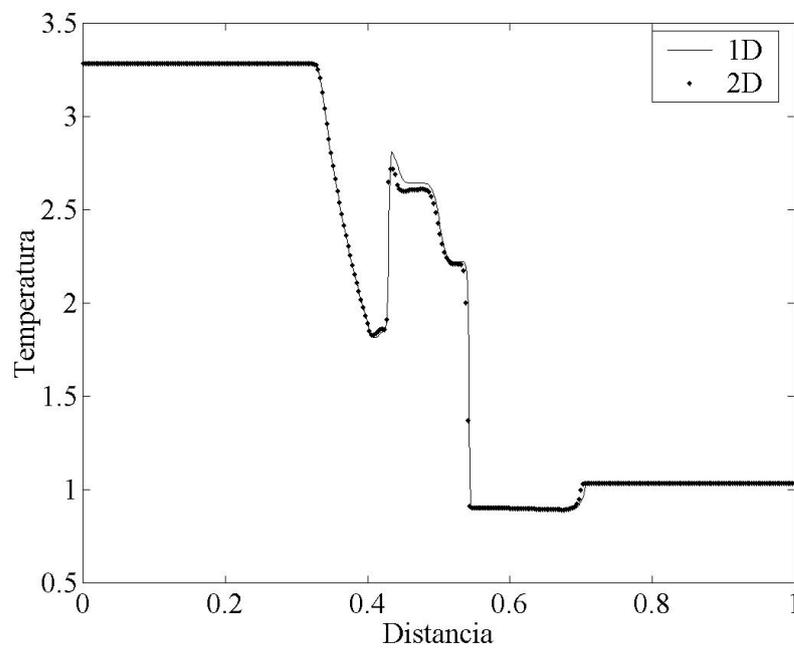


Figura 3-19: Variación de la temperatura en la dirección del flujo. MGD1000.

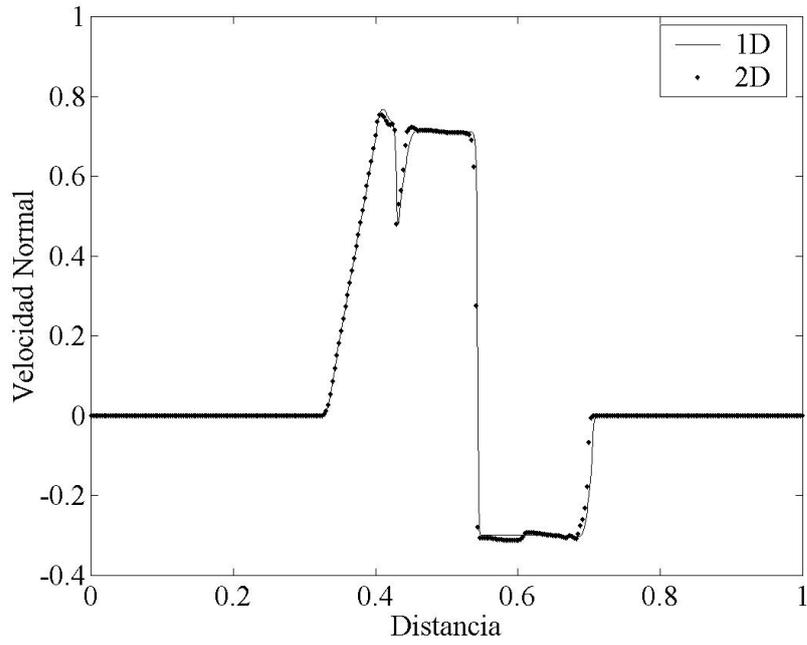


Figura 3-20: Variación de la componente de la velocidad en la dirección del flujo. MGD1000.

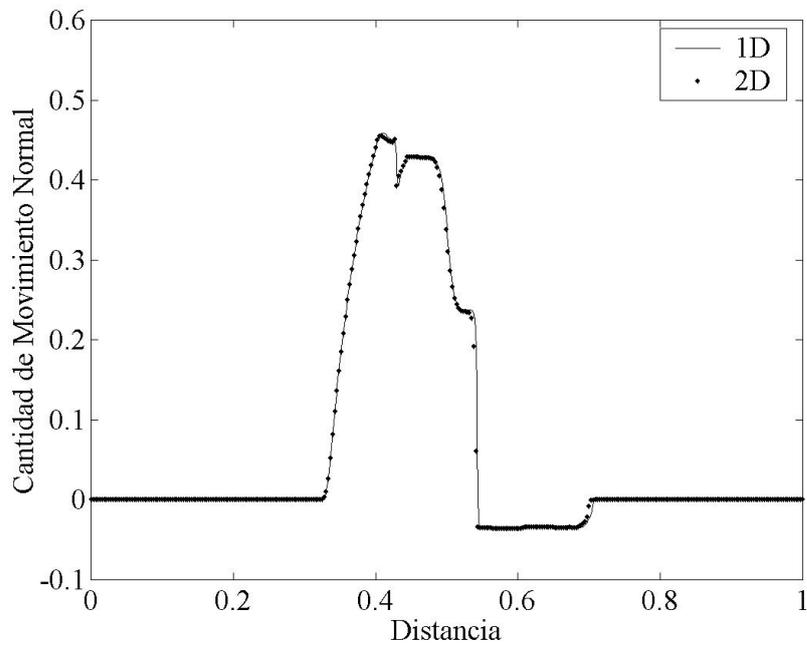


Figura 3-21: Variación de la componente de la cantidad de movimiento en la dirección del flujo. MGD1000.

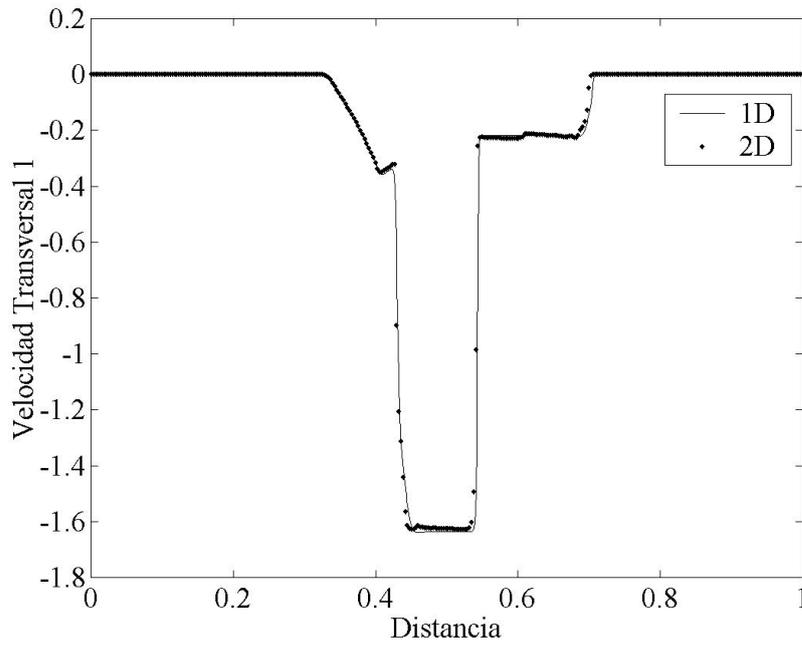


Figura 3-22: Variación de la componente de la velocidad en la dirección transversal al flujo 1. MGD1000.

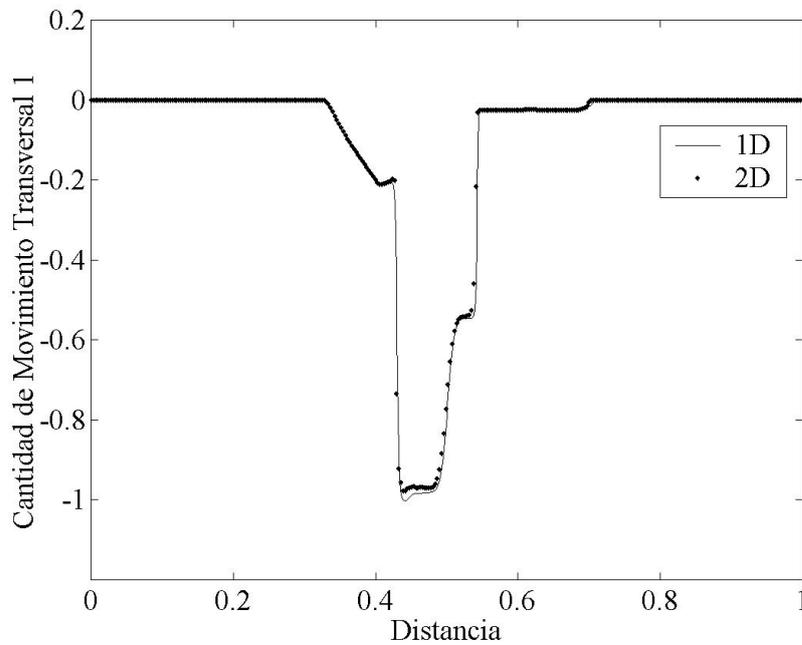


Figura 3-23: Variación de la componente de la cantidad de movimiento en la dirección transversal al flujo 1. MGD1000.

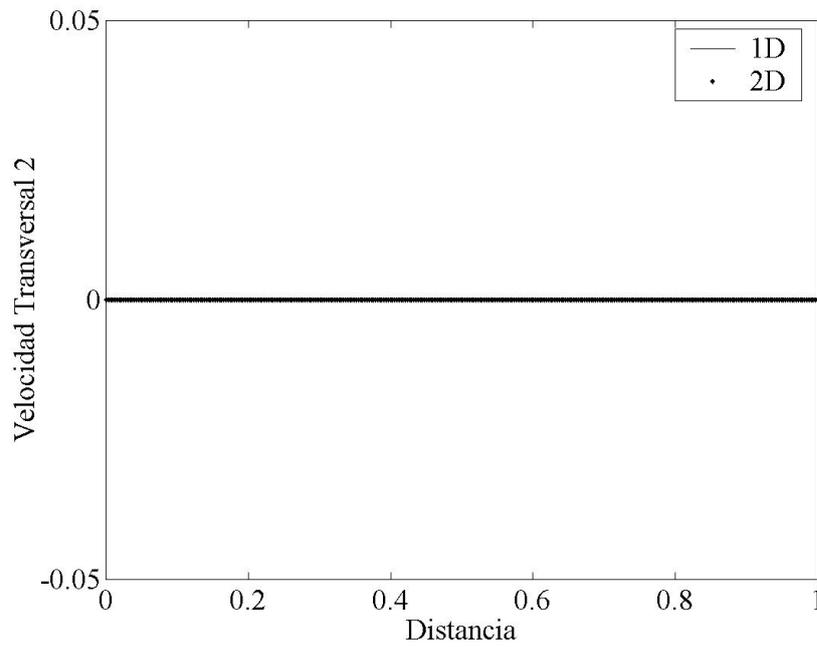


Figura 3-24: Variación de la componente de la velocidad en la dirección transversal al flujo 2. MGD1000.

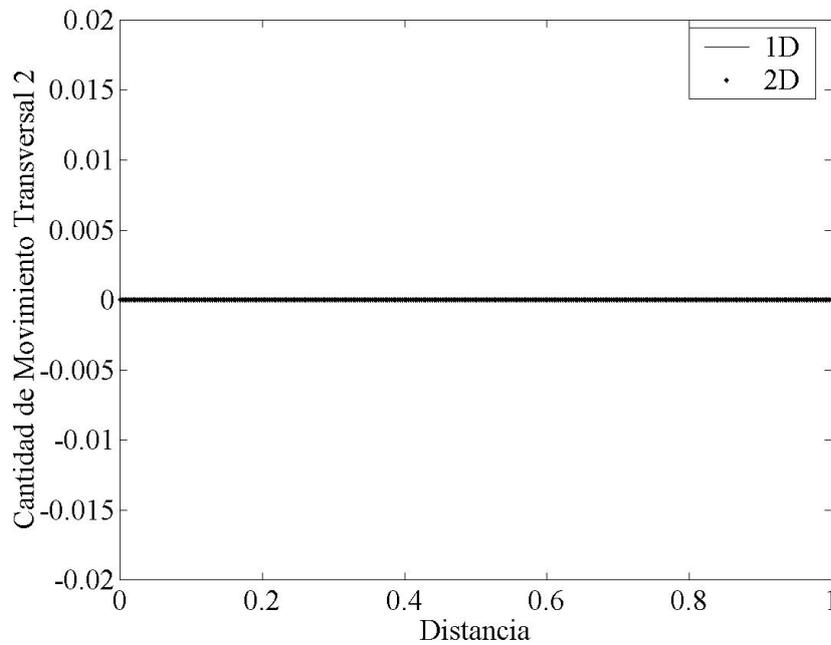


Figura 3-25: Variación de la componente de la cantidad de movimiento en la dirección transversal al flujo 2. MGD1000.

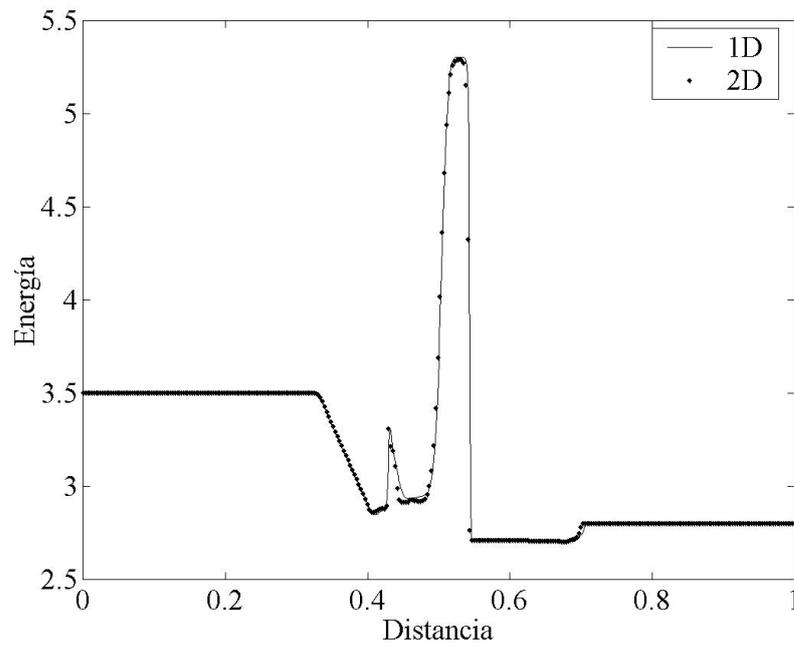


Figura 3-26: Variación de la energía total en la dirección del flujo. MGD1000.

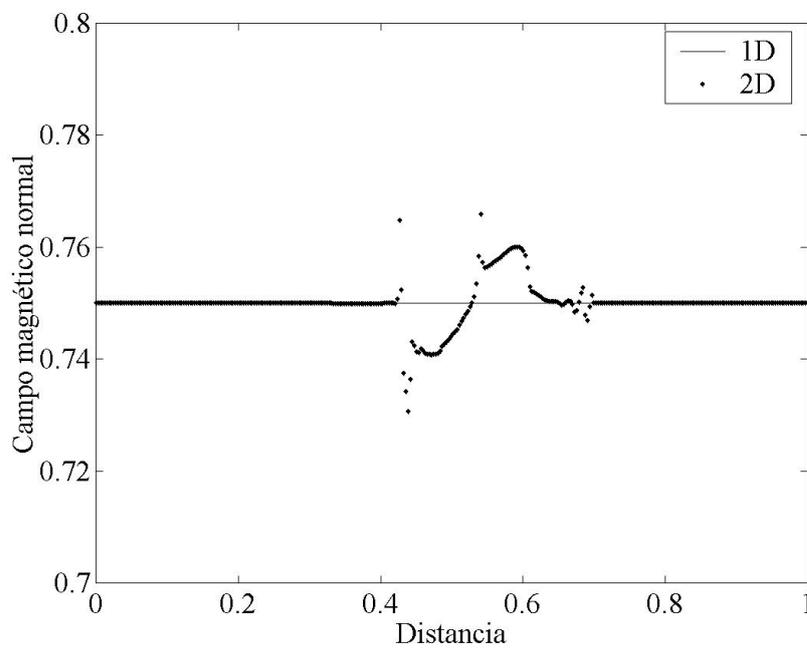


Figura 3-27: Variación de la componente del campo magnético en la dirección del flujo. MGD1000.

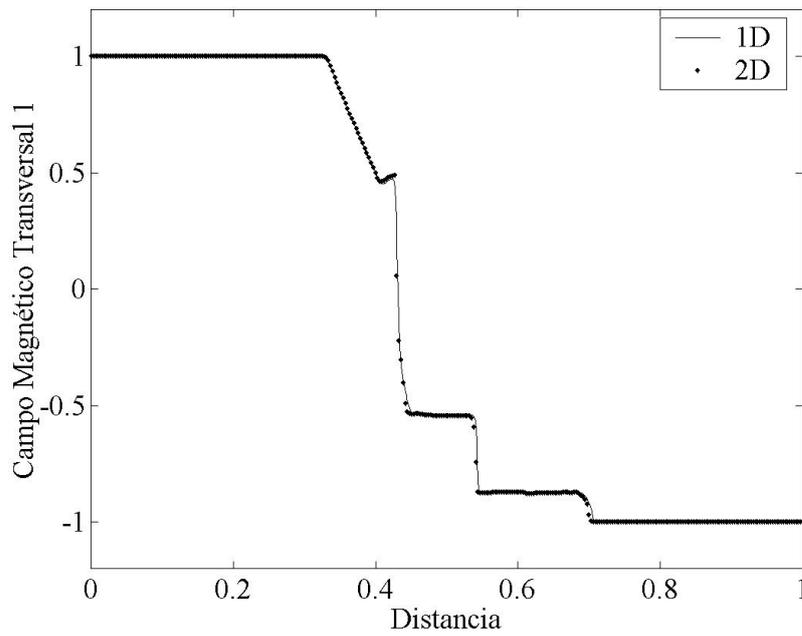


Figura 3-28: Variación de la componente del campo magnético en la dirección transversal al flujo 1. MGD1000.

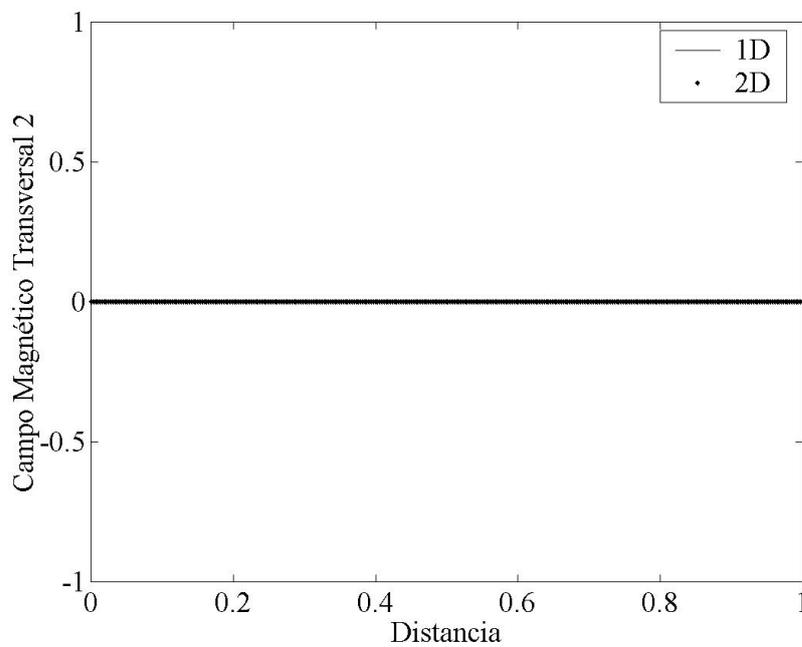


Figura 3-29: Variación de la componente del campo magnético en la dirección transversal al flujo 2. MGD1000.

La Figura 3-30 muestra la variación de la densidad para distintos pasos de tiempo con el objeto de observar como las ondas evolucionan en el tiempo.

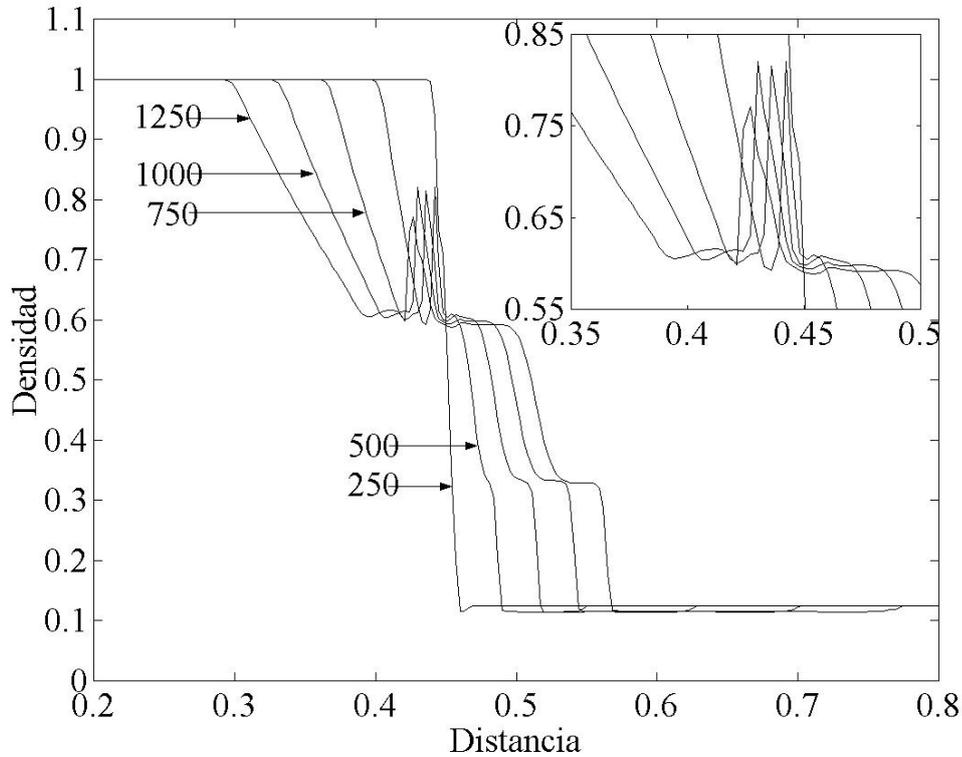


Figura 3-30: Variación de la densidad en el tiempo.

El código computacional, denominado “MG2D”, está escrito en FORTRAN. Se observó que el mayor costo computacional se encuentra en el cálculo de los flujos numéricos.

Finalmente podemos decir que el código numérico resolvió correctamente este ampliamente utilizado *benchmark* [Maglione *et al.*, 2002], [Maglione *et al.*, 2003], [Martinez *et al.*, 2011]. Los resultados presentados en esta sección son concordantes con los observados en [Brio and Wu, 1988], [Sankaran, 2001], [Serna, 2009], [Udrea, 1999].

## **Capítulo IV**

# **Solución de las Ecuaciones de la Magnetogasdínámica Real Bidimensional y Dependiente del Tiempo**

En este capítulo se presenta la metodología empleada para resolver las ecuaciones de la magnetogasdínámica real bidimensional y dependiente del tiempo de un fluido simple. El esquema numérico presentado en el Cap. III es extendido para la solución de la parte real o parabólica. Para la verificación del correcto comportamiento del código computacional se utilizaron como *benchmarks* el tubo de choque MGD real y el problema de Hartmann.

## IV.1 Introducción

Consideremos nuevamente la forma conservativa de un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDP)

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{f}_h(\underline{U}) = \nabla \cdot \underline{f}_p(\underline{U}, \nabla \underline{U}) \quad (4.1)$$

y en particular el correspondiente a la magnetogasdínámica adimensional Ec. (2.35)

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \underline{u} \\ \underline{B} \\ e \end{bmatrix} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} \rho \underline{u} \\ \rho \underline{u} \underline{u} - \underline{B} \underline{B} + I \left( p + \frac{1}{2} B^2 \right) \\ \underline{u} \underline{B} - \underline{B} \underline{u} \\ \left( e + p + \frac{1}{2} B^2 \right) \underline{u} - (\underline{B} \cdot \underline{u}) \underline{B} \end{bmatrix} = \quad (4.2)$$

$$\nabla \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\underline{\tau}}{R_e A_l} \\ \frac{\underline{E}_r}{L_u A_l} \\ \frac{\underline{u} \cdot \underline{\tau}}{R_e A_l} - \frac{[\underline{\eta} \cdot (\nabla \times \underline{B})] \times \underline{B}}{L_u A_l} + \frac{\underline{k} \cdot \nabla T}{P_e A_l} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\tau} = \mu \left[ \nabla \underline{u} + (\nabla \underline{u})^T - \frac{2}{3} I (\nabla \cdot \underline{u}) \right] \quad (4.3)$$

$$\nabla \cdot \underline{E}_r = -\nabla \times [\underline{\eta} \cdot (\nabla \times \underline{B})] \quad (4.4)$$

El sistema de ecuaciones anterior se completa con una ecuación de estado adimensional. El proceso para adimensionalizar las ecuaciones de la MGD se encuentra detallado en el apéndice A. Los números adimensionales característicos utilizados en la Ec. (4.2) son:

$$\text{Reynolds} \quad R_e = \rho_{ref} \frac{aU}{\mu_{ref}} \quad (4.5)$$

$$\text{Alfvén} \quad A_l = \frac{c_a}{U} \quad (4.6)$$

$$\text{Lundquist} \quad L_u = \frac{\mu_o a U}{\eta_{ref}} \quad (4.7)$$

$$\text{Peclet} \quad P_e = \frac{aU}{\alpha_{ref}} \quad (4.8)$$

en los cuales el sufijo “*ref*” indica valores de referencia,  $U$  es una velocidad de referencia del flujo,  $a$  una longitud de referencia,  $\alpha$  el coeficiente de difusividad térmica,  $\eta$  la resistividad y  $c_a$  la velocidad de Alfvén. El número de Lundquist Ec. (4.7) describe como el campo magnético es influenciado por el flujo y recíprocamente como el flujo se ve modificado por el campo magnético, a menudo en publicaciones científicas es denominado también Reynolds Magnético, para  $L_u \ll 1$  el campo magnético no tiene una notable influencia en el movimiento del flujo. Se destaca que algunos autores consideran el número de Lundquist cuando se reemplaza en la Ec. (4.7) la velocidad del flujo por la velocidad de Alfvén [Goldston and Rutherford, 2003].

En el caso de la MGD, Ec. (4.2), cada término parabólico actúa sobre un conjunto de las variables conservativas y es función de diferentes variables. El término viscoso influye en la conservación de la cantidad de movimiento y de la energía total. Los términos resistivos afectan al campo magnético y a la energía total. El término asociado a la transferencia de calor influye solamente en la energía total.

Es de destacar que en la forma que están escritas las Ecs. (4.2) los términos difusivos y resistivos son introducidos como flujos parabólicos. Al momento de verificar el comportamiento del código numérico con la incorporación de la parte real, es decir incluyendo los términos parabólicos, se decidió utilizar primero un problema en donde los términos hiperbólicos fueron los dominantes y posteriormente un problema difusivo dominante. Por esta razón se optó por utilizar primero el problema del tubo de choque MGD propuesto por [Brio and Wu, 1988] y posteriormente el problema de Hartmann [Molokov *et al.*, 2007]. Para la verificación de la primera situación se utilizó como

solución de referencia la 1D dada por [Elaskar y Brito, 2001]. Mientras que para el flujo de Hartmann se posee la solución analítica.

## IV.2 Formulación en Volúmenes Finitos

El tratamiento utilizado para los términos parabólicos es similar a los hiperbólicos, es decir una aproximación en volúmenes finitos es utilizada para el cálculo de los flujos numéricos. Por lo tanto al utilizar un procedimiento que sigue lo indicado en la Sección III.2 para el caso de las ecuaciones de la MGD ideal, la fórmula para la actualización temporal se transforma en

$$\begin{aligned}
 \tilde{U}_{ij}^{n+1} = \tilde{U}_{ij}^n - & \left[ \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \overline{F_{i+\frac{1}{2};j}^n} - \overline{F_{i-\frac{1}{2};j}^n} \right) + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left( \overline{G_{i,j+\frac{1}{2}}^n} - \overline{G_{i,j-\frac{1}{2}}^n} \right) \right]_h \\
 & + \left[ \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \overline{F_{i+\frac{1}{2};j}^n} - \overline{F_{i-\frac{1}{2};j}^n} \right) + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left( \overline{G_{i,j+\frac{1}{2}}^n} - \overline{G_{i,j-\frac{1}{2}}^n} \right) \right]_p
 \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde  $\overline{F_{i+\frac{1}{2};j}^n}$  es el vector de flujo numérico de las variables conservativas obtenido en la interfase de la celda  $(ij)$  para un tiempo  $n$  en la dirección  $x$ . El sufijo  $h$  indica un flujo asociado a la parte hiperbólica y  $p$  asociado a la parte parabólica de las EDP. Es evidente que la aproximación de los términos parabólicos debe tener una precisión de por lo menos un orden igual al utilizado en los términos hiperbólicos. Por lo tanto una aproximación en volúmenes finitos de segundo orden es suficiente, usualmente la utilización de diferencias centrales es el método corriente para la aproximación de EDP parabólicas [Udrea, 1999], [Sankaran, 2001], [Chung, 2002].

## IV.3 Determinación del Paso de Tiempo

En la Sección III.6 se determino el paso de tiempo necesario en la resolución de las ecuaciones de la MGD ideal. En esta sección se mostraran las modificaciones que deben ser implementadas a la metodología mencionada cuando se resuelven las ecuaciones de las MGD real.

Es claro que los fenómenos disipativos (términos parabólicos) introducen escalas de tiempo muy diferentes a los términos hiperbólicos, incluso en ciertos problemas las escalas de tiempo de los distintos términos parabólicos (difusión viscosa, difusión magnética, difusión térmica) puede ser bastante distinta. La determinación de los pasos de tiempo de los diferentes términos de la parte parabólica esta basado en un análisis dimensional. Partiendo, por ejemplo, de la ecuación de difusión magnética adimensional y aproximando las derivadas se obtiene:

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{1}{L_u A_l} \frac{\Delta B}{\Delta x^2} \quad (4.10)$$

El paso de tiempo asociado a la difusión magnética resulta entonces,

$$\Delta t_r = L_u A_l \Delta x^2 \quad (4.11)$$

y para el caso bidimensional,

$$\Delta t_r = L_u A_l \min \{ \Delta x^2, \Delta y^2 \} \quad (4.12)$$

Similarmente el paso de tiempo asociado a difusión viscosa resulta,

$$\Delta t_v = \min \{ \Delta x^2, \Delta y^2 \} R_e A_l \quad (4.13)$$

Cuando la relación de escalas de tiempo entre los términos hiperbólicos y parabólicos es de varios órdenes de magnitud la utilización de un esquema explícito convencional implica tiempos de procesamiento totales impracticables, debido a que requeriría evaluar los flujos convectivos (de mayor costo computacional) siempre que se evalúen los flujos disipativos. Un alternativa implementada [Sankaran, 2001], manteniendo un esquema de evolución en el tiempo explícito, es utilizar la técnica denominada *fractional time-stepping*. Esta técnica evalúa los flujos disipativos en todos los pasos de tiempo, considerando las Ecs. (4.12) y (4.13) mientras que los flujos convectivos son evaluados solo después de  $N$  pasos de tiempo en función de la relación,

$$N = \frac{\Delta t_h}{\min\{\Delta t_v, \Delta t_r\}} \quad (4.14)$$

#### ***IV.4 Verificación del código numérico en la solución de las ecuaciones de la MGD real bidimensionales y dependientes del tiempo***

##### ***IV.4.a. Tubo de choque MGD Real***

En esta sección se presentan simulaciones usadas para verificar y ganar confianza en la capacidad del código para resolver problemas físicos descritos por el modelo MGD real de un fluido simple [Oberkampf and Trucano, 2002]. Se presentan los resultados obtenidos para el problema de Riemann propuesto por [Brio and Wu, 1988], pero considerando los efectos disipativos. Se utilizó la misma geometría y malla descrita en la Sección III.7. Las condiciones iniciales dadas por [Brio and Wu, 1988] son:

$$\tilde{W} = \begin{pmatrix} \rho \\ u_x \\ u_y \\ u_z \\ B_x \\ B_y \\ B_z \\ p \end{pmatrix} \quad \tilde{W}_i = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.75 \\ 1.0 \\ 0.0 \\ 1.0 \end{pmatrix} \quad \tilde{W}_d = \begin{pmatrix} 0.125 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.75 \\ -1.0 \\ 0.0 \\ 0.1 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Al simular este problema de Riemann bidimensional los resultados se encuentran expresados en una base ortonormal dextrógira donde uno de los versores coincide con la dirección normal a la discontinuidad, otro es perpendicular al plano formado por la malla, denotado en las figuras como transversal 2, y el tercero es ortonormal a los dos anteriores, denotado como transversal 1. Cabe aclarar que las condiciones iniciales dadas por (4.15) deben ser expresadas en la base anteriormente mencionada. El CFL utilizado fue 0.4 y con la finalidad de analizar el comportamiento del código real se asignaron valores unitarios a los parámetros disipativos. Resultados obtenidos con 1000 pasos tiempo se muestran en las Figuras 4-1, 4-2 y 4-3.

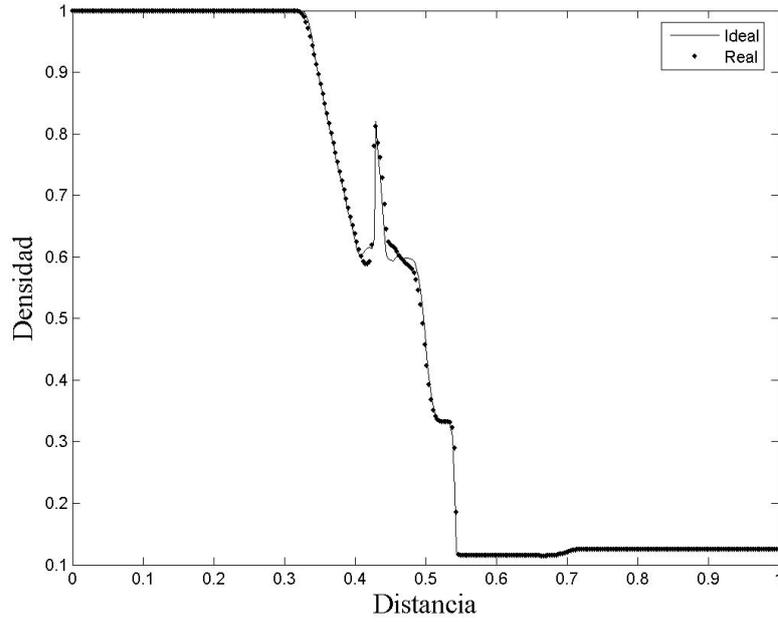


Figura 4-1: Variación de la densidad en la dirección del flujo. MGD real 1000.

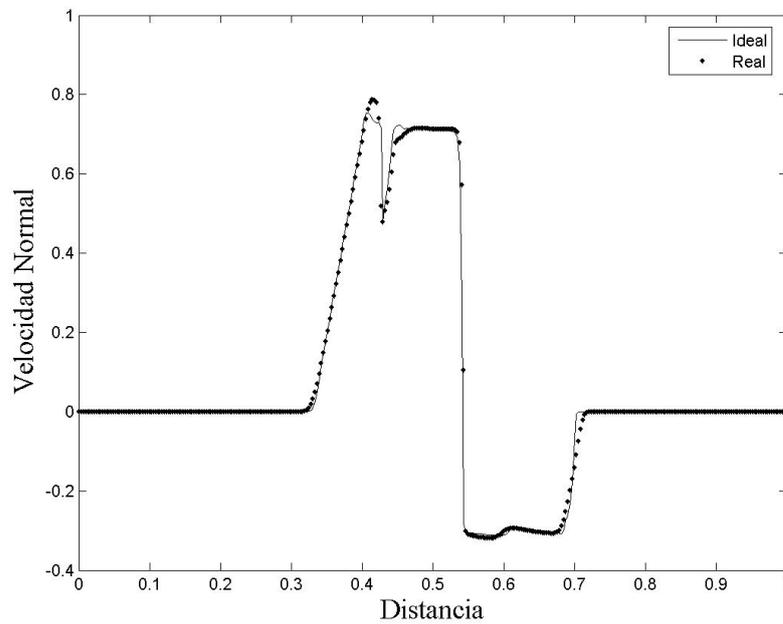


Figura 4-2: Variación de la componente de la velocidad en la dirección del flujo. MGD real.

