

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES



**Tesis Doctoral**

**Predicción Numérica de los Campos de Tensiones Durante el  
Llenado y la Descarga de Silos de Almacenamiento de  
Materiales Granulares**

Tesis presentada a la Facultad De Ciencias Exactas, Físicas Y Naturales en  
cumplimiento parcial de los requerimientos para obtener el grado de

**Doctor en Ciencias de la Ingeniería**

COMISIÓN ASESORA

Dr. Fernando G. Flores (Director de Tesis)

Dr. Luis A. Godoy

Dr. Fernando Reyna

Año 2010



Doctorado en Ciencias de la Ingeniería  
Escuela de Cuarto Nivel Académico  
Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales  
Universidad Nacional de Córdoba  
República Argentina  
Avda. Vélez Sarsfield 1601 – Tel. 54 351 4333075 - 5000 Córdoba

### Acta Tribunal de Tesis de Doctorado

En la Ciudad de Córdoba a los 24 días del mes de Septiembre de 2010 se reúne el Tribunal de Tesis del Doctorado en Ciencias de la Ingeniería, de la Inga. Adriana Pernich, cuya tesis se denomina “Predicción numérica de los campos de tensiones durante el llenado y la descarga de silos de almacenamiento de materiales granulares”.

El tribunal, integrado por el Dr. Oscar Möller, el Dr. Carlos Gabriel García Garino y el Dr. Juan José Clariá, después de haber analizado la tesis durante el período previo a su defensa y de presenciar su exposición oral, acuerda por unanimidad calificar la Tesis como:

APROBADA

A los efectos de dejar constancia se firma la presente acta.

Dr. Oscar Möller  
Universidad Nacional de Rosario

Dr. Carlos G. García Garino  
Universidad Nacional de Cuyo

Dr. Juan José Clariá  
Universidad Nacional de Córdoba

## Resumen

Esta tesis estudia el comportamiento de materiales granulares gruesos almacenados en silos y tolvas. El análisis del comportamiento mecánico del grano se realiza mediante modelado numérico por elementos finitos. Se simula la evolución de los estados de deformaciones y tensiones durante el proceso de llenado y vaciado de silos. Los resultados obtenidos se validan comparándolos con fórmulas teóricas, otros modelos numéricos y resultados experimentales disponibles en la bibliografía. Los silos estudiados comprenden tanto los denominados de flujo másico como de flujo canalizado.

El trabajo consiste en la implementación de un elemento finito de deformación plana - axilimetría y de una relación constitutiva elastoplástica para materiales friccionales en un programa de elementos finitos explícito. Para el elemento de deformación plana - axilimetría se ha adoptado una formulación Lagrangeana actualizada formulando las ecuaciones respecto de un sistema corrotacional. La relación constitutiva elastoplástica para materiales friccionales adoptada tiene origen en la mecánica de suelos.

El modelo constitutivo adoptado está compuesto por una ley elástica no lineal, donde el módulo tangente es función de la presión. La superficie de fluencia es discontinua. En el espacio de tensiones está compuesta por un cono, que corresponde al modelo de Drucker Prager, el cual encierra un casquete elipsoidal, que corresponde al modelo Cam Clay modificado. Las reglas de flujo que corresponden a cada parte de la función de fluencia son diferentes. El elipsoide tiene una regla de flujo asociada y el cono una regla de flujo no asociada. Solo el elipsoide tiene una ley de endurecimiento - ablandamiento empírica que es función de la deformación volumétrica plástica. El cono permanece fijo en el espacio de tensiones.

El programa de elementos finitos utilizado permite considerar la estructura como infinitamente rígida o flexible. En lo referente a las condiciones de contorno este código permite considerar la condición de contacto mecánico con fricción, prescribir desplazamientos y considerar restricciones multipunto. La condición de contacto mecánico con fricción permite considerar la interacción entre el grano y la pared, interacción que afecta tanto el comportamiento del grano como las presiones que el material ejerce sobre la estructura.

En particular se trabaja modelando tolvas y silos de diferente geometría. En especial se modelan silos de laboratorio, que se llenaron y vaciaron con arena seca de grano uniforme, y un silo utilizado en un estudio de colaboración internacional.

El proceso de llenado se simula por medio de adición de capas de material granular. Se considera el proceso de llenado como cuasi estático para lo cual se adopta un valor de amortiguamiento viscoso que permita que el grano se consolide por acción del peso propio. Entre los factores que afectan el estado de tensiones y de deformaciones durante el llenado se analizan el espesor de las capas, el pseudo tiempo en el que se agregan las distintas capas y los parámetros de la condición de contacto mecánico.

El estado inicial de tensiones y deformaciones en el grano al inicio de la simulación del vaciado es el obtenido al finalizar el proceso de llenado. La apertura de la compuerta de descarga se simula eliminando la condición de contacto a nivel de la compuerta, siendo la relación constitutiva la que representa la evolución del comportamiento del grano durante el vaciado. Durante el vaciado las partículas del material granular pueden perder el contacto entre sí debido a la expansión volumétrica, por lo cual el material no puede transmitir fuerzas internas. Una condición cinemática determina cuando el material se encuentra fuera del silo. La metodología permite determinar la distribución de las presiones de contacto al final del llenado y su variación al inicio del vaciado, en silos y tolvas con diferentes patrones de flujo. En el caso de tolvas y silos con flujo canalizado o mixto permite establecer las zonas donde el movimiento del grano es diferente y la posición del borde del canal de flujo.

## Abstract

This thesis studies the behavior of coarse granular materials stored in silos and hoppers. The method used to analyse the mechanical behaviour is finite elements. During the process of filling and emptying of silos, the evolution of strain and stress states is simulated. The results are validated by comparing them with theoretical formulas, some numerical models and experimental results available in the literature. The silos studied include both the so-called mass flow and funnel flow.

The work involves the implementation of a plane strain – axisymmetric finite element and an elastoplastic constitutive relation for frictional materials in an explicit finite element program. For the plane strain – axisymmetric element, an updated Lagrangean formulation has been adopted formulating the equations for a corrotational system. The elastoplastic constitutive relation for frictional materials is originated at the soil mechanics.

The constitutive model adopted is composed of a nonlinear elastic law, where the tangent modulus is a function of pressure. The yield surface is discontinuous. The space of tension consists of a cone, which corresponds to Drucker Prager model, which involves an ellipsoidal cap, corresponding to the modified Cam Clay model. The flow rules corresponding to each part of the yield surface are different. The ellipsoid has an associated flow rule and the cone a non-associated flow rule. Only the ellipsoid has an empirical hardening – softening law that is a function of plastic volumetric strain. The cone remains fixed in space of tensions.

The finite element program allows to consider the structure as infinitely rigid or flexible. Regarding the boundary conditions, this code allows to consider the condition of mechanical contact with friction, prescribe displacements and consider multipoint constraints. The condition of mechanical contact with friction allows to consider the interaction between grain and wall, that affects the behaviour of the grain as the pressures exerted by the material on the structure.

In particular, hoppers and silos of different geometry are modeled. Specially, laboratory silos filled and emptied with uniform grain dry sand, and a silo used in an international collaborative study are modelled.

The filling process is simulated by means of the addition of layers of granular material. The filling process is considered as a quasi-static process. An adequate viscous damping is adopted. It allows the grain to be consolidated under its own weight. Among the factors that affect the state of stress and deformation during filling, the thickness of the layers, the pseudo time in which the layers are added and the parameters of the mechanical contact condition are analyzed.

The initial state of stresses and strains in the grain considered for the simulation of discharge is obtained at the end of the filling process. The opening of the discharge gate is simulated by removing the contact condition at the gate, where the constitutive relation represents the evolution of grain behaviour during discharge. During discharge, the particles of granular material may lose contact among them due to the volumetric expansion, so the material can not transmit internal forces. A kinematic condition determines if the material is outside the silo.

The methodology used allow to determine the distribution of contact pressures at the end of filling and how this distribution varies at the start of emptying, in silos and hoppers with different flow patterns. In the case of hoppers and silos with funnel or mixed flow, the methodology allows to identify the areas where the movement of grain is different and the position of the edge of flow channel.

## Résumé

Dans le cadre de cette thèse, nous avons étudié le comportement des matériaux grossiers à base granulaire stockés dans des silos et des trémies. Pour l'analyse du comportement mécanique de chaque grain, nous avons effectué une modélisation numérique par éléments finis qui simule l'évolution des états des déformations et des tensions lors du processus de remplissage et de vidange des silos. Les résultats obtenus ont été validés en les comparant aux formules théoriques, à d'autres modèles numériques et aux résultats expérimentaux disponibles dans la littérature consultée. Les silos étudiés comprennent des silos à débit massique et ceux dont le flux de matière est canalisé.

Notre travail a consisté à mettre en place un élément fini en déformation plane – symétrie axiale, et une relation constitutive élastoplastique pour les matériaux de friction en utilisant un logiciel d'éléments finis explicite. Pour l'étude de l'élément en déformation plane, nous avons adopté une formulation des équations de Lagrange, qui a été mise à jour en formulant des équations concernant un système corrotationnel. Quant à l'étude de la relation constitutive élastoplastique pour les matériaux de friction, elle se fonde sur la mécanique des sols.

Le modèle constitutif adopté est constitué d'une loi de comportement élastique non linéaire, où le module tangent est fonction de la pression. La surface de la fluence est discontinue. Dans l'espace de tensions, elle est constituée d'un cône, qui correspond au modèle de Drucker Prager, lequel implique à son tour une calotte ellipsoïdale, qui correspond au modèle de Cam Clay modifié. Les règles de flux correspondant à chaque partie de la fonction de fluence sont différentes. En effet, l'ellipsoïde a une règle de flux associée et le cône, une règle de flux non associée. C'est seulement l'ellipsoïde qui a une loi de durcissement – ramollissement empirique, laquelle est fonction de la déformation volumétrique plastique.

Le logiciel d'éléments finis utilisé nous permet d'envisager la structure comme infiniment rigide ou infiniment flexible. En ce qui concerne les caractéristiques du contours de la structure, ce code permet de prendre en compte l'état de contact mécanique avec frottement, de prescrire des déplacements et d'en examiner les contraintes multipoint. En ce qui concerne la condition de contact mécanique avec frottement, elle permet d'en examiner l'interaction grains/paroi. Celle-ci a des effets tant sur le comportement du grain que sur les pressions du matériel sur la structure.

En particulier, nous avons modélisé des silos et des trémies qui ont des formes diverses. Il s'agit notamment de la modélisation de silos de laboratoire, qui ont été remplis de sable sec à grain uniforme, et ensuite vidés, et de celle d'un silo qui a été utilisé dans le cadre d'une étude en collaboration internationale.

Le processus de remplissage est simulé par addition de couches de matériaux granulaires. Nous avons considéré le processus de remplissage comme quasi-statique, ce qui nous a amenée à adopter une valeur d'amortissement visqueux permettant au grain de se consolider sous son propre poids. Parmi les facteurs susceptibles de modifier l'état des tensions et des déformations lors du remplissage, nous avons analysé l'épaisseur des couches, le pseudo-temps pendant lequel les couches sont ajoutées et les paramètres relatifs à la condition de contact mécanique.

L'état initial des tensions et des déformations du grain au début de la simulation de la vidange est celui qu'on obtient à la fin du processus de remplissage. L'ouverture de la vanne de décharge est simulée en éliminant la condition de contact au niveau de la vanne; la relation constitutive représente l'évolution du comportement des grains pendant la vidange. Pendant la vidange, les particules du matériel granulaire, en raison de leur expansion volumétrique, peuvent perdre contact les unes avec les autres, de sorte que ce matériel ne peut plus transmettre des forces internes. Une condition cinématique détermine si le matériel est à l'extérieur du silo. Cette méthodologie permet de déterminer la distribution des pressions de contact à la fin du remplissage et leur variation au début de la vidange, dans des silos et des trémies dont les patrons de flux sont différents. Dans le cas de trémies et de silos à flux mixtes ou canalisés, elle permet de déterminer tant les zones dans lesquelles le mouvement du grain est différent que la position des bords du canal de flux.

*A la memoria de mis padres Nélida y Antonio*

*de quienes aprendí el valor de la dedicación y el esfuerzo*

## Agradecimientos

Al Dr. Fernando G. Flores por el software sobre el cual he trabajado incorporando los aspectos desarrollados en esta tesis como así también el asesoramiento y las revisiones de los desarrollos previos a su implementación. Al Dr. Luis A. Godoy por los cursos de postgrado realizados, los cuales ampliaron mi modo de ver muchos aspectos de los sistemas. Al Dr. Pedro Arduino por su asesoramiento en los aspectos importantes a considerar en una relación constitutiva para materiales granulares. Al Dr. Carlos A. Prato por su interés en que esta tesis llegue a buen fin.

A Dr. Marcelo Ceballos, Dr. Franco Francisca y Dr. Federico Pinto por las constructivas discusiones mantenidas en mi estancia en la Universidad Nacional de Córdoba y por su amistad de muchos años.

Un especial agradecimiento al Ing. Antonio T. Torres, Dr. Marta S. Marissa, Msc. Ana M. Basset, Dr. Carina Caballero Dr. Rossana C. Jaca mis compañeros de trabajo y amigos, por su constante apoyo que me ayudo a transitar por momentos muy difíciles en estos últimos años y a seguir adelante con esta tesis a pesar de los muchos inconvenientes.

A mis compañeros de trabajo del Area de Computación Aplicada Ing. Pablo A Ortiz, Ing. Mariel Bruno e Ing. Emilio Horane les agradezco su dedicación y su paciencia como también a los muchos ayudantes que formaron temporalmente parte del área a lo largo de estos años.

A la Lic. Andrea Luna y Lic. Alejandro Huenchulao por su amistad, su energía y especialmente a sus cuidados a mi salud.

A mis hermanos Graciela y Guillermo mis cuñados Mabel y Marcelo mis sobrinos Patricia, Paola, Liliana, Verónica, Marcelo, Alejandro y Sebastian mis tíos Norma y Oscar y mis primos Miguel, Gladys y Marcelo por su cariño, apoyo, compañía y comprensión.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Presentación del problema . . . . .	1
1.1.1. Factores que intervienen en el diseño . . . . .	1
1.1.2. Formas de flujo que se producen en los silos . . . . .	2
1.1.3. Tamaño de la abertura de la tolva . . . . .	6
1.1.4. Presiones y su relación con el tipo de flujo y forma de la tolva . . . . .	8
1.2. Objetivos . . . . .	10
1.3. Contenidos y organización de la tesis . . . . .	11
<b>2. Antecedentes en silos</b>	<b>13</b>
2.1. Introducción . . . . .	13
2.2. Antecedentes experimentales . . . . .	15
2.2.1. Dispositivos de medición de presiones . . . . .	15
2.2.2. Resultados de las mediciones . . . . .	17
2.3. Antecedentes numéricos . . . . .	22
2.3.1. Método de Elementos Finitos con formulación Euleriana . . . . .	23
2.3.2. Método de Elementos Finitos con formulación Lagrangeana . . . . .	24
2.3.3. Comparación de las formulaciones Lagrangeana y Euleriana . . . . .	29
2.3.4. Otras metodologías numéricas . . . . .	29
2.3.5. Normas para determinar las sollicitaciones en silos . . . . .	30
<b>3. Antecedentes en relaciones constitutivas.</b>	<b>31</b>
3.1. Introducción . . . . .	31
3.2. Modelos constitutivos de la mecánica de suelos . . . . .	32
3.2.1. Reseña histórica . . . . .	32
3.2.2. Aproximaciones al estudio del comportamiento de los materiales granulares . . . . .	33
3.2.3. El rol de la mecánica del continuo . . . . .	33
3.2.4. Introducción a los tipos de comportamiento en la mecánica del continuo . . . . .	34
3.2.5. Modelos para suelos cohesivos y para no cohesivos . . . . .	36
3.2.6. Modelos constitutivos en la mecánica del continuo . . . . .	39
3.2.7. Métodos de análisis . . . . .	42
3.3. Características de los materiales granulares ensilados . . . . .	43
3.4. Modelo constitutivo elastoplástico para material granular . . . . .	45

3.4.1.	Propiedades elásticas . . . . .	45
3.4.2.	Superficie de fluencia . . . . .	46
3.4.3.	Superficie potencial plástica. Regla de flujo . . . . .	46
3.4.4.	Ley de endurecimiento - ablandamiento . . . . .	47
<b>4.</b>	<b>Formulación físico matemática del problema</b>	<b>49</b>
4.1.	Introducción . . . . .	49
4.2.	Ecuación de gobierno. Generalidades . . . . .	50
4.2.1.	Condiciones de contorno . . . . .	51
4.3.	Solución numérica . . . . .	53
4.3.1.	Término de las fuerzas de inercia . . . . .	53
4.3.2.	Término de las fuerzas de amortiguamiento . . . . .	54
4.3.3.	Término de las fuerzas másicas . . . . .	55
4.3.4.	Término de las fuerzas resistentes internas . . . . .	56
4.3.5.	Término de las fuerzas prescritas en el contorno . . . . .	57
4.3.6.	Condiciones de contorno . . . . .	58
4.3.7.	Proceso de ensamblaje . . . . .	61
4.3.8.	Resumen del proceso de solución numérico . . . . .	62
4.4.	Elemento finito implementado . . . . .	64
4.4.1.	Estados bidimensionales . . . . .	64
4.4.2.	Sistemas de referencia del elemento . . . . .	65
4.4.3.	Matriz de transformación entre los sistemas global y corrotacional . . . . .	67
4.4.4.	Derivadas de las funciones de forma respecto de los sistemas global y corrotacional . . . . .	68
4.4.5.	Obtención del vector de fuerzas internas del elemento . . . . .	69
4.4.6.	Cálculo del vector de fuerzas internas del elemento . . . . .	76
<b>5.</b>	<b>Modelo constitutivo</b>	<b>79</b>
5.1.	Introducción . . . . .	79
5.2.	Modelo constitutivo adoptado. . . . .	80
5.2.1.	Ley elástica . . . . .	80
5.2.2.	Superficie de fluencia . . . . .	80
5.2.3.	Potencial plástico (o regla de flujo) . . . . .	80
5.2.4.	Ley de endurecimiento . . . . .	81
5.3.	Expresiones del modelo constitutivo adoptado . . . . .	82
5.3.1.	Comportamiento elástico . . . . .	82
5.3.2.	Comportamiento plástico . . . . .	82
5.3.3.	Algoritmo de integración de las ecuaciones constitutivas . . . . .	85
5.3.4.	Algoritmo de selección de la superficie de fluencia activa . . . . .	96
5.4.	Determinación de los parámetros constitutivos . . . . .	98
5.5.	Hipótesis para la etapa de vaciado del silo. . . . .	100

<b>6. Simulación de ensayos triaxiales</b>	<b>103</b>
6.1. Introducción . . . . .	103
6.2. Modelado de ensayos triaxiales . . . . .	103
6.2.1. Descripción del ensayo triaxial de compresión isotrópica . . . . .	103
6.2.2. Modelo del ensayo triaxial de compresión isotrópica. . . . .	104
6.2.3. Descripción del ensayo triaxial de compresión convencional drenado. . . . .	106
6.2.4. Modelo del ensayo triaxial de compresión convencional drenado. . . . .	107
6.3. Conclusiones . . . . .	112
<b>7. Modelo de llenado</b>	<b>115</b>
7.1. Introducción . . . . .	115
7.2. Descripción del modelo de llenado . . . . .	116
7.2.1. Amortiguamiento. . . . .	117
7.2.2. Tiempo de activación de las capas. Discretización del llenado. . . . .	120
7.2.3. Escala. Relación constitutiva. . . . .	124
7.2.4. Modelo de contacto mecánico . . . . .	127
7.3. Casos de aplicación . . . . .	134
7.3.1. Tolvas cónicas. . . . .	135
7.3.2. Silo de fondo plano. Otros resultados numéricos y modelos teóricos. . . . .	140
7.3.3. Silo simétrico de deformación plana con tolva en cuña. Comparación con mediciones experimentales. . . . .	148
7.3.4. Silo asimétrico de deformación plana con tolva en cuña. Mediciones experimentales. . . . .	155
7.4. Conclusiones . . . . .	163
<b>8. Modelo del vaciado</b>	<b>169</b>
8.1. Introducción . . . . .	169
8.1.1. Descripción del modelo de vaciado . . . . .	169
8.2. Casos de aplicación . . . . .	171
8.2.1. Vaciado de tolvas cónicas. . . . .	171
8.3. Conclusiones . . . . .	184
<b>9. Vaciado de silos</b>	<b>187</b>
9.1. Introducción . . . . .	187
9.2. Vaciado de un silo simétrico con tolva . . . . .	188
9.2.1. Vaciado correspondiente al llenado distribuido utilizando una malla uniforme y estructura rígida . . . . .	188
9.2.2. Vaciado correspondiente al llenado distribuido utilizando una malla no uniforme con transición depósito - tolva suavizada y estructura rígida. . . . .	192
9.2.3. Modelo de vaciado correspondiente al llenado distribuido utilizando una malla uniforme y estructura flexible. . . . .	195

---

9.2.4. Vaciado correspondiente al llenado concéntrico con malla no uniforme y estructura rígida . . . . .	201
9.3. Vaciado de un silo asimétrico con tolva (estructura rígida) . . . . .	204
9.3.1. Vaciado correspondiente al llenado distribuido . . . . .	204
9.3.2. Vaciado correspondiente al llenado concéntrico . . . . .	207
9.4. Conclusiones . . . . .	210
<b>10. Conclusiones y líneas de trabajo futuro</b>	<b>213</b>
10.1. Síntesis de la presente tesis . . . . .	213
10.2. Principales conclusiones . . . . .	215
10.2.1. Simulación de ensayos de compresión isotrópica y de compresión convencional drenados . . . . .	215
10.2.2. Simulación del llenado . . . . .	216
10.2.3. Vaciado de tolvas . . . . .	218
10.2.4. Vaciado de silos . . . . .	219
10.3. Principales contribuciones de esta tesis . . . . .	220
10.4. Líneas de trabajo futuro . . . . .	221
<b>Anexo 1</b>	<b>222</b>
<b>Anexo 2</b>	<b>224</b>
<b>Anexo 3</b>	<b>229</b>

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Presentación del problema

El estudio del comportamiento mecánico de materiales ensilados es de gran importancia en muchas aplicaciones industriales, en especial el almacenado de productos agrícolas, de minería y de construcción entre otros.

En el último medio siglo ha aumentado significativamente el tamaño de los silos los cuales han sufrido fallas y colapsos importantes. Estos se deben a la pobre precisión que se alcanza en la determinación de las cargas que el material acumulado ejerce sobre las paredes durante el llenado y fundamentalmente durante el vaciado de los silos. El diseño es basado en las especificaciones de normas vigentes que se tienen su base en fórmulas empíricas obtenidas de aproximaciones teóricas al comportamiento del material, siendo las más conocidas las debida a [Janssen, 1895] y la más reciente debida a [Reimbert et al., 1971].

La distribución de las presiones sobre las paredes depende de la geometría del silo, en especial de la relación altura diámetro y de la forma de la tolva, ambas relacionadas con el tipo de movimiento que experimenta el material al vaciar el silo. Los trabajos de investigación primeramente fueron de tipo experimental sobre modelos a escala, para comprender los procesos que tienen lugar y luego se comenzaron a plantear modelos de comportamiento del material para ser utilizados tanto en modelos teóricos como numéricos.

#### 1.1.1. Factores que intervienen en el diseño

Los principales motivos por los cuales es relevante el estudio de materiales almacenados a granel está relacionado con los costos de almacenamiento, manejo y transporte que suelen ser significativos respecto del costo del material. En lo referente al almacenamiento los silos permiten conservar grandes cantidades de material en condiciones óptimas hasta que sea fraccionado para vender o ser utilizado en algún proceso industrial.

En la situación actual, los niveles de sofisticación requeridos por la industria demandan en muchos casos una mejor comprensión tanto del comportamiento de los materiales almacenados a granel como de los criterios de desempeño asociados al diseño de plantas donde estos materiales se acopian y manejan, sea esta su finalidad única o bien forme parte de un proceso industrial. En

general cuando un problema es resuelto, dando una mejora en el desempeño de la planta, quedan expuestos otros problemas a resolver.

En lo referente a los silos, hay muchos vacíos en el conocimiento donde es necesario realizar investigaciones. Caben citar la relevancia de la fricción entre el material almacenado y las paredes del depósito la tolva y el sumidero; las causas que hacen que el flujo de descarga por gravedad sea inestable; la magnitud y la ubicación de las cargas dinámicas producidas por el flujo pulsante y el tipo de flujo a obtener con un determinado diseño entre otros.

Los procedimientos actuales de diseño de una planta de manejo de sólidos a granel siguen los siguientes pasos, según [Roberts, 1991]:

1. Determinación de la resistencia y de las propiedades de flujo del material para la peor condición probable de flujo esperable.
2. La determinación de la geometría del depósito principal y de los depósitos de reserva, los dispositivos de alimentación y de descarga, para darles la capacidad deseada con el fin de obtener un patrón de flujo de características aceptables y asegurar que la descarga es posible y predecible.
3. Estimar las cargas que actuarán sobre las paredes de cada componente estructural en condiciones de operación
4. Diseñar y detallar la planta incluyendo la estructura y el equipamiento.

En los trabajos de [Arnold and McLean, 1978] y [Arnold et al., 1982] se encuentra una recopilación que incluye las consideraciones de diseño a tener en cuenta para obtener un determinado tipo de flujo, determinación de las propiedades de los materiales y varias aproximaciones para estimar las cargas que actúan sobre las paredes del depósito y de la tolva. También incluye el método de estimación de cargas de la norma ACI.

### 1.1.2. Formas de flujo que se producen en los silos

Los modos de flujo en depósitos geoméricamente simétricos son tres: flujo másico, flujo en chimenea o canalizado y flujo expandido o mixto. Los dos principales tipos de flujo, siguiendo la definición dada por [Jenike, 1961] y [Jenike, 1964], son el flujo másico y el flujo canalizado.

Si durante la descarga se produce un flujo de tipo másico, esto significa que en todo punto dentro del depósito el material se encuentra en movimiento como se muestra en la Figura [1.1.1 a)]. Es decir que hay flujo de sólido almacenado a lo largo de las paredes verticales del depósito y de las paredes del embudo que forma la tolva. Este tipo de flujo garantiza una descarga completa a velocidades predecibles y tiene un patrón de flujo del tipo primero entrado primero salido. Si el depósito está bien diseñado se produce un remezclado del material durante la descarga que contrarresta en alguna medida la segregación que pudo tener el material cuando se llenó el depósito en forma concéntrica. El flujo másico requiere que las paredes de la tolva sean lisas y su ángulo respecto de la horizontal sea empinado (mayor a  $70^\circ$ ) y no se tengan transiciones abruptas. Los depósitos con flujo másico son clasificados de acuerdo al tipo de tolva y al patrón de flujo asociado. La mayoría son de tolva

cónica con flujo axilsimétrico o bien con una tolva en forma de cuña y con flujo plano. En el caso de ser un depósito de flujo plano en general se establece un ángulo de inclinación de la pared de la tolva que es entre  $8^\circ$  y  $10^\circ$  menor que para una tolva cónica dando mayor capacidad de almacenamiento a igual altura total. Pero ésta mayor capacidad de almacenamiento es compensada por ser la descarga una larga ranura que puede causar problemas durante el vaciado. Una tolva de transición que comienza en cuña y termina como un cono da un tamaño de la apertura de la ranura más aceptable. Las tolvas de forma piramidal, aunque fáciles de construir, no son deseables ya que es probable que ocurra una acumulación de material en las esquinas agudas o en los valles de flujo.

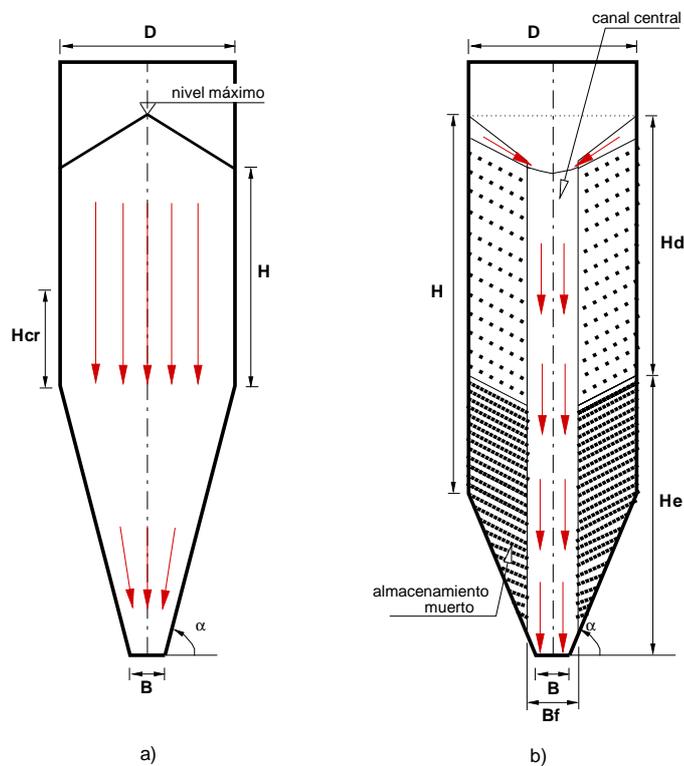


Figura 1.1.1: Tipos de flujo: a) flujo másico; b) flujo canalizado

Si las paredes de la tolva no tienen la inclinación suficiente o son rugosas, ocurre un flujo de tipo canalizado durante la descarga por gravedad como en la Figura [1.1.1 b)]. Esto significa que el sólido almacenado se estanca en la zona cercana a las paredes y cae desde la superficie superior del material dentro del canal de flujo vertical que se forma sobre la abertura de salida. El patrón de flujo es errático y genera problemas de segregación. El tipo de flujo es último entrado primero salido, que resulta inconveniente si el material se degrada con el tiempo (cereales). El flujo canalizado también trae inconvenientes con los materiales con baja permeabilidad ya que el flujo suele ser provocado inyectando aire a presión lo que provoca problemas en el flujo o bien un flujo descontrolado. El flujo de material se detiene a una distancia  $H_e$  donde la rigidez del material estancado es suficiente para sostener un canal estable de diámetro  $B_f$ . El material dentro de ésta zona representa un almacenamiento muerto. Para que se produzca una descarga completa la abertura de salida debe

ser por lo menos de diámetro  $B_F$  (que suele ser de varios metros) lo cual no es práctico.

Una desventaja adicional es causada por el repentino flujo de las zonas estancadas, producido por un aumento de la tensión vertical que actúa por encima o por una disminución de la tensión horizontal que ejerce el material dentro del canal de flujo sobre el material estancado [Schulze, 1998]. Debido a la velocidad relativa entre el material que fluye y el que no, se producen tensiones de corte que se dirigen hacia abajo en el material estancado produciendo un aumento de la tensión vertical. Los cambios en las tensiones que actúan en el material estancado tienen por efecto disminuir el soporte horizontal del sólido estancado y aumentar la fuerza vertical. Debido a estos cambios el material que se encuentra estancado dentro de la tolva - y posiblemente el que se encuentra por encima de este - deslicen hacia abajo por la pared de la tolva. En un corto tiempo el canal de flujo se llena con material densamente empaquetado por lo cual el material en la zona estancada ya no puede fluir, por lo tanto se desacelera mas o menos rápidamente. Esa desaceleración produce altas tensiones en el canal de flujo y la compresión de sólido dentro de la zona del canal y un temblor en todo el silo. Luego, una nueva descarga y el ciclo se repite: debido a la alta densidad dentro del canal de flujo el material de la zona estancada es sostenido por el material dentro del canal de flujo. Cuando el material en la zona del canal se dilata el soporte horizontal sobre el material estancado disminuye reiniciando el ciclo que termina en un nuevo temblor. Un esquema del mecanismo se muestra en la Figura [1.1.2 b)].

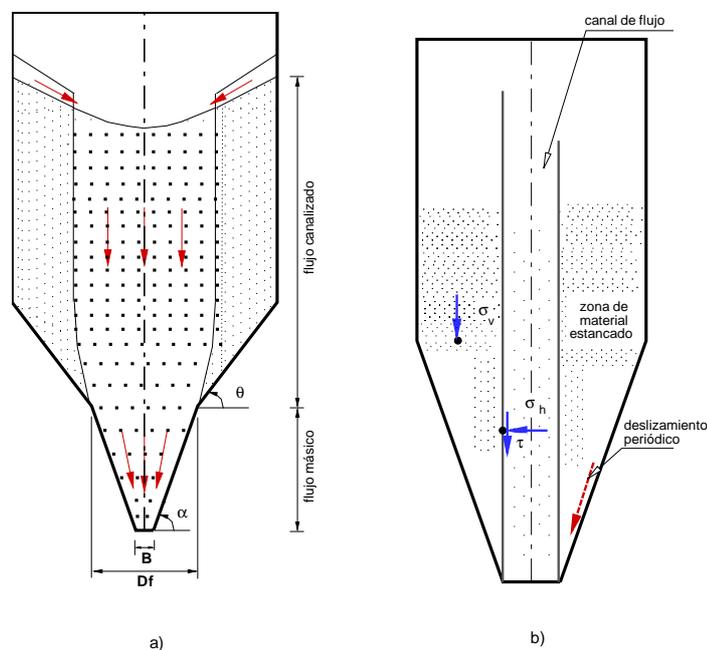


Figura 1.1.2: a) Flujo expandido; b) Mecanismo que induce temblores en silos

Una ventaja del flujo canalizado es que el material estancado protege a las paredes del desgaste que la abrasión del material granular produciría al deslizar sobre las paredes, como en el caso de productos de minería.

Las desventajas de un flujo canalizado pueden superarse si se utiliza un diseño de tolva para obtener flujo expandido, que combina la protección de las paredes del flujo canalizado con la descarga previsible del flujo másico. Un esquema de la geometría de una tolva para flujo expandido se presenta en la Figura [1.1.2 a)].

En general, los depósitos de forma simétrica proporcionan un mejor funcionamiento. Los de forma asimétrica a menudo inducen problemas de segregación en materiales con flujo libre y distintos tamaños de partículas lo cual dificulta la predicción de las cargas que actúan sobre las paredes.

El límite entre el flujo másico y canalizado, para depósitos simétricos y tolvas cónicas o en cuña, depende del ángulo de inclinación de las paredes de la tolva  $\alpha$  (que es igual al complemento del semi ángulo de la tolva  $\delta$ ), del ángulo de fricción interna del material granular  $\phi$  y del ángulo de fricción entre el material granular y la pared  $\phi_w$ . La definición dada por Jenike, basada en suponer que existe un campo de tensiones radial dentro de la tolva con tensiones nulas en la línea central, expresa el ángulo de la tolva como una función de los otros dos ángulos como  $90 - \alpha = \delta = f(\phi, \phi_w)$ . Los límites para tolvas cónicas y de flujo plano para tres valores de  $\phi_w$  se muestran en la Figura [1.1.3]. En el caso de tolvas cónicas en general recomienda que el ángulo  $\delta$  sea  $3^\circ$  menor que el valor límite. Para tolvas de flujo plano, los límites entre flujo másico y canalizado son mucho menos críticos que para las tolvas axilsimétricas.

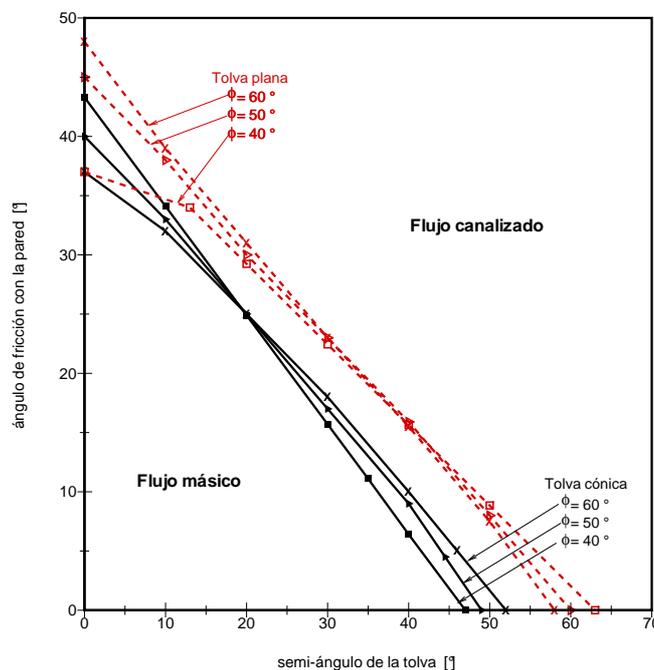


Figura 1.1.3: Límites entre flujo másico y canalizado en tolvas planas y cónicas

Se ha observado que el flujo másico en la tolva es afectado por la sobrecarga que es función del nivel del material dentro del depósito. Es necesario que exista un valor mínimo de sobrecarga  $H_{cr}$  para que en la tolva se obtenga un flujo másico. Para un silo de flujo másico como el de la Figura [1.1.1 a)] el valor de  $0,75D < H_{cr} < 1,00D$ , siendo  $D$  el diámetro del depósito. Investigaciones posteriores indican que los límites entre ambos tipos de flujo necesitan de mayor refinamiento y

explicaciones. [Jenike, 1964], publicó una teoría en la que supone que sobre la pared el perfil de velocidades debe tener valor cero. Ésta teoría mejora la predicción de los límites entre flujo másico y canalizado y resulta en una disminución del valor de los ángulos de la tolva respecto de su anterior teoría, en especial para valores elevados del ángulo de fricción entre el material granular y la pared.

En un estudio general sobre el flujo en silos [Benik, 1989] identifica tres tipos de flujo: másico, canalizado e intermedio. Benik demuestra en su trabajo que el nivel de sobrecarga tiene significativa influencia en el patrón de flujo generado. Derivó la relación para estimar  $H_{cr}$  para varios materiales granulares y parámetros geométricos de la tolva, siendo notables en ésta la relación altura/diámetro ( $H/D$ ) del depósito cilíndrico y el ángulo de fricción interna efectivo ( $\phi'$ ). Desarrolló la llamada “teoría de arco” para cuantificar los límites de los tres regímenes de flujo esquematizados en la Figura [1.1.4]. Ésta teoría predice la altura  $H_{cr}$  a la cual cambia el tipo de flujo.

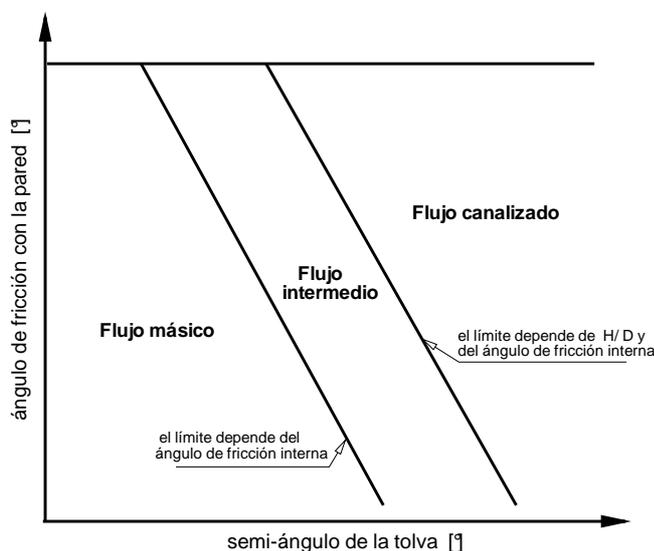


Figura 1.1.4: Regímenes de flujo en tolvas planas según Benik

### 1.1.3. Tamaño de la abertura de la tolva

Los materiales granulares gruesos son aquellos que tienen un rango de tamaños de partículas tal que la permeabilidad al aire es suficientemente alta para permitir que el aire se filtre a través del material con un mínimo de resistencia, considerando el flujo acelerado en la región de salida de la tolva como se muestra en la Figura [1.1.5 a)].

En este caso el gradiente de presión de aire es  $\Delta p_r = 0$  y analizando las fuerzas intervinientes se llega a que la tensión que actúa a  $45^\circ$  en el arco está dada por:

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{\rho g B}{H(\alpha)} \left( 1 - \frac{a}{g} \right)$$

donde:

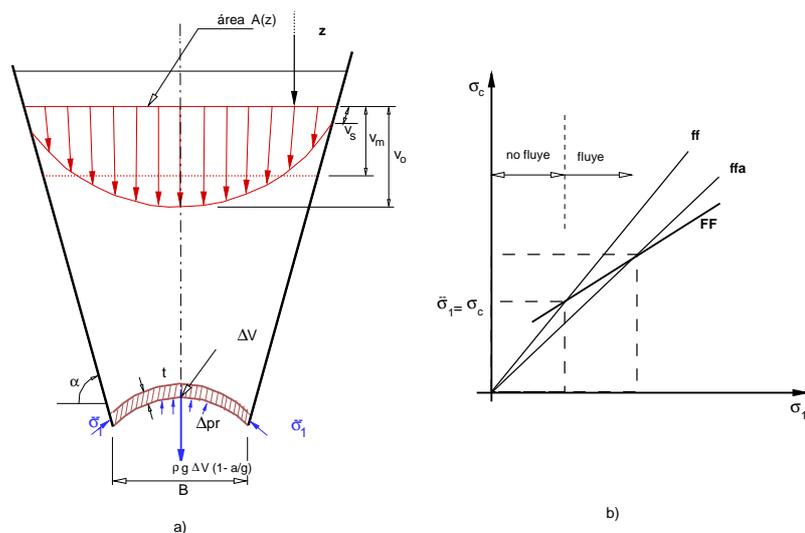


Figura 1.1.5: Flujo en una tolva. a) efecto arco y diagrama de velocidades; b) determinación de la geometría de la tolva

$\rho$  : densidad del material granular

$\bar{\sigma}_1$  : tensión a  $45^\circ$  en el arco

$a$  : aceleración del material en la salida

$B$  : apertura de la tolva

$H(\alpha)$  : factor que tiene en cuenta el espesor del arco  $t$  y el tipo de tolva (cónica o en cuña)

La apertura mínima para evitar la formación del arco ocurre cuando se tiene condición de equilibrio estático, es decir  $a = 0$ , entonces

$$B_{\text{mín}} = \frac{\sigma_1 H(\alpha)}{\rho g}$$

el ángulo de la tolva se elige considerando el límite para tener flujo másico, mientras que el valor de la tensión se obtiene considerando la resistencia del material por medio de la función de flujo  $FF$  y un parámetro que depende del canal de flujo  $ff$ . Tanto  $ff$  como  $H(\alpha)$  son dados como curvas de diseño en los trabajos [Jenike, 1964], [Arnold et al., 1982] y [Roberts, 1982]. La función de flujo  $FF$  es la relación entre la resistencia a fluencia no confinada (o también llamada tensión de fluencia no confinada)  $\sigma_c$  en función de la máxima presión de consolidación unidimensional  $\bar{\sigma}_1$  (aplicada al material en un molde rígido). Un esquema gráfico de la función de flujo y del parámetro del canal de flujo se muestra en Figura [1.1.5 b)].

Otros factores que afectan la geometría de un depósito para obtener flujo másico son el tiempo que el material permanece almacenado sin que sea movido y los cambios en el contenido de humedad que afectan significativamente la resistencia a fluencia inconfinaada del sólido almacenado.

En el caso de materiales orgánicos el contenido de humedad es un factor a controlar estrictamente con el fin de evitar que se produzcan reacciones químicas que generen gases o líquidos que pueden causar que se inicie la combustión del material o que se forme una mezcla explosiva. En ambos casos se produce la pérdida casi total del material almacenado e importantes daños en la estructura.

#### 1.1.4. Presiones y su relación con el tipo de flujo y forma de la tolva

En el diseño de los depósitos la predicción de las presiones sobre las paredes sigue siendo un problema bastante complejo. En los últimos años diversos grupos han puesto bastante esfuerzo de investigación en la predicción de las cargas que el material almacenado ejerce sobre las paredes, tanto desde un abordaje analítico como de simulaciones numéricas [Roberts, 1991].

Las aproximaciones al análisis de las cargas varían en un rango muy amplio pero ha quedado claro que están directamente relacionadas con el patrón de flujo que se desarrolla en el depósito. En general el flujo másico es más fácil de predecir y reproducir que el patrón con flujo canalizado o en chimenea. Los tipos de carga varían de estáticas, durante el llenado y almacenamiento del material, a dinámicas durante la descarga.

Diversos investigadores han observado que en condición de flujo másico se produce un pico de presión en la zona de transición depósito - tolva que suele ser varias veces el valor estático correspondiente a ese nivel durante el llenado o el almacenamiento. También han notado que las presiones en todo el depósito cilíndrico durante la etapa de vaciado son mayores a los valores estáticos. En los cilindros cuyas paredes son perfectamente verticales casi no se han detectado aumentos de la presión durante el vaciado. En silos con imperfecciones, como protuberancias en las zonas de soldadura o contracciones de las placas, se modifica el flujo y esto da lugar a concentraciones de tensiones en la cercanías de la imperfección. Éstas sobrepresiones deben ser tenidas en cuenta para calcular la envolvente de todos los picos de presión posibles.

En silos muy altos, donde se almacenan cereales, la transición efectiva se produce en la parte inferior del depósito. Debido al flujo másico, el deslizamiento del grano a lo largo de una altura considerable de las paredes del depósito por sobre la transición suele causar presiones dinámicas que pueden ser entre dos y tres veces las presiones estáticas que se tienen al finalizar el llenado de un silo inicialmente vacío. El uso de los llamados tubos anti-dinámicos de distinto tipo han sido probados en un intento por controlar el flujo canalizado y evitar las cargas dinámicas que se obtienen con un flujo másico cuando se almacenan materiales no cohesivos de flujo libre como granos.

En la Figura [1.1.6] se muestran de manera esquemática dos perfiles de velocidades en distintas secciones horizontales, la distribución de presiones sobre la pared y la variación de la densidad del material almacenado durante la descarga en un silo de flujo másico.

Para silos simétricos en los que se produce un flujo canalizado las presiones sobre las paredes deben determinarse con alto grado de confiabilidad. En silos con descarga asimétrica y depósitos con múltiples descargas exéntricas las presiones sobre las paredes pueden ser dificultosas de estimar. Con descargas asimétricas las paredes de los silos están sometidas a momentos flectores además de tensiones circunferenciales.

La fricción con las paredes es el factor que más afecta el funcionamiento de las tolvas, alimentadores y sumideros. [Mc Lean, 1988] recomienda calcular la apertura mínima de salida de la tolva en base a la fricción entre el material almacenado y la pared. La fricción depende de propiedades del sólido almacenado y de las características de la superficie de la estructura y es afectada por la condición de carga y por factores ambientales tales como la temperatura y la humedad. La fricción entre el material y la pared está relacionada con las propiedades de adhesión, cohesión y desgaste.

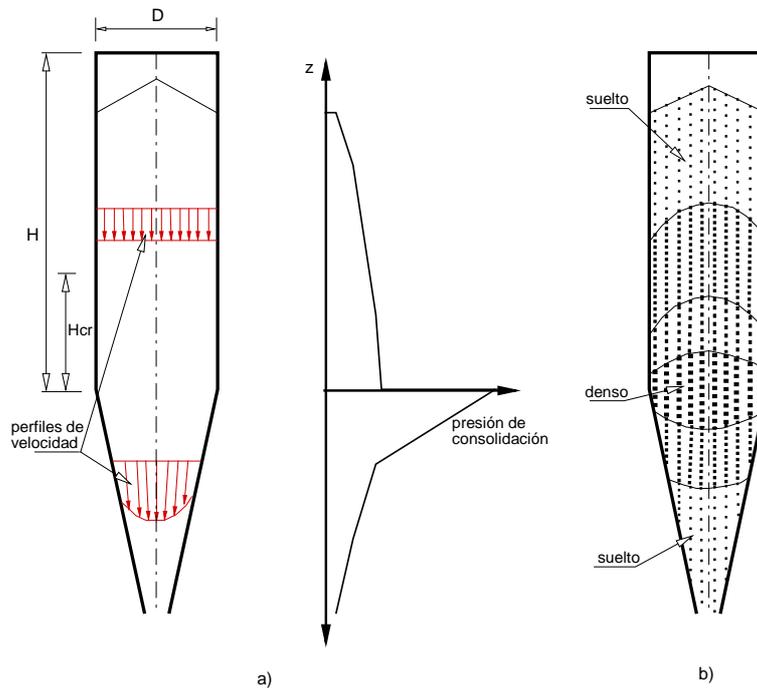


Figura 1.1.6: Descarga de un silo de flujo másico. a) perfiles de velocidades del material; b) distribución de presiones; c) cambios de densidad en el material

La fricción con la pared, la adhesión y cohesión pueden derivarse a partir de la superficie de fluencia de la pared que esquemáticamente se muestra en la Figura [1.1.7 a)]. La interacción entre la rugosidad de la pared y el tamaño de las partículas es un conjunto de parámetros que afecta la magnitud de la fricción que se genera. Se ha observado que el ángulo de fricción entre el material y las paredes disminuye cuando aumenta la presión que el material ejerce sobre las paredes [Mc Lean, 1988] y de la forma que esquemáticamente se muestra en Figura [1.1.7 b)]. Para determinar la superficie de fluencia a fricción sobre la pared se utiliza un ensayo de corte directo con una celda de tipo Jenike muy similar al utilizado en mecánica de suelos. Éste ensayo tiene limitaciones para suministrar datos sobre la cohesión y adherencia pues no se puede obtener presión cero ni tracción para determinar las propiedades que son relevantes para el diseño de los conductos de alimentación y de cintas transportadoras sobre las que algunos silos descargan el material [Roberts et al., 1990].

Algunos investigadores sugieren que la compresibilidad del sólido puede alterar significativamente la distribución de presiones en la tolva, aunque se espera sea relevante cuando el material almacenado posea una elevada rigidez y las paredes sean suficientemente flexibles. En los silos reales la rigidez de la tolva suele ser elevada por lo que el efecto de la compresibilidad del sólido no provocaría mayores cambios en la distribución de las presiones.

Durante la etapa de llenado la magnitud y distribución de las presiones presentan baja sensibilidad a las propiedades elásticas del sólido almacenado, esto indicaría que las condiciones de equilibrio son las que prevalecen en esta etapa y no las condiciones cinemáticas. En tolvas con bajo

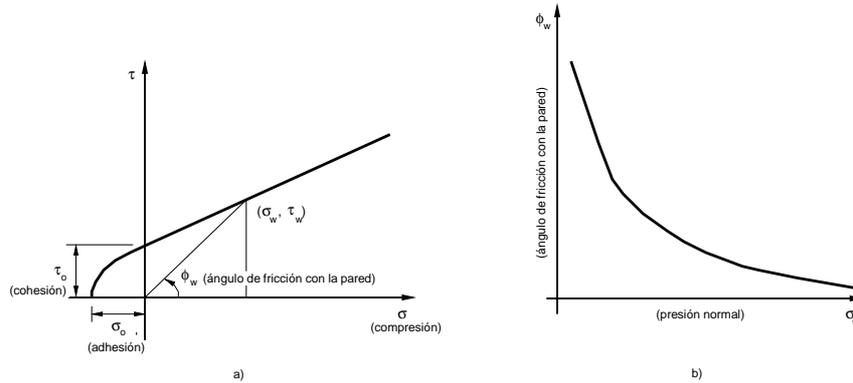


Figura 1.1.7: a) Superficie de fluencia de la pared; b) variación del ángulo de fricción con la presión

ángulo de inclinación el máximo valor de las tensiones se produce cerca del fondo y en las que tienen un elevado ángulo de inclinación el máximo se presenta en la parte superior.

## 1.2. Objetivos

El objetivo principal de esta tesis es generar un modelo físico que represente el comportamiento de materiales ensilados. Para ello se hará uso de la mecánica de los medios continuos, con un modelo constitutivo elasto-plástico para materiales puramente friccionales. Para ello se trabaja sobre un programa de computadora para determinar y verificar el comportamiento del modelo constitutivo que se propone tanto en la etapa de llenado como de vaciado por gravedad del silo. Para este fin se utilizará el método de elementos finitos. Se utilizará una formulación de sólido, que computacionalmente es más costosa que una formulación de flujo, con el objeto de comparar los resultados y tratar de solucionar algunas deficiencias de la formulación de flujo como el cambio de nivel de material dentro del depósito. La formulación de sólido permite una interpretación conceptual más clara desde el punto de vista de la mecánica de sólidos con grandes deformaciones y de la teoría de plasticidad. Dadas las características dinámicas del problema, y las geometrías plana y cilíndrica se utilizan elementos finitos 2-D dentro del programa SIMPACT/DELTA [Flores, 1999]. Este es un programa de elementos finitos con una integración explícita de las ecuaciones diferenciales en el tiempo. El modelo originalmente implementado corresponde a un problema con grandes desplazamientos y deformaciones pequeñas a moderadas y las leyes constitutivas elástica, visco-plástica o elasto-plástica. El comportamiento elástico corresponde a un sólido isótropo lineal elástico. El modelo constitutivo se mejora en lo referente al modelo elástico, introduciendo un modelo en el cual los módulos son función de la presión o tensión media y en lo referente al comportamiento plástico introduciendo una superficie de fluencia y regla de flujo que modele de modo adecuado el comportamiento del material ensilado. El programa original presenta la ventaja de permitir la interacción directa entre el material ensilado y las paredes del mismo, combinando elementos de sólido y elementos de lámina. La interacción se establece por medio de un modelo de contacto con rozamiento local lineal de tipo Coulomb, indispensable para obtener resultados razonables en la

interacción del material con la pared.

El propósito final es poder determinar, para diferentes geometrías de silos, las presiones ejercidas por el material granular almacenado sobre las paredes, al final del llenado y durante el vaciado, de modo que los ingenieros dedicados al diseño de silos posean mejores datos en lo referente a las sollicitaciones que el material ejerce sobre la estructura. Puntualmente se busca obtener resultados que permitan:

- Comparar los resultados obtenidos con fórmulas empíricas, mediciones experimentales, otras soluciones numéricas y normativa vigente.
- Determinar en el material almacenado: la distribución de tensiones, la relación de tensiones en la proximidad de la pared, los desplazamientos, velocidades y aceleraciones durante el vaciado.
- Estudiar la influencia del método de llenado (distribuido o concéntrico) en silos geoméricamente simétricos y asimétricos y la influencia de la flexibilidad de las paredes.
- Cómo afecta el ángulo de inclinación de la tolva el tipo de flujo durante la descarga, las tensiones máximas en la tolva y el depósito al final del llenado y las máximas de vaciado.

### 1.3. Contenidos y organización de la tesis

El trabajo se ha organizado en 10 capítulos, desarrollando en cada uno los diferentes aspectos estudiados. A continuación se hace una muy breve descripción del contenido de cada uno de ellos.

Capítulo 1: se presenta el problema a abordar y los objetivos que se plantearon para este trabajo de tesis.

Capítulo 2: se presenta una síntesis de los antecedentes experimentales y numéricos relacionados con las cargas que el material almacenado ejerce sobre las paredes de un silo. Se mencionan también normativas vigentes para la estimación de las cargas de diseño.

Capítulo 3: contiene los antecedentes de la mecánica de suelos concernientes a las relaciones constitutivas que describen el comportamiento mecánico de este tipo de material con un enfoque acorde a la mecánica del continuo y se establece el modelo a implementar.

Capítulo 4: se presenta la formulación físico matemática del problema que comprende las ecuaciones de gobierno y las condiciones de contorno, el proceso de solución numérico, el elemento finito implementado (formulado en un sistema corrotacional con una formulación Lagrangeana actualizada) para estados bidimensionales.

Capítulo 5: se establece el modelo numérico discreto para la relación constitutiva, seleccionada en el capítulo 3, sobre el cual se realizó la implementación.

Capítulo 6: contiene la descripción del modelo numérico utilizado para probar la bondad de la relación constitutiva implementada, al modelar ensayos triaxiales de mecánica de suelos.

Capítulo 7: se describen las posibles maneras de simular el proceso de llenado. Se analiza la influencia de las diferentes posibilidades en los resultados. Se incluyen ejemplos de aplicación a tolvas cónicas y la comparación de los resultados con fórmulas teóricas. Se estudia el llenado de silos

a escala y de tamaño real. Se consideran diferentes formas de llenado en distintas geometrías de los silos. Se analizan las tensiones en el material y las distribuciones de presión obtenidas comparando los resultados con: resultados experimentales, fórmulas teóricas, otras formulaciones numéricas y normas.

**Capítulo 8:** describe el modelo empleado para simular el proceso de vaciado. Se incluyen ejemplos de aplicación a tolvas cónicas a escala. Se obtienen las distribuciones de las tensiones en el material y las presiones ejercidas sobre la pared durante el vaciado.

**Capítulo 9:** comprende la simulación del proceso de vaciado por gravedad de silos de diferentes geometrías utilizando distintos procesos de llenado. Se analizan los resultados obtenidos a lo largo de la simulación del vaciado. Se presentan resultados obtenidos suponiendo la estructura como infinitamente rígida o incluyendo su flexibilidad.

**Capítulo 10:** contiene la síntesis del trabajo, las conclusiones y las líneas para futuros desarrollos.

**Anexo 1:** se presenta un análisis de los factores que introducen errores en las mediciones en silos y de qué factores dependen la magnitud de los mismos.

**Anexo 2:** se presenta en detalle el procedimiento seguido para obtener los parámetros que definen el comportamiento constitutivo del material a partir de los resultados de ensayos de laboratorio.

**Anexo 3:** contiene las fórmulas teóricas utilizadas por algunos reglamentos para determinar las presiones sobre las paredes de tolvas cónicas y de silos.

# Capítulo 2

## Antecedentes en silos

### 2.1. Introducción

En este capítulo se presentan los antecedentes teóricos, experimentales, numéricos y algunas normativas que abordan los aspectos relacionados con la estimación de las cargas que el material ejerce sobre la estructura que lo contiene. Las solicitaciones ejercidas por el material granular dependen de diversos factores entre los que se destacan la geometría de la estructura y el material del cual está hecha, de las características del material granular y de la manera en que se realizan los procesos de llenado y vaciado del silo.

Los trabajos realizados por diversos grupos de todo el mundo abordan los estudios experimentales de muy diversas maneras, en base a estudiar algún conjunto de características particulares. Tanto el tipo de equipamiento como la metodología es particular de cada grupo, y resulta dificultoso establecer comparaciones entre ellos.

Considerando el gran número de factores que deben tenerse en cuenta en el diseño y los altamente variados comportamientos de los materiales que se almacenan a granel y la interacción de todo ello, hace que haya tanta diversidad de enfoques al problema.

En los casos donde el material es orgánico, por ser material perecedero, los requerimientos principales de diseño incluyen que la descarga del silo sea tal que el material que primero entra sea el primero en salir y que no quede material estancado dentro del silo. En algunos casos también se requiere que no se produzca segregación. En otros casos se busca que durante la descarga se produzca un remezclado del material y en otros casos no. A estos requerimientos suele agregarse la dificultad que el mismo silo se utiliza para guardar más de un tipo de material en distintas épocas del año y en otros casos simultáneamente.

Los materiales granulares presentan un gran número de características a considerar entre las cuales se pueden citar el tamaño de los granos, las variadas formas de las partículas, la dependencia de las propiedades mecánicas con el contenido de humedad y con la temperatura y la manipulación que han sufrido. El ángulo de fricción entre el material granular y la pared depende de la condición de la superficie la cual puede tener algún recubrimiento. Dicho recubrimiento puede ser algún material de protección o impermeabilización o sustancias contenidas en los granos las cuales se depositan durante la operación del silo como una película sobre las paredes modificando el valor del ángulo de fricción en las sucesivas veces que el material fricciona con la pared.

Cuando se trata del almacenamiento de materiales inorgánicos, según sea el material, se requerirán consideraciones similares al caso de los materiales orgánicos u otras. Cuando se almacenan bolitas de mineral producidas por un tratamiento inicial de concentración, debido al elevado poder abrasivo de éstas, se busca que los silos sean diseñados para que el flujo se produzca en una chimenea dentro del material minimizando la abrasión sobre las paredes. En otros casos debido a que el silo forma parte de una instalación industrial se requiere que tenga una descarga previsible y lo más uniforme posible para el mejor control del proceso. Los materiales inorgánicos pueden tener una amplia distribución de tamaños de grano o ser de tamaño casi uniforme.

Hay casos en los cuales el material se estanca y es muy dificultoso promover su salida natural por gravedad. Algunas plantas de almacenamiento disponen de maquinaria para remover el material del silo pero esto eleva mucho los costos de operación debido a la energía requerida para su funcionamiento.

Distintos grupos de investigación han utilizado diferentes técnicas experimentales para medir las presiones ejercidas por el material sobre las paredes de los silos. En cada caso es diferente la relación entre las mediciones y el funcionamiento de los dispositivos utilizados. Las dificultades para realizar tales mediciones tanto en silos de laboratorio como silos de gran tamaño se reflejan en el reducido número de éstas publicaciones. No es posible realizar un experimento donde las mediciones se reduzcan a una dimensión, en la mayoría de los casos los experimentos se realizan en dos dimensiones. Las dificultades en parte se deben a que es difícil no producir una alteración significativa en el sistema que se está midiendo. Esto sucede con las celdas de presión o las sondas ya que no es posible fijar dispositivos de medición al material granular, especialmente durante la descarga, y el dispositivo interfiere con el flujo en mayor o menor medida lo cual introduce incertidumbres en la medición.

Las mediciones obtenidas utilizando dispositivos que miden las deformaciones de la estructura dependen fuertemente de como está construido el depósito y del procedimiento por el cual se calibran los dispositivos. En algunos casos la estructura está compuesta por paneles pequeños que trabajan independientemente unos de otros y en otros casos está compuesta por un único panel. En este último caso las deformaciones en un punto de la estructura dependen no solo de las cargas actuantes en el punto donde se encuentra el dispositivo sino también de las cargas actuantes en el resto de la estructura y del sistema de vinculación de la misma.

Varios trabajos experimentales informan que el tipo de flujo y la variación de las presiones sobre las paredes durante la descarga son dependientes de la esbeltez del depósito.

Los estudios experimentales han detectado que los resultados son diferentes si el silo se llena, se vacía parcialmente y luego se continúa el vaciado. Esto indica que el material granular tiene un comportamiento dependiente de la historia de tensión - deformación. La interacción entre el material granular y la pared de la estructura varía con los sucesivos llenados y vaciados. La temperatura es otro factor que afecta el comportamiento de algunos materiales, fundamentalmente los de tipo orgánico.

Distintos investigadores han detectado que la distribución de tensiones en el material granular depende del tipo de material de que se trate, lo cual cambia la distribución de presiones sobre las paredes. Entre las propiedades relevantes las más frecuentemente mencionadas se encuentran:

la densidad del material, la forma de los granos, la distribución granulométrica y el contenido de humedad. El método utilizado para llenar el silo afecta la distribución de tensiones y la compacidad del material almacenado y esto influye en la forma en que se produce el flujo durante el vaciado por acción de la gravedad. Un llenado distribuido produce capas prácticamente horizontales y mayor densidad del material que en el caso de haberse realizado el llenado de manera concéntrica. Un llenado concéntrico produce capas cuya inclinación se corresponde aproximadamente con el ángulo de reposo del material. La geometría y la rugosidad de la superficie de la estructura producen una muy marcada influencia tanto en la distribución de tensiones como de fuerzas actuantes sobre las paredes. En silos muy esbeltos, la altura es varias veces el diámetro del mismo (o el lado de la sección), se produce un fenómeno de vibraciones inducidas por el comportamiento inestable del material granular durante el proceso de vaciado conocido como “temblor”, que produce fluctuaciones en las presiones en toda la altura del silo. A medida que la esbeltez disminuye, se ha observado que el fenómeno de “temblor” desaparece y disminuye la amplitud de los picos de presión (carga pulsante) que se producen por el colapso de los arcos formados en el material granular. Los silos poco esbeltos no son afectados por el comportamiento inestable del material durante la descarga.

## 2.2. Antecedentes experimentales

### 2.2.1. Dispositivos de medición de presiones

#### Celdas de presión

Una de las técnicas que se utilizan consiste en instalar celdas de presión en las paredes de los silos, lo cual requiere de una cuidadosa planificación. Las celdas de presión forman parte de las paredes del silo y para que el registro que se obtenga sea correcto las características de la celda deben ser idénticas a las de la pared de la cual forma parte. En general la decisión de realizar las mediciones es tomada cuando la estructura esta parcialmente construida o ya está en servicio. En estos casos es más simple utilizar strain gauges, debido a que no es necesario perforar las paredes para instalarlos.

Entre las investigaciones referentes a los factores que afectan la exactitud de los registros con celdas de presión destacan los trabajos publicados por [Peattie and Sparrow, 1954], [Hvorslev, 1976] y [Blight, 1983]. Las celdas de presión convencionales afectan la distribución de la presión en la cercanía de la celda por sobresalir de la superficie de la pared. Cuando el material ejerce presión sobre la celda esta se deforma y esto produce un cambio en la distribución de la presión en los alrededores de la celda y que se registre un valor diferente de presión al que el material ejercería sobre la pared si no estuviera la celda.

[Blight and Bentel, 1988] describen los principales requerimientos para la exitosa instalación de las celdas de presión en las paredes de silos cuyas paredes son de hormigón armado y las técnicas que desarrollaron para la instalación de las mismas.

La precisión con la cual la celda registra la presión depende de la relación de registro, que a su vez depende de las características de la celda y del material granular. En el Anexo 1 se incluye un detalle de cómo calcular la relación de registro de una celda de presión en función de un conjunto

de parámetros.

Como una desventaja de éste método de medición de presiones es que la celda altera la superficie de la pared interfiriendo con el flujo y esto introduce incertidumbres en la medición. Otra desventaja es que se requiere de planificación previa lo cual dificulta que sean colocadas en silos existentes y requieren de una muy cuidadosa instalación. Las ventajas de éste método son que el dispositivo mide directamente la presión normal, que la relación de registro es conocida a priori y con ella la incerteza de la medición. Por ser el método más utilizado en los laboratorios habría mayores posibilidades de comparar resultados de mediciones.

### **Estructuras con strain gages**

La instalación de strain gages no requiere de planificación previa y no se daña la estructura al instalarlos. Para seleccionar el dispositivo adecuado se requiere conocer el rango de deformaciones que se pueden producir en la zona de la estructura donde serán instalados, las propiedades mecánicas del material sobre el que se instalará el dispositivo, las condiciones ambientales (temperatura y humedad entre otros), el tipo de carga (estática, dinámica o una combinación) y la duración del ensayo.

Una descripción de las características de los diferentes tipos de strain gages, la sensibilidad de los mismos y algunas consideraciones para su selección se adjuntan en el Anexo 1.

En los silos de laboratorio suelen utilizarse paredes muy delgadas en cuyo caso la estampilla y el adhesivo producen un incremento de la rigidez localizada de la estructura. Este aumento de la rigidez localizada requiere de cuidado tanto en la instalación como en el análisis de los resultados, como informan [Zhong et al., 2001]. Estos autores informan las tensiones circunferenciales que actúan a distintos niveles en el silo. Para encontrar cual es la distribución de presión que el material ejerce en cada punto del silo se debe resolver un problema inverso.

Otra opción, tal como lo presentan [Calil and Haaker, 1989], es utilizar un procedimiento de calibración donde la estructura está formada por paneles instalados de forma tal que no haya transmisión de tensiones ni de deformaciones entre uno y otro. El procedimiento que utilizan para calibrar los gages, para obtener valores de presión, consiste en colocar una bolsa plástica dentro del modelo y llenar con agua a diferentes alturas.

Las desventajas si no se utiliza un procedimiento de calibración, es que para obtener valores de presión actuante se tiene que resolver un problema inverso pues se conocen la rigidez de la estructura y las deformaciones y se buscan la magnitud y distribución de cargas que dan lugar a las deformaciones medidas. Cuando se utiliza un procedimiento de calibración, las mediciones pueden estar afectadas por la manera en que se hizo la calibración y la magnitud del error introducido puede no ser tenida en cuenta o no ser posible cuantificarla. Las ventajas de utilizar strain gages son su simplicidad para instalar, aún en estructuras existentes, y la posibilidad de medir cargas impulsivas y oscilantes.

Las celdas son calibradas previamente a su instalación en la estructura y nuevamente calibradas una vez instaladas.

### Sonda

Este método es el menos utilizado para medir presiones. La celda para medir presiones está compuesta por dos partes de duraluminio fuertemente adheridas entre sí. En una de las láminas previamente es adherido adecuadamente un strain gage, que permite medir tres deformaciones en el plano y está compensado para evitar la influencia desventajosa de la temperatura.

La ventaja de éste método es que permite definir la presión junto a las paredes de los silos sin tener que realizar una perforación en la pared para instalar una celda de presión evitando así dañar la pared. Requiere de un sistema computarizado para adquisición y almacenamiento de datos en forma dinámica y de un programa de computadora especial para registrar y analizar las señales.

La principal desventaja de este dispositivo es que la sonda debe estar en posición vertical para obtener una buena medición de la presión horizontal. Para lograr este objetivo la sonda debe fijarse para evitar que la celda se mueva hacia la pared del silo durante el llenado y hacia el centro durante el vaciado. [Hamadeh and Kaminski, 1996] fijan la sonda con una varilla delgada desde la parte superior del silo con lo cual evitan el movimiento e interfieren mínimamente con el flujo. Obtienen por interpolación líneas isobáricas durante el llenado y el vaciado. Los citados autores encontraron que durante el llenado las mayores presiones son detectadas cerca de las paredes en la mitad inferior del silo. Durante el vaciado la máxima presión debida al flujo del material, en el silo que utilizaron, aparece en la mitad del ancho del silo y cerca de la salida y en la zona de la transición efectiva (donde el canal de flujo cambia su dirección). Con este método también observaron altas presiones en el zona cercana al borde del canal de flujo, evidenciado al analizar la distribución de presiones en un plano horizontal durante la descarga.

### 2.2.2. Resultados de las mediciones

Se presentan a continuación resultados extraídos de trabajos publicados por diferentes grupos experimentales. Estos trabajos comprenden mediciones realizadas tanto en silos cilíndricos como en silos de deformación plana, utilizando diferentes dispositivos de medición y materiales granulares.

#### ■ Silo de deformación plana 1

Las mediciones de presión normal a la pared, realizadas en silos con flujo másico plano bidimensional, y utilizando dos conjuntos de celdas de presión de diferente diámetro es presentado por [Kmita, 1991]. Los silos fueron construidos de chapa de acero, uno de ellos simétrico y otro asimétrico. El material granular utilizado para realizar las mediciones de presión fue arena lavada de granulometría media y uniforme. El silo simétrico tiene una tolva con una apertura para el vaciado de 0.10m y cuya pared forma un ángulo de  $75^\circ$  respecto de la horizontal hasta intersectar las paredes verticales del depósito separadas 0.80m. Todo el conjunto tiene una profundidad de 2.20m. El silo asimétrico consta de una pared vertical en toda la altura y otra que forma una tolva con una inclinación de  $60^\circ$  respecto de la horizontal, la separación de descarga también es de 0.10m y el ancho y profundidad del depósito son los mismos que para el silo simétrico.

En ambos silos se tienen las mediciones de final de llenado, de variación de la presión al de inicio de vaciado y de las presiones dinámicas. El autor incluyó la comparación de los resultados

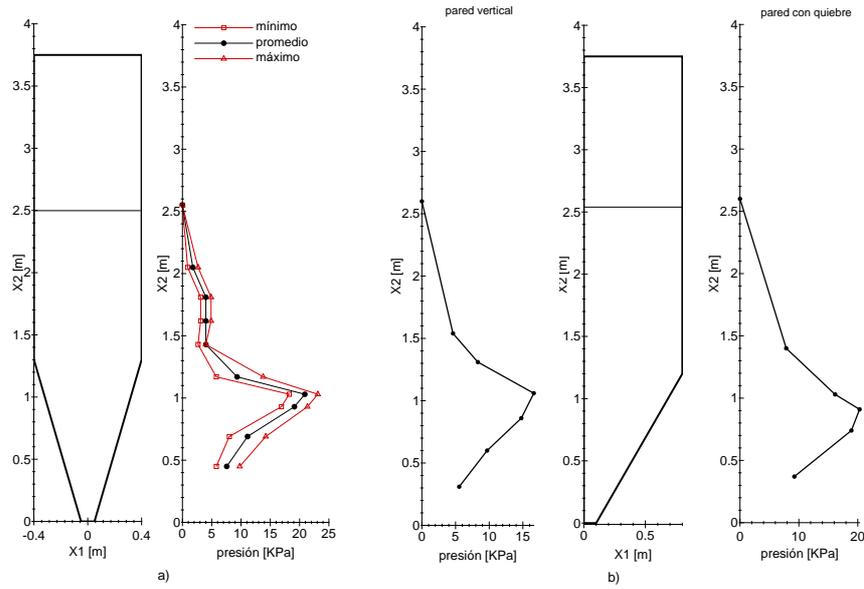


Figura 2.2.1: Curvas interpolantes a las mediciones al final del llenado. a) Silo plano simétrico; b) Silo plano asimétrico

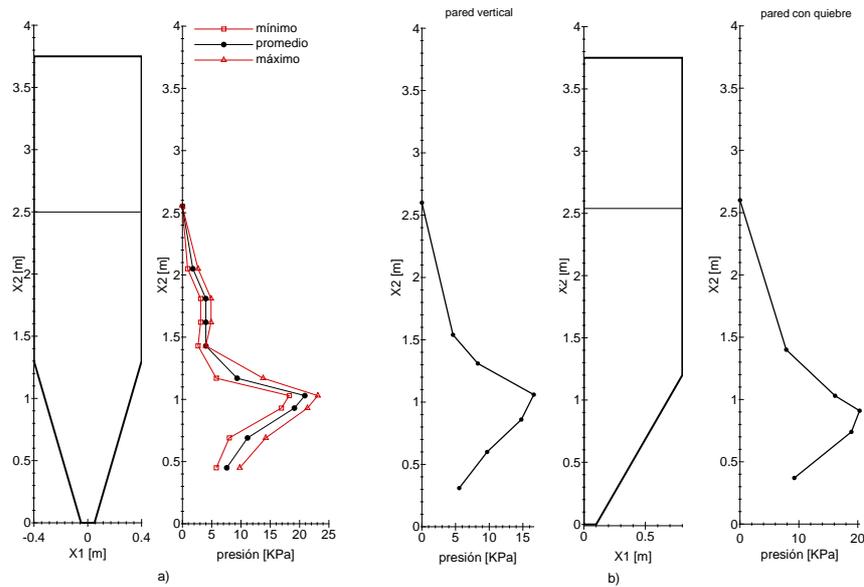


Figura 2.2.2: Curvas interpolantes a las mediciones durante el inicio del vaciado. a) Silo plano simétrico; b) Silo plano asimétrico

experimentales con tres fórmulas teóricas de distribución de presión. Las curvas son presentadas para diferentes niveles de llenado del depósito y para vaciado completo e interrumpido. El autor no especifica si el llenado fue realizado en forma distribuida o concéntrica, los gráficos indicarían que habría utilizado un método de llenado distribuido.

Se presenta un esquema de cada silo junto con las curvas de distribución de presiones correspondiente al final del llenado en la Figura [2.2.1], al inicio del vaciado en la Figura [2.2.2] y de las presiones dinámicas durante el vaciado en la Figura [2.2.3]. Todas las figuras fueron extraídas de

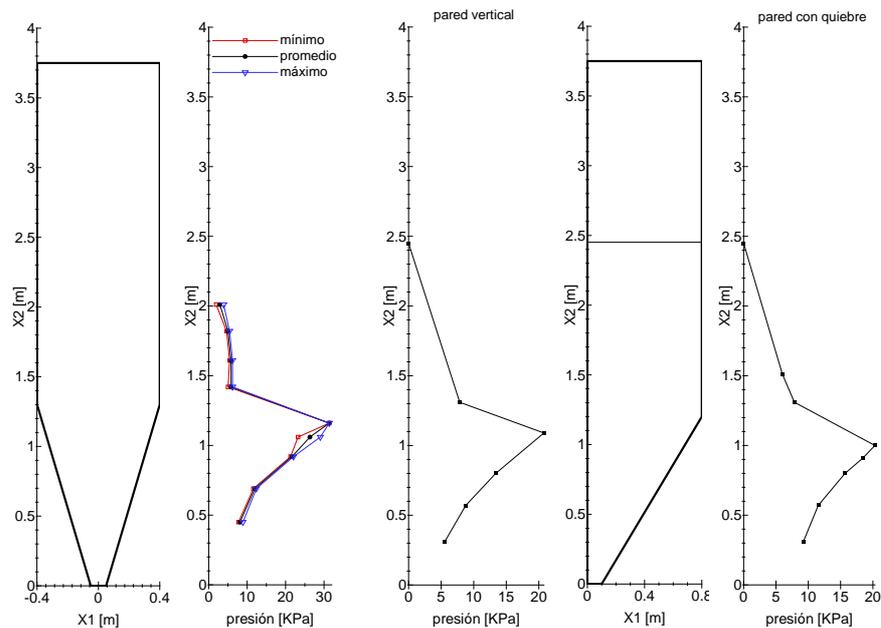


Figura 2.2.3: Curvas interpolantes a las mediciones de presiones dinámicas durante el vaciado. a) Silo plano simétrico; b) Silo plano asimétrico

la citada publicación.

### ■ Silo de deformación plana 2

Un conjunto de mediciones de la presión normal a la pared en silos de flujo canalizado bidimensional de laboratorio, con diferentes relaciones de esbeltez y distintos ángulos de inclinación de las paredes de la tolva es presentado en [Kaminski and Hamadeh, 1994]. Los silos son simétricos, con igual altura del conjunto ( $H = 1,15m$ ) y diferentes alturas de tolva  $h$  según el ángulo de inclinación de la tolva respecto de la horizontal. Los ángulos  $\alpha$  de las tolvas son de  $10^\circ$ ,  $19^\circ$  y  $24^\circ$ . Los silos fueron construidos de plexiglás, con una separación entre las placas de la tolva de  $0,02m$  para la descarga. Las paredes del depósito tienen entre sí separaciones  $W$  de  $0,31m$ ,  $0,41m$ ,  $0,51m$  o  $0,61m$ . Manteniendo el mismo ángulo  $\alpha$  de la tolva obtienen las mediciones de presión para las cuatro separaciones de las paredes del depósito, que dan lugar a diferentes relaciones de esbeltez ( $H/W > 1,5$ ). En todos los casos la profundidad del depósito es de  $b = 0,30m$  que fue elegida por los autores de modo que la fricción con las paredes frontal y posterior no alteren el régimen de flujo ni la forma del canal ( $b/W > 0,4$ ). Utilizaron como material granular arena fina seca de tamaño de grano uniforme que presenta un ángulo de fricción interna de  $37^\circ$  y un ángulo de fricción con la pared de  $26^\circ$ . Las mediciones las realizaron mediante celdas de presión instaladas en las paredes. Los gráficos contienen las máximas presiones normales a la pared medidas durante el llenado y la descarga y son comparadas con los valores estáticos de la fórmula de Jansen y la Norma de Estados Unidos. Para la etapa de descarga informan la posición de la transición efectiva (altura a la cual el canal de flujo cambia su dirección o intersecta a la pared del silo). En todos los silos utilizan la misma altura de llenado concéntrico.

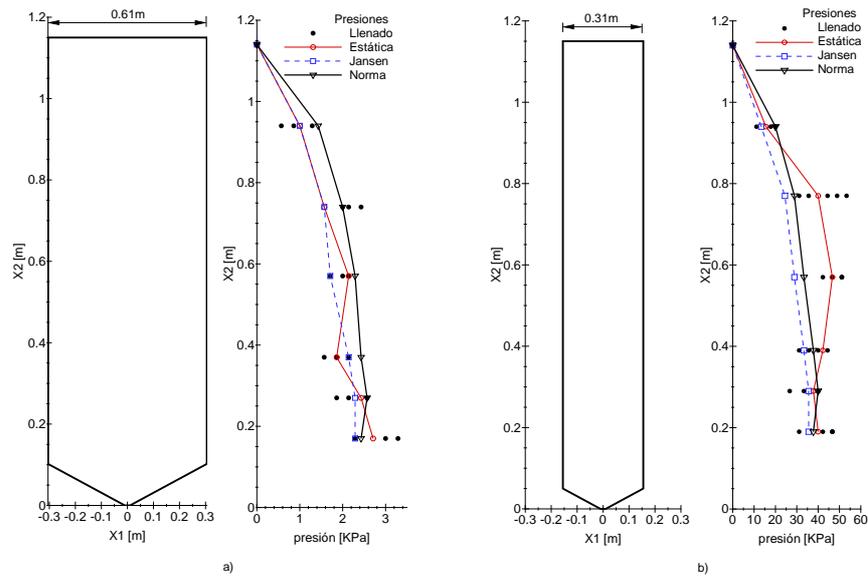


Figura 2.2.4: Máximas presiones medidas al final del llenado de silos planos con  $\alpha = 19^\circ$ . Para las separaciones de las paredes: a) mayor b) menor

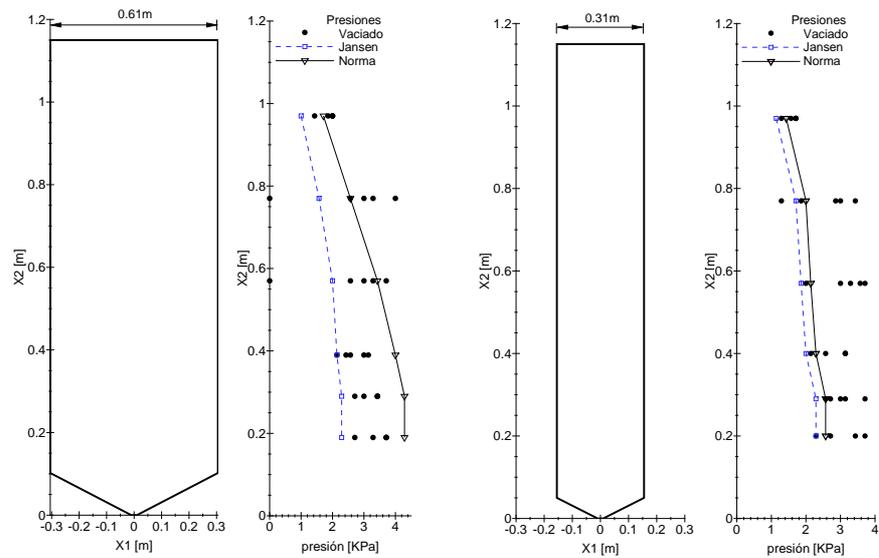


Figura 2.2.5: Máximas presiones medidas durante el flujo de material, de silos planos con  $\alpha = 19^\circ$ . Para las separaciones de las paredes: a) mayor b) menor

Se presentan las máximas presiones medidas en el depósito, en varios ensayos de llenado, para la mayor y la menor separación de las paredes que utilizaron los autores, ambas para ángulo de inclinación de la tolva  $\alpha = 19^\circ$  en la Figura [2.2.4]. En la Figura [2.2.5] se presentan las máximas presiones medidas durante el vaciado para los mismos silos que en la figura anterior. En ambas figuras se incluyen además las curvas que corresponden al borrador de la norma estadounidense [American code 6th Draft 3-16-88] y a la formula teórica de Jansen, extraídas de [Kaminski and Hamadeh, 1994].

### ■ Silo axilsimétrico

Un silo experimental cilíndrico de  $4,25m$  de alto y  $1,05m$  de diámetro con un fondo plano independiente es utilizado por [Zhong et al., 2001]. El cilindro cuelga de seis celdas de carga que permiten medir independientemente la fricción total que actúa en la pared. El fondo es independiente de las paredes con el fin de que no se induzcan tensiones en las paredes y tiene un orificio en el centro. El silo está construido con chapa de aluminio, instrumentado en la superficie externa con strain gages en ocho niveles que permiten medir las tensiones que resultan de la acción del material granular. Los gráficos de tensión circunferencial corresponden a niveles de  $1,0m$ ,  $1,5m$ ,  $2,0m$  y  $2,5m$  desde el fondo del silo. El llenado del silo se lleva a cabo con dos disposiciones de llenado: concéntrico y distribuido. Los materiales granulares que utilizaron los autores fueron: bolitas de plástico con una densidad suelta de  $592Kg/m^3$  y máxima de  $690Kg/m^3$ , ángulo de fricción interna  $\phi = 40^\circ$  y el ángulo de fricción con la pared está comprendido entre  $15^\circ$  y  $19^\circ$ . El otro material que utilizaron fue cebada con una densidad suelta de  $691Kg/m^3$  y máxima de  $780Kg/m^3$ , ángulo de fricción interna de  $\phi = 29^\circ$  y ángulo de fricción con la pared comprendido entre  $13^\circ$  y  $15^\circ$ .

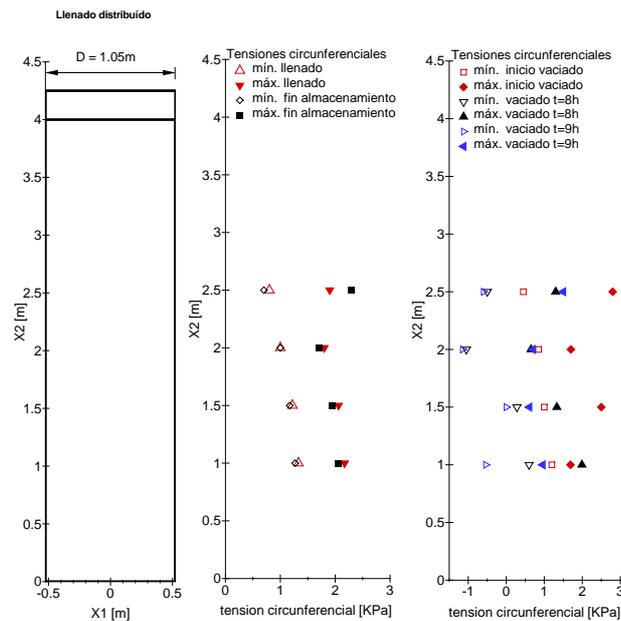


Figura 2.2.6: Tensiones circunferenciales máximas y mínimas, medidas en distintos puntos con igual cota, durante el llenado distribuido con bolitas de plástico

En el gráfico de la Figura [2.2.6] se muestran un esquema del silo y las tensiones circunferenciales máximas y mínimas medidas en distintos puntos del perímetro del silo en cuatro niveles de la pared en diferentes momentos del ensayo de llenado distribuido.

Los valores máximos y mínimos corresponden a distintos puntos de la circunferencia que se encuentran al mismo nivel de referencia respecto del fondo para diferentes tiempos del ensayo. Estos resultados indican que se desarrolla una distribución de tensiones no simétricas, mientras las demás condiciones presentan simetría de revolución.

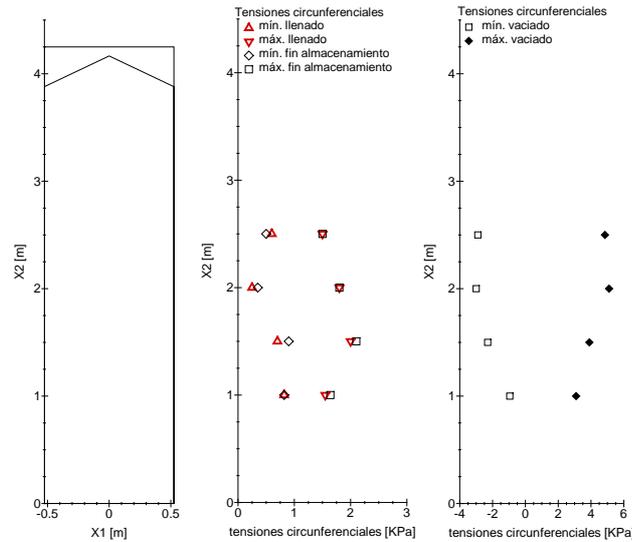


Figura 2.2.7: Tensiones circunferenciales máximas y mínimas, medidas en distintos puntos con igual cota, durante el llenado concéntrico con bolitas de plástico

En el gráfico de la Figura [2.2.7] se muestran un esquema del silo y las tensiones circunferenciales máximas y mínimas medidas en cuatro niveles de la pared en diferentes momentos del ensayo de llenado concéntrico. Los valores máximos y mínimos, al igual que en el gráfico anterior, corresponden a distintos puntos de la circunferencia que se encuentra al mismo nivel de referencia respecto del fondo. El ángulo de la superficie libre se encuentra entre  $28^\circ$  y  $29^\circ$  y concuerda con el ángulo de reposo de las bolitas de plástico que es uno de los materiales utilizado por los autores.

Durante la etapa de vaciado, las tensiones tanto máximas como mínimas oscilan fuertemente a lo largo del lapso que dura el vaciado. Este comportamiento no se presentó cuando el llenado fue distribuido, poniendo en evidencia la influencia del método de llenado en las tensiones que se desarrollan. Las distribuciones de tensiones son no simétricas aún cuando las demás condiciones presentan simetría de revolución.

### 2.3. Antecedentes numéricos

Los grupos que trabajan en la simulación numérica del llenado y vaciado de silos difieren en el método numérico y en la formulación que utilizan. Otro aspecto en el que se encuentran diferencias es en la ley constitutiva para el material granular que cada grupo adopta.

Un aspecto común a todos los grupos es la necesidad de contar con una ley constitutiva que pueda ser adaptada a diferentes materiales granulares y definida con un número mínimo de parámetros a determinar experimentalmente. Una ley constitutiva general para los materiales granulares no cohesivos aún no es evidente. Esto es afectado fuertemente por la falta de estudios experimentales, enfocados a determinar cuales son las propiedades mecánicas relevantes y los factores que influyen en el manejo de materiales a granel. En general los diferentes grupos adoptan leyes constitutivas desarrolladas en el ámbito de la mecánica de los suelos, donde el fenómeno que estudian presenta

similitudes y diferencias respecto de los que tienen lugar dentro de un silo. Entre las diferencias más relevantes se encuentra el rango de tensiones de interés.

A continuación se presentan antecedentes numéricos y sus características relevantes.

### 2.3.1. Método de Elementos Finitos con formulación Euleriana

La ecuación de equilibrio dinámico es formulada en el marco de referencia Euleriano (que toma como referencia la configuración deformada del sistema) utilizando el principio de velocidades virtuales. El objetivo es determinar el campo de velocidades que cumpla con las condiciones de contorno cinemáticas.

[Häussler and Eibl, 1984] utilizan una ley constitutiva viscoplástica incremental, la tasa de tensiones corrotacionales de Jaumann y una medida objetiva para la tasa de aceleración. Las tensiones de Cauchy son separadas en una parte dependiente y otra parte independiente de las tasas. En base a las leyes constitutivas independientes de las tasas con grandes deformaciones propuesta por Gudehus, adaptan la ley elastoplástica para pequeñas deformaciones propuesta por Lade [Lade, 1977] para arena. Adoptan para el material granular en movimiento un modelo que corresponde al de un fluido Newtoniano viscoso incompresible. Suponen que la densidad permanece constante en el espacio y el tiempo lo cual tiene como consecuencia que la matriz de masa sea constante, mientras la matriz de masa convectiva depende del campo de velocidades a través del gradiente de velocidades y las fuerzas nodales internas dependen del campo de velocidades a través de la ley constitutiva. Suponen que la matriz de rigidez tangente es definida positiva y desprecian el término de masa convectivo, con lo cual obtienen un esquema de integración incondicionalmente estable. Para poder simular el proceso de llenado en forma incremental omiten los términos de masa y de viscosidad en la ecuación de gobierno. [Häussler and Eibl, 1984] presentan gráficos donde comparan las presiones que obtienen en la simulación del llenado con valores de presiones medidos experimentalmente para dos silos con distinta geometría. También presentan gráficos con los campos de velocidades, los campos de tensiones principales en el material granular y las distribuciones de presiones en la pared obtenidos para diferentes tiempos durante la etapa de vaciado.

Esta formulación, presenta dos inconvenientes: uno de ellos es que no se cumple la condición de densidad constante en el espacio y el tiempo, el otro inconveniente es la elección del número de viscosidad que afecta los valores de las velocidades y de las tensiones, y cuyos antecedentes físicos no están explorados. Otra desventaja es que todos los bordes están fijos, lo cual no permite incluir en la simulación la variación de la superficie libre de material durante el llenado y la descarga del silo.

Otros trabajos con una formulación similar son los desarrollados por [Rombach and Eibl, 1989], [Schmidt and Wu, 1989], [Runesson and Nilson, 1986] y [Karlsson et al., 1998]. En estos trabajos se evidencia que los autores buscan simplificar la relación constitutiva o trabajar con geometrías más complicadas como las que resultan de incorporar insertos en el interior del silo y simular el flujo a su alrededor.

La formulación Euleriana o de flujo, la más extensamente utilizada, fue originalmente propuesta para modelar problemas de conformado de metales [Zienkiewicz et al., 1978]. Ha sido utilizada para simular la descarga de silos por [Diez and Godoy, 1991], [Diez and Godoy, 1992], [Tano et al., 1994],

[Elaskar and Godoy, 1998], [Elaskar et al., 2000], considerando que el material se comporta como un fluido viscoplástico. Si bien con ésta formulación se han obtenido algunos resultados importantes durante la descarga, existen una serie de limitaciones insalvables para esta formulación, principalmente en lo que se refiere al modelado del llenado del silo, a la utilización de relaciones constitutivas adecuadas para el material ensilado, la descripción del proceso transitorio y el análisis del flujo canalizado.

### 2.3.2. Método de Elementos Finitos con formulación Lagrangeana

En los trabajos que utilizan una formulación Lagrangeana del problema (que adopta a la configuración indeformada inicial del sistema como configuración de referencia) se encuentran dos casos según modelen el llenado o el llenado y el vaciado de un silo o una tolva.

En los trabajos donde se modela solo el llenado, en general los autores adoptan las ecuaciones de equilibrio estático como en el caso de [Ooi and Rotter, 1991] que estudian el llenado de una tolva cónica y de [Guaita Fernández et al., 1996] donde abordan la simulación del llenado de silos con diferente geometría.

En el caso del llenado de la tolva [Ooi and Rotter, 1991] los autores suponen que el material granular es un sólido homogéneo, isótropo elástico lineal que tiene contacto friccional con las paredes de la tolva durante el llenado. Adoptan un modelo elástico para el material con el fin de comprobar si el mismo alcanza las condiciones de falla durante el proceso de llenado, hipótesis utilizada en la deducción de la mayoría de las fórmulas teóricas de distribución de presiones en silos causadas por el material granular. Realizan un estudio paramétrico de la influencia en la distribución de las presiones sobre la pared variando diferentes factores que intervienen en el modelo numérico. Los factores cuya influencia consideran son: el coeficiente de fricción entre el material granular y la pared, el ángulo de inclinación de la tolva, el módulo elástico y el coeficiente de Poisson adoptado para el grano, la relación de rigidez de la estructura y el material granular.

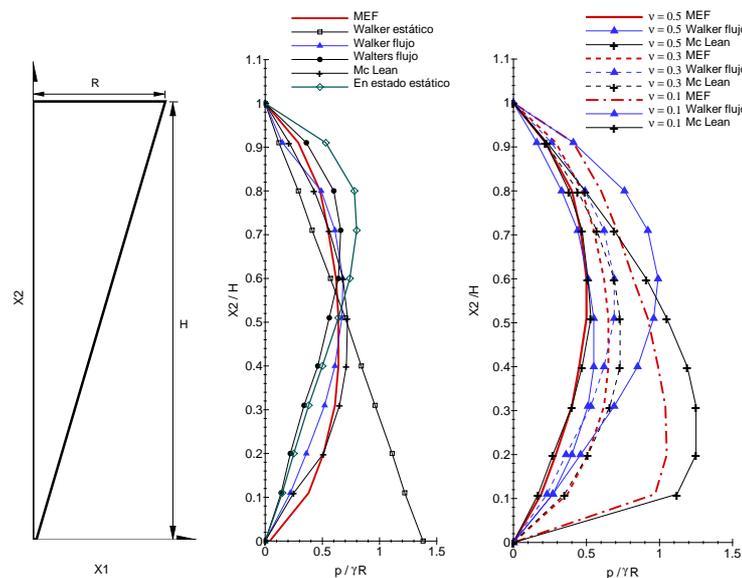


Figura 2.3.1: Distribución de presiones sobre la pared de una tolva cónica calculada

En el estudio encontraron que las presiones son poco sensibles a las propiedades elásticas del grano y que el material mayoritariamente no alcanza el estado de falla según la ley de Mohr Coulomb. El ángulo de inclinación de la tolva y el coeficiente de fricción afectan la magnitud y la forma de la distribución de las presiones. Algunas de las distribuciones que obtienen se muestran en la Figura [2.3.1].

En su trabajo [Guaita Fernández et al., 1996] simulan el llenado de silos cilíndricos y consideran dos hipótesis para el comportamiento del material granular: en un caso lo consideran como elástico y en otro como elastoplástico adoptando como superficie de fluencia el criterio de Drucker Prager. Utilizan un elemento de contacto de dos nodos para considerar la fricción del grano con la pared. Estudian como varían las magnitudes y distribuciones de presión con el tamaño de los elementos utilizados en la discretización en dos geometrías de silo, una es un silo de fondo plano y la otra un silo con tolva cuya pared tiene un ángulo de inclinación respecto de la horizontal de  $45^\circ$ . Analizan la influencia del valor adoptado para el coeficiente de Poisson y el módulo de Young del material granular sobre las presiones en las paredes encontrando que el primero tiene importante influencia no así el segundo. Analizan la variación de la relación de tensiones  $K = (\text{presión horizontal} / \text{presión vertical})$  y encuentran que no es constante como suponen algunas de las fórmulas teóricas adoptadas por diferentes normas. En sus simulaciones encuentran que el valor que adoptan para el coeficiente de fricción afecta tanto los valores de la presión como las zonas de material granular que plastifica. Presentan los resultados de las simulaciones comparados con fórmulas teóricas, que se reproducen en la Figura [2.3.2] para el silo de fondo plano, y la comparación con distintas normas en la Figura [2.3.3] para el silo con tolva.

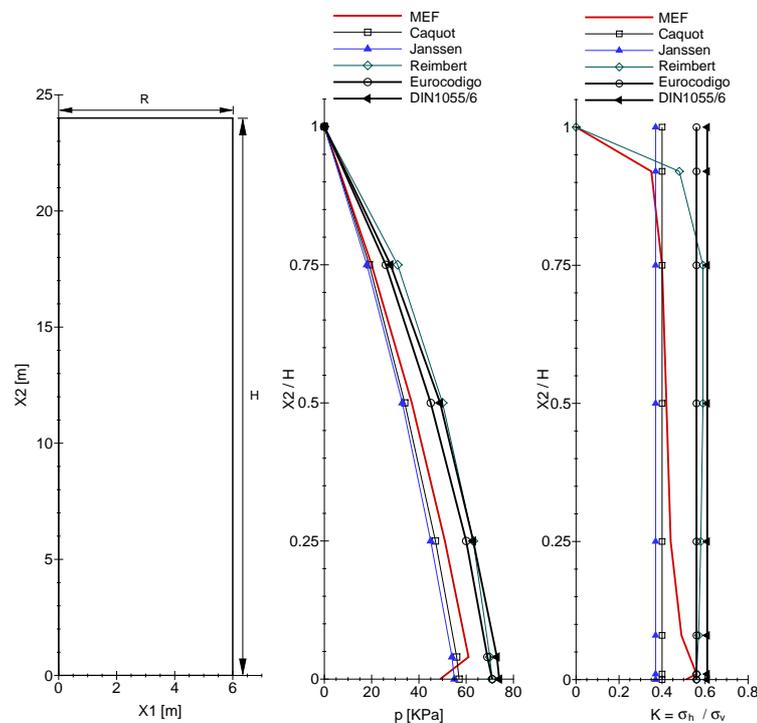


Figura 2.3.2: Presiones calculadas sobre las paredes de un silo cilíndrico de fondo plano comparadas con distintas normas

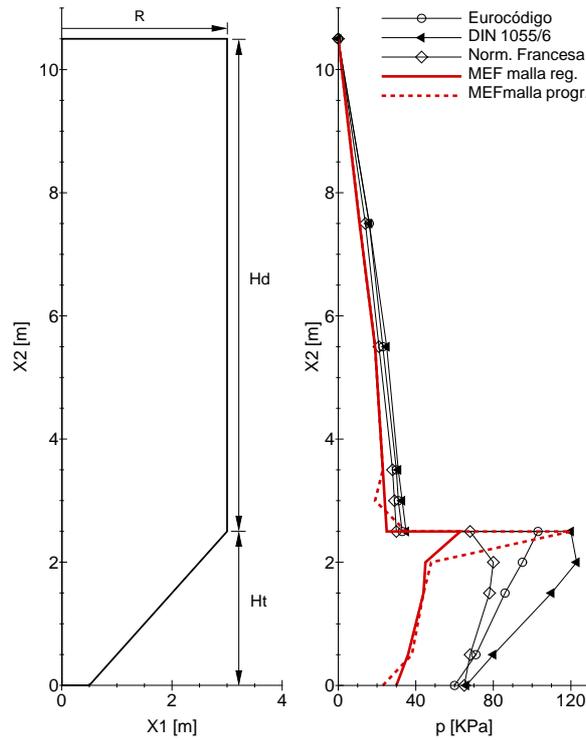


Figura 2.3.3: Presiones calculadas sobre las paredes de un silo cilíndrico con tolva cónica comparadas con distintas normas

En [Martínez et al., 2002] y [Chen et al., 2001] modelan el llenado y vaciado resolviendo la ecuación de equilibrio dinámico.

En [Martínez et al., 2002] modelan un silo axilsimétrico utilizando el programa Abaqus. Para la etapa de vaciado utilizan una solución de Abaqus hasta que los elementos cerca de la abertura de descarga se distorsionan, luego aplican un programa hecho por ellos para remallar y mapear los resultados obtenidos en una nueva malla no distorsionada y continuar el cálculo hasta que nuevamente se distorsione la malla. Para el material granular adoptan una ley elástica lineal y otra elastoplástica que incluye la superficie de Drucker - Prager como superficie de fluencia o falla, endurecimiento isotrópico y regla de flujo no asociada para considerar deformaciones inelásticas incompresibles. A fin de evitar singularidades numéricas adoptan un valor pequeño de cohesión. La interacción entre el grano y la estructura la modelan utilizando superficies de contacto. Las simulaciones consideran que las deformaciones y los desplazamientos son finitos, utilizando para ello una formulación no lineal geométrica. Consideran la acción de la gravedad sobre el material granular que interactúa con las paredes imponiendo la condición de contacto mecánico con fricción (ley de Coulomb). Modelan tanto el material granular como la estructura. Consideran los siguientes casos: análisis estático con un comportamiento elástico o elastoplástico para el grano. Para, para estos casos realizan las simulaciones suponiendo que las paredes son rígidas o flexibles para el llenado. Utilizan un análisis dinámico para el proceso de descarga considerando que el material

granular es elastoplástico y la pared es rígida. Comparan los resultados con distintas normas, y encuentran que los resultados de los desplazamientos representan cualitativamente bien los resultados experimentales de Kvpil. (Kvpil estudió el movimiento de las partículas al que separó en zonas donde se presentan movimientos solo verticales y otra donde el movimiento es vertical y horizontal. Estas zonas tienen formas elípticas cerca de la salida). Calculan la fricción movilizada en el contacto, obteniendo distintas tendencias si la simulación es estática o dinámica. En la Figura [2.3.4] se muestra la comparación de los resultados estático y dinámico con distintas normas, extraído la citada referencia.

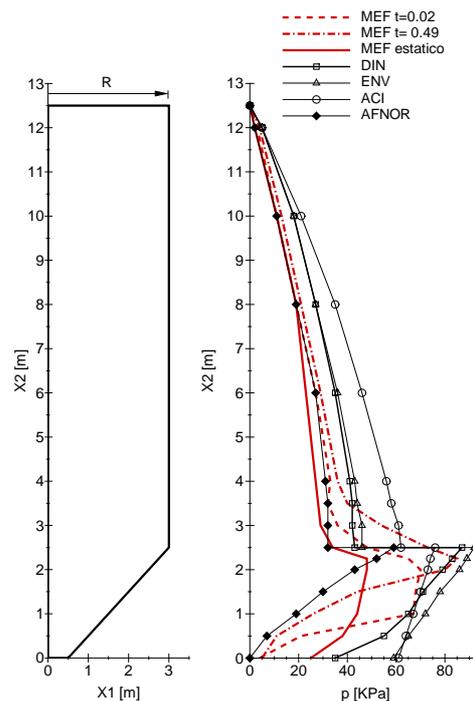


Figura 2.3.4: Distribución de presión horizontal sobre las paredes para análisis estático y dinámico comparadas con distintas normas.

En [Rotter et al., 1998] muestran un estudio de colaboración internacional que fue emprendido para explorar las predicciones de diferentes modelos en un conjunto de problemas simplificados de silos, ya que las comparaciones de los mejores modelos computacionales con experimentos son débiles y suministran poca seguridad de la precisión de cualquier modelo existente. Los resultados clave para tres problemas sobre la capacidad predictiva de los cálculos por elementos discretos y elementos finitos del comportamiento de sólidos granulares en silos son presentados por los autores. Los tres problemas son: llenado de un silo de fondo plano, descarga de un silo de fondo plano y la descarga de un silo con tolva ahusada. Ambos métodos muestran considerables defectos. Diferentes grupos de investigación presentan predicciones ampliamente diferentes aun cuando el problema fue establecido en forma detallada. Hay mucha dispersión en las predicciones como para realizar nuevos estudios comparativos con el fin de identificar las razones por las cuales diferentes modelos basados en suposiciones similares pueden producir tan variadas predicciones.

Los silos son utilizados para almacenar una gran variedad de sólidos en muchas industrias y

los diseños están basados casi exclusivamente en interpretaciones simplificadas de observaciones experimentales. Es ampliamente reconocido que es muy dificultoso obtener información confiable a partir de esos experimentos. De los trabajos informados en la citada referencia dos problemas clave permanecen pendientes: el rol del llenado progresivo y la relación de presiones laterales que puede surgir de un modelo constitutivo bien definido para arena, lo que evidencia que es necesario más trabajo en esta materia. Los resultados de la distribución de presiones sobre la pared de nueve grupos diferentes que abordaron el problema del llenado de un silo de laboratorio con fondo plano, son comparados entre sí y presentados en el gráfico que se reproduce en la Figura [2.3.5]. Los resultados de las distribuciones de presión obtenidos por varios grupos que abordaron el problema del llenado y vaciado de silos de tamaño real, también son comparados por los autores y presentados en gráficos con similar grado de dispersión.

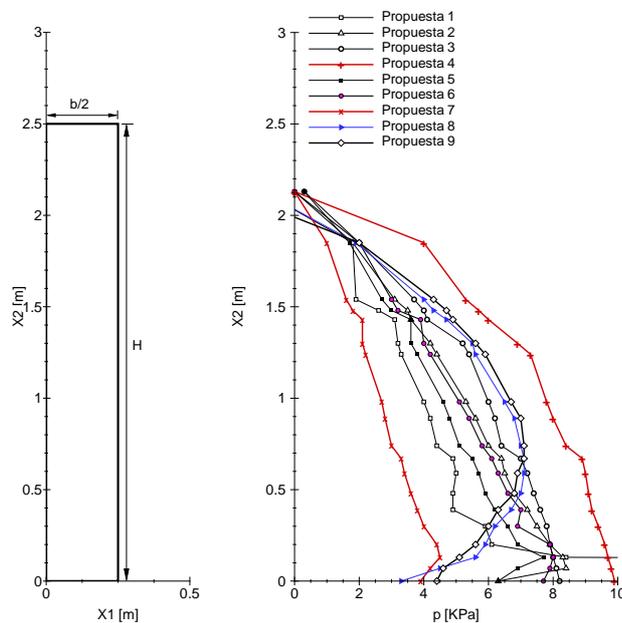


Figura 2.3.5: Comparación de las distribuciones obtenidas con MEF por distintos grupos de investigación.

Este trabajo es una importante recopilación de los resultados que pueden obtenerse al simular un problema cuidadosamente definido, y que pone en evidencia que el tema de estudio dista mucho de estar agotado. Muchos otros problemas que se presentan en los silos aun no han sido abordados con simulaciones.

Otro trabajo presentado a partir del mismo estudio de colaboración [Sanad et al., 2001] donde los autores concluyen que el método de elementos finitos de cualquier silo debe hacerse por capas y no llenando la altura completa del silo para que las tensiones dependientes de las deformaciones puedan desarrollarse. Otra conclusión a la que llegan es que el pico de presión que se desarrolla en el encuentro entre el depósito y la tolva depende fuertemente de los siguientes aspectos: el modelo de interacción, el número de elementos, de la redondez del vértice de la unión del depósito y la tolva y de la relación tensión-deformación elegida. Estos problemas deben ser resueltos en la etapa

de llenado antes de intentar simular el vaciado.

### 2.3.3. Comparación de las formulaciones Lagrangeana y Euleriana

Los materiales granulares están compuestos por partículas sólidas dentro de una fase gaseosa continua, considerando que el material se encuentra seco en términos prácticos. La interacción entre las partículas y la fase continua es muy complicada de formular analíticamente de forma completa. El comportamiento del conjunto es una combinación del comportamiento correspondiente a fluidos y sólidos. Si se lo considera como un fluido en condición estática el material no puede transmitir fuerzas de corte y la presión crece con la profundidad de manera lineal e independiente de la dirección (ya que en general no se considera el aumento de la densidad por acción del propio peso). Pero los materiales granulares pueden formar una superficie cuya pendiente con la horizontal es conocida como ángulo de reposo del material y son capaces de transmitir fuerzas de corte y presiones a la pared del silo las cuales crecen no linealmente con la profundidad. Las presiones tienden a alcanzar un valor máximo rápidamente debido a la fricción con las paredes. Las presiones dependen de la dirección y varían de acuerdo a la historia del manipuleo, esto es, la manera en la que el silo fue llenado, el tiempo que el material estuvo almacenado y como se vacía el silo.

Las características de los materiales granulares no son posibles de asimilar completamente ni a las de un sólido ni a las de un fluido. Si se adopta una formulación Euleriana, característica de los fluidos, la relación constitutiva del material granular se ve reflejada en un solo parámetro dentro del modelo y además se tiene la limitación de que los contornos permanecen fijos durante la simulación (superficie de control).

Las características de un material granular son posibles de asimilar a un sólido elastoplástico con una formulación Lagrangeana, de modo que la relación constitutiva del material pueda ser tratada mejor utilizando los modelos elastoplásticos desarrollados en el ámbito de la mecánica de suelos. Por otra parte en un modelo con formulación Lagrangeana no se tiene la limitación de tener que mantener fijos los contornos. Deben considerarse tanto desplazamientos como deformaciones finitas junto a una relación constitutiva no lineal y condiciones de contacto friccional, lo que da lugar a un sistema altamente no lineal a resolver tanto para la simulación del llenado como el vaciado de un silo o una tolva.

Una complicación extra aparece durante la etapa de vaciado, fundamentalmente cuando el flujo es de tipo canalizado o mixto, causada por la distorsión en la malla, que puede ser tratada con técnicas de remallado local.

En la presente tesis se ha adoptado la formulación Lagrangeana para simular tanto el llenado como el vaciado del silo. Especial atención se ha puesto en la elección de la relación constitutiva para el material granular, cuyos antecedentes son presentados en el capítulo 3.

### 2.3.4. Otras metodologías numéricas

[Schmidt and Wu, 1989] utilizaron el método de elementos de borde para predecir las presiones en silos. En éste método las incógnitas son los desplazamientos que se producen en el contorno o borde relacionados con las fuerzas actuantes. Solo los puntos que pertenecen al contorno tendrán

asociadas incógnitas, no así los puntos en el interior del dominio. Utilizan un modelo constitutivo elastoplástico, con descomposición aditiva del tensor de deformaciones. Las condiciones de contorno contemplan tres casos: superficie libre, adhesión en el contacto y región de contacto friccional.

[Guines et al., 2002] utilizan una aproximación consistente de la mecánica del continuo en un marco de referencia Lagrangeano - Euleriano arbitrario, que tiene en cuenta la condición de equilibrio dinámico incluyendo fuerzas de inercia y grandes deformaciones y desplazamientos. En este caso el marco de referencia se mueve pero no necesariamente con la misma velocidad con la que se mueve el material. La ley constitutiva que implementaron es elastoplástica, y consideran que las paredes son suaves y no se desarrolla fricción con el material granular. Utilizan en la resolución un esquema explícito de integración en el tiempo.

Uno de los más recientes métodos en desarrollo que se está utilizando para simular el llenado y la descarga de silos es el método de elementos discretos. En este método se simula la interacción entre las partículas. El número de ecuaciones a resolver es muy elevado aun cuando se utilice un tamaño de partícula que sea grande comparado con el tamaño real de los granos. Las presiones sobre la pared deben calcularse a partir de las fuerzas de contacto entre las partículas y la pared mediante un procedimiento de promediado sobre la superficie. Este procedimiento guarda relación con el tamaño de las partículas y con el paso de tiempo del proceso de solución y muestra grandes fluctuaciones locales influenciadas por el tamaño de la zona en la que se realiza el proceso de promediado. Este método permite ilustrar, hasta ahora en forma cualitativa, el desarrollo del patrón de flujo diferenciando las zonas donde hay movimiento relativo entre un conjunto de partículas y otro. Dentro del material granular las tensiones también son calculadas a partir de las fuerzas de contacto entre las partículas. Algunos fenómenos detectados con las formulaciones continuas han comenzado a verse con esta metodología. Pueden citarse los trabajos [Rotter et al., 1998], [Yang and Hsiau, 2001], [Rong et al., 1997] y [Sanad et al., 2001] entre los que emplean esta metodología.

### 2.3.5. Normas para determinar las solicitaciones en silos

Los trabajos de investigación que buscan determinar las acciones que el material ejerce sobre las paredes de los silos y el tipo de flujo que se produce para una dada geometría y material son comparados con las normativas vigentes en distintos países. Las normativas en general están basadas en las fórmulas teóricas propuestas por Jansen o Reimbert afectadas por coeficientes de seguridad. Caben citar las siguientes: DIN, AFNOR, ACI, EUROCODE.

## Capítulo 3

# Antecedentes en relaciones constitutivas.

### 3.1. Introducción

Los modelos para materiales granulares no cohesivos se han desarrollado principalmente dentro de la mecánica de suelos. Estos materiales están compuestos al menos por dos fases una de ellas sólida y la otra es un fluido (líquido o gaseoso). En general se considera que las partículas no se deforman ni se rompen. Cuando el material granular se deforma ocurren cambios de volumen significativos causados por el cambio de las posiciones relativas de los granos y a la expulsión del fluido que llena los intersticios.

Dependiendo de la medida en que la estructura de los granos impide la salida del fluido se obtienen diferentes respuestas tensión - deformación. La permeabilidad es la medida que se utiliza para estimar la facilidad con la cual un fluido particular fluye dentro de la estructura formada por los granos. La permeabilidad depende principalmente de la proporción del volumen total ocupado por los sólidos y por los vacíos y está relacionada por una parte con el tamaño medio de partícula y la distribución granulométrica y por otro con las propiedades del fluido.

La historia de la formación de un depósito de material granular en general se refleja en la estructura que forman las partículas. Esta estructura controla la respuesta del material al ser sometido a nuevos estados de carga. Es de esperar que el arreglo de partículas dependa tanto de la tensión actual como de la historia de tensiones por la cual el material llegó a su estado actual. En algunos casos se ha visto que es indispensable incluir alguna variable que describa parcialmente de la estructura de los granos.

Distintos investigadores han incorporado en los modelos aspectos importantes que caracterizan el comportamiento macroscópico de los materiales granulares como: compresibilidad volumétrica, fenómeno de dilatancia, existencia de estados críticos, cambios en la permeabilidad y densidad del material granular por acción de la presión, la dependencia con la tensión media (o presión) de la resistencia al corte entre otras. Los modelos se basan principalmente en los resultados de ensayos triaxiales. Entre la bibliografía donde pueden encontrarse algunos de estos modelos caben citarse [Chen and Han, 1988], [Desai and Siriwardane, 1984], [Wood, 1991], [Schofield and Wroth, 1968] y [Chen and Baladi, 1985] entre otros.

Una recopilación de modelos constitutivos que se han desarrollado para diferentes suelos dentro de la mecánica de suelos es presentada por [Wroth and Houlsby, 1985] junto con algunas de sus aplicaciones. Siguiendo este trabajo se presentan a continuación los modelos desarrollados por diferentes grupos para materiales cohesivos y para materiales friccionales, las características comunes y sus diferencias. También cuales modelos han sido posibles de implementar en un programa de elementos finitos para sólidos deformables y que problemas han encontrado en la implementación de algunos de ellos.

Luego se analizan cuales de las características de los suelos se pueden presentar en los distintos tipos de materiales granulares que se almacenan en los silos. En éste análisis se consideran principalmente las siguientes características del material granular: el tamaño medio de partícula, la distribución granulométrica, permeabilidad y el tipo de fluido que llena los huecos entre las partículas. Se establecen las características relevantes de los materiales a considerar, junto con los modelos constitutivos propuestos dentro de la mecánica de suelos y los parámetros que los definen.

## 3.2. Modelos constitutivos de la mecánica de suelos

### 3.2.1. Reseña histórica

Los modelos tensión - deformación para suelos han producido una revolución en la mecánica de suelos debido a los avances en las teorías el análisis numérico y los experimentos. Como consecuencia muchas propiedades básicas y definiciones que se han utilizado en la mecánica de suelos clásica para caracterizar el comportamiento de los suelos han necesitado ser modificadas o precisadas. El comportamiento del suelo es complicado y depende de la historia geológica representada por el tamaño la forma y la composición de las partículas, la historia de tensiones que ha experimentado y el fluido que llena los poros. Una de las particularidades de estos materiales es que las propiedades deben medirse y no especificarse como es el caso de otros materiales. Las propiedades pueden variar muy ampliamente y se pueden conocer con menor exactitud. Sorprendentemente las arenas, que pertenecen al grupo de materiales friccionales no cohesivos, son las más difíciles de modelar. El propósito principal de modelar el comportamiento constitutivo es poder utilizar esos modelos para resolver problemas de ingeniería.

Hay dos razones por las cuales la simplicidad del modelo es muy importante. Una de ellas es que las propiedades deben poder ser obtenidas a partir de los resultados de un número reducido de ensayos simples. El segundo requisito es que de alguna manera el modelo debe reflejar los procesos físicos subyacentes, en particular, los parámetros deben tener un significado físico identificable. Todos los suelos son básicamente materiales friccionales cuya resistencia es suministrada por la resistencia a fricción entre las partículas que está gobernada por la tensión efectiva a la cual ellas están sometidas.

Los modelos clásicos de la mecánica de suelos se pueden clasificar en dos grupos:

- *Análisis límite*: solo interesa el equilibrio de la masa de material y tratan con el peso del material y la resistencia. Frecuentemente utilizan como parámetros el peso específico  $\gamma$ , la cohesión efectiva  $c'$  y el ángulo de fricción interna efectivo  $\phi'$ .

- *Análisis de deformaciones*: trata con las propiedades de deformación y consolidación. Convencionalmente los parámetros son los utilizados en la teoría de la elasticidad, adoptando el módulo de Young  $E$  y la relación de Poisson  $\nu$  o bien el módulo volumétrico  $K$  y el módulo transversal o de corte  $G$ . Para la mayoría de los suelos es razonable adoptar la relación de Poisson constante, mientras que los módulos  $K$  y  $G$  son funciones de la tensión media efectiva.

Usualmente los dos conjuntos de propiedades  $(\gamma, c', \phi')$  y  $(K, G)$  no están relacionados. El objetivo del desarrollo de una relación constitutiva completa para describir el comportamiento del suelo es abarcar los dos tipos de análisis anteriores dentro de un marco simple, donde el suelo pueda ser modelado cuando se deforma monotónicamente, de alguna manera no lineal, hasta que alcance algún estado límite. De esta manera se produce el enlace de los dos conjuntos de parámetros y se asegura que los valores adoptados sean consistentes.

### 3.2.2. Aproximaciones al estudio del comportamiento de los materiales granulares

Una aproximación sería tener un conjunto de modelos, donde cada uno esté diseñado para cumplir un propósito diferente incluyendo los rasgos relevantes para ello. Distintos modelos podrían utilizarse para modelar el mismo material pero en distintos análisis.

Una primer opción sería elegir un modelo enmarcado en la mecánica de los medios continuos, en el cual las propiedades reales discontinuas de un suelo son suavizadas como un continuo. El material se expresa por medio de las relaciones tensión deformación junto con los principios de equilibrio y compatibilidad en términos de fuerzas de contorno y desplazamientos. El modelo más simple disponible es el perfectamente elástico, suponiendo que el material es isótropo y homogéneo, frecuentemente es la primer elección. Si la anisotropía es importante otros modelos elásticos podrían utilizarse si se tiene suficiente cantidad de datos (modelo anisótropo, modelo no homogéneo). Una segunda posibilidad sería elegir algún modelo elastoplástico, a los cuales también se los puede clasificar en categorías.

Otro enfoque es dado por la mecánica de partículas que trata la interacción entre partículas individuales, proporcionando información importante sobre el comportamiento del material con el cual se puede alimentar un modelo de la mecánica del continuo. La teoría tensión - dilatancia de Rowe surgió a partir del estudio de arreglos regulares de esferas. Ésta teoría luego fue estudiada por Thornton. El modelo estadístico de las distribuciones de contacto ha dado idea de la estructura que forman las partículas. Un modelo numérico de ensambles de partículas puede suministrar el vínculo entre la mecánica de partículas y la mecánica del continuo. Una área donde el comportamiento discontinuo es importante es en la formación de bandas de corte en suelos.

### 3.2.3. El rol de la mecánica del continuo

Las constantes del material que aparecen en el modelo definen el tipo de material y las variables de estado serán las que definan el estado del material cuando es sometido a deformación. Ambos grupos de parámetros aparecerán en las ecuaciones a resolver y están relacionados entre sí. Las tensiones efectivas son el grupo más importante de variables de estado junto con la relación de vacíos.

Algunas constantes de caracterización de los suelos, que se adoptaron al inicio del desarrollo de la mecánica de suelos sufren de defectos en su definición. Uno de éstos parámetros es el ángulo de fricción interna ya que su definición original no tiene en cuenta la influencia de la tensión principal intermedia. Trabajos sobre la variación de la resistencia con la tensión principal intermedia realizados por [Lade and Duncan, 1975] y por [Matsuoka, 1976] pueden interpretarse como la variación del ángulo de fricción interna con el mayor ángulo de Lode (del espacio de tensiones de Haigh - Westergaard [Chen and Han, 1988]). En otros casos adoptar otro parámetro puede resultar ventajoso, tal el caso de la relación de vacíos  $e$  [Wood, 1991], y su variable derivada el volumen específico definido como  $V = 1 + e$ . La relación de sobreconsolidación [Wood, 1991] es otro parámetro que es convencionalmente definido en función de la tensión vertical, pero para incluirla en los modelos elastoplásticos es más conveniente expresarla en función de la tensión media.

En la mecánica de suelos la convención de signos para las tensiones y las deformaciones es opuesta a la de la mecánica del continuo.

Al realizar el análisis de un problema es conveniente utilizar cantidades derivadas de los ensayos triaxiales como la tensión media efectiva o presión efectiva  $p = 1/3(\sigma'_1 + 2\sigma'_3)$  y de la tensión desviadora  $q = \sigma'_1 - \sigma'_3$  definidas por Roscoe [Wood, 1991] y las correspondientes variables de deformación  $\varepsilon_p = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_3$  deformación volumétrica y  $\varepsilon_q = 2/3(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)$  y de corte. Estas variables, relacionadas con los invariantes de los tensores de tensiones y de deformaciones, fueron cuidadosamente elegidas para poder expresar el trabajo incremental como  $dW = pd\varepsilon_p + qd\varepsilon_q$ . En [Wood, 1991] se pueden encontrar las definiciones de las variables de tensión y de deformación y sus aplicaciones, donde se sugiere una notación consistente. La utilización de los invariantes de los tensores de tensiones y de deformaciones proporcionan una simplificación conveniente y concisa de expresar las leyes constitutivas pero tiene el inconveniente que la información sobre las direcciones principales de tensión y de deformación quedan ocultas por lo cual no es posible realizar análisis de la anisotropía.

El principio de las tensiones efectivas es el concepto más importante de la mecánica de suelos, puede interpretarse como un caso especial de la teoría de mezclas, y surge de la naturaleza multifase del suelo. Este principio tiene una base experimental completa y una justificación desde el punto de vista de la mecánica del continuo fue presentada por Bishop y Houlsby.

La consolidación es la causa principal de los efectos que dependen del tiempo cuando el tamaño de las partículas es muy pequeño y se debe a la naturaleza bifásica del suelo (agua+partículas) o (aire+partículas). Está estrechamente vinculada con la resistencia que ofrece la estructura de los granos al flujo del fluido, la medida de la resistencia al flujo está dada por el coeficiente de permeabilidad. El conjunto de ecuaciones que resulta, cuando se consideran pequeñas deformaciones, es similar a la ecuaciones de transferencia de calor. Cuando se consideran grandes deformaciones las ecuaciones se complican.

### 3.2.4. Introducción a los tipos de comportamiento en la mecánica del continuo

El comportamiento del esqueleto del suelo es en gran medida independiente de la velocidad de deformación y se conoce que es altamente no lineal.

Dentro de la mecánica de los medios continuos hay varios grupos diferentes de teorías para representar el comportamiento de un material. Las principales aproximaciones que han sido consideradas

para la descripción del comportamiento no lineal de los suelos son:

- *elasticidad no lineal*: da resultados irreales cuando se realiza un ciclo de descarga recarga, aunque algunos modelos hipoeásticos han tenido algún éxito. Hay tres tipos de teorías elásticas que en orden creciente de restricciones son: hipoeástica, elástica e hiperelástica [Chen and Han, 1988]. Al derivar los parámetros es común obtener correlaciones para la variación de los módulos incrementales con las tensiones. Para arenas tanto el módulo volumétrico como el de corte pueden ser expresados en función de la tensión media efectiva. Debe tenerse especial cuidado con los modelos hipoeásticos porque es fácil generar modelos que creen energía en los ciclos de carga - descarga violando el segundo principio de la termodinámica.
- *teoría elastoplástica*: este modelo representa con mayor fidelidad el comportamiento del suelo en un ciclo de descarga recarga. La descarga se realiza con una trayectoria más rígida que durante la carga primaria y al recargar vuelve al punto desde donde se inició la descarga. La base teórica es sólida y está bien probada en otros materiales. Hay buenas razones para que el suelo se comporte de la manera predicha por este modelo aunque son necesarios modelos más complicados para ajustar algunos aspectos del comportamiento del suelo. La región en el espacio de tensiones dentro de la cual el comportamiento del suelo puede describirse por una ley elástica está limitado por la superficie de fluencia. La superficie de fluencia marca el estado en el que se produce un marcado cambio de la rigidez local, típicamente de un orden de magnitud. La superficie de fluencia es una función de las tensiones y si también es función de las deformaciones plásticas se dice que el material presenta endurecimiento por deformación y la superficie puede cambiar su tamaño (y su forma) cuando se producen deformaciones plásticas. Si solo aparecen términos en función de las tensiones se dice que el modelo es perfectamente plástico y la superficie de fluencia permanece fija en el espacio de tensiones. Cuando el suelo se deforma plásticamente el punto de tensión está restringido a situarse sobre la superficie de fluencia. Si luego el material se descarga ocurren deformaciones elásticas y al recargar sigue un camino elástico hasta que alcanza nuevamente la superficie de fluencia. El incremento de deformaciones totales se descompone aditivamente en el incremento de deformación elástica y de deformación plástica. Para poder calcular las deformaciones plásticas se requiere mas información, usualmente se define que los incrementos de deformación plástica son normales a la superficie potencial plástico (definida en el espacio de tensiones). Cuando la superficie potencial plástico es idéntica a la superficie de fluencia se dice que el modelo es de plasticidad asociada. Cuando el suelo está sometido a muy grandes deformaciones plásticas en general se utiliza un modelo rígido perfectamente plástico, frecuentemente utilizado en los cálculos de falla. Una superficie de falla no tiene un significado único para un material, contrariamente a lo que ocurre con la superficie de fluencia, y no hay una manera única de definir falla. Debe distinguirse además entre falla del material y del sistema.
- *teoría endocrónica*: difiere de la elastoplástica en la etapa de recarga que el suelo muestra menor rigidez que durante la descarga, comportamiento que no coincide con los experimentos.

Tiene la ventaja de presentar transiciones suaves entre tipos de comportamiento. Las bases teóricas no están completamente establecidas.

La causa principal del comportamiento dependiente del tiempo es la consolidación, que depende de la interacción entre el flujo viscoso del fluido en los poros y el esqueleto del suelo para cumplir con las leyes de equilibrio y conservación de masa de fluido y de partículas. Otras propiedades dependientes del tiempo, especialmente en arcillas, son el creep (consolidación secundaria) y el incremento de la resistencia al corte con la tasa de deformación.

### 3.2.5. Modelos para suelos cohesivos y para no cohesivos

#### Modelos para suelos cohesivos (arcillas)

Entre los rasgos más significativos del comportamiento de las arcillas se encuentra la consolidación [Lambe and Whitman, 1991]. El comportamiento clásico es el de consolidación unidimensional de las arcillas donde los resultados son presentados en gráficos de la relación de vacíos en función de la presión vertical efectiva. De estos se obtienen el índice de hinchamiento y el índice de compresión. Para poder estimar la presión horizontal se utiliza el coeficiente de presión lateral (cociente entre la presión horizontal y la vertical). Existen algunas formulas teóricas para estimar el valor del coeficiente de presión lateral en función del ángulo de resistencia al corte con distinto grado de aproximación. Más recientemente la consolidación se estudia utilizando ensayos triaxiales de compresión isotrópica cuyos resultados se representan en gráficos del volumen específico en función del logaritmo (natural) de la tensión media efectiva, rasgo esencial de la teoría de estado crítico de los suelos. Los dos grupos de parámetros pueden relacionarse pero no completamente, en especial la relación de sobreconsolidación.

En los *ensayos de compresión triaxial no drenados*, los resultados son expresados en función de las variables de estado  $p'$ ,  $q$  y  $V$ . Dos muestras con diferente grado de preconsolidación fallaran cuando alcancen la línea de estado crítico la cual se supone paralela a la línea de consolidación normal isotrópica en el diagrama  $V$  vs  $\ln p'$ . Adimensionalizando los caminos de tensiones con el valor de la presión equivalente, la línea de estado crítico se reduce a un punto y los caminos de tensiones suministran los patrones fundamentales de comportamiento. Con esto, el principio de comportamiento normalizado establece que todas las muestras que tengan un mismo valor de relación de sobreconsolidación pero con diferentes presiones de preconsolidación tendrán el mismo camino de tensiones efectivas reducidas. Este principio forma parte de los modelos de estado crítico de los suelos que dió lugar al importante método SHNSEP en su sigla en ingles (stress history and normalized soil engineering properties).

Para una arcilla, que se deforma conforme al concepto de estado crítico, la resistencia al corte no drenada en compresión es igual a la mitad de la tensión desviadora en estado de falla. Los valores de la presión efectiva al principio y al final de un ensayo de compresión no drenado están vinculadas por medio de la relación de deformaciones volumétricas plásticas en el parámetro  $\Lambda = (\lambda - \kappa) / \lambda$ , introducido por [Schofield and Wroth, 1968], que cumple el rol de introducir un modelo plástico con endurecimiento por deformación. La relación de tensiones de corte inicial para una arcilla depende marcadamente de la relación de tensiones  $K_o$  y por lo tanto de la relación de sobreconsolidación.

La falla en *ensayos triaxiales de compresión drenada* es representada por los parámetros  $\phi'$  y  $c'$  de la envolvente clásica de falla de Mohr Coulomb (la resistencia drenada del suelo), que es inadecuada para las arcillas según [Schofield and Wroth, 1968] ya que deben tenerse en cuenta el efecto del contenido de agua y la historia de tensiones sobre la resistencia al corte y utilizar la interpretación de Hvorslev. El rasgo fundamental es que  $c'$  no es una constante sino una función exponencial del contenido de agua. Los datos de ensayos sugieren que la envolvente de falla se curva suavemente para pasar por el origen.

Dentro del rango elástico las arcillas poseen un coeficiente de Poisson que probablemente se encuentre en el rango  $0,12 < \nu' < 0,35$ . Además de la posibilidad de que los materiales granulares tengan un comportamiento elástico anisotrópico, otro rasgo característico conocido es que los valores de los módulos son función de la tensión media efectiva

La evidencia experimental muestra que la superficie de fluencia para las arcillas tiene una forma elíptica con su eje de simetría cercano a la línea  $K_o$ . Esto es una característica común de las arcillas naturales y está relacionada con la anisotropía producida por la historia de consolidación unidimensional. La magnitud del incremento de la deformación volumétrica plástica es determinado a partir de los cambios de tamaño de la superficie de fluencia. Las deformaciones de corte pueden determinarse si se conoce el potencial plástico. Para arcillas blandas el uso de una regla de flujo asociada es razonable para predecir las deformaciones plásticas.

El modelo Cam Clay modificado predice bien las deformaciones volumétricas pero no tan bien las deformaciones de corte. El modelo supone que la forma de la superficie de fluencia es una elipse. Esta elección está basada en consideraciones de la energía que se disipa plásticamente. Uno de los semi - ejes de la elipse está determinado por la historia de consolidación de la muestra y el otro semi - eje está dado por suponer que el extremo del eje pertenece a la elipse y a la superficie de estado crítico. La línea de estado crítico se supone paralela a la línea de consolidación normal en el gráfico del volumen específico en función del logaritmo natural de la presión efectiva. La descripción total del modelo requiere de 5 parámetros para especificar la forma y tamaño de la superficie de fluencia y las propiedades elásticas del material. El comportamiento del material dentro de la superficie de fluencia se supone elástico e isótropo, pero el módulo volumétrico  $K$  depende de la tensión efectiva media. La respuesta elástica de corte es especificada suponiendo que el módulo de corte  $G$  es constante, cualquier suposición de variación de  $G$  con la presión puede resultar en un modelo termodinámicamente no aceptable. El modelo Cam Clay ha sido implementado en programas de elementos finitos. El modelo luego fue modificado por [Mroz, 1967] y [Prevost, 1977] para mejorar la predicción de las deformaciones plásticas de corte, utilizando superficies de fluencia anidadas. Si bien estos modelos han mostrado ser exitosos para modelar los resultados de ensayos triaxiales, requieren de muchos parámetros y son muy costosos en tiempo de cálculo. Una alternativa a las múltiples superficies de fluencia es el uso de un modelo de superficie límite como el presentado por [Dafalias and Herrmann, 1980] que presenta una transición estable entre el comportamiento elástico y el plástico, que no requiere de tantos parámetros pero si de varias funciones que deben determinarse empíricamente.

Los modelos de plasticidad aun presentan dos áreas pendientes, una de ellas es que en arcillas naturales la superficie de fluencia presenta un eje de simetría más cercano a la línea  $K_o$  que a la

línea de compresión isotropa, lo cual está relacionado con la fluencia anisotrópica. La rotación de las direcciones principales de tensión también son atribuidas a la influencia de la anisotropía. La segunda área pendiente es la generalización a estados de tensiones generales, ya que el modelo Cam Clay modificado y muchos otros suponen que la sección de la superficie de fluencia es circular en el plano octahédrico. Esto sobrestima groseramente la resistencia en tracción triaxial y también resulta en relaciones de tensiones intermedias incorrectas en deformación plana. Un ajuste mucho mejor a la superficie de falla para diferentes valores de tensiones intermedias son las formas dadas por [Lade, 1977] o por [Matsuoka and Nakai, 1974]. Aunque éstas formas han sido utilizadas para modelar el comportamiento de arenas y se han hecho intentos de combinarlas con los conceptos de estado crítico, aun no se ha encontrado una solución enteramente satisfactoria.

Un fenómeno importante en muchas arcillas es la marcada reducción de la resistencia al corte respecto del valor pico cuando se inicia la falla, que puede ser de un 50%. No siempre se observa una zona de falla de ancho finito sino una superficie entre dos bloques respecto de la cual los bloques deslizan en forma relativa.

### Modelos para suelos no cohesivos (arenas)

Uno de los rasgos comunes entre el comportamiento de las arcillas y limos y el de arenas y gravas es la importancia de la rotación de la dirección de la tensión principal mayor.

Una de las principales diferencias de los materiales de grano grueso respecto de las arcillas es la permeabilidad, que puede ser seis o más ordenes de magnitud más grande que para arcillas. Como consecuencia se tiene que los tiempos de drenaje para arenas son muy cortos y es muy raro tener problemas no drenados (salvo en fundaciones mar adentro o cargas sísmicas donde la mayor preocupación es el fenómeno de liquefacción). La resistencia no drenada no es una cantidad sensible, razón por la cual se hace énfasis en los cálculos drenados utilizando un ángulo de fricción.

La segunda diferencia importante con el comportamiento de las arcillas se debe a la naturaleza de la interacción entre las partículas, que en los materiales de grano grueso es puramente mecánica.

Los materiales gruesos están formados por partículas relativamente redondeadas y por ello se espera que esto tenga consecuencias en el comportamiento volumétrico. Por ejemplo la anisotropía es más difícil de desarrollar pues una estructura de partículas altamente orientada no es posible.

La densidad y la presión real son cantidades relevantes en arenas. La mayoría de las arenas se depositan de manera tal que su comportamiento tensión deformación es similar al que se observa en arcillas sobreconsolidadas, que al ser sometidas a corte dilatan y pueden formar bandas de corte. Por otra parte depósitos suficientemente sueltos sufren una contracción de volumen al ser sometidos a corte. No es suficiente tener conocimiento solo de la densidad de la arena, ya que en arenas sometidas a elevadas presiones se suprime la dilatancia y la arena se comporta de manera similar a una arcilla blanda.

### 3.2.6. Modelos constitutivos en la mecánica del continuo

#### Elasticidad

Una expresión que relaciona el volumen específico, la presión efectiva y el gradiente de la línea de estado crítico es una medida útil que relaciona la densidad y el nivel de presión en arenas, primeramente sugerido por [Stroud, 1971].

La teoría de contacto Hertziano es el punto de partida para las teorías sobre propiedades elásticas de las arenas. La teoría trata el contacto entre dos cuerpos lineales elásticos con deformación local en las zonas de contacto. La aproximación relativa de los dos cuerpos resulta proporcional a la potencia  $2/3$  de la presión entre las partículas. A partir de esta teoría, se espera que el módulo volumétrico de un ensamble de partículas redondeadas sea proporcional a la potencia  $1/3$  de la presión. Si el ensamble es de cuerpos angulares, se espera que el módulo volumétrico sea proporcional a la raíz cuadrada de la presión. Una forma comúnmente utilizada de expresar el módulo volumétrico es:

$$K = p_{ref} k \left( \frac{p'}{p_{ref}} \right)^n \quad (3.2.1)$$

donde  $p_{ref}$  es una presión de referencia, en general se utiliza la presión atmosférica,  $k$  es un parámetro adimensional y  $1/3 < n < 1/2$ , siendo muy comunes valores de  $n = 0,4$  y probablemente adoptar  $n = 0,5$  capture las características importantes del incremento de la rigidez con la presión. [Jambu, 1963] fue el primero que propuso expresar el módulo volumétrico como una ley de potencia de la presión, y en general es aceptada para ajustar el comportamiento de una arena.

La teoría Hertziana muestra que si se aplican fuerzas de corte a dos cuerpos redondeados en contacto deben producirse anillos de deslizamiento en cada contacto. La magnitud del deslizamiento tangencial puede ser determinado en función de la presión de contacto. Cualquier cambio de la carga de corte debe estar acompañada por una pequeña disipación de energía. Si se reduce la presión de contacto a carga de corte constante, se producirá un mayor deslizamiento. Puede esperarse que las arenas tengan un comportamiento elástico en el cual el módulo de corte también sea una ley de potencia de la presión, pero todo cambio de tensiones estará relacionado con una pequeña disipación de energía dando lugar a un comportamiento disipativo. Una posibilidad sería expresar:

$$G = p_{ref} k_1 \left( \frac{p'}{p_{ref}} \right)^m \quad (3.2.2)$$

Se espera que  $m$  tenga valores similares a  $n$ . Si  $n = m$ , equivale a suponer que la relación de Poisson es constante. [Lade, 1977] encontró que una relación de Poisson de 0,2 es apropiada para un amplio rango de arenas. Si se incorpora un módulo de corte que depende de la presión en un modelo conservativo, es de esperar que el módulo volumétrico dependa en cierta medida de la tensión de corte.

#### Plasticidad

A menudo es conveniente distinguir en las arenas dos aspectos del comportamiento plástico: consolidación y corte. En realidad ambos aspectos están vinculados y es el propósito de la teoría de estado crítico de los suelos vincularlos. Cuando se somete una arena a un camino de tensión

a relación de tensión constante (al igual que las arcillas) muestran deformaciones plásticas en carga primaria que luego de descargar y recargar, hasta la máxima tensión previa, manifiestan un punto de fluencia. Este comportamiento condujo a que [Lade, 1977] incluyera en su modelo para arenas una *superficie de consolidación* o “cap” para permitir las deformaciones plásticas de consolidación (volumétricas). Las deformaciones plásticas volumétricas siguen un modelo similar al de las deformaciones elásticas y además pueden modelarse bastante precisamente con una ley de endurecimiento que se expresa como una ley de potencia de la presión media. En su trabajo Lade informa que el módulo volumétrico plástico equivalente depende de la tensión efectiva media elevada a una potencia que se encuentra entre 0,12 y 0,74. Por otra parte [Vesic and Clough, 1968] mostraron que a muy altas presiones de consolidación las líneas en el espacio  $V - \ln(p)$  para arenas son muy similares a las de las arcillas, aproximadamente rectas. La superficie de fluencia para consolidación de las arenas no está aún determinada. Algunos datos experimentales indican que la forma es, a grandes rasgos, similar a la dada por una teoría de tipo Cam Clay. Es probable que la elipse del modelo “Cam Clay modificado” pueda utilizarse tanto para arcillas como para arenas. La evidencia experimental muestra que aún a bajas relaciones de tensión las arenas muestran *flujo* no asociado, pero debido a que las deformaciones volumétricas en arenas son relativamente pequeñas puede utilizarse una ley asociada y obtener suficiente exactitud. Gran cantidad de ensayos de corte confirman la forma de la *superficie de falla* en arena y frecuentemente se supone que las *superficies de fluencia* tienen forma similar a la superficie de falla. El más conocido criterio de falla en arenas es la condición de Mohr - Coulomb que supone que ocurre falla cuando la relación entre la tensión tangencial y la tensión normal alcanza un valor crítico en cualquier punto de la masa de suelo. Las investigaciones más recientes que utilizan un dispositivo donde se pueden variar las tres tensiones principales independientemente muestran que la condición de Mohr - Coulomb es un buen ajuste a los datos de los ensayos. Dos superficies de falla alternativas han sido propuestas por [Lade, 1972] y por [Matsuoka and Nakai, 1974]. Al comparar estos modelos con el de Mohr Coulomb, se observa que son semejantes en compresión triaxial pero los nuevos criterios dan resistencias levemente mayores para otros valores de la tensión principal intermedia. Se supone que la superficie de fluencia tiene la misma forma en el plano octahédrico que la superficie de falla. Luego [Lade, 1977] modifica su expresión de la superficie de fluencia para tener en cuenta la curvatura de la superficie de fluencia para arenas de granos blandos.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{vs} &= c + \sigma_{vv} \tan(\varphi) && \text{Mohr Coulomb} \\
 f_p &= \left[ \frac{(I_1)^3}{I_3} - 27 \right] \left( \frac{(I_1)^m}{p_r} \right) && \text{Lade} \\
 \tan^2 \phi_{tc} &= \frac{(\sigma'_2 - \sigma'_3)^2}{\sigma_2 \sigma_3} + \frac{(\sigma'_3 - \sigma'_1)^2}{\sigma_3 \sigma_1} + \frac{(\sigma'_1 - \sigma'_2)^2}{\sigma_1 \sigma_2} && \text{Matsuoka Nakai}
 \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

La forma de las secciones de la *superficie de fluencia* en el plano triaxial son líneas rectas a relación de tensión constante, suficientemente exactas para arenas de granos duros y a niveles de tensiones razonablemente bajos. A altos niveles de tensión en arenas de grano blando hay una significativa curvatura de la superficie de falla atribuida a la rotura de las partículas.