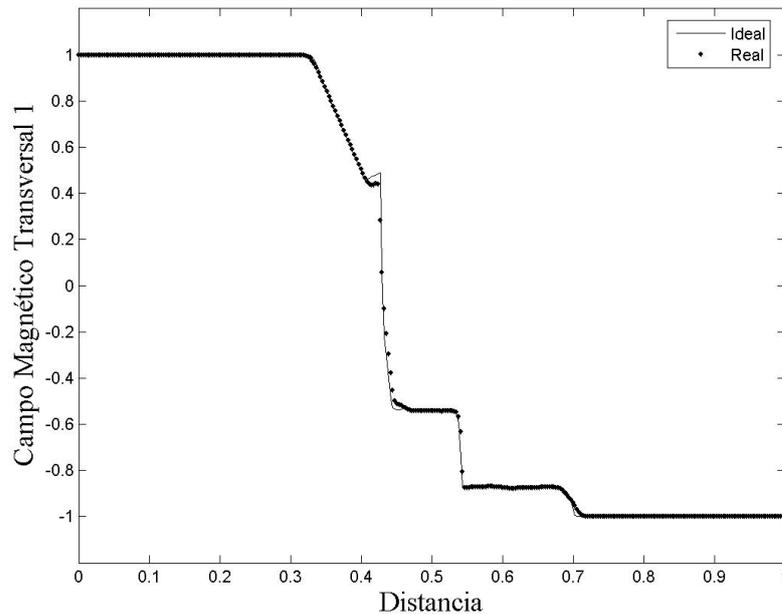


Figura 4-3: Variación de la componente del campo magnético transversal a la dirección del flujo. MGD real.

Se destaca que la incorporación de los términos difusivos no modifica la naturaleza de la solución, la cual está dada por los términos hiperbólicos, sino que producen pequeñas y localizadas modificaciones suavizando las discontinuidades, [Maglione *et al.*, 2006].

#### ***IV.4.b. Flujo de Hartmann***

En esta sección se presentan los resultados obtenidos al simular un problema difusivo dominante con predominio de la parte parabólica tal como es el problema de Hartmann [Molokov *et al.*, 2007].

Este tipo de flujo a densidad constante es una extensión del flujo de Couette para fluidos eléctricamente conductores. En este problema el flujo es laminar y se desarrolla entre dos placas paralelas virtualmente infinitas moviéndose, para nuestro caso, con velocidades de igual magnitud y sentido contrario. El campo aplicado es normal a las placas y de valor constante. Además se supone que el gradiente de presión es nulo.

Un esquema del problema del flujo de Hartmann puede ser observado en la Figura 4-4.

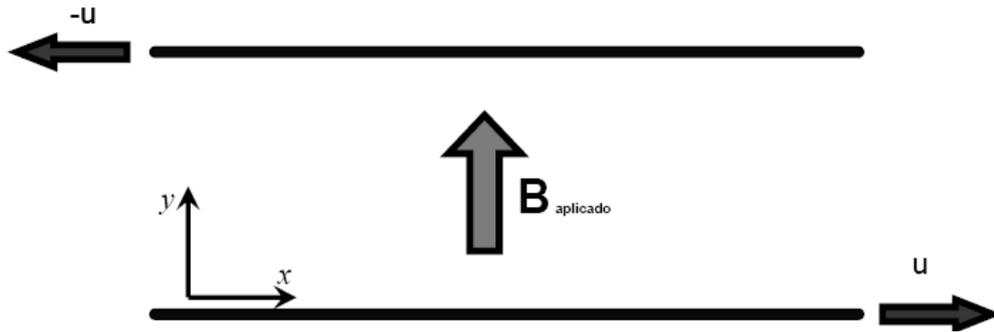


Figura 4-4: Esquema del problema de Hartmann

El sistema de ecuaciones Ec. (4.2) para el caso unidimensional estacionario incompresible y con gradiente de presión cero se reduce a:

$$\begin{cases} B_y \frac{dB_x}{dy} + \frac{\mu}{R_e A_l} \frac{d^2 u_x}{dy^2} = 0 \\ B_y \frac{du_x}{dy} + \frac{\eta}{L_u A_l} \frac{d^2 B_x}{dy^2} = 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

Para este problema el sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no lineales se reduce a un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias y lineales. Considerando como condiciones de borde:

$$\begin{cases} u_x(y)|_0 = u & B_x(y)|_0 = 0 \\ u_x(y)|_L = -u & B_x(y)|_L = 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

Es posible obtener soluciones analíticas para el campo de velocidades y campo magnético:

$$u_x(y) = \frac{1}{2} \left( u_l + u_o + (-u_l + u_o) \frac{1}{sh\left(\frac{1}{2}\sqrt{a}L\right)} sh\left(\frac{\sqrt{a}(L-2y)}{2}\right) \right) \quad (4.18)$$

$$B_x(y) = \sqrt{\frac{L_u \mu}{R_e \eta}} (u_l - u_o) \frac{1}{sh\left(\frac{1}{2}\sqrt{a}L\right)} sh\left(\frac{\sqrt{a}(L-y)}{2}\right) sh\left(\frac{\sqrt{a}y}{2}\right) \quad (4.19)$$

donde:

$$a = \frac{B_y^2 R_e L_u A_l^2}{\eta \mu} \quad (4.20)$$

Como parámetro se utiliza el número de Hartmann, el cual representa la relación entre las fuerzas de origen magnético y las fuerzas de origen viscoso; y se define como:

$$H_a = \sqrt{R_e L_u A_l^2} \quad (4.21)$$

La viscosidad y resistividad eléctrica adimensionales se consideraron unitarias y debido a que el código numérico simula ecuaciones dependientes del tiempo se implementaron condiciones iniciales nulas para el campo magnético inducido y para la velocidad. La placa superior se mueve con velocidad unitaria y hacia la izquierda (ver Figura 4-4), mientras que la placa inferior se mueve con velocidad unitaria hacia la derecha.

Se realizaron simulaciones para dos números de Hartmann, utilizándose incrementos temporales y cantidades de elementos uniformemente espaciados como se muestran en la Tabla 4-1.

Ha	Incremento temporal	Cantidad de elementos
1	$\Delta t = 5e - 7$	50
10	$\Delta t = 3.1e - 8$	200

Tabla 4-1: Incremento temporal y cantidad de elementos para cada valor de Ha

Con los parámetros de simulación anteriormente mencionados y aplicando la técnica de descrita en la Sección IV.3 en la evaluación de los flujos numéricos, sin la cual los tiempos computacionales hubieran sido impracticables (cercano al mes) en una PC “hogareña”, se obtuvieron los resultados para el campo de velocidad y el campo magnético inducido, ambos verificados con la solución analítica dada por la Ec. (4.18) y la Ec (4.19).

En la Figura 4-5 se muestran los resultados para Hartmann igual a uno y en la Fig. 4-6 para Hartmann igual a diez.

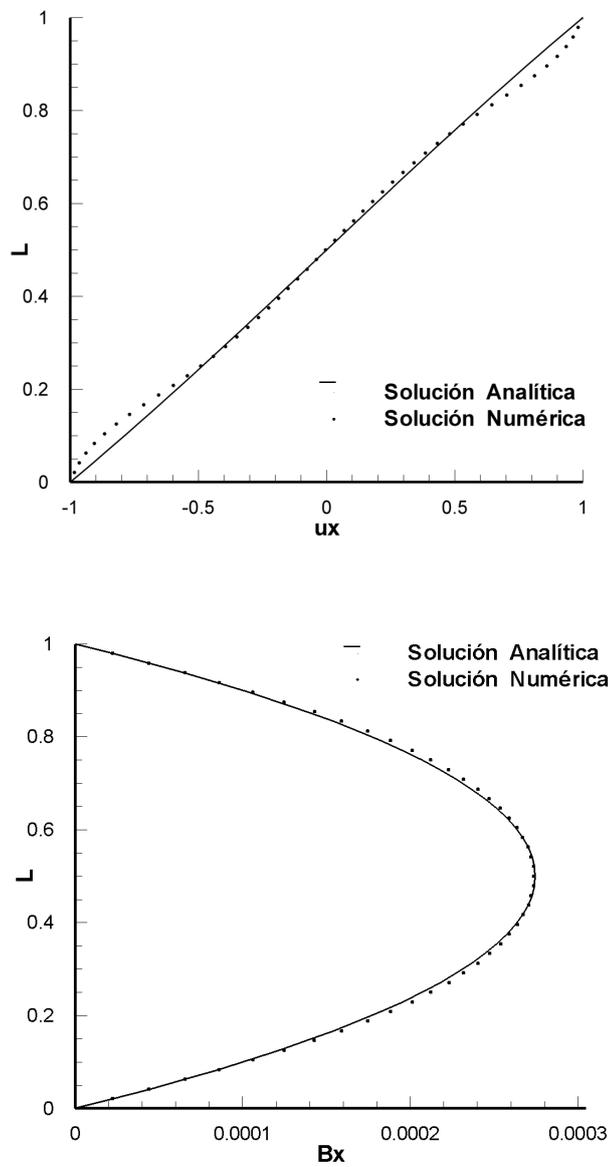


Figura 4-5: Velocidad y Campo Magnético para  $Ha = 1$

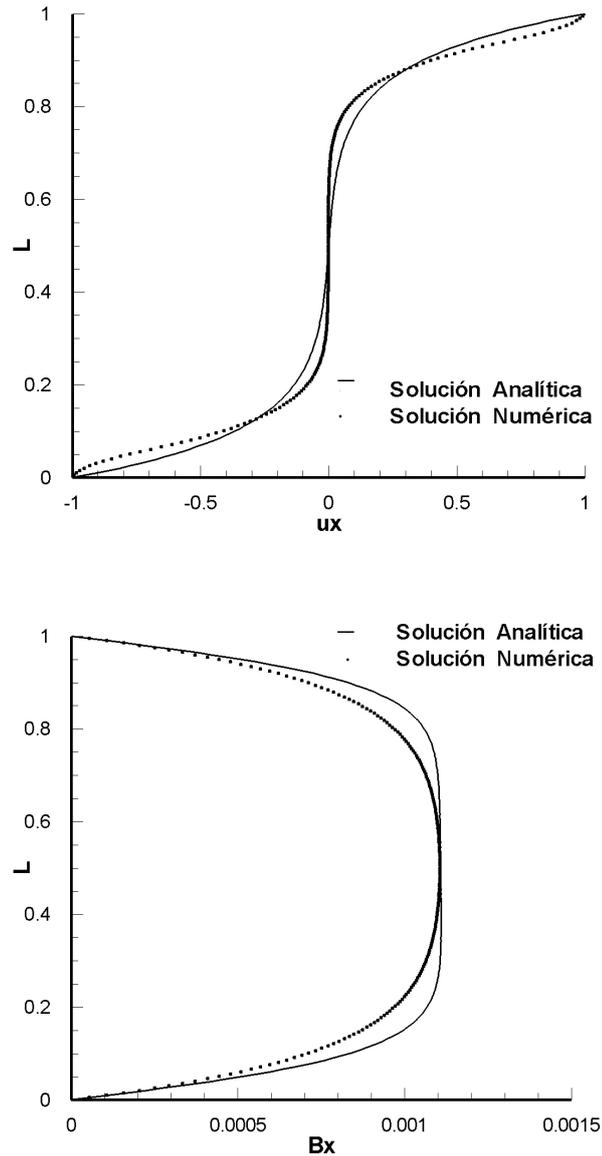


Figura 4-6: Velocidad y Campo Magnético para  $Ha = 10$ .

Se destaca de las Figuras 4-5 y 4-6 que los resultados numéricos satisfacen razonablemente bien las soluciones analíticas. En ambos casos el código numérico capta la naturaleza de la solución y el valor máximo en el campo magnético inducido. Sin embargo, al aumentar el número de Hartmann, la solución numérica no es tan precisa.

Es importante mencionar que el código ha sido desarrollado con la intención de simular flujos dependientes del tiempo de fluidos compresibles y en esta sección ha sido verificado con un *benchmark* que le exige resolver un problema de flujo incompresible y estacionario, características para las cuales no ha sido específicamente desarrollado, [Maglione *et al.*, 2007], [Maglione *et al.*, 2008].

## **Capítulo V**

# **Un Sonic Fix para las ecuaciones de la MGD ideal usando el esquema TVD de Harten-Yee**

En MGD ideal los puntos sónicos y los puntos de no convexidad son puntos de causalidad acústica. En estos puntos es necesario aplicar un *sonic fix* en el esquema e introducir la viscosidad artificial necesaria. Un nuevo *sonic fix* es propuesto en esta Tesis con el objetivo de extender a la MGD el esquema numérico originalmente desarrollado por Harten - Yee para gas dinámica.

## V.1 Introducción

Las ecuaciones de la MGD real constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólico-parabólico. Los términos parabólicos constituyen los efectos no ideales (disipativos), asociados a la viscosidad, a la conducción térmica y a la eléctrica. La parte hiperbólica o ideal presenta puntos de no convexidad y la estructura de las ondas es más complicada que en las ecuaciones de Euler [Kantrowitz and Petschek, 1966]. El acoplamiento no lineal de estas ondas juega un papel importante en la determinación de fenómenos físicos y en la solución numérica. [Toro *et al.*, 2010].

En la MGD ideal las simulaciones numéricas son una herramienta de suma importancia, reduciendo los costosos y a veces imprácticos estudios paramétricos experimentales. Sin embargo, éstas siempre están limitadas por la capacidad para analizar y solucionar con elevada exactitud el sistema de ecuaciones diferenciales no lineal. Como ha sido introducido en los capítulos anteriores, para solucionar el sistema de ecuaciones de la MGD conviene usar una forma conservativa. Esto permite implementar esquemas numéricos que son también conservativos, garantizando así, captar correctamente el salto en los valores de las variables cuando se producen discontinuidades [LeVeque, 2002] [Toro, 1999]. El uso de un esquema numérico conservativo es deseable porque asegura que la masa, la cantidad de movimiento y la energía se conservan. Varios esquemas han sido propuestos e implementados para solucionar las ecuaciones MGD ideales [Balbas *et al.*, 2004] [Myong and Roe, 1998] [Udrea, 1999].

En este capítulo es presentado en una primera instancia una descomposición espacial de las funciones de disipación, la que muestra claramente como funciona el método de alta resolución de Harten-Yee utilizado, y posteriormente una modificación del mismo para la solución de las ecuaciones de la MGD. Entre las dificultades para alcanzar soluciones numéricas precisas de las ecuaciones MGD ideales tenemos la existencia de puntos de causalidad acústica donde una estructura nueva de onda puede ser producida por interacción no lineal de ondas [Courant and Friedrich, 1999]. En MGD ideal los puntos sónicos y los puntos de no convexidad son puntos de causalidad acústica [Serna, 2009]. En estos puntos es necesario aplicar un *sonic fix* en el esquema e introducir la viscosidad artificial necesaria. El objetivo principal de este capítulo es presentar una modificación del esquema TVD de Harten-Yee original incorporando un nuevo *sonic fix*

para los puntos de causalidad acústica. El *sonic fix* propuesto es implementado por medio de un software específicamente desarrollado para solucionar las ecuaciones MGD ideales y dependientes del tiempo en dos dimensiones.

### ***V.2 Descomposición espacial de las funciones disipación***

A los fines de corroborar el correcto funcionamiento del método numérico se realizó un análisis tendiente a evaluar la influencia de la parte no física o exclusivamente numérica de los flujos. Escribiendo nuevamente la Ec. (3.35) correspondiente al flujo numérico para un instante  $n$ :

$$\overline{F_{\tilde{i}+\frac{1}{2};j}^n} = \frac{1}{2} \left\{ F_{\tilde{i}+1} + F_{\tilde{i}} + \sum_m F_{\tilde{i}+\frac{1}{2}}^m \Phi_{i+\frac{1}{2}}^m \right\}_{;j}^{(n)} \quad (5.1)$$

se identifica que los flujos numéricos asociados a cada una de las variables conservativas están compuestos primeramente por los valores reales o “físicos” de los mismos y seguidamente se ven modificados por flujos aportados por el método numérico, los cuales se manifiestan a través de la sumatoria. A esta combinación lineal de los vectores propios derechos de la matriz jacobiana de los flujos modificada  $[A_c]$  ó  $[B_c]$ , según corresponda, con coeficientes dependientes de las funciones limitadoras la denominaremos genéricamente “Disipación”.

En las Figuras 5-1/6 se presentan la influencia de la disipación en las variables conservativas para el problema de Riemann de la MGD, en donde la disipación ha sido adecuadamente rotada para ver la influencia de la misma en la dirección del flujo y en la dirección transversal al mismo. La grafica de las variables conservativas en cada caso y la asociada a la función de disipación correspondiente se encuentran superpuestas con el objeto de distinguir con claridad donde se produce el aporte realizado por el método numérico. En los gráficos se muestran los valores que asumen las variables conservativas en el eje ubicado sobre el lado izquierdo de la figura, mientras que los valores que adquiere la función disipación se encuentran en un eje localizado sobre el lado derecho de la figura.

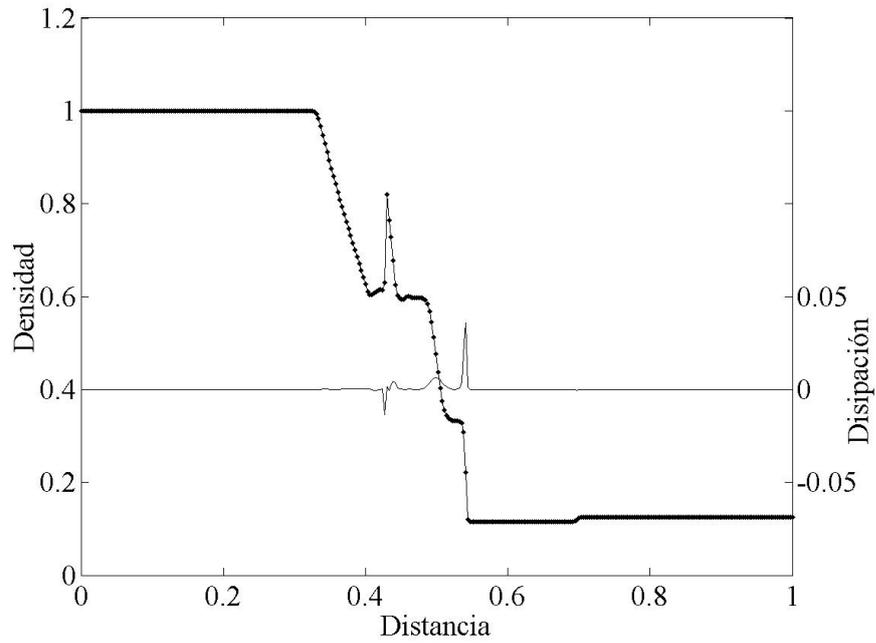


Figura 5-1: Influencia de la disipación en la densidad. MGD1000.

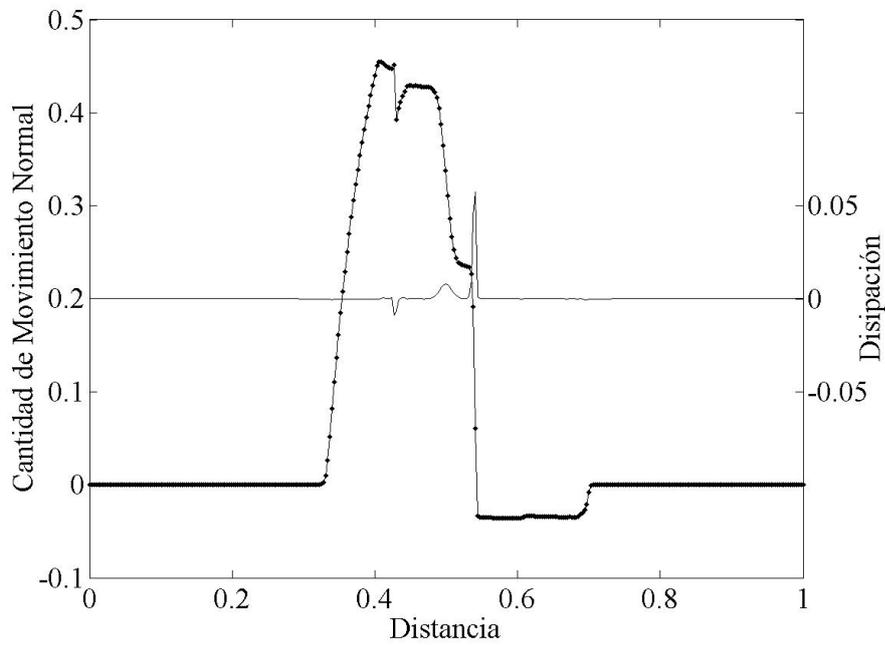


Figura 5-2: Influencia de la disipación en la cantidad de movimiento en la dirección del flujo. MGD1000.

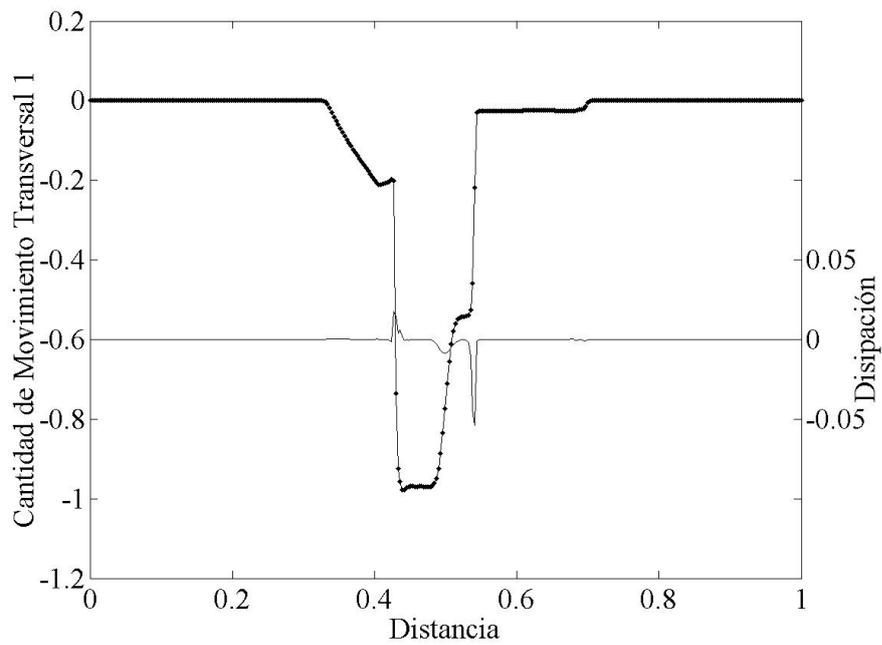


Figura 5-3: Influencia de la disipación en la cantidad de movimiento en la dirección transversal al flujo 1. MGD1000.

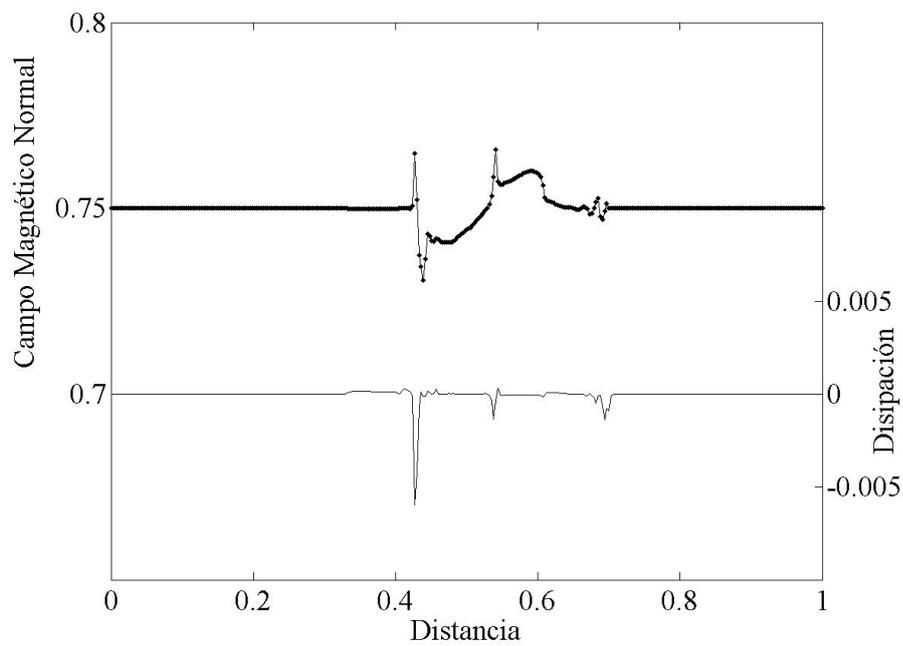


Figura 5-4: Influencia de la disipación en el campo magnético en la dirección del flujo. MGD1000.

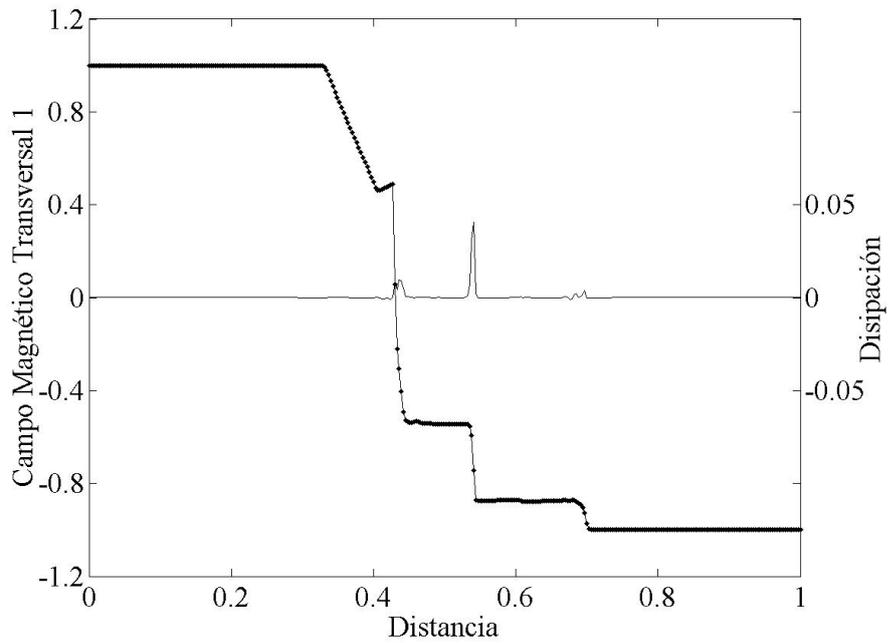


Figura 5-5: Influencia de la disipación en el campo magnético en la dirección transversal al flujo 1. MGD1000.

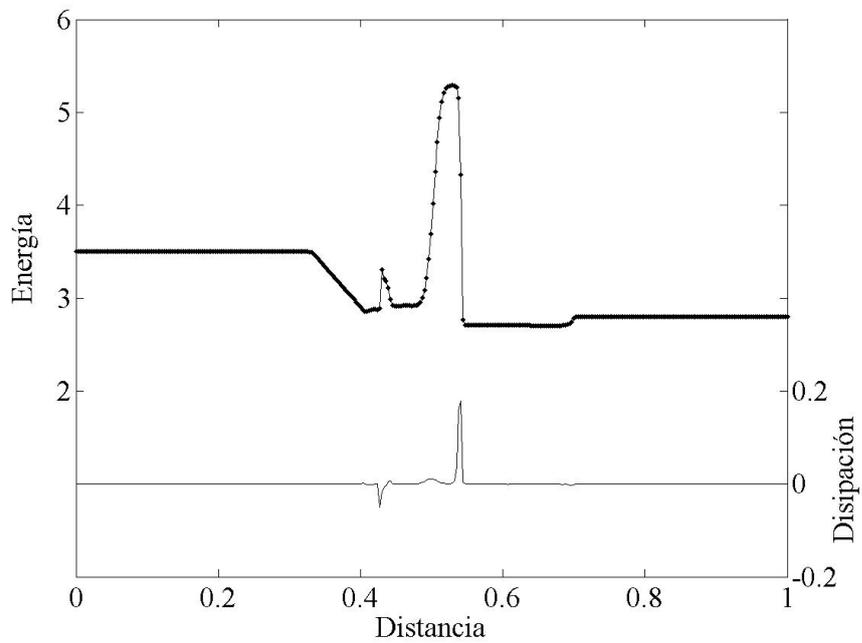


Figura 5-6: Influencia de la disipación en la energía total en la dirección del flujo. MGD1000.

Las gráficas correspondientes a la cantidad de movimiento y al campo magnético transversales a la dirección principal del flujo junto con las correspondientes funciones disipación no son presentadas por ser ambas idénticamente nulas.

A través del análisis de los resultados presentados se puede observar que en las zonas donde no se producen cambios en la solución, sólo aparece la parte “física” de los flujos y la disipación es nula, por el contrario cuando en una determinada posición una onda evoluciona el esquema numérico introduce “amortiguamiento” que permite que la solución a posteriori no presente oscilaciones y se reproduzca adecuadamente el fenómeno físico. Debe tenerse presente que la evolución de una onda de choque hace pasar a la variable considerada desde un estado constante anterior a la onda a otro estado constante posterior a la misma. Por lo tanto, el hecho de que la solución numérica no presente oscilaciones es una característica importante y distintiva de los métodos de alta resolución.

Desde un punto de vista pedagógico, la observación de las funciones de disipación ayuda a comprender el funcionamiento del método numérico, por ejemplo es posible observar como un mayor “esfuerzo” es requerido en el caso de las ondas de choque respecto a las otras ondas, y que en particular en las ondas de expansión la disipación es relativamente pequeña. Este hecho está íntimamente ligado con la realidad física, las ondas de choque tienen asociadas aspectos irreversibles basados en el cambio de entropía, mientras que las ondas de expansión no producen cambios de entropía.

### ***V.3 Un nuevo sonic fix***

Un *solver* de Riemann aproximado del tipo de Roe produce solo ondas de choque, y por lo tanto una onda de expansión se logra como sucesivas ondas de choque escalonadas. Esta onda viola la condición de entropía por lo que es necesario introducir lo que se denomina como *sonic entropy fix*, el cual es efectivo cuando se produce una solución transónica [Chung, 2002]. Harten y Hyman sugirieron un *sonic fix* ampliamente usado hasta la actualidad [Harten *et al.*, 1976], [Harten *et al.*, 1983]:

$$\psi(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\delta}(z^2 + \delta^2) & |z| < \delta \\ |z| & |z| \geq \delta \end{cases} \quad (5.2)$$

La función  $\psi$  en la Eq. (5.2) es una corrección del valor  $z$ , y  $\delta$  es generalmente un valor pequeño y constante que necesita ser calibrado para cada problema. La elección del correcto valor de  $\delta$  en flujos con números de Mach elevados no solamente ayuda a la prevención de soluciones no físicas sino que además actúa como control de convergencia y de la nitidez en la captura de las ondas de choque,  $\delta$  en el método *upwind* de primer orden es directamente una medida de la cantidad de disipación numérica introducida [Yee, 1989].

El problema de Brio y Wu es utilizado en adelante como *benchmark* para los distintos tests bidimensionales de esta sección. La rotación de la discontinuidad, el mallado y las condiciones iniciales son las mismas que las utilizadas en el Cap. III para poder comparar adecuadamente los resultados.

Si se aplica a las ecuaciones de la MGD Ideal el esquema convencional de Harten - Yee, tal cual fue desarrollado para las ecuaciones de la gas dinámica, se encuentra que la Ec. (5.2) actúa solamente en los puntos sónicos, pero no lo hace en los puntos de no convexidad, recordemos que estos puntos no existen en las ecuaciones de la Euler. Las Figuras 5-7/9 muestran los resultados obtenidos aplicando el esquema de Harten - Yee con  $\delta = 0.001$ . Es posible observar que grandes oscilaciones ocurren cerca de la onda compuesta, estas oscilaciones desestabilizan la solución numérica y no permiten alcanzar soluciones para tiempos relativamente grandes.

Para obtener resultados numéricos adecuados la Ec. (5.2) necesita ser calibrada con valores de  $\delta$  relativamente grandes y cercanos a la unidad, la solución se aproxima a la unidimensional, las perturbaciones son considerablemente menores y perfectamente localizadas pero esta metodología presenta el inconveniente de introducir demasiada viscosidad numérica y en casi todo el dominio. Los resultados logrados con un  $\delta$  igual a la unidad son presentados en el apéndice D.

En el caso de flujos gas dinámicos un valor constante de  $\delta$  resulta insuficiente pero un valor variable dependiente del radio espectral de la matriz Jacobiana de los flujos es

muy útil en términos de estabilidad y convergencia [Yee, 1989]. Experimentos numéricos muestran que la técnica anterior no provee buenos resultados en el problema de Brio y Wu de la MGD.

Se propuso que en cada instante de tiempo y antes de evaluar los flujos numéricos necesarios para aplicar el método TVD explícito Ec. (5.1), el código computacional calcule los valores propios de las matrices jacobianas de los flujos en todas las celdas y en cada una de las direcciones cartesianas. Posteriormente, el código realice la media en valor absoluto de los correspondientes a la dirección  $x$  y a la dirección  $y$ . Finalmente, utilice respectivamente estos resultados como valores para el parámetro  $\delta$  en el cálculo de los flujos numéricos en cada una de las direcciones cartesianas. El uso de un valor constante igual al promedio de los valores absolutos de los valores propios de la matriz jacobiana de los flujos proporciona buenos resultados para tiempos cortos, sin embargo esta metodología introduce demasiada viscosidad numérica en una vecindad y las soluciones no son satisfactorias para tiempos largos, especialmente en la captura de la onda de choque rápida que se mueve a la derecha, ver Figura 5-10.

Con el objetivo de obtener un método que no necesite calibración para cada problema van Leer propuso exitosamente en dinámica de gases que, [van Leer *et al.*, 1989]:

$$\delta_{GD} = \max \left[ \left| \lambda_{i+\frac{1}{2}}^m - \lambda_{i-\frac{1}{2}}^m \right|, 0 \right] \quad (5.3)$$

Para extender la técnica a las ecuaciones de MGD, se propone en esta Tesis la siguiente expresión que disminuye la viscosidad numérica en puntos que no satisfacen la condición sónica:

$$\delta_{1,..,8}^{MGD} = \begin{cases} \max \left[ \left| \lambda_{i+\frac{1}{2}}^m - \lambda_{i-\frac{1}{2}}^m \right| \right] & \text{si } \lambda_{i+\frac{1}{2}}^m \text{ corta por cero} \\ \min \left| \lambda_{i+\frac{1}{2}}^m \right| & \text{de otra manera} \end{cases} \quad (5.4)$$

Como una alternativa se implemento la técnica de Harten - Yee solamente en los puntos sónicos, pero con  $\delta$  definida por la Ec. (5.4). Estos resultados se encuentran en la Figura 5-7/9, los cuales muestran ser mejores y las oscilaciones se han reducido.

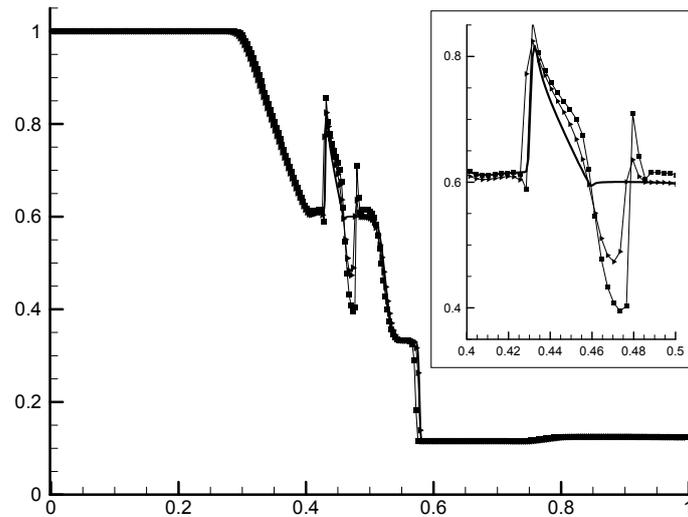


Figura 5-7: Densidad en función de la distancia para el problema de Riemann MGD 2D.

Línea Continua: *benchmark* 1D, Rectángulo: Harten-Yee con  $\delta=1E-3$ , Triángulo: Harten-Yee y van Leer.

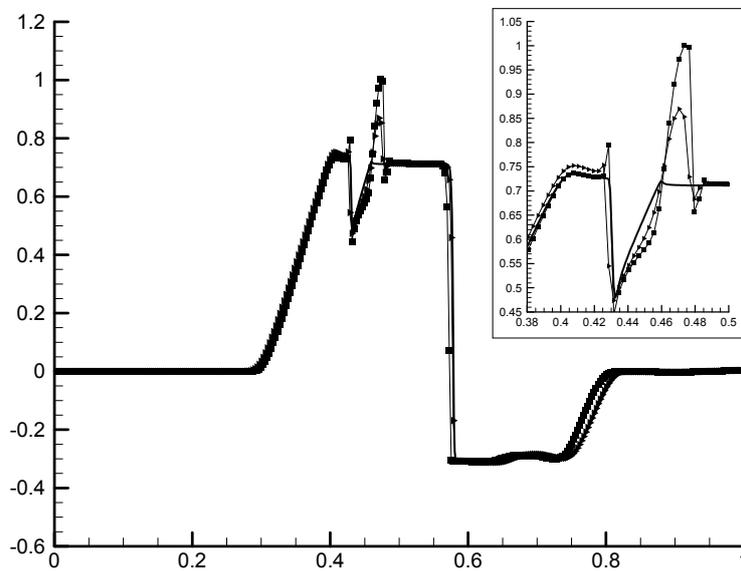


Figura 5-8: Velocidad Normal en función de la distancia para el problema de Riemann

MGD 2D. Línea Continua: *benchmark* 1D, Rectángulo: Harten-Yee con  $\delta=1E-3$ , Triángulo: Harten-Yee y van Leer.