La forma del *potencial plástico* para arena es mucho mejor establecido y en general es expresado en la forma de una regla de flujo, relacionando las direcciones de los incrementos de deformación plástica en un estado de tensiones. Integrando la regla de flujo es posible obtener el potencial

plástico. Una de las más exactas reglas de flujo es la relación tensión - dilatancia propuesta por [Rowe, 1962].

$$\begin{aligned} R &= KD \\ R &= \frac{\sigma'_1}{\sigma_3} \\ D &= \frac{-2d\varepsilon_3^p}{d\varepsilon_1^p} \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

La regla expresa la bien establecida relación empírica que a relaciones de tensiones menores que un cierto valor  $K$  la arena se contrae al ser sometida a corte y a mayores se expande. El valor de la constante  $K$  se relaciona con el ángulo de fricción a volumen constante  $\phi_{cv}$  como  $K = (1 + \text{sen}\phi_{cv}) / (1 - \text{sen}\phi_{cv})$ . Esta expresión es un excelente modelo para los ensayos triaxiales de compresión pero no es claro como generalizar la expresión a estados de tensiones más generales. La derivación de las reglas de flujo para materiales granulares frecuentemente se basan en consideraciones de la energía disipada por trabajo plástico. Por ejemplo la regla de flujo del modelo Cam Clay original, que ajusta bien al comportamiento de las arenas, está basado en la hipótesis simple para ensayos triaxiales dada por:

$$dW^p = Mp' |d\varepsilon^p| \quad (3.2.5)$$

Su generalización a otros estados no es satisfactoria, pero se ha sugerido una expresión alternativa que ajusta mejor a muchos aspectos del comportamiento de la arena y es:

$$\begin{aligned} dW^p &= \frac{\sqrt{8}}{3} \tan \phi [\sigma'_2 \sigma'_3 (d\varepsilon_2^p - d\varepsilon_3^p)^2 \\ &\quad + \sigma'_3 \sigma'_1 (d\varepsilon_3^p - d\varepsilon_1^p)^2 \\ &\quad + \sigma'_1 \sigma'_2 (d\varepsilon_1^p - d\varepsilon_2^p)^2] \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

[Lade and Duncan, 1973] presentaron un trabajo donde muestran que los incrementos de deformación plástica para arenas en falla son aproximadamente normales a la envolvente de falla, por esto un potencial plástico con la misma forma que la superficie de fluencia podría ser apropiado. No están garantizados los detalles finos de una regla de flujo para arenas, ya que es más simple predecir con aceptable exactitud las relaciones entre deformaciones que sus valores absolutos.

La predicción de las deformaciones plásticas en arenas es una tarea muy difícil, aún para condiciones de carga monotónica. Predecir la magnitud de las deformaciones plásticas equivale a establecer la ley de endurecimiento para el comportamiento plástico de la arena. La primer aproximación, y todavía la más común, es ajustar una hipérbola a la curva tensión de corte - deformación de corte propuesto por [Kodner and Zelasko, 1963] que luego fue incorporado al modelo de [Duncan and Chang, 1970] el cual es ampliamente aceptado y suministra razonable ajuste a los datos. Más tarde [Vermeer, 1982] adopta la aproximación de Kodner a la teoría de la plasticidad y ajusta una hipérbola a la relación de tensión ( $q/p'$ ) versus la deformación de corte ( $\varepsilon_q$ ) que ha mostrado ser razonable para predecir las magnitudes de las deformaciones en ensayos triaxiales. Una segunda aproximación es la que presentó [Lade, 1977] que expresa en forma indirecta a la "constante"  $f_p$  como una función del trabajo plástico  $W^p$  como

$$W^p = F_p(f_p) \quad (3.2.7)$$

Esta expresión corresponde a un “trabajo de endurecimiento” ya que la posición de la superficie de fluencia es función del trabajo plástico. La función  $F_p$  se establece empíricamente, utilizando expresiones complicadas. Este modelo captura las características del comportamiento de las arenas pero presenta problemas de cálculo cuando se la convierte en una relación incremental tensión - deformación como la necesaria en un análisis por elementos finitos.

### Comportamiento discontinuo

Un hecho importante en el comportamiento de las arenas densas a bajas presiones de confinamiento es que muestran un pico en la curva tensión de corte - deformación de corte seguido de un ablandamiento cuando la arena se expande. Este ablandamiento puede dar lugar a la formación de bandas de corte, caracterizadas por que el material dentro de la banda se ablanda y está rodeado por material rígido que puede descargar elásticamente. En los ensayos resulta un comportamiento marcadamente no homogéneo difícil de escalar para llevar a las situaciones reales. Los primeros en estudiar éste comportamiento discontinuo se concentraron en el ángulo que forma la banda de corte respecto de la dirección principal de tensión. Los ángulos más frecuentemente encontrados fueron  $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)$  y  $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\nu}{2}\right)$  siendo  $\phi$  el ángulo de fricción interna y  $\nu$  el ángulo de dilatación. [Lade, 1982] presentó un detallado informe sobre las condiciones bajo las cuales se forman las bandas de corte en ensayos triaxiales y su influencia en los resultados. [Vermeer, 1982] presentó un análisis simplificado de bifurcación en el que establece un criterio para el inicio de la formación de la banda de corte, en su análisis no incluye la bifurcación entre un comportamiento elástico y uno plástico fuera y dentro de la banda de corte respectivamente. Es comúnmente aceptado, a partir de las observaciones de [Roscoe, 1970], que el ancho mínimo de las bandas de corte es del orden de diez diámetros de partícula. Esto tiene soporte teórico en el trabajo de [Bridgwater, 1980] lo cual dificulta llevar los resultados de laboratorio a la escala real.

#### 3.2.7. Métodos de análisis

Muchos problemas de geotecnia tienen una geometría complicada además de los problemas con los modelos constitutivos. La construcción de terraplenes y de excavaciones donde debe lograrse captar el efecto del agregado y remoción de material son problemas particulares de la geotecnia que también se dan en los silos.

Antes de analizar un problema éste debe idealizarse simplificando los problemas geométricamente tridimensionales a bidimensionales (de deformación plana o axilsimetría) sin ignorar los efectos significativos del problema real. Si hay dudas deben realizarse pruebas y estudios paramétricos para considerar cuan significativos son ciertos factores. Así como no hay un modelo simple para el comportamiento del suelo, tampoco hay un método de análisis simple para todos los problemas. Las técnicas analíticas dependen del modelo constitutivo para el suelo, en general incluyen modelos elásticos y consideran pequeñas deformaciones. El método de elementos de borde ha sido utilizado para el cálculo de asentamientos de pilas con un modelo elástico. El método de las rebanadas ha sido empleado para el estudio de la seguridad al deslizamiento de taludes. El método de las características ha sido utilizado con un modelo de falla de Mohr Coulomb para determinar presiones activas

sobre estructuras de sostenimiento. El teorema del límite superior puede ser utilizado en el análisis de presiones en un túnel a excavar en arcilla. El método de elementos finitos se ha utilizado para simular la construcción de terraplenes, incorporando en el progreso de la construcción el cálculo de la presión de poro que luego puede utilizarse para verificar la seguridad del talud.

Dado que muchos problemas requieren utilizar modelos elastoplásticos para plantear un modelo realista, el método más utilizado y prometedor para realizar este tipo de análisis es el de elementos finitos incremental. Para el cálculo de desplazamientos el método de elementos finitos (MEF) está bien desarrollado tanto si se utilizan leyes tensión deformación de la elasticidad lineal o una ley no lineal. Especial cuidado debe tenerse al modelar operaciones de excavación o relleno.

Cuando se utiliza MEF para realizar el cálculo de carga límite debe cuidarse que en la formulación no se produzca bloqueo de la solución, pues esto provoca que se obtengan cargas límite muy elevadas. Para obtener valores adecuados debe utilizarse alguna técnica (como la integración reducida) para evitar el bloqueo. En estos modelos la carga límite, carga bajo la cual se obtiene una gran deformación (fijada arbitrariamente), se determina al realizar el cálculo en forma incremental utilizando una ley elastoplástica. Cuando se utiliza para modelar un problema con grandes deformaciones debe tenerse especial cuidado al elegir la definición de tensiones y de deformaciones y tener en cuenta si el problema involucra grandes cambios de volumen pero pequeñas distorsiones o si se tendrán pequeños cambios de volumen y grandes distorsiones. La aproximación Lagrangeana (coordenadas materiales) es preferida para los problemas con grandes deformaciones. Una formulación Euleriana (coordenadas espaciales) frecuentemente no es apropiada porque es difícil establecer en un suelo su estado natural de referencia y además se tienen problemas para tratar con bordes móviles y con la historia de tensiones. La formulación que parece suministrar las mayores ventajas es la Lagrangeana actualizada. Una vez elegido el formalismo apropiado debe tenerse una ley tensión deformación generalizada para grandes deformaciones, que en general no es un procedimiento directo. El MEF es útil para modelar un problema cuando hay interfases entre materiales diferentes y cuando se tiene una discontinuidad cuya posición es conocida. Para simular problemas donde la posición de la discontinuidad no es conocida a priori, como la formación de bandas de corte y planos de deslizamiento, se han intentado modelos con remallado de las zonas sometidas a grandes distorsiones. Un posible abordaje alternativo a este problema sería adaptar modelos de daño distribuido, desarrollados en la simulación de fisuración en hormigones, para ubicar las discontinuidades y su crecimiento.

### 3.3. Características de los materiales granulares ensilados

Los materiales que se almacenan a granel en silos se dividen en dos grupos principales, de grano grueso y polvos finos según [Roberts, 1991].

Los materiales de grano grueso son aquellos en los cuales el rango de tamaños de partículas es tal que la permeabilidad al aire es suficientemente alta como para permitir que el aire se filtre a través del sólido almacenado con un mínimo de resistencia. Cuando el material está fluyendo, en la zona cercana a la salida de material en un silo, el gradiente de presión de aire  $\Delta p_r = 0$ . Para este tipo de material fueron desarrolladas fórmulas analíticas para las sobrepresiones en las paredes

y curvas que permiten diseñar la geometría del silo teniendo en cuenta el ángulo de inclinación de la tolva  $\alpha$ , el ángulo de fricción interna del material  $\phi$  y el ángulo de fricción entre el material granular y la pared  $\phi_w$ . Las características de los materiales gruesos que se almacenan a granel son asimilables a las arenas en la mecánica de los suelos, aunque los niveles de tensión y de deformación de interés pueden ser bastante diferentes.

Los polvos finos se caracterizan por tener una baja permeabilidad al aire al punto de impedir la descarga del material ya que  $\Delta p_r \neq 0$ . El análisis es mucho más complicado e involucra la teoría de flujo de dos fases. Se suele asociar su comportamiento al de materiales cohesivos (arcillas en la mecánica de los suelos) que pueden presentar efectos reológicos. Los polvos son propensos a fluir de manera descontrolada si se permite que se aireen.

Los materiales que se almacenan a granel en general tienen un bajo contenido de humedad (menor al 12% en peso), y en el caso de los materiales de grano grueso se supone que se encuentran secos. Los materiales pulverulentos tienen un comportamiento que depende marcadamente del contenido de humedad.

El estado de tensiones y de deformaciones en los materiales almacenados a granel se relacionan con el método de llenado que puede ser clasificado principalmente en dos tipos: concéntrico o distribuido. El llenado de tipo concéntrico tiene como efecto que el material que se va acumulando forma una superficie inclinada respecto de la horizontal un ángulo cercano al ángulo de reposo del material. Si la granulometría no es uniforme se puede producir segregación del material ya que las partículas de mayor tamaño ruedan y deslizan hasta ubicarse cerca de la pared. Si el llenado es distribuido, la superficie del material acumulado es prácticamente horizontal y el arreglo de partículas es más compacto que en el caso de haberse llenado el silo de manera concéntrica, según indican [Zhong et al., 2001]. Las tensiones que se producen se deben principalmente al peso propio del material y a la interacción friccional con las paredes del depósito. El estado de deformaciones depende de si se está llenando o vaciando el silo y de la rigidez de la estructura. En general durante la etapa de llenado las deformaciones son pequeñas en el material almacenado (tanto las volumétricas como las desviadoras). Durante la etapa de vaciado las deformaciones pueden ser grandes y dependerán del tipo de flujo que se produzca.

El material granular a considerar en la presente tesis, corresponde a un material cuyos granos no se deforman ni se rompen y tienen tamaño suficiente para formar una estructura con alta permeabilidad al aire. No se consideran efectos reológicos debido a la alta permeabilidad. Se supondrá que el material almacenado se encuentra seco por lo cual no se presentarán efectos cohesivos inducidos por tensión superficial del agua. La presión o tensión media efectiva, por estar el material seco, coincide con la presión total.

Las cargas serán monotónicas y se deberán al peso propio del material y la interacción friccional con las paredes. Se considerará que las propiedades resistentes son función de la presión, como indican las relaciones constitutivas de la mecánica de suelos.

Las deformaciones serán pequeñas en la etapa de llenado y de pequeñas a grandes durante el vaciado. El tensor incremento de deformación se descompone de forma aditiva en una parte elástica y otra plástica. Se considerará al material como compresible y puramente friccional. Se lo modelará dentro de la mecánica de los medios continuos como un sólido deformable adoptan-

do una formulación Lagrangeana actualizada. El modelo constitutivo tangente considerará que el comportamiento elástico puede ser lineal o no lineal, y las deformaciones plásticas podrán ser tanto volumétricas como de distorsión. Se adopta una superficie de fluencia compuesta por una parte fija con una regla de flujo no asociada y una parte móvil que considera endurecimiento - ablandamiento por deformación plástica volumétrica y que tiene una regla de flujo asociada.

El modelo es una aproximación al comportamiento de los materiales granulares gruesos almacenados a granel, que incorpora las características más relevantes del comportamiento de este tipo de material extraídos de la mecánica de suelos.

Se asimila el proceso de construcción de terraplenes en la mecánica de suelos con el llenado del silo. En ambos casos se simula el proceso por medio del agregado de capas, permitiendo que el material por debajo de la capa que se agregó alcance el equilibrio en su nuevo estado de tensión y deformación antes de agregar una nueva capa. Se adoptan las ecuaciones de equilibrio dinámico, y se simula el llenado como un proceso cuasi estático para lo cual se dota al material de un amortiguamiento levemente por debajo del valor crítico. El proceso de vaciado del silo, en los primeros instantes de iniciado, puede pensarse como un proceso de excavación en la mecánica de suelos, donde el material cercano a la salida se descomprime y pierde rigidez hasta que el volumen ha aumentado lo suficiente para que no haya contacto entre las partículas. A este último estado se lo designa como material disgregado, caracterizado por no poder transmitir fuerzas internas. Si el material disgrega dentro del silo, estará en caída libre hasta tanto el volumen disminuya a causa de la geometría del silo y vuelva a poder transmitir fuerzas internas, caso contrario continuará en caída libre hasta que el material se encuentre fuera del silo.

En la siguiente sección se especifican las partes componentes del modelo adoptado cuyo tratamiento numérico se presenta en el capítulo 5.

### 3.4. Modelo constitutivo elastoplástico para material granular

#### 3.4.1. Propiedades elásticas

Se considerará que el material es homogéneo e isotrópico. Las propiedades en el rango elástico podrán ser representadas por un modelo elástico lineal o por un modelo elástico no lineal. Acorde a los modelos desarrollados en la mecánica de suelos se adoptará una relación de Poisson constante y el módulo de Young dependiente de la presión o tensión media según el modelo propuesto por [Jambu, 1963] y luego adoptado por [Duncan and Chang, 1970] y [Lade, 1977], siendo:

$$\begin{aligned} E &= k_u p_r \left( \frac{p}{p_r} \right)^n \\ \nu &= cte \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

Los módulos volumétrico y de corte se calculan a partir del módulo de Young y del coeficiente de Poisson utilizando las expresiones de la teoría de la elasticidad clásica.

### 3.4.2. Superficie de fluencia

La superficie de fluencia a considerar está compuesta por dos superficies  $f_1$  y  $f_2$  que se intersectan. La superficie  $f_1$  es un cono, en el espacio de tensiones principales, y corresponde al modelo de Drucker - Prager al que puede considerarse una extensión del criterio de Mohr - Coulomb a una situación tridimensional, siguiendo el trabajo de Chen [Chen, 1980]. Esto es una aproximación para considerar en el análisis la posibilidad de que el material alcance el estado crítico, caracterizado por producirse grandes deformaciones de distorsión sin cambios en las tensiones. La falla ocurrirá una vez que el estado de tensiones alcance el estado crítico de tensiones, independientemente del camino de tensiones seguido.

La superficie  $f_2$  es un elipsoide en el espacio de tensiones principales y corresponde al modelo Cam Clay modificado cuyos detalles pueden encontrarse en [Desai and Siriwardane, 1984] y en [Wood, 1991]. Corresponde a un modelo isotrópico, elastoplástico no lineal con endurecimiento por deformación.

La intersección de ambas superficies es una aproximación al lugar geométrico de los estados críticos para un determinado volumen específico [Chen, 1980].

Las expresiones para las dos superficies, adoptando las definiciones generales para las tensiones volumétrica y de distorsión dadas por Wood [Wood, 1991] son:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{q}{\sqrt{3}} - 3\alpha p - K_p = 0 \\ f_2 &= q^2 - M^2 p(p_o - p) = 0 \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

siendo

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\mathbf{S} : \mathbf{S}} \\ p &= \frac{1}{3} \sigma_{ii} \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

donde  $\mathbf{S}$  es el tensor de tensiones desviador del tensor de tensiones  $\boldsymbol{\sigma}$ . Los parámetros  $\alpha$  y  $K_p$  dependen de la cohesión  $c$  y del ángulo de fricción interna del material  $\phi$ , si  $c = 0$  entonces  $K_p = 0$  para un material puramente friccional. El parámetro  $M$  determina la forma del elipsoide y  $p_o$  fija el tamaño del mismo y es una función de las deformaciones plásticas volumétricas.

### 3.4.3. Superficie potencial plástica. Regla de flujo

Las superficie de fluencia  $f_1$  tiene asociada una regla de flujo que sólo permite deformaciones de distorsión a volumen constante, sin cambio en las tensiones, en concordancia con el modelo de estado crítico. Integrando la regla de flujo se obtiene una superficie potencial plástico [Wood, 1991], [Desai and Siriwardane, 1984]. En este caso el potencial plástico es un cilindro en el espacio de tensiones principales, cuyo radio corresponde al máximo valor admisible de la variable  $q$  para el correspondiente valor de  $p$ , cuya expresión es:

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{q}{\sqrt{3}} - R(p) \\ R(p) &= \alpha p + K_p \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

La superficie de fluencia  $f_2$  tiene una regla de flujo asociada, de modo que se producirán tanto deformaciones plásticas volumétricas como de distorsión en la proporción que fije el vector normal a la superficie potencial plástico en el espacio de tensiones. Entonces:

$$g_2 = f_2 = q^2 - M^2 p(p_o - p) = 0 \quad (3.4.5)$$

#### 3.4.4. Ley de endurecimiento - ablandamiento

La expansión o contracción del cap está controlada por la deformación volumétrica plástica. En su trabajo [Chen, 1980] enfatiza que el utilizar un cap da en forma apropiada el comportamiento en un ciclo de carga descarga isotrópica eliminando la necesidad de utilizar diferentes módulos volumétricos para carga y descarga y además permite controlar la dilatación plástica.

Cuando el suelo endurece por deformación (el material sufre una contracción volumétrica) el cap se expande. Esta es una característica de los modelos desarrollados por Roscoe, Schofield y Wroth y ha sido presentado en detalle por [Wood, 1991] y es adoptado por [Chen, 1980]. Esta ley permite que el material se ablande por deformación volumétrica (el material sufre una expansión volumétrica) y el tamaño del cap disminuye. En ambos casos el volumen específico plástico es el parámetro que se utiliza para determinar el tamaño de las sucesivas superficies, geoméricamente similares.



## Capítulo 4

# Formulación físico matemática del problema

### 4.1. Introducción

El objetivo principal es generar un modelo físico que represente el comportamiento de materiales ensilados. Para ello se utilizará una formulación de sólidos basada en la mecánica de medios continuos con grandes deformaciones considerando un modelo constitutivo de sólido elastoplástico. Esta formulación es computacionalmente más compleja que la correspondiente a una formulación de flujo pero permite superar varias limitaciones esa formulación. El análisis del problema será abordado utilizando el método de elementos finitos como técnica numérica.

La discretización espacial del dominio del problema se realiza con un elemento finito bidimensional de deformación plana / axilsimetría para el cual se ha adoptado una formulación Lagrangeana actualizada formulando las ecuaciones respecto de un sistema corrotacional. Al estar las deformaciones y las tensiones referidas a un sistema corrotacional la actualización de las variables incrementales se realiza fácilmente. Se considera que los incrementos de deformación son pequeños. Los lineamientos básicos de la formulación Lagrangeana actualizada pueden encontrarse en [Crisfield, 1991] y [Hinton, 1992].

Ésta opción para la formulación del elemento es más sencilla y además se tiene como referencia que ha mostrado buen comportamiento para tratar las relaciones constitutivas de la mecánica de suelos (Capítulo 3, sección 3.2.7 Métodos de Análisis). Los tipos de geometría más utilizados en los silos pueden simularse adoptando las hipótesis simplificativas correspondientes esos estados, que transforman un problema tridimensional en uno bidimensional. Geometrías más complejas no podrán simularse con estos elementos. Dadas las características de evolución del proceso de llenado y dinámicas del problema de vaciado es indispensable incorporar el tiempo como variable del problema. En la etapa de llenado será la variable que lleva la evolución del proceso cuasi estatico de llenado y durante el vaciado permitirá el cálculo de las velocidades y aceleraciones correspondientes.

En este capítulo se presenta la formulación del elemento finito bidimensional de deformación plana / axilsimetría de cuatro nodos con una formulación Lagrangeana actualizada implementado

en el código SIMPACT/DELTA [Flores, 1999]. El citado es un programa de elementos finitos con integración explícita de las ecuaciones diferenciales en el tiempo. El algoritmo estándar de integración es el de diferencias centrales, dentro del esquema de Euler hacia adelante. Este tipo de algoritmo es condicionalmente estable lo cual hace que los incrementos de tiempo sean pequeños y dependan de la mínima dimensión de la malla. Esto encarece la solución si la malla es muy densa. Por otra parte este tipo de código es muy versátil en lo referente a la implementación de relaciones constitutivas complejas y en lo referente al manejo de las condiciones de contorno. Otra ventaja que presenta este código es que puede realizarse la integración directa de las ecuaciones de gobierno tanto del material ensilado como de las paredes del silo combinando elementos de sólido y elementos de lámina. También permite considerar la fricción entre el material y las paredes a través de un modelo de contacto con rozamiento lineal de Coulomb, indispensable para obtener resultados razonables en la interacción con la pared. El modelo de contacto se basa en la técnica de penalización adecuada para una formulación dinámica explícita [Zhong, 1993].

## 4.2. Ecuación de gobierno. Generalidades

Debido al carácter dinámico del problema, en todo punto del dominio y en todo tiempo mayor a cero deberá cumplirse con la segunda ley de Newton.

La cantidad de movimiento lineal para un sólido cualquiera  $\Omega$  puede escribirse como:

$$\mathcal{L} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} d\Omega \quad (4.2.1)$$

utilizando la segunda ley de Newton ( $F = d\mathcal{L}/dt$ ) y considerando que la masa del sólido no varía con el tiempo

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega = 0 \quad (4.2.2)$$

puede escribirse:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}}{dt} &= \int_{\Omega} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\Omega = \int_{\Omega} \rho \mathbf{a} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{f} d\Gamma \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{a} d\Omega = \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{f} d\Gamma \quad (4.2.4)$$

donde  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$  es el campo de aceleraciones del cuerpo,  $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$  son las fuerzas actuantes por unidad de masa y  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  con  $\mathbf{x} \in \Gamma_f$  son las fuerzas actuantes en la superficie del cuerpo  $\Gamma_f$ .

Reemplazando las fuerzas actuantes en el contorno  $\mathbf{f}$  por tensiones:

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{a} d\Omega = \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} d\Gamma \quad (4.2.5)$$

Utilizando el teorema de la divergencia para obtener una integral en el dominio:

$$\int_{\Omega} [\rho \mathbf{b} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{a}] d\Omega = 0 \quad (4.2.6)$$

que es la ecuación de movimiento de Cauchy, la cual debe cumplirse para una parte cualquiera del dominio  $\Omega_e$ . Si se multiplica la expresión (4.2.6) por una velocidad arbitraria  $\delta \mathbf{v}$  que cumpla las

condiciones de contorno esenciales (velocidad virtual) se tiene:

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{v} \cdot [\rho \mathbf{b} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{a}] d\Omega = 0 \quad (4.2.7)$$

Puede suponerse que la velocidad virtual y los desplazamientos virtuales están relacionados por la expresión:  $\delta \mathbf{u} = dt \delta \mathbf{v}$ .

El término que involucra a las tensiones puede re-escribirse

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{v} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) d\Omega = \int_{\Gamma} \delta \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} d\Gamma - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \delta \mathbf{v} d\Omega \quad (4.2.8)$$

debido a la simetría del tensor de tensiones  $\boldsymbol{\sigma}$  el último término se puede escribir [Hughes, 2000]:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \delta \mathbf{v} d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta \dot{\boldsymbol{\epsilon}} d\Omega \quad (4.2.9)$$

reemplazando en (4.2.8)

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{v} \cdot [\rho \mathbf{b} - \boldsymbol{\sigma} : \delta \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \rho \mathbf{a}] d\Omega + \int_{\Gamma} \delta \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} d\Gamma = 0 \quad (4.2.10)$$

reordenando

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{a} d\Omega = - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta \dot{\boldsymbol{\epsilon}} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} d\Gamma \quad (4.2.11)$$

Para tener en cuenta el efecto del amortiguamiento de tipo viscoso (proporcional a la velocidad) debe sumarse la contribución de las fuerzas de amortiguamiento a la (4.2.11) obteniendo:

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{a} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{v} \cdot v \mathbf{v} d\Omega = - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta \dot{\boldsymbol{\epsilon}} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} d\Gamma \quad (4.2.12)$$

reordenando ésta última

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{a} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{v} \cdot v \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta \dot{\boldsymbol{\epsilon}} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} d\Gamma = 0 \quad (4.2.13)$$

donde  $v$  es el coeficiente de amortiguamiento del material. La ecuación (4.2.12) puede escribirse para una parte  $\Omega_e$  cualquiera del dominio  $\Omega$  como:

$$\int_{\Omega_e} \delta \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{a} d\Omega_e + \int_{\Omega_e} \delta \mathbf{v} \cdot v \mathbf{v} d\Omega_e = - \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\sigma} : \delta \dot{\boldsymbol{\epsilon}} d\Omega_e + \int_{\Omega_e} \delta \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{b} d\Omega_e + \int_{\Gamma_e} \delta \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} d\Gamma_e \quad (4.2.14)$$

donde  $\Omega_e$  es una parte del dominio  $\Omega$  y  $\Gamma_e$  es la parte del contorno del cuerpo  $\Gamma$  que corresponde.

En una discretización por elementos finitos los elementos no se solapan, tal que

$$\Omega = \sum_{e=1}^{NE} \Omega^e \quad (4.2.15)$$

siendo  $NE$  el número de elementos (subdominios).

#### 4.2.1. Condiciones de contorno

El contorno  $\Gamma$  del dominio  $\Omega$  se considerará formado por tres partes complementarias y mutuamente excluyentes:

$$\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_f \cup \Gamma_c \quad (4.2.16)$$

siendo  $\Gamma_u$  la parte del contorno donde se tienen desplazamientos prescritos,  $\Gamma_f$  la parte donde se tienen fuerzas de borde prescritas y  $\Gamma_c$  es la parte del contorno donde es posible que el cuerpo esté en contacto con otro cuerpo. Para completar la definición del problema deben establecerse las condiciones de contorno e iniciales del problema. Estas son:

Condiciones de contorno (esenciales):

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \quad \text{para } \mathbf{x} \in \Gamma_u, [0, T] \quad (4.2.17)$$

Condiciones de contorno (naturales):

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \quad \text{para } \mathbf{x} \in \Gamma_f, [0, T] \quad (4.2.18)$$

Condición de contorno (contacto mecánico):

Esta condición [Zhong, 1993] establece que dos cuerpos no pueden ocupar el mismo volumen (condición de no penetración), y que la fuerza normal de contacto  $q_n$  es de compresión (no se admite adhesión o soldadura entre las superficies en contacto) y la fuerza tangencial de contacto  $q_t$  obedece la ley de fricción de Coulomb (siendo  $\mu$  el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto), matemáticamente:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}, t) &= g(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} \geq 0 \\ q_n(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{q}_c \cdot \mathbf{n} \leq 0 \\ q_t(\mathbf{x}, t) &\leq \mu q_n(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad \text{para } \mathbf{x} \in \Gamma_c, [0, T] \quad (4.2.19)$$

la condición que debe cumplirse puede expresarse como

$$g(x, t) q_n(x, t) = 0 \quad (4.2.20)$$

y la velocidad tangencial  $v_t$  entre los cuerpos en los bordes en contacto deben satisfacer las condiciones:

$$\begin{aligned} v_t(x, t) &= 0 \quad \text{si } q_t(\mathbf{x}, t) < \mu q_n(\mathbf{x}, t) \\ v_t(x, t) &= \lambda q_t(\mathbf{x}, t) \quad \text{si } q_t(\mathbf{x}, t) = \mu q_n(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

Condiciones de desplazamientos iniciales:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad \text{para } \mathbf{x} \in \Omega, t = 0 \quad (4.2.22)$$

Condiciones de velocidades iniciales:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \quad \text{para } \mathbf{x} \in \Omega, t = 0 \quad (4.2.23)$$

En éstas expresiones  $\mu$  representa al coeficiente de fricción estático,  $\rho(x)$  es la densidad del material,  $t$  es el tiempo,  $\mathbf{x}$  es el vector posición,  $\mathbf{n}$  es el versor normal saliente al contorno,  $g$  es la distancia entre las superficies en contacto,  $\mathbf{q}_c$  es la fuerza de contacto con componente normal  $q_n$  y tangencial  $q_t$ .

Además se tiene que  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$  son las componentes del tensor de tensiones, que se supone satisfacen las ecuaciones constitutivas locales, y son función de  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  a través de las deformaciones  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}}$ , y de variables internas como las deformaciones plásticas  $\boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x}, t)$  y las variables de endurecimiento  $\alpha$ .

### 4.3. Solución numérica

Se busca encontrar una solución aproximada a la ecuación de gobierno (4.2.14) utilizando el método de elementos finitos, considerando la expresión para un subdominio o elemento  $\Omega_e$ .

Se adopta la siguiente aproximación paramétrica para los desplazamientos

$$\mathbf{u}^e \simeq \widehat{\mathbf{u}}^e = \sum_{i=1}^{NNE} N_i \mathbf{u}_i^e \quad (4.3.1)$$

donde:

$NNE$ : es el número de nodos del elemento adoptado ( $NNE = 4$ )

$\mathbf{u}_i^e$ : es el vector desplazamiento asociado al nodo  $i$  del elemento  $e$  (parámetro)

$N_i$ : es la función de forma asociada al nodo  $i$  del elemento ( $N_i = N_i(\mathbf{x})$ )

De forma análoga, se adoptan las parametrizaciones para el vector velocidad y el vector aceleración:

$$\mathbf{v}^e \simeq \widehat{\mathbf{v}}^e = \sum_{i=1}^{NNE} N_i \mathbf{v}_i^e \quad (4.3.2)$$

siendo  $\mathbf{v}_i^e$  el vector velocidad asociado al nodo  $i$  del elemento  $e$

$$\mathbf{a}^e \simeq \widehat{\mathbf{a}}^e = \sum_{i=1}^{NNE} N_i \mathbf{a}_i^e \quad (4.3.3)$$

y  $\mathbf{a}_i^e$  el vector aceleración asociado al nodo  $i$  del elemento  $e$ .

Para la variación de velocidad se utiliza la misma parametrización que para el vector velocidad, es decir:

$$\delta \mathbf{v}^e \simeq \delta \widehat{\mathbf{v}}^e = \sum_{i=1}^{NNE} N_i \delta \mathbf{v}_i^e \quad (4.3.4)$$

donde  $\delta \mathbf{v}_i^e$  es el vector velocidad virtual asociado al nodo  $i$  del elemento  $e$ . Para los desplazamientos virtuales se supondrá que  $\delta \mathbf{u}_i^e = dt \delta \mathbf{v}_i^e$ .

En las siguientes secciones se desarrollan los detalles de cada uno de los términos que componen la ecuación de gobierno y las condiciones de contorno e iniciales del problema.

#### 4.3.1. Término de las fuerzas de inercia

El término que involucra a las fuerzas de inercia presente en la ecuación (4.2.14) es:

$$\int_{\Omega_e} \delta \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{a} \, d\Omega_e \quad (4.3.5)$$

Teniendo en cuenta las parametrizaciones (4.3.4) y (4.3.3) puede escribirse como:

$$\int_{\Omega_e} \delta \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{a} \, d\Omega_e \simeq \sum_{i=1}^{NNE} \sum_{j=1}^{NNE} \left( \delta \mathbf{v}_i^e \int_{\Omega_e} N_i \rho N_j \, d\Omega_e \mathbf{a}_j^e \right) \quad (4.3.6)$$

donde cada integral

$$m_{ij} = \int_{\Omega_e} N_i \rho N_j \, d\Omega_e \quad (4.3.7)$$

es una de las componentes de la matriz de masa consistente. Dentro del programa SIMPACT se utiliza una matriz de masa diagonal por razones de eficiencia de cálculo ya que permite utilizar

algunos esquemas de integración en el tiempo particulares. El proceso de diagonalización de la matriz de masa se conoce como “suma de la fila”, esto es:

$$\begin{aligned} m_{ii} &= \sum_{i=1}^{NNE} \int_{\Omega_e} N_i \rho N_j d\Omega_e \\ &= \int_{\Omega_e} N_i \rho \left( \sum_1^{NNE} N_j \right) d\Omega_e \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

pero por las características de las funciones de forma resulta

$$\sum_1^{NNE} N_j = 1 \quad (4.3.9)$$

entonces

$$m_{ii} = \int_{\Omega_e} N_i \rho d\Omega_e \quad (4.3.10)$$

Resulta para un elemento cuadrilateral de cuatro nodos con dos grados de libertad traslacionales una matriz de masa diagonal de dimensiones 8x8, que al multiplicarse por el vector aceleración del elemento  $e$  de dimensión 8x1 resulta en el vector de fuerzas de inercia de dimensión 8x1

$$\mathbf{f}_I^e \simeq \mathbf{M}^e \mathbf{a}^e \quad (4.3.11)$$

y la expresión

$$\int_{\Omega_e} \delta \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{a} d\Omega_e \simeq [\delta \mathbf{v}^e]^T \mathbf{f}_I^e \quad (4.3.12)$$

### 4.3.2. Término de las fuerzas de amortiguamiento

En el caso del código SIMPACT, se considera un amortiguamiento de tipo viscoso  $v$ . Una forma de expresar el amortiguamiento es utilizar la matriz de amortiguamiento de Rayleigh que establece que sus coeficientes son proporcionales a la matriz de masa y/o a los coeficientes de la matriz de rigidez. En el presente caso se adoptan coeficientes proporcionales a la matriz de masa con

$$v(\mathbf{x}) = -2\alpha \rho(\mathbf{x}) \quad (4.3.13)$$

El término asociado a las fuerzas de amortiguamiento en la ecuación de gobierno es:

$$\int_{\Omega_e} \delta \mathbf{v} \cdot v \mathbf{v} d\Omega_e \quad (4.3.14)$$

teniendo en cuenta las parametrizaciones (4.3.2) y (4.3.4) puede escribirse:

$$\int_{\Omega_e} \delta \mathbf{v} \cdot v \mathbf{v} d\Omega_e \simeq \sum_{i=1}^{NNE} \sum_{j=1}^{NNE} \left( \delta \mathbf{v}_i^e \int_{\Omega_e} N_i (-2\alpha \rho) N_j d\Omega_e \mathbf{v}_j^e \right) \quad (4.3.15)$$

reordenando

$$\sum_{i=1}^{NNE} \sum_{j=1}^{NNE} \left( \delta \mathbf{v}_i^e (-2\alpha) \int_{\Omega_e} N_i \rho N_j d\Omega_e \mathbf{v}_j^e \right) = [\delta \mathbf{v}^e]^T (-2\alpha) \mathbf{M}^e \mathbf{v}^e \quad (4.3.16)$$

donde la integral

$$m_{ij} = \int_{\Omega_e} N_i \rho N_j d\Omega_e \quad (4.3.17)$$

es la matriz de masa del elemento. Nuevamente se utiliza la matriz de masa diagonalizada, de la sección anterior, en reemplazo de la matriz de masa consistente. Entonces:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \delta \mathbf{v} \cdot v \mathbf{v} \, d\Omega_e &\simeq [\delta \mathbf{v}^e]^T (-2\alpha) \mathbf{M}^e \mathbf{v}^e \\ &\simeq [\delta \mathbf{v}^e]^T \mathbf{C}^e \mathbf{v}^e \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

donde las fuerzas de amortiguamiento son:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_A^e &\simeq -2\alpha \mathbf{M}^e \mathbf{v}^e \\ &\simeq \mathbf{C}^e \mathbf{v}^e \end{aligned} \quad (4.3.19)$$

queda entonces la expresión

$$\int_{\Omega_e} \delta \mathbf{v} \cdot v \mathbf{v} \, d\Omega_e \simeq [\delta \mathbf{v}^e]^T \mathbf{f}_A^e \quad (4.3.20)$$

El coeficiente de amortiguamiento  $\alpha$  se calcula con la fórmula

$$\alpha = \frac{1}{t_r} \ln \left( \frac{100}{f_p} \right) \quad (4.3.21)$$

donde  $f_p$  es el porcentaje de amplitud de las vibraciones amortiguadas  $A$  con respecto a la amplitud de vibraciones libres  $A_0$  a obtener luego de un tiempo  $t_r$ .

$$f_p [\%] = \frac{A}{A_0} 100 \quad (4.3.22)$$

Para un elemento cuadrilateral de cuatro nodos con dos grados de libertad traslacionales, con una matriz de masa diagonal de dimensiones 8x8 que al multiplicarse por el vector velocidad del elemento  $e$  de dimensión 8x1 resulta en el vector de fuerzas de amortiguamiento del elemento de dimensión 8x1.

### 4.3.3. Término de las fuerzas másicas

Se trata del término que tiene en cuenta las fuerzas actuantes por unidad de masa  $\mathbf{b}$ . Dentro de este grupo interesa particularmente el peso propio del material contenido en el volumen  $\Omega_e$ . Para el caso de peso propio dentro del código SIMPACT

$$\mathbf{b} = f(t) \mathbf{g} \quad (4.3.23)$$

donde  $f(t)$  es una función que permite escalar las cargas y  $\mathbf{g}$  es el vector de aceleración de la gravedad (cuyas componentes están expresadas respecto del sistema de referencia global del problema).

El término de la ecuación de gobierno asociado a las fuerzas por unidad de masa es

$$\int_{\Omega_e} \delta \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{b} \, d\Omega_e \quad (4.3.24)$$

adoptando la parametrización (4.3.4) para  $\delta \mathbf{v}$  y para  $\mathbf{b}$  la siguiente

$$\mathbf{b} \simeq \hat{\mathbf{b}} = \sum_{i=1}^{NNE} N_i \mathbf{b}_i^e \quad (4.3.25)$$

se puede entonces escribir

$$\int_{\Omega_e} \delta \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{b} d\Omega_e \simeq \sum_{i=1}^{NNE} \sum_{j=1}^{NNE} \left( \delta \mathbf{v}_i^e \int_{\Omega_e} N_i \rho N_j d\Omega_e \mathbf{b}_j^e \right) \quad (4.3.26)$$

donde nuevamente queda definida la matriz de masa consistente a la que se reemplaza por la matriz de masa diagonalizada, queda entonces:

$$\int_{\Omega_e} \delta \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{b} d\Omega_e \simeq [\delta \mathbf{v}_i^e]^T \mathbf{M}^e \mathbf{b}_i^e \quad (4.3.27)$$

donde la fuerza másica

$$\mathbf{f}_M^e \simeq \mathbf{M}^e \mathbf{b}_i^e \quad (4.3.28)$$

y

$$\int_{\Omega_e} \delta \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{b} d\Omega_e \simeq [\delta \mathbf{v}_i^e]^T \mathbf{f}_M^e \quad (4.3.29)$$

Para un elemento cuadrilateral de cuatro nodos con dos grados de libertad traslacionales, con una matriz de masa diagonal de dimensiones 8x8 que al multiplicarse por el vector de fuerza por unidad de volumen del elemento  $e$  de dimensión 8x1 resulta en el vector de fuerzas másicas de dimensión 8x1.

#### 4.3.4. Término de las fuerzas resistentes internas

Se considera que las tensiones  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$  están definidas localmente en cada  $(\mathbf{x}, t)$  en  $\Omega$  y  $t > 0$  por un modelo constitutivo inelástico que define el incremento (o tasa) de tensiones en función del incremento (o tasa) de deformaciones, es decir:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) \quad (4.3.30)$$

que reemplaza al modelo elástico lineal que relaciona las tensiones con las deformaciones por la expresión:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) \quad (4.3.31)$$

El término de la ecuación de gobierno

$$\int_{\Omega_e} \boldsymbol{\sigma} : \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega_e \quad (4.3.32)$$

no depende de la ecuación constitutiva adoptada. Donde:

$$\delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\delta} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.3.33)$$

Adoptando la parametrización (4.3.4)

$$\boldsymbol{\delta} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij} \simeq \frac{1}{2} \left( \frac{\partial N_m}{\partial x_j} \delta v_i^m + \frac{\partial N_m}{\partial x_i} \delta v_j^m \right) \quad (4.3.34)$$

que en forma matricial

$$\boldsymbol{\delta} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij} \simeq \frac{1}{2} \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial N_m}{\partial x_j} & \frac{\partial N_m}{\partial x_i} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \delta v_i^m \\ \delta v_j^m \end{array} \right) \quad (4.3.35)$$

$$\delta \dot{\varepsilon}_{ij} \simeq \frac{1}{2} \left( \frac{\partial N_m}{\partial x_j} \quad \frac{\partial N_m}{\partial x_i} \right) \begin{pmatrix} \delta u_i^m \\ \delta u_j^m \end{pmatrix} dt \quad (4.3.36)$$

donde  $m = 1..NNE$  y  $i, j = 1, 2$ . Si se escribe el tensor de tensiones  $\boldsymbol{\sigma}$  en forma matricial  $[\boldsymbol{\sigma}]$  y también escribe en forma matricial el tensor variación de deformaciones, a partir de (4.3.35) se puede escribir:

$$\begin{aligned} [\delta \dot{\varepsilon}]^e &= \mathbf{B}^e [\delta \mathbf{v}]^e \\ &= \mathbf{B}^e [\delta \mathbf{u}]^e dt \end{aligned} \quad (4.3.37)$$

entonces

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\sigma} : \delta \dot{\varepsilon} d\Omega_e &\simeq \int_{\Omega_e} [\boldsymbol{\sigma}]^e \mathbf{B}^e [\delta \mathbf{v}]^e d\Omega_e \\ &\simeq [\delta \mathbf{v}^e]^T \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}^e]^T [\boldsymbol{\sigma}]^e d\Omega_e \end{aligned} \quad (4.3.38)$$

Para un elemento cuadrilátero de cuatro nodos con dos grados de libertad traslacionales, el vector de velocidades virtuales tendrá 8 (2 NNE) componentes, la matriz  $\mathbf{B}_i^e$  ( $i = 1..NNE$ ) tendrá dimensiones  $2NNE \times ND$  y la forma vectorial del tensor de tensiones tendrá dimensión  $ND$ . Por lo tanto el vector de fuerzas resistentes internas tendrá dimensión  $2NNE$

$$\mathbf{f}_{int} = \sum_{i=1}^{NNE} \left( \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}_i^e]^T [\boldsymbol{\sigma}]^e d\Omega_e \right) \quad (4.3.39)$$

entonces

$$\int_{\Omega_e} \boldsymbol{\sigma} : \delta \dot{\varepsilon} d\Omega_e \simeq [\delta \mathbf{v}^e]^T \mathbf{f}_{int}^e \quad (4.3.40)$$

#### 4.3.5. Término de las fuerzas prescritas en el contorno

El término de la ecuación de gobierno

$$\int_{\Gamma_{\sigma^e}} \delta \mathbf{v}^e \cdot \mathbf{f}^e d\Gamma \quad (4.3.41)$$

involucra a las fuerzas (o tensiones) prescritas en el contorno  $\Gamma_{\sigma}$ . Establecido el tipo de elemento, cuadrilátero de cuatro nodos, uno o más de sus lados podrá pertenecer al contorno del dominio donde se tienen fuerzas prescritas ( $\Gamma_{\sigma}^e \in \Gamma_{\sigma}$ ) entonces, se discretiza la fuerza actuante como

$$\mathbf{f}^e \simeq \phi_k(\mathbf{x}) \mathbf{f}_k + \phi_l(\mathbf{x}) \mathbf{f}_l \quad (4.3.42)$$

donde  $\phi_k(\mathbf{x})$  son funciones que permiten obtener la forma paramétrica de la fuerza que actúa en el contorno del elemento definido por los nodos  $k$  y  $l$ , siendo  $\mathbf{f}_k$  y  $\mathbf{f}_l$  los valores nodales de la fuerza que actúa en el contorno.

$$\mathbf{f}_{\Gamma_{\sigma}^e}^e = \int_{\Gamma_{\sigma^e}} \delta \mathbf{v}^e \cdot (\phi_k(\mathbf{x}) \mathbf{f}_k + \phi_l(\mathbf{x}) \mathbf{f}_l) d\Gamma \quad (4.3.43)$$

Adoptando funciones  $\phi_k(\mathbf{x})$  lineales, se obtendrá un vector  $\mathbf{f}_{\Gamma_{\sigma}^e}^e$  cuya dimensión será igual al número de nodos del elemento multiplicado por el número de grados de libertad de cada nodo ( $4 \times 2$ ) que tendrá componentes no nulas en los grados de libertad asociados a los nodos  $k$  y  $l$  del elemento que definen el lado que pertenece a  $\Gamma_{\sigma}$ .

### 4.3.6. Condiciones de contorno

#### Desplazamientos prescritos

La condición de desplazamientos prescritos (condición esencial)

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \quad \text{para } \mathbf{x} \in \Gamma_u, [0, T] \quad (4.3.44)$$

es de cumplimiento inmediato por ser las funciones de forma  $N_i(\mathbf{x}) = 1$  si  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i$ , por lo cual  $N_i(\mathbf{x})\bar{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x})$ . Como consecuencia por cada componente del vector de desplazamiento que sea prescrita se tiene una disminución del número de incógnitas del problema global.

#### Restricciones multipunto

Cuando en una estructura los apoyos tienen restringidos sus desplazamientos en direcciones distintas a las direcciones de los ejes globales de referencia de todo el sistema, como el nodo  $i$  de la Figura [4.3.1]

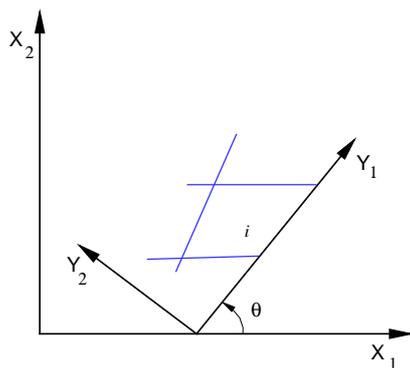


Figura 4.3.1: Restricciones multipunto

la inclinación del apoyo obliga al nodo a desplazarse en la dirección del eje  $Y_1$  siendo nulo el desplazamiento en la dirección  $Y_2$ . Los desplazamientos del nodo  $i$  en las direcciones globales y en las direcciones de contorno se relacionan por la transformación:

$$\mathbf{u}^i = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{L}^i \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \mathbf{L}^i \mathbf{v}^i \quad (4.3.45)$$

siendo  $\mathbf{u}^i$  el vector desplazamiento del nodo  $i$  según los ejes globales  $X_j$ ,  $\mathbf{v}^i$  es el vector de desplazamientos según los ejes  $Y_k$  y  $\mathbf{L}^i$  la matriz de transformación:

$$\mathbf{L}^i = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4.3.46)$$

donde  $\theta$  es el ángulo que forman las direcciones positivas de los ejes  $X_1$  e  $Y_1$ . Como  $\mathbf{L}^i$  es ortonormal

$$\mathbf{v}^i = \mathbf{L}^{iT} \mathbf{u}^i \quad (4.3.47)$$

como  $v_2 = 0$  se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= -\sin \theta u_1 + \cos \theta u_2 & (4.3.48) \\ u_1 &= \frac{\cos \theta}{(-\sin \theta)} u_2 \\ u_1 &= \text{factor } u_2 \end{aligned}$$

La matriz de transformación  $\mathbf{L}$  también se utiliza para transformar las ecuaciones de equilibrio del nodo  $i$

$$\begin{aligned} f_{res\ 1} u_1 &= 0 & (4.3.49) \\ f_{res\ 1} \text{factor } u_2 &= 0 \\ f_{res\ 2} u_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$[f_{res\ 1} \text{factor} + f_{res\ 2}] u_2 = 0 \quad (4.3.50)$$

En este caso se elimina una incógnita del sistema (similar a un desplazamiento prescrito) y se modifica el vector de fuerza residual  $\mathbf{f}_{res}$  del grado de libertad del nodo asociado (la interpretación de fuerza residual se da en (4.3.64)).

### Condición de contacto mecánico

El programa SIMPACT - DELTA, con una integración explícita de las ecuaciones de equilibrio dinámicas tiene implementado un algoritmo de contacto con una formulación que utiliza penalización.

Utilizar el método de penalización para imponer las restricciones de contacto es eficiente en la medida en que la elección del parámetro de penalización no reduzca el paso de tiempo crítico determinado por la malla del modelo de elementos finitos [Zhong, 1993]. Por otra parte el parámetro de penalización debe ser lo suficientemente pequeño para satisfacer la condición de estabilidad en el procedimiento explícito. La exactitud con la cual se cumplan las condiciones de contacto depende de la elección del valor de penalización, pues un valor muy pequeño hará que no se cumpla la condición de no interpenetración entre los cuerpos en contacto dando grandes penetraciones y errores inaceptables. Un valor muy grande del coeficiente de penalización produce problemas numéricos en el proceso de solución e incluso puede impedir que se encuentre la solución. En un procedimiento explícito un incremento en el parámetro de penalización puede resultar en una disminución en el paso de tiempo crítico.

Se presentan a continuación las expresiones involucradas debido a que se incorporaron algunas modificaciones, por una parte para tener la posibilidad de una relación no lineal para calcular las fuerzas de contacto, y por otra parte se adecuó el algoritmo a la incorporación o eliminación de elementos en el modelo (durante el llenado y vaciado respectivamente). También se incorporó la posibilidad de asignar los coeficientes de penalización a cada segmento de la superficie maestra de contacto.

Siguiendo a Crisfield [Crisfield, 1998] las relaciones de contacto se definen en un sistema corrotacional. El sistema corrotacional se define con dos versores unitarios en problemas bidimensionales,

uno de ellos tangente a la zona de contacto y otro normal a la misma. La zona de contacto involucra un segmento maestro  $IJ$  y un nodo esclavo  $S$  que impacta al segmento como se muestra esquemáticamente en la Figura [4.3.2].

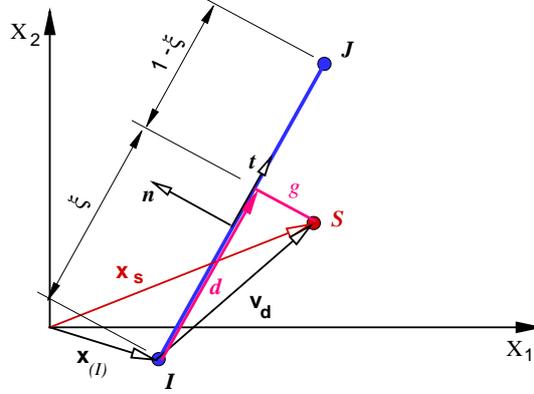


Figura 4.3.2: Superficie maestra y nodo esclavo (condición de contacto)

El versor tangente a la superficie maestra se obtiene a partir de las coordenadas de los nodos  $I$  y  $J$  que la definen (el vector posición del nodo  $J$  se omitió en la figura para mayor claridad del esquema):

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{x}_{(J)} - \mathbf{x}_{(I)}}{\|\mathbf{x}_{(J)} - \mathbf{x}_{(I)}\|} = \frac{\mathbf{t}_1}{\|\mathbf{t}_1\|} \quad (4.3.51)$$

Conocidas las componentes del versor  $\mathbf{t}$ , el versor perpendicular a la superficie maestra  $\mathbf{n}$  también es conocido. Dado el vector posición del nodo esclavo  $\mathbf{x}_s$  y del nodo  $I$  puede calcularse el vector auxiliar  $\mathbf{v}_d$  como la diferencia:

$$\mathbf{v}_d = \mathbf{x}_s - \mathbf{x}_{(I)} \quad (4.3.52)$$

La discrepancia (gap)  $g$  se puede ahora calcular haciendo el producto interno entre el versor normal  $\mathbf{n}$  y el vector auxiliar  $\mathbf{v}_d$ :

$$g = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_d \quad (4.3.53)$$

y el vector tangente  $\mathbf{d}$  (fija la posición del nodo esclavo en el sistema corrotacional  $\xi$  del segmento maestro, siendo  $\xi = \|\mathbf{d}\| / \|\mathbf{x}_{(J)} - \mathbf{x}_{(I)}\|$ )

$$\mathbf{d} = \mathbf{v}_d - g\mathbf{n} \quad (4.3.54)$$

La componente perpendicular a la superficie maestra de la fuerza de contacto se calcula como:

$$f_{cn} = -\alpha_n g \quad (4.3.55)$$

siendo  $\alpha_n$  el coeficiente de penalización normal.

Con el fin de evitar cambios bruscos en el valor de la fuerza de contacto, especialmente durante la etapa de vaciado, puede utilizarse una relación no lineal entre el gap y la fuerza normal de contacto. Esta opción requiere de un parámetro extra que puede interpretarse como un gap máximo  $g_M$ . El parámetro de penalización puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \alpha_n \left( \frac{1+g}{g_M} \right) \quad \text{si } g_M \neq 0 \\ \alpha_n &= \alpha_n \quad \text{si } g_M = 0 \end{aligned} \quad (4.3.56)$$

Si el coeficiente de fricci3n que se est3 considerando es no nulo, se introduce la ley de fricci3n de Coulomb de manera similar a un “algoritmo de plasticidad” con una regla de flujo no asociada, cuya funci3n de fluencia establece:

$$f_f = |f_{ct}| + \mu f_{cn} = 0 \quad (4.3.57)$$

donde  $f_{ct}$  es la fuerza tangencial,  $\mu = \tan \phi_w$  es el coeficiente de fricci3n entre los cuerpos en contacto y  $f_{cn}$  es la fuerza normal de contacto calculada anteriormente. Otra forma de expresar la condici3n es  $|f_{ct}| \leq \mu f_{cn} = (f_{ct})_{MAX}$ . La fuerza tangencial en el contacto  $f_{ct}$  se calcula:

$$f_{ct} = \alpha_t t_s \quad (4.3.58)$$

donde  $\alpha_t$  es el coeficiente de penalizaci3n tangente y  $t_s$  es el deslizamiento total del nodo esclavo respecto de la direcci3n tangente a la superficie maestra. El deslizamiento  $t_s$  se calcula en funci3n de las posiciones del nodo esclavo en el paso anterior y en el paso actual en el sistema corrotacional  $\xi$  (en el caso que el nodo haya estado en contacto con el mismo segmento maestro en el paso previo).

$$\Delta \xi = \xi_{n+1} - \xi_n \quad (4.3.59)$$

$$t_s = \|\mathbf{t}_1 \cdot \Delta \xi\|$$

Una vez calculada la fuerza tangente se verifica si se cumple la condici3n dada por (4.3.57). Si  $f_{ct} \leq \mu f_{cn} = (f_{ct})_{MAX}$  entonces ese valor es adoptado. Si por el contrario  $f_{ct} > \mu f_{cn}$ , se recurre a la regla de flujo que establece  $\partial f_f / \partial f_{ct} = \dot{\gamma} t_s$  y  $\partial f_f / \partial f_{cn} = 0$ , lo cual lleva a que:

$$\begin{aligned} f_{ct} &= \mu f_{cn} & (4.3.60) \\ t_s^e &= \frac{\mu f_{cn}}{\alpha_t} \\ t_s^p &= t_s - t_s^e \\ \xi_{n+1} &= \xi_{n+1} - \Delta \xi \frac{t_s^e}{t_s} \end{aligned}$$

Si en el paso previo hubo contacto pero no deslizamiento relativo entonces en el presente paso se utiliza el coeficiente de fricci3n est3tico  $\mu = \mu_s$ . Si en el paso previo hubo contacto y deslizamiento entonces en el presente paso el coeficiente de fricci3n a utilizar es el cin3tico  $\mu = \mu_k$ . (La inclusi3n del coeficiente de fricci3n cin3tico es relevante para la etapa de vaciado).

Calculadas las componentes de la fuerza de contacto  $\mathbf{f}_c$  asociadas al nodo esclavo  $s$ , se obtienen sus componentes respecto del sistema global de referencia (para ello se utilizan los versores normal y tangente a la superficie de contacto) y se ensamblan por el procedimiento est3ndar de elementos finitos en el vector global de fuerzas de contacto. (El c3digo tiene en cuenta si el contacto en el paso anterior del nodo esclavo se produjo con el mismo segmento maestro o con otro).

#### 4.3.7. Proceso de ensamblaje

A partir de (4.3.12), (4.3.20), (4.3.29), (4.3.40) y  $\mathbf{f}_{\Gamma\sigma}^e$  se obtiene la forma discreta de la ecuaci3n de gobierno (4.2.14) para cada subdominio, teniendo en cuenta (4.2.15) y por propiedad de las integrales  $\left( \int_{\Omega} = \sum \int_{\Omega_e} \right)$  se procede al ensamble de las contribuciones de cada elemento

$$\sum_{e=1}^{NE} A (\delta \mathbf{v}_i^e \mathbf{f}_I^e + \delta \mathbf{v}_i^e \mathbf{f}_A^e + \delta \mathbf{v}^e \mathbf{f}_{int}^e - \delta \mathbf{v}_i^e \mathbf{f}_M^e - \delta \mathbf{v}^e \mathbf{f}_{\Gamma\sigma}^e) = 0 \quad (4.3.61)$$

donde  $\overset{NE}{A}_{e=1}$  representa el proceso de ensamble estándar de elementos finitos, se obtiene la forma discreta de la ecuación de gobierno (4.2.13) en todo el dominio  $\Omega$ , a este sistema se le suma la contribución del vector proveniente de las condiciones de contacto mecánico  $\mathbf{f}_c$  entonces para todo el sistema se tiene:

$$\delta \mathbf{v} (\mathbf{M}\mathbf{a} + \mathbf{C}\mathbf{v} + \mathbf{f}_{int} - \mathbf{f}_M - \mathbf{f}_{\Gamma_\sigma} + \mathbf{f}_c) = 0 \quad (4.3.62)$$

denominando

$$\mathbf{f}_{ext} = \mathbf{f}_M + \mathbf{f}_{\Gamma_\sigma} \quad (4.3.63)$$

puede escribirse

$$\delta \mathbf{v} (\mathbf{M}\mathbf{a} + \mathbf{C}\mathbf{v} + \mathbf{f}_{int} - \mathbf{f}_{ext} + \mathbf{f}_c) = 0 \quad (4.3.64)$$

a las que se aplica las condiciones de borde de desplazamientos prescritos y condiciones multipunto. El contenido del paréntesis en (4.3.64) es la fuerza residual fuera de equilibrio.

#### 4.3.8. Resumen del proceso de solución numérico

1. **La discretización espacial.** El dominio de interés  $\Omega$  es subdividido en subdominios o elementos  $\Omega_e$  para obtener la contraparte discreta de la ecuación de gobierno (4.2.13).
  - a) El problema se enfoca a un elemento típico  $\Omega_e$ . Para un dado campo de tensiones  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\mathbf{x})$  se evalúa la ecuación (4.2.14).
  - b) Se ensamblan las contribuciones de todos los elementos y se determina si el sistema se encuentra en equilibrio (se satisface (4.2.13)) en el estado  $\{\mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\mathbf{x})\}$
  - c) Se determina la corrección al campo de desplazamientos y se evalúa el estado asociado  $\{\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p(\mathbf{x}), \alpha_{n+1}(\mathbf{x})\}$  de manera consistente con el modelo constitutivo independiente de las velocidades de deformación.
2. **El algoritmo de integración para plasticidad independiente de las tasas de deformación,** puede establecerse como:
  - a) Sea  $\mathbf{x} \in \Omega$  un dado punto de interés en el cuerpo que obedece el modelo constitutivo independiente de la velocidad (en el cual se quiere calcular una aproximación a las tensiones que aparecen en la ecuación de gobierno)
  - b) Se asume que el estado local del cuerpo en el punto  $\mathbf{x} \in \Omega$  en el tiempo actual  $t_n$  está completamente definido. Por esto se entiende que los valores de  $\{\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}(\mathbf{x})\}$  son conocidos y se adoptan valores de prueba para las variables de estado  $\{\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p(\mathbf{x}), \alpha_{n+1}(\mathbf{x})\}$  (idénticos a  $\{\boldsymbol{\varepsilon}_n^p(\mathbf{x}), \alpha_n(\mathbf{x})\}$ ) por considerar que el estado en  $t_{n+1}$  es inicialmente elástico, lo que equivale a considerar que el estado plástico está “congelado” en el estado  $t_n$  y que el estado de tensiones  $\boldsymbol{\sigma}_n(\mathbf{x}) = \mathbf{D}[\boldsymbol{\varepsilon}_n(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p(\mathbf{x})]$  también es conocido.
  - c) Suponiendo que se da un incremento en la deformación total en el punto  $\mathbf{x}$ , a la que se denomina  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ , el cual induce el estado en el tiempo  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ . El problema es actualizar las variables básicas al tiempo  $t_{n+1}$  de manera consistente con el modelo constitutivo.

3. **Integración en el tiempo.** Las derivadas de los desplazamientos respecto del tiempo son reemplazadas por aproximaciones algorítmicas compatibles.

En el programa SIMPACT la integración de (4.3.62) en el tiempo se lleva a cabo por el método de diferencias centrales, permitiendo el algoritmo utilizar pasos de tiempo variables. Conocidos los valores que intervienen en (4.3.62) para una cierta configuración en el tiempo  $t_n$  es posible obtener la configuración en el tiempo  $t_{n+1} = t_n + \Delta^{(n)}t$  donde  $\Delta^{(n)}t$  es el incremento actual de tiempo.

$$\mathbf{M}\mathbf{a} + \mathbf{C}\mathbf{v} + \mathbf{f}_{int} - \mathbf{f}_{ext} + \mathbf{f}_c = 0 \quad (4.3.65)$$

en esta expresión las matrices de masa  $\mathbf{M}$  y de amortiguamiento  $\mathbf{C}$  son diagonales, entonces puede escribirse para un determinado grado de libertad  $i$  del problema

$$m_{ii}a_i + c_{ii}v_i + f_i^{int} + f_i^{ext} + f_i^c = 0 \quad (4.3.66)$$

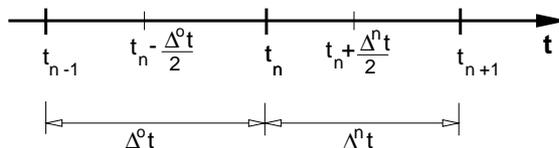


Figura 4.3.3: Subintervalos para la integración en el tiempo

Para resolver la ecuación (4.3.65) utilizando diferencias centrales, el dominio en el tiempo  $[0, T]$  se divide en subdominios como en un procedimiento de solución incremental paso a paso [Zhong, 1993]. Con referencia a los valores en la Figura[4.3.3], la aceleración en el tiempo  $t_n$  puede calcularse con la expresión

$${}^{t_n}\mathbf{a} = \frac{(\mathbf{v}_{t_n+\Delta^n t} - \mathbf{v}_{t_n-\Delta^o t})}{(\Delta^o t + \Delta^n t)/2} \quad (4.3.67)$$

$${}^{t_n}\mathbf{a} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{C}\mathbf{v} + \mathbf{f}_{int} - \mathbf{f}_{ext} + \mathbf{f}_c) \quad (4.3.68)$$

donde

$${}^{t_n-\Delta^o t}\mathbf{v} = \frac{{}^{t_n}\mathbf{v} - {}^{t_{n-1}}\mathbf{v}}{\Delta^o t} \quad (4.3.69)$$

$${}^{t_n+\Delta^n t}\mathbf{v} = \frac{{}^{t_{n+1}}\mathbf{v} - {}^{t_n}\mathbf{v}}{\Delta^n t} \quad (4.3.70)$$

Combinando las ecuaciones (4.3.67) a (4.3.70) se obtiene

$${}^{t_{n+1}}\mathbf{u} = {}^{t_n}\mathbf{u} + {}^{t_n-\Delta^o t}\mathbf{v}\Delta t + \frac{1}{2} {}^{t_n}\mathbf{a}(\Delta^o t + \Delta^n t) \quad (4.3.71)$$

La velocidad en  $t_n$  puede calcularse como

$${}^{t_n}\mathbf{v} = \frac{{}^{t_{n+1}}\mathbf{u} - {}^{t_{n-1}}\mathbf{u}}{(\Delta^o t + \Delta^n t)} \quad (4.3.72)$$

Si  $t_n = 0$  por condición inicial de velocidad  ${}^0\mathbf{v}$  y adoptando  $\Delta^o t = -\Delta^n t$  se tiene

$${}^0\mathbf{v} = \frac{{}^{t_{n+1}}\mathbf{u} - {}^{t_{n-1}}\mathbf{u}}{2\Delta^n t} \quad (4.3.73)$$

a partir de ésta se tiene el valor

$${}^{t_{n-1}}\mathbf{u} = {}^{t_{n-1}}\mathbf{u} - {}^0\mathbf{v}2\Delta^nt \quad (4.3.74)$$

entonces, haciendo uso de la condición inicial en desplazamientos  ${}^0\mathbf{u}$

$$\begin{aligned} -(\Delta^nt)/2\mathbf{v} &= \frac{{}^0\mathbf{u} - {}^{t_{n-1}}\mathbf{u}}{\Delta^nt} \\ &= {}^0\mathbf{u} + {}^0\mathbf{v}2\Delta^nt - {}^{t_{n-1}}\mathbf{u} \end{aligned} \quad (4.3.75)$$

y

$${}^0\mathbf{a} = \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{C}^0\mathbf{v} + {}^0\mathbf{f}_{int} - {}^0\mathbf{f}_{ext} + {}^0\mathbf{f}_c) \quad (4.3.76)$$

por lo cual (4.3.71) para  $t_n = 0$

$${}^{t_{n+1}}\mathbf{u} = {}^0\mathbf{u} + {}^0\mathbf{v}\Delta t + \frac{1}{2} {}^0\mathbf{a} (\Delta^nt)^2 \quad (4.3.77)$$

## 4.4. Elemento finito implementado

### 4.4.1. Estados bidimensionales

Para el **estado de deformación plana**, la hipótesis simplificativa es que las deformaciones referidas a la dirección  $X_3$  son nulas, es decir  $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{32} = 0$ , las componentes no nulas son:  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$  y  $\varepsilon_{12}$ . Las mismas consideraciones se aplican a las deformaciones virtuales. Las componentes no nulas del tensor de tensiones son:  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$  y  $\sigma_{33}$ .

La componente  $\sigma_{33}$  es no nula por estar relacionada con las deformaciones  $\varepsilon_{11}$  y  $\varepsilon_{22}$ , para un material elástico e isótropo la expresión de las tensiones en función de las deformaciones es:

$$\sigma_{ij} = \left( K - \frac{2G}{3} \right) \delta_{ij} \varepsilon_{mm} + 2G \varepsilon_{ij} \quad (4.4.1)$$

particularizando para  $\sigma_{33}$  del estado de deformación plana:

$$\sigma_{33} = \left( K - \frac{2G}{3} \right) (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \quad (4.4.2)$$

El incremento de la tensión producido por las deformaciones incrementales entre el paso  $n$  y el paso  $n + 1$

$$\Delta\sigma_{33} = \left( K - \frac{2G}{3} \right)_n (\Delta\varepsilon_{11} + \Delta\varepsilon_{22}) \quad (4.4.3)$$

donde  $\delta_{ij}$  es el delta de Kroenecker,  $K$  es el módulo volumétrico (relaciona las componentes esféricas de los tensores de tensiones y de deformaciones);  $G$  módulo elástico transversal (relaciona las componentes desviadoras de los tensores de tensiones y de deformaciones);  $E$  es el módulo de Young y  $\nu$  es la relación de Poisson.  $(K, G)$  se relacionan con  $(E, \nu)$  por las expresiones:

$$\begin{aligned} K &= \frac{E(p_n)}{3(1-2\nu)} \\ G &= \frac{E(p_n)}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

El subíndice  $n$  en el paréntesis que encierra a los módulos en la expresión (4.4.3), significa que los módulos son calculados con el valor convergido de la presión al final del paso  $n$ .

Para el **estado de axilsimetría** la deformación anular de un anillo diferencial se expresa como:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{anular} &= \varepsilon_{33} = \frac{2\pi r_n - 2\pi r_0}{2\pi r_0} \\ &= \frac{r_n - r_0}{r_0}\end{aligned}\quad (4.4.5)$$

Se adopta como eje de simetría de rotación al eje  $X_2$ , entonces la coordenada radial  $r$  coincide con la coordenada  $x_1$ . Entonces:

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_{33} &= \frac{x_1^{n+1} - x_1^n}{x_1^n} \\ &= \frac{\Delta u_1}{x_1^n}\end{aligned}\quad (4.4.6)$$

y las deformaciones  $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{32} = 0$  por condición de simetría. Las componentes no nulas del tensor de tensiones para el estado axilsimétrico son:  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$  y  $\sigma_{33}$ .

#### 4.4.2. Sistemas de referencia del elemento

Las parametrizaciones (4.3.1) a (4.3.4) se reemplazan por expresiones donde las funciones de forma son expresadas en función de las coordenadas naturales del elemento maestro. Las parametrizaciones utilizadas son:

$$\mathbf{x}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N^i(\xi, \eta) \mathbf{x}^i \quad (4.4.7)$$

$$\mathbf{u}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N^i(\xi, \eta) \mathbf{u}^i \quad (4.4.8)$$

$$\mathbf{v}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N^i(\xi, \eta) \mathbf{v}^i \quad (4.4.9)$$

$$\mathbf{a}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N^i(\xi, \eta) \mathbf{a}^i \quad (4.4.10)$$

$$\delta\mathbf{v}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N^i(\xi, \eta) \delta\mathbf{v}^i \quad (4.4.11)$$

donde:

- $\xi, \eta$  : son las coordenadas naturales del elemento “maestro”
- $N^i(\xi, \eta)$  : es la función de forma asociada al nodo  $i$  del elemento “maestro”
- $\mathbf{x}^i$  : es la coordenada actual del nodo  $i$  en un sistema cartesiano global fijo
- $\mathbf{u}^i$  : desplazamiento del nodo  $i$  respecto del sistema cartesiano global fijo
- $\mathbf{v}^i$  : velocidad del nodo  $i$  respecto del sistema cartesiano global fijo
- $\mathbf{a}^i$  : aceleración del nodo  $i$  respecto del sistema cartesiano global fijo
- $\delta\mathbf{v}^i$  : es el vector velocidad virtual del nodo  $i$  respecto del sistema cartesiano global fijo

En la Figura [4.4.1] se muestran los sistemas de referencia utilizados en la formulación del elemento siendo  $X_1$  y  $X_2$  los ejes globales fijos de referencia del problema;  $\bar{x}_1$  y  $\bar{x}_2$  los ejes corrotacionales definidos en cada punto de integración de Gauss y  $\xi$  y  $\eta$  son los ejes del elemento maestro estándar. En cada punto de integración de Gauss se define el sistema corrotacional mediante dos vectores unitarios  $\mathbf{t}^1$  y  $\mathbf{t}^2$  que corresponden a las direcciones de los ejes corrotacionales  $\bar{x}_1$  y  $\bar{x}_2$  respectivamente. El versor  $\mathbf{t}^1$  se define paralelo al vector  $\mathbf{x}_{t\xi}$  adoptando al versor  $\mathbf{t}^2$  perpendicular al  $\mathbf{t}^1$ .