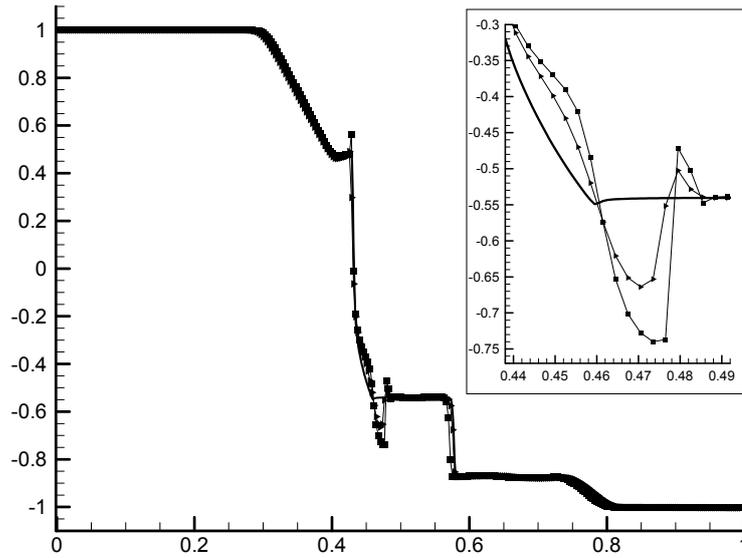


Figura 5-9: Campo Magnético Transversal en función de la distancia para el problema de Riemann MGD 2D. Línea Continua: *benchmark* 1D, Rectángulo: Harten-Yee con  $\delta = 1E-3$ , Triángulo: Harten-Yee y van Leer.

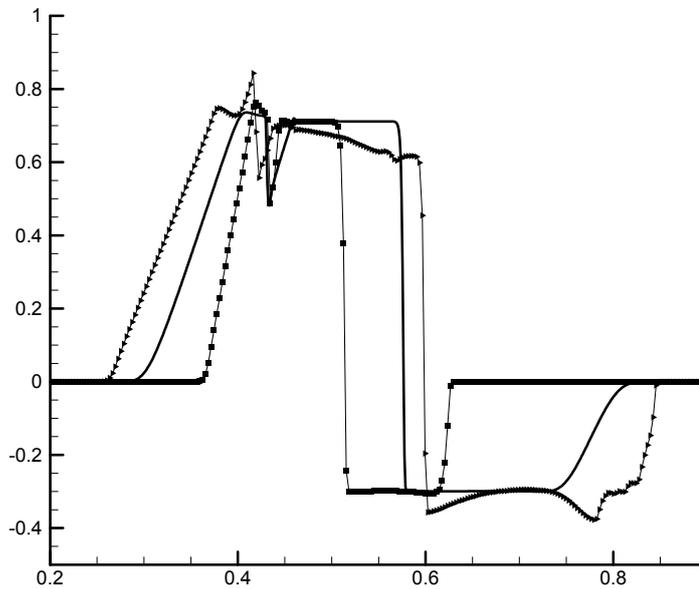


Figura 5-10: Velocidad Normal en función de la distancia para el problema de Riemann MGD 2D. Línea Continua: *benchmark* 1D, Rectángulo y Triángulo: Harten-Yee con  $\delta$  medio en tiempos anteriores y posteriores al *benchmark*.

En un paso siguiente de estudio se utilizaron las Ecs. (5.4) y (5.2) para los puntos de no convexidad y los sónicos, pero aparecieron problemas de convergencia en la solución.

Con el objetivo de mejorar la exactitud de los resultados obtenidos con el esquema anterior y de evitar oscilaciones espurias, un nuevo *sonic fix* es propuesto. El nuevo *sonic fix* incrementa la viscosidad numérica solamente en la vecindad de los puntos sónicos y no convexos (puntos de causalidad acústica), y no en todo el dominio.

$$\psi(z) = \begin{cases} \frac{z^2}{\delta^2} + \frac{\delta-2}{\delta}|z|+1 & \text{Sonicos y no convexos} \\ |z| & \text{Otros} \end{cases} \quad (5.5)$$

Esta nueva función, Ec. (5.5), es una aproximación continua y diferenciable en  $|z|$ ,

$$\begin{aligned} \psi(\delta^-) &= \psi(\delta^+) \\ \psi(0) &= 1 \\ \psi'(\delta^-) &= \psi'(\delta^+) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Los campos característicos asociados a las ondas de Alfvén y a las ondas entrópicas son linealmente degenerados. Mientras que los campos asociados a las ondas magneto-acústicas rápidas y lentas presentan puntos de no convexidad. Para las ecuaciones de la MGD bidimensionales los puntos de no convexidad se pueden obtener a partir del siguiente teorema [Serna, 2009]:

Asumiendo  $B_z = 0$

1. Si  $a^2 < \left(\frac{B_x}{\sqrt{\rho}}\right)^2$ 
  - a. Las ondas magneto-acústicas lentas definen un campo característico genuinamente no lineal.

- b. Las ondas magneto-acústicas rápidas son no convexas ( $\nabla \lambda \cdot \underline{r} = 0$ ) en  $\underline{U}(x, y)$ , si y solo si  $B_y(x, y) = 0$ .
2. Si  $a^2 > \left(\frac{B_x}{\sqrt{\rho}}\right)^2$
- a. Las ondas magneto-acústicas rápidas definen un campo característico genuinamente no lineal.
  - b. Las ondas magneto-acústicas rápidas son no convexas ( $\nabla \lambda \cdot \underline{r} = 0$ ) en  $\underline{U}(x, y)$  si y solo si  $B_y(x, y) = 0$  o  $B_x(x, y) = 0$

Una comparación entre el *sonic fix* de Harten, Ec. (5.2), y el propuesto Ec. (5.5) es mostrado en la Figura 5-11.

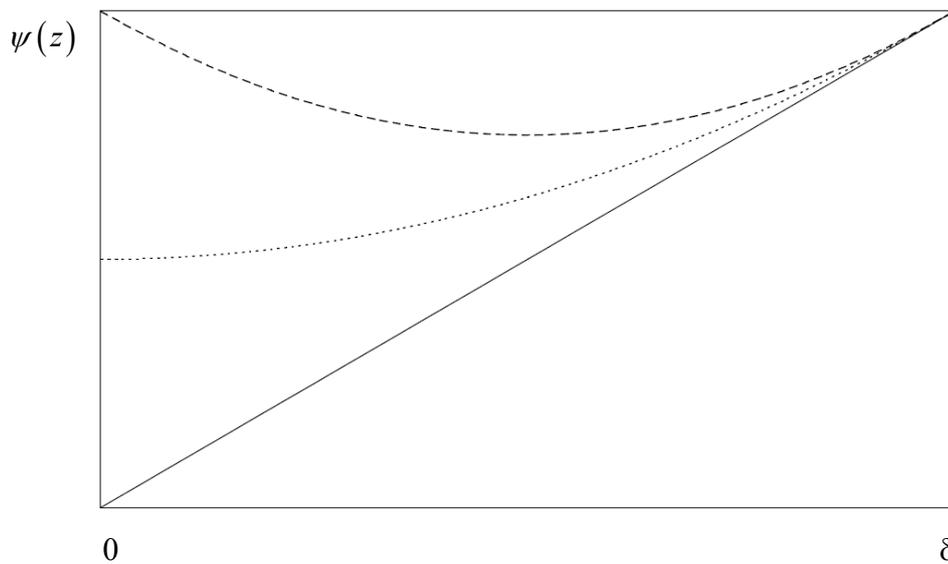


Figura 5-11: Comparación entre el nuevo *sonic fix* y el original de Harten (línea punteada: Original, Línea de trazos largos: Propuesto).

Primeramente la nueva función fue implementada solamente en los puntos no convexas, mientras que para los puntos sónicos fue utilizada la Ec. (5.2), en ambas  $\delta$  fue evaluado según Ec. (5.4). Bajo estas condiciones se alcanzó convergencia y los resultados son presentados en las Figuras 5-12/14, donde es posible observar una pequeña reducción en las oscilaciones.

Posteriormente se aplicó la función propuesta, Ec. (5.5), en todos los puntos con causalidad acústica (sónicos y no convexas). Los resultados son presentados en las Figuras 5-12/14, donde las oscilaciones se reducen significativamente, en particular cerca de la onda compuesta.

En el estado del arte actual el *sonic fix* sigue siendo dependiente de la geometría y del problema en estudio, sin embargo la nueva función propuesta ha probado ser una metodología efectiva en el problema de Riemann magnetogasdinámico.

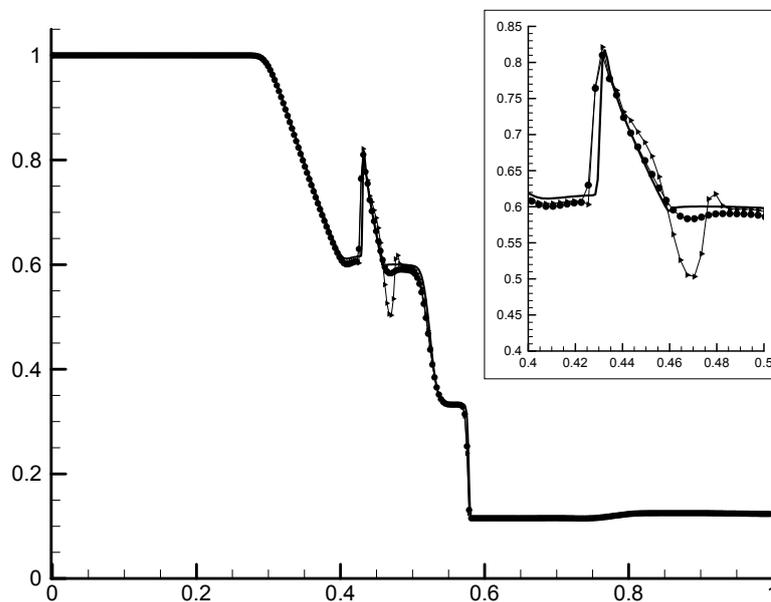


Figura 5-12: Densidad en función de la distancia para el problema de Riemann MGD 2D. Línea Continua: *benchmark* 1D, Círculo: Nueva técnica en todos los puntos con causalidad acústica, Triángulo: Nueva técnica sólo en puntos de no convexidad.

En el problema del tubo de choque MGD de Brio y Wu la solución teórica para el campo magnético es un valor constante igual a 0.75, mientras que la solución numérica corresponde a variaciones alrededor de este valor (ver Fig. 3-14). Para comparar cuantitativamente distintos esquemas numéricos que tratan de mantener  $\nabla \cdot \underline{B} = 0$  es usual calcular el error numérico en el campo magnético normal [Tóth, 2000].

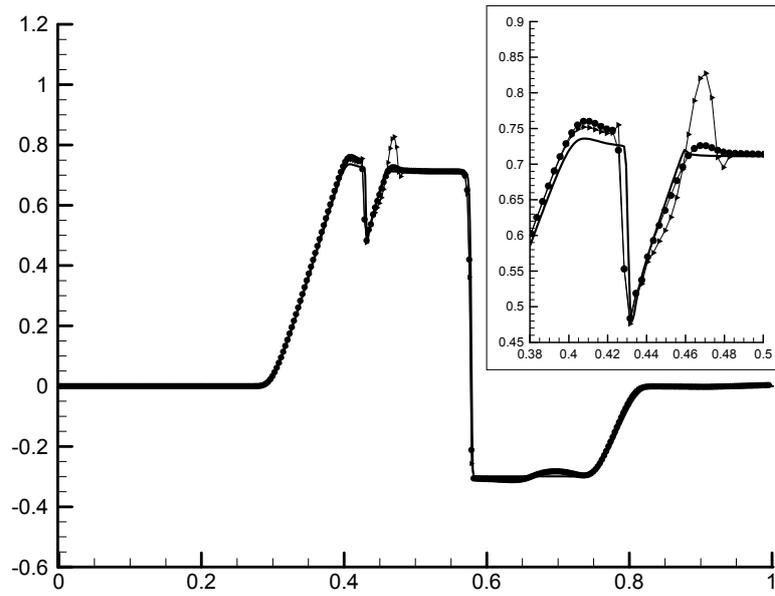


Figura 5-13: Velocidad Normal en función de la distancia para el problema de Riemann MGD 2D. Línea Continua: *benchmark* 1D, Circulo: Nueva técnica en todos los puntos con causalidad acústicos, Triangulo: Nueva técnica sólo en puntos de no convexidad.

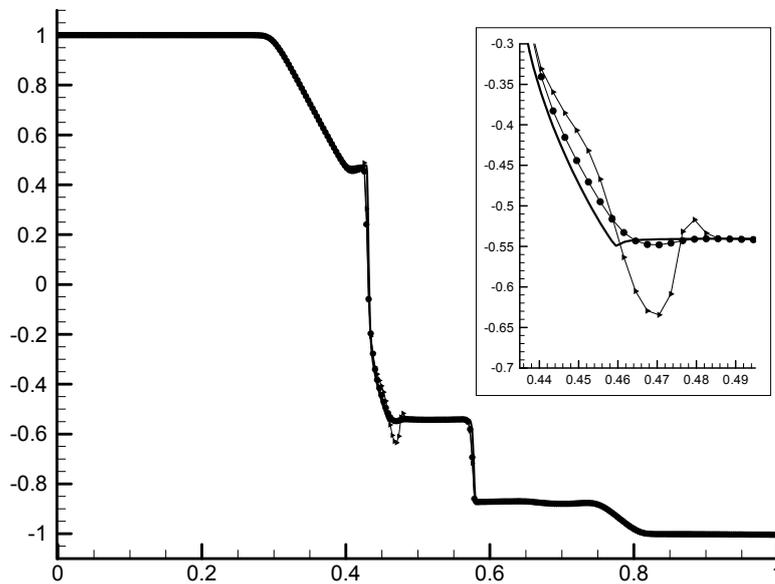


Figura 5-14: Campo Magnético Transversal en función de la distancia para el problema de Riemann MGD 2D. Línea Continua: *benchmark* 1D, Circulo: Nueva técnica en todos los puntos con causalidad acústicos, Triangulo: Nueva técnica sólo en puntos de no convexidad.

El error relativo máximo para una variable  $u$  en una malla de  $N \times M$  elementos se define como:

$$\epsilon_{max} = \frac{\max \left[ \left| u_{i,j}^{Apr} - u_{i,j}^{Teor} \right| \right]}{\left| u_{(i,j)_{max}}^{Teor} \right|} \quad (5.7)$$

y el error promedio como,

$$\epsilon_{prom} = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left| u_{i,j}^{Apr} - u_{i,j}^{Teor} \right|}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left| u_{i,j}^{Teor} \right|} \quad (5.8)$$

donde  $Apr$  corresponde a la solución numérica y  $Teor$  a la solución analítica o en su ausencia a una solución numérica de elevada resolución. La Tabla 5.1 muestra los errores obtenidos en el campo magnético normal con las distintas alternativas numéricas presentadas en esta sección. Es posible observar que el nuevo esquema satisface con mayor exactitud la condición  $\nabla \cdot \underline{B} = 0$  que el esquema tradicional de Harten-Yee. También hay que destacar que el error introducido por el nuevo esquema es significativamente menor que el dado en [Tóth, 2000].

	Técnica de Harten – Yee $\delta = 1E-3$ .	Nueva función, Ec. (5.5), con $\delta$ según Ec. (5.4).
$\epsilon_{max}$	0.0743	0.016
$\epsilon_{prom}$	0.00396	0.00359

Tabla 5.1. Comparación entre los errores producidos por la tecnica original de Harten – Yee y la nueva propuesta.

Las Figuras 5-15/17 muestran los resultados 2D obtenidos con la nueva técnica en simulaciones de flujos 2D.

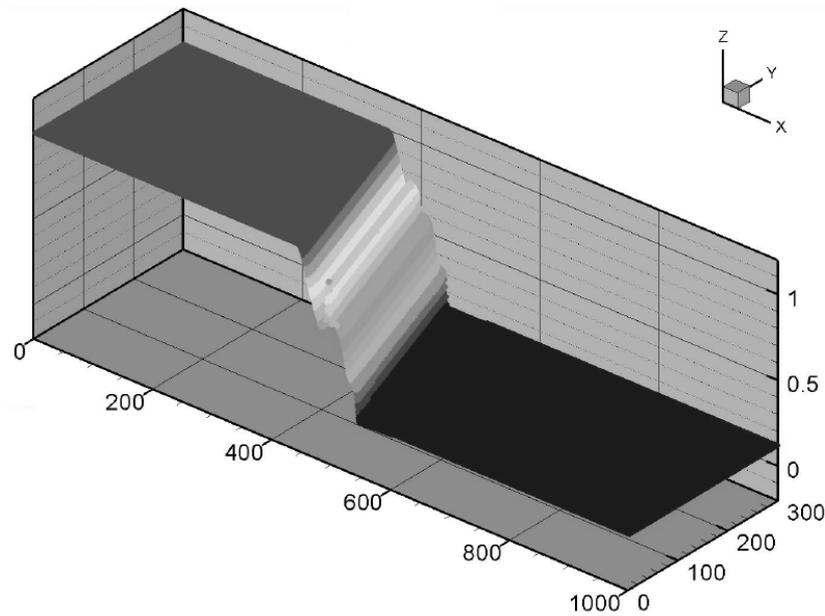


Figura 5-15: Densidad en el problema de Riemann MGD 2D.

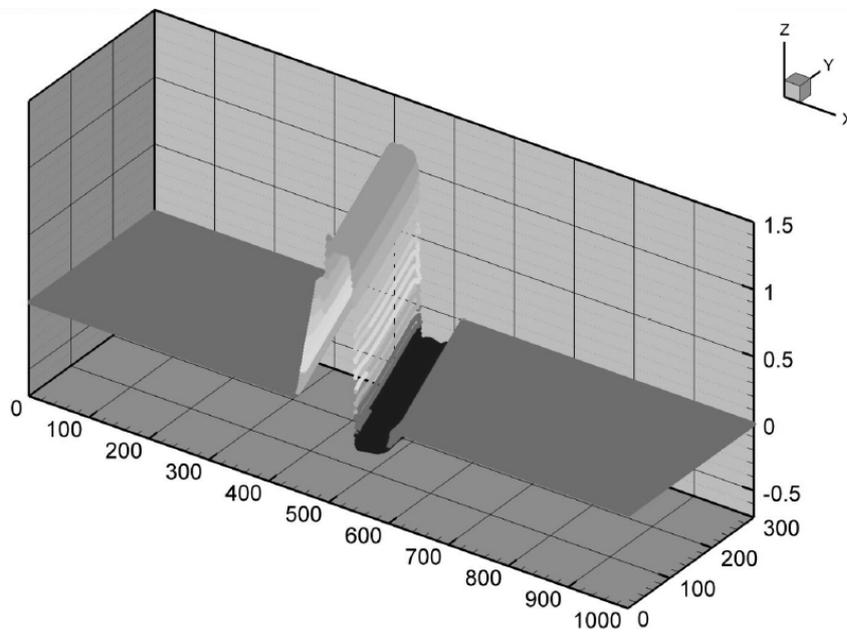


Figura: 5-16 Componente en x de la Velocidad en el problema de Riemann MGD 2D.

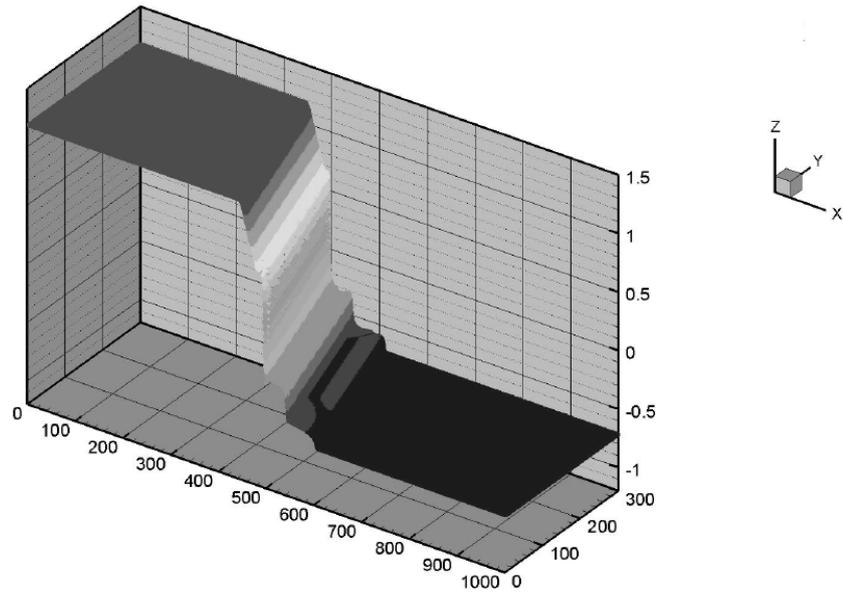


Figura 5-17: Componente en y del Campo Magnético en el problema de Riemann MGD 2D.

En la Tabla 5.2 se muestran para dos tiempos diferentes los valores propios (velocidades de las ondas) que cruzan por cero y los valores numéricos de  $\delta$ . Es posible observar que en el caso bidimensional aparecen mas cruces por cero que en el unidimensional. Esto es particularmente importante en la onda compuesta (7 ma).

t = 0.03077						
	$\max \left[ \left  \lambda_{i+\frac{1}{2}}^m - \lambda_{i-\frac{1}{2}}^m \right  \right]$			Cruces por cero		
	Caso			Caso		
Onda <i>m</i>	1D x	2D x	2D y	1D x	2D x	2D y
<i>u</i>	0.262	0.341	0.104	Si	Si	Si
<i>u + c<sub>a</sub></i>	0.147	0.275	0.194	No	No	Si
<i>u - c<sub>a</sub></i>	0.512	0.677	0.090	No	Si	No
<i>u + c<sub>f</sub></i>	0.187	0.316	0.223	No	No	No
<i>u - c<sub>f</sub></i>	0.684	0.746	0.079	No	Si	No
<i>u + c<sub>S</sub></i>	0.348	0.438	0.105	No	No	Si
<i>u - c<sub>S</sub></i>	0.176	0.244	0.103	No	Si	No

t = 0.08081						
$u$	0.259	0.356	0.103	Si	Si	Si
$u + c_a$	0.145	0.527	0.192	No	No	Si
$u - c_a$	0.491	0.700	0.109	No	Si	No
$u + c_f$	0.190	0.600	0.237	No	No	No
$u - c_f$	0.656	0.762	0.119	No	Si	No
$u + c_S$	0.343	0.456	0.104	No	No	Si
$u - c_S$	0.175	0.342	0.103	No	Si	No

Tabla 5.2. Valores Numericos de  $\delta$  para dos tiempos diferentes

En resumen, el análisis presentado de las funciones de disipación permitió no sólo ahondar en la comprensión del funcionamiento del esquema numérico sino que también abrió la posibilidad de profundizar en su estudio. Se utilizó un criterio analítico para la detección de las regiones en las cuales las ecuaciones de la MGD bidimensionales son no convexas extendiéndose a la MGD el esquema de Harten-Yee originalmente desarrollado para gas dinámica. Los resultados numéricos 2D satisfacen correctamente las soluciones 1D ya publicadas. Este aporte al esquema numérico mostró ser robusto en la solución del problema astrofísico mostrado en el próximo capítulo. Al aplicar el nuevo *sonic fix* en los puntos sónicos y en los de no convexidad las oscilaciones presentes se han reducido notablemente. Esta nueva técnica tiene dos importantes ventajas, [Maglione *et al.*, 2010]:

- a. El método no necesita una calibración particular dependiente del problema.
- b. El método incrementa la viscosidad numérica solamente en un entorno de los puntos de causalidad acústica

## **Capítulo VI**

# **Aplicaciones Astrofísicas**

En este capítulo se presenta los resultados alcanzados al aplicar la metodología desarrollada en esta Tesis para resolver las ecuaciones de la magnetogasdínámica ideal en problemas astrofísicos, y en particular en la simulación de los *tadpoles* que se presentan en la baja corona solar. Se verá que se ha podido reproducir numéricamente las observaciones más detalladas que se conocen hasta ahora del fenómeno. Tales observaciones se han obtenido con el telescopio espacial TRACE de alta resolución espacial y temporal.

## VI.1 Introducción

Desde los años 70, con el lanzamiento de naves espaciales con telescopios solares que proveen observaciones de alta resolución, la vieja visión del Sol fue completamente transformada.

Se conoce ahora que la baja corona solar es dinámica y magnéticamente estructurada, lo que se pone de manifiesto a través de los rayos X blandos y las emisiones ultravioletas que trazan el campo magnético, dado que la emisión también resulta estructurada por el campo magnético. Al contrario la cromosfera subyacente no está estructurada por el campo magnético, su dinámica se origina en estructuras de pequeña escala y en los movimientos turbulentos predominantes.

Mientras en la baja corona las regiones activas están compuestas por innumerables arcos magnéticos cerrados con plasma confinado causando emisión brillante, en la corona superior el campo magnético esta formado por líneas de campo abiertas con baja emisión y plasma saliendo como viento solar, ver Fig. 6-1.

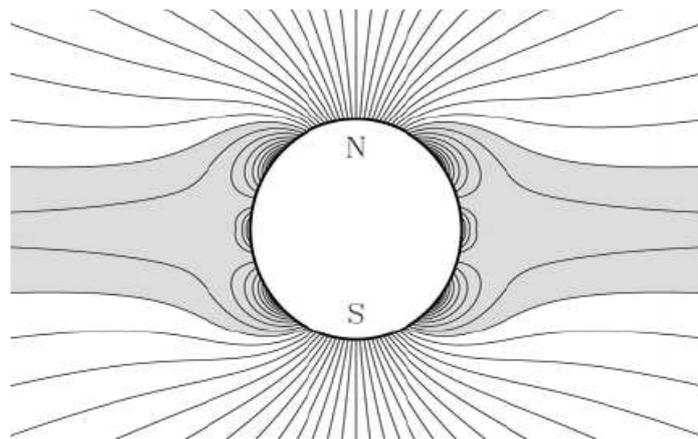


Figura 6-1: Descripción de las líneas de campo magnético en la corona solar [Aschwanden, 2005].

Estas características fenomenológicas generales de la atmosfera solar, en donde se resalta la estructura singular de la baja corona comparada con la cromosfera y la corona superior puede ser explicada a través del comportamiento de parámetros del plasma. El

número Reynolds magnético en todo el plasma atmosférico es muy alto significando que los efectos de difusión pueden ser despreciados ( $Re \sim 10^{10}$ ).

$$R_m = \frac{\mu_o L U}{\eta_{ref}} \sim 10^{10} \quad (6.1)$$

Así, del teorema de Alfvén se sabe que el plasma y el campo magnético están congelados en todas partes de la atmósfera del Sol. Esto significa que un elemento de volumen del fluido está asociado a una línea de campo, es solidario a esa línea, se dice entonces que la línea esta compuesta siempre por los mismos elementos de volumen, lo que no ocurre cuando hay difusión magnética. Por otro lado, el parámetro  $\beta$ :

$$\beta = \frac{P}{P_{mag}} = \frac{P}{B^2/2\mu_0} \sim \frac{c_s^2}{c_a^2} \quad (6.2)$$

tiene un comportamiento distinto en la baja corona solar respecto a las otras regiones atmosféricas. De hecho, su topología particular puede ser explicada debida al cambio de comportamiento de  $\beta$  con respecto – desde abajo – a las regiones cromosféricas y fotosféricas, y – desde arriba – a la corona superior, mas allá de un radio solar. (ver Fig. 6-2). Valores de  $\beta$  menores que uno implican que – contrario a regiones con presiones de gas dominantes ( $\beta \geq 1$ ) – el campo magnético controla la dinámica y de esa manera la topología del fenómeno coronal. Estructuras filamentosas aisladas llenas con plasma cromosférico atrapado son estructuras espontáneas de las configuraciones magnéticas. Mas allá de un radio solar el plasma confinado se vuelve débil – la presión del gas se incrementa y la presión magnética decrece – y las inestabilidades ocasionan estructuras de campo abiertas las cuales dominan las características de la corona superior. Es decir, en las regiones atmosféricas cercanas a la superficie del Sol en las que  $\beta$  es mayor que uno, la cromosfera y la fotosfera, la dinámica es gobernada por el fluido que arrastra al campo congelado con él. Por el contrario en la baja corona solar la dinámica es gobernada por el campo magnético que arrastra al fluido congelado.

La Fig. 6-3 muestra el logaritmo de la densidad atmosférica solar promedio y la temperatura como función de la altura. La región de transición en la base de la corona determina un cambio en el comportamiento de los parámetros del plasma. La densidad

de partículas de la cromosfera ( $\sim 10^{11} \text{ cm}^{-3}$ ) disminuye abruptamente hacia la corona ( $\sim 10^9 \text{ cm}^{-3}$ ) y la temperatura se incrementa rápidamente desde  $\sim 6 \cdot 10^3 \text{ K}$  hasta  $\sim 10^6 \text{ K}$ .

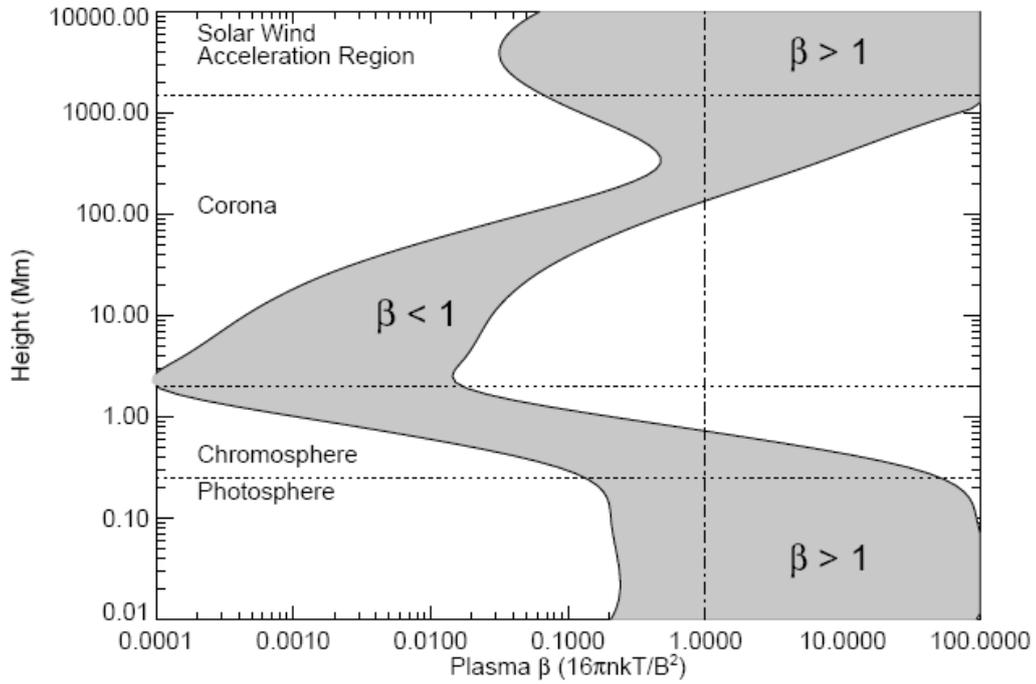


Figura 6-2: Comportamiento del plasma en la atmosfera solar entre dos intensidades de campo 100G y 2500G. [Aschwanden, 2005].

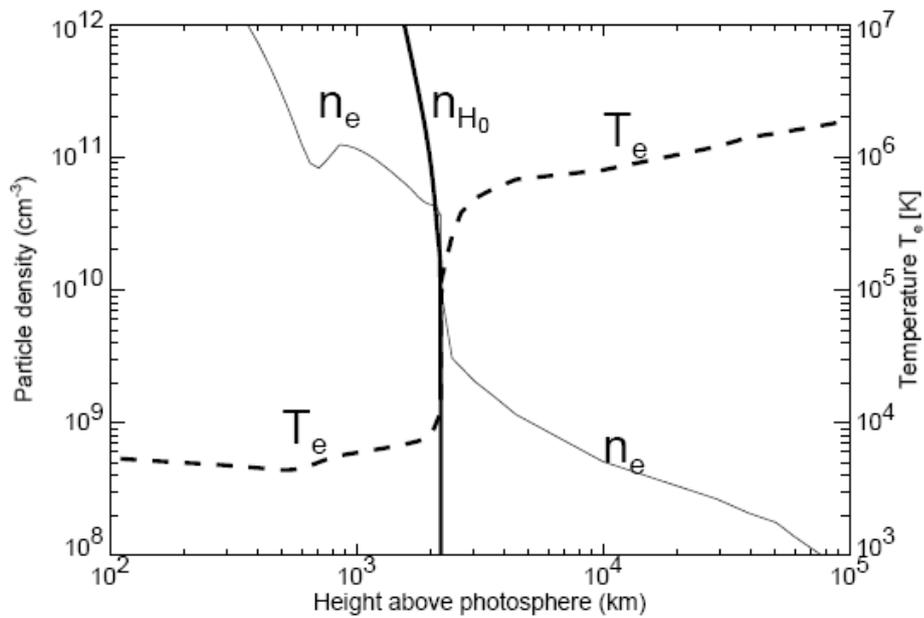


Figura 6-3: Variación de la densidad de partículas y la temperatura en la cromosfera y la baja corona solar. [Aschwanden, 2005].

Otra característica notable de la baja corona solar es el hecho de que su temperatura es mucho mayor que la temperatura de la base cromosféricas. La energía proviene de las reacciones nucleares que queman hidrógeno en helio en el centro del Sol debido a las altas presiones y temperaturas. Estas reacciones ocurren en el núcleo más interno del Sol, posteriormente el flujo de energía es transportada hacia la superficie en forma de radiación lo que toma unos millones de años. Mas cerca de la superficie en la cromosfera el transporte se hace en forma convectiva tardando en recorrer ese trayecto unos pocos meses. La temperatura disminuye desde su fuente en núcleo del Sol (10.000.000 K) hasta la superficie donde alcanza 10000K – 6000K. Sorprendentemente, la temperatura vuelve a aumentar desde la superficie hasta la corona y continuando con el viento solar interestelar (llegando a la magnetósfera de la Tierra) al menos dos ordenes de magnitud, alcanzando algunos millones de grados. El mecanismo de calentamiento coronal es un problema abierto en la investigación de la física solar. Hay consenso, sin embargo, que la fuente de calentamiento es la energía magnética y los diferentes mecanismos son aquellos que transforman esta energía en calor.

Una descripción detallada de los fenómenos físico-químicos que se producen en la atmosfera solar puede obtenerse en [Kirk *et al.*, 1994] [Aschwanden, 2005] [Goedbloed *et al.*, 2010].

Una cuestión que es importante discutir y que puede parecer paradójica es porqué en un plasma no colisional – como son la mayoría de los plasmas espaciales y entre ellos el de la corona solar – la hipótesis del continuo es válida. Parte de la complejidad para entender los procesos que ocurren en estos plasmas proviene de la comparación con los fluidos neutros. En fluidos neutros las colisiones son frecuentes y se representan como colisiones directas entre partículas individuales. En tal caso la frecuencia de colisiones es proporcional al número de partículas y a la sección eficaz, y se define el libre camino medio entre colisiones en función de esta caracterización del encuentro directo entre partículas. La escasez, o ausencia, de estas colisiones binarias en casi todos los plasmas espaciales implica que el camino libre medio debido a estas colisiones es mucho mayor que la longitud característica del fenómeno a estudiar,

$$L \ll \lambda_{mfp} \tag{6.3}$$

En la física del plasma se diferencian estas colisiones directas (como las de partículas neutras) de las interacciones que ocurren entre muchas partículas, que se deben a que las fuerzas electromagnéticas son de largo alcance. A estos procesos también se los conoce como colisiones colectivas (denominación poco conveniente dado que pueda dar lugar a confusión). En un plasma totalmente ionizado, como es el que nos ocupa, las partículas cargadas interactúan a través del campo eléctrico, responsable de garantizar la cuasi-neutralidad de estos plasmas compuestos por partículas libres. El campo eléctrico hace que las partículas estén vinculadas y contenidas unas con las otras sin que se produzcan apartamientos que lleven a variaciones importantes de la carga neta. Apartamientos de cargas conllevan campos eléctricos que instantáneamente se le oponen para restituir el equilibrio. Como resultado de la acción de los campos las partículas son deflectadas a distancias interpartículas mucho mayores que las de los radios atómicos, es decir, la sección eficaz es mucho mayor que en el caso de los neutros pero además las deflecciones son de ángulo pequeño.

La cuasi-neutralidad tiene asociada una longitud característica que se conoce como la longitud de Debye. Es la distancia mínima tal que para valores menores que esta longitud ya no hay neutralidad de cargas o apantallamiento de cargas. La longitud de Debye,  $l_D$ , es también una medida del comportamiento colectivo de las partículas libres del plasma, y se define como,

$$l_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{n_e e^2}} \quad (6.4)$$

donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann,  $\epsilon_0$  es la permitividad eléctrica,  $n_e$  la densidad de electrones y  $e$  la carga del electrón.

Para que esta neutralidad sea efectiva se requiere que en una esfera de Debye haya muchas partículas,

$$\Lambda = 4\pi n l_D^3 = \frac{4\pi \epsilon_0^{3/2} T^{3/2}}{e^3 n_e^{1/2}} \quad (6.5)$$

Además, el comportamiento temporal del plasma está asociado a la frecuencia de plasma  $\omega_p$ . Esta frecuencia es una medida de la respuesta colectiva del plasma ante el intento de separación de las cargas, y se obtiene como,

$$\omega_p^2 = \frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e} \quad (6.6)$$

donde  $m_e$  es la masa del electrón.

Para que el comportamiento sea colectivo (para que el medio pueda ser considerado un plasma) y no un mero conjunto de partículas cargadas se requieren dos condiciones: 1) que la longitud de Debye sea mucho menor que la longitud del fenómeno en estudio y 2) que la frecuencia de plasma sea mucho mayor que la frecuencia del fenómeno en estudio. Esto significa que los procesos que se estudian serán relativamente lentos y de longitudes largas,

$$l_D \ll L \quad \omega \ll \omega_p \quad (6.7)$$

Es así que a pesar de que las colisiones directas (como las colisiones en fluidos neutros) son despreciables, los campos eléctricos, encargados de garantizar la cuasi-neutralidad, y los campos magnéticos, que alteran las trayectorias individuales confinándolas a movimientos de giro alrededor de las líneas de campo, juegan el rol que tienen las colisiones en el caso de los fluidos neutros. Si se cumplen las condiciones que limitan el comportamiento espacial y temporal de los plasmas dados por  $l_D$  y  $\omega_p$ , respectivamente, la integración de las ecuaciones cinéticas de Vlasov o momentos de dicha ecuación lleva en forma directa a las ecuaciones de fluidos conocidas como magnetogasdínámica. Más aun, el aporte de los procesos colectivos entra en la ecuación de Vlasov (es decir en la ecuación de Maxwell-Boltzmann sin término de colisiones directas) a través de la fuerza de Lorentz. En síntesis, como estas condiciones se ajustan a muchos de los procesos que ocurren en plasmas espaciales y en particular a los de la corona solar, la hipótesis del continuo se utiliza para estudiar la mayoría de los fenómenos astrofísicos de la corona.

A modo de comparación se puede mencionar que cuando un plasma es frío y muy denso la longitud de Debye se hace muy pequeña y el número de partículas en una esfera de Debye disminuye. Nótese que esta situación es parecida al caso de una partícula neutra, e.g., dos cargas de signo opuesto (pocas partículas) en una longitud pequeña, la longitud de Debye se aproxima a la del radio atómico y el plasma se parece a un fluido neutro.

## ***VI.2 Descripción de la geometría, mallado, condiciones de borde e iniciales***

Para poder analizar el fenómeno que ocurre en la baja corona se utilizó una porción de la atmósfera solar sobre la cual existen datos observacionales (resolución espacial de  $\sim 700\text{km} \times 700\text{km}$ , equivalente a un píxel del detector) obtenidos a través de una nave espacial equipada con el telescopio denominado *Transition Region And Coronal Explorer* (TRACE) enviado con un vehículo portador Pegasus en abril de 1998. La porción analizada puede observarse en la Fig. 6-4.

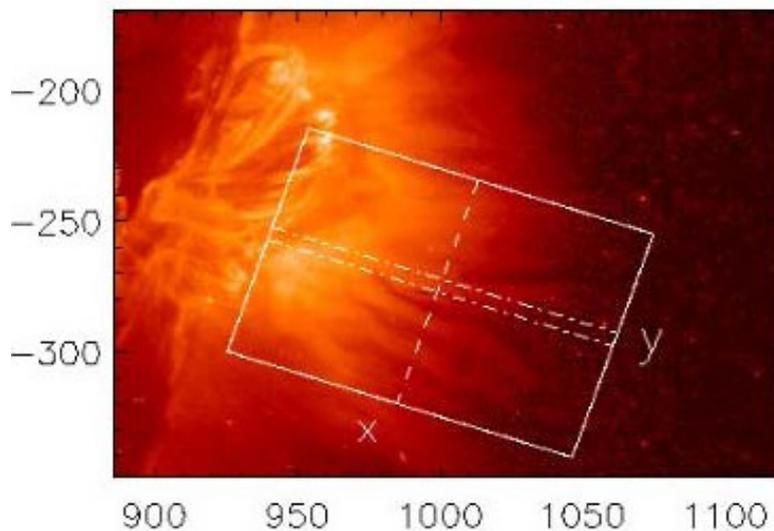


Figura 6-4: TRACE 21 de Abril del 2002 a las 01:49:57 UT. [Verwichte *et al.*, 2005]

El modelo geométrico estudiado puede observarse en la Fig. 6-5, en donde la zona rayada representa los límites del dominio y donde la densidad toma valores mucho mayores a los que se encuentran en el interior, estableciéndose así una condición de borde que permite el rebote de las ondas. En el contorno no rayado del dominio en

estudio se establece una condición de borde absorbente. La longitud mayor representa la dirección que denominaremos como *radial* mientras que la perpendicular a esta la denominaremos como *transversal*. El rectángulo interior corresponde a la zona en la cual inicialmente un pulso de presión es aplicado.

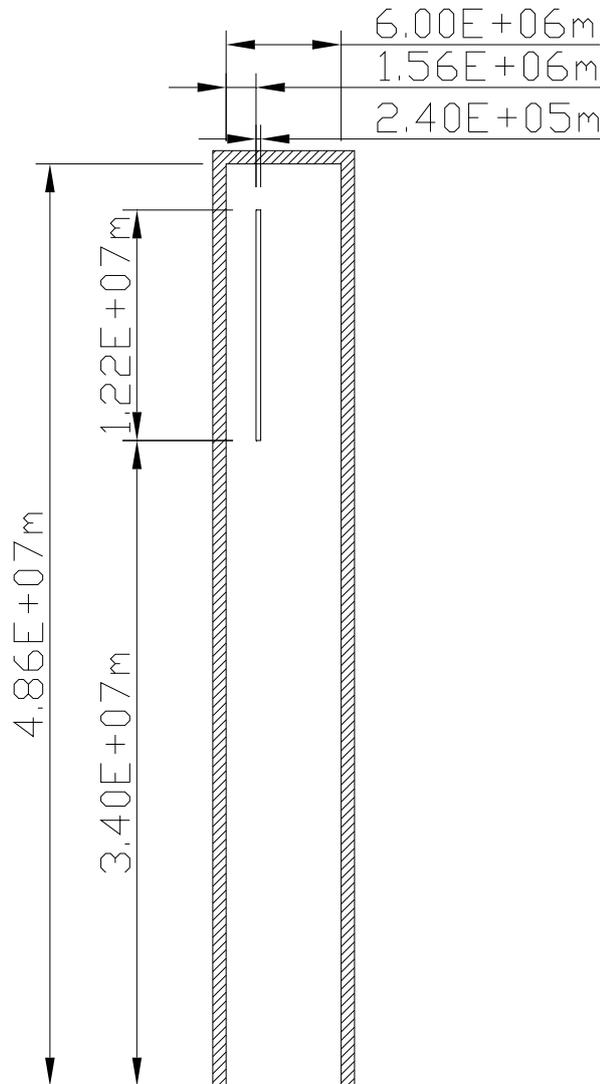


Figura 6-5: Dimensiones y características del modelo geométrico estudiado.

Se utilizaron para la discretización del dominio mallas estructuradas con elementos rectangulares. La densidad de las mismas fueron  $(648 \times 80)$ ,  $(648 \times 200)$  y  $(1000 \times 500)$  y si bien con la malla intermedia ya se pueden obtener resultados aceptables los presentados en la próxima sección corresponden a la malla mas refinada.

Las condiciones iniciales y de referencia utilizadas son (para mas detalle sobre el proceso de adimensionalización de las ecuaciones de la MGD ver apéndice A):

<i>Tamaño característico de referencia</i>	$a = 6 \cdot 10^6 \text{ m}$
<i>Constante del Gas (H atómico)</i>	$R_H = 8248 \text{ m}^2/\text{s}^2\text{K} \quad \gamma = 5/3$
<i>Campo magnético de referencia</i>	$B_{ref} = 4\text{G}$
<i>Densidad de referencia</i>	$\rho_{ref} = 1.67 \cdot 10^{-12} \text{ Kg}/\text{m}^3$
<i>Temperatura de Referencia</i>	$T_{ref} = 1 \cdot 10^6 \text{ K}$
<i>Velocidad de referencia</i>	$c_a = \frac{B_{ref}}{\sqrt{\mu_o \rho_{ref}}} = 2.76 \cdot 10^5 \text{ m/s}$
<i>Tiempo adimensional</i>	$\bar{t} = \frac{t}{a/c_a} = \frac{t}{21.8\text{s}}$
<i>Densidad adimensional inicial</i>	$\bar{\rho}_0 = \frac{\rho_0}{\rho_{ref}} = 1$
<i>Velocidad adimensional inicial</i>	$\bar{u}_0 = \frac{u_0}{c_a} = 0$
<i>Campo magnético adimensional inicial</i>	$\bar{B}_0 = \frac{B_0}{B_{ref}} = (0; -1; 0)$
<i>Presión adimensional inicial</i>	$\bar{p}_0 = \frac{p_0}{B_{ref}^2/\mu_o} = 0.108$
<i>Intensidad del pulso de presión</i>	$\bar{p}_2 = 100 \bar{p}_0$

### VI.3 Resultados y Conclusiones

En esta sección se presentan resultados de simulación del fenómeno denominado *tadpole* que se produce en la baja corona solar. La traducción de *tadpole* al castellano es renacuajo. Esta denominación se debe a que lo que se observa tiene forma de dedos finos y oscuros que serpentean cayendo y desacelerándose hacia la superficie del sol.

Este estudio resulta ser la continuación de trabajos anteriores realizados en [Costa *et al.*, 2009] y [Schulz *et al.*, 2010]. En dichos trabajos se propuso una interpretación novedosa del fenómeno *tadpole* con un modelo 1D. Se consideraba la dinámica en dos direcciones independientes, debidas estas a la anisotropía que impone el campo magnético en un plasma que se supone congelado al campo. Este modelo requería la confirmación 2D del modelo propuesto. En [Maglione *et al.*, 2010] se ha podido confirmar y profundizar los resultados obtenidos anteriormente. Asimismo se logro reproducir las observaciones mostrando una semejanza cualitativa y cuantitativa sorprendente.

En la Fig. 6-6 se muestra una imagen obtenida con TRACE en donde se observa la variación que presenta la densidad en la dirección transversal y en función del tiempo para la línea con guiones de la Fig. 6-4. En esta imagen se puede observar claramente el comportamiento oscilatorio de varios *tadpoles* indicados con las letras A, B, C y D.

El fenómeno *tadpole* ha sido interpretado de maneras diferentes y contrapuestas y todavía hoy hay controversia al respecto, ver [Maglione *et al.*, 2010]. Por un lado, se ha pensado que el oscurecimiento de las imágenes se debe a la menor emisión de material frío y denso que proviene de una eyección de masa coronal que cae gravitatoriamente hacia la superficie en forma de lluvia. Por otro lado, han sido interpretados como arcos magnéticos vaciados de plasma que se han desprendido luego de una reconexión magnética ocurriendo mucho más arriba de la región donde se observa el fenómeno (una reconexión magnética se produce en zonas muy localizadas en las que el Reynolds se vuelve pequeño y hay gran disipación joule y difusión magnética, esto es debido al encuentro de polaridades opuestas de campo magnético).

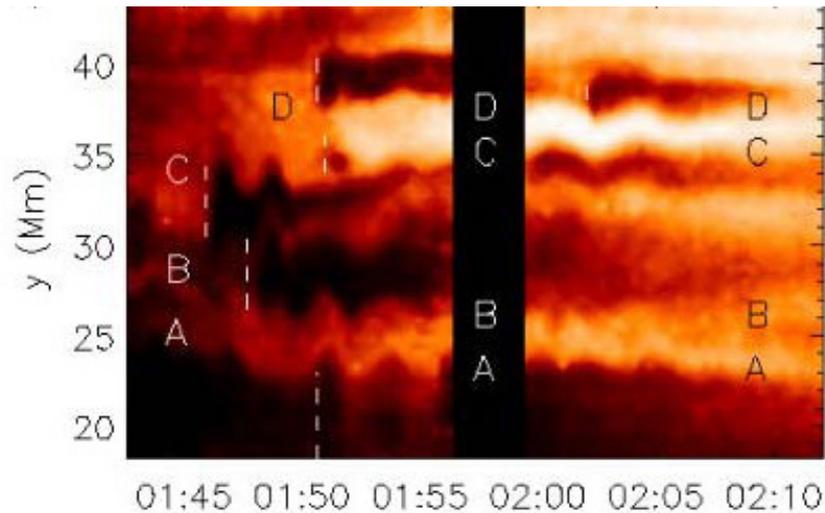


Figura 6-6: Variación de la densidad en la dirección transversal. TRACE 21 de Abril del 2002. [Verwichte *et al.*, 2005]

Estas dos descripciones opuestas del fenómeno tienen dificultades, la primera ha sido rechazada debido a que el material frío y denso debería emitir en alguna longitud de onda y ello no ha sido detectado, e.g., emisión de radio. Es por esto que la segunda interpretación, acerca de que los *tadpoles* están compuestos por plasma enrarecido, o como vacíos de plasma es la más aceptada. Sin embargo, esta interpretación tiene la dificultad de que si fueran modos excitados en arco magnético o cilindros magnéticos la velocidad característica debería ser la velocidad de Alfvén y las velocidades registradas son velocidades del orden de la velocidad del sonido del medio, mucho menores que las de Alfvén. Esta interpretación ha supuesto que para que el vacío de plasma pueda sostenerse con el movimiento y en el tiempo la presión magnética dentro de la zona de vacío debería ser mucho mayor que la presión del gas como para evitar que la región colapse, lo que significa que el valor del parámetro  $\beta$  dentro del *tadpole* debería ser menor que el valor externo. Se volverá sobre este punto más adelante.

En la Fig. 6-7 se muestra nuevamente el comportamiento de varios *tadpoles* pero en este caso se presenta la densidad en la dirección radial y en función del tiempo para la línea de puntos y guiones de la Fig. 6-4. En estas imágenes las zonas de color negro indican zonas donde se produce vacío.

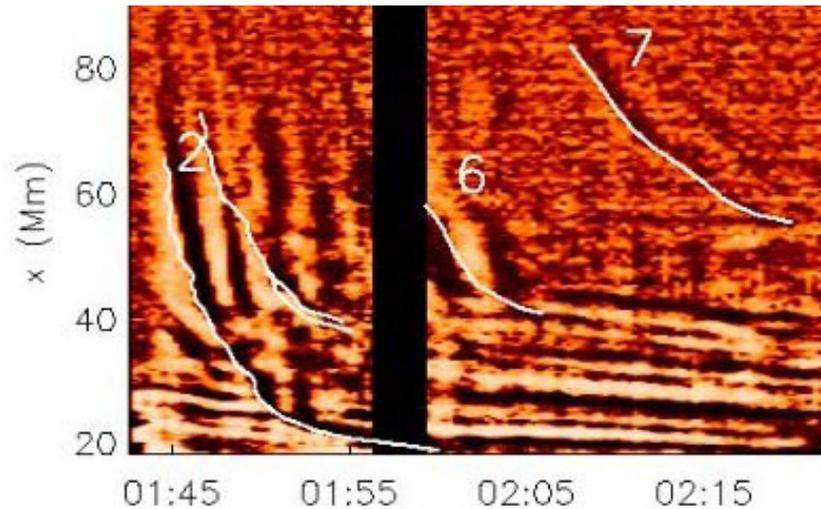


Figura 6-7: Variación de la densidad en la dirección radial. TRACE 21 de Abril del 2002. [Verwichte *et al.*, 2005]

En esta sección se ofrece una interpretación nueva al fenómeno físico de los *tadpoles* de la corona solar, mostrando que las regiones de vacío son creadas por la interacción de ondas no lineales. Resultados obtenidos con el código numérico desarrollado para resolver las ecuaciones de la MGD ideal y con las condiciones de borde e iniciales descritas en la sección anterior pueden observarse en las Figs. 6-8/13.

En la Fig. 6-8 se observa como varía la densidad en todo el dominio a medida que el tiempo evoluciona, destacándose que la variación llega a ser de casi un orden de magnitud.

En la Fig 6-9 se muestra, como varía el parámetro  $\beta$  y la temperatura, el primero manteniéndose debajo de la unidad pero siendo mayor dentro que fuera, y la temperatura siendo siempre mayor en la zona del *tadpole* que en la vecindad. Notar que el hecho de que el valor  $\beta$  dentro sea mayor que fuera del *tadpole* implica que debe descartarse la hipótesis sostenida por autores que sugieren el modelo de modos de cilindros.

En la Fig. 6-10 se observa la presión termodinámica y la presión magnética (suma de la termodinámica y la magnética) en la cual el fenómeno del *tadpole* desaparece, mostrando que la región de vacío se sostiene a pesar de que el sistema se encuentra en equilibrio de presiones. Esto muestra que la presión magnética no explica las estructuras de vacío, sino que ellas se deben a interacciones de ondas no lineales.

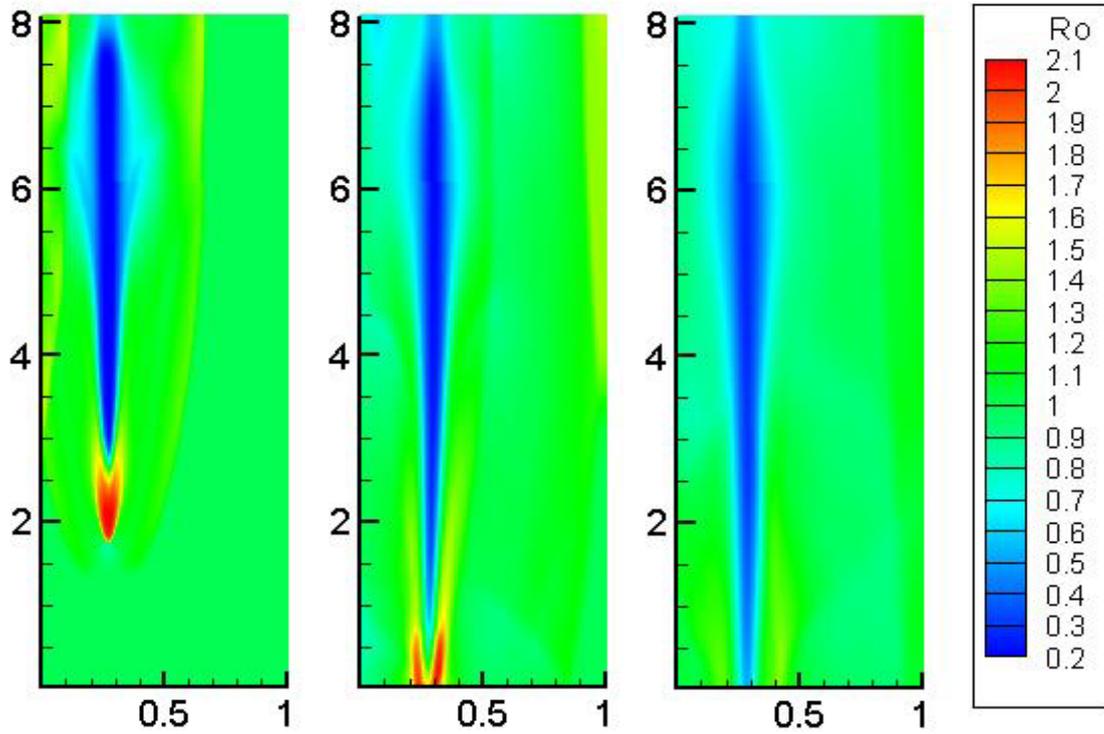


Figura 6-8: Contorno de densidad para  $t = 0.86, 2$  y  $4$ .

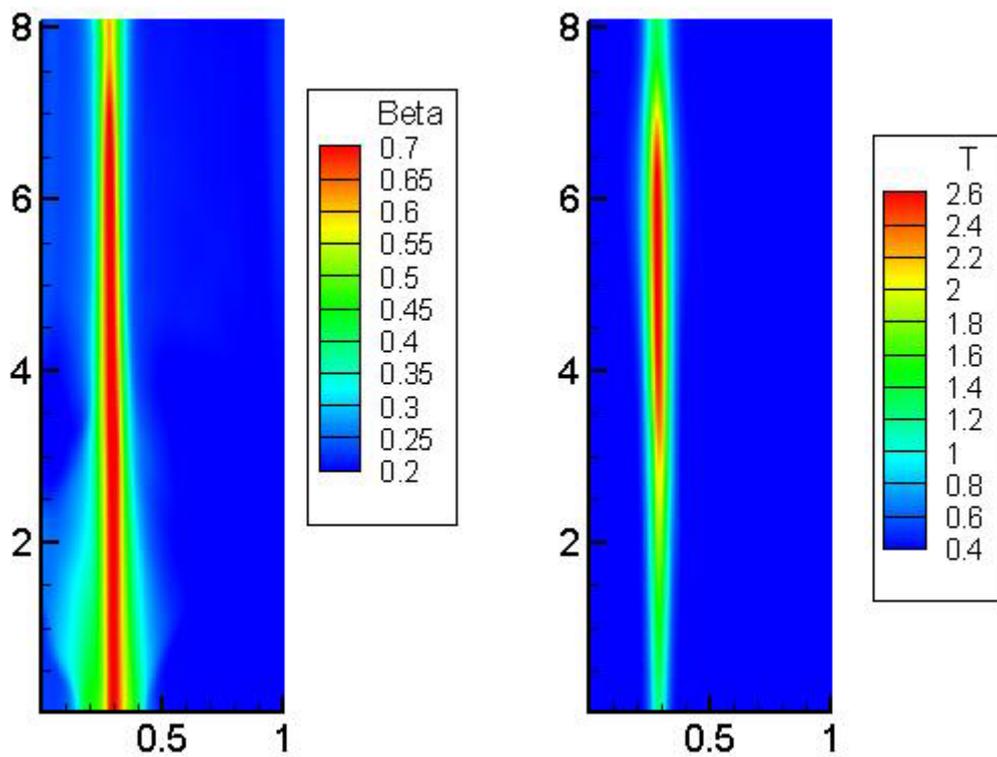


Figura 6-9: Contornos de  $\beta$  y temperatura para  $t = 4$ .

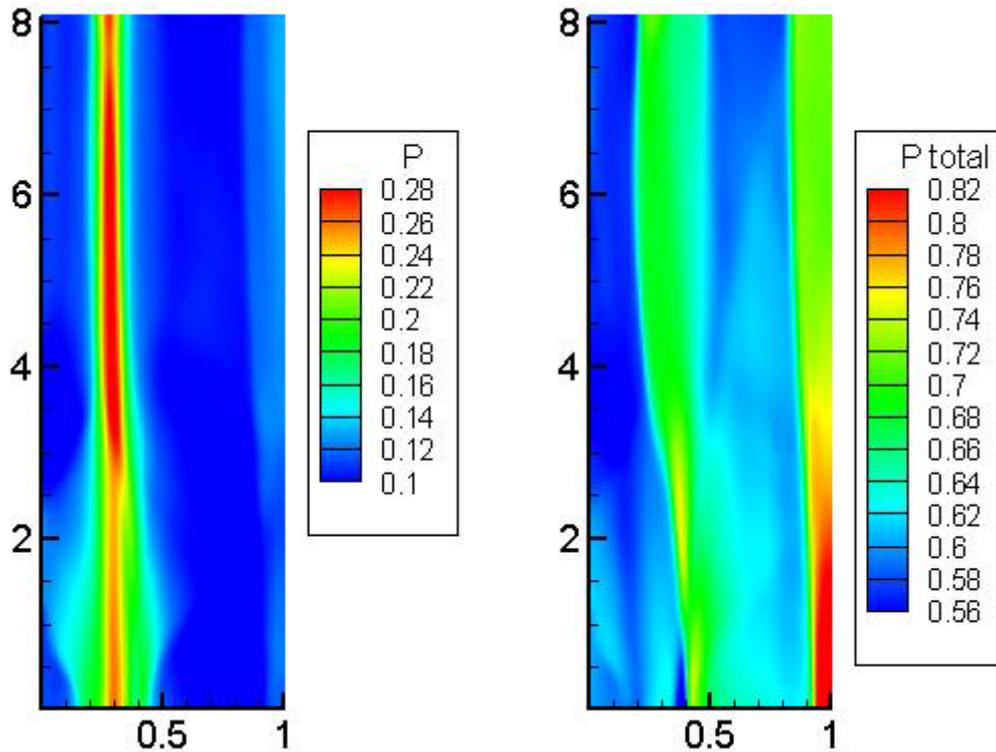


Figura 6-10: Contornos de presión termodinámica y presión total para  $t = 4$ .

Como se mencionó anteriormente las regiones de vacío son creadas por la interacción de ondas no lineales. Estas interacciones pueden entenderse en términos de una superposición de dos dinámicas más o menos independientes excitadas por una misma deposición localizada de energía modelada como un pulso intenso de presión. La independencia de las dos dinámicas se debe a la gran anisotropía impuesta por el campo magnético al medio. Ello se debe a que el transporte es paralelo al campo y es fuertemente inhibido a través del campo. Cada una de las dos dinámicas es una composición de ondas no lineales. La dinámica radial puede entenderse como la interacción de ondas no lineales y choques hidrodinámicos en los que el campo magnético tiene solo el rol de ser una guía de ondas. La dinámica descendente general, en esta dirección, se debe a que en la zona localizada arriba del fenómeno se produce una reflexión lo que simula la región de reconexión magnética que origina el pulso de presión inicial y hacia la superficie del sol tenemos una absorción de la perturbación. En la dirección transversal al campo encontramos una dinámica compuesta por la interacción de ondas y choques magnéticos transversales que rebotan en las zonas adyacentes de alta densidad produciendo una forma ondeada, tipo modos *kink* (modos

magnetoacústicos en cilindros). La forma de tipo *kink* ha sido la que ha llevado a otros autores a pensar que el fenómeno se debía a modos típicos observados en arcos coronales.

La dinámica mencionada puede observarse en la variación de densidad en función del tiempo para las direcciones radiales y transversales. En las Fig. 6-11 y 6-12 se observa dichas variaciones considerando como direcciones radiales y transversales a aquellas que pasan por el centroide de la perturbación inicial. En la Fig. 6-13 se muestra la variación de la densidad en función del tiempo para una dirección transversal ubicada a  $2 \cdot 10^7$  en el dominio.

Es importante observar la concordancia existente entre los datos observaciones obtenidos por el TRACE (Fig. 6-6 y Fig. 6-7) y los obtenidos a través de las simulaciones numéricas Figs. 6-11, 6-12 y 6-13, ver [Maglione *et al.*, 2010].

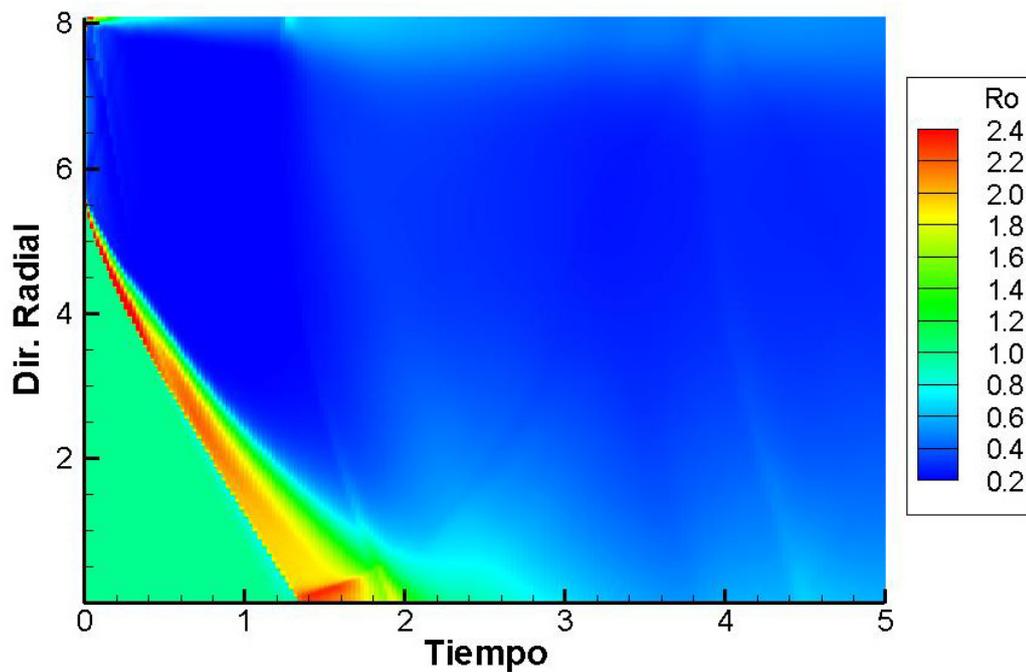


Figura 6-11: Contorno de densidad en función del tiempo y en la dirección radial centrodial.

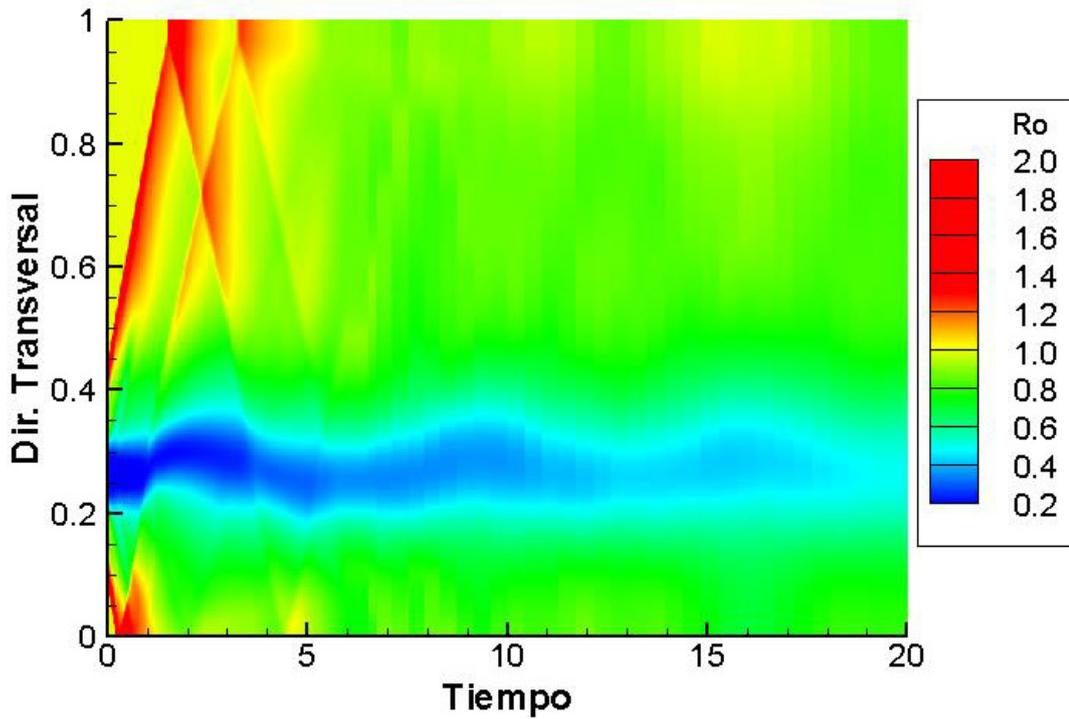


Figura 6-12: Contorno de densidad en función del tiempo y en la dirección transversal centrodial.

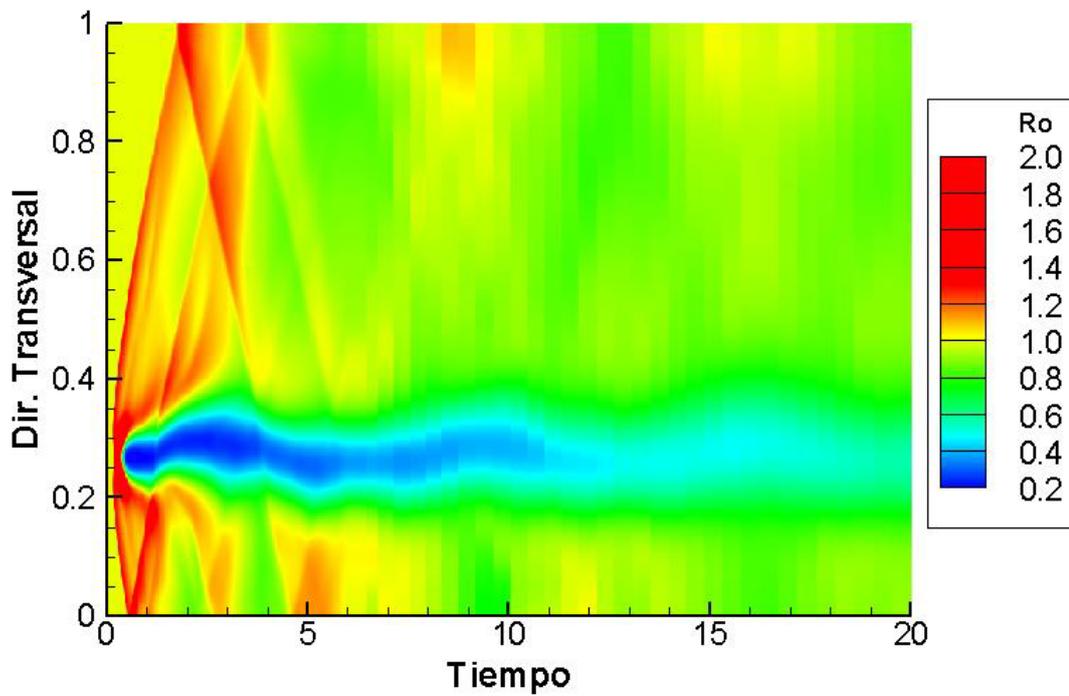


Figura 6-13: Contorno de densidad en función del tiempo y en la dirección transversal para un corte ubicado a  $2 \cdot 10^7$ .

## **Capítulo VII**

# **Conclusiones y Sugerencias de Futuros Trabajos**

*“Gran parte de las dificultades por las que atraviesa el mundo se deben a que los ignorantes están completamente seguros y los inteligentes llenos de dudas”. William Russell (1872 – 1970).*

## ***VII.1 Consideraciones Finales***

El modelo utilizado para simular flujos de plasma incorpora el estado del arte en lo que a métodos numéricos y modelos físicos se refiere.

La utilización de una forma conservativa permitió tratar las ecuaciones de una manera consistente asegurando la conservación de la masa, la cantidad de movimiento y la energía total.

El código numérico desarrollado fue verificado exitosamente a través de *benchmarks*. En el caso ideal los resultados obtenidos al resolver el problema de Riemann gasdinámico y magnetogasdínámico son satisfactorios y concordantes con los alcanzados por otros miembros de la comunidad científica, habiendo sido todos ellos contrastados a través de publicaciones especializadas, como oportunamente se mostró. En particular, en el caso magnetogasdínámico ideal el código fue sometido al *benchmark* de Brio y Wu, reconocido por la comunidad científica como “muy exigente”. En el caso real los resultados obtenidos en el problema del flujo de Hartmann han sido satisfactorios, el código numérico capta la naturaleza de la solución y el valor máximo en el campo magnético inducido. Es importante destacar que el código ha sido desarrollado con la intención de simular flujos dependientes del tiempo de fluidos compresibles y, al resolver el problema de Hartmann ha sido verificado con un *benchmark* que le exige resolver un problema de flujo incompresible y estacionario, características para las cuales no ha sido específicamente desarrollado.

La habilidad del esquema para capturar discontinuidades fue demostrada. La técnica numérica permitió capturar ondas de choque sin oscilaciones y a la vez lograr altos niveles de aproximación en regiones de flujo sin discontinuidades.

El análisis presentado de las funciones de disipación permitió no sólo ahondar en la comprensión del funcionamiento del esquema numérico sino que también abrió la posibilidad de profundizar su estudio. Se presentó una modificación del esquema numérico original de Harten-Yee incorporando un nuevo *sonic fix*. Los resultados numéricos 2D satisfacen correctamente las soluciones 1D ya publicadas. Las oscilaciones presentes con el esquema numérico original se han reducido notablemente

al aplicar el nuevo *sonic fix* en los puntos sónicos y en los de no convexidad. Esta nueva técnica tiene dos importantes ventajas: a) el método no necesita una calibración particular dependiente del problema, b) el método incrementa la viscosidad numérica solamente en un entorno de los puntos de causalidad acústica.

Al aplicar la metodología desarrollada en esta Tesis para resolver las ecuaciones de la magnetogasdinámica ideal en problemas astrofísicos, y en particular en la simulación de los *tadpoles* que se producen en la baja corona solar, se logró reproducir numéricamente las observaciones más detalladas que se conocen hasta ahora del fenómeno. Además se mostró que las regiones de vacío resultan ser una estructura emergente por la interacción de ondas no lineales ofreciendo así una nueva interpretación física del fenómeno de los *tadpoles*.

Como productos de este trabajo de Tesis se encuentran cuatro publicaciones en revistas internacionales y varias en congresos de la especialidad.

## ***VII.2 Futuros Trabajos***

Si bien el código ha demostrado su habilidad para simular flujos de plasma, todavía quedan tareas pendientes en el modelo físico y en el numérico. Algunas de ellas serán enunciadas en esta sección.

Una de las primeras hipótesis asumidas es la de fluido simple. Es entonces importante incorporar modelos de varias especies e incluso ionización, un primer paso en esta dirección es posiblemente un modelo de dos especies.