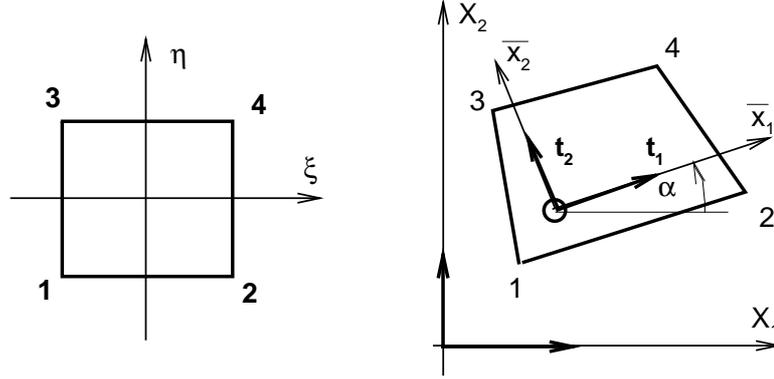


Figura 4.4.1: Sistemas de referencia

Para ambos estados planos, las componentes de los vectores de incremento de desplazamiento y de desplazamientos virtuales son :

$$\Delta \mathbf{u} = (\Delta u_1, \Delta u_2) \quad (4.4.12)$$

$$\delta \mathbf{u} = (\delta u_1, \delta u_2)$$

Se considera que los incrementos de deformaciones son pequeños, entonces:

$$\Delta \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.4.13)$$

Se considera que  $x_1^n = x_{10}$  es la coordenada respecto del eje  $X_1$  en la configuración de referencia en  $t = t_n$  y  $x_1^{n+1}$  es la coordenada global del mismo punto en la configuración  $n + 1$  ( $t = t_{n+1}$ ) (formulación Lagrangeana actualizada).

A continuación se explicitan los detalles para calcular el vector de fuerzas internas:

$$\mathbf{f}_{int}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^e [\boldsymbol{\sigma}]^e d\Omega \quad (4.4.14)$$

para un elemento típico,  $\Omega^e$ . Siendo que se adopta una formulación Lagrangeana actualizada en la cual las deformaciones y las tensiones han sido referidas al sistema corrotacional, es necesario obtener las derivadas de las funciones de forma  $N^i(\xi, \eta)$  respecto de las coordenadas del elemento maestro respecto del sistema global  $X_1$  y  $X_2$  y respecto del sistema corrotacional  $\bar{x}_1$  y  $\bar{x}_2$ .

En las siguientes subsecciones, se define la matriz de transformación entre el sistema global y el corrotacional y se establece el procedimiento para calcular las derivadas de las funciones de forma

respecto de los dos sistemas mencionados. Obtenidas las derivadas necesarias es posible evaluar la matriz de deformación desplazamiento y las tensiones con el fin de obtener el vector  $\mathbf{f}_{int}^e$ .

#### 4.4.3. Matriz de transformación entre los sistemas global y corrotacional

Los versores que definen las direcciones de los ejes corrotacionales se calculan a partir de la expresión (4.4.7), haciendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^1 &= \frac{\frac{\partial \mathbf{x}(\xi, \eta)}{\partial \xi}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{x}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right\|} \\ \mathbf{t}^2 &= \begin{bmatrix} -t_2^1 \\ t_1^1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.4.15)$$

explícitamente:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} = \frac{\partial N}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} + \frac{\partial N}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \quad (4.4.16)$$

que junto con

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} = \frac{\partial N}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \eta} + \frac{\partial N}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \quad (4.4.17)$$

permiten obtener las expresiones de la matriz Jacobiana:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial \mathbf{x}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (4.4.18)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^1}{\partial \xi} & \frac{\partial N^1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N^2}{\partial \xi} & \frac{\partial N^2}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N^3}{\partial \xi} & \frac{\partial N^3}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N^4}{\partial \xi} & \frac{\partial N^4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.4.19)$$

Como el sistema corrotacional tiene su eje  $\bar{\mathbf{x}}_1$  en la dirección  $\xi$ , entonces el versor que define su dirección se obtiene como:

$$\mathbf{t}^1 = \frac{1}{\sqrt{(J_{11})^2 + (J_{21})^2}} \begin{bmatrix} J_{11} \\ J_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1^1 \\ t_2^1 \end{bmatrix} \quad (4.4.20)$$

entonces las componentes de  $\mathbf{t}^2$ :

$$\mathbf{t}^2 = \begin{bmatrix} -t_2^1 \\ t_1^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1^2 \\ t_2^2 \end{bmatrix} \quad (4.4.21)$$

Con esta forma de definir los versores se obtiene una matriz de transformación, a la que se denomina  $\mathbf{T}$ , que cumple la relación  $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$  por lo cual es ortonormal. Conocidos ambos versores  $\mathbf{t}^1$  y  $\mathbf{t}^2$ , la matriz de transformación  $\mathbf{T}$  se expresa:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_1^1 & t_1^2 \\ t_2^1 & t_2^2 \end{bmatrix} \quad (4.4.22)$$

que en función del ángulo  $\alpha$  Figura [4.4.1]:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (4.4.23)$$

La matriz  $\mathbf{T}$  permite expresar el cambio de coordenada entre el sistema global  $\mathbf{x}$  y el sistema corrotacional  $\bar{\mathbf{x}}$ :

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{T} \Delta \bar{\mathbf{x}} \quad \text{y} \quad \Delta \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^T \Delta \mathbf{x} \quad (4.4.24)$$

A partir de (4.4.24), otra forma de expresar a la matriz  $\mathbf{T}$  es:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \bar{x}_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \bar{x}_2} \end{bmatrix} = \mathbf{T} \quad \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{T}^T \quad (4.4.25)$$

Los incrementos de desplazamientos  $\Delta \mathbf{u}$  referidos al sistema global pueden encontrarse en función de los incrementos de desplazamientos  $\Delta \bar{\mathbf{u}}$  en el sistema corrotacional utilizando la matriz  $\mathbf{T}$ :

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{T} \Delta \bar{\mathbf{u}} \quad \text{y} \quad \Delta \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{T}^T \Delta \mathbf{u} \quad (4.4.26)$$

Explícitamente, los desplazamientos globales en función de los desplazamientos corrotacionales:

$$\begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{u}_1 \\ \Delta \bar{u}_2 \end{bmatrix} \quad (4.4.27)$$

inversamente:

$$\begin{bmatrix} \Delta \bar{u}_1 \\ \Delta \bar{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} \\ T_{12} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{bmatrix} \quad (4.4.28)$$

#### 4.4.4. Derivadas de las funciones de forma respecto de los sistemas global y corrotacional

Para calcular las derivadas de las funciones de forma respecto del sistema global, primero se calcula la matriz Jacobiana de la transformación utilizando las coordenadas nodales correspondientes a la configuración  $n + 1$ :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \end{bmatrix}_{n+1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^1}{\partial \xi} & \frac{\partial N^1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N^2}{\partial \xi} & \frac{\partial N^2}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N^3}{\partial \xi} & \frac{\partial N^3}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N^4}{\partial \xi} & \frac{\partial N^4}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \end{bmatrix}_{n+1} \quad (4.4.29)$$

su determinante y su inversa:

$$\det(\mathbf{J}) = J_{11}J_{22} - J_{21}J_{12} \quad (4.4.30)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x_1} & \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{n+1} \\ &= \frac{1}{\det(\mathbf{J})} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}_{n+1} \end{aligned} \quad (4.4.31)$$

Luego se calculan las derivadas de las funciones de forma respecto de los ejes globales:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N^1}{\partial x_1} & \frac{\partial N^1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N^2}{\partial x_1} & \frac{\partial N^2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N^3}{\partial x_1} & \frac{\partial N^3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N^4}{\partial x_1} & \frac{\partial N^4}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^1}{\partial \xi} & \frac{\partial N^1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N^2}{\partial \xi} & \frac{\partial N^2}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N^3}{\partial \xi} & \frac{\partial N^3}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N^4}{\partial \xi} & \frac{\partial N^4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x_1} & \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{n+1} \quad (4.4.32)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} & \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{bmatrix} \mathbf{J}^{-1} \quad (4.4.33)$$

Utilizando las expresiones para los versores del sistema corrotacional (4.4.20) y (4.4.21) se obtienen las componentes de la matriz de transformación  $\mathbf{T}$  en la configuración  $n + 1$ :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_1^1 & t_1^2 \\ t_2^1 & t_2^2 \end{bmatrix}_{n+1} \quad (4.4.34)$$

Las derivadas de las funciones de forma respecto del sistema corrotacional, correspondiente a la configuración  $n + 1$ , se calculan haciendo:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_1} & \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_2} \end{bmatrix}_{n+1} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N^i}{\partial x_1} & \frac{\partial N^i}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \bar{x}_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \bar{x}_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N^i}{\partial x_1} & \frac{\partial N^i}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1^1 & t_1^2 \\ t_2^1 & t_2^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.4.35)$$

donde

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N^i}{\partial x_1} & \frac{\partial N^i}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^i}{\partial \xi} & \frac{\partial N^i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{11}^{-1} & J_{12}^{-1} \\ J_{21}^{-1} & J_{22}^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.4.36)$$

entonces, las derivadas de las funciones de forma respecto del sistema corrotacional correspondiente a la configuración  $n + 1$  se obtienen con:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_1} & \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_2} \end{bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^i}{\partial \xi} & \frac{\partial N^i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{T} \quad (4.4.37)$$

#### 4.4.5. Obtención del vector de fuerzas internas del elemento

Se ha optado por utilizar la relación constitutiva para un material isótropo, de la forma:

$$\Delta \bar{\sigma}_{ij} = K \Delta \bar{\Delta} \delta_{ij} + 2 G \Delta \bar{e}_{ij} \quad (4.4.38)$$

donde:

- $\Delta \bar{\sigma}_{ij}$  : tensor de tensiones de Cauchy respecto del sistema corrotacional  
 $K$  : módulo de compresión volumétrica  
 $\Delta \bar{\Delta}$  : incremento de la deformación volumétrica, que por ser un invariante es igual  $\delta \Delta$   
 $\delta_{ij}$  : es el delta de Kroenecker, ( $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$  y  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ )  
 $G$  : módulo de corte  
 $\Delta \bar{\epsilon}_{ij}$  : incremento del tensor de deformaciones desviadoras  $\delta \bar{\epsilon}$  respecto del sistema corrotacional

Resulta necesario descomponer el incremento del tensor de deformaciones y el incremento del tensor de tensiones en sus partes esférica y desviadora:

$$\begin{aligned}
 \Delta \bar{\sigma}_{ij} &= \Delta \bar{p} \delta_{ij} + \Delta \bar{s}_{ij} \\
 \Delta \bar{\epsilon}_{ij} &= \frac{\Delta \bar{\Delta}}{3} \delta_{ij} + \Delta \bar{e}_{ij}
 \end{aligned} \tag{4.4.39}$$

donde:

- $\Delta \bar{p}$  : es el incremento de la presión, que por ser un invariante es igual a  $\Delta p$   
 $\Delta \bar{s}_{ij}$  : es el incremento del tensor de tensiones desviadoras respecto del sistema corrotacional

### Cálculo de las deformaciones

El incremento de la deformación volumétrica  $\Delta \bar{\Delta}$  para un estado de deformación plana:

$$\begin{aligned}
 \Delta \Delta &= \Delta \bar{\Delta} = \text{div}(\Delta \mathbf{u}) \\
 &= \Delta \bar{\epsilon}_{11} + \Delta \bar{\epsilon}_{22} \\
 &= \frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_2}
 \end{aligned} \tag{4.4.40}$$

Particularizando la expresión anterior a nivel del elemento, se define la matriz deformación - desplazamiento  $\mathbf{B}_v^i$ :

$$\begin{aligned}
 \Delta \Delta &= \sum_{i=1}^{NNE} \left[ \frac{\partial N^i}{\partial x_1} \quad \frac{\partial N^i}{\partial x_2} \right] \begin{bmatrix} \Delta u_1^i \\ \Delta u_2^i \end{bmatrix} \\
 &= \sum_{i=1}^{NNE} \mathbf{B}_v^i \Delta \mathbf{u}^i
 \end{aligned} \tag{4.4.41}$$

El incremento de la deformación volumétrica  $\Delta \bar{\Delta}$  para un estado axilsimétrico:

$$\begin{aligned}
 \Delta \Delta &= \Delta \bar{\Delta} = \text{div}(\Delta \mathbf{u}) \\
 &= \Delta \bar{\epsilon}_{11} + \Delta \bar{\epsilon}_{22} + \Delta \bar{\epsilon}_{33} \\
 &= \frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_2} + \frac{\Delta u_1}{x_{10}}
 \end{aligned} \tag{4.4.42}$$

La matriz deformación - desplazamiento  $\mathbf{B}_v^i$  para este estado:

$$\begin{aligned}\Delta\Delta &= \sum_{i=1}^{NNE} \left[ \left( \frac{\partial N^i}{\partial x_1} + \frac{N^i}{x_{10}} \right) \frac{\partial N^i}{\partial x_2} \right] \begin{bmatrix} \Delta u_1^i \\ \Delta u_2^i \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{NNE} \mathbf{B}_v^i \Delta \mathbf{u}^i\end{aligned}\quad (4.4.43)$$

El incremento de deformaciones respecto del sistema corrotacional, para un estado de deformación plana:

$$\begin{aligned}\Delta\bar{\varepsilon} &= \Delta \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} \\ \bar{\varepsilon}_{22} \\ 2\bar{\varepsilon}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_1} \\ \frac{\partial \Delta \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_2} \\ \frac{\partial \Delta \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_2} + \frac{\partial \Delta \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_1} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{NNE} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_2} \\ \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_2} & \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{u}_1^i \\ \Delta \bar{u}_2^i \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (4.4.44)$$

utilizando la expresión (4.4.28):

$$\begin{aligned}\Delta\bar{\varepsilon} &= \sum_{i=1}^{NNE} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_2} \\ \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_2} & \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} \\ T_{12} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1^i \\ \Delta u_2^i \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{NNE} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_1} T_{11} & \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_1} T_{21} \\ \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_2} T_{12} & \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_2} T_{22} \\ \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_2} T_{11} + \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_1} T_{12} & \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_2} T_{21} + \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_1} T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1^i \\ \Delta u_2^i \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{NNE} \bar{\mathbf{B}}_*^i \Delta \mathbf{u}^i\end{aligned}\quad (4.4.45)$$

Luego, el incremento del tensor de deformaciones desviadoras respecto del sistema corrotacional, con  $\Delta\bar{\Delta}$  según (4.4.40):

$$\Delta\bar{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \Delta\bar{\varepsilon}_{11} - \frac{\Delta\bar{\Delta}}{3} \\ \Delta\bar{\varepsilon}_{22} - \frac{\Delta\bar{\Delta}}{3} \\ 2\Delta\bar{\varepsilon}_{12} \end{bmatrix}\quad (4.4.46)$$

Para el caso axilsimétrico, el tensor de deformaciones en el sistema corrotacional:

$$\Delta\bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \Delta\bar{\varepsilon}_{11} \\ \Delta\bar{\varepsilon}_{22} \\ 2\Delta\bar{\varepsilon}_{12} \\ \Delta\bar{\varepsilon}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_1} \\ \frac{\partial \Delta \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_2} \\ \frac{\partial \Delta \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_2} + \frac{\partial \Delta \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_1} \\ \frac{\Delta u_1}{x_{10}} \end{bmatrix}\quad (4.4.47)$$

Debido a que la deformación anular es idéntica en ambos sistemas ( $x_3 = \bar{x}_3$ ) se tiene:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \Delta\bar{\varepsilon}_{11} \\ \Delta\bar{\varepsilon}_{22} \\ 2\Delta\bar{\varepsilon}_{12} \\ \Delta\bar{\varepsilon}_{33} \end{bmatrix} &= \sum_{i=1}^{NNE} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_2} \\ \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_2} & \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} \\ T_{12} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1^i \\ \Delta u_2^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{N^i}{x_{10}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1^i \\ \Delta u_2^i \end{bmatrix} \quad (4.4.48) \\
&= \sum_{i=1}^{NNE} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_1} T_{11} & \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_1} T_{21} \\ \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_2} T_{12} & \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_2} T_{22} \\ \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_2} T_{11} + \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_1} T_{12} & \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_2} T_{21} + \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_1} T_{22} \\ \frac{N^i}{x_{10}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1^i \\ \Delta u_2^i \end{bmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{NNE} \bar{\mathbf{B}}_*^i \Delta \mathbf{u}^i
\end{aligned}$$

El incremento del tensor de deformaciones desviadoras respecto del sistema corrotacional, con  $\Delta\bar{\Delta}$  según (4.4.42) se obtiene:

$$\Delta\bar{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \Delta\bar{\varepsilon}_{11} - \frac{\Delta\bar{\Delta}}{3} \\ \Delta\bar{\varepsilon}_{22} - \frac{\Delta\bar{\Delta}}{3} \\ 2\Delta\bar{\varepsilon}_{12} \\ \Delta\bar{\varepsilon}_{33} - \frac{\Delta\bar{\Delta}}{3} \end{bmatrix} \quad (4.4.49)$$

Para los estados de deformación plana y de axilsimetría se denomina  $\bar{\mathbf{B}}_*^i$  a la submatriz deformación - desplazamiento correspondiente al nodo  $i$  ( $i = 1$  a  $NNE = 4$ ), tal que al multiplicarla por el vector desplazamientos respecto del sistema global asociado al nodo  $i$ , se obtienen los incrementos de deformaciones respecto del sistema corrotacional.

En las expresiones de las matrices  $\bar{B}_*^i$  y  $B_v^i$  para el estado axilsimétrico,  $x_{10} = x_1^n$  que es la coordenada global en la configuración de referencia ( $t = t_n$ ) y  $x_1^{n+1}$  representan la coordenada global en la configuración  $n + 1$ , el incremento de deformación anular entre ambas configuraciones esta dado por (4.4.6).

### Cálculo de los incrementos de tensiones.

El incremento de presión respecto del sistema global  $\Delta p$  y respecto del sistema corrotacional  $\Delta\bar{p}$  son iguales por ser un invariante del tensor de tensiones, no así la parte desviadora. El incremento de presión, tanto para un estado de deformación plana como axilsimétrico es:

$$\Delta p = \Delta\bar{p} = \frac{\Delta\bar{\sigma}_{11} + \Delta\bar{\sigma}_{22} + \Delta\bar{\sigma}_{33}}{3} \quad (4.4.50)$$

y el incremento del tensor desviador de tensiones:

$$\Delta\bar{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \Delta\bar{\sigma}_{11} - \Delta\bar{p} \\ \Delta\bar{\sigma}_{22} - \Delta\bar{p} \\ \Delta\bar{\sigma}_{12} \\ \Delta\bar{\sigma}_{33} - \Delta\bar{p} \end{bmatrix} \quad (4.4.51)$$

Para calcular los incrementos de tensiones en función de los incrementos de deformaciones es necesario calcular primero los módulos elásticos para el elemento. En el modelo constitutivo adoptado los módulos elásticos son función de la presión. Para asignar el mismo valor a todos los puntos de la cuadratura de Gauss, se utiliza el valor  $p_m$  que se obtiene como el promedio de los valores  $p_{n(g)}$  de presión en los puntos de integración de Gauss  $g$  del elemento convergidos en el paso  $n$ :

$$p_m = \frac{1}{4} \sum_{g=1}^4 p_{n(g)} \quad (4.4.52)$$

Se adoptó para el módulo de Young la función de potencia:

$$E(p_m) = k_u p_a \left( \frac{p_m}{p_a} \right)^n \quad (4.4.53)$$

donde:

$k_u$  y  $n$  : son parámetros de caracterización del material, que se obtienen a partir de la curva de descarga recarga de un ensayo triaxial de compresión isótropa

$p_a$  : es la presión atmosférica

Este modelo fue originalmente propuesto por [Jambu, 1963] para el módulo tangente inicial luego fue adoptado por [Duncan and Chang, 1970] y [Lade, 1977] propuso utilizar la expresión (4.4.53) para representar el comportamiento elástico. Para este modelo la relación de Poisson es constante, entonces los módulos de compresión volumétrica  $K_n$  y transversal  $G_n$ , válidos para el elemento se calculan:

$$\begin{aligned} K &= \frac{E(p_m)}{3(1-2\nu)} \\ G &= \frac{E(p_m)}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (4.4.54)$$

Teniendo la configuración de referencia  $\mathbf{x}_n$ , correspondiente al paso  $n$ , y la configuración  $\mathbf{x}_{n+1}$  en el paso  $n+1$ , los pasos para obtener los incrementos  $\Delta p$  y  $\Delta \mathbf{s}$  son los siguientes:

1. Se calcula el incremento de desplazamientos nodales del elemento:

$$\Delta \mathbf{u}^e = \mathbf{x}_{n+1}^e - \mathbf{x}_n^e \quad (4.4.55)$$

2. En cada punto de integración  $g$  de la cuadratura de Gauss Legendre se calcula  $[\mathbf{J}]_{n+1}$  el Jacobiano con la configuración  $n+1$ .
3. Utilizando las componentes de la matriz Jacobiana calculada en el paso 2, se calculan las componentes de los versores de los ejes corrotacionales y la matriz de transformación  $[\mathbf{T}]_{n+1}$ .
4. Con la matriz inversa Jacobiana y la matriz de transformación se calculan las derivadas de las funciones de forma respecto del sistema corrotacional

$$\left[ \frac{\partial N^I}{\partial \bar{x}_1} \quad \frac{\partial N^I}{\partial \bar{x}_2} \right]_{n+1} = \left[ \frac{\partial N^I}{\partial \xi} \quad \frac{\partial N^I}{\partial \eta} \right] \mathbf{J}^{-1} \mathbf{T} \quad (4.4.56)$$

5. Con las derivadas respecto del sistema corrotacional se calcula la matriz deformación - desplazamiento

$$\bar{\mathbf{B}}_* = \left[ \bar{\mathbf{B}}_*^1 \quad \bar{\mathbf{B}}_*^2 \quad \dots \quad \bar{\mathbf{B}}_*^{NNE} \right] \quad (4.4.57)$$

6. Con la matriz  $\bar{\mathbf{B}}_*$  y el incremento de desplazamientos  $\Delta \mathbf{u}^e$  se calculan los incrementos de deformación  $\Delta \bar{\epsilon}_{ij}$  en cada punto de integración

$$\Delta \bar{\epsilon} = \bar{\mathbf{B}}_* \Delta \mathbf{u} \quad (4.4.58)$$

7. Obtenido  $\Delta \bar{\epsilon}_{ij}(\xi_g, \eta_g)$  en el punto de integración se calculan sus componentes esférica y desviadora según (4.4.40)(o (4.4.42)) y (4.4.46) (o (4.4.49))

8. El incremento de presión en el punto de Gauss  $g$ :

$$\Delta \bar{p}_{(g)} = K_n \Delta \bar{\Delta}_{(\xi_g, \eta_g)} \quad (4.4.59)$$

9. La presión de prueba  $p_{n+1}^*$  en el paso  $n + 1$  en cada punto de la cuadratura de Gauss:

$$\bar{p}_{n+1}^*(g) = p_{n+1}^*(g) = p_n(g) + \Delta \bar{p}_{(g)} \quad (4.4.60)$$

10. El incremento de las componentes desviadoras del tensor de tensiones

$$\Delta \bar{\mathbf{S}}_{ij}(g) = 2G_n \Delta \bar{\epsilon}_{ij}(\xi_g, \eta_g) \quad (4.4.61)$$

11. Las componentes del tensor desviador de tensiones de prueba  $\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^*$  en el paso  $n + 1$  en cada punto de la cuadratura de Gauss:

$$\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^* = \bar{\mathbf{S}}_{n(g)} + \Delta \bar{\mathbf{S}}_{(g)} \quad (4.4.62)$$

12. Obtenidas las componentes  $\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^*$  se calcula el invariante de prueba  $q_{n+1}^*$ :

$$q_{n+1}^*(g) = \sqrt{\frac{3}{2} \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^* : \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^*} = \bar{q}_{n+1}^*(g) \quad (4.4.63)$$

Éste invariante junto con la presión de prueba se utilizan para verificar las funciones de fluencia (en el caso que se esté considerando plasticidad). Si corresponde se corregirán los valores para obtener las tensiones correspondientes al final del paso  $n + 1$  junto con las demás variables de estado actualizadas según el algoritmo que se presenta en el capítulo 5. Si el paso es elástico (o no se considera plasticidad), entonces las tensiones al final del paso  $n + 1$  serán las tensiones de prueba ya calculadas.

$$\begin{aligned} p_{n+1(g)} &= p_{n+1}^*(g) = \bar{p}_{n+1}^*(g) \\ \bar{\mathbf{S}}_{n+1(g)} &= \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^*(g) \\ q_{n+1(g)} &= q_{n+1}^*(g) = \bar{q}_{n+1}^*(g) \end{aligned} \quad (4.4.64)$$

13. Las componentes del tensor de tensiones escritas en forma vectorial en cada punto de integraci3n ser3n:

$$\bar{\sigma}_{n+1(g)} = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{11(g)} \\ \bar{\sigma}_{22(g)} \\ \bar{\sigma}_{12(g)} \\ \bar{\sigma}_{33(g)} \end{bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11(g)} \\ \bar{S}_{22(g)} \\ \bar{S}_{12(g)} \\ \bar{S}_{33(g)} \end{bmatrix}_{n+1} + \begin{bmatrix} p(g) \\ p(g) \\ 0 \\ p(g) \end{bmatrix}_{n+1} \quad (4.4.65)$$

Donde  $\bar{\sigma}_{n+1(g)}$  es el tensor de tensiones de Cauchy respecto del sistema corrotacional en la configuraci3n  $n + 1$  en el punto de integraci3n  $g$  de la cuadratura de Gauss Legendre.

#### Estado de deformaci3n plana. C3lculos expl3citos

- Submatrices deformaci3n - desplazamiento

$$\bar{\mathbf{B}}_*^i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_1} T_{11} & \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_1} T_{21} \\ \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_2} T_{12} & \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_2} T_{22} \\ \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_2} T_{11} + \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_1} T_{12} & \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_2} T_{21} + \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_1} T_{22} \end{bmatrix}_{n+1} \quad (4.4.66)$$

- Los incrementos de deformaci3n  $\Delta \bar{\varepsilon}_{ij}$  en cada punto de integraci3n

$$\begin{bmatrix} \Delta \bar{\varepsilon}_{11} \\ \Delta \bar{\varepsilon}_{22} \\ 2\Delta \bar{\varepsilon}_{12} \end{bmatrix}_{(\xi_g, \eta_g)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^I}{\partial \bar{x}_1} T_{11} & \frac{\partial N^I}{\partial \bar{x}_1} T_{21} \\ \frac{\partial N^I}{\partial \bar{x}_2} T_{12} & \frac{\partial N^I}{\partial \bar{x}_2} T_{22} \\ \frac{\partial N^I}{\partial \bar{x}_2} T_{11} + \frac{\partial N^I}{\partial \bar{x}_1} T_{12} & \frac{\partial N^I}{\partial \bar{x}_2} T_{21} + \frac{\partial N^I}{\partial \bar{x}_1} T_{22} \end{bmatrix}_{(\xi_g, \eta_g)} \begin{bmatrix} \Delta u_1^i \\ \Delta u_2^i \end{bmatrix} \quad (4.4.67)$$

$$= \bar{\mathbf{B}}_*^i(\xi_g, \eta_g) \Delta \mathbf{u}^i$$

- Las componentes del tensor desviador de deformaciones

$$\Delta \bar{\varepsilon}_{ij}(\xi_g, \eta_g) = \begin{bmatrix} \Delta \bar{\varepsilon}_{11}(\xi_g, \eta_g) \\ \Delta \bar{\varepsilon}_{22}(\xi_g, \eta_g) \\ 2\Delta \bar{\varepsilon}_{12}(\xi_g, \eta_g) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\Delta \bar{\Delta}(\xi_g, \eta_g)}{3} \\ \frac{\Delta \bar{\Delta}(\xi_g, \eta_g)}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.4.68)$$

- Las componentes desviadoras del tensor de tensiones, escritas en forma vectorial

$$\Delta \bar{\mathbf{S}}(g) = \begin{bmatrix} \Delta \bar{S}_{11} \\ \Delta \bar{S}_{22} \\ \Delta \bar{S}_{12} \end{bmatrix}_{(\xi_g, \eta_g)} \quad (4.4.69)$$

#### Estado de axilsimetr3a. C3lculos expl3citos

- Submatrices deformaci3n - desplazamiento

$$\bar{\mathbf{B}}_*^i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_1} T_{11} & \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_1} T_{21} \\ \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_2} T_{12} & \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_2} T_{22} \\ \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_2} T_{11} + \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_1} T_{12} & \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_2} T_{21} + \frac{\partial N^i}{\partial \bar{x}_1} T_{22} \\ \frac{N^i}{X_{10}} & 0 \end{bmatrix}_{n+1} \quad (4.4.70)$$

- Los incrementos de deformación  $\Delta\bar{\varepsilon}_{ij}$  en cada punto de integración

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta\bar{\varepsilon}_{11} \\ \Delta\bar{\varepsilon}_{22} \\ 2\Delta\bar{\varepsilon}_{12} \\ \Delta\bar{\varepsilon}_{33} \end{bmatrix}_{(\xi_g, \eta_g)} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N^I}{\partial \bar{x}_1} T_{11} & \frac{\partial N^I}{\partial \bar{x}_1} T_{21} \\ \frac{\partial N^I}{\partial \bar{x}_2} T_{12} & \frac{\partial N^I}{\partial \bar{x}_2} T_{22} \\ \frac{\partial N^I}{\partial \bar{x}_2} T_{11} + \frac{\partial N^I}{\partial \bar{x}_1} T_{12} & \frac{\partial N^I}{\partial \bar{x}_2} T_{21} + \frac{\partial N^I}{\partial \bar{x}_1} T_{22} \\ \frac{N^I}{X_{10}} & 0 \end{bmatrix}_{(\xi_g, \eta_g)}^i \begin{bmatrix} \Delta u_1^I \\ \Delta u_2^I \end{bmatrix} \\ &= \bar{\mathbf{B}}_{*(\xi_g, \eta_g)}^i \Delta \mathbf{u}^i \end{aligned} \quad (4.4.71)$$

- Las componentes del tensor desviador de deformaciones

$$\Delta\bar{e}_{ij}(\xi_g, \eta_g) = \begin{bmatrix} \Delta\bar{\varepsilon}_{11}(\xi_g, \eta_g) \\ \Delta\bar{\varepsilon}_{22}(\xi_g, \eta_g) \\ 2\Delta\bar{\varepsilon}_{12}(\xi_g, \eta_g) \\ \Delta\bar{\varepsilon}_{33}(\xi_g, \eta_g) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\Delta\bar{\Delta}(\xi_g, \eta_g)}{3} \\ \frac{\Delta\bar{\Delta}(\xi_g, \eta_g)}{3} \\ 0 \\ \frac{\Delta\bar{\Delta}(\xi_g, \eta_g)}{3} \end{bmatrix} \quad (4.4.72)$$

- Las componentes desviadoras del tensor de tensiones, escritas en forma vectorial

$$\Delta\bar{\mathbf{S}}_{(g)} = \begin{bmatrix} \Delta\bar{S}_{11} \\ \Delta\bar{S}_{22} \\ \Delta\bar{S}_{12} \\ \Delta\bar{S}_{33} \end{bmatrix}_{(\xi_g, \eta_g)} \quad (4.4.73)$$

#### 4.4.6. Cálculo del vector de fuerzas internas del elemento

Los materiales granulares pueden presentar lo que se conoce como condición de flujo isocórico, en la cual se producen deformaciones de distorsión sin cambio volumétrico (estado crítico). En esta condición, desde el punto de vista numérico, puede producirse lo que se conoce como bloqueo por volumen. Una de las técnicas utilizadas para evitar el bloqueo es subintegrar las componentes volumétricas. Este es otro motivo por el cual se utiliza la descomposición de los tensores de tensiones y de deformaciones en sus partes esférica y desviadora. La integral (4.4.14), se calcula como la suma de la integral de la parte volumétrica, a la que se subintegra, más la integral de la parte desviadora.

Para evaluar la parte volumétrica, la matriz  $\bar{\mathbf{B}}_v$  del elemento, se obtiene mediante la siguiente suma ponderada, siendo  $g$  los puntos de integración de la cuadratura de Gauss donde se calcula el tensor de tensiones e  $I$  los nodos del elemento:

$$\bar{\mathbf{B}}_{v(n+1)} = \frac{\sum_{g=1}^4 \left[ \left( \sum_{I=1}^4 \left[ \frac{\partial N^I}{\partial x_1} + \frac{N^I}{x_1} \quad \frac{\partial N^I}{\partial x_2} \right]_{(\varepsilon_g, \eta_g)} \right) \left( \det(J_{(\varepsilon_g, \eta_g)}) x_{1(\varepsilon_g, \eta_g)} \right) \right]}{\sum_{g=1}^4 \left[ \det(J_{(\varepsilon_g, \eta_g)}) x_{1(\varepsilon_g, \eta_g)} \right]} \quad (4.4.74)$$

Con esta forma de evaluar la matriz  $\bar{\mathbf{B}}_v$  para un estado axilsimétrico se obtiene que los valores de las fuerzas internas, en dirección paralela al eje de rotación, asociadas un nodo del elemento fuera del eje de simetría y a otro sobre éste eje, tengan entre sí la misma relación que las masas y fuerzas externas correspondientes a esos nodos. De esta manera se evita la aparición de distorsiones

espurias. Para el estado de deformación plana, no hay diferencia apreciable entre esta forma de calcular la matriz  $\bar{\mathbf{B}}_v$  y la que resulta de evaluarla en el centroide del elemento.

La presión media en el elemento se calcula como en (4.4.52):

$$p_m = \frac{1}{4} \sum_{g=1}^4 p_{n(g)} \quad (4.4.75)$$

El diferencial de volumen, para el estado de deformación plana se calcula:

$$dV_m = 1 \frac{\sum_{g=1}^4 \left[ \det(J_{(\varepsilon_g, \eta_g)}) x_{1(\varepsilon_g, \eta_g)} \right]}{4} \quad (4.4.76)$$

y para el estado axilsimétrico se calcula:

$$dV_m = 2\pi \frac{\sum_{g=1}^4 \left[ \det(J_{(\varepsilon_g, \eta_g)}) x_{1(\varepsilon_g, \eta_g)} \right]}{4} \quad (4.4.77)$$

Con la matriz  $\bar{\mathbf{B}}_v$ ,  $p_m$  y el valor del diferencial de volumen es posible aproximar el valor de la integral

$$\int B_v p dV \quad (4.4.78)$$

utilizando un solo punto de integración de la cuadratura de Gauss - Legendre, con lo cual:

$$\mathbf{f}_{int}^e(p^e) = \int \bar{\mathbf{B}}_v^T p dV \simeq \bar{\mathbf{B}}_{v(n+1)}^T p_m dV_m W_o W_o \quad (4.4.79)$$

siendo  $W_o = 2$  el peso de la cuadratura de Gauss - Legendre de 1 punto. La expresión (4.4.79), indica que se realiza la subintegración de la parte volumétrica con el fin de evitar posible bloqueo en el caso de cumplirse la condición de flujo isocórico.

La integral de la parte desviadora se calcula:

$$\mathbf{f}_{int}^e(\mathbf{S}^e) = \int \bar{\mathbf{B}}_*^T \bar{\mathbf{S}} dV \simeq \sum_{k=1}^{npg} \sum_{l=1}^{npg} \bar{\mathbf{B}}_{*(\xi_k, \eta_l)}^T \bar{\mathbf{S}}_{(\xi_k, \eta_l)} dV_{(\xi_k, \eta_l)} W_k W_l \quad (4.4.80)$$

donde  $\bar{\mathbf{B}}_{*(\xi_k, \eta_l)}^T$  es calculada en la configuración  $n + 1$ ,  $dV_{(\xi_k, \eta_l)}$  es el valor correspondiente al punto de integración de Gauss  $(\xi_k, \eta_l)$  y  $W_k$  y  $W_l$  son los pesos correspondientes.

Obtenido el vector de fuerzas internas total del elemento:

$$\mathbf{f}_{int}^e(\boldsymbol{\sigma}^e) \simeq \mathbf{f}_{int}^e(p^e) + \mathbf{f}_{int}^e(\mathbf{S}^e) \quad (4.4.81)$$

se procede a su ensamble en el vector de fuerzas internas global utilizando el proceso estándar de elementos finitos.



# Capítulo 5

## Modelo constitutivo

### 5.1. Introducción

El modelo constitutivo implementado es elastoplástico y ha sido tomado de los modelos desarrollados en la mecánica de suelos. Se ha optado por un modelo simple que capte en forma aproximada las siguientes características de los materiales no cohesivos: el aumento de rigidez y de la resistencia al corte cuando aumenta la presión, la compresibilidad volumétrica y que en estado crítico se produzcan deformaciones por corte mientras se mantienen constantes el volumen y el valor de la presión.

El programa SIMPACT/DELTA [Flores, 1999] es muy versátil en lo referente a la implementación de relaciones constitutivas complicadas. El código originalmente contaba con modelos constitutivos implementados que corresponden a un sólido isótropo elástico lineal y dentro de los comportamientos plásticos modelos isocóricos para metales.

En base a observaciones de los resultados experimentales, las cuatro componentes de un modelo elastoplástico para simular la respuesta de materiales granulares son:

- La manera en que se deben describir las deformaciones elásticas recuperables.
- El límite, en el espacio de tensiones, de la región dentro de la cual es razonable describir las deformaciones como elásticas y recuperables por lo cual es necesaria una superficie de fluencia.
- El modo en el cual ocurren las deformaciones plásticas, por esto es necesario un potencial plástico (o una regla de flujo) que especifique las magnitudes relativas de las varias componentes de deformación plástica.
- La manera en la cual la magnitud absoluta de las deformaciones plásticas está vinculada con el cambio de tamaño de la superficie de fluencia, conocido como ley de endurecimiento. Esta describe la expansión de la superficie de fluencia (endurecimiento del material) o contracción de la superficie de fluencia (ablandamiento del material) como si fuera un módulo tangente plástico generalizado.

La principal ventaja del modelo plástico adoptado es su simplicidad al compararlo con otros modelos propuestos dentro de la mecánica de suelos.

En este capítulo se presentan los detalles de la relación constitutiva implementada en el código SIMPACT/DELTA con el fin de simular el llenado y el vaciado de silos y tolvas. Para el comportamiento plástico, se ha adoptado una superficie de fluencia compuesta por la función de Drucker - Prager y la función que corresponde al modelo cam clay modificado. La primera, un cono en el espacio de tensiones principales, corresponde a un comportamiento elástico perfectamente plástico con una regla de flujo no asociada. La segunda, es un casquete que forma parte de un elipsoide en el espacio de tensiones principales, corresponde a un comportamiento elastoplástico con endurecimiento isótropo y una regla de flujo asociada.

## 5.2. Modelo constitutivo adoptado.

### 5.2.1. Ley elástica

El comportamiento elástico es simulado adoptando un modelo donde el módulo tangente sigue una ley de potencia función de la presión (o tensión media) junto con una relación de Poisson constante. Este modelo fue propuesto por [Lade, 1977] quien adopta la propuesta basada en el trabajo de [Jambu, 1963] hecha por [Duncan and Chang, 1970], donde el módulo tangente sigue una ley de potencia y es función de la tensión principal menor en ensayos triaxiales.

El modelo originalmente propuesto por [Jambu, 1963] corresponde al módulo tangente inicial, luego [Duncan and Chang, 1970] proponen para el modulo tangente una ley de potencia similar para representar el comportamiento elástico.

### 5.2.2. Superficie de fluencia

La superficie de fluencia es discontinua y está compuesta por dos superficies en el espacio de tensiones, que se intersectan, a las que se denomina  $f_1$  y  $f_2$ . La superficie  $f_1$  representa un cono y la  $f_2$  un elipsoide. Entre ambas forman una superficie que se aproxima a una gota con el ápice en el origen del espacio de tensiones.

La primer superficie,  $f_1$ , corresponde al modelo de Drucker - Prager, para tener en cuenta la fluencia por corte. Esta superficie, que permanece fija en el espacio de tensiones es una aproximación al criterio de falla de Mohr Coulomb (comportamiento elástico - rígido plástico).

La segunda parte de la superficie de fluencia,  $f_2$ , corresponde al modelo Cam Clay modificado para considerar la fluencia por consolidación. Esta superficie se expande en el espacio de tensiones cuando el material endurece por consolidación representando un comportamiento elastoplástico con endurecimiento isótropo. De esta superficie solo se considera el casquete dentro del cono formado por la superficie  $f_1$ . Un esquema de ambas superficies en el plano  $p - q$  se presenta en la Figura [5.2.1].

### 5.2.3. Potencial plástico (o regla de flujo)

La regla de flujo que corresponde a la superficie de fluencia  $f_1$  establece que no se producen deformaciones volumétricas plásticas, es decir  $\dot{\Delta}^P = 0$ . Integrando la regla de flujo se obtiene el potencial plástico,  $g_1$ , que es un cilindro cuyo eje de revolución coincide con el eje hidrostático

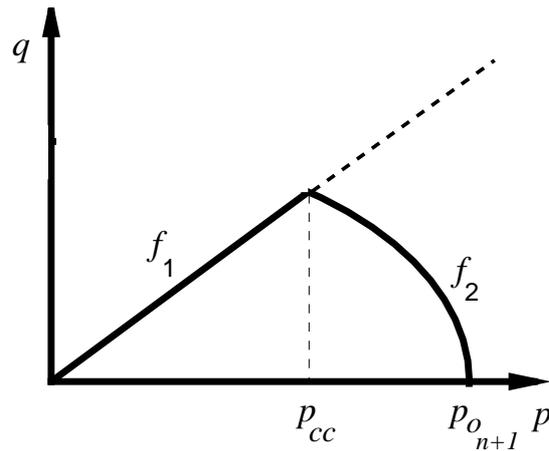


Figura 5.2.1: Superficie de fluencia en el espacio  $p - q$

( $q = 0$ ). El radio del cilindro depende del punto donde el estado de tensiones alcance a la superficie de fluencia. Cuando el estado de tensiones alcanza un punto sobre la superficie de fluencia  $f_1$  debido al potencial plástico  $g_1$  se producen solo deformaciones plásticas de distorsión, se modifica la tensión desviadora generalizada  $q$  sin cambiar el valor de la deformación volumétrica plástica ni el valor de la presión.

El modelo Cam Clay modificado establece que la superficie de fluencia  $f_2$  tiene una regla de flujo asociada, por lo cual se tiene que el potencial plástico coincide con la superficie de fluencia  $g_2 = f_2$ . Debido a esto, cuando un estado de tensiones alcance la superficie de fluencia  $f_2$  se producirán deformaciones plásticas tanto volumétricas como de distorsión. La proporción de cada tipo de deformación plástica estará dada por las componentes del vector normal a la superficie de fluencia en el punto.

#### 5.2.4. Ley de endurecimiento

La superficie de fluencia  $f_1$  corresponde a un modelo rígido plástico, por lo cual permanece fija en el espacio de tensiones.

A la segunda parte de la superficie de fluencia,  $f_2$ , le corresponde una ley de endurecimiento isotrópico. En este caso se tiene en cuenta el aumento de la rigidez al aumentar la presión, y la compresibilidad volumétrica. La ley de endurecimiento - ablandamiento es de tipo empírica y se obtiene ajustando un polinomio lineal o cuadrático a la curva de compresibilidad volumétrica que se obtiene de un ensayo triaxial de compresión isotrópica. Las partículas se consideran rígidas e indeformables, por lo cual la variación volumétrica responde al reacomodamiento de la estructura formada por los granos. Se considera que estas hipótesis son razonablemente aproximadas ya que en los silos no se producen niveles elevados de tensiones.

### 5.3. Expresiones del modelo constitutivo adoptado

#### 5.3.1. Comportamiento elástico

El módulo tangente como función de la presión o tensión media efectiva tiene la siguiente expresión:

$$E(p) = k_u p_a \left( \frac{p}{p_a} \right)^n \quad (5.3.1)$$

donde:

- $p$  : es la presión
- $k_u$  y  $n$  : son parámetros de caracterización del material, que se obtienen a partir de la curva de descarga recarga de un ensayo triaxial de compresión isótropa
- $p_a$  : es la presión de referencia, usualmente la presión atmosférica

#### Forma algorítmica

La forma algorítmica de la expresión (5.3.1) se escribe

$$E(p_m) = k_u p_a \left( \frac{p_m}{p_a} \right)^n \quad (5.3.2)$$

donde:

- $p_m$  : es la presión promedio en el elemento en el paso  $n$

Definido el módulo de Young  $E$  y siendo el coeficiente de Poisson constante, los módulos de compresión volumétrica  $K_n$  y transversal  $G_n$ , válidos para el elemento se calculan:

$$\begin{aligned} K_{(p_m)} &= K_n = \frac{E(p_m)}{3(1-2\nu)} \\ G_{(p_m)} &= G_n = \frac{E(p_m)}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

#### 5.3.2. Comportamiento plástico

##### Modelo de Drucker - Prager ( $f_1, g_1$ )

La función de fluencia:

$$f_{DP} = \sqrt{J_2} - \alpha I_1 - K_p = 0 \quad (5.3.4)$$

donde:

- $J_2 = \frac{1}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S}$  : es el segundo invariante del tensor desviador de tensiones con  $(S_{ij} = \sigma_{ij} - p \delta_{ij})$  y  $(p = \frac{\sigma_{ii}}{3})$
- $I_1 = \sigma_{ii}$  : es el primer invariante del tensor de tensiones
- $\alpha$  y  $K_p$  : son parámetros que pueden obtenerse en función de los parámetros  $c$  (cohesión) y  $\phi$  (ángulo de fricción interna) del criterio de Mohr - Coulomb

Si se hace coincidir las dos superficies a lo largo del meridiano de compresión (el cono de Drucker Prager es circunscrito a la pirámide hexagonal de Mohr Coulomb) los coeficientes  $\alpha$  y  $K_p$  se calculan con las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3} (3 - \operatorname{sen} \phi)} \\ K_p &= \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3} (3 - \operatorname{sen} \phi)}\end{aligned}\quad (5.3.5)$$

si las superficies coinciden a lo largo del meridiano de tracción (el cono de Drucker Prager está inscrito en la pirámide hexagonal de Mohr Coulomb) entonces los coeficientes se calculan con las expresiones:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3} (3 + \operatorname{sen} \phi)} \\ K_p &= \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3} (3 + \operatorname{sen} \phi)}\end{aligned}\quad (5.3.6)$$

Para expresar a  $f_1$  y  $f_2$  se unificaron los invariantes a utilizar, siguiendo [Wood, 1991], a los siguientes:

- La tensión desviadora generalizada  $q$

$$\begin{aligned}q &= \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\mathbf{S} : \mathbf{S}} \\ &= \sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S}} \\ &= \sqrt{3} \sqrt{J_2}\end{aligned}\quad (5.3.7)$$

- La presión  $p$

$$\begin{aligned}p &= \frac{1}{3} \sigma_{ii} \\ &= \frac{1}{3} I_1\end{aligned}\quad (5.3.8)$$

Utilizando éstos invariantes, la superficie de Drucker Prager puede escribirse como:

$$f_1 = \frac{q}{\sqrt{3}} - 3\alpha p - K_p = 0 \quad (5.3.9)$$

manteniendo las definiciones de las constantes del material dadas en (5.3.5) y (5.3.6).

La regla de flujo correspondiente es:

$$\dot{\Delta}^p = 0 \quad (5.3.10)$$

lo que significa que si el estado de tensiones yace sobre la superficie  $f_1$  el flujo plástico es isocórico y el incremento de las deformaciones plásticas de distorsión está dado por:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{e}}^p &= \dot{\gamma}_1 \frac{\partial g_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\
&= \dot{\gamma}_1 \frac{\partial g_1}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\
\dot{\mathbf{e}}^p &= \dot{\gamma}_1 \frac{3}{2\sqrt{3}} \frac{\mathbf{S}}{q}
\end{aligned} \tag{5.3.11}$$

que conduce a una superficie potencial plástico, que es un cilindro en el espacio de tensiones:

$$g_1 = \frac{q}{\sqrt{3}} - R(p) \tag{5.3.12}$$

cuyo radio está dado por:

$$R(p) = \alpha p + K_p \tag{5.3.13}$$

el radio del cilindro es el mismo radio que el cono del criterio de Drucker Prager para el estado de tensiones caracterizado por los invariantes de prueba  $(p^*, q^*)$ . El parámetro  $\dot{\gamma}_1$  es el parámetro de consistencia plástico correspondiente.

### Modelo Cam Clay modificado $(f_2, g_2, p_o)$

La función de fluencia:

$$f_2 = q^2 - M^2 p(p_o - p) = 0 \tag{5.3.14}$$

donde:

$q = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\mathbf{S} : \mathbf{S}}$  : tensión desviadora generalizada

$p = \frac{1}{3} \sigma_{ii}$  : presión

$M$  : parámetro que determina la forma del elipsoide (cociente entre los ejes principales del elipsoide)

$p_o$  : parámetro que fija el tamaño del elipsoide, y es función de la deformación volumétrica plástica

La regla de flujo es asociada, por lo cual el potencial plástico  $g_2$ :

$$g_2 = f_2$$

La regla de flujo se expresa como:

$$\begin{aligned}
\dot{\Delta}^p &= \dot{\gamma}_2 \frac{\partial f_2}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\
&= \dot{\gamma}_2 M^2 (2p - p_o) \frac{1}{3} \delta_{ij}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{e}}^p &= \dot{\gamma}_2 \frac{\partial f_2}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\
&= \dot{\gamma}_2 2q \frac{3}{2} \frac{\mathbf{S}}{q}
\end{aligned}$$

siendo  $\dot{\gamma}_2$  el parámetro de consistencia plástico correspondiente.

Se adoptó una ley de endurecimiento isótropo empírica. La curva experimental que se obtiene en un ensayo de compresión hidrostática, que relaciona el volumen específico con la presión, debe tener dos o tres descargas recargas para obtener la relación entre  $p_o$  y  $\Delta^p$  a la cual se le ajusta por mínimos cuadrados un polinomio cuadrático (o lineal) de la forma:

$$p_o(\Delta^p) = a_0 + a_1\Delta^p + a_3(\Delta^p)^2$$

De no contarse con los datos de la descarga recarga, la curva de compresión hidrostática debe ser corregida restando a la deformación volumétrica total la deformación elástica como se presenta en el Anexo 2.

### 5.3.3. Algoritmo de integración de las ecuaciones constitutivas

#### Modelo de Drucker - Prager

Dados los invariantes del estado de tensiones de prueba  $(p^*, q^*)$  se valúa  $f_1$ . Si:

$$f_1^* = \frac{q^*}{\sqrt{3}} - 3\alpha p^* - K_p > 0 \quad (5.3.15)$$

por condición de consistencia se deben encontrar los valores de la variables de estado para que:

$$f_1^{n+1} = \frac{q_{n+1}}{\sqrt{3}} - 3\alpha p_{n+1} - K_p = 0 \quad (5.3.16)$$

Por la regla de flujo se tiene que:

$$\dot{\Delta}^p = 0 \quad (5.3.17)$$

y

$$\dot{e}^p = \dot{\gamma}_1 \frac{3}{2\sqrt{3}} \frac{\mathbf{S}}{q} \quad (5.3.18)$$

asumiendo que la corrección está dada por

$$p_{n+1} = p^* - K\dot{\Delta}^p \quad (5.3.19)$$

pero por (5.3.17) queda que:

$$p_{n+1} = p^* \quad (5.3.20)$$

Asumiendo que la corrección para la parte desviadora está dada por:

$$\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{S}^* - 2G \dot{e}^p \quad (5.3.21)$$

reemplazando  $\dot{e}^p$  por (5.3.18) en la expresión anterior, se obtienen las componentes del tensor desviador de tensiones  $\mathbf{S}_{n+1}$

$$\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{S}^* - 2G \left( \dot{\gamma}_1 \frac{3}{2\sqrt{3}} \frac{\mathbf{S}^*}{q^*} \right) \quad (5.3.22)$$

$$= \mathbf{S}^* \left( 1 - 2G \dot{\gamma}_1 \frac{3}{2\sqrt{3}q^*} \right) \quad (5.3.23)$$

Como

$$q^* = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\mathbf{S}^* : \mathbf{S}^*} \quad (5.3.24)$$

$$q_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1}}$$

$$q_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\mathbf{S}_{n+1} : \mathbf{S}_{n+1}} \quad (5.3.25)$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\left( \mathbf{S}^* \left( 1 - 2G \dot{\gamma}_1 \frac{3}{2\sqrt{3}q^*} \right) \right) : \left( \mathbf{S}^* \left( 1 - 2G \dot{\gamma}_1 \frac{3}{2\sqrt{3}q^*} \right) \right)}$$

$$= \left( 1 - 2G \dot{\gamma}_1 \frac{3}{2\sqrt{3}q^*} \right) \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\mathbf{S}^* : \mathbf{S}^*}$$

$$q_{n+1} = \left( 1 - 2G \dot{\gamma}_1 \frac{3}{2\sqrt{3}q^*} \right) q^* \quad (5.3.26)$$

reemplazando  $q_{n+1}$  de (5.3.26) en (5.3.16):

$$\left( 1 - 2G \dot{\gamma}_1 \frac{3}{2\sqrt{3}q^*} \right) \frac{q^*}{\sqrt{3}} - 3\alpha p^* - K_p = 0 \quad (5.3.27)$$

despejando el parámetro de consistencia

$$\dot{\gamma}_1 = \frac{2\sqrt{3}q^*}{3 \cdot 2G} \left( 1 - \frac{(3\alpha p^* + K_p) \sqrt{3}}{q^*} \right) \quad (5.3.28)$$

Reemplazando  $\dot{\gamma}_1$  en las expresiones anteriores, se tienen:

- el incremento de las deformaciones plásticas de distorsión

$$\dot{\mathbf{e}}^p = \frac{\mathbf{S}^*}{2G} \left( 1 - \frac{(3\alpha p^* + K_p) \sqrt{3}}{q^*} \right) \quad (5.3.29)$$

- el tensor desviador de tensiones y el invariante  $q_{n+1}$ , en el paso  $n + 1$

$$\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{S}^* \left( \frac{(3\alpha p^* + K_p) \sqrt{3}}{q^*} \right) \quad (5.3.30)$$

$$q_{n+1} = \sqrt{3} (3\alpha p_{n+1} + K_p) \quad (5.3.31)$$

- el incremento de las deformaciones plásticas volumétricas

$$\dot{\Delta}^p = 0 \quad (5.3.32)$$

- la presión en el paso  $n + 1$ , por (5.3.20)

$$p_{n+1} = p^*$$

### Modelo Cam Clay

Dados los invariantes del estado de tensiones de prueba  $(p^*, q^*)$ , y suponiendo  $p_o^* = p_{on}$  es el valor del parámetro que fija el tamaño del elipsoide en el paso convergido  $n$  se valúa  $f_2$ . Si:

$$f_2^* = (q^*)^2 - M^2 p^* (p_{on} - p^*) > 0$$

por condición de consistencia se deben encontrar los valores de la variables de estado para que:

$$f_2^{n+1} = (q_{n+1})^2 - M^2 p_{n+1} (p_{on+1} - p_{n+1}) = 0 \quad (5.3.33)$$

Debido a que  $f_2$  es una función no lineal de los invariantes  $p$  y  $q$ , no es posible encontrar una solución cerrada que cumpla con la condición de consistencia (5.3.33). Para encontrar la solución se ha implementado un procedimiento de dos pasos:

1. Encontrar el estado correspondiente a la intersección entre la trayectoria elástica de prueba que conecta el estado  $n$  y el estado de prueba  $n_{n+1}^*$  y la superficie de fluencia del paso  $n$ . Este punto intersección se denomina *int* de la Figura [5.3.1] toda vez que  $f_2(p_n, q_n) < 0$  (el paso anterior fue elástico).
2. Integrar el paso plástico.

**1. Estado intersección** Se conoce el estado tensional al final del paso previo convergido,  $n$ , el cual está caracterizado por las variables de estado  $q_n, p_n, p_{on}$  y por cumplirse que  $f_{2n} \leq 0$ . El estado de prueba para el paso  $n+1^*$  es caracterizado por  $q^*, p^*, p_{on}^*$  pero éste no cumple la condición de fluencia por ser ( $f_2^* > 0$ ). Ambos estados se representan esquemáticamente en la Figura [5.3.1].

Para encontrar el estado intersección, *int*, entre la trayectoria elástica que lleva desde el estado  $n$  al estado de prueba  $n + 1^*$  y la superficie de fluencia definida en el paso  $n$  se deben encontrar los valores de  $p$  y  $q$  en el punto *int*. Para ello se considera, en base al esquema de la Figura [??] que:

$$p_{int} = p_n + \beta \Delta p \quad (5.3.34)$$

$$\Delta p = p^* - p_n \quad (5.3.35)$$

$$q_{int} = q_n + \beta \Delta q \quad (5.3.36)$$

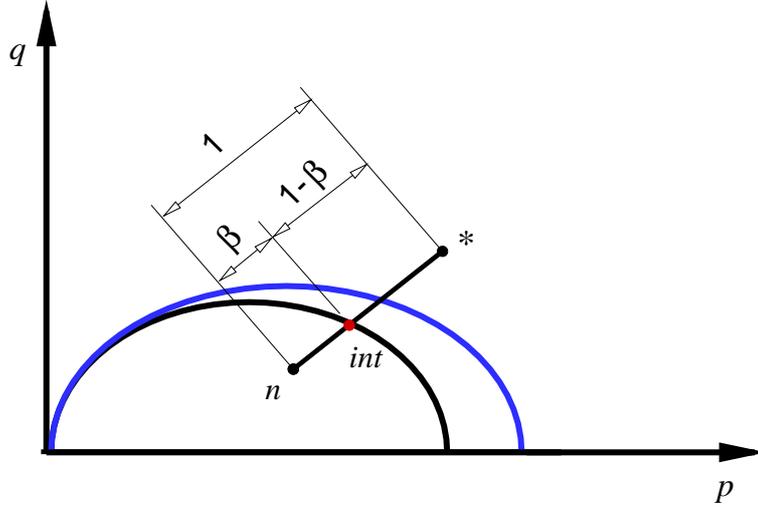


Figura 5.3.1: Esquema para encontrar el estado intersección

$$\Delta q = q^* - q_n \quad (5.3.37)$$

tal que en el punto intersección,  $int$ , se cumple que:

$$f(p_{int}, q_{int}) = f_{int} = 0 \quad (5.3.38)$$

Dado que la expresión de la función de fluencia (5.3.14) es no lineal, para obtener una aproximación se realiza un desarrollo en serie de Taylor de segundo orden a partir del estado  $n$ , obteniendo:

$$\begin{aligned} f_2(p_{int}, q_{int}) &= (q_n + \beta \Delta q)^2 - M^2 (p_n + \beta \Delta p) [p_{on} - (p_n + \beta \Delta p)] \quad (5.3.39) \\ &= \beta^2 [(\Delta q)^2 + M^2 (\Delta p)^2] + \\ &\quad \beta [2q_n \Delta q - M^2 \Delta p (p_{on} - 2p_n)] + \\ &\quad q_n^2 - M^2 p_n (p_{on} - p_n) \end{aligned}$$

Donde, el parámetro  $\beta$  tiene las siguientes características:

$$\beta \in [0, 1]$$

$$\beta = 0 \quad : \text{ en el estado } n$$

$$\beta \in (0, 1) \quad : \text{ en el estado } int$$

Igualando a cero la expresión (5.3.39) y denominando

$$C_{\Delta 2} = (\Delta q)^2 + M^2 (\Delta p)^2 \quad (5.3.40)$$

$$C_{\Delta} = 2q_n \Delta q - M^2 \Delta p (p_{on} - 2p_n)$$

$$C = q_n^2 - M^2 p_n (p_{on} - p_n) = f_{2n}$$

se obtienen para  $\beta$  los siguientes valores si  $((C_{\Delta})^2 - 4C_{\Delta 2}C) > 0$ :

$$\beta_1 = \frac{-C_{\Delta} + \sqrt{(C_{\Delta})^2 - 4C_{\Delta 2}C}}{2C_{\Delta 2}} \quad (5.3.41a)$$

$$\beta_2 = \frac{-C_\Delta - \sqrt{(C_\Delta)^2 - 4C_{\Delta 2}C}}{2C_{\Delta 2}} \quad (5.3.42)$$

si  $((C_\Delta)^2 - 4C_{\Delta 2}C) = 0$  entonces:

$$\beta_1 = \beta_2 = \frac{-C_\Delta}{2C_{\Delta 2}} \quad (5.3.43)$$

(no es posible que  $((C_\Delta)^2 - 4C_{\Delta 2}C) < 0$ ). El valor  $\beta$  que corresponde utilizar para obtener el valor de las variables en el estado intersección es el que cumple la condición  $0 \leq \beta \leq 1$  cuando  $\beta_1 \neq \beta_2$ . Las actualizaciones de los invariantes y del tensor de tensiones desviador entonces pueden calcularse con las siguientes expresiones:

$$p_{int} = p_n + \beta \Delta p \quad (5.3.44)$$

$$q_{int} = q_n + \beta \Delta q$$

y la actualización (aproximada) del tensor de tensiones desviador:

$$\mathbf{S}_{int} = \mathbf{S}_n + \beta (\mathbf{S}^* - \mathbf{S}_n) \quad (5.3.45)$$

Los incrementos de deformación tendrán una parte elástica entre los estados  $n$  e  $int$  y una parte no elástica entre  $int$  y  $n + 1$ . La parte no elástica del incremento total de deformaciones se puede aproximar haciendo:

$$\delta \Delta_{ne} = \delta \Delta (1 - \beta) \quad (5.3.46)$$

para la parte de deformación volumétrica incremental. Para el incremento no elástico del tensor desviador de deformaciones:

$$\delta \mathbf{e}_{ne} = \delta \mathbf{e} (1 - \beta) \quad (5.3.47)$$

## 2. Integración del paso plástico

**Aproximación linealizada** En el estado de prueba se tiene:

$$f^* = (q^*)^2 - M^2 p^* (p_{on} - p^*) > 0 \quad (5.3.48)$$

y se busca encontrar el estado caracterizado por  $(p_{n+1}, q_{n+1}, p_{on+1})$  para el cual  $f_{n+1} = 0$ . En la Figura [5.3.2] el esquema muestra como el algoritmo procede para encontrar el estado buscado.

Para utilizar un algoritmo de punto medio se escribe la regla de flujo en función del estado de prueba  $n + 1^*$  y del estado  $int$  encontrado en la sección anterior. La nomenclatura a utilizar es la del esquema de la Figura [5.3.2]. La regla de punto medio para todas las componentes del tensor de deformaciones plásticas es:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma}_2 \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)_{int} + \left( \frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^* \right] \quad (5.3.49)$$

Particularizando para la regla de flujo correspondiente al potencial plástico  $g_2$ , el incremento de deformación volumétrica plástica es:

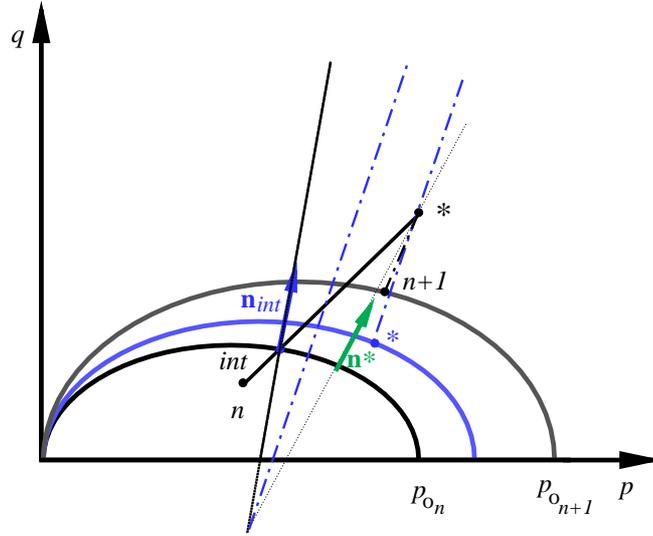


Figura 5.3.2: Esquema para el algoritmo de punto medio

$$\dot{\Delta}^p = \dot{\gamma}_2 \frac{\partial f}{\partial p} = \dot{\epsilon}_{ii}^p \quad (5.3.50)$$

$$\frac{\partial f}{\partial p} = -M^2 (p_o - 2 p)$$

la regla de punto medio entonces se escribe:

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}^p &= \dot{\gamma}_2 \frac{(-M^2)}{2} [(p_o - 2 p)_{int} + (p_o - 2 p)^*] \\ &= \dot{\gamma}_2 \frac{(-M^2)}{2} [(p_{on} - 2 p_{int}) + (p_{on} - 2 p^*)] \end{aligned} \quad (5.3.51)$$

$$\dot{\Delta}^p = \dot{\gamma}_2 [(-M^2) (p_{on} - p_{int} - p^*)] \quad (5.3.52)$$

Las componentes del tensor desviador de deformaciones plásticas es:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}^p &= \dot{\gamma}_2 \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \sigma} &= 2q \frac{\mathbf{S} \mathbf{3}}{q \ 2} \end{aligned} \quad (5.3.53)$$

la regla de punto medio entonces se escribe:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}^p &= \dot{\gamma}_2 \frac{1}{2} \left[ \left( 2q \frac{\mathbf{S} \mathbf{3}}{q \ 2} \right)_{int} + \left( 2q \frac{\mathbf{S} \mathbf{3}}{q \ 2} \right)^* \right] \\ &= \dot{\gamma}_2 \left[ \frac{3}{2} q_{int} \frac{\mathbf{S}_{int}}{q_{int}} + \frac{3}{2} q^* \frac{\mathbf{S}^*}{q^*} \right] \end{aligned} \quad (5.3.54)$$

$$\dot{\mathbf{e}}^p = \dot{\gamma}_2 \left[ \left( \frac{3}{2} \right) (\mathbf{S}_{int} + \mathbf{S}^*) \right] \quad (5.3.55)$$

El incremento del tensor de deformaciones plásticas:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma}_2 \left\{ [(-M^2)(p_{on} - p_{int} - p^*)] \frac{1}{3} \mathbf{1} + \left(\frac{3}{2}\right) (\mathbf{S}_{int} + \mathbf{S}^*) \right\} \quad (5.3.56)$$

La condición de consistencia es:

$$\begin{aligned} \dot{f}_2 &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)_{int} + \left( \frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^* \right] \Delta \boldsymbol{\sigma} + \\ &\quad \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \right)_{int} + \left( \frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \right)^* \right] \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.3.57)$$

la derivada de la función de fluencia respecto de las tensiones es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} &= \frac{\partial f_2}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f_2}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ &= -M^2 (p_o - 2p) \frac{1}{3} \delta_{ij} + 2q \frac{3}{2} \frac{S_{ij}}{q} \end{aligned} \quad (5.3.58)$$

La ley de endurecimiento isótropa empírica es:

$$\begin{aligned} p_o(\Delta) &= p_o(\Delta^p) \\ &= a_1 + a_2 \Delta^p + a_3 (\Delta^p)^2 \end{aligned} \quad (5.3.59)$$

La derivada de la función de fluencia respecto de las deformaciones plásticas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} &= \frac{\partial f_2}{\partial p_o} \frac{\partial p_o}{\partial \Delta^p} \frac{\partial \Delta^p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} + \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{e}^p} \frac{\partial \mathbf{e}^p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \\ &= -M^2 p (a_2 + 2a_3 \Delta^p) \delta_{ij} + 0 \end{aligned} \quad (5.3.60)$$

Reemplazando en (5.3.57), las expresiones (5.3.58) y (5.3.60), la condición de consistencia queda:

$$\begin{aligned} \dot{f}_2 &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial f_2}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)_{int} + \left( \frac{\partial f_2}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^* \right] \Delta p + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial f_2}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)_{int} + \left( \frac{\partial f_2}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^* \right] \Delta \mathbf{S} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial f_2}{\partial p_o} \frac{\partial p_o}{\partial \Delta^p} \frac{\partial \Delta^p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \right)_{int} + \left( \frac{\partial f_2}{\partial p_o} \frac{\partial p_o}{\partial \Delta^p} \frac{\partial \Delta^p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \right)^* \right] \dot{\Delta}^p \end{aligned} \quad (5.3.61)$$

Se procede a encontrar las expresiones de los incrementos de: presión  $\Delta p$ , de las componentes del tensor desviador de tensiones  $\Delta \mathbf{S}$  y de la deformación volumétrica plástica  $\dot{\Delta}^p$  en función de las variables de estado en el paso previo  $n$  y en el estado de prueba  $n + 1^*$ .