Es interesante considerar la posibilidad de incorporar la importante experiencia existente en flujos de gases con reacciones químicas a la simulación de flujos de plasma.

Debería considerarse levantar algunas de las hipótesis asumidas en la ley de Ohm generalizada, como por ejemplo la inclusión del término de Hall.

En lo que respecta al modelo numérico se puede mencionar que el problema fundamental es el siguiente: si se desea que el código sea una herramienta de diseño para futuros investigadores, con la cual se puedan simular muchas variantes de un mismo modelo o geometrías complejas, se requiere acelerar la convergencia manteniendo la exactitud. Una posible solución a este inconveniente sería considerar la paralelización del código. Complementaria a esta alternativa, y en particular al trabajar con la parte real o disipativa se puede considerar utilizar un esquema implícito de evolución en el tiempo.

Otro aspecto a contemplar es el uso de mallas desestructuradas para modelar geometrías más complejas. Esto implica incorporar no sólo conocimientos relacionados a generación de mallas sino también estudiar la extrapolación de la técnica TVD para este caso.

En el caso específico de la simulación del fenómeno de los *tadpoles* es importante incluir reconexión magnética utilizando las ecuaciones de la MGD real.

## REFERENCIAS

Aschwanden M. J., *Physics of the Solar Corona*, Springer and Praxis Publishing, 2 ed, Germany, 2005.

Balbas J., Tadmor E., Wu C., “Non-oscillatory central schemes for one and two dimensional MHD equations”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 201, 1, pp. 261-285, 2004.

Biskamp D., *Nonlinear magnetohydrodynamics*. Cambridge University Press. 1997.

Brackbill J. and Barnes D., “The effect of nonzero  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  on the numerical solution of the magnetohydrodynamic equations”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 35, 426, 1980.

Brio M. and Wu C., “An upwind differencing scheme for the equations of magnetohydrodynamics”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 45, pp. 400-422, 1988.

Bucci J. y Elaskar S., “Análisis numérico de la sensibilidad del tubo de choque magnetogasdínámico”. Trabajo final de Ingeniería Aeronáutica UNC. 2002.

Chung T. J., *Computational Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, ISBN 0-521-59416-2, 2002

Colella P., “Multidimensional upwind methods for hyperbolic consevations law”. Lawrence Berkeley Lab Report LBL-17023, 1984.

Costa A., Elaskar S., Fernández C. A., Martínez G., “Simulation of dark lanes in post-flare supra-arcade”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, Vol. 400, 1, pp. L85–L89, 2009.

Courant R. and Friedrich K., *Supersonic Flow and Shock Waves*, Springer, New York, 1999.

Currant F., “Electric propulsion activities in U.S. industry”, Proceedings 26<sup>th</sup> International Electric Propulsion Conference IEPC-99-01, Kitakyushu, Japon, Octubre, 1999.

D'Ambrosio D. and D. Giordano, “Electromagnetic Flows Dynamics for Aerospace Applications. Part I: Classification and Critical Review of Physical Models”, Proceedings 35th AIAA Plasmadynamics and Láser Conference, Paper 2004-2165, 2004.

DiCapua M. S., “Energy Deposition in Parallel-Plate Plasma Accelerators”. PhD. Thesis Princeton University, 1971.

Elaskar S., Sánchez C., Brito H., “Numerical tools for the simulation of the APPT behaviour: arc generation and plasma flow”. Proceeding 3th International Conference on Spacecraft Propulsion, European Space Agency, pp. 501-508, Cannes, France October, 2000.

Elaskar S. and Brito H., “Numerical solution of the magnetogasdynamics equations as a tools to design of pulsed plasma thruster”. Proceedings 27th International Electric Propulsion Conference, IEPC 2001, Pasadena, 2001.

Evans C. R. and Hawley J. F., “Simulation of magnetohydrodynamic flows: A constrained transport method”, *Astrophysics Journal*, Vol. 332, pp. 659-677, 1988.

Godunov S. K., “A difference method for the numerical calculation of discontinuous solutions of hydrodynamics equations”. *Matematicheskii Sbornik*, Vol. 47, 3, pp. 271-306, 1959.

Goedbloed J. P., Keppens R., Poedts S., *Advanced Magnetohydrodynamics with Applications to Laboratory and Astrophysical Plasmas*, Cambridge University Press, New York, 2010.

Goldston R. and Rutherford P., *Introduction to Plasma Physics*, Institute of Physics Publishing, London, 2003.

Harten A., “High resolution schemes for hyperbolic conservation laws”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 49, 1983.

Harten A., Hymán J. M., Lax P. D., Keyfitz B., “On finite-difference approximations and entropy conditions for shocks”. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol. 29, 3, pp. 297-322, 1976.

Jahn R. G., *Physics of Electric Propulsion*. McGraw-Hill, 1968.

Jahn R. G., Choueiri E. Y., *Electric Propulsion*, Encyclopedia of Physical Science and Technology, Third Edition, Vol. 5, Academic Press, 2002.

Kantrowitz A. R. and Petschek H. E., *MHD characteristics and shock waves, plasma physics in theory and application*, McGraw-Hill, New York, 1966.

Kennel C. F., Blandford R. D., Coppi P., “MHD intermediate shock discontinuities. Part 1. Rankine-Hugoniot conditios”, *Journal of Plasma Physics*, Vol. 0, 1989.

Keppens R., *Nonlinear MHD: Numerical Concepts*, Carolus Magnus Euro-Summer School on Plasma and Fusion Energy Physics, Brussels, Belgium, September 1-12, 2003.

Kirk J. G., Mlerose D. B., Priest E. R., *Plasma Astrophysics*, Springer-Verlag, Germany, 1994

LeVeque R. J., *Numerical Methods for Conservations Laws*, Birkäuser, Germany, 1992.

LeVeque R. J., Milhalas D., Dorfi E. A., Muller E., *Computational Methods for Astrophysical Fluid Flow*, Springer-Germany, 1998

LeVeque R. J., *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press, 2002.

Maglione L. S., Elaskar S. A., Brito H. H., “Solución de las ecuaciones magneto-gasdínicas bidimensionales mediante un esquema TVD”, MECOM 2002 – First South-American Congress on Computational Mechanics. Publicado en *Mecánica Computacional*, ISSN 1666-6070, Vol. 21, pp. 55-66, 2002.

Maglione L. S., Elaskar S. A., Brito H. H., “Numerical simulation of two-dimensional, non-steady, ideal magnetogasdynamics equations”, *Proceeding 28<sup>th</sup> International Electric Propulsion Conference IEPC*, 70, Toulouse, Francia, 2003.

Maglione L. S., Elaskar S. A., Brito H. H., Dean R., “Simulación Numérica de Flujos Magnetogasdínicos Reales en Dos Dimensiones”, ENIEF 2006: XV Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones. Publicado en *Mecánica Computacional*, ISSN 1666-6070, Vol. 25, pp. 2475-2484, 2006.

Maglione L. S., Elaskar S. A., Brito H. H., Dean R., Ghirardotto M., “Simulación por Volúmenes Finitos del Flujo de Hartmann”, ENIEF 2007: XVI Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones. Publicado en *Mecánica Computacional*, ISSN 1666-6070, Vol. 26, pp. 3195-3204, 2007.

Maglione L., Elaskar S., Brito H., Dean R., “A software engineering for numerical simulation of 2D non-stationary real MGD flows”, *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, ISSN 1617-7061, Vol. 7, No. 1, pp. 2010027-2010028, 2007.

Maglione L., Elaskar S., Brito H., Dean R. and Lifschitz L., “Numerical Simulations of 2D Non-Stationary Real MGD Flows”. *Proceedings 10th Pan American Congress of Applied Mechanics - PACAM X*, ISBN 978-0-615-18385-5, Cancun, Mexico, 2008.

Maglione L. y Elaskar S., “A Sonic Fix for Ideal Magnetogasdynamics Equations”, CILAMCE 2010, XXXI Congreso Ibero-Latino-Americano de Métodos Computacionales en la Ingeniería, Publicado en *Mecánica Computacional*, ISSN 1666-6070, Vol. 29, pp. 4977-4993, 2010.

Maglione L., Elaskar S., Brito H. and Dean R. “A Sonic Fix for Ideal Magnetogasdynamics Equations Using the Harten-Yee TVD Scheme”, *Aerospace Science and Technology*, ISSN 1270-9638, en prensa, 2011.

Maglione L. S., Schneiter E. M, Costa A., Elaskar S. A., “Simulation of dark lanes in post-flare supra-arcades. III. A 2D simulation”, *Astronomy and Astrophysics Journal*, ISSN 1432-0746, en prensa, 2010.

Martinez M., Elaskar S., Maglione L., and Scarabino A., “Numerical Simulation of 3-D Non-Stationary Ideal Magnetogasdynamics Flow”, *Latin American Applied Research*, ISSN 03270793, Vol. 41, pp. 191-198, 2011.

Molokov S. S., Moreau R., Moffatt H., *Magnetohydrodynamics Historical Evolution and Trends*. Series: Fluid Mechanics and Its Applications, Vol. 80, ISBN: 978-1-4020-4832-6, Springer-Germany, 2007.

Myong R. S., and Roe P. L., “On Godunov-Type Schemes for Magnetohydrodynamics: 1. A Model System”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 147, 2, pp. 545-567, 1998.

Oberkampf W. L. and Trucano T. G., “Verification and Validation in Computational Fluid Dynamics”. Sandia National Laboratories, SAND2002-0529, en <http://infoserve.sandia.gov/cgi-bin/techlib/access-control.pl/2002/020529.pdf>, 2002.

Polovin R. V. and Demutskii V. P., *Fundamentals of magnetohydrodynamics*. Consultants Bureau. 1990.

Powell K., “An approximate Riemann solver for magnetohydrodynamics (that works in more than one dimension)”, NASA Contract No NAS1-19480, ICASE, NASA Langley Research Center, Hampton, 1995.

Roe P. and Balsara D., “Notes on the eigensystem of magnetohydrodynamics”, *SIAM Journal of Applied Mathematics*, Vol. 56, pp. 57-67, 1996.

Roe P. L., “Aproximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference scheme”. *Journal of Computational Physics* 1981.

Sankaran K., “Simulation of MPD Flows Using a Flux-Limited Numerical Method for the MHD Equations”, MSc. Thesis Princeton University, 2001.

Schulz W., Costa A., Elaskar S., Cid G., “Simulation of dark lanes in post-flare supra-arcades – II. A contribution to the remote sensing of the coronal magnetic field”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, Vol. 407, 1, pp. L89–L93, 2010.

Scott B. D., *An Introduction to MHD, or Magnetic Fluid Dynamics*, IPP Summer University for Plasma Physics, Greifswald, 2005.

Serna S. A., “Characteristic-based nonconvex entropy-fix upwind scheme for the ideal magnetohydrodynamic equations”, *Journal of Computational Physics*, 228, 11, pp. 4232-4247, 2009.

Shumlak U. and Udrea B., “An Aproximate Riemann Solver for MHD Computations on Parallel Architectures”, Proceedings 15<sup>th</sup> AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, AIAA paper N° 2001-2591, Anaheim, California, 11-14 June, 2001.

Sutton G. and Sherman A., *Engineering Magnetohydrodynamics*, McGraw-Hill, New York, 1965.

Spitzer L., *Physics of Fully Ionized Gases*, Interscience, New York, 1956.

Tanaka T., “Finite Volume TVD Scheme on an Unstructured Grid System for Three-Dimensional MHD Simulation of Inhomogeneous Systems Including Strong Background Potential Fields”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 111, pp. 381-389, 1994.

Toro E. F., *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*, 2nd Ed., Springer-Verlag, Germany, 1999.

Toro E. F and Clarke J. F, *Numerical Methods for Wave Propagation (Fluid Mechanics and Its Applications)*, 1st Ed., Springer, 2010.

Tóth G., “The  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  constraint in shock-capturing magnetohydrodynamics codes”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 161, pp. 605-652, 2000.

Udrea B., “An advanced implicit solver for MHD”, PhD Thesis University of Washington, 1999.

Van Leer B., Lee W. T., Powell K. G., “Sonic-Point Capturing”, Proceedings 9th Computational Fluid Dynamics Conference, AIAA Paper-89-1945-CP, New York, USA, 1989.

Verwichte E., Nakariakov V. M., Cooper F. C., “Transverse waves in a post-flare supra-arcade”, *Astronomy & Astrophysics Journal*, 2183, 2005.

Villani D. D., “Energy Loss Mechanisms in a Magnetoplasma dynamic Arcjet”. PhD. Thesis Princeton University, 1982.

Wang J., Brinza D., Young M., “Modeling ion propulsion plasma environment for Deep Space One”, Proceeding 36th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference, AIAA Paper No. 2000-3528, Huntsville, July, 2000.

White F. M., *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill, 3 ed., ISBN 0-07-240231-8, 2005.

Yee H., “A class of high-resolution explicit and implicit shock-capturing methods”, Nasa Report N89-25652, 1989.

Yee H., Warming R., Harten A., “Implicit total variations diminishing (TVD) schemes for steady-state calculations”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 57, pp. 327 – 360, 1985.

Zalesak S. T., “A preliminary comparison of modern shock-capturing schemes: linear advection”. *Advances in computers methods for partial differential equations-VI*, IMACS, New Brunswick, 1987.

Zachary A., Malagoli A., Colella P., “A higher order Godunov method for multidimensional ideal magnetohydrodynamics”, *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 15, pp. 263 –284, 1994.

Ziemer J. K., “Performance Scaling of Gas-Fed Pulsed Plasma Thrusters”, PhD. Thesis Princeton University, June, 2001.

## Apéndice A

# Forma Adimensional de las Ecuaciones de la Magnetogasdínámica Real

Al sistema de ecuaciones en derivadas parciales de la magnetogasdínámica real es conveniente expresarlo en forma adimensional.

VARIABLES DE REFERENCIA UTILIZADAS:

Tamaño característico del plasma de referencia	$a$
Campo magnético de referencia	$B_{ref}$
Densidad de referencia	$\rho_{ref}$
Resistividad de referencia	$\eta_{ref}$
Viscosidad cinemática de referencia	$\nu_{ref}$
Coefficiente de conducción térmica de referencia	$k_{ref}$
Coefficiente de difusividad térmica	$\alpha_{ref} = \frac{k_{ref}}{\rho_{ref}c_p}$
Velocidad de referencia – Alfvén –	$c_a = \frac{B_{ref}}{\sqrt{\mu_0\rho_{ref}}}$

Variables y coeficientes adimensionales:

$$\bar{x} = \frac{x}{a} \quad (\text{A.1})$$

$$\bar{y} = \frac{y}{a} \quad (\text{A.2})$$

$$\bar{z} = \frac{z}{a} \quad (\text{A.3})$$

$$\bar{t} = \frac{t}{a/c_a} \quad (\text{A.4})$$

$$\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} \quad (\text{A.5})$$

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{ref}} \quad (\text{A.6})$$

$$\bar{u} = \frac{\underline{u}}{c_a} \quad (\text{A.7})$$

$$\bar{B} = \frac{\underline{B}}{B_{ref}} \quad (\text{A.8})$$

$$\bar{e} = \frac{e}{B_{ref}^2 / \mu_o} \quad (\text{A.9})$$

$$\bar{p} = \frac{p}{B_{ref}^2 / \mu_o} \quad (\text{A.10})$$

$$\bar{T} = \frac{T c_p}{c_a^2} \quad (\text{A.11})$$

$$\bar{v} = \frac{v}{v_{ref}} \quad (\text{A.12})$$

$$\bar{\eta} = \frac{\eta}{\eta_{ref}} \quad (\text{A.13})$$

$$\bar{k} = \frac{k}{k_{ref}} \quad (\text{A.14})$$

Números adimensionales característicos utilizados:

*Número de Reynolds*  $R_e$  es una medida de la relación existente entre las fuerzas inerciales y las fuerzas viscosas existentes en el fluido. Si el número de Reynolds es pequeño entonces el efecto de la viscosidad es importante a lo largo del flujo. Si el número de Reynolds es grande entonces el efecto de la viscosidad es importante sólo en regiones donde se presentan las tensiones cortantes como en regiones cercanas a una frontera sólida.

$$R_e = \frac{aU}{\nu_{ref}} \quad (\text{A.15})$$

*Número de Lundquist*  $L_u$  describe como el campo magnético es influenciado por el flujo, es una medida de la relación existente entre la velocidad de flujo y la velocidad de difusión del campo magnético. Para  $L_u \gg 1$  el campo magnético se mueve con el flujo y para  $L_u \ll 1$  el campo magnético no tiene una notable influencia en el movimiento del flujo.

$$L_u = \frac{\mu_0 a U}{\eta_{ref}} \quad (\text{A.16})$$

*Número de Peclet*  $P_e$  es una medida de la relación existente entre la difusión térmica y la conducción térmica. Para un  $P_e$  grande la advección térmica es más importante que la conducción.

$$P_e = \frac{aU}{\alpha_{ref}} \quad (\text{A.17})$$

*Número de Alfvén*  $A_l$  es una medida de la proporción existente entre la velocidad de Alfvén y la velocidad del flujo.

$$A_l = \frac{c_a}{U} \quad (\text{A.18})$$

Habiendo definido las variables de referencia, los coeficientes adimensionales, las variables adimensionales y los números característicos es posible ahora adimensionalizar el sistema de ecuaciones de la MGD real:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \underline{u} \\ \underline{B} \\ e \end{bmatrix} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} \rho \underline{u} \\ \rho \underline{u} \underline{u} - \frac{1}{\mu_o} \underline{B} \underline{B} + I \left( p + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_o} \right) \\ \underline{u} \underline{B} - \underline{B} \underline{u} \\ \left( e + p + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_o} \right) \underline{u} - (\underline{B} \cdot \underline{u}) \frac{\underline{B}}{\mu_o} \end{bmatrix} = \quad (\text{A.19})$$

$$\nabla \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{\tau} \\ \underline{E}_r \\ \underline{u} \cdot \underline{\tau} + \underline{k} \cdot \nabla T - \frac{1}{\mu_o^2} \left[ \underline{\eta} \cdot (\nabla \times \underline{B}) \right] \times \underline{B} \end{bmatrix}$$

donde:

$$\tau_{ij} = \mu \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \underline{u} \right] \quad (\text{A.20})$$

y

$$\nabla \cdot \underline{E}_r = -\nabla \times \left[ \frac{1}{\mu_o} \underline{\eta} \cdot (\nabla \times \underline{B}) \right] \quad (\text{A.21})$$

- *Forma Adimensional de la Ecuación de Conservación de la Masa*

La primera fila de (A.19) se expresa como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0 \quad (\text{A.22})$$

Introduciendo en (A.22) las variables adimensionales (A.6), (A.4), (A.5) y (A.7)

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \rho_{ref})}{\partial (\bar{t} a / c_a)} + \frac{1}{a} \bar{\nabla} \cdot (\bar{\rho} \rho_{ref} \bar{\underline{u}} c_a) = 0 \quad (\text{A.23})$$

Trabajando algebraicamente

$$\frac{\rho_{ref} c_a}{a} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{t}} + \frac{\rho_{ref} c_a}{a} \bar{\nabla} \cdot (\bar{\rho} \bar{\underline{u}}) = 0 \quad (\text{A.24})$$

Finalmente

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{t}} + \bar{\nabla} \cdot (\bar{\rho} \bar{\underline{u}}) = 0 \quad (\text{A.25})$$

- *Forma Adimensional de la Ecuación de Conservación de la Cantidad de Movimiento*

La segunda fila de (A.19) se expresa como:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \underline{u}) + \nabla \cdot \left[ \rho \underline{u} \underline{u} - \frac{1}{\mu_o} \underline{B} \underline{B} + I \left( p + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_o} \right) \right] = \nabla \cdot \underline{\tau} \quad (\text{A.26})$$

donde

$$\tau_{ij} = \mu \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \underline{u} \right] \quad (\text{A.27})$$

Introduciendo en (A.26) las variables adimensionales (A.6), (A.4), (A.5), (A.7), (A.8) y (A.10)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (\bar{\rho} \rho_{ref} \bar{u} c_a)}{\partial (\bar{t} a / c_a)} + \frac{1}{a} \bar{\nabla} \cdot \left[ \bar{\rho} \rho_{ref} \bar{u} c_a \bar{u} c_a - \frac{1}{\mu_o} \bar{B} B_{ref} \bar{B} B_{ref} \right] \\ & + \frac{1}{a} \bar{\nabla} \cdot \left[ \bar{I} \left( \frac{\bar{p} B_{ref}^2}{\mu_o} + \frac{1}{2} \frac{\bar{B}^2 B_{ref}^2}{\mu_o} \right) \right] = \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

$$\frac{1}{a} \bar{\nabla} \cdot \left[ \bar{\mu} \mu_{ref} \left[ \left( \frac{c_a}{a} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_j} + \frac{c_a}{a} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{c_a}{a} \bar{\nabla} \cdot \bar{u} \right] \right]$$

Introduciendo la definición de la velocidad de Alfvén

$$\frac{\rho_{ref} c_a^2}{a} \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{u})}{\partial \bar{t}} + \frac{\rho_{ref} c_a^2}{a} \bar{\nabla} \cdot \left[ \bar{\rho} \bar{u} \bar{u} - \bar{B} \bar{B} + \bar{I} \left( \bar{p} + \frac{1}{2} \bar{B}^2 \right) \right] = \quad (\text{A.29})$$

$$\frac{c_a}{a^2} \bar{\nabla} \cdot \left[ \bar{\mu} \mu_{ref} \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \bar{\nabla} \cdot \bar{u} \right] \right]$$

Considerando la relación entre la viscosidad cinemática y absoluta

$$\nu_{ref} = \frac{\mu_{ref}}{\rho_{ref}} \quad (\text{A.30})$$

Se obtiene:

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u})}{\partial\bar{t}} + \bar{\nabla} \cdot \left[ \bar{\rho}\bar{u}\bar{u} - \bar{B}\bar{B} + I \left( \bar{p} + \frac{1}{2}\bar{B}^2 \right) \right] = \quad (A.31)$$

$$\frac{\nu_{ref}}{c_a a} \bar{\nabla} \cdot \left[ \bar{\mu} \left[ \left( \frac{\partial\bar{u}_i}{\partial\bar{x}_j} + \frac{\partial\bar{u}_j}{\partial\bar{x}_i} \right) - \frac{2}{3}\delta_{ij}\bar{\nabla} \cdot \bar{u} \right] \right]$$

Introduciendo los números adimensionales Reynolds (A.15) y Alfvén (A.18) se alcanza finalmente:

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u})}{\partial\bar{t}} + \bar{\nabla} \cdot \left[ \bar{\rho}\bar{u}\bar{u} - \bar{B}\bar{B} + I \left( \bar{p} + \frac{1}{2}\bar{B}^2 \right) \right] = \frac{1}{R_e A_l} \bar{\nabla} \cdot \bar{\tau} \quad (A.32)$$

donde

$$\bar{\tau} = \bar{\mu} \left[ \left( \frac{\partial\bar{u}_i}{\partial\bar{x}_j} + \frac{\partial\bar{u}_j}{\partial\bar{x}_i} \right) - \frac{2}{3}\delta_{ij}\bar{\nabla} \cdot \bar{u} \right] \quad (A.33)$$

- *Forma Adimensional de la Ecuación de Inducción*

La tercer fila de (A.19) se expresa como:

$$\frac{\partial\bar{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{u}\bar{B} - \bar{B}\bar{u}) = -\nabla \times \left[ \frac{1}{\mu_o} \bar{\eta} \cdot (\nabla \times \bar{B}) \right] \quad (A.34)$$

Introduciendo en (A.34) las variables adimensionales (A.8), (A.4), (A.5), (A.7) y el coeficiente adimensional (A.13)

$$\frac{\partial(\bar{\mathbf{B}}\mathbf{B}_{ref})}{\partial(\bar{t}a/c_a)} + \frac{1}{a}\bar{\nabla}\cdot[\bar{u}c_a\bar{\mathbf{B}}\mathbf{B}_{ref} - \bar{u}c_a\bar{\mathbf{B}}\mathbf{B}_{ref}] =$$

(A.35)

$$-\frac{1}{a}\bar{\nabla}\times\left[\frac{1}{\mu_o}\eta_{ref}\bar{\eta}\cdot\left(\frac{1}{a}\bar{\nabla}\times\bar{\mathbf{B}}\mathbf{B}_{ref}\right)\right]$$

$$\frac{\mathbf{B}_{ref}c_a}{a}\frac{\partial\bar{\mathbf{B}}}{\partial\bar{t}} + \frac{\mathbf{B}_{ref}c_a}{a}\bar{\nabla}\cdot[\bar{u}\bar{\mathbf{B}} - \bar{u}\bar{\mathbf{B}}] =$$

(A.36)

$$-\frac{\eta_{ref}\mathbf{B}_{ref}}{a^2\mu_o}\bar{\nabla}\times\left[\bar{\eta}\cdot(\bar{\nabla}\times\bar{\mathbf{B}})\right]$$

Introduciendo los números adimensionales Lundquist (A.16) y Alfvén (A.18) se obtiene finalmente:

$$\frac{\partial\bar{\mathbf{B}}}{\partial\bar{t}} + \bar{\nabla}\cdot[\bar{u}\bar{\mathbf{B}} - \bar{u}\bar{\mathbf{B}}] = -\frac{1}{L_u A_l}\bar{\nabla}\times\left[\bar{\eta}\cdot(\bar{\nabla}\times\bar{\mathbf{B}})\right]$$

(A.37)

$$\frac{\partial\bar{\mathbf{B}}}{\partial\bar{t}} + \bar{\nabla}\cdot[\bar{u}\bar{\mathbf{B}} - \bar{u}\bar{\mathbf{B}}] = \frac{1}{L_u A_l}\bar{\nabla}\cdot\bar{\mathbf{E}}_r$$

(A.38)

- *Forma Adimensional de la Ecuación de Conservación de la Energía*

La cuarta fila de (A.19) se expresa como:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla\cdot\left[\left(e + p + \frac{1}{2}\frac{\mathbf{B}^2}{\mu_o}\right)\underline{u} - (\mathbf{B}\cdot\underline{u})\frac{\mathbf{B}}{\mu_o}\right] =$$

(A.39)

$$\nabla\cdot\left\{\underline{u}\cdot\underline{\tau} + k\cdot\nabla T - \frac{1}{\mu_o^2}\left[\bar{\eta}\cdot(\nabla\times\bar{\mathbf{B}})\right]\times\bar{\mathbf{B}}\right\}$$

Introduciendo en (A.34) las variables adimensionales (A.9), (A.4), (A.5), (A.9), (A.10), (A.8), (A.7), (A.11) y los coeficiente adimensionales (A.14) y (A.13)

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \left( \bar{e} B_{ref}^2 / \mu_o \right)}{\partial (\bar{t} a / c_a)} + \frac{1}{a} \bar{\nabla} \cdot \left[ \left( \frac{\bar{e} B_{ref}^2}{\mu_o} + \frac{\bar{p} B_{ref}^2}{\mu_o} + \frac{1}{2} \frac{\bar{B}^2 B_{ref}^2}{\mu_o} \right) \bar{u} c_a \right] \\
 & - \frac{1}{a} \bar{\nabla} \cdot \left[ (\bar{B} \cdot \bar{u}) \bar{B} \frac{B_{ref}^2 c_a}{\mu_o} \right] = \frac{1}{a} \bar{\nabla} \cdot \left\{ k_{ref} \bar{k} \cdot \bar{\nabla} \bar{T} \frac{1}{a} \frac{c_a^2}{c_p} \right\} \\
 & + \frac{1}{a} \bar{\nabla} \cdot \left\{ c_a \bar{u} \cdot \left[ \bar{\mu} \mu_{ref} \frac{c_a}{a} \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \bar{\nabla} \cdot \bar{u} \right] \right] \right\} \\
 & - \frac{1}{a} \bar{\nabla} \cdot \left\{ - \frac{1}{\mu_o^2} \left[ \eta_{ref} \bar{\eta} \cdot \left( \frac{B_{ref}}{a} (\bar{\nabla} \times \bar{B}) \right) \right] \times B_{ref} \bar{B} \right\} \tag{A.40}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{B_{ref}^2 c_a}{a \mu_o} \frac{\partial \bar{e}}{\partial \bar{t}} + \frac{B_{ref}^2 c_a}{a \mu_o} \bar{\nabla} \cdot \left[ \left( \bar{e} + \bar{p} + \frac{1}{2} \bar{B}^2 \right) \bar{u} - (\bar{B} \cdot \bar{u}) \bar{B} \right] = \\
 & + \frac{k_{ref}}{a^2} \frac{c_a^2}{c_p} \bar{\nabla} \cdot \left\{ \bar{k} \cdot \bar{\nabla} \bar{T} \right\} \\
 & + \frac{c_a^2}{a^2} \mu_{ref} \bar{\nabla} \cdot \left\{ \bar{u} \cdot \left[ \bar{\mu} \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \bar{\nabla} \cdot \bar{u} \right] \right] \right\} \\
 & - \frac{\eta_{ref} B_{ref}^2}{a^2 \mu_o^2} \bar{\nabla} \cdot \left\{ \left[ \bar{\eta} \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{B}) \right] \times \bar{B} \right\} \tag{A.41}
 \end{aligned}$$

Trabajando algebraicamente e introduciendo los números adimensionales Reynolds (A.15), Alfvén (A.18), Lundquist (A.16), Peclet (A.17) junto con (A.33) se obtiene finalmente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{e}}{\partial \bar{t}} + \bar{\nabla} \cdot \left[ \left( \bar{e} + \bar{p} + \frac{1}{2} \bar{B}^2 \right) \bar{u} - (\bar{B} \cdot \bar{u}) \bar{B} \right] &= \frac{1}{R_e A_l} \bar{\nabla} \cdot \{ \bar{u} \cdot \bar{\tau} \} \\ &+ \frac{1}{P_e A_l} \bar{\nabla} \cdot \{ \bar{k} \cdot \bar{\nabla} \bar{T} \} - \frac{1}{L_u A_l} \bar{\nabla} \cdot \left\{ \left[ \bar{\eta} \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{B}) \right] \times \bar{B} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

- *Forma Adimensional del Sistema de Ecuaciones de la Magnetogasdínámica Real*

Escribiendo las ecuaciones (A.25), (A.32), (A.37) y (A.42) en una forma más compacta:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}} \begin{bmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho} \bar{u} \\ \bar{B} \\ \bar{e} \end{bmatrix} + \bar{\nabla} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\rho} \bar{u} \\ \bar{\rho} \bar{u} \bar{u} - \bar{B} \bar{B} + I \left( \bar{p} + \frac{1}{2} \bar{B}^2 \right) \\ \bar{u} \bar{B} - \bar{B} \bar{u} \\ \left( \bar{e} + \bar{p} + \frac{1}{2} \bar{B}^2 \right) \bar{u} - (\bar{B} \cdot \bar{u}) \bar{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\bar{\tau}}{R_e A_l} \\ \frac{\bar{E}_r}{L_u A_l} \\ \frac{\bar{u} \cdot \bar{\tau}}{R_e A_l} - \frac{\left[ \bar{\eta} \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{B}) \right] \times \bar{B}}{L_u A_l} + \frac{\bar{k} \cdot \bar{\nabla} \bar{T}}{P_e A_l} \end{bmatrix} \quad (\text{A.43})$$

## Apéndice B

### Matrices Jacobianas de los Flujos

El sistema de EDP de la MGD ideal en forma adimensional, expresado en un sistema de coordenadas cartesianas ortonormales, y en función de las variables primitivas está dado como:

$$\frac{\partial \underline{W}}{\partial t} + [A_p] \frac{\partial \underline{W}}{\partial x} + [B_p] \frac{\partial \underline{W}}{\partial y} = \underline{0} \quad (\text{B.1})$$

con

$$\underline{W} = (\rho, u_x, u_y, u_z, B_x, B_y, B_z, p)^T \quad (\text{B.2})$$

A posteriori se obtendrán las sucesivas filas de las matrices jacobianas de los flujos en términos de las variables primitivas de la Ec. (B.1) partiendo de la forma conservativa de la MGD ideal (B.3).