El incremento de la presión:

$$\begin{aligned} \Delta p &= p_{n+1}^j - p_{int} \\ &= \left( p^* - K_n \dot{\Delta}^p \right) - p_{int} \\ &= p^* - K_n \dot{\gamma}_2 [(-M^2)(p_{on} - p_{int} - p^*)] - p_{int} \end{aligned} \quad (5.3.62)$$

Si se considera que el estado plástico esta “congelado” y dado que la trayectoria que lleva del estado anterior  $n$  al estado de prueba  $n + 1^*$  se supuso elástica, entonces teniendo en cuenta (5.3.46) se puede escribir:

$$p^* = p_{int} + K_n \delta \Delta_{ne} \quad (5.3.63)$$

reemplazando (5.3.63) en (5.3.62), en se obtiene:

$$\begin{aligned} \Delta p &= p_{int} + K_n \delta \Delta_{ne} - K_n \dot{\gamma}_2 [(-M^2) (p_{on} - p_{int} - p^*)] - p_{int} \\ &= K_n \delta \Delta_{ne} - K_n \dot{\gamma}_2 [(-M^2) (p_{on} - p_{int} - p^*)] \end{aligned} \quad (5.3.64)$$

El incremento de las componentes del tensor desviador de tensiones:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{S} &= \mathbf{S}_{n+1}^j - \mathbf{S}_{int} \\ &= (\mathbf{S}^* - 2G_n \dot{\mathbf{e}}^p) - \mathbf{S}_{int} \\ &= \mathbf{S}^* - 2G_n \dot{\gamma}_2 \left[ \left( \frac{3}{2} \right) (\mathbf{S}_{int} + \mathbf{S}^*) \right] - \mathbf{S}_{int} \end{aligned} \quad (5.3.65)$$

haciendo las mismas consideraciones, se puede escribir

$$\mathbf{S}^* = \mathbf{S}_{int} + 2G_n \delta \mathbf{e}_{ne} \quad (5.3.66)$$

reemplazando (5.3.66) en (5.3.65) se tiene:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{S} &= \mathbf{S}_{int} + 2G_n \delta \mathbf{e}_{ne} - 2G_n \dot{\gamma}_2 \left[ \left( \frac{3}{2} \right) (\mathbf{S}_{int} + \mathbf{S}^*) \right] - \mathbf{S}_{int} \\ &= 2G_n \delta \mathbf{e}_{ne} - 2G_n \dot{\gamma}_2 \left[ \left( \frac{3}{2} \right) (\mathbf{S}_{int} + \mathbf{S}^*) \right] \end{aligned} \quad (5.3.67)$$

Finalmente el incremento de la deformación volumétrica plástica:

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}^p &= \dot{\varepsilon}_{ii}^p \\ \frac{\partial \dot{\Delta}^p}{\partial \varepsilon^p} &= \delta_{ij} \end{aligned} \quad (5.3.68)$$

Reemplazando las expresiones obtenidas para  $\Delta p$ ,  $\Delta \mathbf{S}$  y  $\dot{\Delta}^p$  y las derivadas de la función  $f_2$  en la condición de consistencia, ésta queda escrita:

$$\begin{aligned} \dot{f}_2 &= \frac{(-M^2)}{2} [(p_o - 2p)_{int} + (p_o - 2p)^*] \Delta p \frac{\delta_{ij}}{3} + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \left( 2q \frac{\mathbf{S} 3}{q 2} \right)_{int} + \left( 2q \frac{\mathbf{S} 3}{q 2} \right)^* \right] \Delta \mathbf{S} + \\ &+ \frac{(-M^2)}{2} [(p(a_2 + 2a_3 \Delta^p))_{int} + (p(a_2 + 2a_3 \Delta^p))^*] \dot{\Delta}^p \delta_{ij} = 0 \end{aligned}$$

Por considerar “congelado” el estado plástico:

$$\Delta_{int}^p = \Delta^{p*} = \Delta_n^p$$

$$(p_o)_{int} = (p_o)^* = (p_o)_n$$

entonces:

$$\begin{aligned} \dot{f}_2 &= [-M^2 (p_{on} - p_{int} - p^*)] \{K_n \delta\Delta_{ne} - K_n \dot{\gamma}_2 [-M^2 (p_{on} - p_{int} - p^*)]\} \\ &+ \frac{3}{2} (\mathbf{S}_{int} + \mathbf{S}^*) \left\{ 2G_n \delta\mathbf{e}_{ne} - \dot{\gamma}_2 \frac{3}{2} 2G_n (\mathbf{S}_{int} + \mathbf{S}^*) \right\} + \\ &+ \frac{3M^4}{2} (a_2 + 2a_3\Delta_n^p) (p_{int} + p^*) \dot{\gamma}_2 (p_{on} - p_{int} - p^*) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.3.69)$$

Despejando de la expresión (5.3.69) el parámetro de consistencia  $\dot{\gamma}_2$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{\gamma}_2 \{ K_n M^4 (p_{on} - p_{int} - p^*)^2 - 2G_n \frac{9}{4} (\mathbf{S}_{int} + \mathbf{S}^*)^2 \\ &+ \frac{3M^4}{2} (a_2 + 2a_3\Delta_n^p) (p_{int} + p^*) (p_{on} - p_{int} - p^*) \} \\ &- M^2 (p_{on} - p_{int} - p^*) K_n \delta\Delta_{ne} + \frac{3}{2} (\mathbf{S}_{int} + \mathbf{S}^*) 2G_n \delta\mathbf{e}_{ne} \end{aligned} \quad (5.3.70)$$

$$\dot{\gamma}_2 = \frac{- \left[ M^2 (p_{on} - p_{int} - p^*) K_n \delta\Delta_{ne} + \frac{3}{2} (\mathbf{S}_{int} + \mathbf{S}^*) 2G_n \delta\mathbf{e}_{ne} \right]}{K_n M^4 (p_{on} - p_{int} - p^*)^2 - 2G_n \frac{9}{4} (\mathbf{S}_{int} + \mathbf{S}^*)^2 + \frac{3M^4}{2} (a_2 + 2a_3\Delta_n^p) (p_{int} + p^*) (p_{on} - p_{int} - p^*)} \quad (5.3.71)$$

Encontrado el primer valor aproximado de  $\dot{\gamma}_2 = \dot{\gamma}_2^j$  (con  $j = 0$ ), se procede a actualizar las variables:

$$\begin{aligned} \left( \dot{\Delta}^p \right)^j &= \dot{\gamma}_2^j [(-M^2) (p_{on} - p_{int} - p^*)] \\ \left( \dot{\mathbf{e}}^p \right)^j &= \dot{\gamma}_2^j \left[ \left( \frac{3}{2} \right) (\mathbf{S}_{int} + \mathbf{S}^*) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Delta_{n+1}^p)^j &= \Delta_n^p + \left( \dot{\Delta}^p \right)^j \\ (\mathbf{e}_{n+1}^p)^j &= \mathbf{e}_n^p + \left( \dot{\mathbf{e}}^p \right)^j \end{aligned}$$

$$(p_{n+1})^j = p^* - K_n \left( \dot{\Delta}^p \right)^j$$

$$(\mathbf{S}_{n+1})^j = \mathbf{S}^* - 2G_n \left( \dot{\mathbf{e}}^p \right)^j$$

$$(q_{n+1})^j = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{(\mathbf{S}_{n+1})^j : (\mathbf{S}_{n+1})^j}$$

$$(p_o)_{n+1}^j = a_1 + a_2 (\Delta_{n+1}^p)^j + a_3 \left( (\Delta_{n+1}^p)^j \right)^2$$

Con las variables actualizadas, en primer aproximación, se procede a verificar si el estado encontrado verifica la función de fluencia  $f_2$ :

$$\begin{aligned} (f_2)_{n+1}^j &= \left( (q_{n+1})^j \right)^2 - M^2 (p_{n+1})^j \left( (p_o)_{n+1}^j - (p_{n+1})^j \right) \\ & \left| (f_2)_{n+1}^j \right| < tol \\ tol &= 0,01 |f_2^*| \end{aligned} \quad (5.3.72)$$

Si la condición no se cumple, puede mejorarse la solución (5.3.72) adicionando deformaciones plásticas con las siguientes consideraciones [Ortiz and Simo, 1986]:

- las deformaciones totales permanecen fijas
- las deformaciones plásticas adicionales tienen la finalidad de relajar las tensiones

**Mejora de la solución** Con el fin de mejorar la solución dada por (5.3.72) se procede a desarrollar en serie de Taylor la expresión de la superficie de fluencia (5.3.14) en el entorno de la primera aproximación a la solución  $(n+1)^{j=0}$ . Incrementando la iteración

$$j = j + 1$$

entonces el nuevo estado  $j$  mejorado se busca cumpla:

$$(f_2)_{n+1}^j = (f_2)_{n+1}^{j-1} + \left( \frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)_{n+1}^{j-1} \Delta \boldsymbol{\sigma} + \left( \frac{\partial f_2}{\partial \varepsilon^p} \right)_{n+1}^{j-1} \Delta \varepsilon^p = 0 \quad (5.3.73)$$

las derivadas de la función de fluencia

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} &= \frac{\partial f_2}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Delta \boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial f_2}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Delta \boldsymbol{\sigma} \\ &= \frac{\partial f_2}{\partial p} \frac{1}{3} \delta_{ij} \Delta \boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial f_2}{\partial q} \frac{3}{2} \frac{\mathbf{S}}{q} \Delta \boldsymbol{\sigma} \\ &= \frac{\partial f_2}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial f_2}{\partial q} \frac{3}{2} \frac{\mathbf{S}}{q} \Delta \mathbf{S} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial p} = M^2(2p - p_o)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial q} = 2q$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial \varepsilon^p} &= \frac{\partial f_2}{\partial p_o} \frac{\partial p_o}{\partial \Delta^p} \Delta \left( \dot{\Delta}^p \right) \\ &= \frac{\partial f_2}{\partial p_o} (a_2 + 2a_3 \Delta_{n+1}^p) \Delta \left( \dot{\Delta}^p \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial p_o} = -M^2 p$$

En este caso, los incrementos de  $\Delta p$ ,  $\Delta \mathbf{S}$ ,  $\Delta \left( \dot{\Delta}^p \right)$  y  $\Delta \left( \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \right)$  entre la iteración  $j$  y  $j - 1$  son:

$$\Delta p = (p_{n+1})^j - (p_{n+1})^{j-1} \quad (5.3.74)$$

$$\begin{aligned} &= \left[ (p_{n+1})^{j-1} - \delta\dot{\gamma}_2 K_n \left( \frac{\partial f_2}{\partial p} \right)_{n+1}^{j-1} \right] - (p_{n+1})^{j-1} \\ &= -\delta\dot{\gamma}_2 K_n \left( -M^2 \left( (p_o)_{n+1}^{j-1} - 2 (p_{n+1})^{j-1} \right) \right) \\ &= \delta\dot{\gamma}_2 K_n \left( M^2 \left( (p_o)_{n+1}^{j-1} - 2 (p_{n+1})^{j-1} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\Delta p = \delta\dot{\gamma}_2 K_n \left( M^2 \left( (p_o)_{n+1}^{j-1} - 2 (p_{n+1})^{j-1} \right) \right) \quad (5.3.75)$$

$$\Delta \mathbf{S} = (\mathbf{S}_{n+1})^j - (\mathbf{S}_{n+1})^{j-1} \quad (5.3.76)$$

$$= \left[ (\mathbf{S}_{n+1})^{j-1} - \delta\dot{\gamma}_2 2G_n \left( \frac{\partial f_2}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)_{n+1}^{j-1} \right] - (\mathbf{S}_{n+1})^{j-1}$$

$$\Delta \mathbf{S} = -\delta\dot{\gamma}_2 2G_n 3 (\mathbf{S}_{n+1})^{j-1} \quad (5.3.77)$$

$$\Delta \left( \dot{\Delta}^p \right) = \delta\dot{\gamma}_2 \left( \frac{\partial f_2}{\partial p} \right)_{n+1}^{j-1} \quad (5.3.78)$$

$$= \delta\dot{\gamma}_2 \left( -M^2 \left( (p_o)_{n+1}^{j-1} - 2 (p_{n+1})^{j-1} \right) \right)$$

$$\Delta \left( \dot{\Delta}^p \right) = \delta\dot{\gamma}_2 \left( -M^2 \left( (p_o)_{n+1}^{j-1} - 2 (p_{n+1})^{j-1} \right) \right) \quad (5.3.79)$$

$$\Delta \left( \dot{\mathbf{e}}^p \right) = \delta\dot{\gamma}_2 \left( \frac{\partial f_2}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)_{n+1}^{j-1} \quad (5.3.80)$$

$$\Delta \left( \dot{\mathbf{e}}^p \right) = \delta\dot{\gamma}_2 3 (\mathbf{S}_{n+1})^{j-1}$$

entonces se tiene que:

$$\Delta p = -K_n \Delta \left( \dot{\Delta}^p \right) \quad (5.3.81)$$

$$\Delta \mathbf{S} = -2G_n \Delta \left( \dot{\mathbf{e}}^p \right) \quad (5.3.82)$$

Reemplazando en (5.3.73):

$$(f_2)_{n+1}^j = (f_2)_{n+1}^{j-1} + \left( \frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)_{n+1}^{j-1} \Delta \boldsymbol{\sigma} + \left( \frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \right)_{n+1}^{j-1} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = 0 \quad (5.3.83)$$

$$0 = (f_2)_{n+1}^{j-1} + \left( \frac{\partial f_2}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial f_2}{\partial q} \frac{3}{2} \frac{\mathbf{S}}{q} \Delta \mathbf{S} \right)_{n+1}^{j-1} + \left( \frac{\partial f_2}{\partial p_o} \frac{\partial p_o}{\partial \Delta^p} \Delta \left( \dot{\Delta}^p \right) \right)_{n+1}^{j-1} \quad (5.3.84)$$

$$0 = (f_2)_{n+1}^{j-1} \quad (5.3.85)$$

$$+ \{ [M^2 (2 (p_{n+1})^{j-1} - (p_o)_{n+1}^{j-1}) \delta\dot{\gamma}_2 K_n [M^2 (2 (p_{n+1})^{j-1} - (p_o)_{n+1}^{j-1})]] \}$$

$$+ 2 (q_{n+1})^{j-1} \frac{3}{2} \frac{(\mathbf{S}_{n+1})^{j-1}}{(q_{n+1})^{j-1}} [-\delta\dot{\gamma}_2 2G_n 3 (\mathbf{S}_{n+1})^{j-1}] \}$$

$$+ \{ -M^2 (p_{n+1})^{j-1} [a_2 + 2a_3 \left( \dot{\Delta}^p \right)_{n+1}^{j-1}] \delta\dot{\gamma}_2 [-M^2 ((p_o)_{n+1}^{j-1} - 2 (p_{n+1})^{j-1})] \}$$

despejando  $\delta\dot{\gamma}_2$  de la expresión anterior se tiene:

$$\delta\dot{\gamma}_2 = \frac{-(f_2)_{n+1}^{j-1}}{M^4 K_n ((p_o)_{n+1}^{j-1} - 2 (p_{n+1})^{j-1})^2 + 9 2G_n ((\mathbf{S}_{n+1})^{j-1} : (\mathbf{S}_{n+1})^{j-1}) + M^4 (p_{n+1})^{j-1} \left( a_2 + 2a_3 \left( \dot{\Delta}^p \right)^{j-1} \right) ((p_o)_{n+1}^{j-1} - 2 (p_{n+1})^{j-1})} \quad (5.3.86)$$

se procede a una nueva actualización de las variables:

$$\Delta \left( \dot{\Delta}^p \right) = \delta\dot{\gamma}_2 \left( -M^2 \left( (p_o)_{n+1}^{j-1} - 2 (p_{n+1})^{j-1} \right) \right) \quad (5.3.87)$$

$$(\Delta_{n+1}^p)^j = (\Delta_{n+1}^p)^{j-1} + \Delta \left( \dot{\Delta}^p \right) \quad (5.3.88)$$

$$\Delta \left( \mathbf{e}^p \right) = \delta\dot{\gamma}_2 3 (\mathbf{S}_{n+1})^{j-1} \quad (5.3.89)$$

$$\left( \mathbf{e}^p \right)^j = \left( \mathbf{e}^p \right)^{j-1} + \Delta \left( \mathbf{e}^p \right) \quad (5.3.90)$$

$$(p_{n+1})^j = (p_{n+1})^{j-1} - K_n \Delta \left( \dot{\Delta}^p \right) \quad (5.3.91)$$

$$(\mathbf{S}_{n+1})^j = (\mathbf{S}_{n+1})^{j-1} - 2G_n \Delta \left( \mathbf{e}^p \right) \quad (5.3.92)$$

$$(q_{n+1})^j = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{(\mathbf{S}_{n+1})^j : (\mathbf{S}_{n+1})^j} \quad (5.3.93)$$

con estos nuevos valores se vuelve a verificar si se cumple la condición:

$$(f_2)_{n+1}^j = \left( (q_{n+1})^j \right)^2 - M^2 (p_{n+1})^j \left( (p_o)_{n+1}^j - (p_{n+1})^j \right) \quad (5.3.94)$$

$$\left| (f_2)_{n+1}^j \right| < tol \quad (5.3.95)$$

de no cumplirse se procede a una nueva corrección.

#### 5.3.4. Algoritmo de selección de la superficie de fluencia activa

El criterio que se utiliza para integrar el paso plástico es el siguiente:

- Se calcula  $p_{cc}$  que es la abscisa de la intersección entre  $f_1$  y  $f_2$
- Si  $f_1(p^*, q^*) < 0$  y  $f_2(p^*, q^*) > 0$ , se utiliza la función  $f_2$
- Si  $f_1(p^*, q^*) > 0$  y  $f_2(p^*, q^*) > 0$  y  $p^* > p_{cc}$ , se utiliza la función  $f_2$
- Si  $f_1(p^*, q^*) > 0$  y  $f_2(p^*, q^*) > 0$  y  $p^* < p_{cc}$ , se utiliza la función  $f_1$

Se denota con  $p^*$  al valor de la presión de prueba en el paso  $n + 1$  y con  $q^*$  al invariante definido en (5.3.7) calculado con el tensor desviador de tensiones de prueba en el paso  $n + 1$ . De esta manera se evitan problemas en el punto de intersección. Una forma de evitar el problema en el punto intersección entre  $f_1$  y  $f_2$  sería utilizar superficies que fueran tangentes en el punto de intersección, esta opción fue evaluada. Se optó por mantener las superficies con intersección no suave, como una aproximación dada su mayor simpleza.

**Calculo de la presión de referencia  $p_{cc}$** 

Con el fin de encontrar la presión de referencia  $p_{cc}$  se procede a igualar los valores de  $q^2$  del modelo de Drucker Prager y del modelo Cam Clay modificado. De la expresión (5.3.9):

$$q^2 = 3(3\alpha p + K_p)^2 \quad (5.3.96)$$

y de (5.3.14)

$$q^2 = M^2 p(p_o - p) \quad (5.3.97)$$

igualando (5.3.96) y (5.3.97):

$$3(3\alpha p + K_p)^2 - M^2 p(p_o - p) = 0 \quad (5.3.98)$$

la cual puede escribirse

$$Ap^2 + Bp + C = 0 \quad (5.3.99)$$

$$A = 27\alpha^2 + M^2 \quad (5.3.100)$$

$$B = 18\alpha K_p - M^2 p_o$$

$$C = 3K_p^2$$

Pueden presentarse los siguientes casos:

- Si  $K_p = 0$  habrá siempre dos raíces para los estados de tensiones posibles, uno será  $p_{cc} = 0$  y el que interesa:

$$p_{cc} = \frac{M^2 p_o}{27\alpha^2 + M^2} \quad (5.3.101)$$

- Si  $K_p \neq 0$  pueden presentarse cualquiera de los casos clásicos de la regla de Bascara:

- $B^2 - 4AC < 0$ , no hay intersección. Lo cual significa que el elipsoide es muy pequeño y que el material debe endurecer por deformación para que el elipsoide aumente su tamaño y la intersección sea posible. En este caso,  $f_1 < 0$  y  $f_2 > 0$  por lo cual estará activa la función  $f_2$ .
- $B^2 - 4AC = 0$ , el elipsoide  $f_2$  es tangente a la función  $f_1$  y habrá una raíz doble:

$$p_{cc} = \frac{M^2 p_o - 18\alpha K_p}{2(27\alpha^2 + M^2)} \quad (5.3.102)$$

- $B^2 - 4AC > 0$ , el elipsoide  $f_2$  intersecciona a  $f_1$  para dos valores de presión, de los cuales solo interesa el mayor:

$$p_{cc} = \frac{M^2 p_o - 18\alpha K_p + \sqrt{-36\alpha K_p M^2 p_o + M^4 p_o^2 - 12K_p^2 M^2}}{2(27\alpha^2 + M^2)} \quad (5.3.103)$$

Obtenido el valor de  $p_{cc}$  puede procederse a determinar cual función esta activa.

## 5.4. Determinación de los parámetros constitutivos

En esta sección se resume como evaluar los parámetros que definen las características del material granular. Los parámetros se determinan a partir de los datos de ensayos estándar de la mecánica de suelos.

- Para determinar la *densidad  $\rho$  del material granular*, se supone que las partículas son indeformables y el valor de  $\rho$  depende de la relación de vacíos que se adopte. El valor inicial  $\rho_o$  se utiliza para calcular la matriz de masa concentrada de cada elemento, la cual permanece constante durante la simulación. La densidad del material variará a lo largo de la simulación debido a las variaciones de volumen que son atribuidas a la disminución o aumento del volumen ocupado por los vacíos. La variación del volumen cambia el valor de la relación de vacíos.

El volumen específico se define como:

$$V = 1 + e \quad (5.4.1)$$

siendo  $e$  la relación de vacíos definida como:

$$e = \frac{V_v}{V_s} \quad (5.4.2)$$

donde  $V_v$  es la parte del volumen total  $V$  de la muestra ocupado por los vacíos y  $V_s$  es la parte del volumen total ocupada por las partículas sólidas el cual se considera constante. Para el cálculo de la densidad del material granular se desprecia la masa del aire contenido en los intersticios (ya que se trabajará con materiales secos). El volumen de sólidos se relaciona con la densidad media de las partículas  $\rho_s$  permitiendo calcular la masa y la densidad inicial de la muestra como:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{m}{V} \\ \rho &= \frac{\rho_s}{1 + e_o} \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

siendo  $e_o$  el valor inicial de la relación de vacíos adoptada.

- Para encontrar las constantes que definen el valor del *módulo elástico tangente  $E_{ur}$* , la determinación de los dos parámetros se hace en dos etapas. [Duncan and Chang, 1970], basándose en el trabajo de Jambu proponen un procedimiento para determinar los dos parámetros.

Primero escriben la relación dada por [Jambu, 1963], de la siguiente manera:

$$E_i = k p_a \left( \frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \quad (5.4.4)$$

donde  $E_i$  es el módulo tangente inicial,  $p_a$  la presión atmosférica y  $\sigma_3$  la tensión principal menor. El módulo tangente, la presión atmosférica y la tensión principal menor deben ser expresados con las mismas unidades. Denominan como número módulo a la constante adimensional  $k$  y  $n$  es el exponente que determina la tasa de variación de  $E_i$  con  $\sigma_3$ .

El procedimiento consiste en ajustar una hipérbola a las curvas tensión deformación del material granular según el modelo propuesto por [Kodner and Zelasko, 1963]:

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{\varepsilon_{ax}}{a + b\varepsilon_{ax}}$$

donde  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$  son las tensiones principales mayor y menor respectivamente,  $\varepsilon_{ax}$  es la deformación axial de la probeta cilíndrica y  $a$  y  $b$  dos constantes a determinar. Las curvas correspondientes a carga primaria de ensayos de compresión triaxial estándar para la misma relación de vacíos inicial y diferentes presiones de confinamiento  $\sigma_3$  (constantes durante un dado ensayo) se grafican llevando en abscisas la deformación axial  $\varepsilon_{ax}$  y en ordenadas el cociente entre la deformación axial y la diferencia de tensiones ( $\varepsilon_{ax}/(\sigma_1 - \sigma_3)$ ). En el gráfico se obtiene una recta de ordenada al origen  $a = 1/E_i$  y pendiente  $b$  (valor asintótico de la diferencia de tensiones última). Con ello se obtiene un valor de  $E_i$  relacionado al valor correspondiente de  $\sigma_3$ . Los pares de valores ( $\sigma_3; E_i$ ) se representan en un gráfico doble logarítmico y se ajusta una recta a estos datos siendo  $k$  el valor donde la recta intersecta a la abscisa de valor 1 y  $n$  es la pendiente de dicha recta. Queda determinado el valor de  $n$ .

Luego, [Duncan and Chang, 1970] en base a trabajos previos de otros investigadores quienes mostraron que puede considerarse a un suelo como un material elastoplástico, realizaron ensayos adicionales sometiendo las muestra a uno o más ciclos de descarga-recarga. Observaron que una arena tiene una pequeña cantidad de histéresis pero que es muy cercana a un comportamiento lineal y elástico. Además los valores de los módulos son prácticamente los mismos aun cuando ocurren a diferentes niveles de deformaciones y tensiones. En base a esto consideran razonable que el comportamiento tensión deformación de un suelo en descarga recarga pueda ser aproximado con alto grado de exactitud como lineal y elástico. Debido a que este comportamiento lineal es independiente del valor de la diferencia de tensiones, se tiene que el valor representativo del módulo depende solo de la presión de confinamiento  $\sigma_3$ . La variación del valor del módulo de descarga recarga con la presión de confinamiento puede ser representada con una expresión similar a la dada por Jambu:

$$E_{ur} = k_{ur} p_a \left( \frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \quad (5.4.5)$$

siendo  $E_{ur}$  el valor del módulo de descarga recarga y  $k_{ur}$  el correspondiente número módulo. La influencia de la presión de confinamiento en el módulo de descarga recarga a los fines prácticos es la misma que para carga primaria y está dada por el exponente  $n$ . El valor de  $k_{ur}$  resulta ser mayor que  $k$  para carga primaria.  $E_{ur}$  se obtiene ajustando una recta a las curvas de descarga recarga en un gráfico de  $(\sigma_1 - \sigma_3)$  en función de  $\varepsilon_{ax}$ .

- Los valores de la *relación de Poisson* fueron calculados por [Duncan and Chang, 1970] para incrementos de tensión axial por medio de la expresión:

$$v = \frac{\Delta\varepsilon_{ax} - \Delta\varepsilon_{vol}}{2\Delta\varepsilon_{ax}} \quad (5.4.6)$$

obteniendo para una arena suelta en descarga recarga valores comprendidos entre 0,26 y 0,41. Para una arena suelta los valores varían menos con el nivel de tensiones que en el caso de una arena densa. Esto conduce a que no es posible caracterizar el comportamiento de una arena exactamente con un simple valor de la relación de Poisson. (Debido a que una arena se expande volumetricamente cuando es sometida a tensiones de corte, una relación más apropiada debe reflejar la influencia de las tensiones de corte en los cambios de volumen y de la presión en las deformaciones de corte).

[Lade, 1977] utiliza para el módulo de Poisson el valor 0,2 para las partes elásticas de los caminos de tensiones de descarga recarga.

- Los valores del *ángulo de fricción interna*  $\phi$  y de la *cohesión*  $c$ , se obtienen ajustando una recta a la envolvente de falla (modelo de Mohr Coulomb) en el rango de tensiones bajo a medio. La envolvente de falla se obtiene como la tangente a los círculos de Mohr para las tensiones desviadoras máximas obtenidas en los ensayos con diferentes presiones de confinamiento y la misma relación de vacíos inicial. En función de  $\phi$  y  $c$  se encuentran los valores de los coeficientes de Drucker Prager.
- Para determinar el valor de la relación de tensiones correspondiente al estado crítico  $M = q_{cs}/p_{cs}$  a partir de los ensayos de compresión triaxiales se debe construir el gráfico de  $q = \sigma_1 - \sigma_3$  en función de  $p = (\sigma_1 + 2\sigma_3)/3$  para los valores últimos obtenidos para cada ensayo con distinto valor de  $\sigma_3$  para la misma relación de vacíos inicial. A los valores obtenidos se le ajusta una recta cuya pendiente es el valor del parámetro  $M$ .
- Para determinar los coeficientes que definen la ley de endurecimiento, se ajusta un polinomio cuadrático (o lineal) a la curva de compresión normal corregida en el rango de tensiones bajas a medias. Como resultado del ajuste se tienen los coeficientes  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$ .

En el Apéndice 2 se presentan los valores de los ensayos triaxiales correspondientes a la arena del río Sacramento, publicados por [Lee and Seed, 1967], utilizados para construir los gráficos y obtener los valores de los parámetros del modelo.

### 5.5. Hipótesis para la etapa de vaciado del silo.

Durante la etapa de vaciado de un silo o una tolva, el material que se encuentra almacenado cerca de la salida comienza a experimentar una expansión volumétrica que se propaga hacia arriba. La relación constitutiva permite que el material se ablande a causa de las deformaciones plásticas expansivas hasta que la condición impuesta por el ápice de la función de Drucker Prager es violada por el estado de tensiones del material. En este caso el material se ha expandido de modo que la relación de vacíos es mayor a la máxima inicial del material (justo en el momento en que el material ingresa al silo) lo cual significa que no hay contacto entre las partículas sólidas. A este estado, en el que no hay contacto entre las partículas, se lo denomina estado disgregado. Al haberse perdido

el contacto entre los granos el material ha perdido su capacidad de transmitir fuerzas internas, estando los granos en caída libre por acción de la gravedad.

Desde el punto de vista algorítmico, cuando el estado del material en el punto de integración ha disgregado se procede a hacer que la contribución al vector de fuerzas internas sea nula. El vector de fuerzas externas y la matriz de masa concentrada del elemento no se alteran, lo cual somete al material a la acción de la gravedad estando los granos en caída libre.

Si en el próximo paso, el volumen del elemento se contrae y las partículas vuelven a tener contacto entre sí, el grano vuelve a transmitir fuerzas internas. La relación constitutiva vuelve a cumplirse en el punto de integración y hay contribución al vector de fuerzas internas del elemento.

Durante la etapa transitoria, al inicio del proceso de vaciado, son de esperarse alternancias entre los estados en los cuales el material transmite fuerzas internas y en el que se encuentra en estado disgregado (caída libre de los granos).

Cuando todos los nodos del elemento tienen sus coordenadas fuera del volumen del silo (o tolva) se cumple lo que se denomina la condición cinemática de salida del elemento. Cuando esto sucede, se eliminan las contribuciones del elemento al vector de fuerzas internas, al vector de fuerzas externas y a la matriz de masa globales del sistema.

El programa de elementos finitos se detiene cuando alguna de las siguientes condiciones se satisface:

- Cuando han salido todos los elementos de sólido granular
- Cuando se ha llegado al valor límite máximo dado al pseudo tiempo
- Cuando por distorsión excesiva de algún elemento el determinante Jacobiano adopta un valor menor o igual a cero.



## Capítulo 6

# Simulación de ensayos triaxiales

### 6.1. Introducción

En el presente capítulo se modelan ensayos de la mecánica de suelos con el modelo implementado utilizando los parámetros calculados para una arena. La finalidad es detectar en que medida el comportamiento del material granular es representado por el modelo dentro del rango de tensiones que se espera se desarrollen en un silo real de ser llenado con éste material. Los resultados numéricos son comparados con los datos experimentales de los cuales se obtuvieron los parámetros de caracterización.

### 6.2. Modelado de ensayos triaxiales

#### 6.2.1. Descripción del ensayo triaxial de compresión isotrópica

Los ensayos se llevan a cabo dentro de una cámara de compresión triaxial en muestras cilíndricas preparadas a una determinada relación de vacíos. El diámetro de las probetas es de  $3,55\text{cm}$  y la altura de  $8,64\text{cm}$ . Las muestras de arena con granulometría bastante uniforme son preferidas por evitarse la segregación durante el armado de las probetas. Se coloca la muestra dentro de la cámara sujetando la membrana a los cabezales. La arena es saturada cuidadosamente con agua desaireada. Luego se aplica una presión de succión en la válvula de drenaje para rigidizar la muestra y remover el molde. La cámara se llena completamente con agua desaireada, aplicándose la presión de confinamiento con un sistema hidráulico. Una presión de confinamiento inicial de  $50\text{KPa}$  ( $0,5\text{Kg/cm}^2$ ), es requerida para formar la muestra, las lecturas de los cambios volumétricos son realizadas para presiones mayores a este valor inicial. La presión de la cámara (presión de confinamiento) es incrementada manteniendo totalmente abiertos los drenajes para que la presión de poros en exceso sea disipada casi instantáneamente. Los incrementos de presión se aplican lentamente hasta que la velocidad de cambio volumétrico es suficientemente pequeña y mayores cambios debidos al aumento de la presión durante el ensayo son insignificantes (120 min de duración).

Los cambios volumétricos durante el ensayo son medidos observando el volumen de agua que la muestra desaloja. Las deformaciones axiales son medidas al comprimir la muestra aumentando la presión de la cámara (compresión que actúa en todas las direcciones) para comparar el volumen

de agua desalojado por la muestra dado que en general la deformación volumétrica es muy cercana a tres veces la deformación axial.

Con este ensayo se obtienen los datos para construir el gráfico de relación de vacíos en función de la presión, a partir del cual puede obtenerse la curva de compresión normal (deformación volumétrica en función de la presión) de la cual se obtiene la ley de endurecimiento.

### 6.2.2. Modelo del ensayo triaxial de compresión isotrópica.

Para modelar el ensayo de compresión isotrópica se utilizan elementos de axilsimetría para representar a la probeta cilíndrica. Dado que la probeta tiene como ejes de simetría el eje de simetría de rotación y el plano perpendicular al anterior que pasa por la mitad de su altura, solo se discretiza un cuarto de la sección vertical de la probeta, como se muestra en la Figura [6.2.1 a)]. Las condiciones de contorno cinemáticas son: los nodos que pertenecen al eje de simetría de rotación no pueden desplazarse en la dirección  $X_1$  y los nodos que pertenecen a la sección media no pueden desplazarse en la dirección  $X_2$ , como se muestra en la Figura [6.2.1 b)]. La presión de confinamiento se representa por una presión uniforme  $p_c(t)$  aplicada sobre los lados de los elementos que pertenecen a la superficie de la probeta y que responde a la función de la Figura [6.2.1 c)].

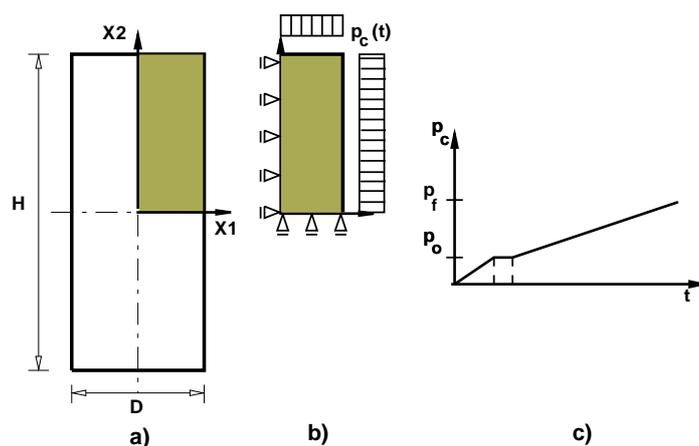


Figura 6.2.1: Esquema de una probeta cilíndrica y función de carga para el modelo numérico

El incremento de presión sobre la probeta se simula haciendo que la magnitud de la presión de confinamiento varíe linealmente con el tiempo. La función  $p_c(t)$  se define en tres tramos, el primero hace que la presión crezca desde cero hasta el valor de la presión de precarga ( $50\text{KPa}$ ), en el segundo tramo se mantiene el valor de precarga constante y en el tercero el valor de la presión se incrementa desde el valor de precarga hasta el valor final ( $10\text{GPa}$ ).

### Comparación de los resultados del modelo con los datos experimentales.

Los valores de los parámetros del modelo corresponden a una arena uniforme ensayada por [Lee and Seed, 1967] y por [Lade, 1977].

En la Figura [6.2.2] se comparan los resultados obtenidos utilizando el valor 0,2 para el coeficiente de Poisson y adoptando que la variación del módulo de descarga recarga es función de la tensión principal menor (convención de mecánica de suelos) como proponen [Duncan and Chang, 1970]

y [Lade, 1977] y un segundo caso suponiendo que el módulo es función de la presión. Los resultados obtenidos en los dos casos son prácticamente coincidentes. La segunda opción es menos costosa desde el punto de vista computacional, y es la opción adoptada.

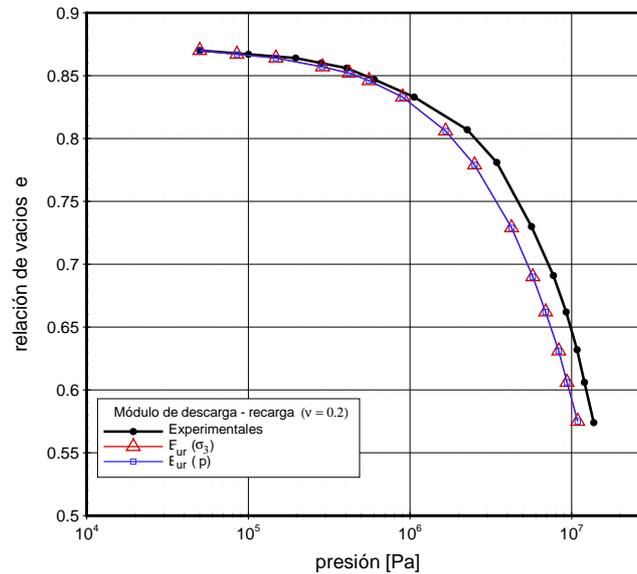


Figura 6.2.2: Dependencia funcional del módulo de descarga recarga

En el gráfico de la Figura [6.2.3] se comparan los datos experimentales y los resultados obtenidos al utilizar para el coeficiente de Poisson los valores 0,2, 0,3 y 0,35. Para valores de presión de 50 a 500  $KPa$  se observa que las predicciones difieren poco entre sí y con los valores experimentales. Para valores de presión más elevados las predicciones se separan entre sí y de los datos experimentales siendo la más cercana a los datos empíricos la curva correspondiente a  $\nu = 0,35$ .

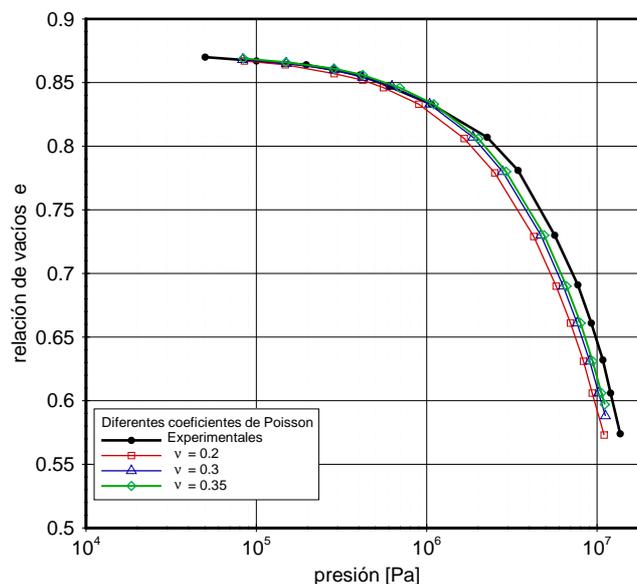


Figura 6.2.3: Influencia del valor adoptado para el coeficiente de Poisson

Debido a que no siempre se cuenta con la información experimental para poder obtener el valor del coeficiente  $M$ , que fija la forma de la elipse del Cap, se comparan en la Figura [6.2.4] los datos experimentales y los resultados obtenidos utilizando el valor obtenido de los datos experimentales  $M = 1,2496$  y los correspondientes a  $M = 1,36$  que es el valor estimado como el ángulo de fricción interna dividido 25 según propuesta de Wood [Wood, 1991]. En ambos casos se utilizó para coeficiente de Poisson el valor 0,30. La predicción del modelo es prácticamente la misma, presentando muy buena aproximación en el rango de bajas presiones de confinamiento y desmejorando para valores de presión mayores a  $1GPa$ . El error relativo entre la predicción de la presión y el valor experimental es del orden del 17% a muy alta presión. Cabe señalar que en los silos no se espera se alcancen valores de presión mayores a  $500KPa$ .

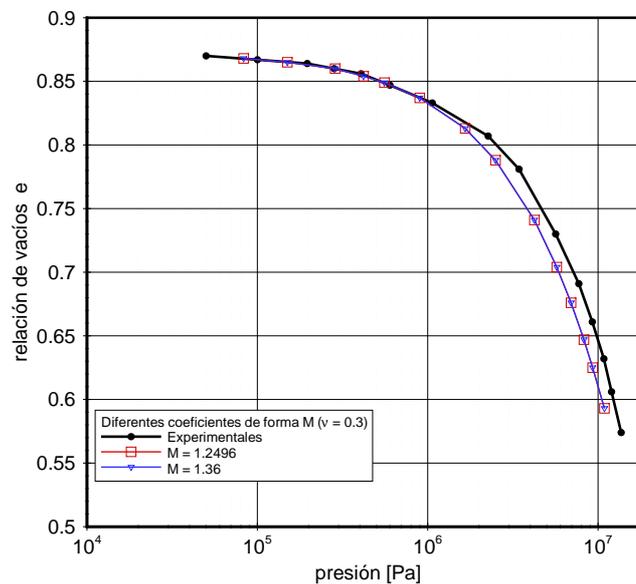


Figura 6.2.4: Influencia del valor adoptado para el coeficiente  $M$

De lo presentado se observa que en el rango de bajas presiones hasta aproximadamente  $500KPa$  son muy buenos en todos los casos, y a mayores valores de la presión de confinamiento se hace notoria la influencia del valor del coeficiente de Poisson adoptado, obteniéndose mejor predicción para el mayor valor del coeficiente. Adoptar un coeficiente de Poisson constante en un rango tan amplio de presiones es una simplificación importante ya que se están despreciando las interacciones que la presión tiene sobre las deformaciones de corte y de las tensiones de corte sobre el cambio volumétrico.

### 6.2.3. Descripción del ensayo triaxial de compresión convencional drenado.

La preparación de la muestra y su montaje en la cámara triaxial es idéntica a la descrita para el ensayo de compresión isotrópica, y la deformación volumétrica es medida de la misma manera. Los valores de equilibrio de la relación de vacíos (al inicio de la etapa de corte) son determinados a partir de los resultados del ensayo de compresión isotrópica para la correspondiente presión de confinamiento. Al iniciarse la etapa de corte, se mantiene constante la presión en la cámara y se

aumenta la presión transmitida por el vástago al cabezal de la probeta

A lo largo de todos los estados de los ensayos, el área de la muestra es corregida por los efectos del cambio de volumen suponiendo que se deforma como un cilindro circular recto. Como criterio de falla en muchos casos se utiliza la máxima tensión desviadora alcanzada.

#### 6.2.4. Modelo del ensayo triaxial de compresión convencional drenado.

Para modelar el ensayo de compresión triaxial convencional drenado se utilizan elementos de axilsimetría, discretizándose solo un cuarto de la sección vertical de la probeta al igual que en el caso del ensayo de compresión isótropa. Las condiciones de contorno cinemáticas en los nodos que pertenecen a los ejes de simetría son las mismas que en el ensayo de compresión isótropa.

La presión de confinamiento se representa por una carga distribuida uniforme aplicada sobre los lados de los elementos que pertenecen a la superficie de la probeta. Esta presión se representa por la presión de confinamiento  $p_c(t)$  que es una función de dos tramos lineales. En el primer tramo varía desde 0 hasta el valor de la presión de confinamiento correspondiente al ensayo, valor que permanece constante en el segundo tramo. La presión desviadora  $p_d(t)$  se representa con una carga distribuida sobre los lados de los elementos en contacto con el cabezal superior de la probeta. Se define en dos tramos, durante el primer tramo tiene valor nulo (corresponde a la aplicación de la presión de confinamiento) y durante el segundo tramo aumenta desde cero hasta el valor máximo. Ambas funciones se presentan en la Figura [6.2.5].

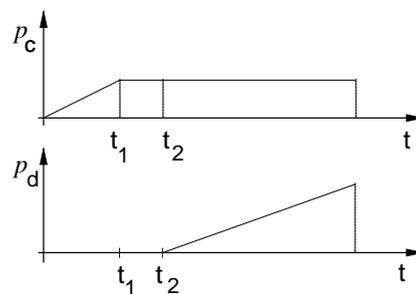


Figura 6.2.5: Variación de las cargas distribuidas para el ensayo de compresión convencional

#### Comparación de los resultados del modelo con los datos experimentales.

Los parámetros del modelo son los mismos que para el ensayo de compresión isótropa. En los gráficos se presentan los datos experimentales, que se adoptan como referencia, junto con los resultados obtenidos con el modelo. Se modelaron tres ensayos experimentales con diferente presión de confinamiento. Las Figuras [10.4] a [6.2.8] corresponden a la presión de confinamiento  $p_c = 100KPa$ , las Figuras [6.2.9] a [6.2.11] para  $p_c = 200KPa$  y las figuras [6.2.12] a [6.2.14] para  $p_c = 450KPa$ .

En la Figura [10.4] se comparan los resultados experimentales con los numéricos que se obtienen al considerar que el módulo de descarga recarga es función de la tensión principal menor (convención de mecánica de suelos) o que es función de la presión. Se observa que la predicción del modelo numérico con una u otra dependencia funcional es coincidente. En la Figura [10.4 a)] se

observa el gráfico de la relación de tensiones en función de la deformación axial que presenta buena concordancia con los datos experimentales para bajas deformaciones axiales de la probeta. En la Figura [10.4 b)] donde se gráfica la deformación volumétrica en función de la deformación axial se observa que la predicción de las deformaciones hecha por el modelo no logra captar la expansión de volumen que sufre la arena al ser sometida a tensiones de corte.

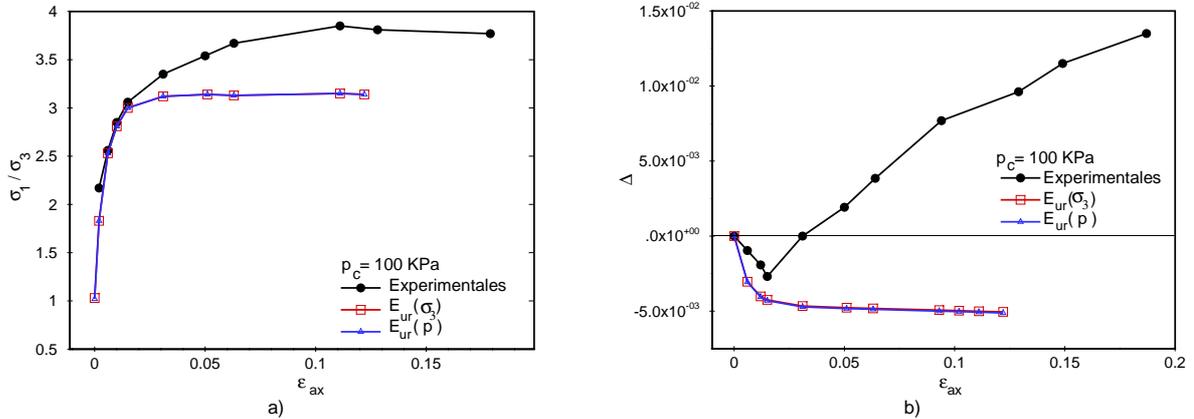


Figura 6.2.6: Dependencia funcional del módulo de descarga recarga

En la Figura [6.2.7] se presentan los resultados obtenidos con el modelo para dos valores del coeficiente  $M$  que fija la forma de la elipse del cap. Uno es calculado a partir de los datos experimentales  $M = 1,2496$  y el valor estimado a partir del valor del ángulo de fricción interna del material  $M = 1,36$ . Se observa que la predicción de la relación de tensiones en función de la deformación axial mejora al utilizar el mayor valor para  $M$  que corresponde al valor estimado Figura [6.2.7 a)], pero desmejora la predicción de la deformación volumétrica en función de la deformación axial Figura [6.2.7 b)]. Nuevamente se observa que el modelo no puede representar la expansión volumétrica al incrementar la tensión de corte.

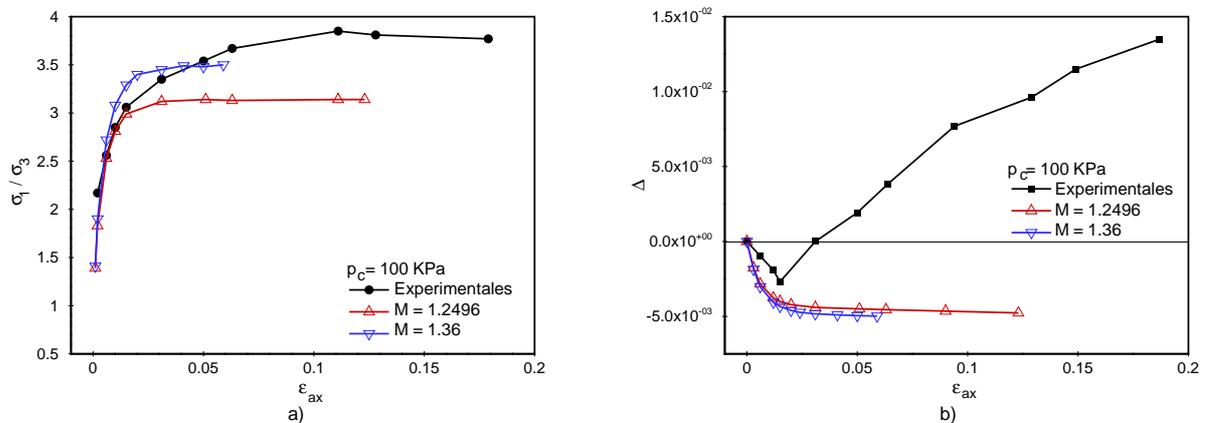


Figura 6.2.7: Influencia del valor adoptado para el coeficiente M

En la Figura [6.2.8] se presentan los resultados obtenidos al adoptar valores de la relación de Poisson  $\nu$  de 0,2, 0,3 y 0,35. Se observa en Figura [6.2.8 a)] que las predicciones de la relación de tensiones son prácticamente coincidentes, mientras en Figura [6.2.8 b)] se observa una muy leve

mejora de la predicción de la deformación volumétrica en función de la deformación axial cuando aumenta el valor de la relación de Poisson.

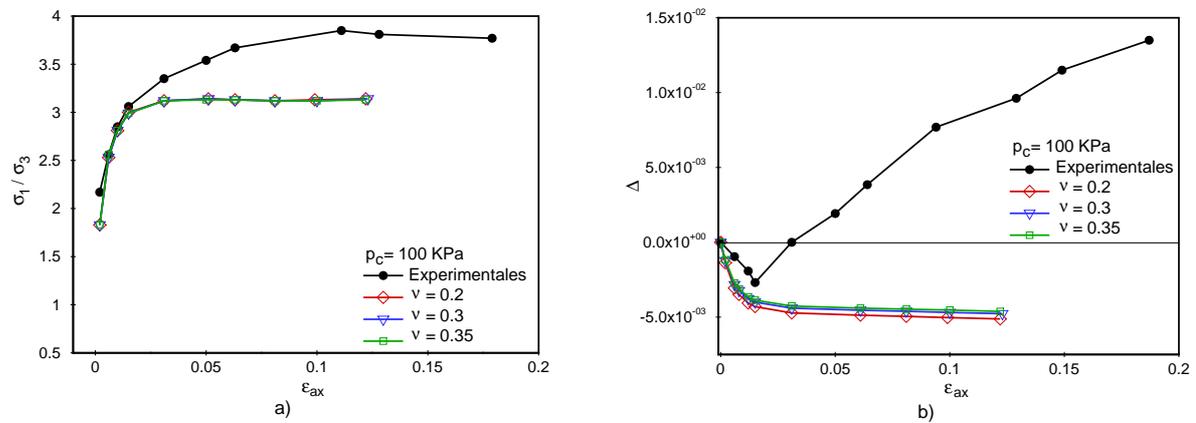


Figura 6.2.8: Influencia del valor adoptado para el coeficiente de Poisson

Para presión de confinamiento  $p_c = 200\text{KPa}$  los resultados que se obtienen suponiendo que el módulo de descarga recarga  $E_{ur}$  es función de la tensión principal menor (mecánica de suelos) o de la presión se presentan en la Figura [6.2.9]. Nuevamente no se observan diferencias en las predicciones del modelo utilizando una u otra dependencia funcional.

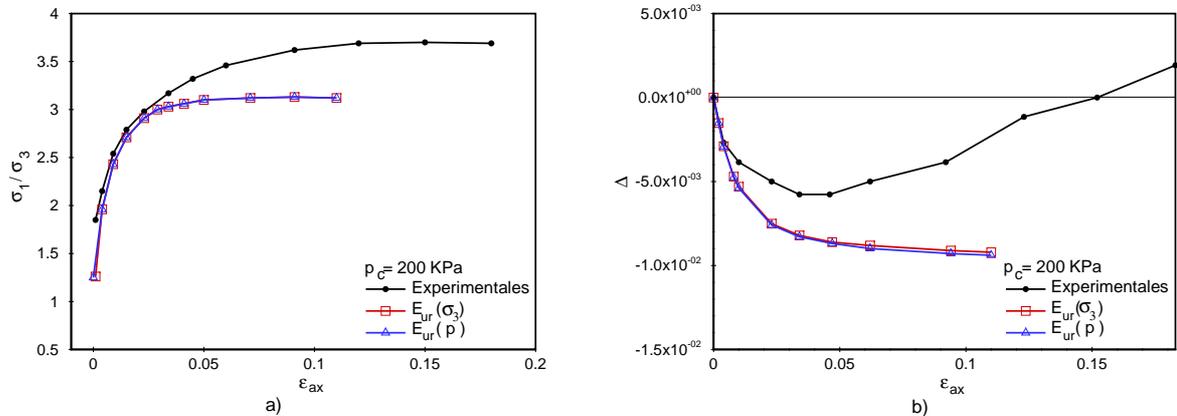


Figura 6.2.9: Dependencia funcional del módulo de descarga recarga

En la Figura [6.2.10 b)] se observa una mayor influencia del valor adoptado para el coeficiente  $M$  en la relación entre la deformación volumétrica y la deformación axial que al utilizar  $p_c = 100\text{KPa}$ , logrando el modelo capturar el tramo inicial de la curva experimental. Mientras en la Figura [6.2.10 a)] la influencia de  $M$  sobre la relación de tensión y la deformación axial es similar al caso con  $p_c = 100\text{KPa}$ .

En la Figura [6.2.11 a)] el comportamiento es similar al correspondiente a la menor presión de confinamiento mientras. En la Figura [6.2.11 b)] se observa mayor influencia del valor adoptado para la relación de Poisson en la predicción de la relación entre la deformación volumétrica y la deformación axial. Para esta presión de confinamiento, los datos experimentales muestran una mayor la contracción de volumen con una evolución mas suave que el modelo puede capturar al

iniciarse la aplicación de la tensión desviadora, pero luego no captura la disminución ni la expansión volumétrica al aumentar la tensión desviadora. La predicción es mejor que para la presión de confinamiento de  $100\text{KPa}$ .

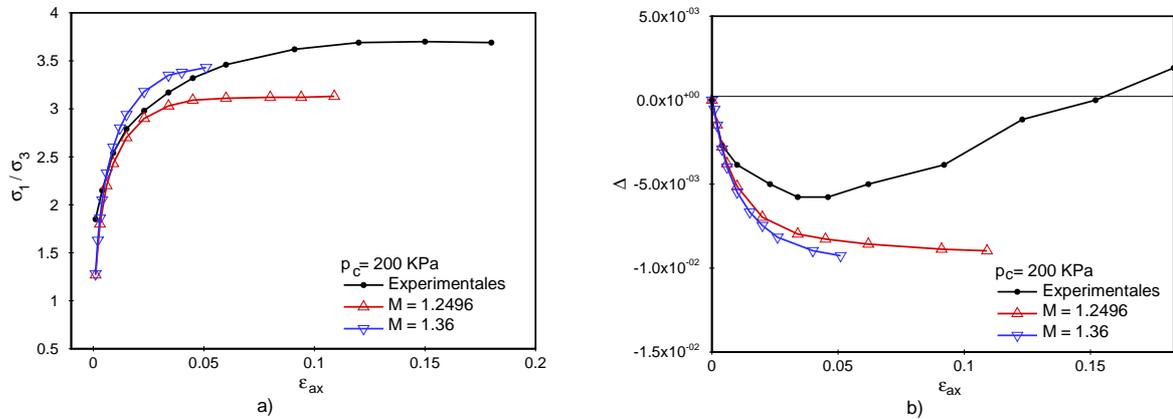


Figura 6.2.10: Influencia del valor adoptado para el coeficiente  $M$

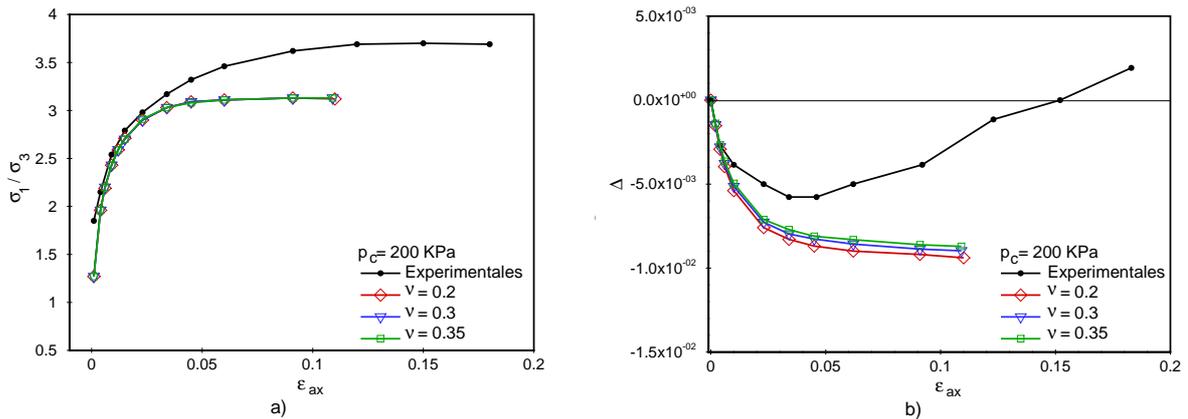


Figura 6.2.11: Influencia del valor adoptado para el coeficiente de Poisson

Para presión de confinamiento  $p_c = 450\text{KPa}$ , la expansión volumétrica es muy leve y casi al finalizar el ensayo experimental, y al igual que en el caso de la presión de confinamiento de  $200\text{KPa}$  el modelo logra un mejor acuerdo a los resultados experimentales. Para esta presión de confinamiento también se estudió la influencia de utilizar la menor tensión principal o la presión para evaluar  $E_{ur}$  no detectándose influencia al igual que en los dos casos anteriores, como puede observarse en la Figura [6.2.12]. Al estudiar la influencia del valor adoptado para el coeficiente  $M$  se observa que el modelo logra copiar los datos experimentales para  $M = 1,36$  como puede observarse en la Figura [6.2.13 a)] entre la relación de tensiones y la deformación axial, mientras la predicción de la relación entre la deformación volumétrica y la deformación axial es similar a la que se obtuvo para  $p_c = 200\text{KPa}$ . La influencia del valor adoptado para la relación de Poisson en la Figura [6.2.14 a)] es casi indistinguible y en la Figura [6.2.14 b)] la influencia es similar a la que se obtuvo con  $p_c = 200\text{KPa}$ .

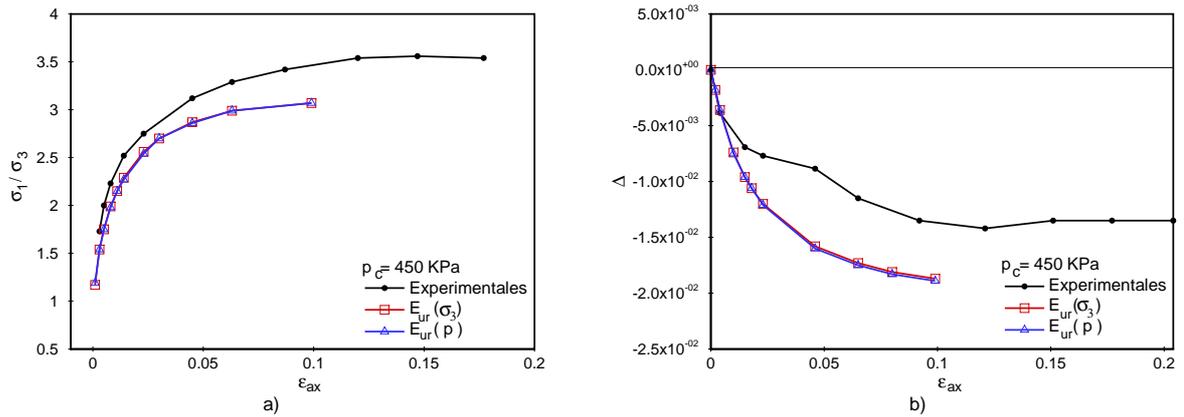


Figura 6.2.12: Dependencia funcional del módulo de descarga recarga

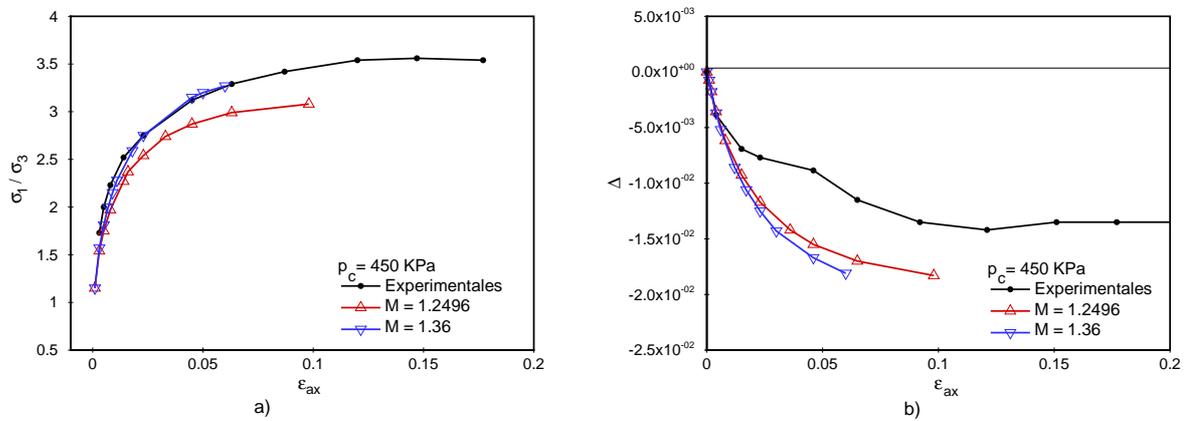


Figura 6.2.13: Influencia del valor adoptado para el coeficiente M

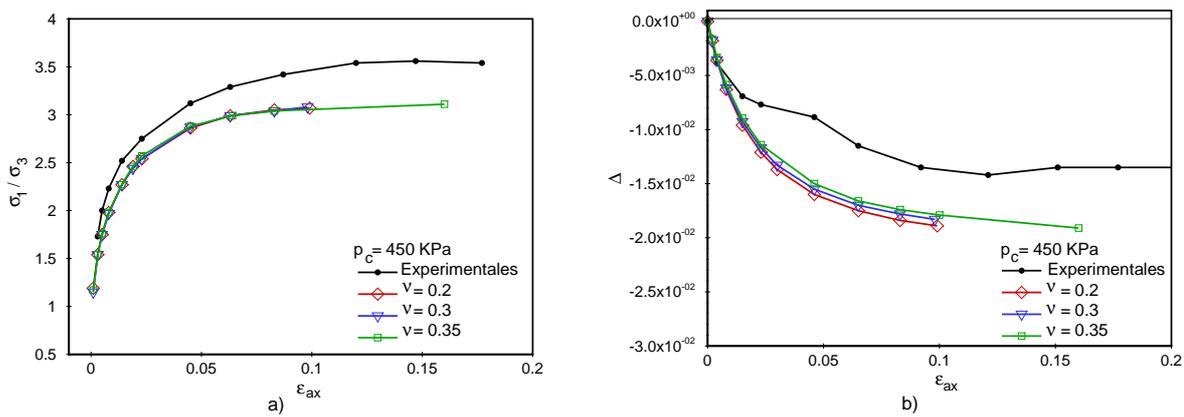


Figura 6.2.14: Influencia del valor adoptado para el coeficiente de Poisson

Analizando los resultados de los gráficos de las Figuras [10.4] a [6.2.14] puede observarse que el modelo mejora levemente la predicción de la relación de tensiones en función de la deformación axial al aumentar la presión de confinamiento. El error relativo de la predicción de la relación de tensiones respecto de los valores experimentales, calculado para una deformación axial  $\epsilon_{ax} = 0,06$ , es del 14 % para la menor presión de confinamiento y del 8 % para la mayor. Las presiones de confinamiento que se utilizaron corresponden al rango de presiones probable en un silo de dimensiones reales.

Del análisis de los gráficos de las Figuras [10.4] a [6.2.14] también se registra una disminución del error relativo en la predicción del máximo valor de la deformación volumétrica, respecto del valor experimental, que es del 45 % para la mínima presión de confinamiento y del 37 % para la mayor presión de confinamiento. El modelo no tiene la capacidad de capturar el aumento de volumen que se produce en un material suelto a bajas presiones de confinamiento al aumentar la tensión desviadora, que es lo que registran los datos experimentales. Esto se debe posiblemente a que no están contemplados en el modelo la influencia de la tensión desviadora en las deformaciones volumétricas ni la influencia de la presión en las deformaciones de distorsión. Sin embargo, en todos los casos, para niveles de tensiones bajos como los que son de esperarse en los silos la predicción del modelo es aceptable (rango de presión 0 a 300KPa).

### 6.3. Conclusiones

A partir del análisis de los resultados obtenidos al realizar las simulaciones del ensayo de compresión isótropa, se concluye que la expresión para obtener  $E_{ur}$  (módulo elástico tangente) en la mecánica de suelos es función de la tensión principal menor  $\sigma_3$  representando la presión de la cámara. Al reemplazarla por la presión  $p$  (o tensión media) no se evidencian cambios en los resultados al simular los ensayos, por esa razón se adopta  $E_{ur}(p)$  evitándose el cálculo de las tensiones principales.

Dado que la relación de Poisson  $\nu$  no puede ser determinada de manera directa a partir de un ensayo para los materiales granulares, se hizo un estudio paramétrico adoptando diferentes valores dentro del rango recomendado por diferentes investigadores. Se observa que para bajos niveles de presión los resultados que se obtienen son coincidentes. Cuando el nivel de presión es más elevado los valores predichos por el modelo son más cercanos a los experimentales cuando se adopta un valor mayor o igual a 0,3 para el caso de la arena uniforme. El coeficiente  $M$  que fija la forma del elipsoide (cap) puede ser obtenido directamente a partir de los datos de los ensayos o utilizando la relación empírica, dada por [Wood, 1991], a partir del ángulo de fricción interna obteniendo valores para  $M$  que difieren un 8 %. Esta diferencia no afecta la predicción del modelo en forma apreciable ya que dentro del rango de interés la predicción del modelo es prácticamente coincidente con los datos experimentales ( $p < 1Gpa$ ).

Al analizar los resultados obtenidos al simular ensayos triaxiales de compresión convencional drenado, se concluye que al igual que en las simulaciones de los ensayos de compresión isótropa, las predicciones del modelo al utilizar  $E_{ur}(\sigma_3)$  y  $E_{ur}(p)$  son coincidentes. De las simulaciones de los ensayos para las tres presiones de confinamiento se observa muy poca influencia del valor adoptado para la relación de Poisson  $\nu$  al observar la relación de tensión versus la deformación axial. Al observar la deformación volumétrica versus la deformación axial la influencia del valor adoptado para  $\nu$  presenta leves diferencias. El valor adoptado para coeficiente de forma  $M$  tiene mayor influencia en la predicción de la relación de tensión versus la deformación axial. El mejor acuerdo con los datos experimentales se obtiene cuando se utiliza el valor de  $M$  obtenido directamente de los ensayos (mayor valor de  $M$ ) ya que el rango donde la predicción concuerda con los datos experimentales es mayor al aumentar la presión de confinamiento. De la simulación de los tres ensayos con presiones de confinamiento diferentes, se observa que el acuerdo con los datos experimentales mejora

al aumentar la presión de confinamiento. En los tres casos el acuerdo con los datos experimentales es muy bueno para valores de la relación de tensión  $\sigma_1/\sigma_3 < 3$ . Al analizar las predicciones de la deformación volumétrica versus la deformación axial, en todos los casos se observa que el modelo no es capaz de capturar la dilatancia que presenta el material (aumento de volumen que se produce al incrementar la tensión desviadora) cuando  $\varepsilon_{ax} > 0,07$ . Al evaluar cual es la relación de tensión correspondiente a  $\varepsilon_{ax} > 0,07$  se puede concluir que la predicción del modelo es muy buena en el rango de tensiones esperable en un silo de tamaño real donde la tensión vertical posible de alcanzarse es menor a  $300000Pa$ .



# Capítulo 7

## Modelo de llenado

### 7.1. Introducción

En este capítulo se describe la metodología que se va a utilizar para llenar una tolva o un silo, que se encuentra inicialmente vacío, con material granular. La metodología a emplear en la simulación guarda relación con el tipo de llenado que se utiliza y si se desea o no aproximar el proceso de llenado continuo por medio de un llenado progresivo por adición de capas. La carga a considerar es el peso propio del material que se almacena.

El llenado de una tolva o silo es un proceso que no presenta características dinámicas. Para simular el proceso de llenado progresivo como un proceso cuasi estático, con el código dinámico, se dota al material de amortiguamiento. El amortiguamiento debe permitir que el material consolide por acción del peso del material que se encuentra por encima. Se describe como evaluar los parámetros de amortiguamiento a introducir en el modelo para que resulte adecuado. También se describe como calcular el tiempo a partir del cual una capa comienza a ser tenida en cuenta en los cálculos, a este tiempo se lo denomina tiempo de activación de la capa.

La metodología se prueba con dos tolvas que difieren en sus dimensiones geométricas un orden de magnitud, con el fin de comprobar si existe una dependencia con las dimensiones. Luego se utiliza una misma tolva y se simula el proceso de llenado definiendo distinto número de capas con el fin de observar la influencia del espesor de las capas en los resultados obtenidos.

Por último se incorpora el contacto mecánico, sin y con fricción entre la pared y el grano, al modelo de llenado. Se comparan los resultados obtenidos imponiendo restricciones multipunto en la pared inclinada con los resultados que se obtienen imponiendo condición de contacto mecánico sin fricción a fin de establecer los criterios para adoptar los coeficientes de penalización. Por último se incorpora la fricción al modelo de contacto mecánico, completando así la metodología a utilizar para el llenado.

La metodología de llenado progresivo incluye el amortiguamiento, la relación constitutiva deseada y el modelo de contacto mecánico con fricción que se aplican a las simulaciones del proceso de llenado en los casos de aplicación.

Dentro de los casos de aplicación, se seleccionó el llenado de tolvas cónicas, para comparar los resultados obtenidos con curvas teóricas desarrolladas por distintos investigadores. Luego se simula el llenado de un silo cilíndrico de fondo plano, que forma parte de un estudio internacional de

colaboración, comparando los resultados obtenidos con los resultados numéricos de otros grupos de investigación. Por último se simula el llenado de dos silos uno geoméricamente simétrico y otro asimétrico de los cuales se tienen resultados experimentales de medición de presiones normales de contacto en la pared, con las cuales se comparan los resultados obtenidos.

## 7.2. Descripción del modelo de llenado

El llenado puede simularse haciendo que todo el material esté desde el principio de la simulación o bien puede simularse un llenado progresivo. Para simular el llenado progresivo, en forma discreta, se divide la altura máxima de material en capas que se van incorporando a diferentes tiempos durante la etapa de llenado. Las capas pueden ser horizontales en el caso de que el llenado sea distribuido o inclinadas un ángulo igual al ángulo de reposo del material granular si el llenado es concéntrico. El llenado progresivo consiste en agregar capas de material en forma sucesiva desde el fondo, sobre la compuerta de salida, hasta el borde superior y es una aproximación al proceso continuo de llenado real.

Cuando ingresa una capa de material, se calcula la masa asociada al volumen inicial de cada elemento de la nueva capa. Para ello se utiliza la densidad correspondiente al material en el estado más suelto para el cual se pueden calcular los parámetros que definen el modelo constitutivo. También se calculan las fuerzas internas, utilizando los módulos elásticos para una presión inicial igual a la atmosférica, y las fuerzas externas debidas al peso del material incorporado.

El agregado de una capa de material en el modelo tiene el efecto de una carga de impacto, que no es concordante con lo que se observa durante el proceso de llenado real. Para simular el proceso de llenado como cuasi estático, se adopta un amortiguamiento de tipo viscoso para el material granular. El valor de amortiguamiento a adoptar debe ser suficientemente elevado para evitar las fuertes variaciones de los desplazamientos las deformaciones y tensiones, ya que éstas últimas afectan el comportamiento constitutivo. Por otra parte el valor de amortiguamiento adoptado no debe impedir que el material se compacte por acción del peso de las capas que se agreguen por encima.

El proceso de llenado es afectado por los valores adoptados para definir el amortiguamiento, los cuales están relacionados con el valor de tiempo en el cual cada capa se incorpora (tiempo de activación de las capas). Los resultados también dependen de la altura adoptada para cada capa a agregar. Inicialmente las relaciones entre el amortiguamiento el tiempo de activación de las capas y la altura de las mismas se estudia adoptando un comportamiento constitutivo elástico para el material granular y restricciones cinemáticas que permiten que el material deslice libremente en la dirección tangente a las mismas imponiendo restricciones multipunto.

A continuación se adopta un comportamiento elástico no lineal plástico para el material granular, con el fin de detectar si el proceso de llenado provoca deformaciones plásticas en el material afectando los valores y la distribución de las tensiones normales en la pared.

Por último se incorpora al modelo la condición de contacto con fricción en reemplazo de las condiciones de borde cinemáticas. Debido a que estas condiciones se imponen utilizando penalización se analiza como afectan la respuesta los coeficientes de penalización que se adoptan.

### 7.2.1. Amortiguamiento.

El código tiene implementadas rutinas para considerar amortiguamiento proporcional a la velocidad o amortiguamiento viscoso. La fuerza de amortiguamiento nodal  $F_{d_i}$  es calculada con la expresión:

$$F_{d_i} = -C_i \times v_i \quad (7.2.1)$$

donde  $v_i$  es la velocidad nodal y  $C_i$  el coeficiente de amortiguamiento que se obtiene por la fórmula:

$$C_i = 2\alpha M_i \quad (7.2.2)$$

donde  $M_i$  es la masa concentrada en el  $i$ -ésimo nodo y  $\alpha$  es el coeficiente de amortiguamiento. El coeficiente de amortiguamiento es calculado a partir de la siguiente fórmula

$$\alpha = \frac{1}{t_r} \ln \left( \frac{100}{f_p} \right) \quad (7.2.3)$$

donde  $f_p$  es el porcentaje de amplitud de las vibraciones amortiguadas  $A$  con respecto a la amplitud de las vibraciones libres  $A_o$ , al cabo de un cierto tiempo  $t_r$ .

Los parámetros que definen el amortiguamiento a aplicar al material son  $t_r$  y  $f_p$ . El procedimiento utilizado para evaluarlos se describe a continuación.

#### Evaluación de los parámetros de amortiguamiento.

En los modelos se adopta un valor de  $f_p = 1\%$  para la etapa de llenado. El valor de  $t_r$  que se utiliza se obtiene como el período de la curva de desplazamientos verticales considerando las vibraciones libres no amortiguadas del material granular bajo la acción de su propio peso. Con este fin la tolva se llena colocando todo el material de una sola vez, considerando restricciones cinemáticas sobre la pared inclinada y la compuerta de cierre la cuales permiten el libre deslizamiento del material en la dirección tangencial (condiciones multipunto y desplazamientos prescritos respectivamente). Esto equivale a suponer que la estructura es infinitamente rígida y que no se desarrolla fricción entre la pared y el material granular.

En la Figura [7.2.1] se muestran las dimensiones y mallas esquemáticas de una tolva másica, discretizada utilizando tres mallas con 8, 32 y 128 elementos y 15, 45 y 153 nodos respectivamente. La malla de 32 elementos se obtiene dividiendo cada elemento de la malla de 8 elementos en cuatro y el mismo criterio se utilizó para obtener la malla de 128 elementos respecto de la malla de 32 elementos.

Para la caracterización del material se utilizan los valores de los parámetros obtenidos para la arena lavada uniforme del río Sacramento [Lee and Seed, 1967] deducidos en el Anexo 2 y utilizados en la simulación de los ensayos triaxiales en el Capítulo 6.

Las condiciones de contorno son restricciones cinemáticas que permiten que el material deslice libremente en la dirección tangente a las paredes de la estructura.

Suponiendo que la tolva es de *deformación plana* se obtuvieron la curva de desplazamientos verticales del nodo perteneciente al eje de simetría y a la superficie libre del material (mayor coordenada  $X_2$ ), considerando vibraciones libres no amortiguadas. El período se obtiene construyendo la

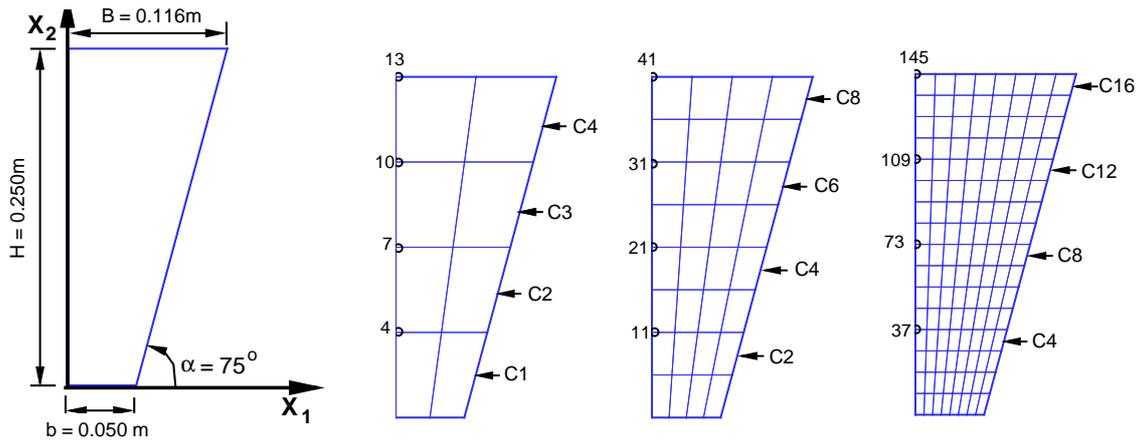


Figura 7.2.1: Geometría de la tolva y mallas de elementos finitos con número creciente de capas y elementos

gráfica del desplazamiento vertical  $u_2(t)$  al que se le resta su valor medio en el período considerado  $\bar{u}_2$  para facilitar el procedimiento.

Utilizando una ley elástica lineal para el material granular se obtiene para la malla de 8 elementos el valor  $t_r = 0,003218$ , para la malla de 32 elementos  $t_r = 0,003211$  y  $t_r = 0,003211$  para la malla de 128 elementos. En todos los casos, si se considera una sola cifra significativa, el valor aproximado sería  $t_r \simeq 0,003$ . Los parámetros de amortiguamiento a utilizar entonces son  $t_r = 0,003$  y  $f_p = 0,01$  para todas las mallas.

En la Figura [7.2.2] se muestran las curvas de desplazamientos  $u_2(t)$  en función del tiempo del nodo que pertenece al eje de simetría de la tolva y al máximo nivel de llenado. En ésta figura se presentan los resultados de desplazamientos libres no amortiguados y amortiguados superpuestos con el fin de compararlos. La Figura [7.2.2 a)] corresponde al nodo 13 de la malla de 8 elementos, la Figura [7.2.2 b)] para el nodo 41 de la malla de 32 elementos y la Figura [7.2.2 c)] para el nodo 145 de la malla de 128 elementos.

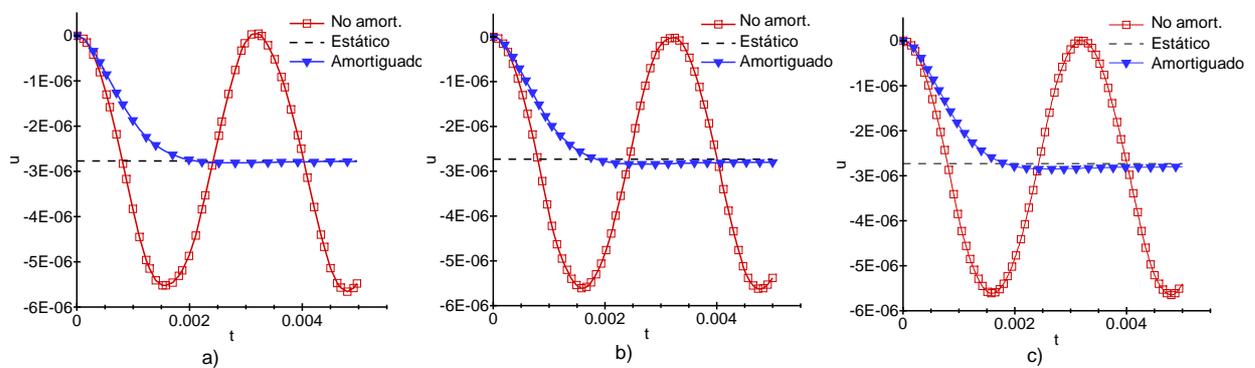


Figura 7.2.2: Desplazamientos verticales en función del tiempo. (Deformación plana, material elástico lineal)

Adoptando la ley elástica no lineal los valores del período obtenidos utilizando las mismas mallas

son:  $t_r = 0,003206$ ,  $t_r = 0,003190$  y  $t_r = 0,003192$  para las mallas de 8, 32 y 128 elementos respectivamente. En todos los casos, la diferencia con el modelo lineal es muy pequeña y si se toma una cifra significativa nuevamente será  $t_r \simeq 0,003$  el valor aproximado. Las curvas de desplazamientos  $u_2(t)$  en función del tiempo que se obtienen al utilizar el modelo elástico no lineal correspondientes a las mallas de 8, 32 y 128 elementos se presentan en la Figura [7.2.3 a)], Figura [7.2.3 b)] y Figura [7.2.3 c)] respectivamente .

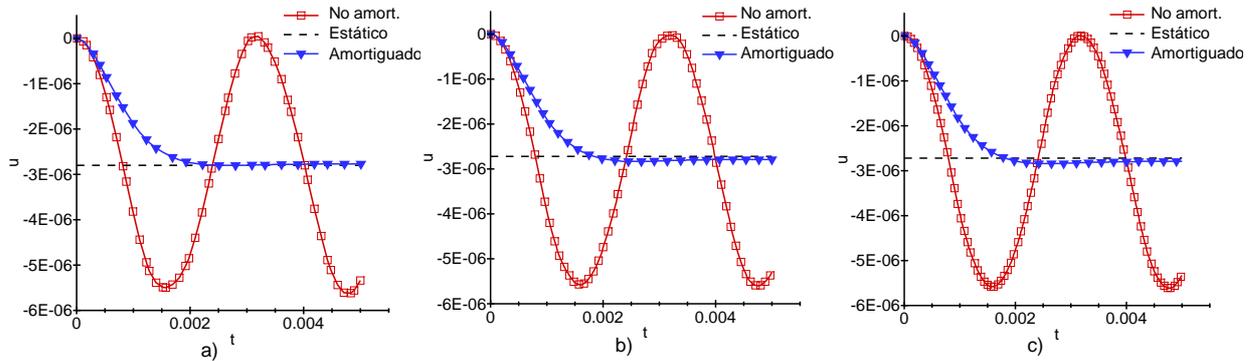


Figura 7.2.3: Desplazamientos verticales en función del tiempo. (Deformación plana, material elástico no lineal)

Adoptando la misma geometría y mallas pero suponiendo que la tolva es *axilsimétrica* se obtuvieron las correspondientes curvas de desplazamientos en función del tiempo utilizando un material elástico lineal. Las curvas de desplazamientos  $u_2(t)$  en función del tiempo obtenidas se presentan en la Figura [7.2.4 a)], Figura [7.2.4 b)] y Figura [7.2.4 c)] para el nodo que se encuentra sobre el eje de simetría y máximo nivel de llenado para las discretizaciones con 8, 32 y 128 elementos respectivamente. Para la malla de 8 elementos el valor obtenido para el período  $t_r = 0,002932$ , para la de 32 elementos fue  $t_r = 0,002938$  y para la de 128 elementos de  $t_r = 0,002945$ . Nuevamente se observa que  $t_r \simeq 0,003$  es el valor aproximado con una cifra significativa.

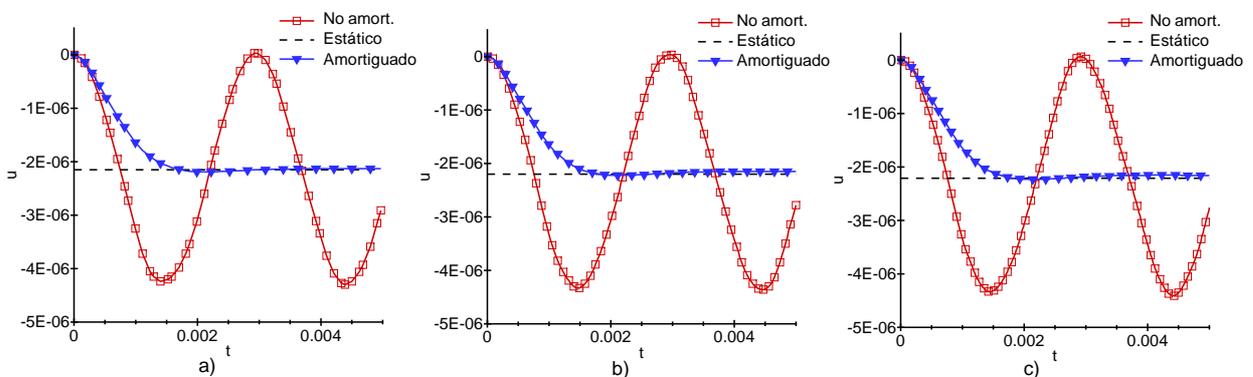


Figura 7.2.4: Desplazamientos verticales en función del tiempo. (Axilsimetría, elástico lineal)

Como se observa en los resultados, el valor de  $t_r$  es solo función de las propiedades del material y la altura de llenado. Se encontró que el valor de  $t_r$  puede ser estimado utilizando la siguiente expresión:

$$t_r = 3 \frac{H}{\sqrt{\frac{E_{ur}}{\rho}}} \quad (7.2.4)$$

donde  $H$  es la altura del material correspondiente al nivel de llenado máximo,  $E_{ur}$  es el módulo de descarga recarga del material granular (para  $p = p_a$ ) y  $\rho$  es la densidad del material en el estado suelto. El denominador es el valor estimado de la velocidad de propagación de una onda de compresión en el material granular [Richart et al., 1970].

El valor estimado con la expresión (7.2.4), para el material y las dimensiones de la tolva es:

$$\begin{aligned} T &= 3 \frac{0,25m}{\sqrt{\frac{9,6 \cdot 10^7 \text{ m}}{1460 \text{ s}}}} \\ T &= 0,002924 \text{ s} \\ T &\simeq 0,003 \end{aligned}$$

Los valores de  $t_r$  obtenidos a partir de los resultados de los modelos concuerdan bastante bien con el valor estimado por la expresión propuesta.

En las Figuras [7.2.2] a [7.2.4] se comprueba que el valor de  $t_r$  obtenido utilizando la expresión (7.2.4) estima bien el valor del período de vibraciones libres no amortiguadas considerando una cifra significativa al compararlo con el que se obtiene de los resultados de la curva de desplazamientos en vibración libre no amortiguada.

De los resultados para las tres mallas puede observarse que el valor de  $t_r$  no es afectado por la densidad de la malla y que es función de las propiedades del material y de la altura máxima de material almacenado. También se observa que el desplazamiento correspondiente al plateau tiende rápidamente al valor medio de la oscilación no amortiguada o valor estático. El leve sobrepaso del valor medio de los desplazamientos de la curva amortiguada garantiza que el amortiguamiento no es excesivo de modo que el valor estable de desplazamiento en vibración libre amortiguada puede considerarse adecuado.

### 7.2.2. Tiempo de activación de las capas. Discretización del llenado.

Con el fin de simular el proceso de llenado se divide el material en un cierto número de capas en el momento de construir la geometría de la malla de elementos finitos. Al agregar una capa de material, el peso del material produce una fuerza de impacto que debe haberse estabilizado por efecto del amortiguamiento aplicado antes de que una nueva capa de material sea incorporada.

Para calcular el tiempo en el cual se activa una dada capa se adoptó numerarlas de abajo hacia arriba  $c = 1 \dots NC$  (siendo  $NC$  el número de capas del modelo) en el orden en el cual se incorporarán al modelo. Primeramente se adoptó el doble del valor del período de los desplazamientos libres no amortiguados  $t_r$  como incremento de tiempo entre la activación de una capa y la siguiente. El tiempo de activación de la capa  $c = 1$  es  $t_c = 0$  y para  $c > 1$  el tiempo de activación se evalúa adoptando como incremento  $\Delta t_c = 2t_r$  como:

$$t_c = t_{c-1} + 2t_r \quad (7.2.5)$$

En la Figura [7.2.5] se muestran las curvas de desplazamientos verticales  $u_2(t)$  de los nodos sobre el eje de simetría del modelo de tolva en deformación plana de 8 elementos, considerando que se

llena en cuatro capas que tienen una altura inicial de  $0,125m$ . Se observa que el amortiguamiento estabiliza la respuesta en un lapso bastante menor a  $2t_r$  en todos los casos. La respuesta de la primer y segunda capa (nodos 4 y 7 respectivamente) muestran mayor oscilación inicial que en las capas superiores. La menor oscilación de los desplazamientos en las capas superiores posiblemente se deba a que la energía es disipada por el amortiguamiento pero también en comprimir las capas inferiores de material.

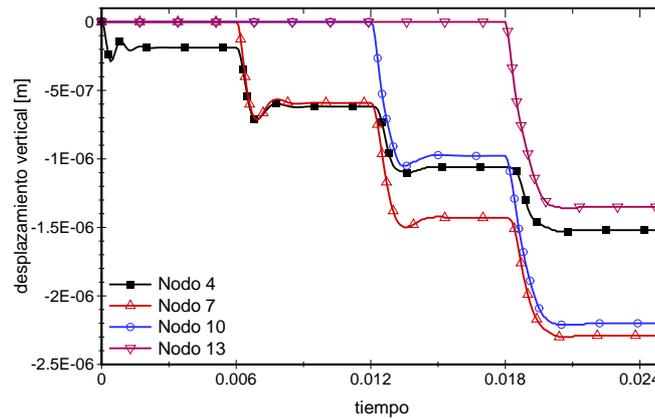


Figura 7.2.5: Desplazamientos verticales en función del tiempo de los nodos superiores de las ocho capas ( $\Delta t_c = 2t_r$ ) (4 capas, material elástico)

Para acortar los tiempos de ejecución al simular el llenado, se modifica el cálculo del tiempo de activación de las capas adoptando como incremento el valor del período de vibraciones libres  $t_r$ , calculando los tiempos de activación de las capas con la expresión (7.2.6), en reemplazo de (7.2.5):

$$t_c = t_{c-1} + t_r \quad (7.2.6)$$

Se modificaron los tiempos de activación de las capas en el modelo anterior utilizando la expresión (7.2.6) pero se mantuvo el tiempo total de llenado.

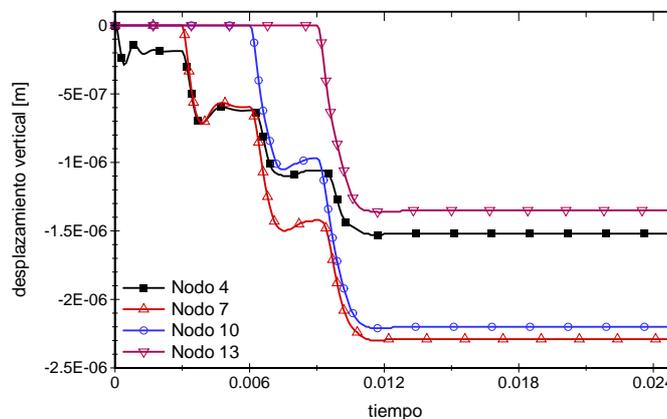


Figura 7.2.6: Desplazamientos verticales en función del tiempo de los nodos superiores de las ocho capas ( $\Delta t_c = t_r$ ) (4 capas, material elástico)

Los resultados que se obtienen se muestran en la Figura [7.2.6], al compararlos con los de la

Figura [7.2.5] no se observan cambios en los valores estables de los desplazamientos de los nodos de cada capa al finalizar el proceso de llenado.

El criterio para determinar el tiempo de activación de las capas dado por (7.2.6) permite disminuir el tiempo total de duración del proceso de llenado en un 40 % en este modelo. La disminución del tiempo total de la simulación del proceso de llenado es importante, más aun cuando el número de capas sea elevado como en el caso de modelarse el llenado de un silo de dimensiones reales.

El criterio establecido por la expresión (7.2.6) se adopta para las mallas de 32 y 128 elementos. El objetivo es comprobar si la menor altura de las capas podría permitir disminuir el incremento de tiempo  $\Delta t_c$ . En la Figura [7.2.7] se observan las curvas  $u_2(t)$  para los 8 nodos ubicados en el eje de simetría y en el borde superior de cada una de las 8 capas del modelo de 32 elementos adoptando  $\Delta t_c = t_r = 0,003$ . La historia de desplazamientos de las primeras tres capas (nodos 6, 11 y 16) indican que los desplazamientos al inicio del llenado se estabilizan en un lapso menor a  $\Delta t_c = t_r$  pero el valor adoptado es adecuado para las restantes capas dado que todos los desplazamientos logran alcanzar el plateau justo antes de que una nueva capa comience a estar activa.

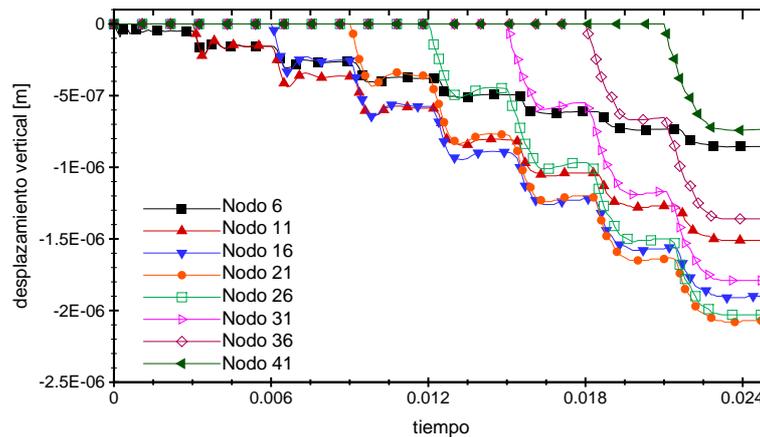


Figura 7.2.7: Desplazamientos verticales en función del tiempo de los nodos superiores de las ocho capas ( $\Delta t_c = t_r$ ) (8 capas, material elástico)

En la Figura [7.2.8] se observan las historias de desplazamiento  $u_2(t)$  para 8 de los 16 nodos del eje de simetría del modelo con 128 elementos, en este modelo también se adoptó  $\Delta t_c = t_r = 0,003$ . Las curvas corresponden a los nodos superiores de las capas pares, que permiten mayor claridad en el gráfico además de poder comparar con las curvas correspondientes al modelo de 32 elementos. Los desplazamientos de las primeras 6 capas alcanzan al inicio del llenado sus valores estables de desplazamiento aproximadamente a  $0,5\Delta t_c$  luego de comenzar a estar activas, pero las historias de desplazamiento que se obtienen al agregar las restantes capas logran alcanzar el valor estable muy poco antes de que una nueva capa sea incorporada.

Si bien los modelos con mayor número de capas indican que para las primeras capas podría adoptarse un incremento de tiempo de activación menor, parece ser de poca incidencia en el tiempo total para modelar el llenado total. Esto lleva a considerar como adecuado el criterio (7.2.6) para establecer los tiempos de activación de las capas.

Si se comparan los desplazamientos que se obtienen al finalizar la etapa de llenado, calculados

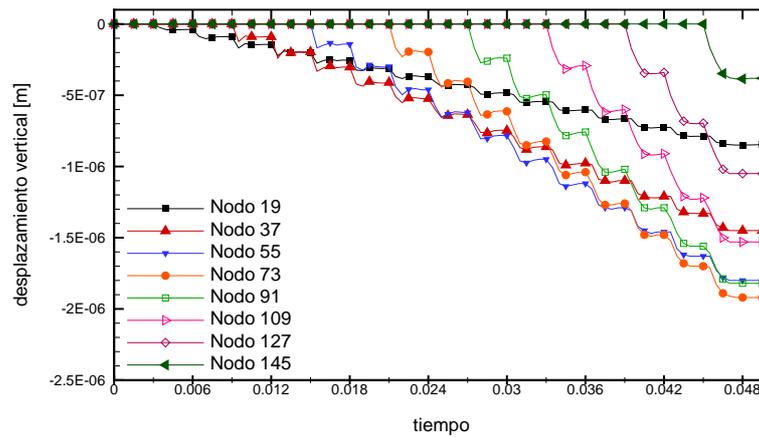


Figura 7.2.8: Desplazamientos verticales en función del tiempo de los nodos superiores de las ocho capas ( $\Delta t_c = t_r$ ) (16 capas, material elástico)

como la diferencia entre la posición estable al finalizar el llenado y la posición estable luego de agregar la capa en los nodos ubicados inicialmente en la coordenada  $x_2 = 0,125m$  (mitad de la altura final de llenado). Se tiene para el nodo 7 de la malla de 8 elementos  $u_2 = -1,71 \cdot 10^{-6}$  para el nodo 21 de la malla de 32 elementos  $u_2 = -1,63 \cdot 10^{-6}$  y para el nodo 73 de la malla de 128 elementos  $u_2 = -1,74 \cdot 10^{-6}$ .

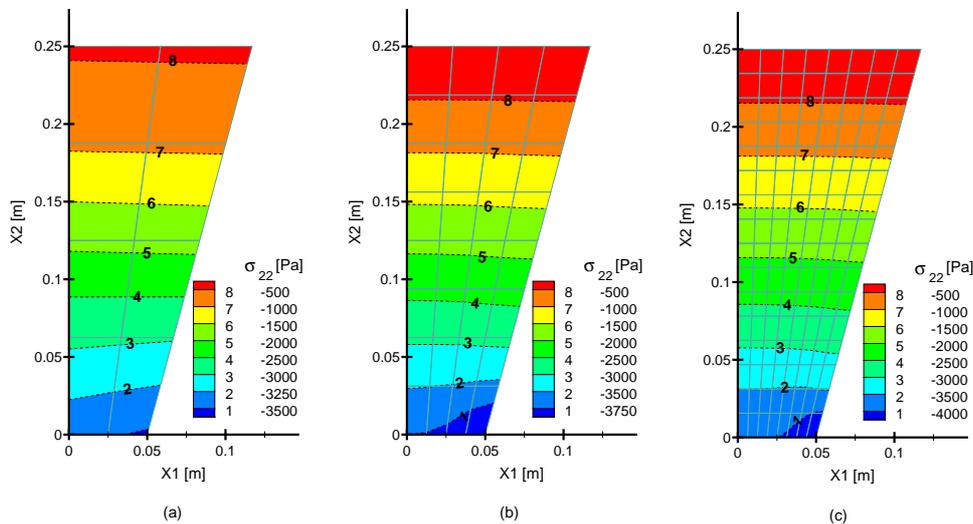


Figura 7.2.9: Tensiones verticales en el grano: a) 4 capas; b) 8 capas; c) 16 capas

Se observa que en ambos planos horizontales los desplazamientos al final de la etapa de llenado son menores en las mallas con mayor discretización, siendo más notoria la disminución en el plano que corresponde a la superficie libre del material. Esto se refleja en la distribución de las tensiones verticales que se desarrollan en el material granular como se observa en la Figura [7.2.9], al aumentar el número de elementos en la discretización aumenta el valor de la tensión vertical de  $-3500Pa$  para la menor discretización a  $-4000Pa$  para la malla con mayor número de elementos.

Consecuentemente, las tensiones  $\sigma_{nn}$  en la dirección normal a la compuerta y a la pared incli-

nada de la tolva, varían con la discretización. En la Figura [7.2.10 a)] se presenta la distribución de la tensión  $\sigma_{nn}$  sobre la pared inclinada. Al aumentar la discretización la tensión aumenta su valor absoluto y cambia la posición de su máximo que es de  $1770Pa$  para  $X_2 = 0$  para la discretización con 8 elementos, mientras para las otras dos mallas actúa en la coordenada  $X_2 = H/5 = 0,047m$  siendo su máximo de  $1852Pa$  para la malla de 32 elementos y de  $1919Pa$  para la malla con mayor discretización. Las diferencias porcentuales respecto del valor  $1919Pa$  son 7,8% y 3,5% respectivamente. En la superficie libre el valor absoluto de la tensión disminuye al aumentar la discretización.

En Figura [7.2.10 b)] presenta la distribución de  $\sigma_{nn}$  sobre la compuerta, observándose que no solo aumenta el valor de la tensión vertical al aumentar la discretización sino también la diferencia entre el valor en el eje de simetría y en el vértice con la pared de la tolva. Los valores de la tensión en el nodo sobre el eje de simetría son  $-3421Pa$  para la menor discretización de  $-3750Pa$  para la intermedia y de  $-3900Pa$  para la mayor; los valores en el vértice compuerta - tolva respectivamente son:  $-3532Pa$ ,  $-4030Pa$  y  $-4440Pa$ . Las diferencias porcentuales respecto de los valores obtenidos con la discretización con 128 elementos son en el eje del 12,3% y 3,8% y sobre la pared del 20,5% y del 9,2% para los valores obtenidos con la discretización con 8 y 32 elementos respectivamente.

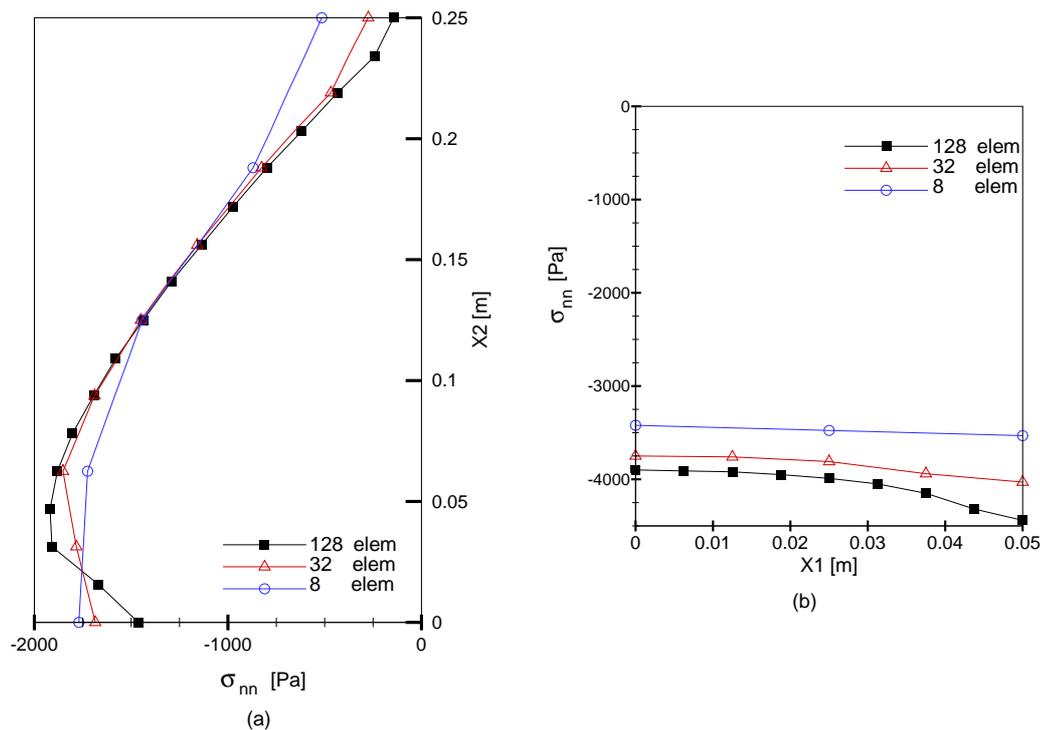


Figura 7.2.10: Variación de la tensión en la dirección normal; a) a la pared inclinada; b) a la compuerta

### 7.2.3. Escala. Relación constitutiva.

Debido a que la tolva modelada es pequeña y los valores de los parámetros constitutivos son los que corresponden a una arena, se utilizará una tolva cuyas dimensiones geométricas son:  $H = 2,50m$ ,  $b = 0,50m$ ,  $B = 1,16m$  manteniendo el ángulo de inclinación de la pared de la tolva respecto de

la horizontal en  $75^\circ$ . Se adopta una geometría en cuña suponiendo que corresponde a un estado de deformación plana. La tolva es semejante a la utilizada anteriormente pero sus dimensiones geométricas son un orden de magnitud mayor. Se adopta una discretización con 128 elementos dispuestos en 16 capas de 8 elementos e imponiendo como condiciones de borde que los nodos sobre la pared de la tolva y la compuerta pueden desplazarse en la dirección tangencial a las mismas (restricciones multipunto y desplazamientos prescritos). Por ser una tolva simétrica respecto del eje  $X_2$  se discretiza solo la mitad imponiendo condición de simetría en los nodos sobre el eje. El amortiguamiento y los tiempos de activación de las 16 capas se calculan con los procedimientos descritos anteriormente.

Debido a los bajos niveles de tensiones que se observan en la Figura [7.2.9] es difícil analizar la influencia de la relación constitutiva en el proceso de llenado. El valor del período de vibraciones libres no amortiguadas para esta tolva es  $t_r = 0,03$  se adopta  $\Delta t_c = t_r = 0,03$  como criterio para los tiempos de activación de las capas.

Se supone para el material granular un modelo elástico lineal y luego el modelo elástico no lineal plástico, llenando la tolva en 16 capas de igual altura inicial en ambos casos.

Las distribuciones de tensiones son prácticamente idénticas, obteniéndose para el primer caso una tensión vertical, en el vértice que forman la compuerta y la pared de la tolva, de  $\sigma_{22} = -44380 Pa$  para el modelo elástico y de  $\sigma_{22} = -44490 Pa$  cuando se utiliza el modelo elástico no lineal plástico.

Los valores de la presión o tensión media solo alcanzan el valor de  $p = -25730 Pa$  al finalizar el llenado. Cuando se utiliza el modelo elastoplástico este valor de  $p$  corresponde aproximadamente a un tercio del valor del parámetro  $p_o(\Delta^P = 0)$  que establece el tamaño inicial del elipsoide correspondiente al modelo Cam Clay por lo cual el material permanece en estado elástico durante todo el llenado de la tolva. La distribución de la tensión vertical en el grano que se obtiene para el modelo elástico no lineal plástico se presenta en la Figura [7.2.11].

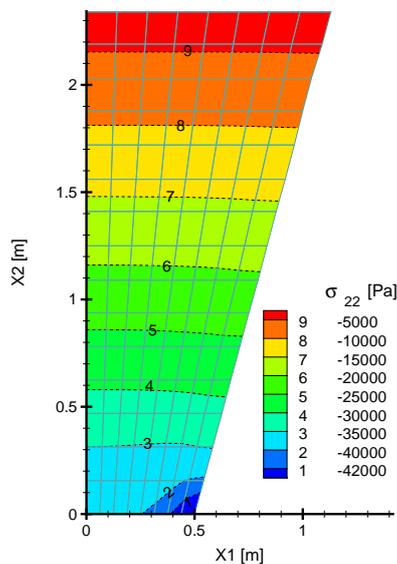


Figura 7.2.11: Distribución de la tensión vertical en el material granular al finalizar el llenado, utilizando el modelo elástico no lineal plástico.

Al comparar la Figura [7.2.11] y la Figura [7.2.9 c)] se observa que la distribución cualitativa de las tensiones es idéntica y que los valores difieren en un orden de magnitud.

Con el fin de detectar si la manera en la cual se simula el llenado influye en los resultados que se obtienen, se considera un caso en el cual se coloca todo el material desde el inicio y otros casos donde se simula el llenado progresivo mediante la adición de capas sucesivas. La malla permite simular el llenado colocando todo el material desde el principio (1 capa) o utilizando 4, 8 o 16 capas. En todos los casos se adopta el modelo elástico no lineal plástico como modelo constitutivo y las condiciones de contorno permiten que los nodos se desplacen libremente en la dirección tangencial a la pared (desplazamientos prescritos y condiciones multipunto).

En la Figura [7.2.12 a)] se tiene la distribución de la tensión en la dirección normal a la pared inclinada de la tolva y en la Figura [7.2.12 b)] la distribución de la tensión en la dirección normal a la compuerta. En ambos casos se comparan los valores que se obtienen con la malla de 128 elementos pero colocando el material en 16, 8, 4 y 1 capas utilizando el modelo elástico lineal y elastoplástico.

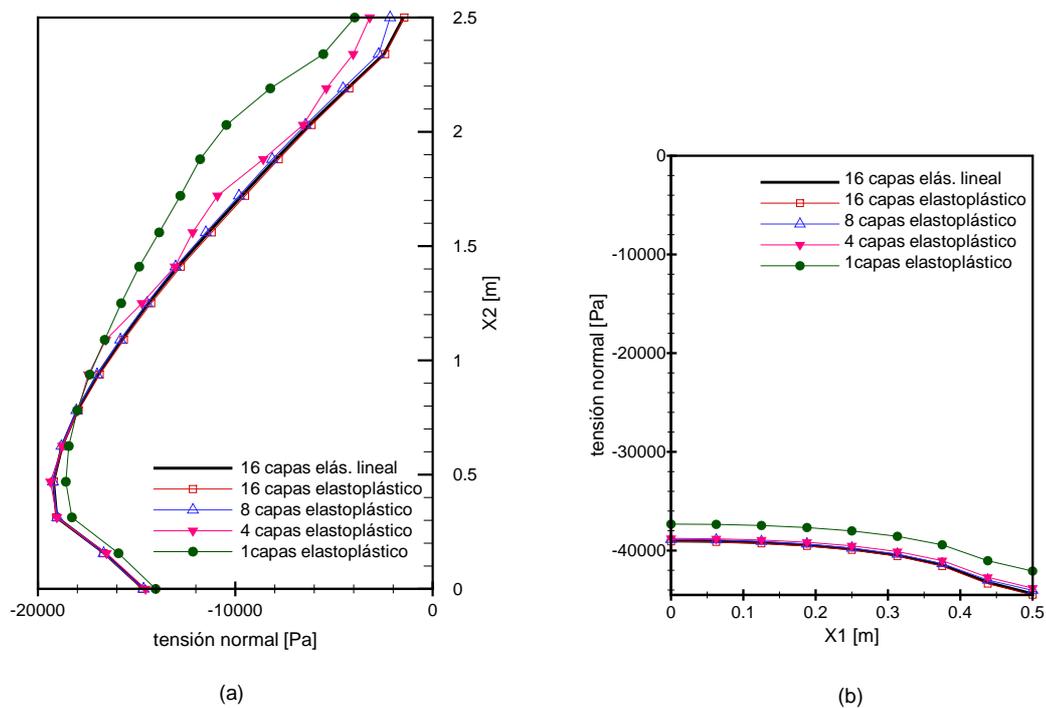


Figura 7.2.12: Tensiones normales  $\sigma_{nn}$  al utilizar diferente número de capas y sin considerar fricción. a) sobre la pared inclinada; b) sobre la compuerta

Sobre ambas superficies de la estructura puede observarse que la distribución de tensión normal que se obtiene al llenar la tolva colocando todo el material desde el principio (1 capa) difiere de las distribuciones que se obtienen al realizar el llenado progresivo con distinto número de capas. Las distribuciones de tensión que se obtienen al colocar el material en 4, 8 o 16 capas presentan diferencias en los dos tercios superiores de la altura y son prácticamente coincidentes en el tercio inferior.

Los mayores valores absolutos que corresponden a los llenados progresivos se encuentran entre  $-19366Pa < \sigma_{nn} < -19203Pa$  que en todos los casos se produce a  $X_2 = 0,47m$  siendo su diferencia

de  $163Pa$  (1%), mientras que el valor que se obtiene al colocar todo el material desde el principio es de  $-18584Pa$  para la misma coordenada  $X_2$  (4%).

Comparando el valor de  $\sigma_{nn} = -19210Pa$  para el modelo elástico lineal y  $\sigma_{nn} = -19203Pa$  para el modelo elástico no lineal se observa que son casi coincidentes. Si bien el módulo elástico tangente, en el modelo elástico no lineal, es función de la presión o tensión media ésta es baja por lo cual la variación del módulo es muy pequeña. En otras palabras la variación de la rigidez del material es muy pequeña.

La relación constitutiva influirá en los resultados si el valor de la presión  $p$  (o tensión media) es suficientemente elevada para que esto cambie en forma significativa el valor del módulo tangente por una parte. Para que el material endurezca por deformación deben producirse deformaciones volumétricas plásticas (modelo Cam Clay) que estará asociado un aumento de la presión (las tensiones de distorsión, que influyen en la tensión de corte generalizada  $q$ , durante el llenado son muy bajas).

El llenado progresivo con distinto número de capas no modifica significativamente la posición ni el valor absoluto de la tensión normal a la pared. En la Figura [7.2.12] se observa que las distribuciones de tensión normal a las paredes que se obtienen al llenar colocando el material en 8 y 16 capas son prácticamente coincidentes y la curva correspondiente al llenado colocando el material en 4 capas difiere solo en la parte superior con las anteriores.

Analizando las distribuciones de tensiones que se obtienen al mejorar la discretización Figura [7.2.10] y las que se obtienen con una misma discretización y distinto número de capas, se observa que es necesario discretizar con capas de menor espesor en el tercio inferior que es donde se producen las mayores variaciones de las tensiones. En el resto de la tolva parece ser suficiente utilizar un espesor de capa del orden de  $0,20m$  a  $0,25m$ . En la Figura [7.2.11] se evidencia la concentración de tensiones producida en el vértice que forman la compuerta y la pared inclinada de la tolva.

Con el fin de evaluar que porcentaje del peso total del material almacenado debe soportar la compuerta, se integran las tensiones verticales que actúan sobre la compuerta de la tolva. Se utilizaron los resultados de tensiones obtenidos considerando que el material es elástico no lineal plástico y el proceso de llenado se simuló incorporando el material en 16 capas. Al integrar la presión normal sobre la compuerta, por el método de los trapecios, resulta una fuerza total sobre la semi compuerta de  $-20323N$  que representa el 68% del peso de material almacenado cuya masa total es de  $3048Kg$ .

#### 7.2.4. Modelo de contacto mecánico

En los trabajos que forman parte de la revisión de antecedentes [Sanad et al., 2001], los autores destacan la importancia de la fricción entre el material granular y la pared en las distribuciones de presiones sobre las paredes (tanto en la dirección perpendicular como tangencial a éstas) y en la definición del patrón de flujo durante la descarga. Por estas razones se incluye en los modelos la condición de contacto mecánico con fricción en reemplazo de las condiciones que permiten el libre deslizamiento de los nodos en la dirección tangencial a las paredes de la estructura.

El programa SIMPACT-DELTA tiene implementado un algoritmo de contacto con fricción con una formulación que utiliza penalización. Utilizar el método de penalización para imponer las

restricciones de contacto es eficiente en la medida en que la elección del parámetro de penalización no reduzca el paso de tiempo crítico determinado por la malla del modelo de elementos finitos [Zhong, 1993].

### Parámetros de penalización.

Los parámetros de penalización, normal  $\alpha_n$  y tangencial  $\alpha_t$ , deben ser lo suficientemente pequeños para satisfacer la condición de estabilidad en el procedimiento explícito. La exactitud con la cual se cumplan las condiciones de contacto (no interpenetración de los cuerpos y el deslizamiento relativo en la dirección tangencial a la superficie de contacto) depende de la elección de éstos parámetros. Un valor muy pequeño puede resultar en que se obtengan interpenetraciones inaceptables. Un incremento en el valor adoptado para los parámetros de penalización puede resultar en una disminución en el paso de tiempo crítico y si es un valor muy grande se pueden tener problemas numéricos e incluso puede provocar que no se encuentre la solución.

Por otra parte, el valor que se adopte afecta los valores de las fuerzas de contacto por ser éstas directamente proporcionales al valor del parámetro de penalización. Si bien puede interpretarse al parámetro de penalización como una resistencia del contacto no hay expresiones para evaluarlo en función de los parámetros que definen la rigidez de la estructura y/o del material granular.

La estructura se supone infinitamente rígida y el criterio para adoptar un coeficiente de penalización se basa en proponer un valor y verificar que sean admisibles los valores de los desplazamientos del material granular en el contacto.

Debido a que no es posible evaluar el coeficiente de penalización, se realizó un análisis de la influencia del valor adoptado en la respuesta. Se consideran en el análisis las fuerzas de contacto grano - pared, las tensiones en la dirección normal a la pared que se desarrollan en el grano y los desplazamientos (interpenetraciones) sobre la superficie de contacto grano - pared. También se analizan los desplazamientos verticales de los nodos sobre el eje de simetría y las tensiones verticales en el volumen del grano.

Los valores de los parámetros que definen el amortiguamiento y la manera de fijar los tiempos de activación de las capas se establecen con los criterios que se utilizaron al imponer restricciones multipunto. Se utiliza para este estudio paramétrico la malla de 128 elementos con altura  $H = 2,50m$  y los mismos parámetros que caracterizan el material granular para el modelo elástico no lineal plástico.

### Condición de contacto sin fricción

Con el fin de poder comparar los valores de desplazamientos y de tensiones normales a las paredes obtenidas al utilizar condición de contacto con los ya obtenidos utilizando desplazamientos prescritos y condiciones multipunto se utiliza un coeficiente de fricción grano pared nulo  $\mu_s = 0$ . De esta manera se tienen los resultados anteriores como referencia para comparar con los que se obtengan con distintos coeficientes de penalización normal.

Además se pone a prueba la metodología ya empleada para evaluar los parámetros de amortiguamiento y los tiempos de activación de las capas, y se constata que sigan siendo adecuadas

cuando la condición de contorno se impone mediante contacto mecánico. En la Figura [7.2.13] se presentan la historia de los desplazamientos verticales de los nodos en el eje de simetría para la malla de 128 elementos y condición de contacto sin fricción con  $\alpha_n = 0,05$ . Puede observarse que tanto la definición del amortiguamiento como los tiempos de activación de las capas siguen siendo adecuados, ya que los desplazamientos se estabilizan antes de que una nueva capa sea agregada.

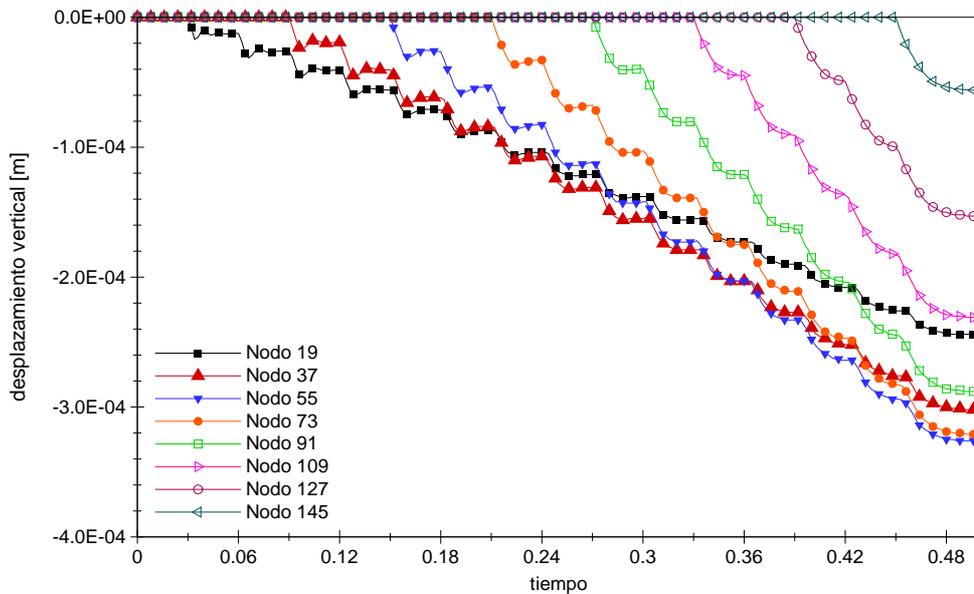


Figura 7.2.13: Historia de desplazamientos verticales de nodos sobre el eje de simetría al imponer condición de contacto sin fricción.

Al comparar los valores de los desplazamientos obtenidos al imponer contacto mecánico y los que se obtuvieron al imponer condiciones de contorno con desplazamientos prescritos y condiciones multipunto (Figura [7.2.8]) se nota un marcado incremento de los mismos. Esto se debe a que la condición de no interpenetración no se cumple en forma estricta sino aproximada. En la Tabla [7.1] se presentan los valores de los desplazamientos verticales al finalizar el proceso de llenado para los nodos 1 y 9 ( $X_2 = 0$ ) 19 (segunda capa) 55 (sexta capa) y 145 (superficie libre) para desplazamientos prescritos (CMP) y los que se obtienen para  $\alpha_n = 0,050$ ,  $\alpha_n = 0,075$  y  $\alpha_n = 0,10$ .

	CMP	$\alpha_n = 0,05$	$\alpha_n = 0,075$	$\alpha_n = 0,10$
$U_2^1$	0	$-1.53 \cdot 10^{-4}$	$-9.99 \cdot 10^{-5}$	$-7.38 \cdot 10^{-5}$
$U_2^9$	0	$-1.18 \cdot 10^{-4}$	$-1.24 \cdot 10^{-4}$	$-9.39 \cdot 10^{-5}$
$U_2^{19}$	$-8.48 \cdot 10^{-7}$	$-2.45 \cdot 10^{-4}$	$-1.90 \cdot 10^{-4}$	$-1.63 \cdot 10^{-4}$
$U_2^{55}$	$-1.79 \cdot 10^{-6}$	$-3.27 \cdot 10^{-4}$	$-2.77 \cdot 10^{-4}$	$-2.52 \cdot 10^{-5}$
$U_2^{145}$	$-3.80 \cdot 10^{-7}$	$-5.62 \cdot 10^{-5}$	$-4.93 \cdot 10^{-5}$	$-4.59 \cdot 10^{-5}$

Tabla 7.1: Desplazamientos verticales

El valor de los desplazamientos al final del llenado al utilizar condición de contacto difiere de los que se obtienen con desplazamientos prescritos en dos y tres ordenes de magnitud, dependiendo del valor de penalización y del nodo, en principio la diferencia parece importante. Al analizar la

magnitud de los desplazamientos, que son del orden de una décima de milímetro a una centésima de milímetro, en relación a la posible deformación de la estructura se encuentra que son del orden de la deformación posible de la tolva de 2,50m de altura. Por lo cual el rango de valores del coeficiente de penalización puede considerarse adecuado. En la Figura [7.2.14 a)] se presentan las distribuciones de la tensión vertical en el grano al utilizar  $\alpha_n = 0,050$ , en la Figura [7.2.14 b)] para  $\alpha_n = 0,075$  y para  $\alpha_n = 0,10$  en la Figura [7.2.14 c)].

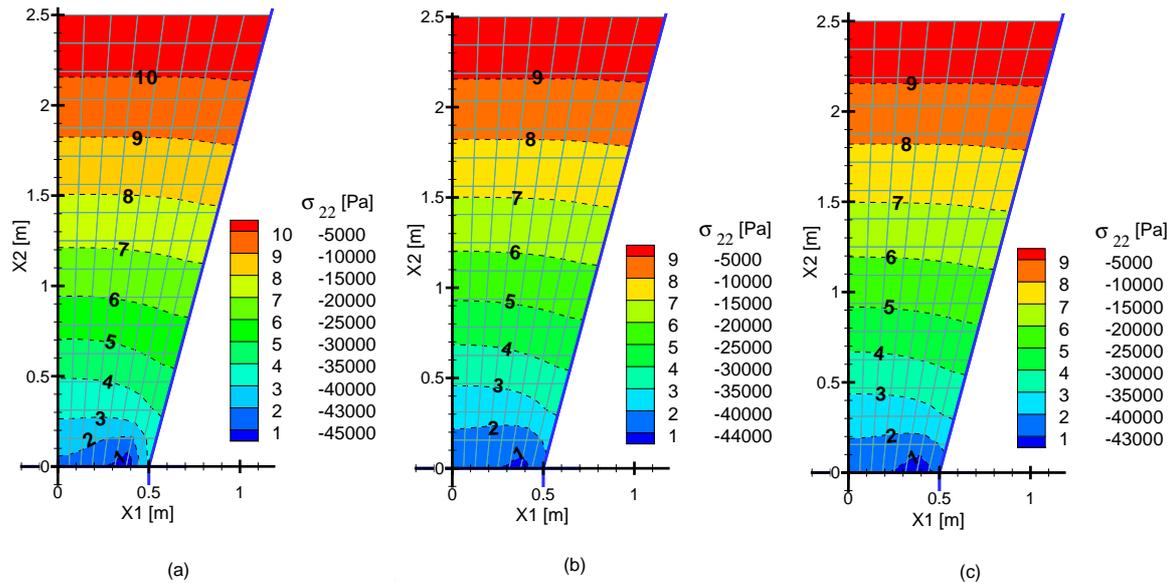


Figura 7.2.14: Tensiones verticales al utilizar distintos coeficientes de penalización sin considerar fricción. a)  $\alpha_n = 0,05$ ; b)  $\alpha_n = 0,075$ ; c)  $\alpha_n = 0,10$

Al comparar las distribuciones de tensión vertical de la Figura [7.2.14] se observa que el valor de la tensión normal a la compuerta para  $\alpha_n = 0,050$  es de  $-45000Pa$  disminuyendo a  $-44000Pa$  al utilizar  $\alpha_n = 0,075$  y a  $-43000Pa$  para  $\alpha_n = 0,10$  que es cercano al valor de  $-42000Pa$  que se obtuvo imponiendo condiciones de contorno en desplazamientos (Figura [7.2.11]) y la misma relación constitutiva. Por lo tanto puede considerarse válido utilizar como valor del coeficiente de penalización  $\alpha_n = 0,10$  ya que se obtienen desplazamientos máximos del orden de una centésima de milímetro y las tensiones son similares a las obtenidas al imponer como condición de borde desplazamientos prescritos.

En la Figura [7.2.15 a)] se presentan las distribuciones de la tensión normal a la pared inclinada de la tolva y las presiones normales de contacto que se obtienen al utilizar los valores 0,05, 0,075 y 0,10 para el coeficiente de penalización, y en la Figura [7.2.15 b)] las correspondientes a la compuerta.

En la Figura [7.2.15 a)] se observa una diferencia entre las curvas de distribución de la tensión normal y de la presión normal de contacto que se obtienen para el mismo coeficiente de penalización. Esto se debe a que los valores de tensión en los nodos se obtienen por un procedimiento de extrapolación suavizado a partir de los valores de tensiones en los puntos de integración de la cuadratura de Gauss Legendre, mientras los valores de las presiones de contacto normal se obtienen

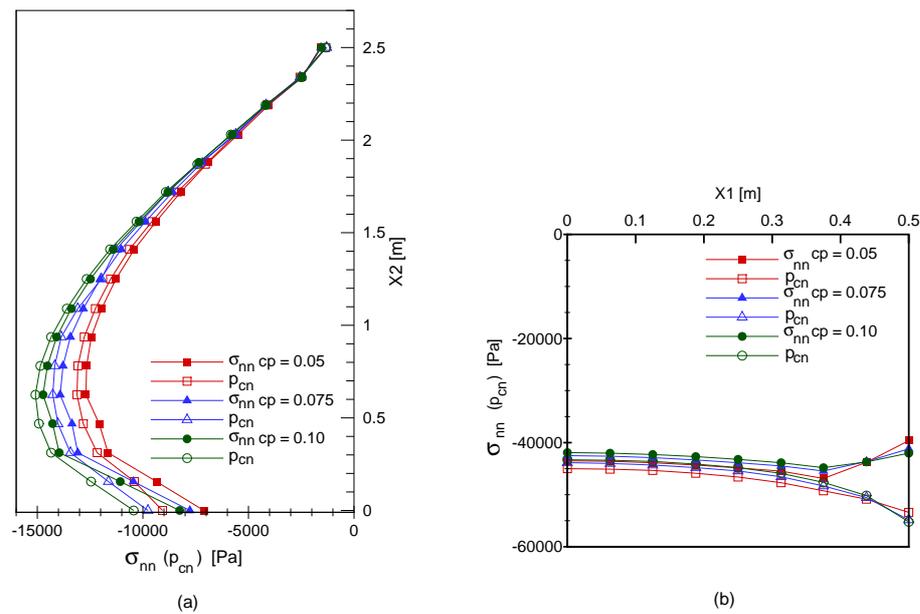


Figura 7.2.15: Distribución de la tensión normal y de la presión de contacto al imponer condición de contacto sin fricción. a) sobre la pared inclinada; b) sobre la compuerta.

como la fuerza de contacto dividido el área de influencia del nodo. Las mayores discrepancias se presentan en la coordenada  $X_2 = 0$  donde se tiene el vértice que forman la pared inclinada y la compuerta. En la Figura [7.2.11] y la Figura [7.2.14], donde se presentan las distribuciones de la tensión vertical en el grano, también se evidencia la concentración de tensiones en el vértice. Los valores de mayor valor absoluto que se obtienen sobre la compuerta al utilizar el coeficiente de penalización  $\alpha_n = 0,05$  son para la tensión normal  $\sigma_{nn} = -12696Pa$  y para la presión de contacto normal  $p_{cn} = -13122Pa$ . Cuando el coeficiente de penalización es  $\alpha_n = 0,075$  se obtienen  $\sigma_{nn} = -13918Pa$  y  $p_{cn} = -14267Pa$  y para  $\alpha_n = 0,10$  son  $\sigma_{nn} = -14728Pa$  y  $p_{cn} = -15090Pa$ . Cuando las condiciones de contorno fueron de desplazamientos prescritos, utilizando el mismo modelo constitutivo y el mismo proceso de llenado, el valor de tensión normal a la pared de mayor valor absoluto fue de  $\sigma_{nn} = -19203Pa$  (Figura [7.2.12 a])).

La fuerza vertical total que actúa sobre la compuerta de la tolva, que resulta de integrar las tensiones normales, obtenidas al utilizar los coeficientes de penalización normal  $\alpha_n = 0,05$ ,  $0,075$  y  $0,10$  son  $-22144N$ ,  $-21755N$  y  $-21533N$  respectivamente. La masa total para cada caso es de  $3048Kg$  que pesa  $29903N$ . La fuerza que actúa sobre la compuerta expresada como porcentaje del peso del material almacenado es del 74%, 73% y 71% respectivamente. Cuando las condiciones de contorno se establecieron como desplazamientos prescritos la fuerza vertical sobre la compuerta fue de  $-20323N$  (68% del peso de material almacenado), siendo la máxima diferencia porcentual del 6%.

### Condición de contacto con fricción

En el modelo se adoptaron parámetros de penalización normal y tangente iguales siendo:  $\alpha_n = \alpha_t = 0,075 \mp 0,025$ , con lo cual se tienen tres casos con una variación del  $\pm 33\%$  respecto del valor

medio.

La arena fina utilizada como material granular tiene un ángulo de fricción estático con una chapa de acero de  $\phi_w = 18^\circ$  por lo cual el coeficiente de fricción estático será  $\mu_s = \tan(\phi_w) \simeq 0,3$  y se adopta como coeficiente de fricción cinético  $\mu_k = \mu_s/2$ . Se utiliza nuevamente la tolva cuya pared inclinada forma un ángulo de  $75^\circ$  con la horizontal discretizada con una malla de 128 elementos dispuestos en 16 capas de 8 elementos.

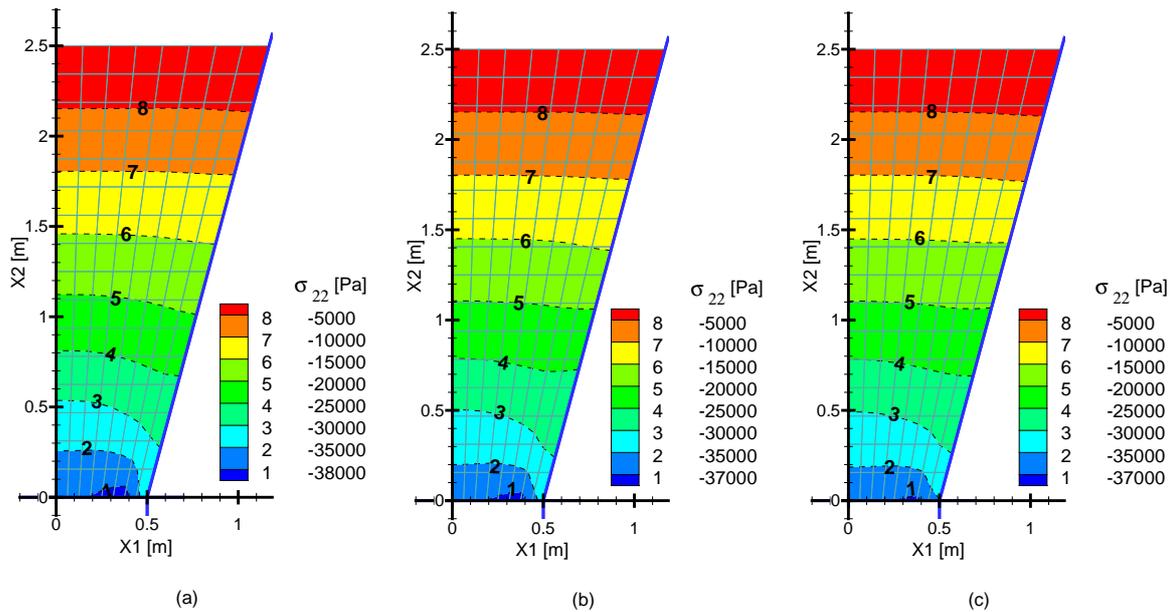


Figura 7.2.16: Distribuciones de la tensión vertical en el material granular obtenidas con distintos coeficientes de penalización normal y tangente. a)  $\alpha_n = \alpha_t = 0,05$ ; b)  $\alpha_n = \alpha_t = 0,075$ ; c)  $\alpha_n = \alpha_t = 0,10$

En la Figura [7.2.16] se presentan las distribuciones de la tensión vertical en el grano. La Figura [7.2.16 a)] corresponde a los resultados obtenidos para  $\alpha_n = \alpha_t = 0,05$ , la Figura [7.2.16 b)] para  $\alpha_n = \alpha_t = 0,075$  y la Figura [7.2.16 c)] cuando  $\alpha_n = \alpha_t = 0,10$ . Al comparar esta distribución con las obtenidas cuando no se consideró la fricción entre el material granular y la pared de la tolva, Figura [7.2.14], es evidente la disminución en los valores que la tensión alcanza en la mitad inferior de la tolva zona donde también cambia la forma de las curvas de distribución por la influencia de la fricción con la pared.

Las distribuciones de la tensión normal a las pared inclinada de la tolva y de las presiones normales de contacto se muestran en la Figura [7.2.17 a)] y las que actúan sobre la compuerta en la Figura [7.2.17 b)]. Comparando con los gráficos de la Figura [7.2.15] que corresponden a haber considerado contacto sin fricción, se observa una leve disminución tanto de la tensión normal como de la presión normal de contacto que actúa en la pared inclinada cuyos valores absolutos máximos son en este caso de  $\sigma_{nn} = -11280Pa$  y  $p_{cn} = -11477Pa$  para  $\alpha_n = \alpha_t = 0,05$ ;  $\sigma_{nn} = -12427Pa$  y  $p_{cn} = -12549Pa$  corresponden a  $\alpha_n = \alpha_t = 0,075$  y  $\sigma_{nn} = -13221Pa$  y  $p_{cn} = -13381Pa$  cuando  $\alpha_n = \alpha_t = 0,10$ . Estos valores son aproximadamente un 10% menores a los que se obtuvieron cuando

no fue tomada en cuenta la fricción entre el material y la pared y se producen a  $X_2 = 0,625m$  al igual que en el caso de no considerarse fricción. También sobre la compuerta resulta una disminución tanto de las tensiones normales como de las presiones normales de contacto siendo un 16% menores en el vértice formado por la compuerta y la pared y del 13% en el eje de simetría. La fuerza vertical total que actúa sobre la compuerta resulta de  $-18806N$  al adoptar  $\alpha_n = \alpha_t = 0,05$ , de  $-18388N$  cuando  $\alpha_n = \alpha_t = 0,075$  y de  $-18340N$  para  $\alpha_n = \alpha_t = 0,10$ . La masa total presenta una leve variación siendo de  $3048Kg$  para los coeficientes de penalización 0,05 y 0,10 y de  $3078Kg$  para  $\alpha_n = \alpha_t = 0,075$ . Los porcentajes del peso total de grano que actúa en la compuerta son 63% para los valores correspondientes a  $\alpha_n = \alpha_t = 0,05$  y del 61% para los otros dos valores adoptados, que comparados con el caso de no considerar fricción representan una disminución del 11% y 12% respectivamente.

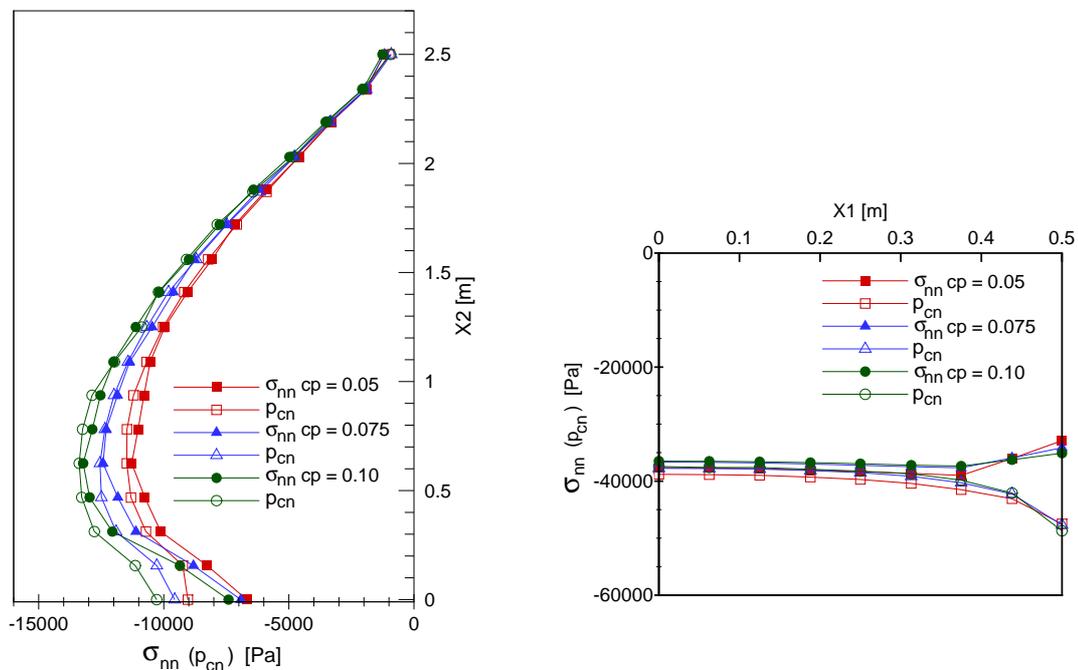


Figura 7.2.17: Distribuciones de la tensión normal y de la presión de contacto normal considerando contacto con fricción. a) sobre la pared inclinada; b) sobre la compuerta.

En la Figura [7.2.18] se presentan las distribuciones de la tensión tangente  $\sigma_{nt}$  a las paredes y de la presión de contacto tangente  $p_{ct}$ . Al igual que en el caso de no considerar fricción y del caso en el que se impusieron condiciones de desplazamientos prescritos, es marcada la concentración de tensiones en el vértice que forman la pared inclinada y la compuerta especialmente en  $p_{ct}$ .

Sobre la pared inclinada los valores de  $\sigma_{nt}$  alcanzan valores máximos de  $3678Pa$ ,  $3599Pa$  y  $3756Pa$  y su posición corresponde a  $X_2 = 0,0$  mientras que los valores de  $p_{ct}$  a esa coordenada son de  $16432Pa$ ,  $16364Pa$  y  $16581Pa$  al adoptar respectivamente  $\alpha_n = \alpha_t = 0,05$ ,  $0,075$  y  $0,10$ . La presión de contacto tangente, presenta máximos locales a  $X_2 = 0,937m$  de  $2970Pa$  para  $\alpha_n = \alpha_t = 0,05$ ,  $X_2 = 0,469m$  de  $3653Pa$  para  $\alpha_n = \alpha_t = 0,075$  y  $X_2 = 0,312m$  de  $3474Pa$  para  $\alpha_n = \alpha_t = 0,10$  valores mas cercanos a los de las tensiones tangenciales. Sobre la compuerta

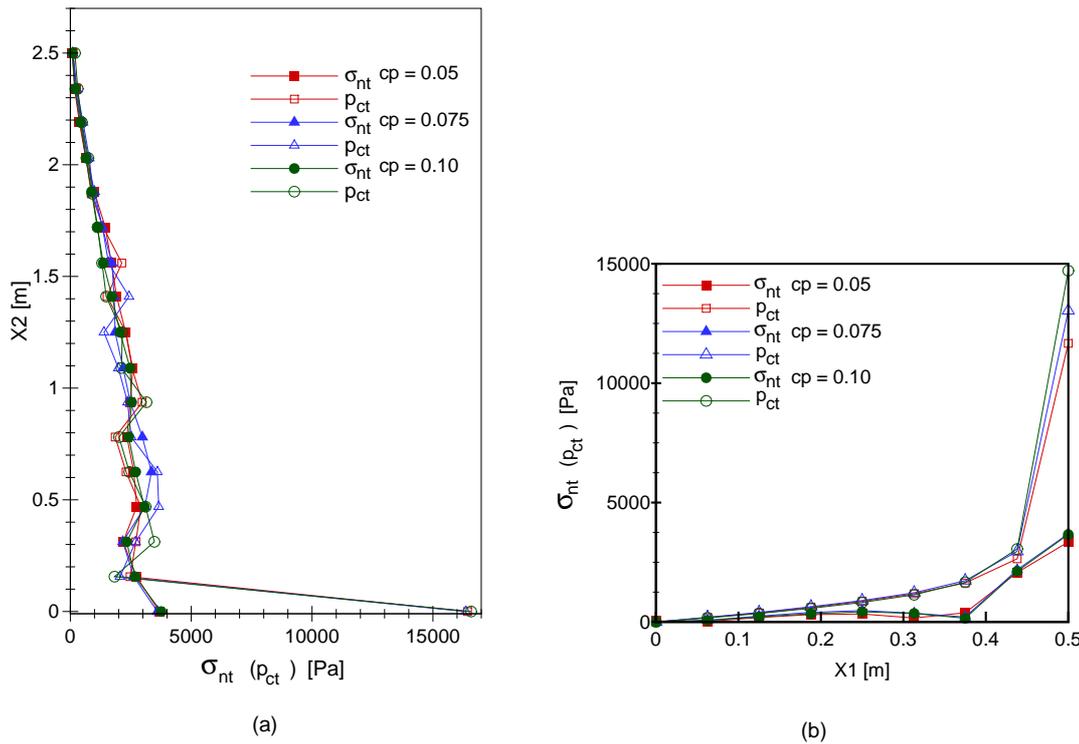


Figura 7.2.18: Distribuciones de la tensión tangencial y de la presión de contacto tangente a las paredes. a) a la pared inclinada; b) a la compuerta.

la distribución de las tensiones tangenciales y las presiones de contacto tangentes también son fuertemente influenciadas por la singularidad que se produce en el vértice que forma la compuerta y la pared siendo las tensiones tangenciales en  $X_1 = 0,50m$  de  $3350Pa$ ,  $3697Pa$  y de  $3663Pa$  para los valores de coeficiente de penalización menor a mayor respectivamente, mientras los valores de la presión tangencial de contacto son de  $11666Pa$ ,  $13040Pa$  y  $14710Pa$  respectivamente y disminuyen a valores cercanos a  $1200Pa$  para valores de  $X_1 \simeq 0,25m$ .

Los valores de tensión normal, tanto a la pared inclinada como a la compuerta, aumentan sus valores absolutos cuando aumenta el valor del coeficiente de penalización adoptado siendo la variación porcentual de la menor respecto de la intermedia de  $-9\%$  y de la mayor respecto de la intermedia de  $+6\%$  cuando la variación de los coeficientes de penalización respecto del valor intermedio son del  $\mp 33\%$ . El comportamiento tanto de las tensiones tangenciales como de las presiones de contacto tangentes no muestran un comportamiento monótono creciente al aumentar el valor del coeficiente de penalización y varían también con la distancia al vértice que forman ambas superficies.

### 7.3. Casos de aplicación

Con el objeto de determinar la confiabilidad de los resultados que se obtienen con la metodología desarrollada para la simulación del llenado, se seleccionaron cuatro casos de aplicación.

El primero de ellos consiste en simular el llenado de tolvas cónicas, a modelar como un estado de

axilsimetría, en base al trabajo de [Ooi and Rotter, 1991] incluido en la revisión de antecedentes. En el citado trabajo los autores presentan sus resultados numéricos y varias fórmulas teóricas con las cuales comparan sus resultados. El objetivo es modelar varias tolvas que difieren en su ángulo de inclinación respecto de la horizontal y comparar los resultados obtenidos con los correspondientes a las fórmulas teóricas debido a que las normas de aplicación se basan en alguna de ellas. También se presentan las hipótesis que condujeron a las fórmulas teóricas.

El segundo caso de aplicación es un silo cilíndrico de fondo plano que fue propuesto para un trabajo de colaboración internacional, cuyos resultados fueron presentados por [Rotter et al., 1998]. El objetivo es comparar los resultados que se obtienen al utilizar la metodología propuesta con los resultados presentados por los autores, ya que fueron obtenidos por diferentes grupos de investigación utilizando otras metodologías numéricas.

El tercer y el cuarto casos de aplicación tienen por objetivo comparar los resultados de la simulación con mediciones experimentales de las presiones que el material ejerce sobre las paredes de silos de sección rectangular y tolvas en cuña. Los resultados experimentales se seleccionaron de los varios que fueron los presentados por [Kmita, 1991], debido a que el autor utilizó como material granular para realizar las mediciones una arena fina de grano uniforme en estado seco. Se espera que los resultados que se obtengan al utilizar los parámetros constitutivos deducidos para una arena de similares características no presenten marcadas diferencias. En estos dos casos también se incluirá el análisis de la influencia del método de llenado, concéntrico o distribuido, en los resultados debido a que el autor no especifica en su trabajo el método de llenado utilizado.

### 7.3.1. Tolvas cónicas.

En el Anexo 3 se presenta una breve descripción de las teorías para tolvas cónicas más comúnmente citadas y de las hipótesis subyacentes a cada una extraídas del trabajo [Ooi and Rotter, 1991]. Se incluyen las hipótesis en base a las cuales fueron deducidas las fórmulas teóricas con el fin de analizar no solo las curvas de distribución de presiones sino también los estados del material granular y su relación con las mismas. Las distribuciones teóricas se utilizarán para comparar con los resultados numéricos obtenidos.

Se modeló el llenado de tres tolvas cónicas, cuyos ángulos respecto de la horizontal son  $\alpha = 75^\circ, 50^\circ$  y  $25^\circ$ . Por ser simétricas se discretiza solo la mitad y se adopta al eje  $X_2$  como eje de simetría. Para las tres tolvas se adoptó que la altura de material respecto de la compuerta sea de  $2,40m$  al finalizar el llenado y el radio de la compuerta sea  $b = 0,50m$ . Los radios de cada tolva, al nivel de llenado final son  $B = 1,17m$ ,  $B = 2,60m$  y  $B = 5,86m$  para las tolvas cuyos ángulos respecto de la horizontal son  $\alpha = 75^\circ, 50^\circ$  y  $25^\circ$  respectivamente.

Los valores de los ángulos y la distancia entre el vértice del cono y la superficie libre de material al finalizar el llenado, a utilizar en las fórmulas teóricas son los siguientes: el ángulo  $\beta$  entre la pared y el eje de simetría son  $\beta = 15^\circ, 40^\circ, 65^\circ$ ; siendo que  $b = 0,50m$  y la altura de material sobre la compuerta es de  $2,40m$ , las distancias entre el vértice de cada cono y el nivel máximo de llenado son  $H = 4,266m$ ,  $H = 2,996m$  y  $H = 2,633m$  cuando se adoptan los ángulos  $\alpha = 75^\circ, 50^\circ, 25^\circ$  respectivamente.