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \underline{u} \\ \underline{B} \\ e \end{bmatrix} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} \rho \underline{u} \\ \rho \underline{u} \underline{u} - \underline{B} \underline{B} + I \left( p + \frac{1}{2} B^2 \right) \\ \underline{u} \underline{B} - \underline{B} \underline{u} \\ \left( e + p + \frac{1}{2} B^2 \right) \underline{u} - (\underline{B} \cdot \underline{u}) \underline{B} \end{bmatrix} = \underline{0} \quad (\text{B.3})$$

### Primera Fila

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} = 0 \quad (\text{B.4})$$

Desarrollando:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + u_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad (\text{B.5})$$

Analizando la Ec. (B.5) y considerando la expresión (B.1) es posible obtener los elementos de la primera fila de las matrices jacobianas de los flujos

$$[A_p]_{1,j} = \{u_x \quad \rho \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\} \quad (\text{B.6})$$

$$[B_p]_{1,j} = \{u_y \quad 0 \quad \rho \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\} \quad (\text{B.7})$$

### Segunda Fila

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial t} + \frac{\partial\left(\rho u_x^2 - B_x^2 + p + \frac{1}{2} B^2\right)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_x u_y - B_x B_y)}{\partial y} = 0 \quad (\text{B.8})$$

Desarrollando:

$$\begin{aligned}
 & \boxed{u_x \frac{\partial \rho}{\partial t}} + \rho \frac{\partial u_x}{\partial t} + \boxed{u_x \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}} + \rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial B_x^2}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\partial(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)}{\partial x} + \boxed{u_x \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y}} + \rho u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \\
 & - B_x \frac{\partial B_y}{\partial y} - B_y \frac{\partial B_x}{\partial y} = 0
 \end{aligned} \tag{B.9}$$

La suma de los términos encuadrados es cero por la Ec. (B.4) premultiplicada por  $u_x$ , obteniéndose:

$$\begin{aligned}
 & \rho \frac{\partial u_x}{\partial t} + \rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} - 2B_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2} B_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{1}{2} B_x \frac{\partial B_x}{\partial x} \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\partial(B_y^2 + B_z^2)}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} - B_x \frac{\partial B_y}{\partial y} - B_y \frac{\partial B_x}{\partial y} = 0
 \end{aligned} \tag{B.10}$$

dividiendo por la densidad  $\rho$ :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{B_x}{\rho} \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{B_y}{\rho} \frac{\partial B_y}{\partial x} + \frac{B_z}{\rho} \frac{\partial B_z}{\partial x} \\
 & + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{B_x}{\rho} \frac{\partial B_y}{\partial y} - \frac{B_y}{\rho} \frac{\partial B_x}{\partial y} = 0
 \end{aligned} \tag{B.11}$$

Analizando la Ec. (B.11) y considerando la expresión (B.1) es posible obtener los elementos de la segunda fila de las matrices jacobianas de los flujos

$$[A_p]_{2,j} = \left\{ 0 \quad u_x \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{B_x}{\rho} \quad \frac{B_y}{\rho} \quad \frac{B_z}{\rho} \quad \frac{1}{\rho} \right\} \tag{B.12}$$

$$[B_p]_{2,j} = \left\{ 0 \quad u_y \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{B_y}{\rho} \quad -\frac{B_x}{\rho} \quad 0 \quad 0 \right\} \quad (\text{B.13})$$

### Tercer Fila

$$\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x u_y - B_x B_y)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y^2 - B_y^2 + p + \frac{1}{2} B^2)}{\partial y} = 0 \quad (\text{B.14})$$

Desarrollando:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u_y}{\partial t} + \boxed{u_y \frac{\partial \rho}{\partial t}} + \boxed{u_y \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}} + \frac{\partial p}{\partial y} - B_y \frac{\partial B_x}{\partial x} - B_x \frac{\partial B_y}{\partial x} \\ + \boxed{u_y \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y}} + \rho u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} - 2B_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + \rho u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ + \left( B_x \frac{\partial B_x}{\partial y} + B_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + B_z \frac{\partial B_z}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

La suma de los términos encuadrados es igual a cero por la Ec. (B.4) premultiplicada por  $u_y$ , posteriormente dividiendo por  $\rho$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{B_y}{\rho} \frac{\partial B_x}{\partial x} - \frac{B_x}{\rho} \frac{\partial B_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ + \frac{1}{\rho} \left( B_x \frac{\partial B_x}{\partial y} - B_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + B_z \frac{\partial B_z}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Analizando la Ec. (B.16) y considerando la expresión (B.1) es posible obtener los elementos de la tercera fila de las matrices jacobianas de los flujos

$$[A_p]_{3,j} = \left\{ 0 \quad 0 \quad u_x \quad 0 \quad -\frac{B_y}{\rho} \quad -\frac{B_x}{\rho} \quad 0 \quad 0 \right\} \quad (\text{B.17})$$

$$[B_p]_{3,j} = \left\{ 0 \quad 0 \quad u_y \quad 0 \quad \frac{B_x}{\rho} \quad -\frac{B_y}{\rho} \quad \frac{B_z}{\rho} \quad \frac{1}{\rho} \right\} \quad (\text{B.18})$$

### Cuarta Fila

$$\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_z u_x - B_z B_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_z u_y - B_z B_y)}{\partial y} = 0 \quad (\text{B.19})$$

Desarrollando:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u_z}{\partial t} + \boxed{u_z \frac{\partial \rho}{\partial t}} + \boxed{u_z \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}} + \rho u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} - B_x \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ - B_z \frac{\partial B_x}{\partial x} + \boxed{u_z \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y}} + \rho u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} - B_z \frac{\partial B_y}{\partial y} \\ - B_y \frac{\partial B_z}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

La suma de los términos encuadrados es cero debido a la Ec. (B.4) premultiplicada por  $u_z$ , posteriormente dividiendo por  $\rho$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{B_x}{\rho} \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{B_z}{\rho} \frac{\partial B_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{B_z}{\rho} \frac{\partial B_y}{\partial y} \\ - \frac{B_y}{\rho} \frac{\partial B_z}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Analizando la Ec. (B.21) y considerando la expresión (B.1) es posible obtener los elementos de la cuarta fila de las matrices jacobianas de los flujos

$$[A_p]_{4,j} = \left\{ 0 \quad 0 \quad 0 \quad u_x \quad -\frac{B_z}{\rho} \quad 0 \quad -\frac{B_x}{\rho} \quad 0 \right\} \quad (\text{B.22})$$

$$[B_p]_{4,j} = \left\{ 0 \quad 0 \quad 0 \quad u_y \quad 0 \quad -\frac{B_z}{\rho} \quad -\frac{B_y}{\rho} \quad 0 \right\} \quad (\text{B.23})$$

**Quinta Fila**

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} + \frac{\partial (B_x u_y - u_x B_y)}{\partial y} = 0 \quad (\text{B.24})$$

Desarrollando:

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} + B_x \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_y \frac{\partial B_x}{\partial y} - u_x \frac{\partial B_y}{\partial y} - B_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0 \quad (\text{B.25})$$

Analizando la Ec. (B.25) y considerando la expresión (B.1) es posible obtener los elementos de la quinta fila de las matrices jacobianas de los flujos

$$[A_p]_{5,j} = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\} \quad (\text{B.26})$$

$$[B_p]_{5,j} = \{0 \quad -B_y \quad B_x \quad 0 \quad u_y \quad -u_x \quad 0 \quad 0\} \quad (\text{B.27})$$

**Sexta Fila**

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} + \frac{\partial (B_y u_x - u_y B_x)}{\partial x} = 0 \quad (\text{B.28})$$

Desarrollando:

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} + B_y \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_x \frac{\partial B_y}{\partial x} - u_y \frac{\partial B_x}{\partial x} - B_x \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0 \quad (\text{B.29})$$

Analizando la Ec. (B.29) y considerando la expresión (B.1) es posible obtener los elementos de la sexta fila de las matrices jacobianas de los flujos

$$[A_p]_{6,j} = \{0 \quad B_y \quad -B_x \quad 0 \quad -u_y \quad u_x \quad 0 \quad 0\} \quad (\text{B.30})$$

$$[B_p]_{6,j} = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\} \quad (\text{B.31})$$

### **Séptima Fila**

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial (B_z u_x - u_z B_x)}{\partial x} + \frac{\partial (B_z u_y - u_z B_y)}{\partial y} = 0 \quad (\text{B.32})$$

Desarrollando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + B_z \frac{\partial u_x}{\partial x} - u_z \frac{\partial B_x}{\partial x} - B_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + B_z \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ + u_y \frac{\partial B_z}{\partial y} - u_z \frac{\partial B_y}{\partial y} - B_y \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

Analizando la Ec. (B.33) y considerando la expresión (B.1) es posible obtener los elementos de la séptima fila de las matrices jacobianas de los flujos

$$[A_p]_{7,j} = \{0 \quad B_z \quad 0 \quad -B_x \quad -u_z \quad 0 \quad u_x \quad 0\} \quad (\text{B.34})$$

$$[B_p]_{7,j} = \{0 \quad 0 \quad B_z \quad -B_y \quad 0 \quad -u_z \quad u_y \quad 0\} \quad (\text{B.35})$$

**Octava Fila**

$$\begin{aligned} & \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( e + p + \frac{1}{2} B^2 \right) u_x - (\underline{u} \cdot \underline{B}) B_x \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( e + p + \frac{1}{2} B^2 \right) u_y - (\underline{u} \cdot \underline{B}) B_y \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

Desarrollando:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{1}{2} B^2 \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{1}{2} B^2 + p + \frac{1}{2} B^2 \right) u_x \right] \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial x} [ -(\underline{u} \cdot \underline{B}) B_x ] \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{1}{2} B^2 + p + \frac{1}{2} B^2 \right) u_y \right] \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial y} [ -(\underline{u} \cdot \underline{B}) B_y ] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\gamma - 1} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho u^2 \right) + B_x \frac{\partial B_x}{\partial t} + B_y \frac{\partial B_y}{\partial t} + B_z \frac{\partial B_z}{\partial t} \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho u^2 + p + B^2 \right) u_x \right] \\ & \quad - (\underline{u} \cdot \underline{B}) \frac{\partial B_x}{\partial x} - B_x \frac{\partial}{\partial x} (B_x u_x + B_y u_y + B_z u_z) \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho u^2 + p + B^2 \right) u_y \right] \\ & \quad - (\underline{u} \cdot \underline{B}) \frac{\partial B_y}{\partial y} - B_y \frac{\partial}{\partial y} (B_x u_x + B_y u_y + B_z u_z) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\gamma-1} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} \rho (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) \right] + B_x \frac{\partial B_x}{\partial t} + B_y \frac{\partial B_y}{\partial t} \\
 & + B_z \frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u_x p}{\gamma-1} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2} u_x \rho (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) \right] \\
 & + \frac{\partial}{\partial x} (p u_x) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ u_x (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) \right] - (\underline{u} \cdot \underline{B}) \frac{\partial B_x}{\partial x} \\
 & - B_x \frac{\partial}{\partial x} (B_x u_x) - B_x \frac{\partial}{\partial x} (B_y u_y) - B_x \frac{\partial}{\partial x} (B_z u_z) \\
 & + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u_y p}{\gamma-1} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{2} u_y \rho (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) \right] \\
 & + \frac{\partial}{\partial y} (p u_y) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ u_y (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) \right] - (\underline{u} \cdot \underline{B}) \frac{\partial B_y}{\partial y} \\
 & - B_y \frac{\partial}{\partial y} (B_x u_x) - B_y \frac{\partial}{\partial y} (B_y u_y) - B_y \frac{\partial}{\partial y} (B_z u_z) = 0 \tag{B.39}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\gamma-1} \right) + \boxed{\frac{u_x^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t}} + \rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{u_y^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho u_y \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{u_z^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \\
 & + \rho u_z \frac{\partial u_z}{\partial t} + B_x \frac{\partial B_x}{\partial t} + B_y \frac{\partial B_y}{\partial t} + B_z \frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{u_x}{\gamma-1} \frac{\partial p}{\partial x} \\
 & + \frac{p}{\gamma-1} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \boxed{\frac{u_x^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u_x \rho)} + u_x^2 \rho \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{u_y^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u_x \rho) \\
 & + u_x u_y \rho \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{u_z^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u_x \rho) + u_x u_z \rho \frac{\partial u_z}{\partial x} + p \frac{\partial u_x}{\partial x} \\
 & + u_x \frac{\partial p}{\partial x} + B_x \frac{\partial}{\partial x} (B_x u_x) + B_x u_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + B_y \frac{\partial}{\partial x} (B_y u_x) \\
 & + B_y u_x \frac{\partial B_y}{\partial x} + B_z \frac{\partial}{\partial x} (B_z u_x) + B_z u_x \frac{\partial B_z}{\partial x} - (\underline{u} \cdot \underline{B}) \frac{\partial B_x}{\partial x} \\
 & - B_x^2 \frac{\partial u_x}{\partial x} - B_x u_x \frac{\partial B_x}{\partial x} - B_x B_y \frac{\partial u_y}{\partial x} - B_x u_y \frac{\partial B_y}{\partial x} \\
 & - B_x B_z \frac{\partial u_z}{\partial x} - B_x u_z \frac{\partial B_z}{\partial x} + \frac{u_x}{\gamma-1} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{p}{\gamma-1} \frac{\partial u_y}{\partial y}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \boxed{\frac{u_x^2}{2} \frac{\partial}{\partial y} (u_y \rho)} + u_x u_y \rho \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{u_y^2}{2} \frac{\partial}{\partial y} (u_y \rho) \\
 & + u_y^2 \rho \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{u_z^2}{2} \frac{\partial}{\partial y} (u_y \rho) + u_y u_z \rho \frac{\partial u_z}{\partial y} + p \frac{\partial u_y}{\partial y} \\
 & + u_y \frac{\partial p}{\partial y} + B_x \frac{\partial}{\partial y} (B_x u_y) + B_x u_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + B_y \frac{\partial}{\partial y} (B_y u_y) \\
 & + B_y u_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + B_z \frac{\partial}{\partial y} (B_z u_y) + B_z u_y \frac{\partial B_z}{\partial y} - (\underline{u} \cdot \underline{B}) \frac{\partial B_y}{\partial y} \\
 & - B_x B_y \frac{\partial u_x}{\partial y} - B_y u_x \frac{\partial B_x}{\partial y} - B_y^2 \frac{\partial u_y}{\partial y} - B_y u_y \frac{\partial B_y}{\partial y} \\
 & - B_z B_y \frac{\partial u_z}{\partial y} - B_y u_z \frac{\partial B_z}{\partial y} = 0
 \end{aligned} \tag{B.40}$$

Los términos encuadrados se simplifican al considerar la Ec. (B.4) en donde cada componente es premultiplica por el término  $u_x^2/2$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\gamma - 1} \right) + \rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial t} + \boxed{\frac{u_y^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t}} + \rho u_y \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{u_z^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \\
 & + \rho u_z \frac{\partial u_z}{\partial t} + B_x \frac{\partial B_x}{\partial t} + B_y \frac{\partial B_y}{\partial t} + B_z \frac{\partial B_z}{\partial t} \\
 & + \frac{u_x}{\gamma - 1} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{p}{\gamma - 1} \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_x^2 \rho \frac{\partial u_x}{\partial x} + \boxed{\frac{u_y^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u_x \rho)} \\
 & + u_x u_y \rho \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{u_z^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u_x \rho) + u_x u_z \rho \frac{\partial u_z}{\partial x} \\
 & + p \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_x \frac{\partial p}{\partial x} + B_x \frac{\partial}{\partial x} (B_x u_x) + B_x u_x \frac{\partial B_x}{\partial x} \\
 & + B_y \frac{\partial}{\partial x} (B_y u_x) + B_y u_x \frac{\partial B_y}{\partial x} + B_z \frac{\partial}{\partial x} (B_z u_x) \\
 & + B_z u_x \frac{\partial B_z}{\partial x} - (\underline{u} \cdot \underline{B}) \frac{\partial B_x}{\partial x} - B_x^2 \frac{\partial u_x}{\partial x} - B_x u_x \frac{\partial B_x}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{B.41}$$

$$\begin{aligned}
 & -B_x B_y \frac{\partial u_y}{\partial x} - B_x u_y \frac{\partial B_y}{\partial x} - B_x B_z \frac{\partial u_z}{\partial x} - B_x u_z \frac{\partial B_z}{\partial x} \\
 & + \frac{u_x}{\gamma-1} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{p}{\gamma-1} \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_x u_y \rho \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_y^2 \rho \frac{\partial u_y}{\partial y} \\
 & + \boxed{\frac{u_y^2}{2} \frac{\partial}{\partial y} (u_y \rho)} + \frac{u_z^2}{2} \frac{\partial}{\partial y} (u_y \rho) + u_y u_z \rho \frac{\partial u_z}{\partial y} \\
 & + p \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_y \frac{\partial p}{\partial y} + B_x \frac{\partial}{\partial y} (B_x u_y) + B_x u_y \frac{\partial B_x}{\partial y} \\
 & + B_y \frac{\partial}{\partial y} (B_y u_y) + B_y u_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + B_z \frac{\partial}{\partial y} (B_z u_y) \\
 & + B_z u_y \frac{\partial B_z}{\partial y} - (\underline{u} \cdot \underline{B}) \frac{\partial B_y}{\partial y} - B_x B_y \frac{\partial u_x}{\partial y} - B_y u_x \frac{\partial B_x}{\partial y} \\
 & - B_y^2 \frac{\partial u_y}{\partial y} - B_y u_y \frac{\partial B_y}{\partial y} - B_z B_y \frac{\partial u_z}{\partial y} - B_y u_z \frac{\partial B_z}{\partial y} = 0
 \end{aligned}$$

Los términos encuadrados son los mismos que la Ec. (B.4) premultiplicados por  $u_y^2/2$ , de modo que se simplifican.

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\gamma-1} \right) + \rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial t} + \rho u_y \frac{\partial u_y}{\partial t} + \boxed{\frac{u_z^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t}} + \rho u_z \frac{\partial u_z}{\partial t} \\
 & + B_x \frac{\partial B_x}{\partial t} + B_y \frac{\partial B_y}{\partial t} + B_z \frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{u_x}{\gamma-1} \frac{\partial p}{\partial x} \\
 & + \frac{p}{\gamma-1} \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_x^2 \rho \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_x u_y \rho \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_x u_z \rho \frac{\partial u_z}{\partial x} \quad (\text{B.42}) \\
 & + \boxed{\frac{u_z^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u_x \rho)} + p \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_x \frac{\partial p}{\partial x} + B_x \frac{\partial}{\partial x} (B_x u_x) \\
 & + B_x u_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + B_y \frac{\partial}{\partial x} (B_y u_x) + B_y u_x \frac{\partial B_y}{\partial x} \\
 & + B_z \frac{\partial}{\partial x} (B_z u_x) + B_z u_x \frac{\partial B_z}{\partial x} - (\underline{u} \cdot \underline{B}) \frac{\partial B_x}{\partial x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -B_x^2 \frac{\partial u_x}{\partial x} - B_x u_x \frac{\partial B_x}{\partial x} - B_x B_y \frac{\partial u_y}{\partial x} - B_x u_y \frac{\partial B_y}{\partial x} \\
 & -B_x B_z \frac{\partial u_z}{\partial x} - B_x u_z \frac{\partial B_z}{\partial x} + \frac{u_x}{\gamma-1} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{p}{\gamma-1} \frac{\partial u_y}{\partial y} \\
 & + u_x u_y \rho \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_y^2 \rho \frac{\partial u_y}{\partial y} + \boxed{\frac{u_z^2}{2} \frac{\partial}{\partial y} (u_y \rho)} \\
 & + u_y u_z \rho \frac{\partial u_z}{\partial y} + p \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_y \frac{\partial p}{\partial y} + B_x \frac{\partial}{\partial y} (B_x u_y) \\
 & + B_x u_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + B_y \frac{\partial}{\partial y} (B_y u_y) + B_y u_y \frac{\partial B_y}{\partial y} \\
 & + B_z \frac{\partial}{\partial y} (B_z u_y) + B_z u_y \frac{\partial B_z}{\partial y} - (\underline{u} \cdot \underline{B}) \frac{\partial B_y}{\partial y} \\
 & - B_x B_y \frac{\partial u_x}{\partial y} - B_y u_x \frac{\partial B_x}{\partial y} - B_y^2 \frac{\partial u_y}{\partial y} - B_y u_y \frac{\partial B_y}{\partial y} \\
 & - B_z B_y \frac{\partial u_z}{\partial y} - B_y u_z \frac{\partial B_z}{\partial y} = 0
 \end{aligned}$$

Los términos marcados se simplifican por la Ec. (B.4), premultiplicados por  $u_z^2/2$ .

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\gamma-1} \right) + \boxed{\rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial t}} + \rho u_y \frac{\partial u_y}{\partial t} + \rho u_z \frac{\partial u_z}{\partial t} + B_x \frac{\partial B_x}{\partial t} \\
 & + B_y \frac{\partial B_y}{\partial t} + B_z \frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{u_x}{\gamma-1} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{p}{\gamma-1} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\
 & + \boxed{u_x^2 \rho \frac{\partial u_x}{\partial x}} + u_x u_y \rho \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_x u_z \rho \frac{\partial u_z}{\partial x} + p \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (\text{B.43}) \\
 & + \boxed{u_x \frac{\partial p}{\partial x}} + B_x^2 \frac{\partial u_x}{\partial x} + B_x u_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + B_x u_x \frac{\partial B_x}{\partial x} \\
 & + B_y^2 \frac{\partial u_x}{\partial x} + \boxed{B_y u_x \frac{\partial B_y}{\partial x}} + B_y u_x \frac{\partial B_y}{\partial x} + B_z^2 \frac{\partial u_x}{\partial x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \boxed{B_z u_x \frac{\partial B_z}{\partial x}} + B_z u_x \frac{\partial B_z}{\partial x} - (\underline{u} \cdot \underline{B}) \frac{\partial B_x}{\partial x} - B_x^2 \frac{\partial u_x}{\partial x} \\
 & - \boxed{B_x u_x \frac{\partial B_x}{\partial x}} - B_x B_y \frac{\partial u_y}{\partial x} - B_x u_y \frac{\partial B_y}{\partial x} - B_x B_z \frac{\partial u_z}{\partial x} \\
 & - B_x u_z \frac{\partial B_z}{\partial x} + \frac{u_x}{\gamma-1} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{p}{\gamma-1} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \boxed{u_x u_y \rho \frac{\partial u_x}{\partial y}} \\
 & + u_y^2 \rho \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_y u_z \rho \frac{\partial u_z}{\partial y} + p \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_y \frac{\partial p}{\partial y} + B_x^2 \frac{\partial u_y}{\partial y} \\
 & + B_x u_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + B_x u_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + B_y^2 \frac{\partial u_y}{\partial y} + B_y u_y \frac{\partial B_y}{\partial y} \\
 & + B_y u_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + B_z^2 \frac{\partial u_y}{\partial y} + B_z u_y \frac{\partial B_z}{\partial y} + B_z u_y \frac{\partial B_z}{\partial y} \\
 & - (\underline{u} \cdot \underline{B}) \frac{\partial B_y}{\partial y} - B_x B_y \frac{\partial u_x}{\partial y} - \boxed{B_y u_x \frac{\partial B_x}{\partial y}} - B_y^2 \frac{\partial u_y}{\partial y} \\
 & - B_y u_y \frac{\partial B_y}{\partial y} - B_z B_y \frac{\partial u_z}{\partial y} - B_y u_z \frac{\partial B_z}{\partial y} - \boxed{B_x u_x \frac{\partial B_y}{\partial y}} \\
 & + B_x u_x \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0
 \end{aligned}$$

Los términos encuadrados se simplifican por la Ec. (B.10), premultiplicado cada término por  $u_x$ .

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\gamma-1} \right) + \boxed{\rho u_y \frac{\partial u_y}{\partial t}} + \rho u_z \frac{\partial u_z}{\partial t} + B_x \frac{\partial B_x}{\partial t} + B_y \frac{\partial B_y}{\partial t} \\
 & + B_z \frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{u_x}{\gamma-1} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{p}{\gamma-1} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\
 & + \boxed{u_x u_y \rho \frac{\partial u_y}{\partial x}} + u_x u_z \rho \frac{\partial u_z}{\partial x} + p \frac{\partial u_x}{\partial x} \\
 & + B_x^2 \frac{\partial u_x}{\partial x} + B_x u_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + B_x u_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + B_y^2 \frac{\partial u_x}{\partial x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + B_y u_x \frac{\partial B_y}{\partial x} + B_z^2 \frac{\partial u_x}{\partial x} + B_z u_x \frac{\partial B_z}{\partial x} - (\underline{u} \cdot \underline{B}) \frac{\partial B_x}{\partial x} \\
 & - B_x^2 \frac{\partial u_x}{\partial x} - B_x B_y \frac{\partial u_y}{\partial x} - \boxed{B_x u_y \frac{\partial B_y}{\partial x}} + p \frac{\partial u_y}{\partial y} \\
 & - B_x B_z \frac{\partial u_z}{\partial x} - B_x u_z \frac{\partial B_z}{\partial x} + \frac{u_x}{\gamma - 1} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{p}{\gamma - 1} \frac{\partial u_y}{\partial y} \\
 & + \boxed{u_y^2 \rho \frac{\partial u_y}{\partial y}} + u_y u_z \rho \frac{\partial u_z}{\partial y} + \boxed{u_y \frac{\partial p}{\partial y}} + B_x^2 \frac{\partial u_y}{\partial y} \\
 & + \boxed{B_x u_y \frac{\partial B_x}{\partial y}} + B_x u_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + B_y^2 \frac{\partial u_y}{\partial y} + B_y u_y \frac{\partial B_y}{\partial y} \\
 & + B_y u_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + B_z^2 \frac{\partial u_y}{\partial y} + \boxed{B_z u_y \frac{\partial B_z}{\partial y}} + B_z u_y \frac{\partial B_z}{\partial y} \\
 & - (\underline{u} \cdot \underline{B}) \frac{\partial B_y}{\partial y} - B_x B_y \frac{\partial u_x}{\partial y} - B_y^2 \frac{\partial u_y}{\partial y} \\
 & - \boxed{B_y u_y \frac{\partial B_y}{\partial y}} - B_z B_y \frac{\partial u_z}{\partial y} - B_y u_z \frac{\partial B_z}{\partial y} \\
 & + B_x u_x \frac{\partial B_y}{\partial y} - \boxed{B_y u_y \frac{\partial B_x}{\partial x}} + B_y u_y \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0
 \end{aligned} \tag{B.44}$$

Realizando los mismos pasos con la Ec. (B.16), pero los términos son premultiplicados por  $u_y$ , de modo que los elementos encuadrados se simplifican.

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\gamma - 1} \right) + \boxed{\rho u_z \frac{\partial u_z}{\partial t}} + B_x \frac{\partial B_x}{\partial t} + B_y \frac{\partial B_y}{\partial t} + B_z \frac{\partial B_z}{\partial t} \\
 & + \frac{u_x}{\gamma - 1} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{p}{\gamma - 1} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \boxed{u_x u_z \rho \frac{\partial u_z}{\partial x}} \\
 & + p \frac{\partial u_x}{\partial x} + B_x^2 \frac{\partial u_x}{\partial x} + 2B_x u_x \frac{\partial B_x}{\partial x} \\
 & + B_y^2 \frac{\partial u_x}{\partial x} + B_y u_x \frac{\partial B_y}{\partial x} + B_z^2 \frac{\partial u_x}{\partial x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + B_z u_x \frac{\partial B_z}{\partial x} - (\underline{u} \cdot \underline{B}) \frac{\partial B_x}{\partial x} - B_x^2 \frac{\partial u_x}{\partial x} - B_x B_y \frac{\partial u_y}{\partial x} \\
 & - B_x B_z \frac{\partial u_z}{\partial x} - \boxed{B_x u_z \frac{\partial B_z}{\partial x}} + \frac{u_x}{\gamma-1} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{p}{\gamma-1} \frac{\partial u_y}{\partial y} \\
 & + \boxed{u_y u_z \rho \frac{\partial u_z}{\partial y}} + p \frac{\partial u_y}{\partial y} + B_x^2 \frac{\partial u_y}{\partial y} + B_x u_y \frac{\partial B_x}{\partial y} \\
 & + B_y^2 \frac{\partial u_y}{\partial y} + 2B_y u_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + B_z^2 \frac{\partial u_y}{\partial y} + B_z u_y \frac{\partial B_z}{\partial y} \\
 & - (\underline{u} \cdot \underline{B}) \frac{\partial B_y}{\partial y} - B_x B_y \frac{\partial u_x}{\partial y} - B_y^2 \frac{\partial u_y}{\partial y} - B_z B_y \frac{\partial u_z}{\partial y} \\
 & - \boxed{B_y u_z \frac{\partial B_z}{\partial y}} + B_x u_x \frac{\partial B_y}{\partial y} + B_y u_y \frac{\partial B_x}{\partial x} \\
 & + B_z u_z \frac{\partial B_x}{\partial x} - \boxed{B_z u_z \frac{\partial B_x}{\partial x}} - \boxed{B_z u_z \frac{\partial B_y}{\partial y}} \\
 & + B_z u_z \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0
 \end{aligned} \tag{B.45}$$

Como en ambos casos anteriores, con la Ec. (B.21), pero ahora multiplicados por  $u_z$ , los términos encuadrados se simplifican.

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\gamma-1} \right) + \boxed{B_x \frac{\partial B_x}{\partial t}} + B_y \frac{\partial B_y}{\partial t} + B_z \frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{u_x}{\gamma-1} \frac{\partial p}{\partial x} \\
 & + \frac{p}{\gamma-1} \frac{\partial u_x}{\partial x} + p \frac{\partial u_x}{\partial x} + B_x^2 \frac{\partial u_x}{\partial x} + 2B_x u_x \frac{\partial B_x}{\partial x} \\
 & + B_y^2 \frac{\partial u_x}{\partial x} + B_y u_x \frac{\partial B_y}{\partial x} + B_z^2 \frac{\partial u_x}{\partial x} + B_z u_x \frac{\partial B_z}{\partial x} \\
 & - (\underline{u} \cdot \underline{B}) \frac{\partial B_x}{\partial x} - B_x^2 \frac{\partial u_x}{\partial x} - B_x B_y \frac{\partial u_y}{\partial x} - B_x B_z \frac{\partial u_z}{\partial x} \\
 & + \frac{u_x}{\gamma-1} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{p}{\gamma-1} \frac{\partial u_y}{\partial y} + p \frac{\partial u_y}{\partial y} + \boxed{B_x^2 \frac{\partial u_y}{\partial y}}
 \end{aligned} \tag{B.46}$$

$$\begin{aligned}
 & + \boxed{B_x u_y \frac{\partial B_x}{\partial y}} + B_y^2 \frac{\partial u_y}{\partial y} + 2B_y u_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + B_z^2 \frac{\partial u_y}{\partial y} \\
 & + B_z u_y \frac{\partial B_z}{\partial y} - (\underline{u} \cdot \underline{B}) \frac{\partial B_y}{\partial y} - \boxed{B_x B_y \frac{\partial u_x}{\partial y}} - B_y^2 \frac{\partial u_y}{\partial y} \\
 & - B_z B_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + B_x u_x \frac{\partial B_y}{\partial y} + B_y u_y \frac{\partial B_x}{\partial x} + B_z u_z \frac{\partial B_x}{\partial x} \\
 & + B_z u_z \frac{\partial B_y}{\partial y} - \boxed{B_x u_x \frac{\partial B_y}{\partial y}} + B_x u_x \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0
 \end{aligned}$$

Los términos encuadrados se simplifican por la Ec. (B.25) al premultiplicarse por  $B_x$ .

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\gamma - 1} \right) + \boxed{B_y \frac{\partial B_y}{\partial t}} + B_z \frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{u_x}{\gamma - 1} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{p}{\gamma - 1} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\
 & + p \frac{\partial u_x}{\partial x} + B_x^2 \frac{\partial u_x}{\partial x} + 2B_x u_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + \boxed{B_y^2 \frac{\partial u_x}{\partial x}} \\
 & + \boxed{B_y u_x \frac{\partial B_y}{\partial x}} + B_z^2 \frac{\partial u_x}{\partial x} + B_z u_x \frac{\partial B_z}{\partial x} - (\underline{u} \cdot \underline{B}) \frac{\partial B_x}{\partial x} \\
 & - B_x^2 \frac{\partial u_x}{\partial x} - \boxed{B_x B_y \frac{\partial u_y}{\partial x}} - B_x B_z \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{u_x}{\gamma - 1} \frac{\partial p}{\partial y} \\
 & + \frac{p}{\gamma - 1} \frac{\partial u_y}{\partial y} + p \frac{\partial u_y}{\partial y} + B_y^2 \frac{\partial u_y}{\partial y} + 2B_y u_y \frac{\partial B_y}{\partial y} \\
 & + B_z^2 \frac{\partial u_y}{\partial y} + B_z u_y \frac{\partial B_z}{\partial y} - (\underline{u} \cdot \underline{B}) \frac{\partial B_y}{\partial y} - B_y^2 \frac{\partial u_y}{\partial y} \\
 & - B_z B_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + B_x u_x \frac{\partial B_y}{\partial y} + B_y u_y \frac{\partial B_x}{\partial x} + B_z u_z \frac{\partial B_x}{\partial x} \\
 & + B_z u_z \frac{\partial B_y}{\partial y} + B_x u_x \frac{\partial B_y}{\partial y} - \boxed{B_y u_y \frac{\partial B_x}{\partial x}} \tag{B.47} \\
 & + B_y u_y \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0
 \end{aligned}$$

Los términos encuadrados se simplifican por la Ec. (B.29) al premultiplicarse por  $B_y$ .

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\gamma-1} \right) + \boxed{B_z \frac{\partial B_z}{\partial t}} + \frac{u_x}{\gamma-1} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{p}{\gamma-1} \frac{\partial u_x}{\partial x} + p \frac{\partial u_x}{\partial x} \\
 & + \cancel{B_x^2 \frac{\partial u_x}{\partial x}} + 2B_x u_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + \boxed{B_z^2 \frac{\partial u_x}{\partial x}} \\
 & + \boxed{B_z u_x \frac{\partial B_z}{\partial x}} - (\underline{u} \cdot \underline{B}) \frac{\partial B_x}{\partial x} - \cancel{B_x^2 \frac{\partial u_x}{\partial x}} \\
 & - \boxed{B_x B_z \frac{\partial u_z}{\partial x}} + \frac{u_x}{\gamma-1} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{p}{\gamma-1} \frac{\partial u_y}{\partial y} + p \frac{\partial u_y}{\partial y} \\
 & + \cancel{B_y^2 \frac{\partial u_y}{\partial y}} + 2B_y u_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + \boxed{B_z^2 \frac{\partial u_y}{\partial y}} + \boxed{B_z u_y \frac{\partial B_z}{\partial y}} \\
 & - (\underline{u} \cdot \underline{B}) \frac{\partial B_y}{\partial y} - \cancel{B_y^2 \frac{\partial u_y}{\partial y}} - \boxed{B_z B_y \frac{\partial u_z}{\partial y}} + B_x u_x \frac{\partial B_y}{\partial y} \\
 & + B_y u_y \frac{\partial B_x}{\partial x} + B_z u_z \frac{\partial B_x}{\partial x} + B_z u_z \frac{\partial B_y}{\partial y} + B_x u_x \frac{\partial B_y}{\partial y} \quad (B.48) \\
 & + B_y u_y \frac{\partial B_x}{\partial x} - \boxed{B_z u_z \frac{\partial B_x}{\partial x}} + B_z u_z \frac{\partial B_x}{\partial x} - \boxed{B_z u_z \frac{\partial B_y}{\partial y}} \\
 & + B_z u_z \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0
 \end{aligned}$$

Los términos encuadrados se simplifican por la Ec. (B.33) al premultiplicarse por  $B_z$ .

Luego del procedimiento desarrollando se obtiene:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\gamma-1} \right) + \frac{u_x}{\gamma-1} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{p}{\gamma-1} \frac{\partial u_x}{\partial x} + p \frac{\partial u_x}{\partial x} + 2B_x u_x \frac{\partial B_x}{\partial x} \\
 & - (\underline{u} \cdot \underline{B}) \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{u_y}{\gamma-1} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{p}{\gamma-1} \frac{\partial u_y}{\partial y} + p \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (B.49) \\
 & + 2B_y u_y \frac{\partial B_y}{\partial y} - (\underline{u} \cdot \underline{B}) \frac{\partial B_y}{\partial y} + 2B_x u_x \frac{\partial B_y}{\partial y}
 \end{aligned}$$

$$+ 2B_y u_y \frac{\partial B_x}{\partial x} + 2B_z u_z \frac{\partial B_x}{\partial x} + 2B_z u_z \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0$$

Reagrupando los términos del campo magnético

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\gamma - 1} \right) + \frac{u_x}{\gamma - 1} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{p}{\gamma - 1} \frac{\partial u_x}{\partial x} + p \frac{\partial u_x}{\partial x} - (\underline{u} \cdot \underline{B}) \frac{\partial B_x}{\partial x} \\ & + \frac{u_y}{\gamma - 1} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{p}{\gamma - 1} \frac{\partial u_y}{\partial y} + p \frac{\partial u_y}{\partial y} - (\underline{u} \cdot \underline{B}) \frac{\partial B_y}{\partial y} \\ & + 2 \frac{\partial B_y}{\partial y} (B_x u_x + B_y u_y + B_z u_z) \\ & + 2 \frac{\partial B_x}{\partial x} (B_x u_x + B_y u_y + B_z u_z) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.50})$$

Escribiendo en forma de producto interno al campo magnético y a la velocidad

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\gamma - 1} \right) + \frac{u_x}{\gamma - 1} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{p}{\gamma - 1} \frac{\partial u_x}{\partial x} + p \frac{\partial u_x}{\partial x} - (\underline{u} \cdot \underline{B}) \frac{\partial B_x}{\partial x} \\ & + \frac{u_y}{\gamma - 1} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{p}{\gamma - 1} \frac{\partial u_y}{\partial y} + p \frac{\partial u_y}{\partial y} - (\underline{u} \cdot \underline{B}) \frac{\partial B_y}{\partial y} \\ & + 2 \frac{\partial B_y}{\partial y} (\underline{u} \cdot \underline{B}) + 2 \frac{\partial B_x}{\partial x} (\underline{u} \cdot \underline{B}) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$

Finalmente se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial p}{\partial t} + \gamma p \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_x \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial B_x}{\partial x} (\underline{u} \cdot \underline{B}) (\gamma - 1) + \gamma p \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ & + u_y \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial y} (\underline{u} \cdot \underline{B}) (\gamma - 1) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.52})$$

Analizando la Ec. (B.52) y considerando la expresión (B.1) es posible obtener los elementos de la octava fila de las matrices jacobianas de los flujos

$$[A_p]_{8,j} = \{0 \ \gamma p \ 0 \ 0 \ (\gamma-1)\underline{u} \cdot \underline{B} \ 0 \ 0 \ u_x\} \quad (\text{B.53})$$

$$[B_p]_{8,j} = \{0 \ 0 \ \gamma p \ 0 \ 0 \ (\gamma-1)\underline{u} \cdot \underline{B} \ 0 \ u_y\} \quad (\text{B.54})$$

### ***Matrices Jacobianas de los Flujos en Términos de las Variables Primitivas***

Agrupando las filas (B.6), (B.12), (B.17), (B.22), (B.26), (B.30), (B.34), (B.53) en la matriz jacobiana de los flujos en la dirección  $x$  y las filas (B.7), (B.13), (B.18), (B.23), (B.27), (B.31), (B.35), (B.54) en la matriz jacobiana de los flujos en la dirección  $y$  finalmente se obtiene:

$$[A_p] = \begin{bmatrix} u_x & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_x & 0 & 0 & -\frac{B_x}{\rho} & \frac{B_y}{\rho} & \frac{B_x}{\rho} & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & u_x & 0 & -\frac{B_y}{\rho} & -\frac{B_x}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_x & -\frac{B_z}{\rho} & 0 & -\frac{B_x}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_y & -B_x & 0 & -u_y & u_x & 0 & 0 \\ 0 & B_z & 0 & -B_x & -u_z & 0 & u_x & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & 0 & (\gamma-1)\underline{u} \cdot \underline{B} & 0 & 0 & u_x \end{bmatrix} \quad (\text{B.55})$$

$$\left[ B_p \right] = \begin{bmatrix}
 u_y & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & u_y & 0 & 0 & -\frac{B_y}{\rho} & -\frac{B_x}{\rho} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & u_y & 0 & \frac{B_x}{\rho} & -\frac{B_y}{\rho} & \frac{B_z}{\rho} & -\frac{1}{\rho} \\
 0 & 0 & 0 & u_y & 0 & -\frac{B_z}{\rho} & -\frac{B_y}{\rho} & 0 \\
 0 & -B_y & B_x & 0 & u_y & -u_x & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & B_z & -B_y & 0 & -u_z & u_y & 0 \\
 0 & 0 & \gamma p & 0 & 0 & (\gamma - 1) \underline{u} \cdot \underline{B} & 0 & u_y
 \end{bmatrix} \quad (\text{B.56})$$

## Apéndice C

### Valores y Vectores Propios Modificados

La matriz jacobiana de los flujos en términos de las variables primitivas presentada II-8 es modificada siguiendo a [Powell, 1995] obteniéndose:

$$[A_p] = \begin{bmatrix} u_x & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_x & 0 & 0 & 0 & \frac{B_y}{\rho} & \frac{B_z}{\rho} & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & u_x & 0 & 0 & -\frac{B_x}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_x & 0 & 0 & -\frac{B_x}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_y & -B_x & 0 & 0 & u_x & 0 & 0 \\ 0 & B_z & 0 & -B_x & 0 & 0 & u_x & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_x \end{bmatrix} \quad (C.1)$$

A continuación se transcriben los vectores propios derechos e izquierdos de (C.1) y por ende expresados en función de las variables primitivas. Tales vectores tienen incorporadas las modificaciones introducidas por [Zachary *et al.*, 1994] que evitan degeneraciones en la solución del sistema hiperbólico de la MGD.