Las tolvas se discretizaron con mallas compuestas de 12 capas de  $0,20m$  de espesor y 8 elementos

cuadrilaterales por capa, resultando tres mallas de 96 elementos y 117 nodos para el material granular. Las condiciones de contorno corresponden a imponer condición de simetría en los nodos que se encuentran sobre el eje  $X_2$  y contacto mecánico con fricción en los nodos que se encuentran sobre la compuerta y sobre la pared cónica de la tolva. Las mallas y las dimensiones geométricas se presentan en la Figura [7.3.1].

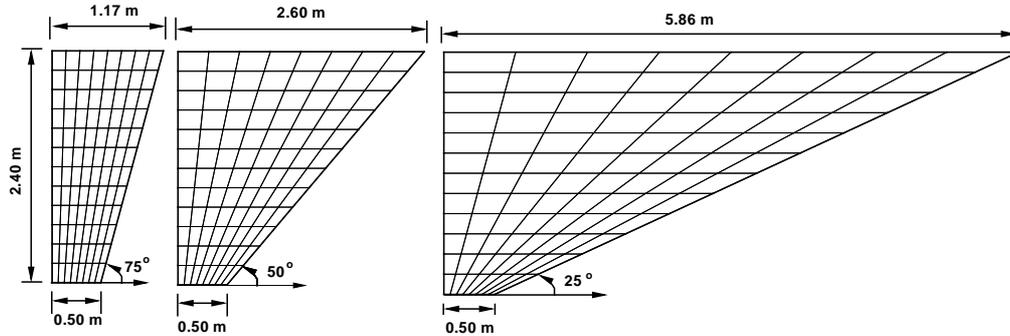


Figura 7.3.1: Mallas y dimensiones de las tolvas cónicas

En los tres casos se utiliza la relación constitutiva elástica no lineal plástica completa. Los valores de los parámetros adoptados para una relación de vacíos inicial del material  $e_o = 0,87$  son la densidad  $\rho = 1460 \text{ Kg/m}^3$  a la que corresponde un peso específico  $\gamma = 14322,6 \text{ N/m}^3$ , el ángulo de fricción entre el material y la pared  $\phi_w = 18^\circ$  por lo cual el coeficiente de fricción estático  $\mu_s = \tan \phi_w \simeq 0,3$ , el ángulo de fricción interna del material es  $\phi = 34^\circ$  y no tiene cohesión ( $c = 0$ ), la relación de Poisson  $\nu = 0,3$ , el número módulo  $k_{ur} = 960$ , la presión de referencia  $p_a = 100000 \text{ Pa}$  el exponente  $n = 0,57$  en la expresión dada por Jambu para el módulo elástico tangente y los parámetros para el modelo Cam Clay  $M = 1,36$ ,  $a_1 = 77719$ ,  $a_2 = 6,39 \cdot 10^7$  y  $a_3 = 1,53 \cdot 10^8$ . En los tres casos se utilizaron los coeficientes de penalización normal y tangente iguales y se adoptó para ambas superficies de contacto el valor  $\alpha_n = \alpha_t = 0,09$ .

Al analizar los desplazamientos verticales de los nodos sobre el eje de simetría y sobre la pared de éstas tolvas se observa el mismo comportamiento que al analizar los desplazamientos de la tolva presentados en la Figura [7.2.13]. Nuevamente el valor de amortiguamiento es menos efectivo para controlar el leve sobrepaso de los desplazamientos en las tres capas inferiores y muy efectivo en las restantes.

La distribución de las tensiones verticales en el grano al finalizar el llenado de la tolva cuyo ángulo es  $\alpha = 75^\circ$  se presenta en la Figura [7.3.2 a)], para la tolva con  $\alpha = 50^\circ$  en la Figura [7.3.2 b)] y en la Figura [7.3.3] para la tolva de  $\alpha = 25^\circ$ .

Como puede observarse en las Figuras [7.3.2] y [7.3.3] las distribuciones de tensiones verticales en planos horizontales solo pueden asimilarse a una distribución hidrostática en el tercio superior de las tolvas pero a medida que el ángulo  $\alpha$  disminuye la distribución de tensiones en los dos tercios inferiores forma un núcleo de compresión sobre la compuerta. Esta distribución de la tensión vertical está en contraposición con las hipótesis bajo las cuales fueron deducidas las expresiones de las curvas teóricas de distribución de tensión normal sobre la pared inclinada de las tolvas.

La fuerza total que actúa sobre la compuerta, obtenida como la integral de las tensiones normales

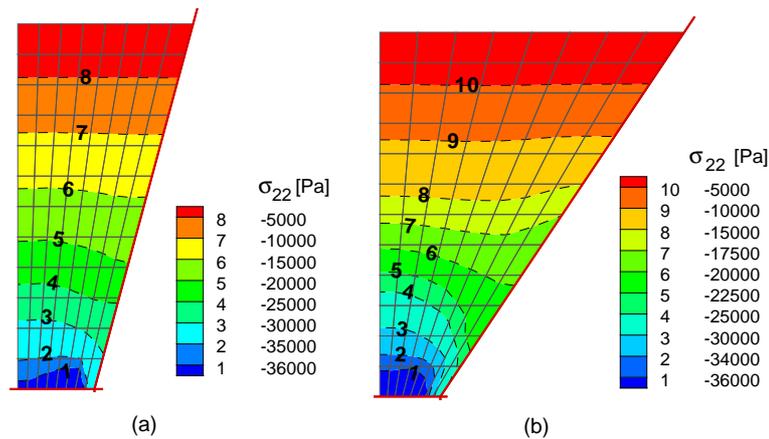


Figura 7.3.2: Tensiones verticales en el grano. a) Tolva con  $\alpha = 75^\circ$ ; b) Tolva con  $\alpha = 50^\circ$

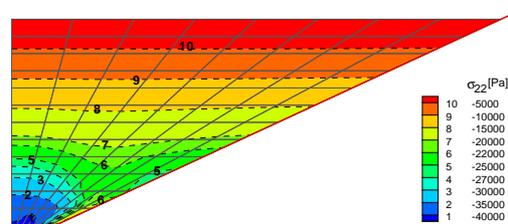


Figura 7.3.3: Tensiones verticales en el grano para la tolva con  $\alpha = 25^\circ$

a la misma, son  $28703N$  que representa el 40 % del peso del material almacenado para la tolva con  $\alpha = 75^\circ$  y se reduce a  $27239N$  que representa el 12 % del peso del material para la tolva de  $\alpha = 50^\circ$  y es  $23722N$  que representa solo del 4 % para la tolva con  $\alpha = 25^\circ$ . Las masas totales al final del llenado son de  $7810kg$ ,  $28720kg$  y  $128291kg$  para las tolvas con  $\alpha = 75^\circ$ ,  $50^\circ$  y  $25^\circ$  respectivamente. La disminución de la fuerza total que actúa sobre la compuerta facilita la operación de apertura y cierre de la misma. El porcentaje del peso de material almacenado que actúa sobre la compuerta disminuye notoriamente a medida que disminuye el ángulo  $\alpha$  de la pared de la tolva siendo que la masa de material aumenta en un orden de magnitud entre la tolva con  $\alpha = 75^\circ$  y la tolva con  $\alpha = 50^\circ$  y de esta respecto de la tolva con  $\alpha = 25^\circ$ . Las tensiones verticales máximas son del mismo orden en los tres casos.

Para las tres tolvas se presentan las distribuciones de la tensión normal que actúa sobre la pared obtenida al simular el llenado y se las compara con las correspondientes curvas teóricas en la Figura [7.3.4].

En la Figura [7.3.4 a)] la distribución de la tensión normal a la pared que se obtiene en la simulación por elementos finitos para la tolva con  $\alpha = 75^\circ$  predice menores tensiones que las tres curvas teóricas, aunque coincide en la predicción de la posición en la cual se produce el máximo valor de la tensión normal con las curvas teóricas de McLean y Walter [Ooi and Rotter, 1991] ( $X_2 = 0,40m$ ). Para la tolva con  $\alpha = 50^\circ$  la distribución de la tensión normal que se obtiene de la simulación es muy cercana a la curva teórica propuesta por Walters desde la superficie libre

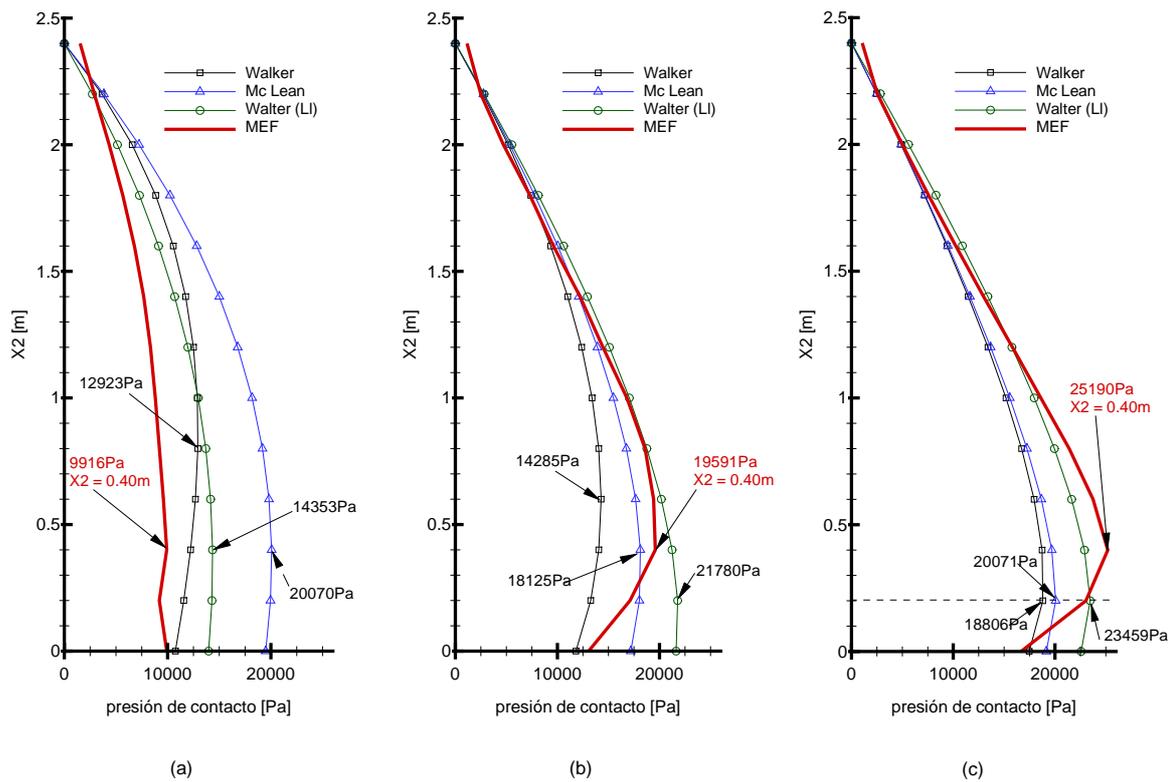


Figura 7.3.4: Distribuciones de la tensión normal a la pared inclinada de las tolvas cónicas. a)  $\alpha = 75^\circ$ ; b)  $\alpha = 50^\circ$ ; c)  $\alpha = 25^\circ$

del material hasta que se produce el máximo valor para  $X_2 = 0,40m$  separándose para  $0,00m < X_2 < 0,40m$ . El valor máximo de tensión normal obtenido difiere del valor máximo de la teoría de Walter en un 11 % y del valor predicho por la teoría de McLean en un 8 %. La distribución obtenida coincide con las tres teorías en el tercio superior (donde la hipótesis teórica de una distribución de tensiones vertical hidrostática parece cumplirse).

Para la tolva con  $\alpha = 25^\circ$ , nuevamente las distribuciones de la tensión normal a la pared de las tres teorías y la obtenida por elementos finitos son cercanas en el tercio superior de la pared. En este caso el máximo valor de tensión normal obtenido al final de la simulación del llenado es mayor que el predicho por las curvas teóricas. El máximo valor de la tensión normal es un 7 % mayor que el predicho por la teoría de Walter. Mientras que las tres teorías establecen que el máximo se produce a  $X_2 = 0,20m$  la simulación predice que se produce a  $X_2 = 0,40m$ .

En las simulaciones el cociente entre la fuerza de contacto normal y la fuerza de contacto tangente en los nodos sobre la pared inclinada se muestra como función del pseudo tiempo de llenado en las Figuras [7.3.5], [7.3.6] y [7.3.7] para las tolvas con  $\alpha = 75^\circ$ ,  $50^\circ$  y  $25^\circ$  respectivamente. El objetivo era detectar si la fricción se desarrollaba completamente en toda la pared, en parte de ella o si no llega a alcanzar el valor máximo de 0,3 que corresponde al coeficiente de fricción estático.

En la Figura [7.3.5] los valores en el eje del tiempo corresponden a los tiempos de activación de las capas con las cuales se simula el llenado progresivo. El cociente entre la fuerza de contacto tangencial  $f_{ct}$  y la fuerza de contacto normal  $f_{cn}$  presenta fuertes picos en la capa que se ha agregado

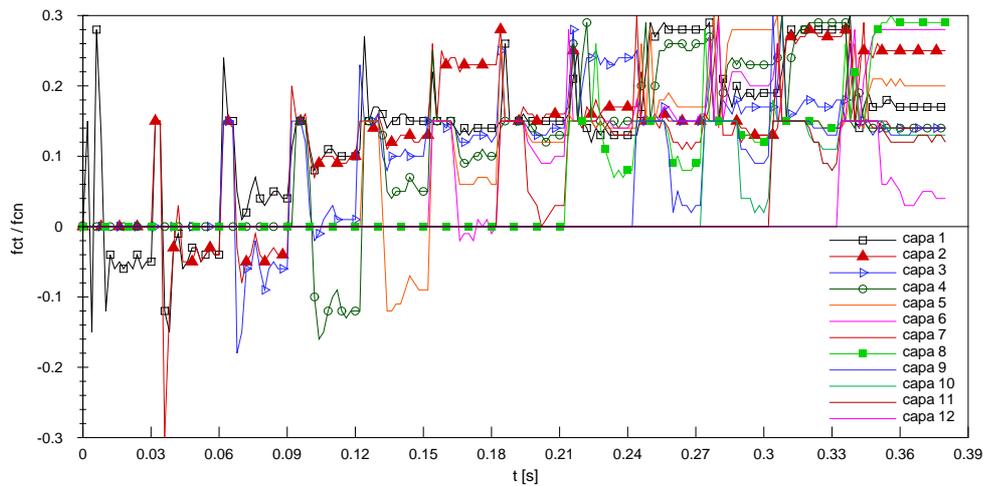


Figura 7.3.5: Fricción desarrollada en el contacto ( $f_{ct}/f_{cn}$ ) para la tolva con  $\alpha = 75^\circ$

y en las inferiores, picos que se producen para un valor de tiempo igual a un quinto del periodo posterior al tiempo de activación de la capa ( $t = t_c + T/5$ ). El valor pico del cociente alcanza el valor del coeficiente de fricción estático pero no sucede lo mismo con los valores estables.

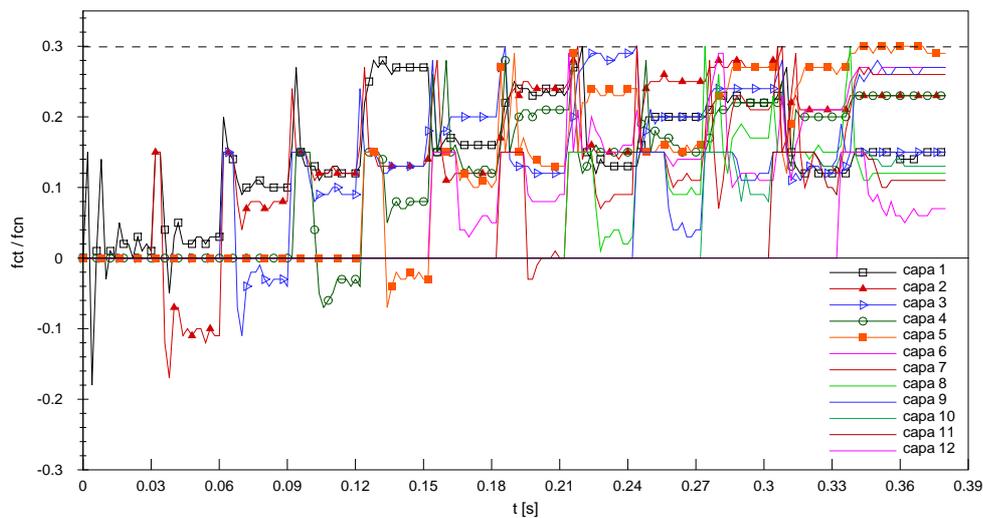


Figura 7.3.6: Fricción desarrollada en el contacto ( $f_{ct}/f_{cn}$ ) para la tolva con  $\alpha = 50^\circ$

Los valores pico del cociente ( $f_{ct}/f_{cn}$ ) que alcanzan el valor de la fricción estática no necesariamente indican que se haya movilizadocompletamente la fricción. Esto es debido a que el llenado se simula como un proceso dinámico al cual se ha amortiguado con el fin de tratar de representar el llenado progresivo como un proceso cuasi estático siendo las fuertes oscilaciones un problema de simulación. Por lo anterior es más probable que los valores estables sean los representativos del verdadero desarrollo de la fricción entre el material y la pared inclinada.

Para la tolva con  $\alpha = 75^\circ$ , se concluiría que no llega a desarrollarse completamente la fricción en ningún punto de la pared pero el valor estable es cercano a  $\mu_s$  en las dos capas inferiores y ( $X_2 < 0,40m$ ) y a dos tercios de la altura de material desde la compuerta (capa 8  $X_2 = 1,60m$ ).

El desarrollo de la fricción sobre la pared para la tolva con  $\alpha = 50^\circ$  Figura [7.3.6] tiene características similares a lo que sucede en la tolva de  $\alpha = 75^\circ$ . Para la tolva de  $\alpha = 50^\circ$  se observa un mayor número de capas que alcanzan valores estables de la relación  $f_{ct}/f_{cn}$  cercanos al valor de fricción estático. Esto estaría indicando una mayor incidencia de la fricción. Otra diferencia es que para la quinta capa, ubicada a dos quintos de la altura de material desde la compuerta ( $X_2 \simeq 1,00m$ ), se alcanza el valor estático al final del llenado.

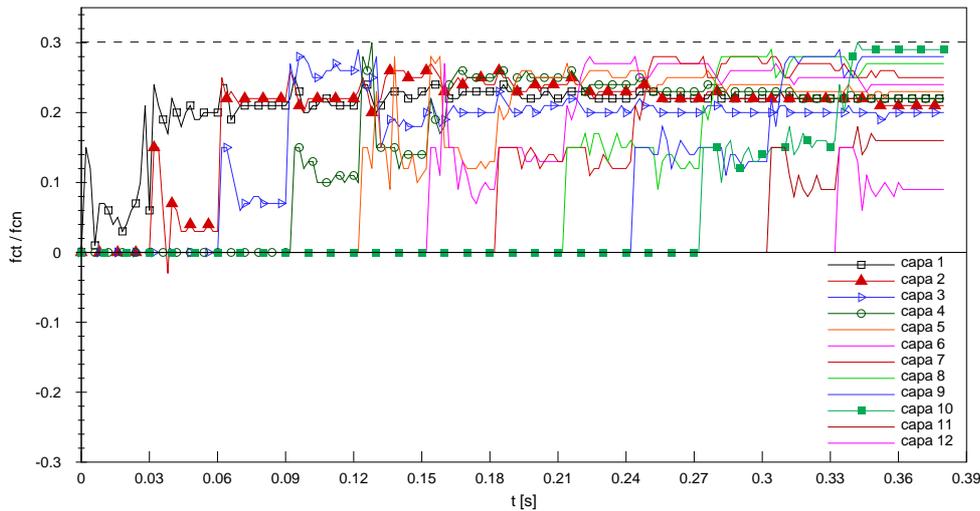


Figura 7.3.7: Fricción desarrollada en el contacto ( $f_{ct}/f_{cn}$ ) para la tolva con  $\alpha = 25^\circ$

La fricción sobre la pared para la tolva con  $\alpha = 25^\circ$  Figura [7.3.7] tiene características similares a las otras dos tolvas. En este caso ningún valor estable del cociente  $f_{ct}/f_{cn}$  alcanza el valor del coeficiente de fricción estático pero la mayoría de las capas alcanza valores estables superiores a 0.2.

De las tres figuras anteriores se puede concluir que el desarrollo de la fricción en toda la pared inclinada es mayor cuando la inclinación de la pared respecto de la horizontal es menor.

### 7.3.2. Silo de fondo plano. Otros resultados numéricos y modelos teóricos.

Se utilizó como segundo caso de aplicación el silo de fondo plano que es llenado en forma concéntrica, el cual fue utilizado para un estudio internacional de colaboración sobre la capacidad predictiva del método de elementos finitos y del método de elementos discretos al realizar los cálculos del comportamiento de sólidos granulares en silos, cuyos resultados fueron resumidos en el trabajo [Rotter et al., 1998].

En el Anexo 3 se incluye una descripción de los modelos de distribución de presiones en las paredes de un silo ejercidas por el material almacenado pueden ser obtenidas utilizando los métodos de Janssen o de Reimbert extraídos del trabajo de [Lievin, 1987].

#### Descripción de las simulaciones

El silo se simula por elementos finitos como un estado de deformación plana que tiene simetría vertical. La separación entre las paredes verticales es de  $5m$  y la altura de las mismas es de  $25m$

al finalizar el llenado progresivo la superficie libre del grano alcanza una altura de  $20m$  por encima del fondo del silo.

Los valores de los parámetros que definen la relación constitutiva corresponden a la arena del río Sacramento suelta [Lee and Seed, 1967]. La densidad del material  $\rho = 1417Kg/m^3$ , el ángulo de fricción entre el material y la pared  $\phi_w = 18^\circ$  por lo cual el coeficiente de fricción estático  $\mu_s = \tan \phi_w \simeq 0,3$  y  $\mu_k = \mu_s/2 = 0,15$ , el ángulo de fricción interna del material es  $\phi = 34^\circ$  y no tiene cohesión ( $c = 0$ ). La parte elástica está definida por la relación de Poisson  $\nu = 0,3$ , el número módulo  $k_{ur} = 960$  el exponente  $n = 0,57$  y como presión de referencia la presión atmosférica  $pa = 100000Pa$  para obtener el módulo elástico tangente con la expresión dada por Jambu. Los parámetros para el modelo Cam Clay  $M = 1,36$ ,  $a_1 = 77719$ ,  $a_2 = 6,39 \cdot 10^7$  y  $a_3 = 1,53 \cdot 10^8$  corresponden a la relación de vacíos inicial  $e_o = 0,87$ . El ángulo de reposo del material es  $\phi_r = 35^\circ$  que es el ángulo que adoptarán las capas de material al ser incorporadas al silo.

La malla se compone de 103 capas de 10 elementos cada una, el ángulo de inclinación de la superficie libre de la primer capa es de  $6,7^\circ$  y aumenta hasta alcanzar  $35^\circ$  en la sexta capa manteniéndose en ese valor hasta la última capa. Esta variación de los ángulos de inclinación de las primeras cinco capas fue adoptado para obtener razonablemente buenas relaciones de aspecto en los elementos cuadriláteros en la zona cercana al fondo. La malla tiene 1144 nodos que se utilizan para discretizar el material granular con 1030 elementos. La malla utilizada se muestra en la Figura [7.3.8] junto con los ejes coordenados, siendo el eje  $X_2$  el eje de simetría del silo.

El período de vibraciones libres no amortiguadas es  $T = 0,2764$ . Para obtener los tiempos de activación de las capas se utiliza la expresión  $t_c = t_{c-1} + T$  siendo  $c$  el número de capa y se ha adoptado  $T = 0,3$ . El valor del período puede estimarse utilizando la siguiente expresión, similar a la propuesta para las tolvas:

$$\begin{aligned} T &\simeq \frac{7}{2} \frac{H_{\text{máx}}}{\sqrt{\frac{E_{ur}}{\rho}}} \\ &\simeq \frac{7}{2} \frac{21,75m}{\sqrt{\frac{9,6 \cdot 10^7 \text{ m}}{1417 \text{ s}}}} \\ &\simeq 0,288 \end{aligned}$$

Utilizando la misma malla se definen dos superficies maestras de contacto, una representa al fondo del silo y la otra a la pared lateral. Se utilizaron dos maneras diferentes de asignar los valores a los coeficientes de penalización a las superficies maestras.

En el primer caso se asigna un valor para cada coeficiente de penalización a cada superficie maestra (caso 1). Las superficies maestras de geometría tan sencilla pueden definirse con un segmento cada una o con varios.

En el segundo caso se definen las superficies maestras con varios segmentos de manera que puedan asignarse diferentes coeficientes de penalización en cada segmento (caso 2). En el código original se introdujeron las modificaciones necesarias para permitir asignar los coeficientes de penalización a cada segmento con el fin de minimizar las interpenetraciones, las cuales no son uniformes.

En la Tabla [7.3] se especifican las coordenadas que definen los extremos de cada segmento y los

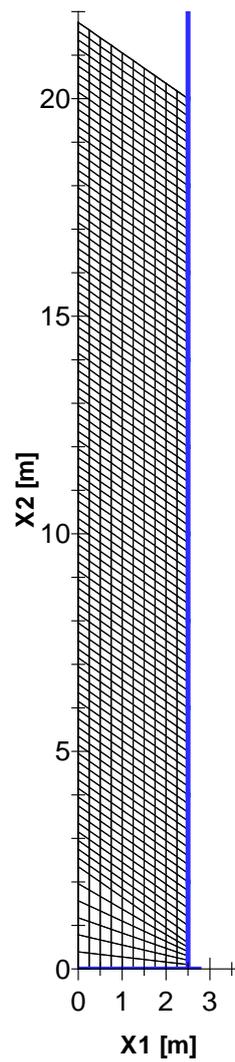


Figura 7.3.8: Malla del silo de fondo plano y llenado concéntrico

valores de penalización adoptados en los dos casos mencionados para la superficie maestra vertical (pared) y en la Tabla [7.2] los correspondientes a la superficie maestra horizontal (fondo).

$X_1$ [m]	caso 1	caso 2
	$\alpha_n = \alpha_t$	$\alpha_n = \alpha_t$
0 a 1	0.1	0.4
1 a 2	0.1	0.5
2 a 2.5	0.1	0.6

Tabla [7.2] coeficientes de penalización sobre la superficie de contacto horizontal

$X_2$ [m]	caso 1 $\alpha_n = \alpha_t$	caso 2 $\alpha_n = \alpha_t$
0 a 2	0.1	0.6
2 a 4	0.1	0.5
4 a 6	0.1	0.4
6 a 8	0.1	0.4
8 a 10	0.1	0.3
10 a 12	0.1	0.3
12 a 14	0.1	0.2
14 a 16	0.1	0.2
16 a 18	0.1	0.1
18 a 21	0.1	0.1

Tabla [7.3] coeficientes de penalización sobre la superficie de contacto vertical

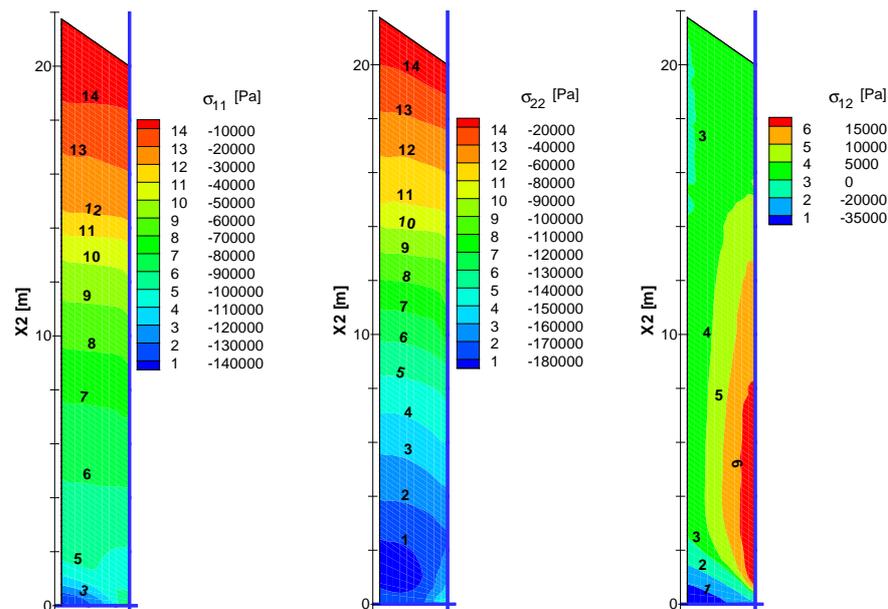


Figura 7.3.9: Tensiones en el grano. Coeficientes de penalización asignados a cada superficie.

En la Figura [7.3.9] se muestran las distribuciones de las tensiones horizontal  $\sigma_{11}$ , vertical  $\sigma_{22}$  y de corte  $\sigma_{12}$  que se obtienen al finalizar la simulación del llenado del silo cuando se adoptan los coeficientes de penalización, caso 1, asignando un valor a cada coeficiente de penalización a cada superficie y suponiendo que el material es elastoplástico. Las tensiones mínimas  $\sigma_{11} = -142600Pa$  y  $\sigma_{22} = -186100Pa$  y la tensión de corte se encuentra en  $-41400Pa < \sigma_{12} < 19800Pa$ . En los tres gráficos de la figura puede observarse que las tensiones que actúan en un plano con coordenada  $X_2$  constante en general no son constantes. En particular la tensión  $\sigma_{22}$  presenta un núcleo en la cercanía del fondo y para  $X_2 > 1,5m$  puede observarse que en un plano horizontal la tensión vertical

disminuye con la distancia al eje de simetría.

En la Figura [7.3.10] se muestran las distribuciones de las tensiones horizontal  $\sigma_{11}$ , vertical  $\sigma_{22}$  y de corte  $\sigma_{12}$  que se obtienen al finalizar la simulación del llenado del silo cuando se asigna un valor a cada coeficiente de penalización para cada segmento que forma cada superficie, caso 2, y adoptando la ley constitutiva elastoplástica. Los valores de las tensiones que se obtienen al finalizar el llenado tienen valores mínimos de  $\sigma_{11} = -144600Pa$  y  $\sigma_{22} = -189500Pa$  y la tensión de corte se encuentra en  $-40660Pa < \sigma_{12} < 19360Pa$ .

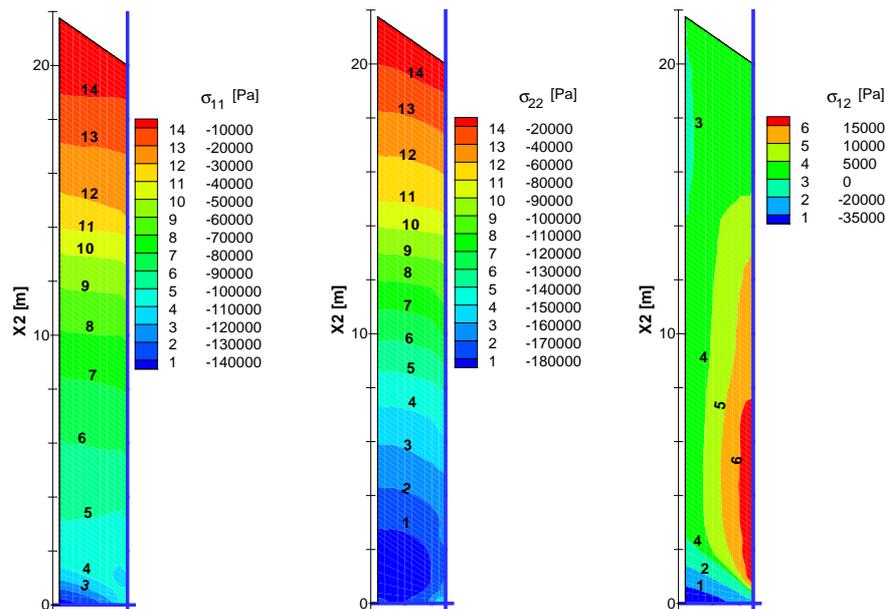


Figura 7.3.10: Distribuciones de las tensiones en el grano. Coeficientes de penalización asignados a cada segmento de cada superficie.

Las distribuciones de tensión del caso 2,  $\sigma_{11}$  y  $\sigma_{22}$ , aumentan en módulo un 1,4% y 1,8% mientras la tensión de corte mínima aumenta un 1,8% y la máxima disminuye un 2,2% respecto de los valores obtenidos para el caso 1. Las distribuciones muestran patrones de comportamiento similares al caso anterior. Esto muestra que el modelo presenta poca sensibilidad de las tensiones a los valores de penalización que se adoptan.

En la Figura [7.3.11] se presentan los diagramas de desplazamientos perpendiculares a las superficies de contacto  $U_n$  (o interpenetraciones) que se obtienen al finalizar el llenado. Se comparan las distribuciones que se obtienen al adoptar los coeficientes de penalización asignados a cada superficie (caso 1) o a cada segmento de cada superficie maestra de contacto (caso 2). En la Figura [7.3.11 a)] el valor máximo de interpenetración en la pared para el caso 1 es  $U_n = 4,28 \cdot 10^{-4}m$  a  $X_2 = 0,997m$  y disminuye a  $U_n = 7,71 \cdot 10^{-5}m$  a  $X_2 = 0,998m$  para el caso 2. Se observa una disminución de un orden de magnitud en el valor máximo a una distancia cercana a  $1m$  desde el fondo en ambos casos. En la Figura [7.3.11 b)] el valor del desplazamiento normal sobre el fondo

para  $X_1 = 0,00m$  es  $U_n = -5,51 \cdot 10^{-4}m$  para para el caso 1 y de  $U_n = -1,38 \cdot 10^{-4}m$  para el caso 2. Esto indica que al modificar los coeficientes de penalización se obtiene un mejor cumplimiento de la condición de no interpenetración entre el grano y la pared en el contacto.

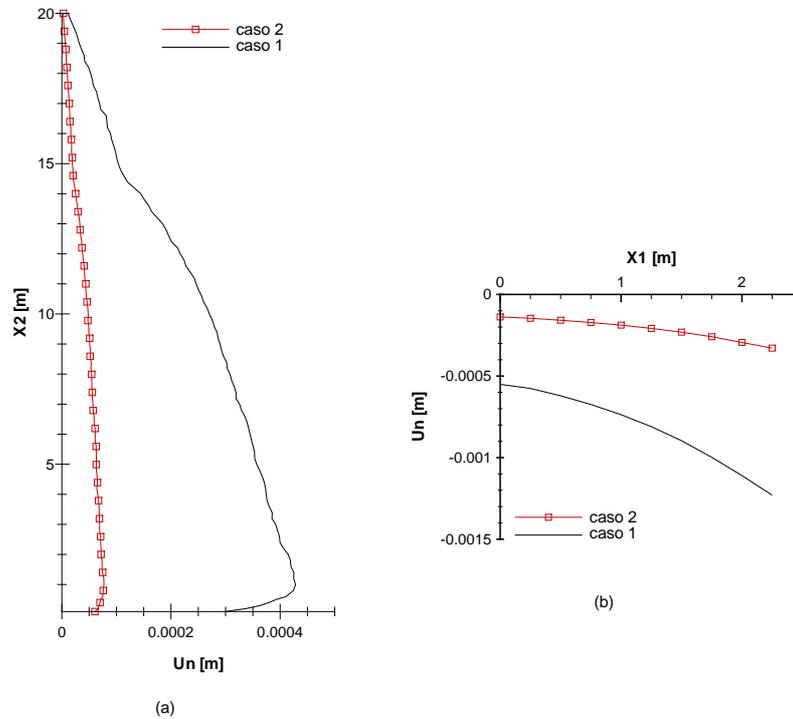


Figura 7.3.11: Desplazamientos normales a las superficies de contacto al finalizar el llenado.

Las distribución de la presión de contacto normal a la pared se presenta en la Figura [7.3.12 a)]. Al adoptar una ley constitutiva elastoplástica el máximo valor de la presión de contacto para los valores de penalización del caso 1 es  $p_{cn} = 105815Pa$  a  $X_2 = 0,498m$  y para el caso 2 es  $p_{cn} = 114650Pa$  a  $X_2 = 0,499m$ . Se adopta como referencia una simulación en la que se considera que la ley constitutiva corresponde a la de un material elástico no lineal cuyo modulo elástico tangente se obtiene mediante la expresión dada por Jambu y los coeficientes de penalización del caso 1, obteniendo  $p_{cn} = 76369Pa$  a  $X_2 = 1,40m$ .

Las presiones máximas de contacto obtenidas al considerar el material como elastoplástico son un 38% y un 50% mayores que el caso elástico no lineal de referencia, para el caso 1 y caso 2 respectivamente. El caso 2 presenta el valor de presión de contacto máxima un 8% mayor que la correspondiente al caso 1, mientras los desplazamientos máximos en la dirección normal son un 82% menores que el correspondiente al caso 1.

En la Figura [7.3.12 b)] puede observarse que la fricción movilizada en casi todo el contacto oscila alrededor del valor 0,2 y cerca del fondo alcanza un valor de 0,28, pero no alcanza a obtenerse el valor 0,3 correspondiente al coeficiente de fricción estático. La fricción movilizada al utilizar el modelo elastoplástico muestra una tendencia a disminuir desde  $X_2 \simeq 14,60m$  hasta la superficie libre del material a  $X_2 \simeq 20,00m$ , tendencia que no se observa cuando se utiliza el modelo elástico no lineal.

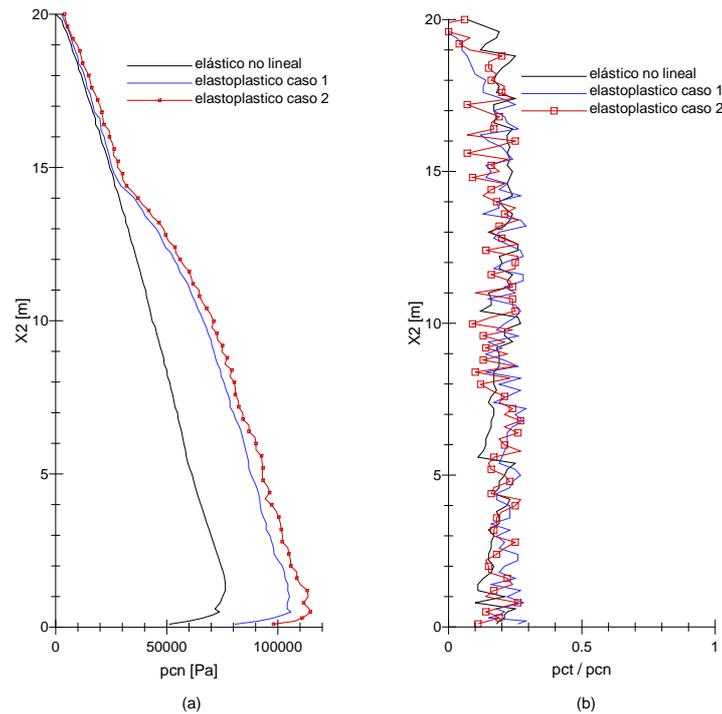


Figura 7.3.12: Silo de fondo plano. a) Distribución de la presión de contacto en la pared. b) Distribución de la relación  $p_{ct}/p_{cn}$  sobre la pared (fricción movilizada)

La distribución de la presión de contacto normal al fondo del silo se presenta en la Figura [7.3.13 a)] y alcanza el valor  $p_{cn} = -206455 Pa$  para el caso 1 y de  $p_{cn} = -207683 Pa$  para el caso 2 al suponer el material elástico no lineal y los coeficientes de penalización del caso 1 se tiene  $p_{cn} = -270898 Pa$ . La magnitud de los desplazamientos normales al fondo disminuye en un 75 % cuando se adoptan los coeficientes de penalización del caso 2.

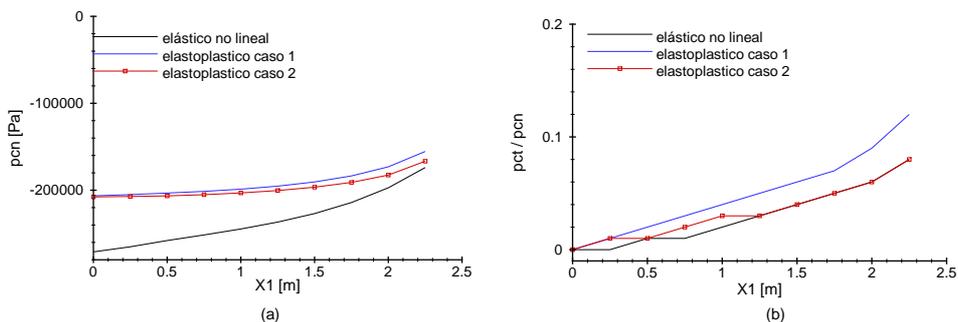


Figura 7.3.13: Silo de fondo plano. a) Distribución de la presión de contacto en el fondo. b) Distribución de la relación  $p_{ct}/p_{cn}$  en el fondo (fricción movilizada)

Puede observarse que los valores de los coeficientes de penalización tienen mayor incidencia en las interpenetraciones y mucho menos en los valores de las presiones de contacto, evidenciándose la baja sensibilidad de las presiones a los valores de penalización adoptados.

Sin embargo es importante la influencia de la ley constitutiva adoptada en los valores de las presiones de contacto, en especial el endurecimiento por deformación volumétrica del modelo Cam

Clay, ya que con el modelo elastoplástico las presiones son entre un 35 % y un 50 % mayores que las obtenidas al utilizar el modelo elástico.

En la Figura [7.3.14] se comparan las distribuciones de presión de contacto sobre la pared del silo. Se han incluido las que se obtuvieron con las tres simulaciones, dos distribuciones teóricas y distribuciones correspondientes a los resultados publicados en el trabajo de [Rotter et al., 1998]. Las distribuciones del citado trabajo se las ha denominado MEF1, MEF2 y MEF3 y corresponden a tres grupos diferentes siendo los resultados MEF1 y MEF2 obtenidos por dos grupos que no consideran llenado progresivo mientras los resultados correspondientes a MEF3 fueron obtenidos simulando el llenado progresivo.

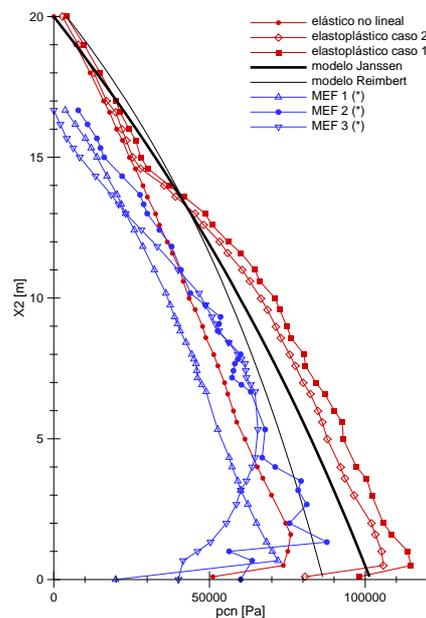


Figura 7.3.14: Silo de fondo plano. Comparación de las presiones de contacto en la pared con metodos teóricos y otros resultados numéricos

La distribución de referencia (coeficientes de penalización caso1 y material elástico no lineal) está comprendido entre los resultados publicados por [Rotter et al., 1998] y son bastante cercanos en el fondo a los valores de presión de contacto predichos por el método de Reimbert.

Las dos distribuciones obtenidas al adoptar un modelo constitutivo elastoplástico presentan mayor similitud con la distribución que se obtiene por el método de Janssen en la parte inferior del silo. En la parte superior las distribuciones obtenidas presentan un cambio de comportamiento para  $X_2 \simeq 15m$ .

Los resultados de las simulaciones realizadas solo difieren en el modelo constitutivo adoptado y en la manera de asignar los coeficientes de penalización.

No se tiene información como consideraron el contacto entre el grano y la pared los grupos que realizaron los trabajos denominados MEF1, MEF2 y MEF3, ni el modelo constitutivo que emplearon.

### 7.3.3. Silo simétrico de deformación plana con tolva en cuña. Comparación con mediciones experimentales.

#### Descripción del silo experimental

Se modela un silo con un plano vertical de simetría donde el flujo de material es bidimensional e independiente de la longitud. Este silo es uno de los utilizados por [Kmita, 1991] en su estudio experimental de medición de presiones utilizando celdas de carga. Para las mediciones de presión el autor utilizó como material una arena silíceo lavada y seca cuyos tamaños de partículas están entre  $3mm$  y  $5mm$ , su peso específico medido en estado compacto  $\gamma = 16000N/m^3$  a partir de la cual se determina que la densidad correspondiente es  $\rho = 1633Kg/m^3$ , su ángulo de fricción interna y el ángulo de fricción con la pared determinados con un ensayo en caja de corte resultan ser iguales  $\phi = \phi_w = 33^\circ$ . No suministra ningún otro dato sobre el material que permita obtener los parámetros que definen la relación constitutiva. En el citado trabajo no especifica cual fue el método de llenado utilizado, pero de los gráficos de la publicación podría interpretarse que utilizó llenado distribuido.

El silo tiene una separación de  $2,20m$  entre las paredes frontal y posterior (por lo cual es de esperar que la fricción en pared del frente y posterior no tenga demasiada influencia en el comportamiento global del silo). La separación entre las paredes laterales verticales del depósito es  $2B = 0,8m$  y el ángulo de inclinación de la tolva respecto del plano horizontal es de  $\alpha = 75^\circ$  la altura total de  $H_T = 2,55m$  y la separación de las paredes de la tolva al nivel de la compuerta es de  $2b = 0,10m$ . La altura de la tolva  $H_t = 1,30m$  y el depósito se llena hasta una altura  $H_d = 1,25m$  ( $H_T = H_t + H_d$ ).

#### Descripción de los modelos

A partir de la geometría del silo se asume que puede simularse como un estado bidimensional de deformación plana y se discretiza la mitad del silo debido a la simetría.

Como la información sobre el material es insuficiente para determinar los parámetros constitutivos necesarios para las simulaciones, se utilizaron los parámetros constitutivos deducidos para la arena del río Sacramento [Lee and Seed, 1967] ya que presenta similares características a las de la arena que fue utilizada para realizar los ensayos. Los parámetros son los utilizados en los casos anteriores del silo cilíndrico de fondo plano y en las tolvas. Se utilizó el modelo constitutivo elástico no lineal plástico completo.

Se simuló el llenado considerando que éste es de tipo concéntrico y luego de tipo distribuido debido a que el autor del trabajo experimental no especifica el método de llenado que utilizó. Ambos casos se comparan con los valores experimentales extraídos del trabajo de [Kmita, 1991].

Para calcular los coeficientes de fricción estáticos se utilizó el ángulo de fricción con la pared  $\phi_w = 18^\circ$  y  $\phi_w = 33^\circ$  que dan coeficientes de fricción estáticos  $\mu_s = 0,3$  y  $\mu_s = 0,65$ . El cambio del valor del coeficiente de fricción permitiría apreciar la influencia de éste parámetro tanto en la distribución como en la magnitud de las presiones normales a las paredes de la tolva y del depósito del silo. Dado que no se tiene información de cual es el valor del ángulo de fricción cinético se adoptaron para  $\mu_k$  distintos porcentajes de  $\mu_s$ .

Se utilizaron tres mallas diferentes de este silo, dos para simular el llenado distribuido y una para simular el llenado concéntrico. En la Figura [7.3.15] se presentan los esquemas de las tres mallas utilizadas.

Las dos mallas con capas horizontales para simular el llenado distribuido, Figura [7.3.15 a)] y Figura [7.3.15 b)] difieren en los siguientes aspectos. La malla de la Figura [7.3.15 a)] tiene los elementos uniformemente distribuidos en la dirección horizontal y la altura de las capas en la tolva aumenta a medida que la tolva se ensancha con el fin de obtener elementos con buena relación de aspecto. La altura  $h$  de las capas en el depósito es constante e igual a  $h = \Delta X_2 = 0,08m$  y la unión tolva - depósito es el punto de intersección de las paredes. En esta malla se utilizaron 300 nodos para los 245 elementos de grano y 19 nodos para definir las superficies de contacto.

En los modelos el eje vertical  $X_2$  corresponde al eje de simetría del silo y el eje horizontal  $X_1$  se encuentra a nivel de la compuerta de descarga, análogos a los adoptados para las tolvas y el silo de fondo plano. En las mallas de la Figura [7.3.15] han sido omitidos para mayor claridad.

En la malla de la Figura [7.3.15 b)] los dos elementos cercanos a la pared del silo tienen el lado paralelo al eje  $X_1$  aproximadamente igual a la mitad de los restantes tres elementos de la capa. Para evitar que la unión entre la tolva y el depósito sea un punto se utilizó una parábola de transición tangente a la pared de la tolva y a la pared del depósito y se colocaron 15 capas de espesor  $h = 0,025m$  en la zona de unión. Esta opción de geometría de la transición se adoptó luego de probar otras estrategias. Esta malla tiene 402 nodos con los cuales se definen 330 elementos de grano y se utilizaron 26 nodos para definir las superficies de contacto.

La malla de la Figura [7.3.15 c)] tiene los elementos uniformemente distribuidos en el ancho de cada capa las cuales están inclinadas respecto de la horizontal un ángulo igual al de reposo del material para simular un llenado de tipo concéntrico. La zona de transición tolva - depósito es suave (utilizando la misma parábola que en el caso de la Figura [7.3.15 b)] y también tiene 15 capas de espesor  $h = 0,025m$ . Esta malla tiene 402 nodos para definir 330 elementos de grano y 26 nodos para definir la superficies de contacto.

Para estas mallas el valor del período de vibraciones libres no amortiguadas, calculado como el período de la historia de desplazamientos verticales, es  $T \simeq 0,030892 \simeq 0,03$ . Utilizando una expresión similar a la utilizada para las tolvas se tiene ahora que el periodo puede estimarse con la expresión:

$$\begin{aligned} T &\simeq \frac{7}{2} \frac{H}{\sqrt{\frac{E}{\rho}}} \\ &\simeq \frac{7}{2} \frac{2,58m}{\sqrt{\frac{9,6 \cdot 10^7 Pa}{1460 Hg/m^3}}} \\ &\simeq 0,03521 \\ &\simeq 0,03 \end{aligned}$$

donde  $H = H_T$  es la altura del material al finalizar el llenado medida desde la compuerta a la superficie libre,  $E$  el módulo elástico tangente (inicial) del material granular y  $\rho$  la densidad del mismo.

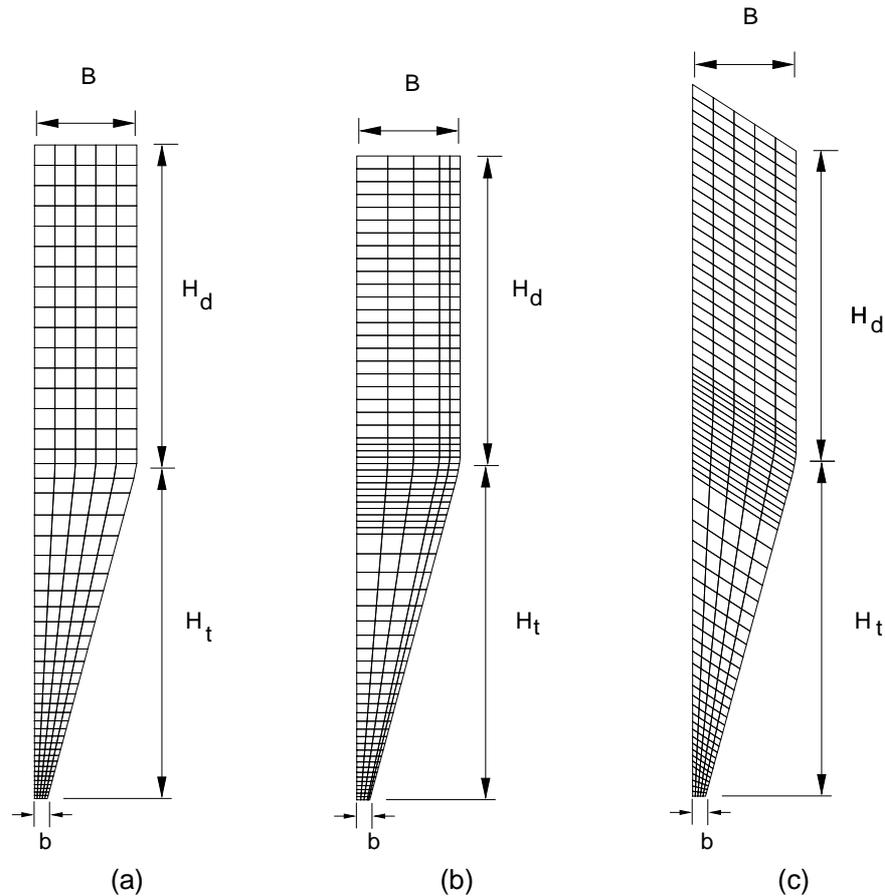


Figura 7.3.15: Mallas utilizadas en las simulaciones de llenado. a) y b) para llenado distribuido; c) para llenado concéntrico

El procedimiento utilizado para la simulación del llenado es idéntico al descrito para el llenado de las tolvas y del silo de fondo plano.

En las simulaciones, los valores de los desplazamientos en la dirección normal a las paredes inclinada y vertical del silo (interpenetraciones) en todos los casos están comprendidos entre  $1 \cdot 10^{-5}m$  y  $1 \cdot 10^{-8}m$  (del orden de una centésima de milímetro o menor) los cuales se considera son razonables. En todos los modelos los valores de los coeficientes de penalización normal y tangente adoptados son:  $\alpha_n = \alpha_t = 0,10$  para el contacto grano - compuerta de descarga y  $\alpha_n = \alpha_t = 0,05$  para los contactos grano pared (tanto de la tolva como del depósito).

**Distribución de la tensión vertical  $\sigma_{22}$  en el material** Las distribuciones de la tensión vertical en el material al finalizar el llenado distribuido del silo obtenidas para las mallas de la Figura [7.3.15 a)] caso MEF a1 (Tabla [7.4]) se muestra en la Figura [7.3.16 a)]; para la malla de la Figura [7.3.15 b)] caso MEF b1 (Tabla [7.5]) se muestra en la Figura [7.3.16 b)]. Para la malla Figura [7.3.15 c)] caso MEF c1 (Tabla [7.6]).

Caso	$\mu_s$	$\mu_k$	$\rho[Kg/m^3]$	$\Delta t_{cont}$
MEF a1	0,30	0,15	1460	$3,80 \cdot 10^{-5}$
MEF a2	0,65	0,65	1633	$3,80 \cdot 10^{-5}$
MEF a3	0,30	0,15	1460	$1,95 \cdot 10^{-5}$
MEF a4	0,65	0,65	1633	$1,95 \cdot 10^{-5}$

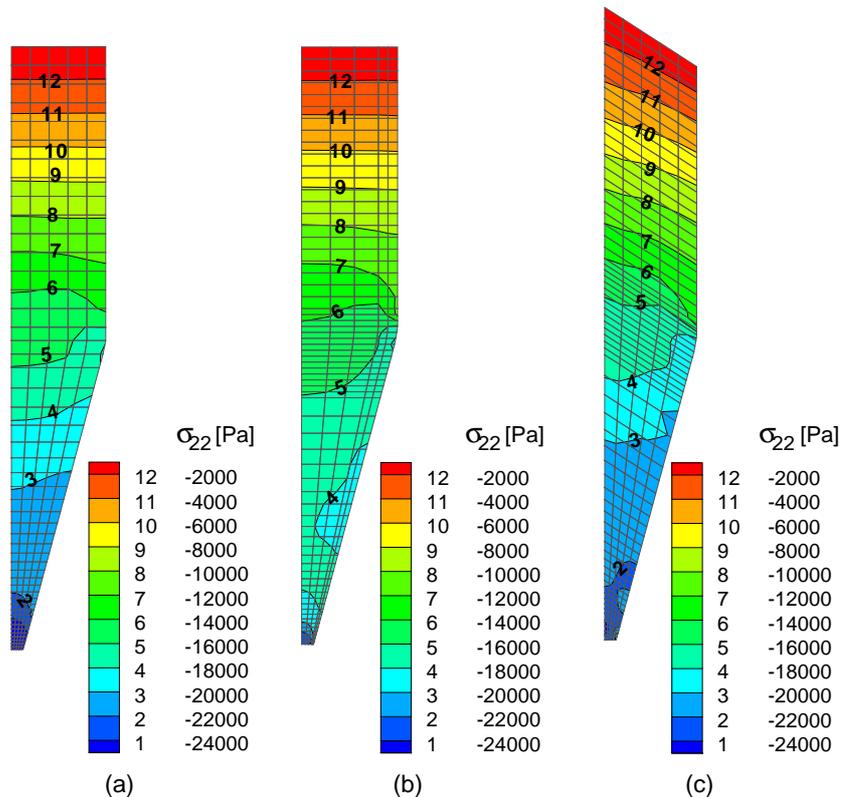
Tabla 7.4: Valores de los coeficientes de fricción y de  $\Delta t_{cont}$  (MEF a)

Caso	$\mu_s$	$\mu_k$	$\rho[Kg/m^3]$	$\Delta t_{cont}$
MEF b1	0,30	0,15	1460	$1,95 \cdot 10^{-5}$
MEF b2	0,65	0,65	1633	$2,06 \cdot 10^{-5}$
MEF b3	0,30	0,24	1460	$1,95 \cdot 10^{-5}$
MEF b4	0,30	0,30	1460	$1,95 \cdot 10^{-5}$

Tabla 7.5: Valores de los coeficientes de fricción (MEF b)

Caso	$\mu_s$	$\mu_k$	$\rho[Kg/m^3]$	$\Delta t_{cont}$
MEF c1	0,30	0,15	1460	$1,95 \cdot 10^{-5}$
MEF c2	0,65	0,65	1633	$1,95 \cdot 10^{-5}$

Tabla 7.6: Valores de los coeficientes de fricción (MEF c)

Figura 7.3.16: Distribución de tensiones verticales  $\sigma_{22}$  al finalizar el llenado para los casos: a) MEF a1; b) MEF b1; c) MEF c1

En los casos correspondientes al llenado distribuido, Figuras [7.3.16 a) y b)], se observa que la tensión  $\sigma_{22}$  presenta una distribución de tipo hidrostático en la parte superior del depósito, evidenciado por ser las líneas de isotensión horizontales y con valores que aumentan con la profundidad

respecto de la superficie libre de material. En la parte inferior del depósito y en la tolva, si se consideran puntos con  $X_2 = cte$ , se observa que en el eje de simetría el valor absoluto de la tensión es menor que cerca de la pared.

En el caso de llenado concéntrico, Figura [7.3.16 c)], la tensión  $\sigma_{22}$  tiene valor absoluto mayor en el eje de simetría y menor cerca de la pared para cualquier valor constante de la coordenada  $X_2$  dentro del silo.

Para los tres casos presentados el valor de la tensión vertical en la zona de la unión tolva - depósito se encuentra en el rango  $-14000Pa \leq \sigma_{22} \leq -18000Pa$  independientemente del mallado utilizado y de si la pared en la transición tolva - depósito es suave o no.

**Distribución de la tensión de corte  $\sigma_{12}$  en el material** Las distribuciones de la tensión de corte en el material al finalizar el llenado distribuido del silo obtenidas para la malla de la Figura [7.3.15 a)] caso MEF a1 (Tabla [7.4]), para la malla de la Figura [7.3.15 b)] caso MEF b1 (Tabla [7.5]) se muestran en la Figura [7.3.17 a)] y Figura [7.3.17 b)] respectivamente. Para la malla Figura [7.3.15 c)] caso MEF c1 (Tabla [7.6]) las tensiones de corte se presentan en la Figura [7.3.17 c)].

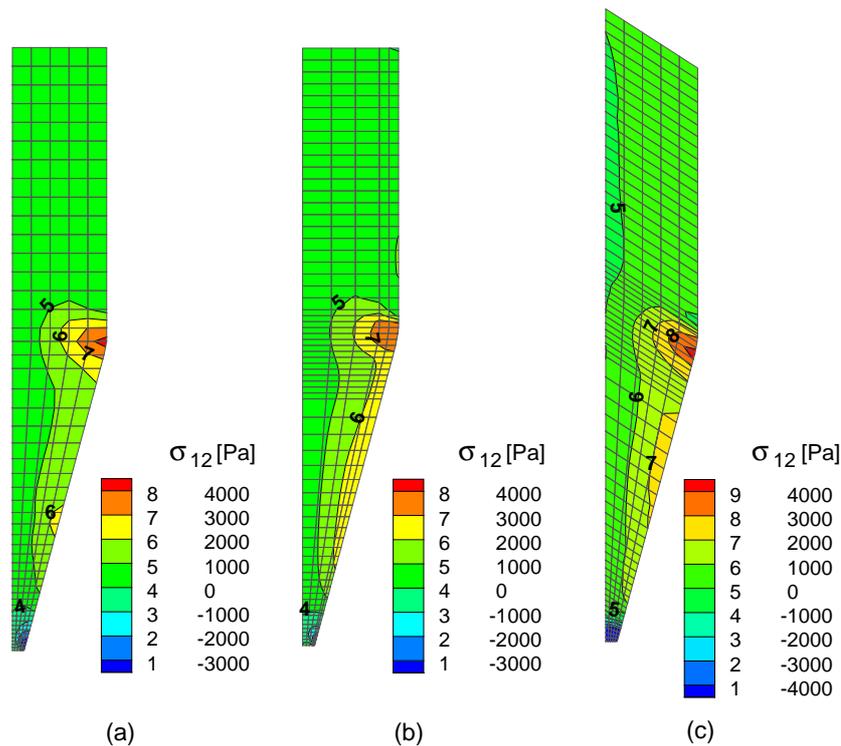


Figura 7.3.17: Distribución de tensiones de corte al finalizar el llenado para los casos MEF a1, MEF b1 y MEF c1

Comparando las Figuras [7.3.17 a) y b)] se observa que al refinarse la malla en la zona cercana a la pared el modelo mantiene la forma general de la distribución de  $\sigma_{12}$  pero la zona donde

$\sigma_{12} = 2000Pa$  es más extensa y continua en Figura [7.3.17 b)] posiblemente debido al refinado de la malla y suavizado la unión tolva - depósito (únicas diferencias existentes entre ambos casos).

En la Figura [7.3.17 c)] se observa la distribución de la tensión  $\sigma_{12}$  que se obtiene con la simulación del llenado concéntrico. Puede observarse que ha disminuido la tensión de corte que actúa en la parte inferior de la pared de la tolva respecto de los valores que se obtuvieron en los otros dos casos y una zona sobre el eje de simetría en el depósito donde  $\sigma_{12} = 0$ . La diferencia con el caso de la Figura [7.3.17 b)] es la inclinación de las capas de elementos.

En los tres casos independientemente de que se halla o no refinado la malla en la unión tolva - depósito y de que la transición sea o no suave aparece una concentración de la tensión  $\sigma_{12}$  sobre la pared para  $X_2 \simeq 1,30m$  de valor similar.

### Distribución de la presión de contacto normal

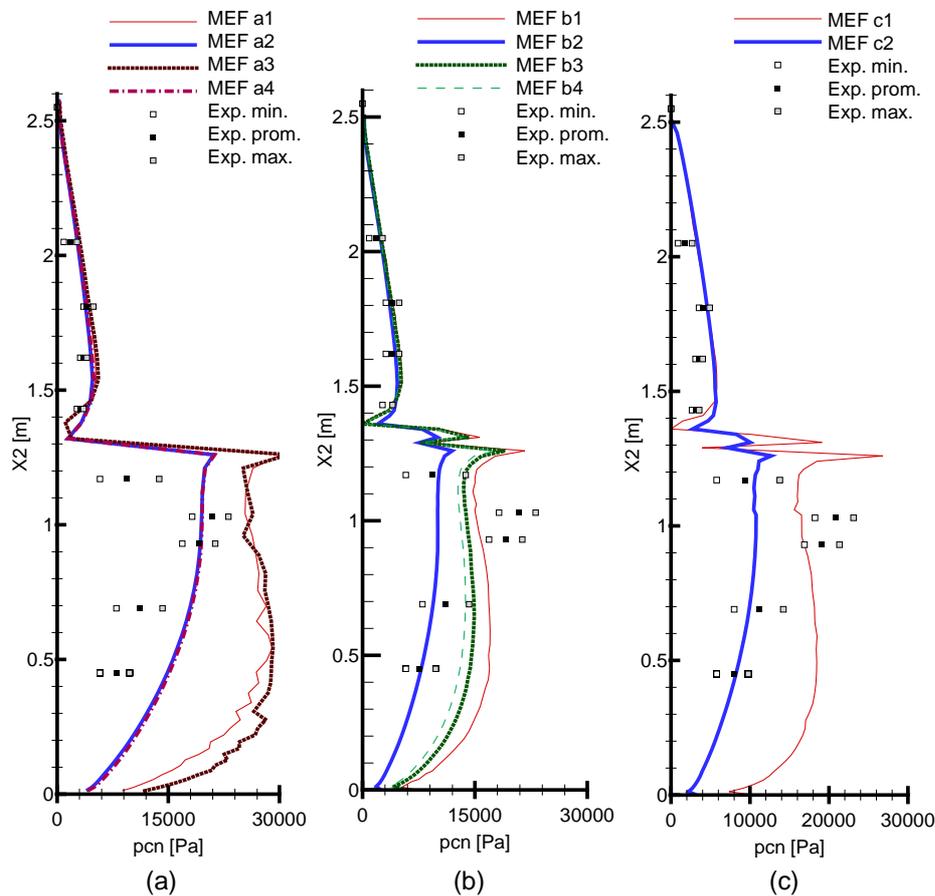


Figura 7.3.18: Distribuciones de la presión de contacto normal a las paredes del silo. Llenado distribuido: a) variación de  $\Delta t_c$ ; b) distintos coeficientes de fricción; c) llenado distribuido y distintos coeficientes de fricción

Para la malla de la Figura [7.3.15 a)] se obtuvieron los resultados correspondientes a cuatro hipótesis que consideran distintos valores de los coeficientes de fricción y del incremento de tiempo  $\Delta t_{cont}$  utilizado para evaluar el factor de penalización en el algoritmo de contacto. El cambio de

valor de  $\Delta t_{cont}$  en la misma malla se hizo con el objeto de establecer si el cambio que se observa entre el caso MEF a1 y MEF b1 se debe solamente al mallado o si también contribuye el valor de  $\Delta t_{cont}$  adoptado. Si la influencia se debe en parte al valor adoptado para  $\Delta t_{cont}$  entonces también debe evidenciarse al adoptar valores diferentes utilizando la misma malla. El cambio de valor afecta principalmente los valores de la presión de contacto en la parte inferior de la tolva (casos MEF a1 y MEF a3 de la Figura [7.3.18 a]) pero para los casos MEF a2 y MEF a4 los resultados son concordantes. El valor adoptado para  $\Delta t_{cont}$  tiene una leve influencia sobre las presiones de contacto, en especial cuando se utiliza un coeficiente de fricción estático bajo. Con lo cual se evidencia que la influencia del valor adoptado para  $\Delta t_{cont}$  tiene muy baja incidencia en el valor máximo de la presión de contacto normal en la pared, siempre que sea menor o igual al valor de tiempo crítico correspondiente a la malla. Los valores adoptados para cada caso son los indicados en la Tabla [7.4].

El factor de penalización permite calcular la fuerza de contacto nodal en función del “gap” o interpenetración con la expresión:

$$f_{cn} = gap \left[ \alpha_n \frac{2}{m_i (\Delta t_{cont})^2} \right]$$

siendo el factor de penalización la expresión entre corchetes y  $m_i$  la masa asociada al nodo donde se está calculando la fuerza de contacto.  $\Delta t_{cont}$  permanece constante durante la simulación y se adopta como el valor de tiempo crítico inicial para el método explícito, por lo cual depende de la mínima distancia inicial entre dos nodos de la malla indeformada y de la velocidad de propagación de las ondas de compresión en el medio granular.

El valor  $\Delta t_{cont} = 3,80 \cdot 10^{-5}$  corresponde al tiempo crítico para la malla de la Figura [7.3.15 a)] y el valor  $\Delta t_{cont} = 1,95 \cdot 10^{-5}$  corresponde al tiempo crítico para las mallas de las Figuras [7.3.15 b) y c)]. Se observa que la distribución de la presión de contacto para el caso MEF a2 está dentro del rango de las mediciones experimentales en el depósito y en la parte superior de la tolva donde  $0,9m < X_2 < 1,10m$  dando mayores valores en la parte inferior de la tolva y en la zona inmediatamente debajo de la transición  $X_2 \simeq 1,20m$ .

Para la malla de la Figura [7.3.15 b)] se obtuvieron los resultados correspondientes a cuatro hipótesis que consideran distintos valores de los coeficientes de fricción estático y cinético. Los valores adoptados para cada caso son los que se indican en la Tabla [7.5]. Para  $\mu_k$  se adoptaron valores correspondientes al 50%, 80% y 100% del valor de  $\mu_s$  con el fin de realizar un estudio paramétrico de la influencia del valor adoptado para  $\mu_k$  en los resultados. También se utilizaron los datos del ángulo de fricción con la pared que da  $\mu_s = 0,65$  y la densidad del material  $\rho = 1633Kg/m^3$  del trabajo de [Kmita, 1991].

Las distribuciones de la presión de contacto en la tolva, en la Figura [7.3.18 b)] para ( $X_2 < 1,30m$ ), se observa que tienen cualitativamente la misma forma pero los valores de la presión de contacto normal disminuyen al aumentar el valor adoptado para el coeficiente de fricción cinético. Para el caso MEF b2 la distribución de la presión normal de contacto que se obtiene con la simulación está dentro del rango de las mediciones experimentales, salvo en la zona de la tolva con  $0,93m < X_2 < 1,03m$ .

Para la malla correspondiente a la simulación de llenado concéntrico, Figura [7.3.15 c)], se utilizaron para los coeficientes de fricción y la densidad los valores de la Tabla [7.6]. Para el caso MEF c2 la distribución de la presión normal de contacto está dentro del rango de las mediciones experimentales salvo para  $0,93m < X_2 < 1,03m$ , comportamiento similar al que se observa en la Figura [7.3.18 b)] caso MEF c2.

Al observar la distribución de la presión de contacto normal en el depósito ( $X_2 > 1,30m$ ) en las tres Figuras [7.3.18], se observa que no es afectada significativamente por la discretización ni por los valores de los coeficientes de fricción. Es de notar que el valor máximo de la presión de contacto en el depósito es un orden de magnitud menor que el valor máximo correspondiente a la tolva. La distribución de la presión de contacto predicha por los modelos se encuentra dentro del rango de presiones medido por [Kmita, 1991] y solo para el llenado de tipo concéntrico son levemente mayores que los valores medidos.

Con las simulaciones se obtienen distribuciones de la presión de contacto normal en la tolva, para los tres casos de la Figura [7.3.18], siendo los valores más cercanos a los valores experimentales los que se obtienen al utilizar el mayor coeficiente de fricción. En ninguno de los casos la distribución que se obtiene está dentro del rango experimental en todo el contacto. La variación de la presión de contacto para  $0,93m < X_2 < 1,03m$  no es capturada y es posible que los valores experimentales contengan algún error proveniente de la influencia entre los dispositivos que se encuentran muy cerca uno de otro en esa zona (en el Anexo 1 se presenta una síntesis de los factores que influyen en la precisión de la medición con celdas de presión). Según informa el autor del trabajo experimental los dos conjunto de celdas tienen diámetros de  $84mm$  y de  $160mm$  con precisión del 2,5% pero no especifica cual conjunto de celdas utilizó.

#### **7.3.4. Silo asimétrico de deformación plana con tolva en cuña. Mediciones experimentales.**

Este silo es otro de los utilizados por [Kmita, 1991] en su estudio experimental de medición de presiones utilizando celdas de carga. El material granular que utilizó para realizar las mediciones es el mismo que en el silo simétrico del caso anterior teniéndose los mismos inconvenientes para la determinación de los parámetros constitutivos. En este caso tampoco informa el método de llenado, razón por la cual se incluirá el análisis de la influencia del método de llenado, concéntrico o distribuido. El autor no informa donde están instaladas las celdas de presión si cercanas a la pared frontal o si están ubicadas en la zona cercana a la mitad de la profundidad del silo.

Para las simulaciones del llenado de este silo se adoptan los parámetros constitutivos deducidos para la arena del río Sacramento [Lee y Seed 1967] utilizados en el silo cilíndrico de fondo plano y en las tolvas.

#### **Descripción del silo experimental**

Se modela un silo asimétrico que consta de una pared vertical y otra con quiebre que da lugar a una tolva en cuña asimétrica. el flujo de material es bidimensional e independiente de la longitud.