- *Primer Valor Propio*

$$\lambda_e = u_x \tag{C.2}$$

Vectores propios asociados

$$r_e = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad l_e = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{c^2} \end{Bmatrix} \tag{C.3}$$

- *Segundo y Tercero Valores Propios*

$$\lambda_a = u_x \pm c_a \tag{C.4}$$

Vectores propios asociados

$$r_a^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\beta_z \\ \beta_y \\ 0 \\ \pm\sqrt{\rho}\beta_z \\ \mp\sqrt{\rho}\beta_y \\ 0 \end{Bmatrix} \quad l_a^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\beta_z \\ \beta_y \\ 0 \\ \pm\frac{\beta_z}{\sqrt{\rho}} \\ \mp\frac{\beta_y}{\sqrt{\rho}} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{C.5}$$

- *Cuarto y Quinto Valores Propios*

$$\lambda_f = u_x \pm c_f \tag{C.6}$$

Vectores propios asociados

$$\tilde{r}_f^\pm = \left\{ \begin{array}{c} \rho \alpha_f \\ \pm \alpha_f c_f \\ \mp \alpha_s c_s \beta_y \operatorname{sgn}(B_x) \\ \mp \alpha_s c_s \beta_z \operatorname{sgn}(B_x) \\ 0 \\ \alpha_s \sqrt{\rho c} \beta_y \\ \alpha_s \sqrt{\rho c} \beta_z \\ \alpha_f \gamma p \end{array} \right\} \quad \tilde{l}_f^\pm = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \pm \frac{\alpha_f c_f}{2c^2} \\ \mp \frac{\alpha_s}{2c^2} c_s \beta_y \operatorname{sgn}(B_x) \\ \mp \frac{\alpha_s}{2c^2} c_s \beta_z \operatorname{sgn}(B_x) \\ 0 \\ \frac{\alpha_s}{2\sqrt{\rho c}} \beta_y \\ \mp \frac{\alpha_s}{2\sqrt{\rho c}} \beta_z \\ \frac{\alpha_f}{2\rho c^2} \end{array} \right\} \tag{C.7}$$

- *Sexto y Séptimo Valores Propios*

$$\lambda_s = u_x \pm c_s \tag{C.8}$$

Vectores propios asociados

$$r_s^\pm = \left\{ \begin{array}{c} \rho \alpha_s \\ \pm \alpha_s c_s \\ \pm \alpha_f c_f \beta_y \operatorname{sgn}(B_x) \\ \pm \alpha_f c_f \beta_z \operatorname{sgn}(B_x) \\ 0 \\ -\alpha_f \sqrt{\rho c} \beta_y \\ -\alpha_f \sqrt{\rho c} \beta_z \\ \alpha_s \gamma p \end{array} \right\} \quad l_s^\pm = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \pm \frac{\alpha_s c_s}{2c^2} \\ \pm \frac{\alpha_f}{2c^2} c_f \beta_y \operatorname{sgn}(B_x) \\ \pm \frac{\alpha_f}{2c^2} c_f \beta_z \operatorname{sgn}(B_x) \\ 0 \\ -\frac{\alpha_f}{2\sqrt{\rho c}} \beta_y \\ \frac{\alpha_f}{2\sqrt{\rho c}} \beta_z \\ \frac{\alpha_s}{2\rho c^2} \end{array} \right\} \quad (\text{C.9})$$

- *Octavo Valor Propio*

$$\lambda_d = u_x \quad (\text{C.10})$$

Vectores propios asociados

$$r_d = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad l_d = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (\text{C.11})$$

Donde:

$$c_{A,n} = \frac{|B_x|}{\sqrt{\rho}} \quad (\text{C.12})$$

$$c_{f,s}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma p + B^2}{\rho} \pm \sqrt{\left( \frac{\gamma p + B^2}{\rho} \right)^2 - 4 \frac{\gamma p B_x^2}{\rho^2}} \right) \quad (\text{C.13})$$

$$\beta_y = \begin{cases} \frac{B_y}{B_\perp} & B_\perp \neq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & B_\perp = 0 \end{cases} \quad (\text{C.14})$$

$$\beta_z = \begin{cases} \frac{B_z}{B_\perp} & B_\perp \neq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & B_\perp = 0 \end{cases} \quad (\text{C.15})$$

$$\beta_\perp = \sqrt{B_y^2 + B_z^2} \quad (\text{C.16})$$

## **Apéndice D**

### **Otros Resultados**

En este apéndice se presentan en las Figuras D.1-13 los resultados obtenidos al resolver el problema de Riemann magnetogasdinámico introducido por [Brio and Wu, 1988]. Estos se diferencian de los mostrados en el capítulo III en que fueron logrados considerando un valor para el parámetro  $\delta$  Ec. (3.33) igual a la unidad.

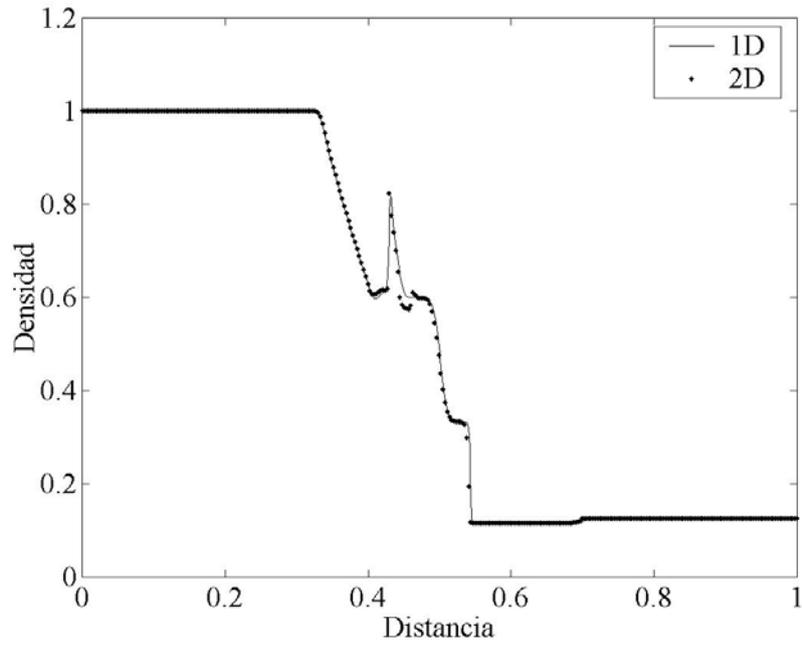


Figura D.1: Variación de la densidad en la dirección del flujo. MGD1000.

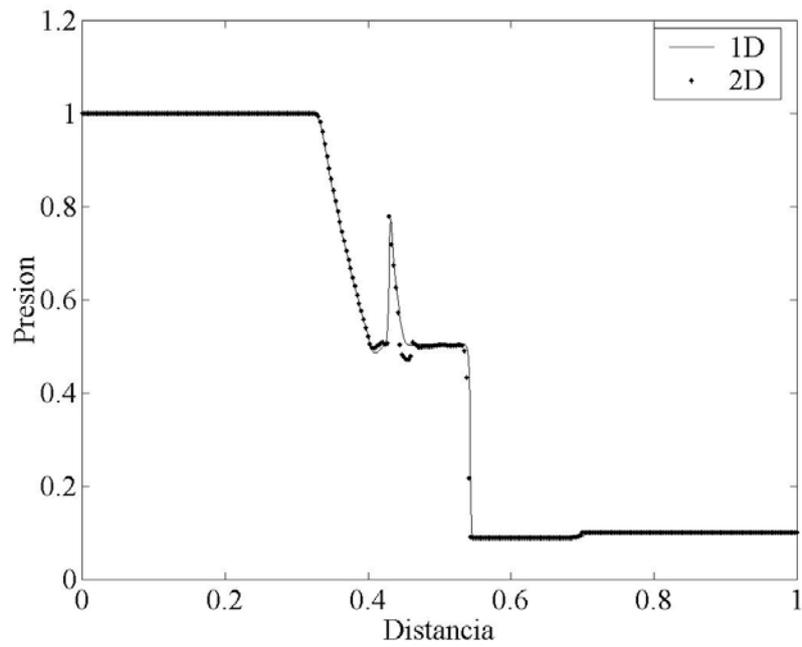


Figura D.2: Variación de la presión en la dirección del flujo. MGD1000.

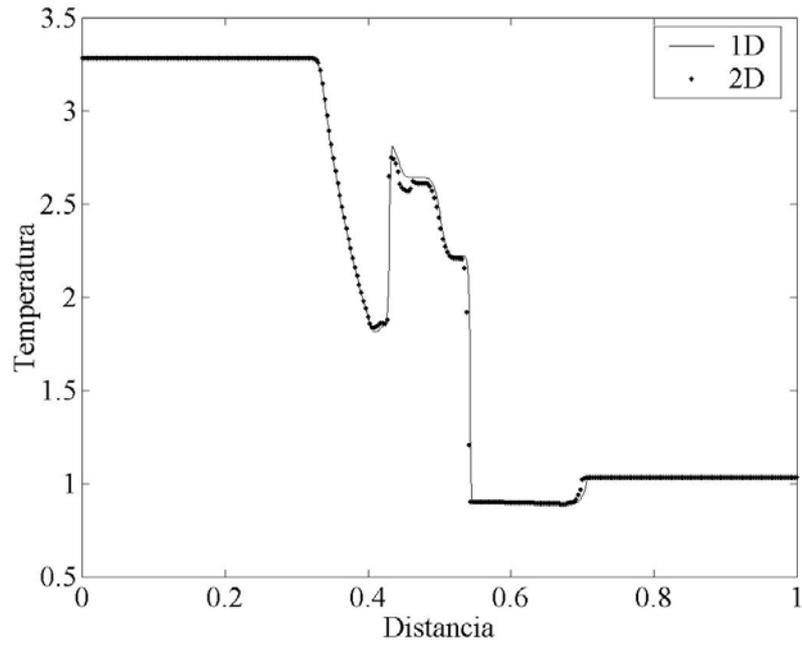


Figura D.3: Variación de la temperatura en la dirección del flujo. MGD1000.

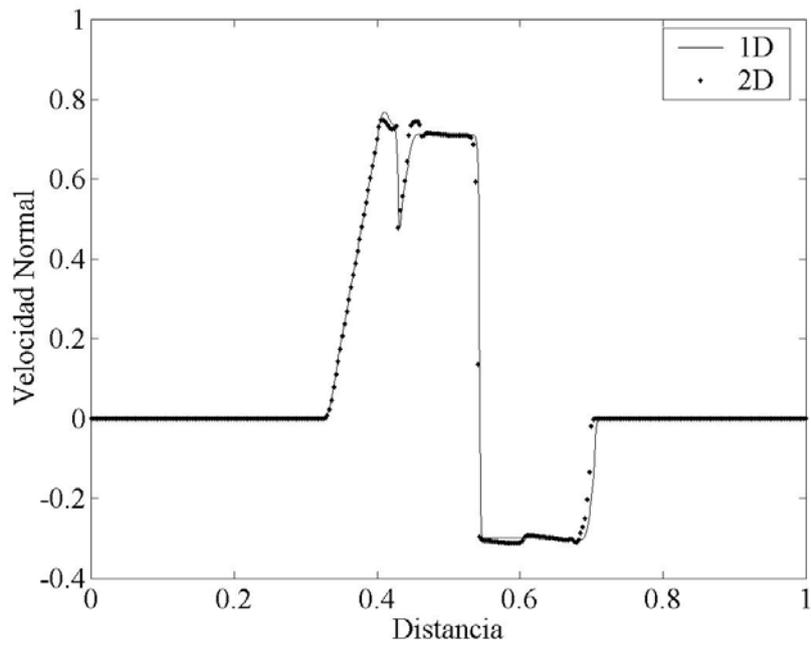


Figura D.4: Variación de la componente de la velocidad en la dirección del flujo.  
MGD1000.

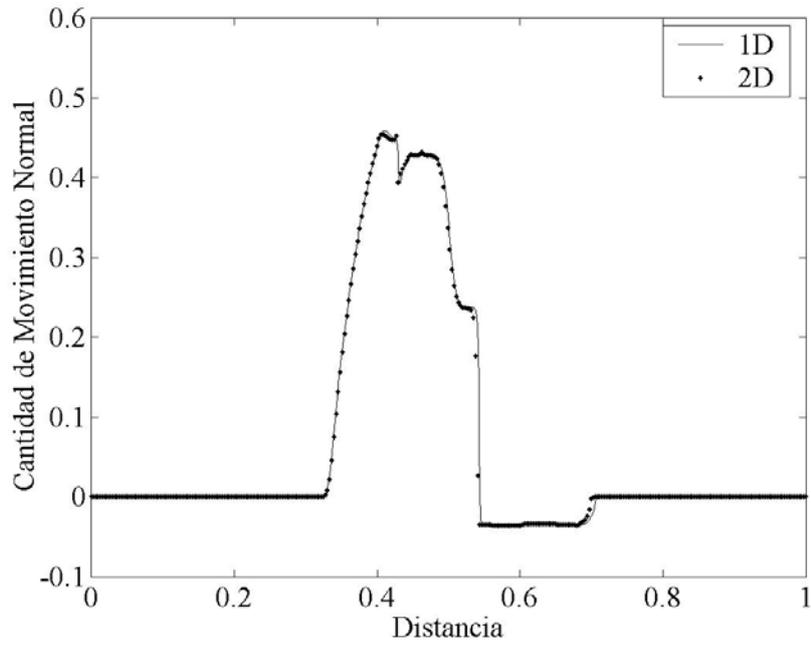


Figura D.5: Variación de la componente de la cantidad de movimiento en la dirección del flujo. MGD1000.

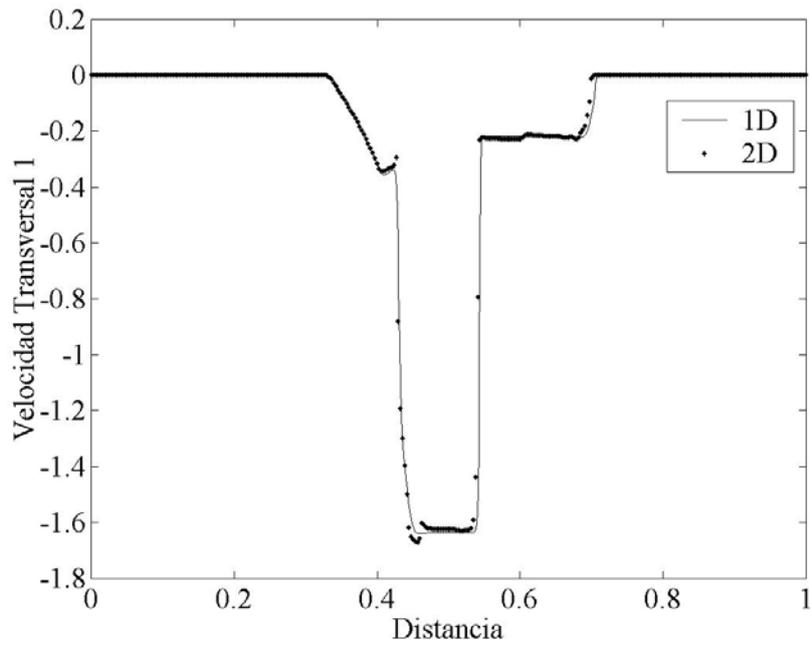


Figura D.6: Variación de la componente de la velocidad en la dirección transversal al flujo 1. MGD1000.

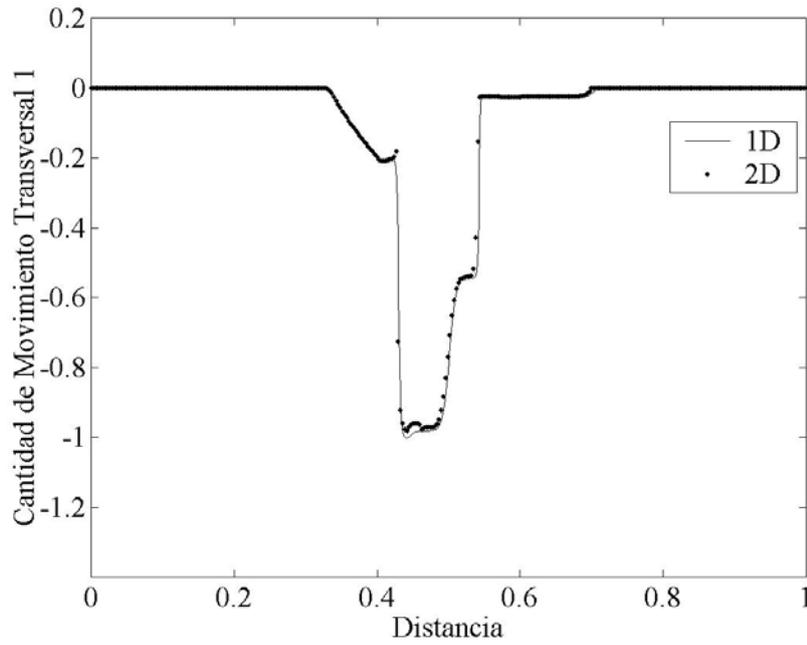


Figura D.7: Variación de la componente de la cantidad de movimiento en la dirección transversal al flujo 1. MGD1000.

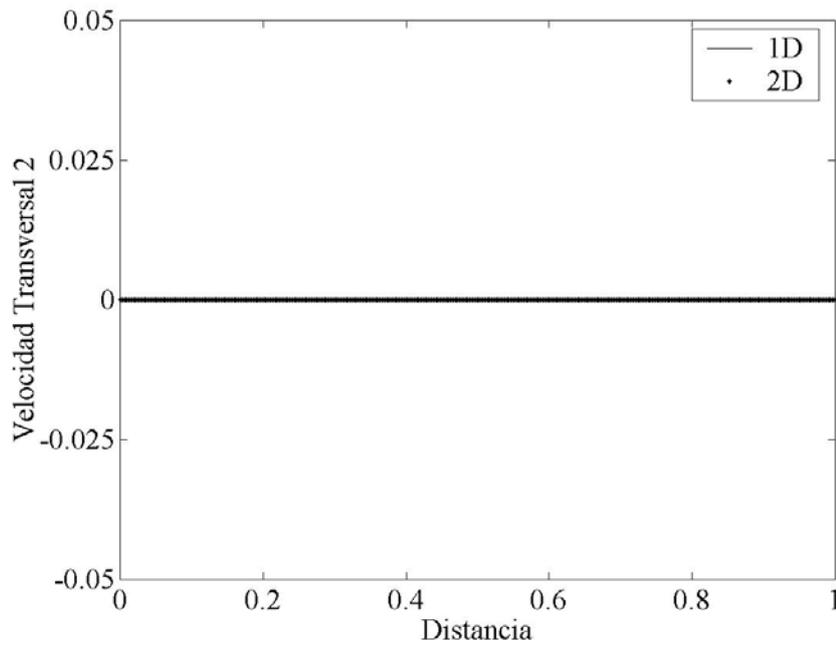


Figura D.8: Variación de la componente de la velocidad en la dirección transversal al flujo 2. MGD1000.

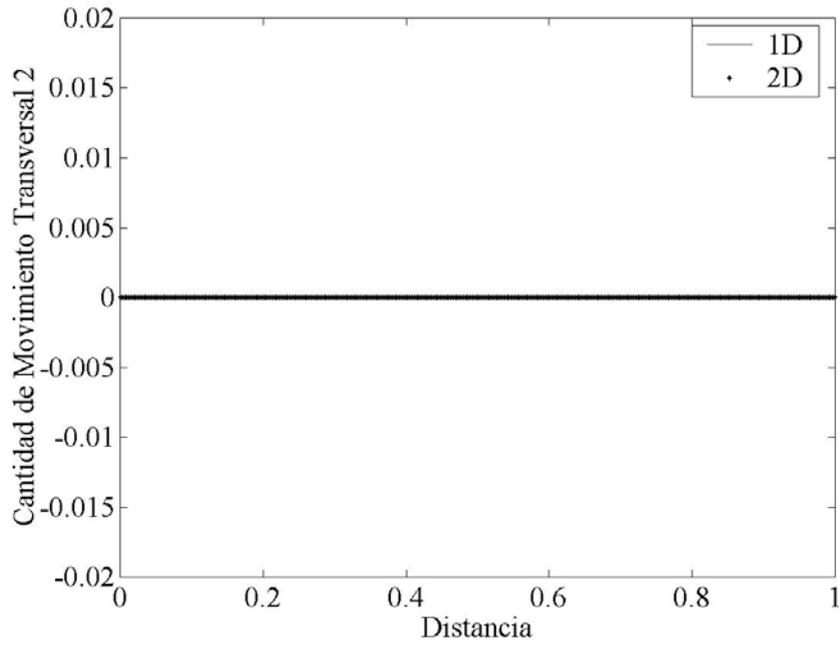


Figura D.9: Variación de la componente de la cantidad de movimiento en la dirección transversal al flujo 2. MGD1000.

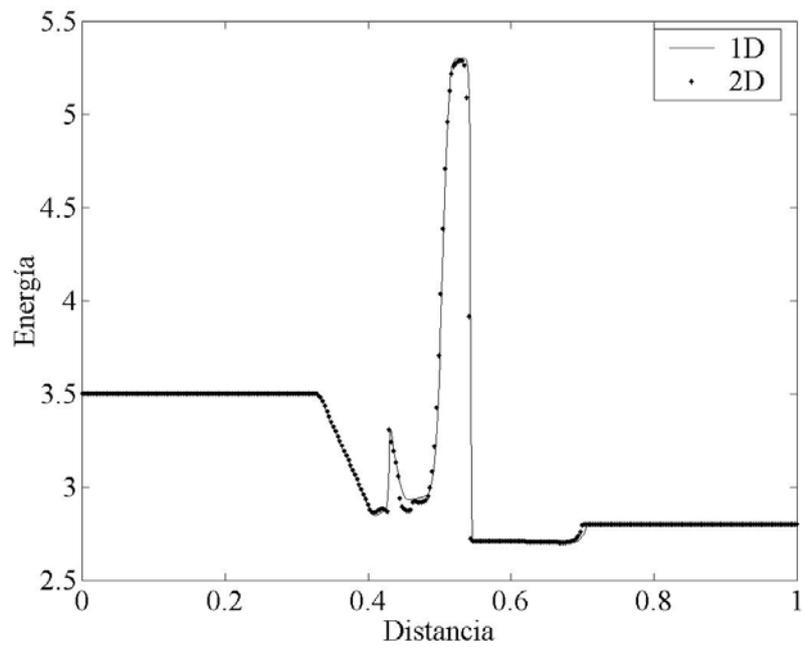


Figura D.10: Variación de la energía total en la dirección del flujo. MGD1000.

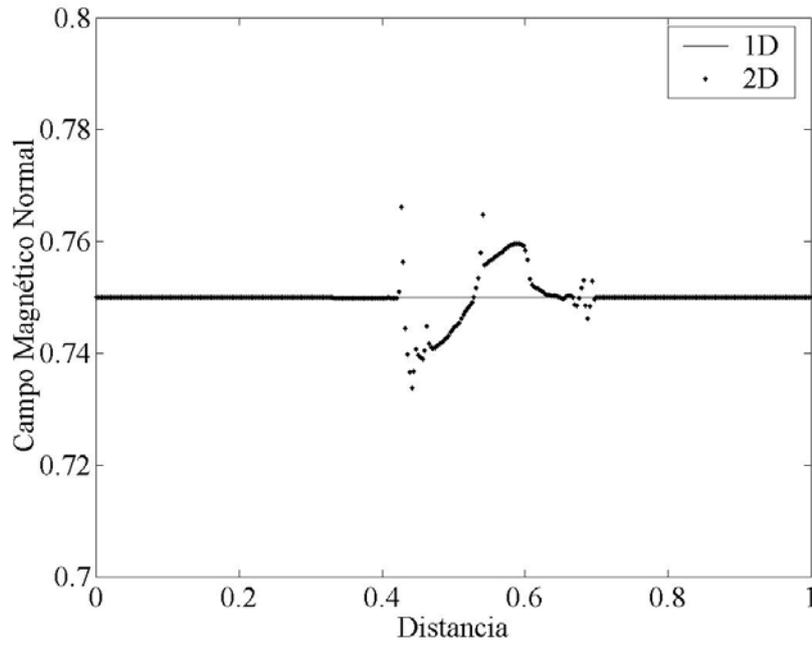


Figura D.11: Variación de la componente del campo magnético en la dirección del flujo. MGD1000.

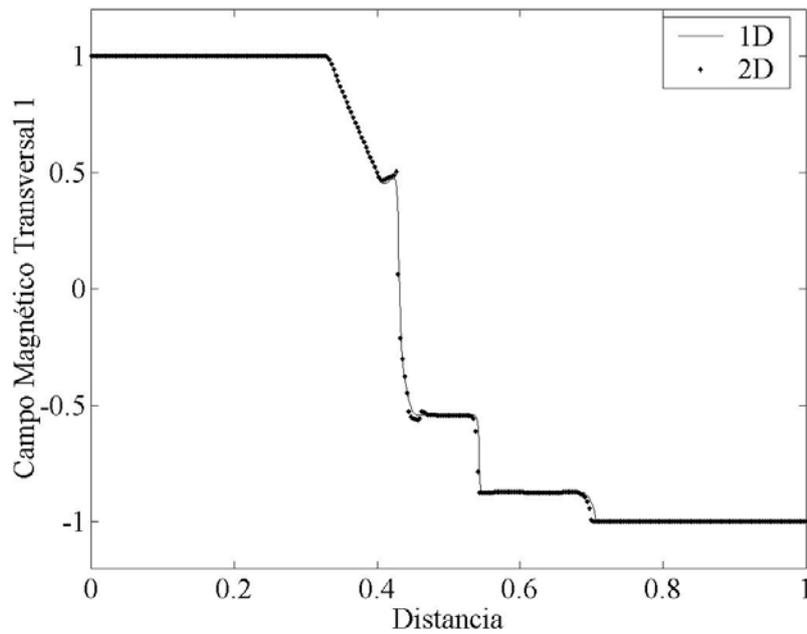


Figura D.12: Variación de la componente del campo magnético en la dirección transversal al flujo 1. MGD1000.

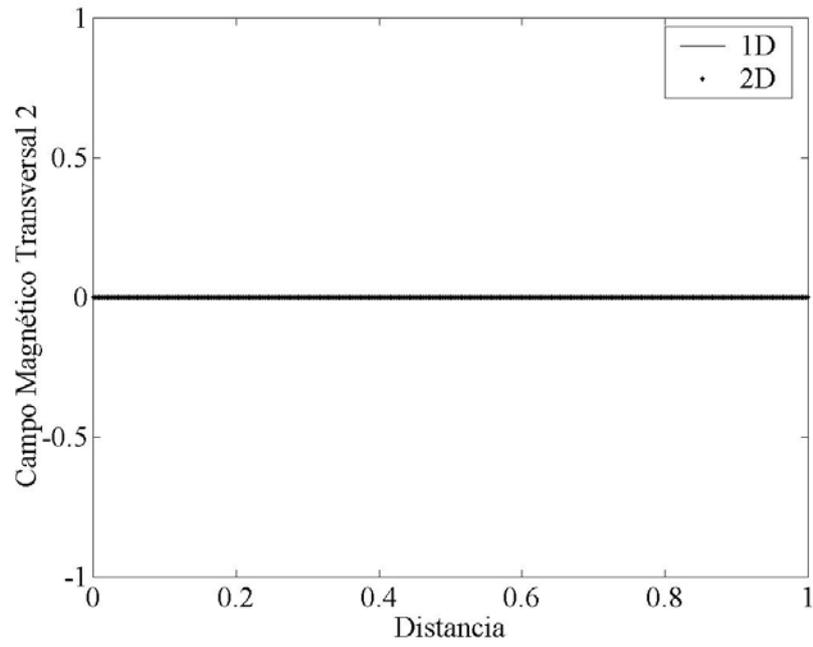


Figura D.13: Variación de la componente del campo magnético en la dirección transversal al flujo 2. MGD1000.

## **Apéndice E**

### **Resultados Gasdinámicos**

En este apéndice se presentan los resultados obtenidos al resolver el problema de Riemann gas dinámico.

En este Apéndice se presentaran las simulaciones correspondientes al problema de Riemann de la dinámica de gases, el cual es una idealización de un experimento conocido como “tubo de choque”. Los tubos de choque son dispositivos que aceleran el flujo de un gas a velocidades varias veces superior a la velocidad del sonido por breves períodos de tiempo (del orden de una milésima de segundo a una centésima de segundo), permitiendo de esta manera la realización de estudios experimentales de flujo supersónico e hipersónico. Este dispositivo constructivamente es en esencia una tubería, generalmente de acero de alta resistencia, de paredes lisas, y donde la sección transversal puede ser circular o bien rectangular. Esta tubería está dividida en dos compartimientos, ambos separados por medio de un diafragma de material delgado. En un compartimiento se encuentra un gas a alta presión llamado “impulsor” y en el otro uno a baja presión denominado “conducido”. Un esquema conceptual se muestra en la Figura E-1 y algunas fotos de este dispositivo pueden ser observadas en <http://www.highpressureshockstubes.html>.

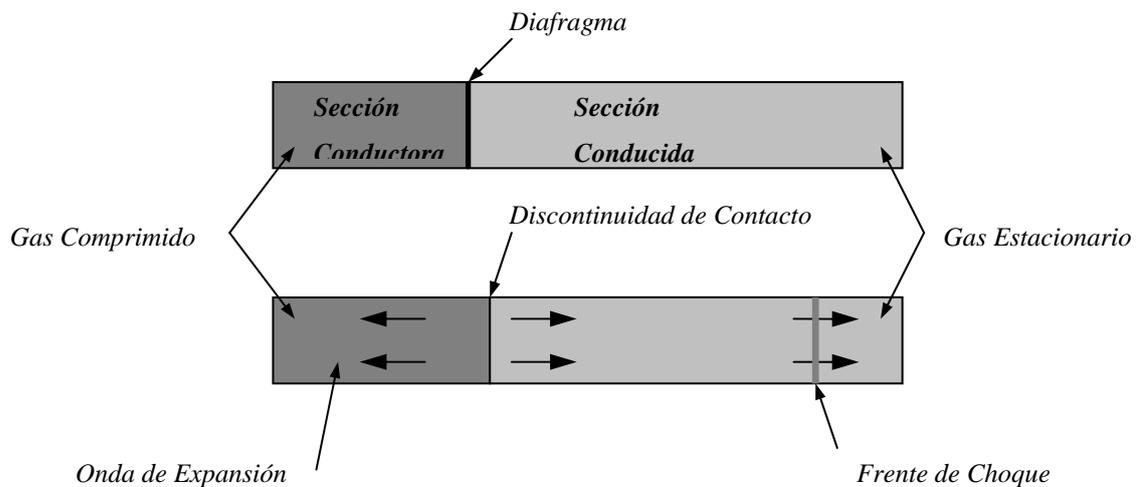


Figura E-1: Esquema conceptual del problema de tubo de choque.

El dispositivo se opera estallando el diafragma de manera que el gas comprimido fluya rápidamente a lo largo de la tubería. Después de la ruptura del mismo (se supone en forma instantánea) el gas impulsor actúa como un pistón que presiona al gas conducido, delante de él un pulso de presión se origina y se genera rápidamente una onda de choque que se propaga a lo largo de la sección conducida del tubo. Simultáneamente, una onda

de expansión se propaga en la sección conductora y entre ambas ondas una discontinuidad de contacto.

En este problema existe inicialmente una discontinuidad que separa dos estados constantes, uno izquierdo y otro derecho, donde dichos estados quedan determinados por respectivas condiciones iniciales. Los resultados mostrados en esta sección fueron realizados considerando:

$$\tilde{W} = \begin{pmatrix} \rho \\ u_x \\ u_y \\ u_z \\ B_x \\ B_y \\ B_z \\ p \end{pmatrix} \quad \tilde{W}_i = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 10.0 \end{pmatrix} \quad \tilde{W}_d = \begin{pmatrix} 0.125 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 1.0 \end{pmatrix} \quad (E.1)$$

El problema de Riemann de la dinámica de gases es unidimensional si se considera una dirección de referencia coincidente con la dirección de propagación. En una situación general la discontinuidad, que separa a los estados constantes, puede ubicarse de forma tal que la misma no sea paralela a ninguno de los lados de las celdas. Debido a que la dirección de propagación es perpendicular a la discontinuidad, esta dirección tampoco coincidirá con la orientación de las celdas. Por lo tanto el esquema numérico, aun habiendo una dirección de propagación predeterminada, debe resolver un problema 2D.

Entonces, para lograr el objetivo de validar el funcionamiento del código computacional bidimensional desarrollado, la discontinuidad debe ser rotada. Debido a que la malla utilizada es regular la velocidad del flujo no es colineal con las direcciones normales a las caras de las celdas de volúmenes finitos, obligando al código a resolver un problema de características netamente bidimensionales. La geometría anteriormente descrita se encuentra esquematizada en la Figura E-2.

En las simulaciones realizadas el ángulo que forma la discontinuidad con la dirección vertical es de 18,4°. Este procedimiento de validación de un código bidimensional fue

observado en múltiples publicaciones consultadas, entre ellas [Shumlak and Udrea, 2001] y [Sankaran, 2001].

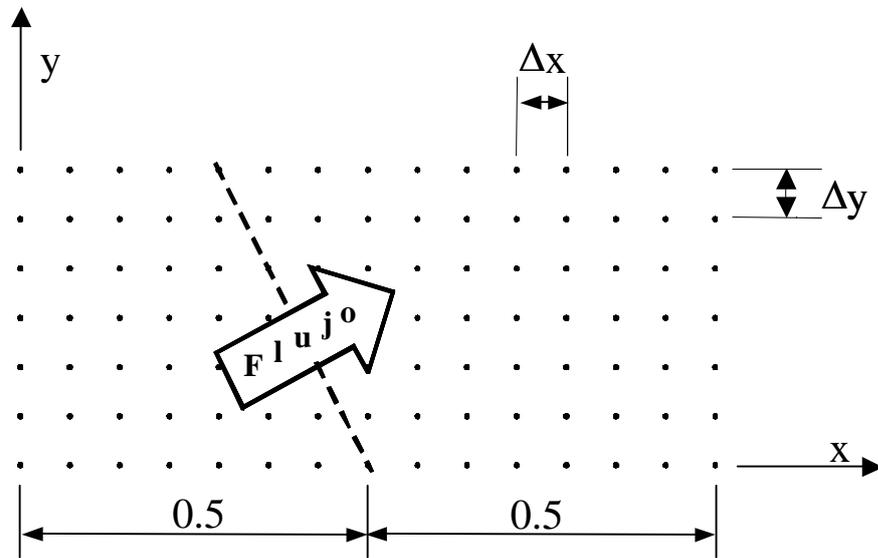


Figura E-2: Esquema conceptual del problema bidimensional.

Respecto a los parámetros de simulación utilizados, en la discretización espacial se implemento una malla con 1000 nodos, entendiéndose por nodos a los centros de las celdas, en la dirección horizontal y 350 nodos en la dirección vertical con:

$$\Delta x = 0.001 \quad \Delta y = 0.001 \quad (E.2)$$

Es importante comentar que el intervalo a lo largo de la dirección  $y$  no es necesario que sea igual al correspondiente según la dirección  $x$ , el código puede trabajar con celdas rectangulares si las características del problema lo requiriesen. Acerca de la discretización temporal se utilizo:

$$CFL = 0.4 \quad (E.3)$$

$$\Delta t \sim O(10^{-6} - 10^{-4}) [s]$$

Resultados obtenidos con 500 pasos de tiempo lo que equivale a  $t \cong 0.0167 [s]$  se muestran en las Figuras E-3/10.

Al simular el caso bidimensional del problema de Riemann los resultados se encuentran expresadas en una base ortonormal dextrógira donde uno de los versores coincide con la dirección normal a la discontinuidad, otro es perpendicular al plano formado por la malla, denotado en las figuras como transversal 2, y el tercero es ortonormal a los dos anteriores, denotado como transversal 1.

Cabe aclarar que las condiciones iniciales dadas por (E.1) al simular el caso bidimensional deben ser expresadas en la base anteriormente mencionada.

El eje de las abscisas en las figuras que presentan los resultados obtenidos, coincide con la dirección  $x$  para el caso unidimensional, y con la dirección normal a la discontinuidad para el caso bidimensional.

Los resultados presentados en este Apéndice se encuentran contrastados con los obtenidos en el caso unidimensional a través de un software de eficacia comprobada [Bucci y Elaskar, 2002].

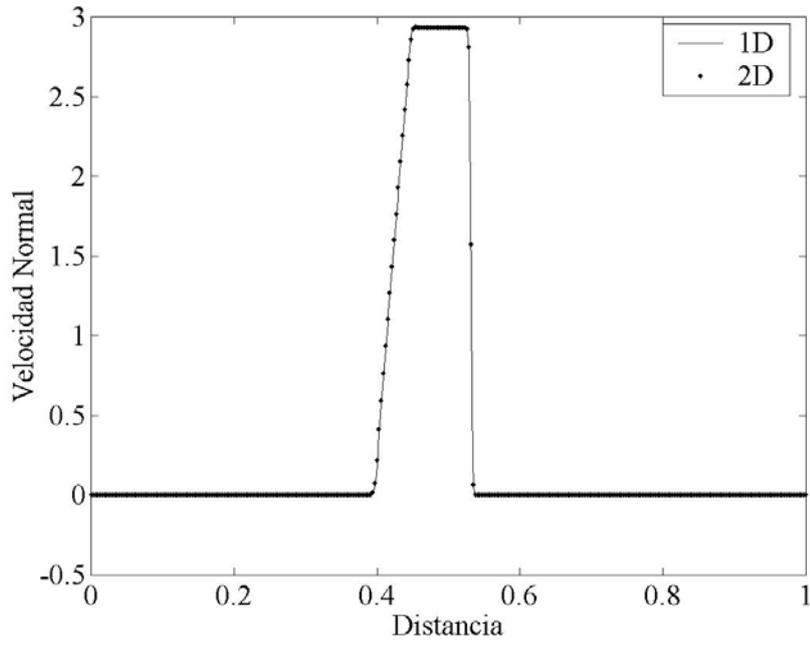


Figura E-3: Variación de la componente de la velocidad en la dirección del flujo. GD500.

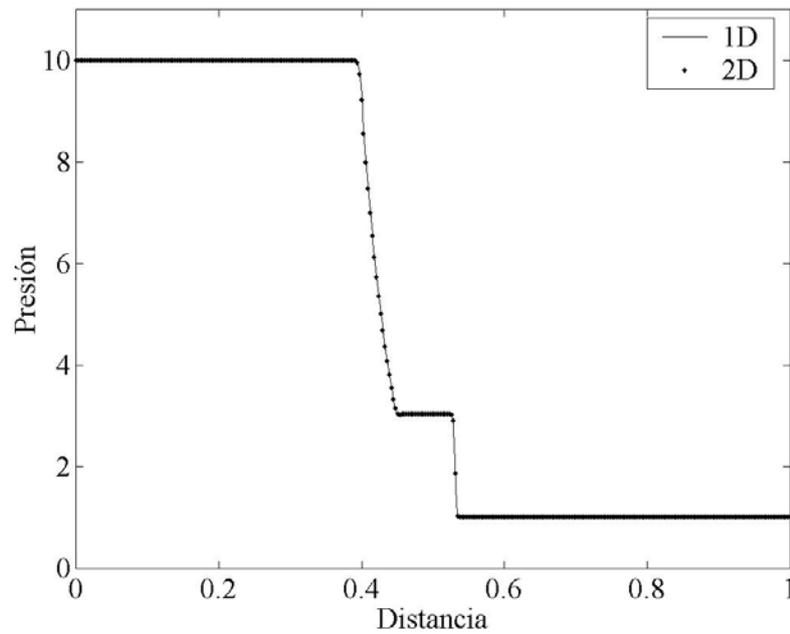


Figura E-4: Variación de la presión en la dirección del flujo. GD500.

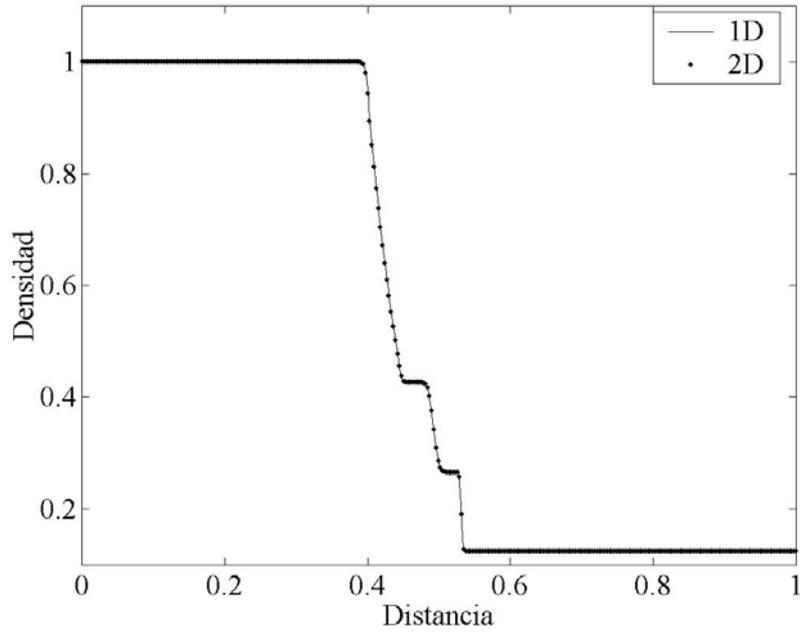


Figura E-5: Variación de la densidad en la dirección del flujo. GD500.

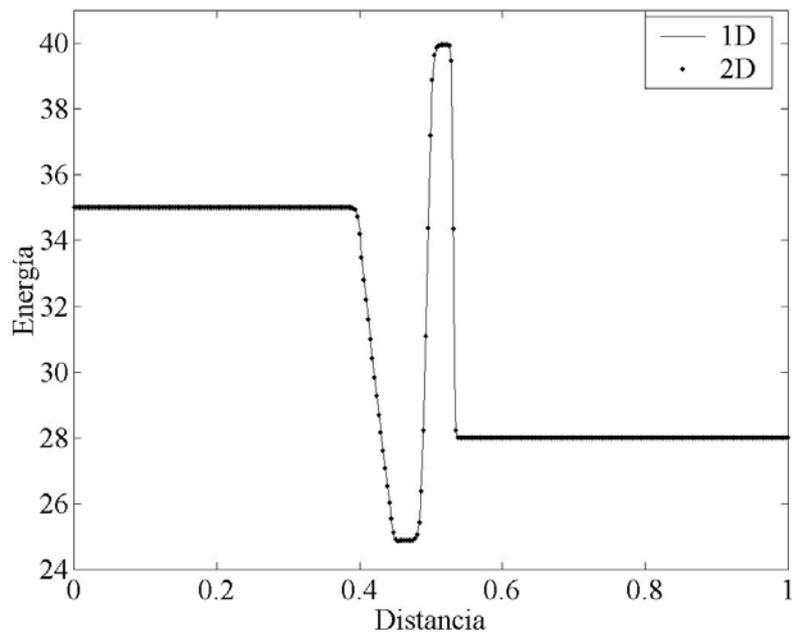


Figura E-6: Variación de la energía total en la dirección del flujo. GD500.

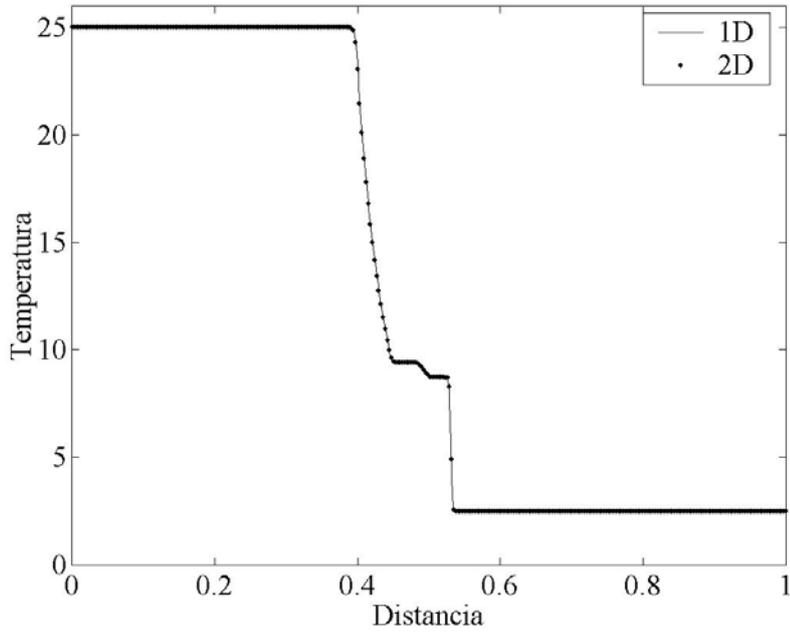


Figura E-7: Variación de la temperatura en la dirección del flujo. GD500.

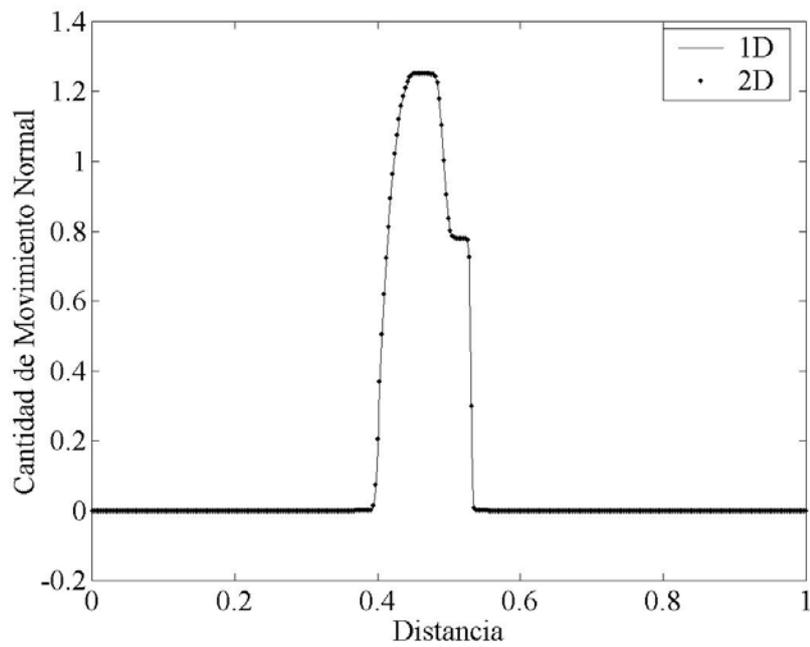


Figura E-8: Variación de la componente de la cantidad de movimiento en la dirección del flujo. GD500.

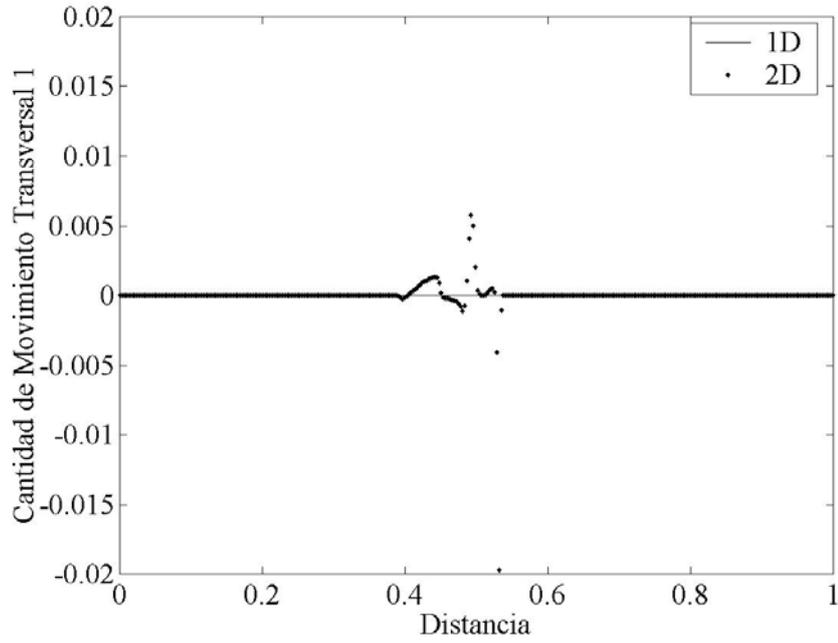


Figura E-9: Variación de la componente de la cantidad de movimiento en la dirección transversal al flujo 1. GD500.

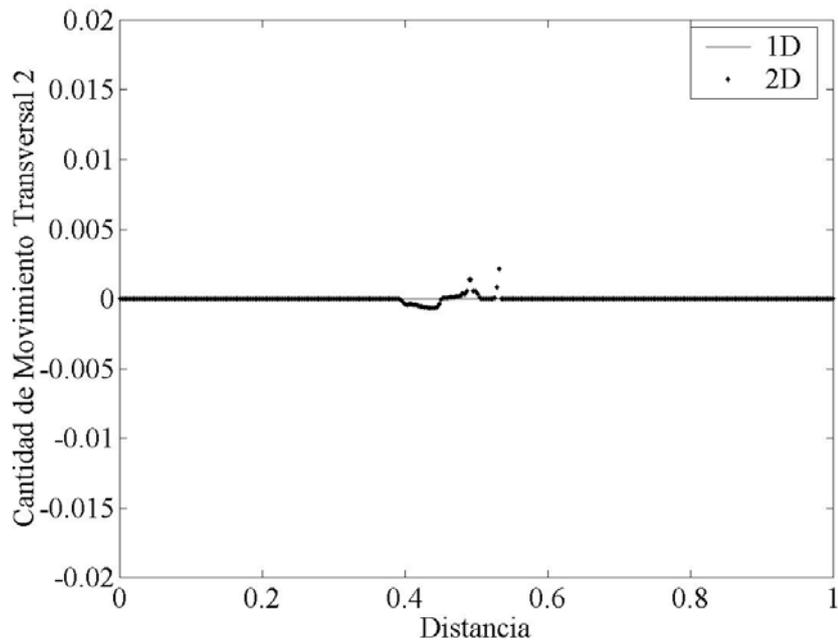


Figura E-10: Variación de la componente de la cantidad de movimiento en la dirección transversal al flujo 2. GD500.

En las figuras anteriores se puede observar como el código captó correctamente en los primeros instantes las tres ondas que intervienen en el fenómeno físico. Sólo pequeñas perturbaciones aparecen en las cantidades de movimiento.

Se presentan a posteriori en las Figuras E-11/18 los resultados logrados con 1000 pasos de tiempo  $t \cong 0.0439$  [s] a los fines de mostrar el adecuado desempeño del código después que las ondas son capturadas y su posterior evolución en el tiempo.

Analizando los resultados mostrados en las Figuras E-11, 12, 13 y 15 se puede concluir que en la Figura E-13, correspondiente a la densidad, hay una onda de expansión que viaja hacia la izquierda, una onda de choque que viaja hacia la derecha y una onda en la parte central que corresponde a una discontinuidad de contacto que es captada perfectamente por el código. Obsérvese que la captura de la discontinuidad de contacto, que se muestra claramente en la densidad, Figura E-13, no modifica –en donde se localiza la onda–, ni a la velocidad normal, Figura E-11, ni a la presión, Figura E-12, lo cual no sólo concuerda evidentemente con la definición de una discontinuidad de contacto sino que avala el funcionamiento del esquema numérico. Acorde a lo anterior la discontinuidad de contacto también se observa en la temperatura Figura E-15.

Una pequeña oscilación menor al 1% aparece en la meseta de la velocidad normal, Figura E-11, así como también en la presión, Figura E-12. Nuevamente sólo pequeñas perturbaciones pueden apreciarse en las cantidades de movimiento transversales, Figura E-17 y Figura E-18. Tales errores, probablemente se encuentren asociados a problemas de redondeo y fundamentalmente a la discretización de la geometría.

A pesar de los pequeños errores los resultados son muy satisfactorios y superan ampliamente las expectativas generadas al comienzo de este trabajo de tesis. En las regiones suaves de la solución son altos los niveles de exactitud alcanzados, las discontinuidades, asociadas a la onda de choque, son captadas sin oscilaciones y las ondas de expansión son perfectamente determinadas.

Los resultados asociados al campo magnético no son presentados debido a que en este “Benchmark” son idénticamente nulos en el dominio y el código numérico los obtiene sin errores.

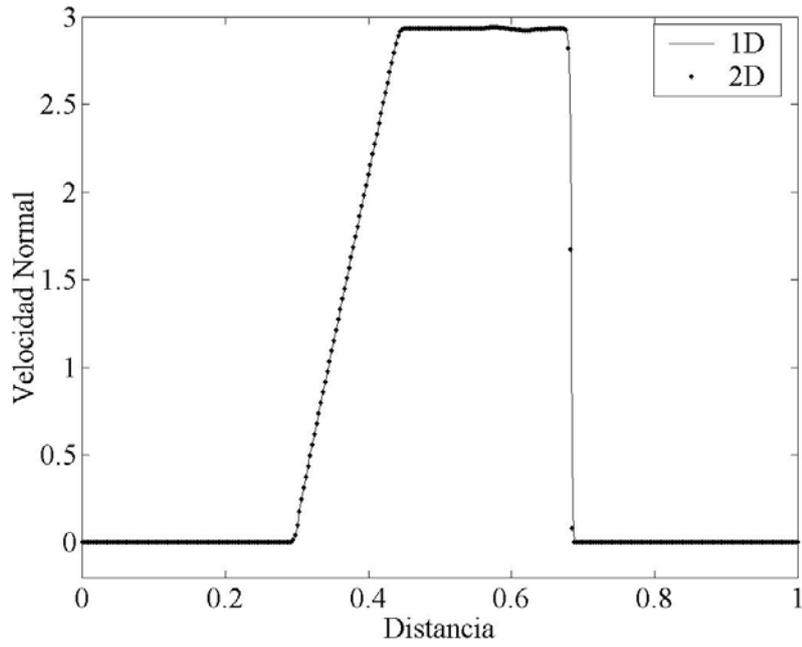


Figura E-11: Variación de la componente de la velocidad en la dirección del flujo. GD1000.

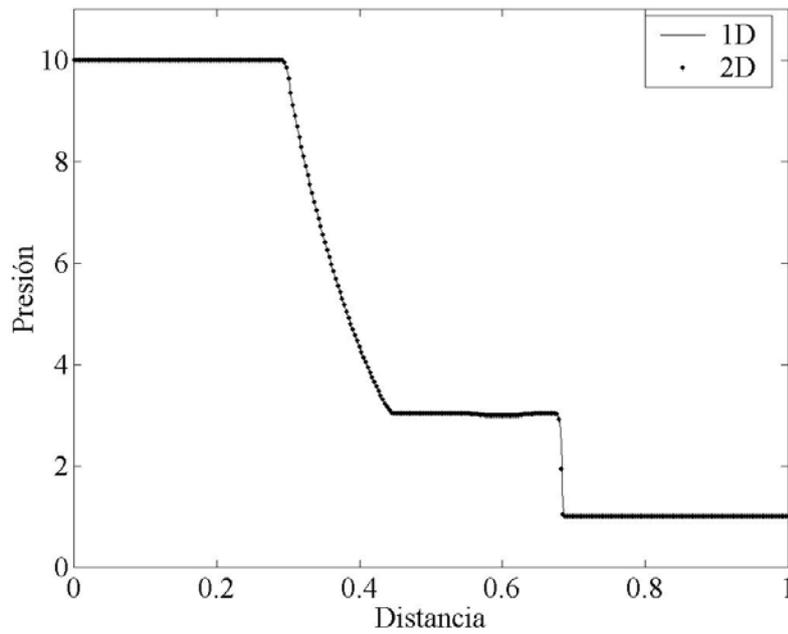


Figura E-12: Variación de la presión en la dirección del flujo. GD1000.

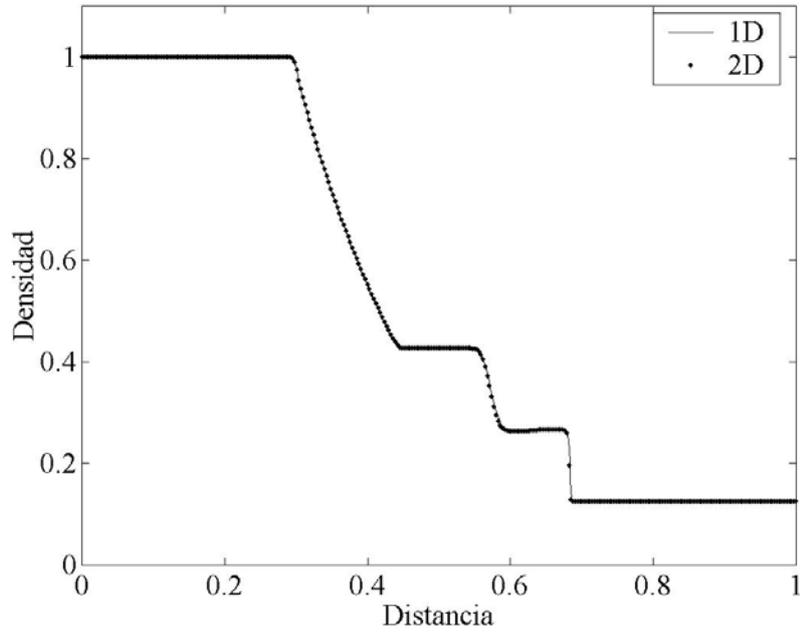


Figura E-13: Variación de la densidad en la dirección del flujo. GD1000.

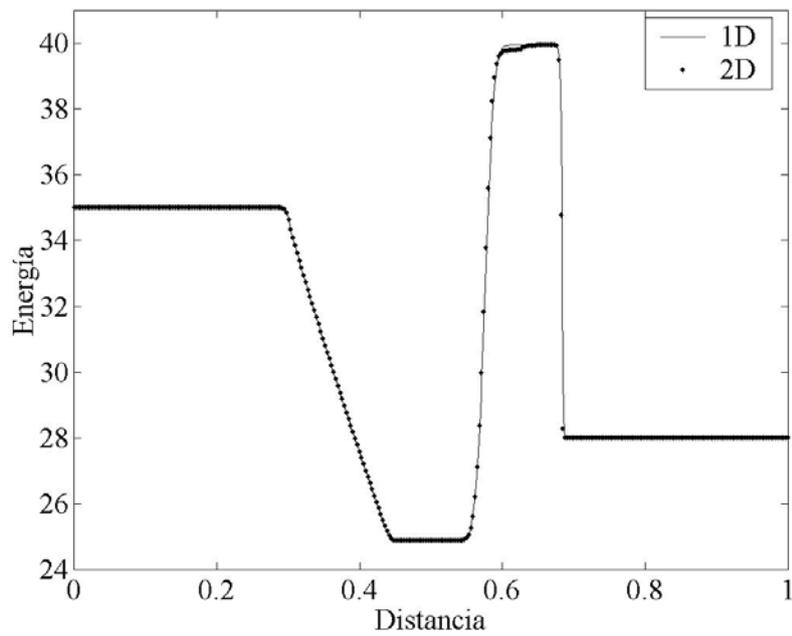


Figura E-14: Variación de la energía total en la dirección del flujo. GD1000.

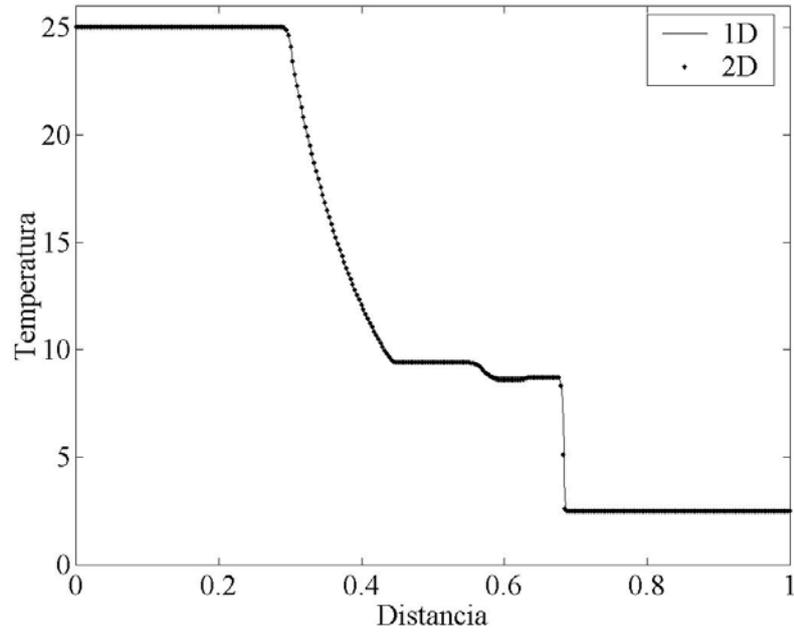


Figura E-15: Variación de la temperatura en la dirección del flujo. GD1000.

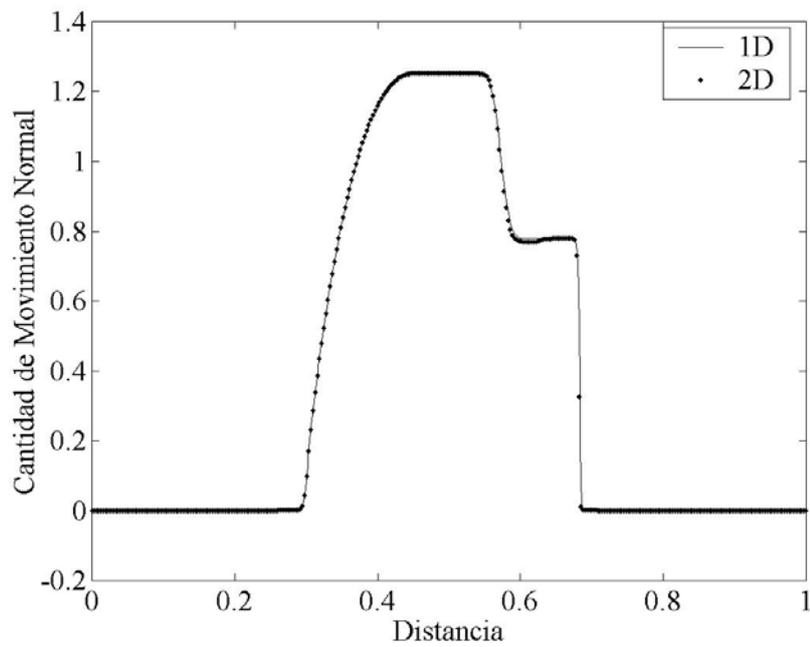


Figura E-16: Variación de la componente de la cantidad de movimiento en la dirección del flujo. GD1000.

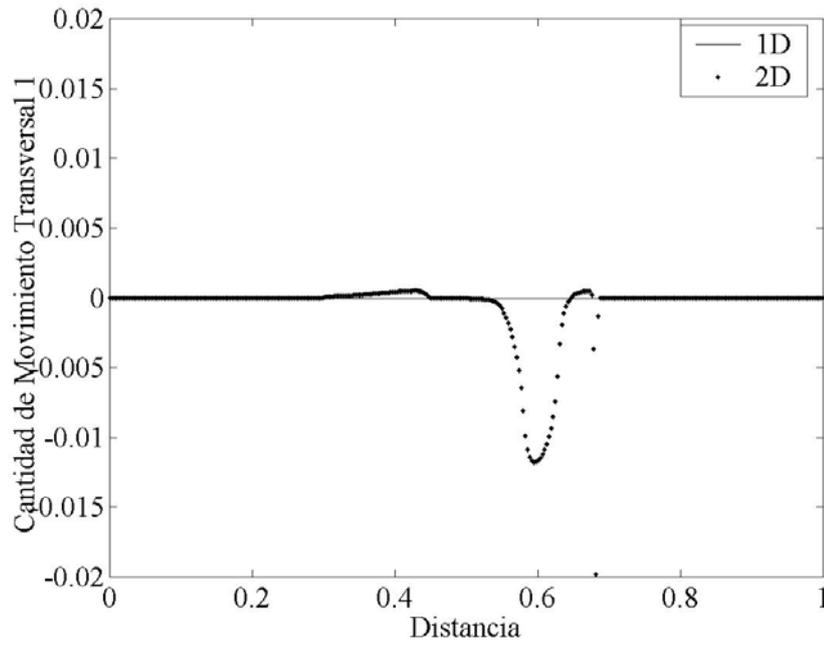


Figura E-17: Variación de la componente de la cantidad de movimiento en la dirección transversal al flujo 1. GD1000.

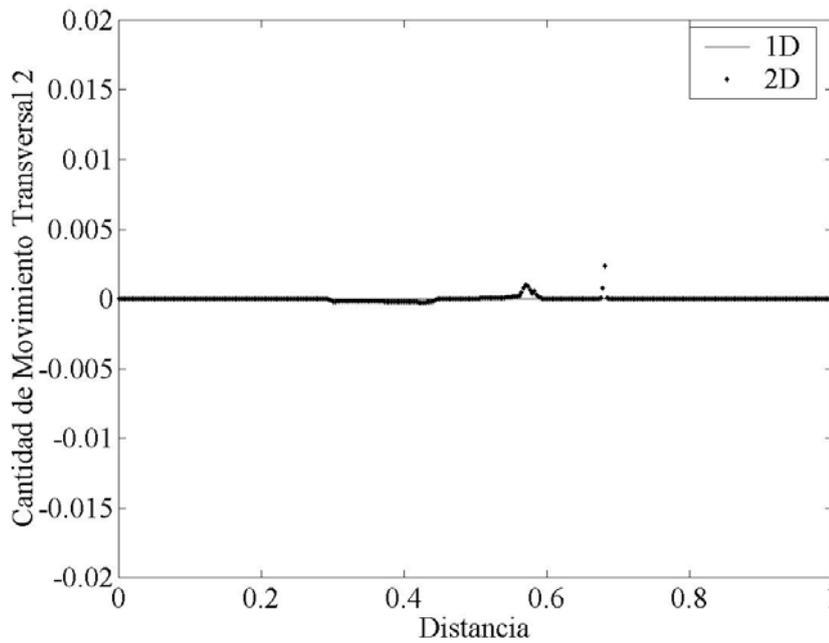


Figura E-18: Variación de la componente de la cantidad de movimiento en la dirección transversal al flujo 2. GD1000.

A los fines de ver como las ondas evolucionan en el tiempo se elaboro la Figura E-19, la cual muestra la variación de la densidad para distintos pasos de tiempo. En este caso sólo se muestra la densidad obtenida con el código bidimensional y no es contrastada con la solución unidimensional para lograr una mayor claridad en la representación.

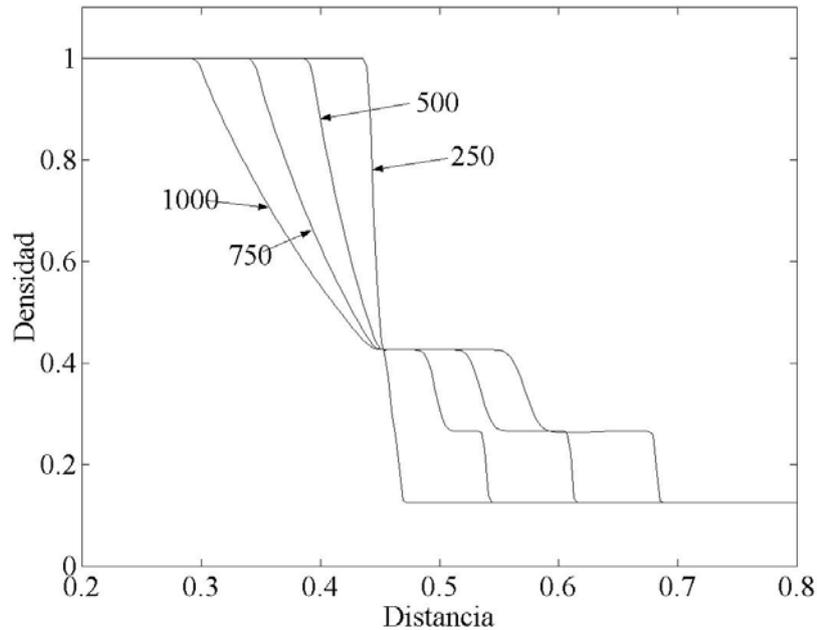


Figura E-19: Variación de la densidad en el tiempo.

Todos los resultados presentados en esta sección fueron obtenidos considerando que  $\delta$ , Ec. (3.33), es evaluado siguiendo una metodología propuesta en esta Tesis.

Finalmente podemos decir que el código numérico resolvió correctamente este importante y reconocido *benchmark* con el cual se pretendía determinar las capacidades del software en problemas donde el campo magnético fuera idénticamente nulo.

Los resultados presentados en este apéndice son concordantes con los observados en [Yee, 1989] y [Udrea, 1999].

## **Apéndice F**

# **Computo de los Flujos Numéricos para el caso Bidimensional**

En este apéndice se presenta la metodología utilizada para el cálculo de los flujos numéricos implementada en el código computacional bidimensional.

Como se demostró en el Cap III. los vectores y valores propios de las matrices jacobianas de los flujos juegan un papel preponderante en el seguidor de Riemann para obtener el flujo numérico. Estos son utilizados fundamentalmente en las Ec. (3.35)/(3.41) para obtener el flujo numérico asociado a la dirección  $x$ , el cual luego es introducido en la Ec. (3.21) para obtener la actualización temporal de las variables conservativas.

Considerando los flujos hiperbólicos físicos presentados en el capítulo II:

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} \rho u_x \\ \rho u_x^2 - B_x^2 + p + \frac{1}{2} B^2 \\ \rho u_x u_y - B_x B_y \\ \rho u_x u_z - B_x B_z \\ 0 \\ u_x B_y - u_y B_x \\ u_x B_z - u_z B_x \\ \left( e + p + \frac{B^2}{2} \right) u_x - (\tilde{B} \cdot \tilde{u}) B_x \end{pmatrix}, \tilde{G} = \begin{pmatrix} \rho u_y \\ \rho u_x u_y - B_x B_y \\ \rho u_y^2 - B_y^2 + p + \frac{1}{2} B^2 \\ \rho u_z u_y - B_z B_y \\ u_y B_x - B_y u_x \\ 0 \\ u_y B_z - B_y u_z \\ \left( e + p + \frac{B^2}{2} \right) u_y - (\tilde{B} \cdot \tilde{u}) B_y \end{pmatrix}$$

Es posible observar que si se permutan en el flujo en  $y$  las segunda-tercera filas, y a posteriori quinta-sexta, la estructura vectorial obtenida es similar a la del flujo en  $x$  con la única diferencia que donde corresponde el subíndice  $y$  debe ser  $x$  y también en la forma inversa. Es evidente que en las matrices jacobianas de los flujos sucede lo mismo permutándose filas y columnas respectivamente. Lo cual provoca una permutación de los vectores y valores propios, pero pudiendo utilizarse los aportados por [Zachary, 1994] para el caso unidimensional.

Sobre la base de la consideración anterior, la formula para la actualización temporal Ec. (3.21) se transforma en:

$$\tilde{U}(1)_{ij}^{n+1} = \tilde{U}(1)_{ij}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \overline{\tilde{F}(1)_{i+\frac{1}{2};j}^n} - \overline{\tilde{F}(1)_{i-\frac{1}{2};j}^n} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left( \overline{\tilde{F}(1)_{i;j+\frac{1}{2}}^n} - \overline{\tilde{F}(1)_{i;j-\frac{1}{2}}^n} \right)$$

$$\tilde{U}(2)_{ij}^{n+1} = \tilde{U}(2)_{ij}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \overline{\tilde{F}(2)_{i+\frac{1}{2};j}^n} - \overline{\tilde{F}(2)_{i-\frac{1}{2};j}^n} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left( \overline{\tilde{F}(3)_{i;j+\frac{1}{2}}^n} - \overline{\tilde{F}(3)_{i;j-\frac{1}{2}}^n} \right)$$

$$\tilde{U}(3)_{ij}^{n+1} = \tilde{U}(3)_{ij}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \overline{F(3)_{i+\frac{1}{2};j}^n} - \overline{F(3)_{i-\frac{1}{2};j}^n} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left( \overline{F(2)_{i;j+\frac{1}{2}}'^n} - \overline{F(2)_{i;j-\frac{1}{2}}'^n} \right)$$

$$\tilde{U}(4)_{ij}^{n+1} = \tilde{U}(4)_{ij}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \overline{F(4)_{i+\frac{1}{2};j}^n} - \overline{F(4)_{i-\frac{1}{2};j}^n} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left( \overline{F(4)_{i;j+\frac{1}{2}}'^n} - \overline{F(4)_{i;j-\frac{1}{2}}'^n} \right)$$

$$\tilde{U}(5)_{ij}^{n+1} = \tilde{U}(5)_{ij}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \overline{F(5)_{i+\frac{1}{2};j}^n} - \overline{F(5)_{i-\frac{1}{2};j}^n} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left( \overline{F(6)_{i;j+\frac{1}{2}}'^n} - \overline{F(6)_{i;j-\frac{1}{2}}'^n} \right)$$

$$\tilde{U}(6)_{ij}^{n+1} = \tilde{U}(6)_{ij}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \overline{F(6)_{i+\frac{1}{2};j}^n} - \overline{F(6)_{i-\frac{1}{2};j}^n} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left( \overline{F(5)_{i;j+\frac{1}{2}}'^n} - \overline{F(5)_{i;j-\frac{1}{2}}'^n} \right)$$

$$\tilde{U}(7)_{ij}^{n+1} = \tilde{U}(7)_{ij}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \overline{F(7)_{i+\frac{1}{2};j}^n} - \overline{F(7)_{i-\frac{1}{2};j}^n} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left( \overline{F(7)_{i;j+\frac{1}{2}}'^n} - \overline{F(7)_{i;j-\frac{1}{2}}'^n} \right)$$

$$\tilde{U}(8)_{ij}^{n+1} = \tilde{U}(8)_{ij}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \overline{F(8)_{i+\frac{1}{2};j}^n} - \overline{F(8)_{i-\frac{1}{2};j}^n} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left( \overline{F(8)_{i;j+\frac{1}{2}}'^n} - \overline{F(8)_{i;j-\frac{1}{2}}'^n} \right)$$

donde  $\overline{F(.)'^n}$  es el flujo numérico en la dirección  $y$  pero calculado utilizando la misma subrutina computacional desarrollada para obtener  $\overline{F(.)^n}$ .

Debe tenerse presente que los datos ingresados, en la rutina desarrollada para el cálculo del flujo numérico en la dirección  $y$ , deben preservar la rotación de filas comentadas con anterioridad.