La geometría de la sección del silo se muestra en la Figura [7.3.19] junto con las mallas utilizadas

en los modelos.

La separación entre las paredes frontal y posterior es de  $2,20m$ , igual que en el caso del silo simétrico. La separación entre las paredes laterales verticales del depósito es  $B = 0,8m$  y el ángulo de inclinación de la pared derecha respecto del plano horizontal es  $\alpha = 60^\circ$ , la altura total  $H_T = 2,61m$  y la separación de las paredes de la tolva al nivel de la compuerta es  $b = 0,10m$ . La altura de la tolva  $H_t = 1,21m$ . El depósito se llena hasta una altura  $H_d = 1,40m$  ( $H_T = H_t + H_d$ ).

### Descripción de los modelos

A partir de la geometría del silo se asume que puede simularse como un estado bidimensional de deformación plana.

Al igual que en el silo anterior, se utilizan los parámetros constitutivos deducidos para la arena del río Sacramento [Lee and Seed, 1967]. Se utilizó el modelo constitutivo elástico no lineal plástico completo.

Como se desconoce el método de llenado utilizado en este caso se modela el llenado considerando que el método es de tipo concéntrico y de tipo distribuido. Ambos casos se comparan con los valores experimentales extraídos del trabajo de [Kmita, 1991].

Los coeficientes de fricción estáticos que se utilizaron son los mismos que en el silo anterior (para los ángulos  $\phi_w = 18^\circ$  y  $\phi_w = 33^\circ$ )  $\mu_k = 0,3$  y  $\mu_k = 0,65$ . También en este silo se hace el estudio paramétrico de la influencia del coeficiente de fricción en la distribución y magnitud de las presiones normales a las paredes de la tolva y del depósito del silo y de las tensiones en el material granular. Para el ángulo de fricción cinético  $\mu_s$  se adoptaron distintos porcentajes de  $\mu_k$ .

Se utilizaron dos mallas diferentes de este silo, una para simular el llenado distribuido y otra para simular el llenado concéntrico. En la Figura [7.3.19] se presentan los esquemas de las mallas utilizadas.

Las mallas tienen los elementos uniformemente distribuidos en la dirección horizontal y la altura de las capas en la tolva aumenta a medida que la tolva se ensancha con el fin de obtener elementos con buena relación de aspecto. La unión entre la tolva y el depósito es suave y se utilizó una parábola de transición tangente a la pared de la tolva y a la pared del depósito en ambas mallas.

En la malla con capas horizontales la altura  $h$  de las capas en el depósito es constante  $h = \Delta X_2 = 0,05m$ . En la unión tolva - depósito se colocaron 6 capas de elementos de altura  $h = 0,035m$  (entre la coordenada  $X_2 = 1,06m$  y  $X_2 = 1,27m$ ). Esta malla tiene 759 nodos para definir 680 elementos de grano y 64 nodos para definir las superficies de contacto.

Para el llenado concéntrico se supuso que el alimentador está ubicado en la parte superior del silo a una coordenada  $X_1 = 0,4m$ , por esto las capas inferiores de la tolva tienen una sola inclinación hasta que se alcanza la coordenada  $X_2 = 0,52m$ . Para  $X_2 > 0,52m$  las capas tienen dos inclinaciones y un vértice en  $X_1 = 0,4m$ . La altura de las capas por encima de la coordenada  $X_2 = 0,52m$  tienen espesor  $h = 0,05m$  (parte superior de la tolva y todo el depósito). Esta malla tiene 649 nodos para definir 580 elementos de grano y 62 nodos para definir el contacto.

Para estas mallas el valor del período de vibraciones libres no amortiguadas es  $T \simeq 0,02989 \simeq 0,03$ . Utilizando una expresión similar a la utilizada para las tolvas se tiene ahora que el período

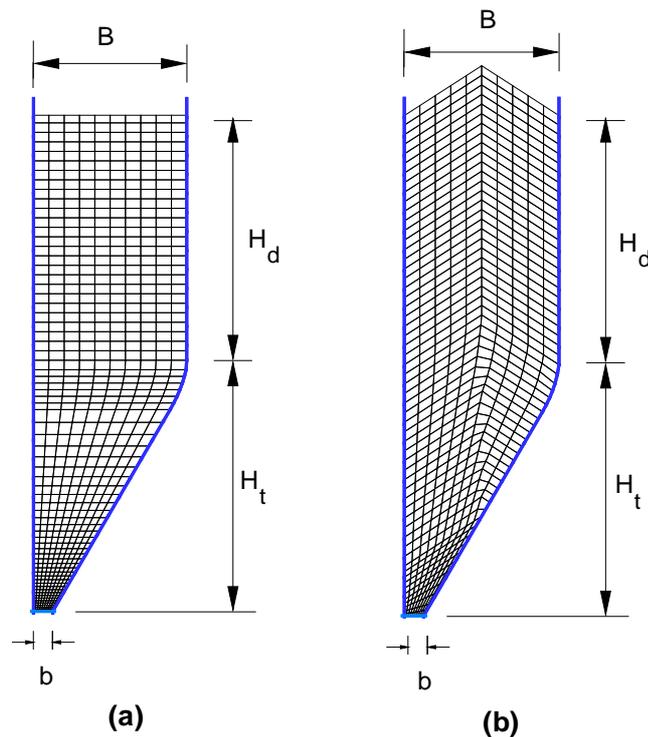


Figura 7.3.19: Mallas utilizadas en las simulaciones del llenado del silo asimétrico. a) llenado distribuido; b) llenado concéntrico.

puede estimarse con la expresión:

$$\begin{aligned}
 T &\approx \frac{7}{2} \frac{H}{\sqrt{\frac{E}{\rho}}} \\
 &\approx \frac{7}{2} \frac{2,6m}{\sqrt{\frac{9,6 \cdot 10^7 Pa}{1460 Hg/m^3}}} \\
 &\approx 0,0355 \\
 &\approx 0,03
 \end{aligned}$$

donde  $H$  es la altura a la cual superficie libre de material se encuentra con la pared del depósito al finalizar el llenado, medida desde la compuerta,  $E$  es el módulo elástico tangente y  $\rho$  la densidad del material granular (iniciales).

El procedimiento utilizado para la simulación del llenado es idéntico al descrito anteriormente.

En las simulaciones, los valores de los desplazamientos máximos en la dirección normal a las paredes inclinada y vertical del silo para el caso de llenado distribuido están comprendidos entre  $1 \cdot 10^{-5}m$  y  $3,68 \cdot 10^{-8}m$  (del orden de una centésima de milímetro o menor) y para el caso de llenado concéntrico son menores a  $1 \cdot 10^{-5}m$ . En ambos casos se considera que son razonables. En todos los modelos los valores de los coeficientes de penalización normal y tangente adoptados son:  $\alpha_n = \alpha_t = 0,10$  para el contacto grano - compuerta de descarga y  $\alpha_n = \alpha_t = 0,05$  para los contactos grano pared (tanto de la tolva como del depósito).

### Distribución de la tensión vertical $\sigma_{22}$ en el material

Para la malla con la que se simula el llenado distribuido se analizó la influencia en las tensiones de los valores adoptados para los coeficientes de fricción y la densidad. Los valores adoptados para cada uno de los cuatro casos son los que se indican en la Tabla [7.7]. En la Figura [7.3.20] se presentan las tensiones verticales obtenidas.

Caso	$\mu_s$	$\mu_k$	$\rho [Kg/m^3]$
MEF ad1	0,30	0,15	1460
MEF ad2	0,65	0,65	1633
MEF ad3	0,30	0,24	1460
MEF ad4	0,30	0,30	1460

Tabla 7.7: Valores adoptados para los coeficientes de fricción y la densidad del material. Llenado distribuido.

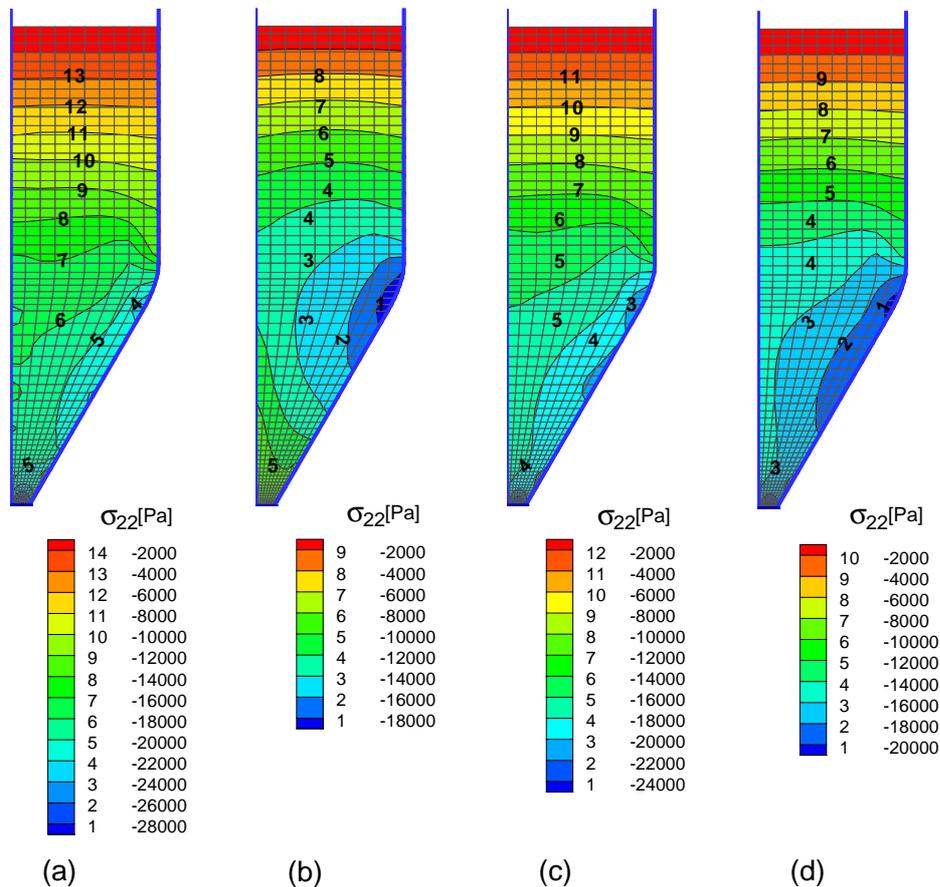


Figura 7.3.20: Tensiones verticales  $\sigma_{22}$  al finalizar el llenado distribuido al variar los coeficientes de fricción y densidad. a) MEF ad1; b) MEF ad2; c) MEF ad3 y d) MEF ad4

Las tensiones verticales que se muestran en las Figuras [7.3.20 a) c) y d)] corresponden a la misma malla y tienen el mismo coeficiente de fricción estático pero coeficientes de fricción cinéticos crecientes. Al aumentar el valor del coeficiente de fricción cinético se observa una disminución de la tensión vertical en la tolva, manteniéndose los valores en el depósito. En los tres casos se observa

una concentración de la tensión  $\sigma_{22}$  en la zona de transición tolva - depósito. Solo en el tercio superior del depósito la distribución de  $\sigma_{22}$  es similar a una distribución hidrostática. En el resto del depósito y en la tolva se obtienen menores valores absolutos de las tensiones verticales sobre la pared con quiebre al considerar un valor constante de la coordenada  $X_2$ .

En la Figura [7.3.21 a)] se muestran las distribuciones de  $\sigma_{22}$  al simular el llenado concéntrico adoptando los valores de los coeficientes correspondientes al caso MEF ac1 de la Tabla [7.8] y en la Figura [7.3.21b)] al adoptar los coeficientes de fricción del caso MEF ac2. Nuevamente los valores de la tensión vertical disminuyen al aumentar los valores de los coeficientes de fricción. En la Figura [7.3.21a)] el material que llena la mitad del silo cercana a la pared vertical, se observa que la tensión  $\sigma_{22}$  tiende a adoptar una distribución hidrostática cuando los valores de fricción son menores. No sucede lo mismo en la Figura [7.3.21b)]. Siendo evidente la gran influencia de los valores que se adoptan para la fricción entre el material granular y la pared.

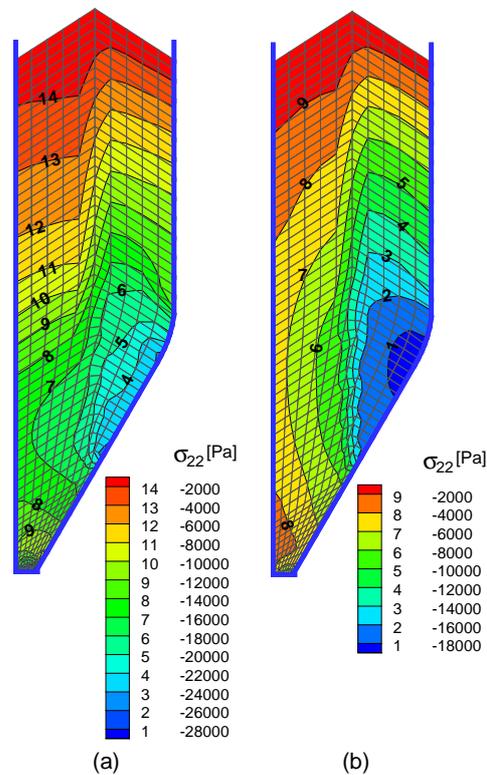


Figura 7.3.21: Tensiones de verticales  $\sigma_{22}$  en el material granular al finalizar el llenado concéntrico para diferentes coeficientes de fricción. a) MEF ac1; b) MEF ac2

Caso	$\mu_s$	$\mu_k$	$\rho [Kg/m^3]$
MEF ac1	0,30	0,15	1460
MEF ac2	0,65	0,65	1633

Tabla 7.8: Valores adoptados para los coeficientes de fricción y la densidad del material. Llenado concéntrico.

### Distribución de la tensión de corte $\sigma_{12}$ en el material

Las Figuras [7.3.22 a) b) c) y d)] corresponden a las distribuciones de la tensión de corte  $\sigma_{12}$  al finalizar el llenado concéntrico para los cuatro casos de la Tabla [7.7]. Al comparar Figuras [7.3.22 a) c) y d)] se observa que al aumentar el valor de  $\mu_k$  las áreas de la pared inclinada con mayores valores de tensión de corte aumentan, también crece el valor máximo de  $\sigma_{12}$ . Esto indica que durante la etapa de llenado el material desliza sobre la pared al ser comprimido por el peso del material ubicado por encima. Esto puede suceder porque la fricción estática se encuentra muy cerca de su valor límite y al agregar una nueva capa el leve sobrepaso de los desplazamientos que se produce, para asegurar que el amortiguamiento no sea excesivo, puede provocar un deslizamiento no real, por otra parte es de esperar mayor influencia de la fricción sobre la pared inclinada.

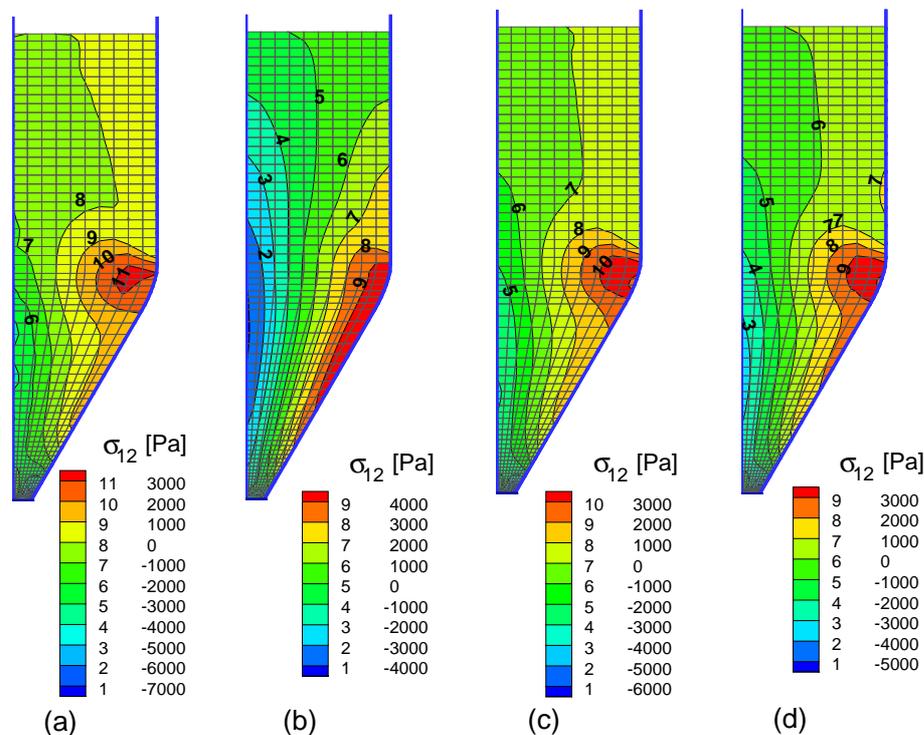


Figura 7.3.22: Distribución de la tensión de corte  $\sigma_{12}$  en el material granular al finalizar el llenado distribuido para distintos coeficientes de fricción. a) MEF ad1; b) MEF ad2; c) MEF ad3 y d) MEF ad4

En la Figura [7.3.23] se muestran las distribuciones de la tensión  $\sigma_{12}$  que se obtienen al final de la simulación del llenado de tipo concéntrico. Para los menores valores de los coeficientes de fricción Figura [7.3.23 a)] se tiene un la zona del quiebre de la pared derecha una concentración marcada de tensión. Para los mayores valores de los coeficientes de fricción Figura [7.3.23 b)] la zona con elevada tensión de corte, en la zona del quiebre de la pared derecha, afecta un área mayor y aparece otra concentración de tensión que afecta una zona por debajo de la mitad de la pared inclinada.

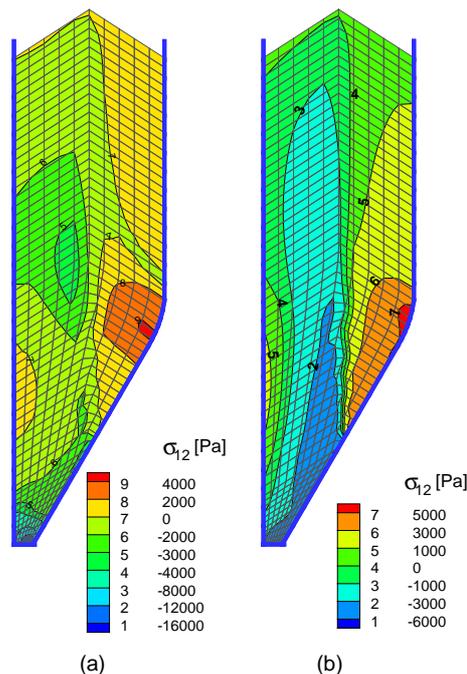


Figura 7.3.23: Distribución de la tensión de corte  $\sigma_{12}$  al finalizar el llenado de tipo concéntrico para diferentes valores de los coeficientes de fricción. a) MEF ac1; b) MEF ac2

### Distribución de la presión de contacto normal

En las figuras se presentan las distribuciones de la presión normal de contacto en la pared vertical a la izquierda del esquema del silo y la distribución de la presión de contacto normal a la pared con quiebre a la derecha del esquema del silo.

En la Figura [7.3.24] se presentan las distribuciones de la presión normal de contacto que se obtuvieron para los cuatro casos considerados en la Tabla [7.7] para las simulaciones de llenado distribuido.

Puede observarse que las distribuciones de presión sobre la pared vertical predichas por los modelos no tienen buena concordancia con los valores experimentales. El valor de la presión de contacto máxima experimental sobre la pared vertical es  $p_{cn} = 16615 Pa$  a  $X_2 = 1,06m$  mientras el máximo valor predicho es  $p_{cn} = 15878 Pa$  a  $X_2 = 0,615m$ . Si bien la el valor predicho de la presión difiere en solo un 4% respecto del valor medido la discrepancia en la posición es del 42%. Los valores predichos de la presión normal de contacto sobre la pared con quiebre son notoriamente más cercanos a los valores experimentales. El valor máximo experimental es  $p_{cn} = 20308 Pa$  a  $X_2 = 0,91m$  y el máximo para el caso MEF ad1 es  $p_{cn} = 21080 Pa$  a  $X_2 = 1,10m$  dando una discrepancia en el valor de la presión del 4% y en la posición del 17%.

En la Figura [7.3.25a)] pueden observarse las distribuciones de la presión normal de contacto sobre la pared vertical del silo, para los dos grupos de parámetros de la Tabla [7.8] adoptados en las simulaciones de llenado concéntrico. Nuevamente hay mala concordancia entre los valores predichos y los experimentales. El valor máximo predicho es  $p_{cn} = 17090 Pa$  a  $X_2 = 0,66m$  mientras el máximo experimental es  $p_{cn} = 16615 Pa$  a  $X_2 = 1,06m$  con lo cual se tiene que la discrepancia del valor predicho de presión es del 3% y en su ubicación del 38% levemente mejores que para la

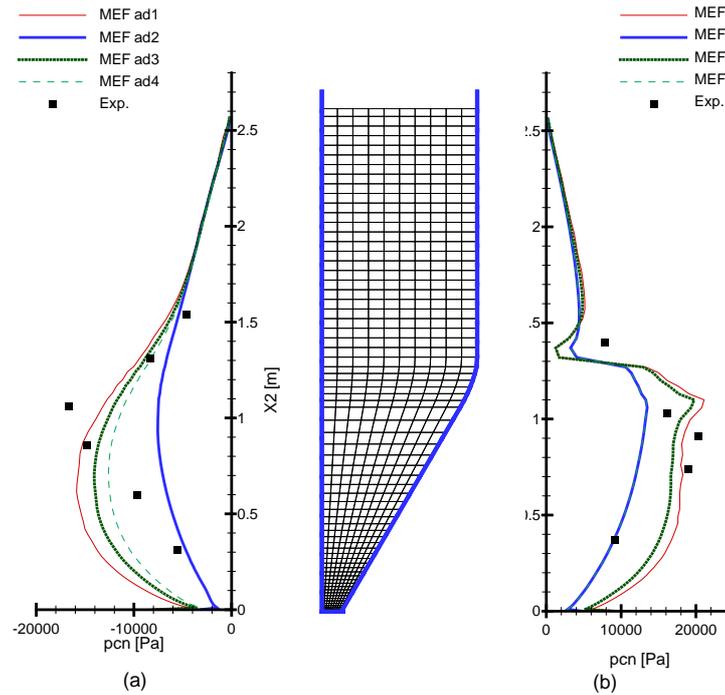


Figura 7.3.24: Comparación de la distribución de la presión normal de contacto a las paredes al finalizar la simulación del llenado distribuido con valores experimentales.

simulación con llenado distribuido.

Para los menores valores de los coeficientes de fricción, MEF ac1, la distribución de la presión de contacto sobre la pared con quiebre presenta un máximos local  $p_{cn} = 19913Pa$  a  $X_2 = 0,629m$  y el valor máximo  $p_{cn} = 23471Pa$  a  $X_2 = 1,07m$ . El máximo valor experimental es  $p_{cn} = 20308Pa$  a  $X_2 = 0,91m$  por lo cual las diferencias de los valores respecto de los valores experimentales son: 2% para  $p_{cn}$  y 31% para la posición para el máximo local y del 16% para la presión y 17% para la posición para el valor máximo.

Los resultados son aceptables dado que los parámetros que definen tanto la relación constitutiva como la fricción entre la arena y la pared de chapa corresponden aun material similar al utilizado por Kmita [Kmita, 1991]. La información que el autor del trabajo experimental suministra es insuficiente para deducir los parámetros constitutivos. Además las predicciones más cercanas a los valores experimentales han sido obtenidas con valores de fricción un 50% menor al que indica el trabajo experimental. En vista de los resultados, el método de llenado influye en los valores de presión, pero en el trabajo experimental no se especifica cual fue el utilizado.

De las mediciones experimentales se desconoce cual es la posición de las celdas de carga en la dirección  $X_3$  (perpendicular a las secciones de los silos presentadas). Sería de esperar que, de haber usado las celdas de mayor diámetro para realizar las mediciones éstas induzcan una interacción con el material mas importante en la zona donde las celdas están más cercanas una de otra, como en el caso de la parte superior de las tolvas, difícil de evitar en los experimentos. Esta interacción puede provocar que los valores medidos en la zona donde se producen los máximos valores de presión sean afectados por un mayor error en las mediciones.

Otra fuente de posibles discrepancias es haber supuesto un comportamiento bidimensional y no

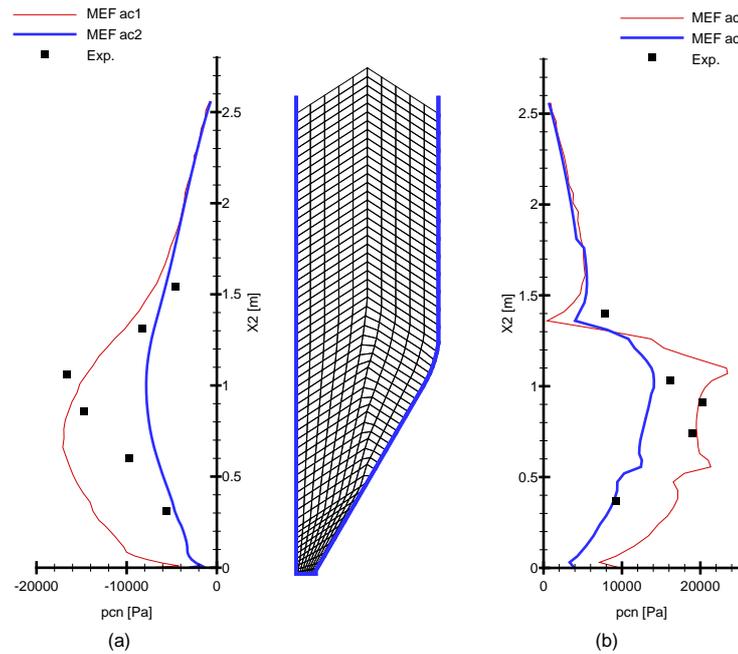


Figura 7.3.25: Comparación de la distribución de la presión normal de contacto a las paredes al finalizar la simulación del llenado concéntrico con valores experimentales.

tridimensional y que esto tenga mayor importancia en la tolva.

## 7.4. Conclusiones

En este capítulo se analizan primeramente los aspectos relevantes en el modelado numérico del proceso de llenado. Especial atención se ha puesto en la evaluación de los parámetros a introducir en el modelo y como afectan a los resultados que se obtienen.

La manera establecida para adoptar los valores de amortiguamiento utilizando el periodo de vibraciones libres no amortiguadas  $T$  para obtener una disminución de la amplitud de los desplazamientos amortiguados del orden del 1% de los desplazamientos no amortiguados ha mostrado ser adecuado. El amortiguamiento así establecido no es excesivo y el sistema alcanza un valor estable que concuerda con el estático correspondiente y el pequeño sobrepaso en los desplazamientos no afecta significativamente las tensiones en el material. Los valores de amortiguamiento resultan independientes del espesor se utilice para las capas de material al simular el llenado progresivo. En todos los casos el valor del período de vibraciones libres no amortiguadas es inversamente proporcional a la velocidad de propagación de una onda de compresión en el material granular y directamente proporcional a la altura máxima de material a considerar. Tanto para tolvas como para silos el factor de proporcionalidad está comprendido entre 3 y 3,5.

En la simulación del llenado progresivo el espesor de las capas utilizado afecta los valores de las tensiones y de las presiones de contacto en el tercio inferior de la tolva donde es necesario utilizar capas de menor espesor del orden de  $0,05m$ . En el resto de la tolva parece suficiente adoptar un espesor de capas del orden de  $0,20m$ . En la zona cercana a la superficie libre del material tanto las presiones de contacto como las tensiones son afectadas por la discretización resultando

proporcionales al espesor de las últimas capas.

La influencia de la relación constitutiva que se adopte, elástica o elastoplástica, durante el llenado influye en la medida que la presión o tensión media sea mayor al valor de  $p_o(0) = a_1$  donde  $a_1$  es el término constante de la ley de endurecimiento.

El desarrollo de la fricción entre el material granular y las paredes influye en la distribución de las tensiones en el material y en consecuencia afecta las presiones de contacto normal y tangencial.

Los valores de los coeficientes de penalización utilizados en el algoritmo de contacto influyen de manera importante en las interpenetraciones (no cumplimiento de la condición de no interpenetración del algoritmo de contacto) mientras que su influencia sobre las tensiones es mucho menor.

Al aplicar la metodología para simular el llenado de *tolvas cónicas* con diferentes ángulos de inclinación de la pared respecto del plano horizontal se observa que el valor máximo de la presión normal de contacto al finalizar el proceso de llenado progresivo aumenta a medida que disminuye el ángulo de inclinación de la tolva respecto de la horizontal. La distancia vertical desde la compuerta hasta la posición del valor máximo es aproximadamente un sexto de la altura máxima de llenado y es independiente del ángulo de inclinación de la pared de la tolva. También se observa que la distribución de la presión de contacto sobre la pared de la tolva no es de tipo hidrostático y que la presencia de la compuerta tiene el efecto de disminuir las presiones de contacto sobre la pared para valores de la coordenada vertical menores a un quinto de la altura máxima de la tolva ( $0 < X_2 < H/5$ ).

En las tolvas analizadas el desarrollo de la fricción (presión de contacto tangente dividido la presión de contacto normal) alcanza el valor máximo fijado por el coeficiente de fricción estático  $\mu_s$  y hay deslizamiento del material sobre la pared.

Los valores de la relación de fricción desarrollada en cada capa varía durante el proceso de llenado, presentando un pico coincidente con el agregado de la capa y de las dos o tres capas por encima de la capa considerada. El pico en la fricción desarrollada es mucho más marcado en las capas inferiores donde el amortiguamiento no es tan efectivo para evitar el leve sobrepaso de los desplazamientos que produce un sobrepaso importante tanto en las tensiones como en las presiones de contacto debido a que éstas están relacionadas con las derivadas de los desplazamientos. El número de capas cuyos valores estables de la relación de fricción al finalizar el proceso de llenado es cercano al valor límite dado por el coeficiente de fricción estático aumenta cuando el ángulo de inclinación de la pared de la tolva respecto de la horizontal disminuye.

Al analizar la distribución de la tensión vertical en el material granular, cuando se utiliza la metodología para simular el llenado concéntrico de un *silo de fondo plano*, se observa que es mayor en la cercanía del eje de simetría y menor cerca de la pared al considerar puntos con igual coordenada vertical. La distribución de la tensión vertical presenta un núcleo de alta tensión de compresión que afecta al material comprendido entre la compuerta y la coordenada vertical del orden del 15 % al 20 % de la altura máxima de material.

En el caso del silo de fondo plano se consideraron dos opciones para asignar los *coeficientes de penalización* asignarlos por superficie o por segmento dentro de cada superficie. Cuando se asignan valores a los coeficientes de penalización a cada segmento se obtiene un mejor cumplimiento de la

condición de no penetración en el contacto. Esta mejora se obtiene asignando mayores valores a los coeficientes de penalización en los segmentos de la pared cerca del fondo y disminuyendo su valor a medida que aumenta la coordenada  $X_2$ . Los valores de las presiones de contacto muestran muy poca sensibilidad a los valores de penalización utilizados siendo la variación máxima del 2,5 %.

Durante la simulación del llenado el material granular desarrolla fricción con la pared y alcanza el valor límite que fija el coeficiente de fricción estático y el material granular desliza sobre la pared observándose el mismo comportamiento que en la simulación del llenado de las tolvas cónicas.

Siendo las dimensiones geométricas de este silo cercanas a las de un silo real, se evidencia la influencia de la *relación constitutiva* adoptada en la magnitud y distribución de las presiones de contacto, tanto sobre la pared lateral como sobre el fondo.

Los valores de presión normal de contacto que se obtienen al llenar el silo utilizando el modelo elastoplástico son un 38 % mayores que las obtenidas al utilizar el modelo elástico. Al comparar el valor máximo de la presión de contacto normal al utilizar el modelo elastoplástico, la presión de contacto resulta un 8 % mayor si los coeficientes de penalización se asignan por segmento respecto a cuando los coeficientes de penalización se asignan por superficie de contacto. Esta diferencia en las presiones de contacto es relativamente pequeña comparada con la mejora importante en el cumplimiento de la condición de no interpenetración en el contacto, siendo mejor al asignarse los coeficientes por segmento. La distribución de la presión normal de contacto presenta un cambio de pendiente aproximadamente a  $6m$  por debajo de la superficie libre del material. Este cambio se origina por el efecto combinado de los cambios en la compactación del material y el desarrollo de la fricción entre el grano y la pared.

Al comparar los resultados obtenidos al utilizar el modelo constitutivo elastoplástico con los valores de la fórmula de Jansen se observa que la distribución de las presiones normales de contacto son levemente superiores de la fórmula de Jansen en los dos tercios inferiores de la pared y son muy semejantes en el tercio superior donde también coincide con la distribución que se obtiene de la fórmula de Reimbert. La notoria diferencia con la distribución obtenida con el modelo elástico indica la relevancia del cambio de rigidez del material al producirse la contracción volumétrica. La distribución de la presión normal de contacto que se obtiene al utilizar el modelo elástico esta comprendida entre las obtenidas por otros grupos que realizaron la simulación del llenado.

Al aplicar la metodología para simular el llenado del *silo simétrico* de deformación plana de laboratorio, considerando que el llenado se realiza tanto de modo distribuido como concéntrico se observa que las distribuciones de las tensiones en el material granular son diferentes en uno y otro caso poniéndose de manifiesto la influencia del método de llenado en el desarrollo de las tensiones. También se observa que la concentración de tensiones que en la transición entre la tolva y el depósito es poco influenciada por la geometría de la misma. Cuando se utiliza una malla con mayor refinamiento cerca de la pared, se observa una zona de mayor extensión donde las tensiones de corte tienen valores mas elevados y una disminución de las tensiones verticales en la misma zona. Cuando se simula el llenado como de tipo concéntrico se desarrolla una zona de tensión de corte nula en la cercanía del eje de simetría en el depósito que no se obtiene con el otro tipo de llenado.

El valor del tiempo utilizado para calcular el factor de penalización en el contacto  $\Delta t_{cont}$  (siendo

$\Delta t_{cont}$  menor al tiempo crítico) tiene leve influencia en los valores de las presiones normales de contacto especialmente cuando se utiliza un valor de coeficiente de fricción estático bajo. Cuando la fricción es elevada el valor de  $\Delta t_{cont}$  no altera los valores de la presión normal de contacto.

El coeficiente de fricción cinético adoptado tiene influencia en los valores de la presión de contacto pero no en la forma de la distribución. La máxima diferencia se observa en el tercio inferior de la pared de la tolva del silo y es un 26% mayor respecto de la distribución obtenida al considerar que ambos coeficientes de fricción son iguales. Respecto del desarrollo de la fricción durante el llenado se detecta el mismo comportamiento que en el caso de las tolvas y el silo de fondo plano.

Los valores de la presión de contacto obtenidas con el modelo se encuentran dentro de los valores experimentales en el depósito cuando se simula el llenado distribuido y son algo mayores cuando se simula el llenado concéntrico. Debido al mejor acuerdo de los resultados obtenidos al simular el llenado como de tipo distribuido con los valores experimentales, llevaría a confirmar que en los experimentos se utilizó este tipo de llenado.

La distribución de la presión de contacto  $p_{cn}$  en la tolva no es capturada completamente por ninguno de los modelos. Los valores obtenidos para  $p_{cn}$  con la malla refinada cerca de la pared y el mayor coeficiente de fricción estático están dentro de los valores experimentales en la parte superior de la tolva y en la mitad inferior. Los valores máximos experimentales ubicados a  $0,93m < X_2 < 1,03m$  solo son capturados al utilizar una malla uniforme y llenado distribuido y el mayor coeficiente de fricción pero la predicción en el resto de la tolva no es buena. Dado que las celdas solo están separadas  $0,10m$  es posible que las mediciones de las mismas estén afectadas por errores de medición mayores que en las restantes debido a la modificación que producen las celdas en su entorno. Estas condiciones no permiten establecer con certeza el origen de la discrepancia entre los valores experimentales y las predicciones del modelo.

Cuando se simula el llenado del *silo asimétrico* como de tipo distribuido, se observa que la presencia de la pared inclinada afecta la distribución de las tensiones en la mitad inferior del depósito (zona donde ambas paredes son verticales). Las tensiones cerca de la pared con quiebre son mayores a las que tienen lugar cerca de la pared vertical en la mitad inferior del silo. Cuando se simula el llenado como concéntrico, se observa que la distribución de las tensiones en todo el depósito es afectada por la presencia de la pared inclinada. Para ambos tipos de llenado, la distribución de las tensiones verticales sobre la pared inclinada es afectada por el valor adoptado para el coeficiente de fricción estático, obteniéndose una marcada concentración de la tensión al utilizar el mayor valor de fricción.

Al analizar las distribuciones de las tensiones obtenidas al adoptar el mismo coeficiente de fricción estático y distintos coeficientes de fricción cinéticos, se observa que varían tanto la distribución como los valores en la cercanía de la pared inclinada. Los valores disminuyen y aumenta el tamaño de la zona que afectan a medida que el coeficiente de fricción cinético toma valores mas cercanos al valor del coeficiente estático.

El valor del coeficiente de fricción estático cambia notoriamente la forma de la distribución de la tensión de corte en el grano al simular el llenado distribuido, presentando una concentración en la cercanía del quiebre cuando se utiliza el menor valor de fricción. Los valores máximo y mínimo

obtenidos al adoptar el menor coeficiente de fricción son menores que los obtenidos con el mayor valor del coeficiente de fricción.

La distribución de la presión normal de contacto sobre la pared vertical difiere de los valores experimentales para los puntos con coordenada  $0m < X_2 < 1m$  al simular el llenado como de tipo distribuido. El máximo valor experimental se produce a  $X_2 = 1,06m$  mientras los valores máximos predichos por el modelo se producen a  $0,61m < X_2 < 0,71m$  al adoptar el menor valor de fricción. Para los puntos con coordenada  $X_2 > 1,20m$  los valores predichos por el modelo son cercanos a los valores experimentales.

La distribución de la presión normal de contacto sobre la pared con quiebre obtenidas con el modelo son mucho mas cercanas a los valores experimentales, en especial, al adoptar el menor valor para el coeficiente de fricción y llenado de tipo distribuido. La forma de las distribuciones de la presión de contacto sobre la pared vertical es suave mientras sobre la pared con quiebre presenta un máximo en la parte superior de la pared inclinada y un mínimo local en la parte inferior del tramo vertical de la misma.

Al simular el llenado como de tipo concéntrico, las presiones de contacto que se obtienen de la simulación no capturan los valores de las mediciones sobre la pared vertical pero si sobre la pared con quiebre. Para este tipo de llenado también se obtiene una distribución suave de la presión de contacto sobre la pared vertical, mientras que la distribución de la presión de contacto presenta dos máximos locales sobre la pared inclinada y un mínimo local en la parte inferior del tramo vertical.



# Capítulo 8

## Modelo del vaciado

### 8.1. Introducción

#### 8.1.1. Descripción del modelo de vaciado

##### Descripción de los fenómenos físicos

El proceso de vaciado de una tolva o un silo, desde el punto de vista de los fenómenos físicos, se inicia con la apertura de la compuerta de descarga generalmente ubicada en el fondo (o sobre una pared lateral cerca del fondo). El efecto de la apertura de la compuerta sobre el material que estaba en inmediato contacto con ella es la descompresión del mismo que es acompañada por la pérdida de rigidez y la expansión volumétrica. El efecto combinado permite que el material comience a salir del volumen definido por la estructura que lo contenía.

El efecto de descompresión, pérdida de rigidez y expansión de volumen se comienza a propagar en sentido ascendente en todo, o en parte, del resto del material que se encuentra dentro de la estructura. Como consecuencia la estructura se ve afectada en primer lugar por una onda de descompresión que va subiendo a medida que el material se expande. A causa de ello la presión normal a la pared disminuye y consecuentemente la fricción. Por este efecto combinado el material comienza a descender. Con el descenso, si la geometría de la estructura se estrecha como en las tolvas, el material se contrae volumétricamente y como consecuencia se comprime y aumenta su rigidez lo cual provoca que se inicie una onda de compresión que nuevamente viaja desde el fondo hacia arriba. El ciclo descompresión compresión se repite produciendo importantes variaciones de la presión sobre la pared.

A diferencia del llenado el proceso de vaciado es un proceso dinámico con un periodo transitorio cuya duración depende de las características del material granular almacenado, de la rugosidad de las paredes y de la geometría de la estructura. El tipo de régimen de vaciado que puede ser, másico, canalizado o mixto también depende de esas mismas características. En el caso de un silo con flujo másico todo el material almacenado inicia su movimiento descendente cuando se abre la compuerta de descarga y presenta un régimen de flujo estable con una etapa transitoria de corta duración. Los silos y tolvas que presentan flujo canalizado o mixto no siempre alcanzan a tener un régimen de descarga, en muchos casos el flujo es errático y depende de la altura de material dentro del depósito y de la interacción entre el material que se encuentra en las denominadas zonas muertas

y el material que se encuentra en la chimenea donde se produce el flujo.

En silos muy esbeltos se producen temblores en la estructura producidos por la descompresión y recompresión del material que provoca que las presiones normales de contacto entre el material granular y la pared tengan súbitas e importantes variaciones. Estas variaciones en la presión normal a la pared causan que la presión tangencial también tenga fuertes variaciones.

### **Descripción de los aspectos del modelo acordes a los fenómenos físicos**

El estado de tensiones y de deformaciones del material para iniciar el vaciado corresponde al que se obtuvo al final de la etapa de llenado progresivo. Para la etapa de vaciado se elimina el amortiguamiento viscoso del material granular, que había sido necesario para simular el proceso de llenado como un proceso cuasi estático.

Desde el punto de vista de la simulación numérica del proceso de vaciado la apertura de la compuerta de descarga se simula eliminando la condición de contacto mecánico entre el material granular y la compuerta. La condición de contacto mecánico con las restantes partes de la estructura no se modifican durante el vaciado y los coeficientes de fricción estático y cinético mantienen los valores adoptados en la etapa de llenado.

La expansión volumétrica y la consecuente pérdida de rigidez del material almacenado son gobernadas por la ecuación constitutiva.

Durante el proceso de vaciado es posible que el material, aun estando dentro del silo o tolva, se halla expandido volumetricamente tanto que los granos dejan de tener contacto entre si. Luego por un cambio de la geometría se puede producir una contracción volumétrica que haga que los granos nuevamente estén en contacto unos con otros. A la pérdida de contacto entre los granos estando dentro del contenedor, se la ha denominado *estado disgregado* y equivale a un estado de "caída libre" de los granos individuales.

El estado disgregado del material es detectado a nivel de cada elemento y está caracterizado por que se anula la capacidad del material de transmitir fuerzas internas pero no se alteran su peso ni su masa. El estado disgregado es detectado por la relación constitutiva por una parte y porque la posición del material lo ubica geoméricamente dentro del contenedor. Desde el punto de vista del algoritmo, al detectarse que el material de un elemento se encuentra en estado disgregado el elemento deja de contribuir a las fuerzas internas globales del sistema, pero no altera su contribución a las fuerzas externas ni a la masa globales del mismo mientras al menos uno de sus nodos se encuentre dentro del contenedor.

Si el material vuelve a disminuir su volumen adoptando un valor menor o igual al volumen inicial (correspondiente al volumen en el momento de ser incorporado al silo o tolva, el cual representa el volumen mínimo que garantiza el contacto entre los granos) esto tiene como consecuencia que el material adquiere nuevamente la capacidad de transmitir fuerzas internas. Por ello el elemento contribuye a las fuerzas internas del problema con valores no nulos.

La condición para considerar que el material salió es que el material se encuentre en estado disgregado y que geoméricamente se encuentre fuera del contenedor. La condición que establece que el material ha salido es una condición cinemática, que consiste en controlar que todos los nodos

de un elemento de grano tengan sus coordenadas fuera del volumen encerrado por la geometría inicial del silo o tolva. Si todos los nodos de un elemento de grano están posicionados fuera del volumen del contenedor el algoritmo procede a eliminar las contribuciones del elemento a las fuerzas internas, la masa y a las fuerzas externas globales del sistema .

La simulación de la etapa de vaciado puede terminar cuando se cumple una de las siguientes tres situaciones. Cuando todo el material ha salido del silo o tolva; cuando se alcanza el tiempo máximo establecido en el archivo de datos o cuando uno o más elementos se han distorsionado tanto que el determinante de la matriz Jacobiana ( $\det(\mathbf{J}) \leq 0$ ) tiene valor negativo o nulo. En este último caso,  $\det(\mathbf{J}) \leq 0$ , puede producirse en un elemento que está saliendo o en elementos que son atravesados por el borde del canal de flujo, donde se estaría formando una banda de corte en el material granular. Si el elemento está saliendo el material se encuentra disgregado y el proceso se podría continuar si se implementara un movimiento de nudos adecuado que mantenga  $\det(\mathbf{J}) > 0$  hasta tanto el material salga. Cuando el  $\det(\mathbf{J}) < 0$  en los elementos en el borde del canal de flujo, se debería implementar una técnica de remallado de características similares a la implementada por Martínez et. al en [Martínez et al., 2002] para poder continuar con la simulación del vaciado. Otra opción sería definir una superficie de contacto interna grano - grano en el borde del canal de flujo.

## 8.2. Casos de aplicación

En todos los casos de aplicación se analizan las variaciones de las distribuciones de tensiones en el material granular y la variación de las presiones de contacto normal y tangencial. Las características cinemáticas se reflejan en la deformación de las mallas a medida que transcurre el vaciado e indican que tipo de vaciado se estaría produciendo (másico, canalizado o mixto).

La determinación de las presiones de contacto entre el grano y las paredes es indispensable para verificar el diseño estructural del contenedor y su funcionamiento y es uno de los objetivos de esta tesis. Con esta finalidad se presentan los gráficos de la distribución de las presiones normales de contacto correspondientes a distintos tiempos durante la simulación del vaciado.

A partir de las distintas distribuciones de la presión normal de contacto se elabora un diagrama envolvente de las presiones máximas obtenidas durante el vaciado. Debido a que en la mayoría de las normas y expresiones analíticas se comparan los valores máximos que se producen durante la descarga con el valor máximo al finalizar el proceso de vaciado, también se incluye esta comparación.

El cociente entre la presión de contacto normal pico de descarga y el valor máximo de llenado define el factor de magnificación dinámico  $fmd$ .

Otro aspecto que suele ser de interés es la distribución de velocidades en planos horizontales con diferente coordenada vertical. En los silos y tolvas que presentan flujo canalizado o mixto es de interés poder establecer la posición de los bordes del canal de flujo ya que este limita la zona de material que permanece estancado en las denominadas zonas muertas.

### 8.2.1. Vaciado de tolvas cónicas.

Las tolvas cuyo vaciado se simula, son las que se utilizaron para simular el llenado progresivo en el Capítulo 7. Al igual que para el llenado se muestran los resultados en una sección comprendida

entre el eje de simetría y la pared, supuesta rígida, de la tolva.

### Tolva con $\alpha = 75^\circ$

Para la tolva cuyo ángulo de inclinación respecto de la horizontal es  $\alpha = 75^\circ$  en las Figuras[8.2.1 a), b) y c)] se muestran superpuestas la malla indeformada inicial y tres mallas deformadas correspondientes a los tiempos de vaciado  $t = 0,5$ ,  $t = 1,0$  y  $t = 1,9$ . En estas figuras puede observarse como cambia el perfil de la superficie libre superior de material al avanzar el vaciado, que inicialmente es horizontal y luego va adquiriendo la forma de una onda con la máxima depresión sobre el eje de simetría de rotación. En el cambio de forma de la superficie libre inferior se observa la importancia de la fricción entre el material granular y la pared, que provoca que el material en contacto con la pared comience a quedar retenido en especial hacia el final de la simulación como se observa en Figura[8.2.1 c)]. En las Figuras[8.2.1 c) y d)] se indica con una “x” el elemento cuya distorsión provoca que  $\det(\mathbf{J}) < 0$  razón por la cual finaliza la simulación. La fricción entre el material granular y la pared es el principal responsable del cambio de forma de ambas superficies libres.

La influencia de la fricción también se evidencia en la secuencia de salida de los elementos Figura[8.2.1 b)]. En las cinco capas inferiores sale primero el elemento que tiene un lado sobre el eje de simetría y le siguen los restantes elementos de la capa hasta llegar al que tiene un lado sobre la pared de la tolva. La secuencia no se cumple para los elementos de las capas 6, 7 y 9 que son más afectadas por la fricción con la pared y además tienen poco peso de material por encima de ellas. Finalmente el proceso termina por la distorsión del elemento indicado con “x” en la Figura [8.2.1 b)] que produce  $|J| \leq 0$ .

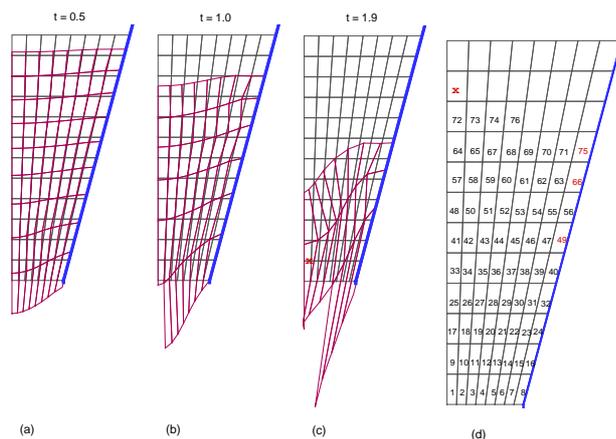


Figura 8.2.1: Tolva con  $\alpha = 75^\circ$ . a), b) y c) Mallas indeformadas y deformadas correspondientes a diferentes tiempos de vaciado; d) secuencia de salida de los elementos de material granular

En la Figura[8.2.2] se presentan los diagramas de velocidad media del grano en los planos horizontales de coordenada  $X_2 = 0,00$ ,  $X_2 = 1,20$  y  $X_2 = 2,40$  para los tiempos  $t = 0,02$ ,  $t = 0,07$ ,  $t = 0,12$  y  $t = 0,17$  desde el inicio del vaciado.

La Figura [8.2.2] muestra que al iniciarse el vaciado todo el material dentro de la tolva comien-

za a moverse, evidenciando un flujo de tipo másico, y las velocidades medias en los tres planos horizontales aumentan con el tiempo.

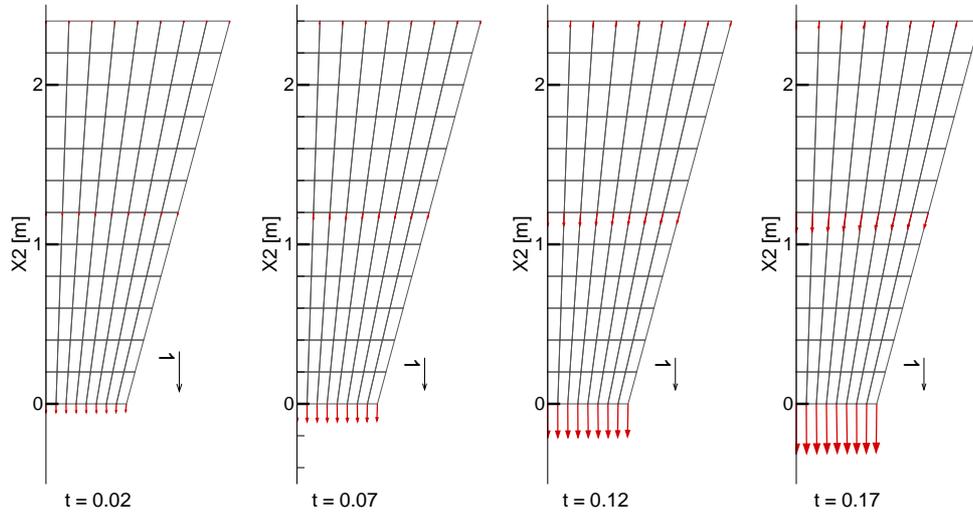


Figura 8.2.2: Tolva con  $\alpha = 75^\circ$ . Diagramas de velocidades medias en el material granular para cuatro tiempos de vaciado

En la Figura[8.2.3] se muestran las distribuciones de la tensión vertical  $\sigma_{22}$  en el grano para los tiempos  $t = 0,001$ ,  $t = 0,460$ ,  $t = 0,962$  y  $t = 1,462$  de iniciado el vaciado. En la Figura[8.2.4] se presentan las distribuciones de la tensión horizontal  $\sigma_{11}$  y en la Figura[8.2.5] la distribución de la tensión de corte  $\sigma_{12}$  para los mismos tiempos de vaciado que  $\sigma_{22}$ .

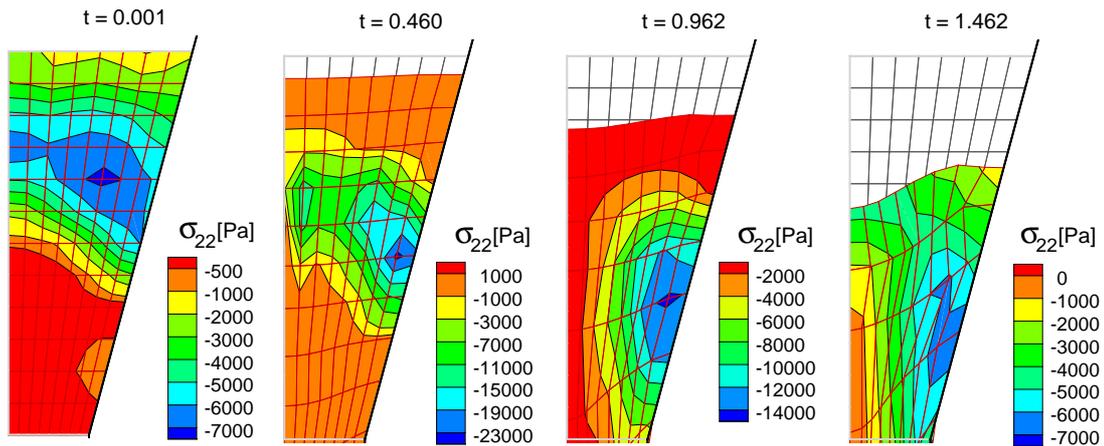


Figura 8.2.3: Tolva con  $\alpha = 75^\circ$ . Tensión vertical  $\sigma_{22}$  en el material granular para distintos tiempos de iniciado el vaciado

En las Figuras [8.2.3, 8.2.4 y 8.2.5] se observa que tanto la tensión vertical  $\sigma_{22}$  como la horizontal  $\sigma_{11}$  y la tensión de corte  $\sigma_{12}$  presentan una zona de concentración de tensiones aproximadamente a la mitad de la altura de material durante el vaciado. Esta concentración de tensiones pone de manifiesto la importancia de la fricción entre el material y la pared de la tolva. En las Figuras

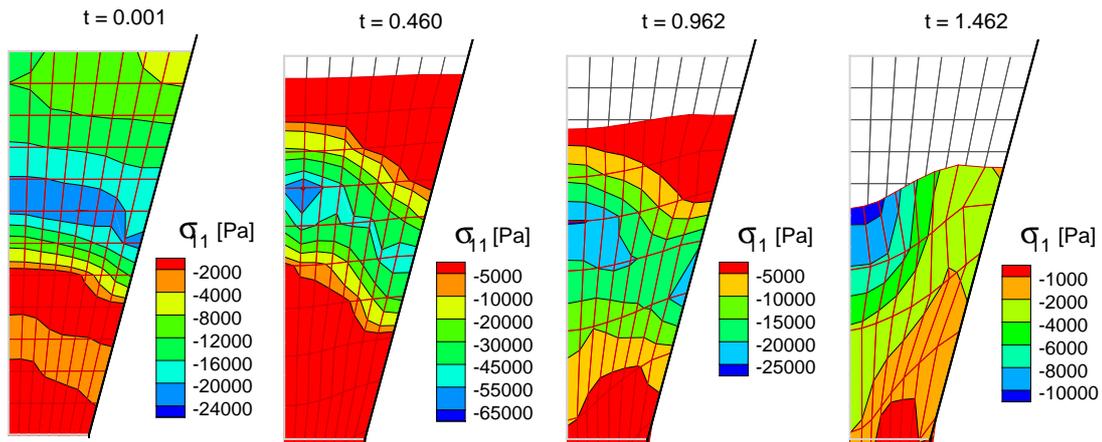


Figura 8.2.4: Tolva con  $\alpha = 75^\circ$ . Tensión horizontal  $\sigma_{11}$  en el material granular para distintos tiempos de iniciado el vaciado

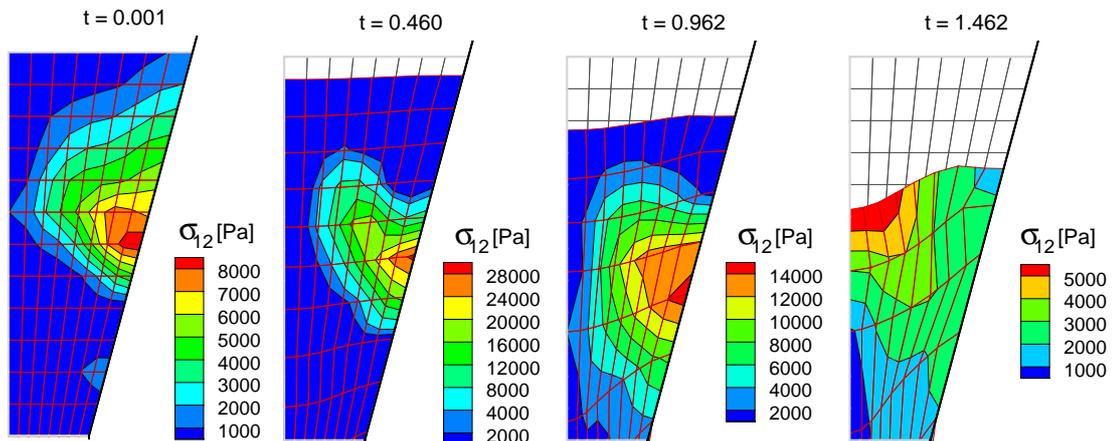


Figura 8.2.5: Tolva con  $\alpha = 75^\circ$ . Tensión de corte  $\sigma_{12}$  en el material granular para distintos tiempos de iniciado el vaciado

[8.2.3 y 8.2.4] puede observarse un aumento de magnitud en los valores tanto de la tensión vertical como de la horizontal respecto de los correspondientes valores al inicio del vaciado. El valor de las tensiones aumenta y luego disminuye a medida que transcurre el tiempo. Es de hacer notar que en las figuras para  $t = 0,46$  indican la formación de un arco de compresión en el grano, y a partir de ese valor de tiempo el material que desliza sobre la pared lo hace a menor velocidad.

Finalmente en la Figura[8.2.6] se presentan las distribuciones de la presión de contacto normal obtenidas para distintos tiempos durante el vaciado. En los gráficos se ha incluido la distribución correspondiente al final de la etapa de llenado como referencia ( $t = 0$ ).

En la Figura[8.2.6 b)] se reproducen las primeras siete distribuciones de la Figura[8.2.6a)] con el fin de observar la variación con el tiempo desde el inicio del vaciado de las distribuciones de presión de contacto. Para  $t = 0,02$  (1) se observa que se produce una disminución de la presión de contacto en el tercio inferior de la pared de la tolva y un aumento importante del valor de las presiones en la parte superior. Luego para  $t = 0,07$  (2) la distribución se hace prácticamente cero tanto en el tercio

inferior como en el superior concentrándose en el tercio intermedio presiones de mayor magnitud y descendiendo la posición del máximo. Luego los valores del tercio medio aumentan y aparecen nuevamente presiones en el tercio superior para  $t = 0,12$  (3) observándose que el pico ascendió su posición para luego descender tanto en posición como en magnitud para  $t = 0,17$  (4) descenso que se mantiene para  $t = 0,22$  (5) y se reinicia el proceso para  $t = 0,27$  (6) que luego concentra las presiones en el tercio inferior para  $t = 0,32$  (7). El proceso continua hasta obtener en  $t = 0,77$  el máximo valor de presión de contacto  $p_{cn} = 89419Pa$  para  $X_2 = 1,69m$ , que al compararlo con el máximo valor al final de la etapa de llenado que es  $p_{cn} = 10271Pa$  para  $X_2 = 0,60m$  da un factor de magnificación dinámico  $fmd = 8,7$  muy elevado. La ubicación se corresponde con la posición donde se presenta una concentración de tensiones en el material granular. Los valores máximos de presión de contacto que se obtienen para tiempos  $t > 0,82$  son menores hasta la finalización de la simulación del proceso de vaciado.

Tanto las distribuciones de tensiones como de la presión de contacto indican que el máximo valor no se produce inmediatamente después de iniciado el vaciado.

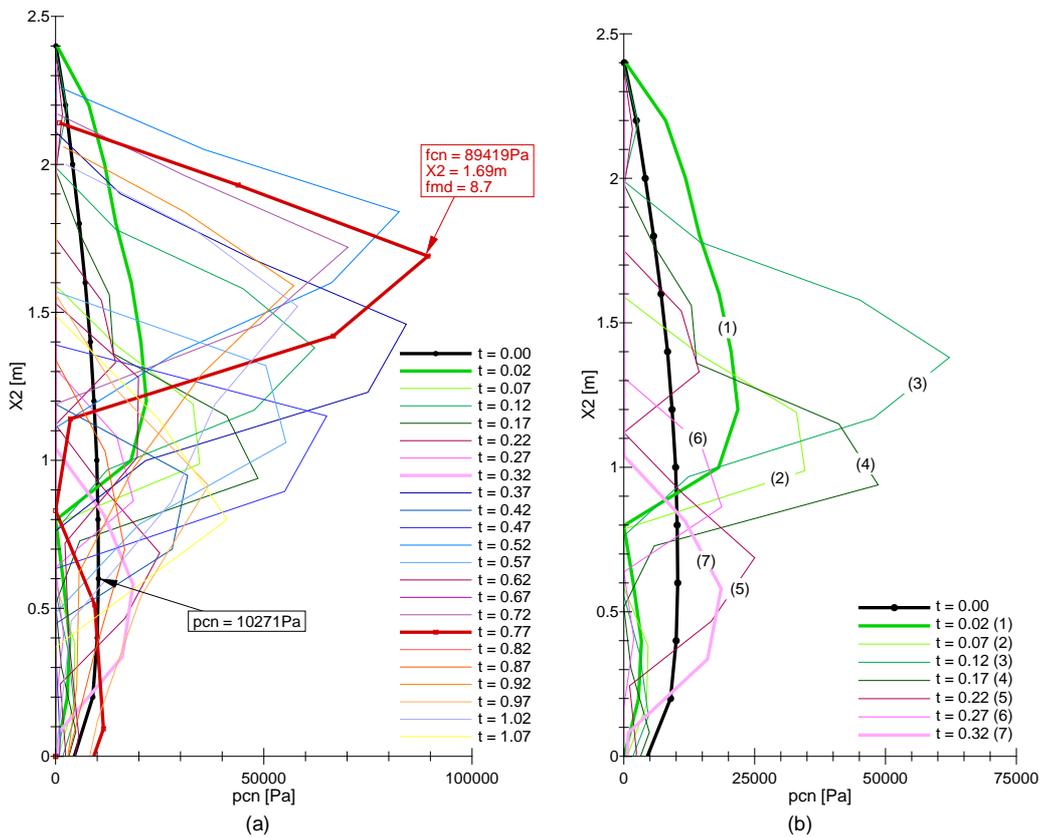


Figura 8.2.6: Tolva con  $\alpha = 75^\circ$ . Distribuciones de la presión de contacto durante el vaciado para distintos tiempos

**Tolva con  $\alpha = 50^\circ$**

Los resultados se obtienen para una tolva cónica cuyo ángulo respecto de la horizontal es  $\alpha = 50^\circ$ . En las Figuras[8.2.7a) y b)] se muestran superpuestas la malla indeformada inicial y dos mallas deformadas correspondientes a los tiempos de vaciado  $t = 0,22$  y  $t = 0,72$  respectivamente y

los vectores desplazamiento en los nodos. En el esquema de la Figura [8.2.7 c)] se indica la secuencia de salida del material hasta el fin de la simulación que se produjo en  $t = 0,72$  por ser el  $\det(J) \leq 0$  en el elemento 14 indicado con “x”.

A diferencia de los resultados obtenidos para la tolva con  $\alpha = 75^\circ$  un volumen importante de material dentro de la tolva permanece en reposo y solo el material en la parte inferior y cercano al eje de simetría de revolución de la tolva inicia el movimiento. En la Figura [8.2.7 b)] puede observarse que a pesar de haber salido la primer capa completa de material la superficie libre superior casi no ha experimentado desplazamiento, particularmente cerca de la pared de la tolva.

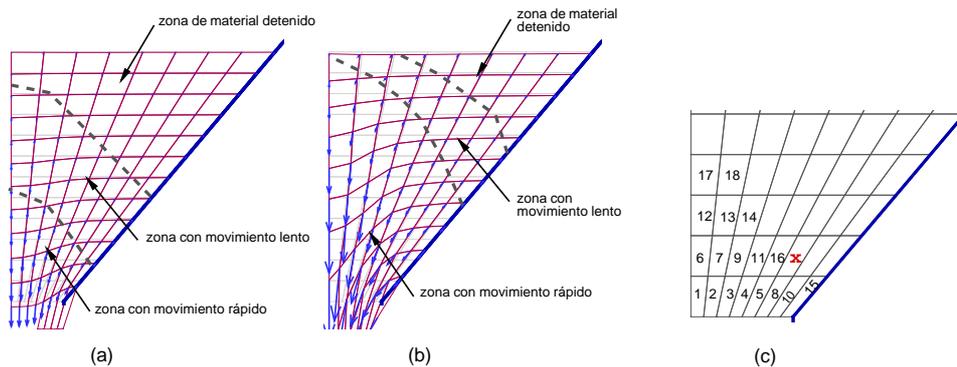


Figura 8.2.7: Tolva con  $\alpha = 50^\circ$ . Malla indeformada y deformada superpuestas y secuencia de salida de los elementos

Tanto las mallas deformadas como los vectores desplazamiento ponen de manifiesto zonas con diferente movimiento del material. [Schwedde, 1998] hace una reseña de algunos trabajos sobre el movimiento de materiales no cohesivos en silos, entre los cuales menciona las definiciones de las áreas con diferente movimiento que dieron Brown y Hawksley en 1947 y la descripción del movimiento que observó Kvpil en 1959. No hay un modelo físico que permita predecir las regiones observadas.

Las cinco zonas que describieron Brown y Hawksley comprenden una zona inmediatamente encima de la abertura de descarga en la cual las partículas no tienen contacto entre si (coincidente con la definición de material disgregado adoptada en esta tesis) por encima una zona donde los granos tienen movimiento acelerado, zona que tiene contacto con las otras tres zonas: una de material detenido, otra de material con movimiento muy lento y otra - cercana a la superficie libre superior- que presenta un movimiento rápido de las partículas (las partículas ruedan en esta zona). En las Figuras [8.2.7a) y b)] se han indicado tres de las cinco zonas, por claridad de la figura no se indica la zona de material disgregado. La ultima zona, cercana a la superficie libre superior de material no llega a detectarse durante la simulación.

Según Kvpil las partículas pueden realizar dos tipos de movimiento a los que denomina primario y secundario. El movimiento primario de las partículas consiste solo en un movimiento en la dirección de la gravedad, mientras en el movimiento secundario las partículas giran y se desplazan tanto en la dirección de la gravedad como en la dirección perpendicular a ésta siendo muy importante cerca de la abertura de salida. Ambas zonas de movimiento tienen la forma de elipsoides, los cuales aumentan su tamaño cuando el material comienza a moverse. Cuando el elipsoide de movimiento primario alcanza la superficie libre superior del material almacenado se ha formado el

“embudo de reposo” cuya superficie separa las áreas de material con movimiento rápido y lento. Las dos líneas punteadas de las Figuras[8.2.7a) y b)] cualitativamente se corresponden a los elipsoides descritos por Kvapil.

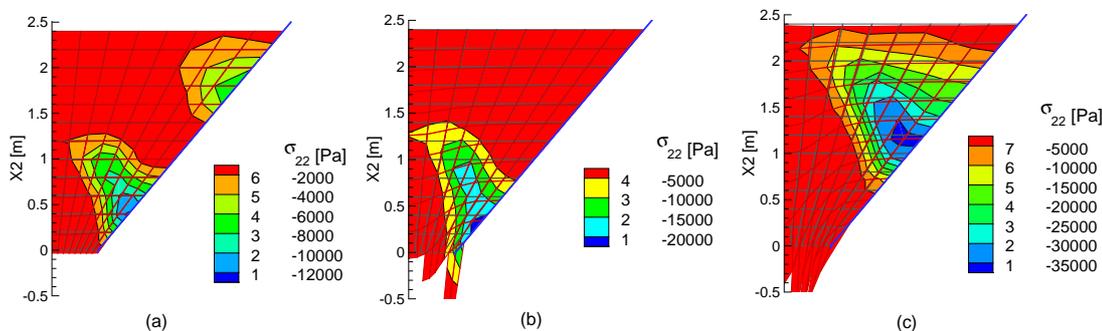


Figura 8.2.8: Tolva con  $\alpha = 50^\circ$ . Distribución de la tensión vertical  $\sigma_{22}$ . a)  $t = 0,07$ ; b)  $t = 0,32$  y c)  $t = 0,72$  desde inicio del vaciado

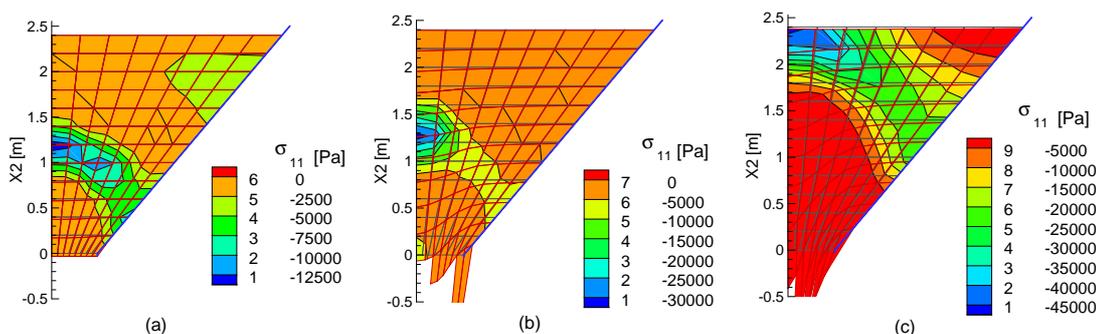


Figura 8.2.9: Tolva con  $\alpha = 50^\circ$ . Distribución de la tensión horizontal  $\sigma_{11}$ . a)  $t = 0,07$ ; b)  $t = 0,32$  y c)  $t = 0,72$  desde inicio del vaciado

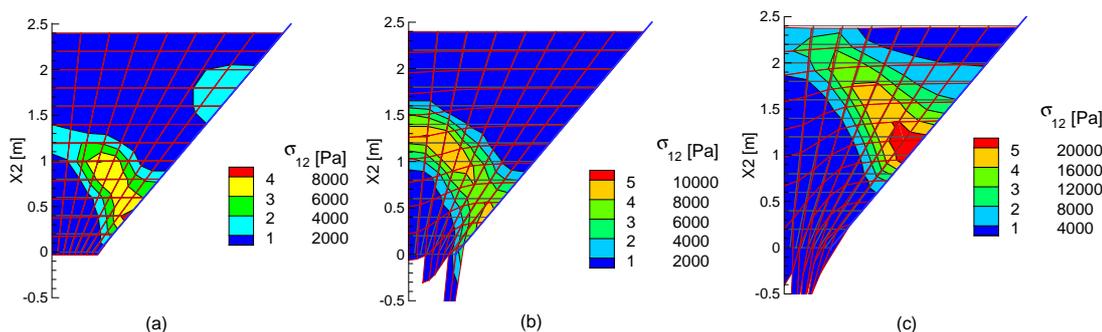


Figura 8.2.10: Tolva con  $\alpha = 50^\circ$ . Distribución de la tensión de corte  $\sigma_{12}$ . a)  $t = 0,07$ ; b)  $t = 0,32$  y c)  $t = 0,72$  desde inicio del vaciado

En la Figura [8.2.8] se muestran las distribuciones de la tensión vertical  $\sigma_{22}$  en el material granular, la distribución de la tensión horizontal  $\sigma_{11}$  se muestran en la Figura [8.2.9] y en la Figura [8.2.10] se presentan las distribuciones de la tensión de corte  $\sigma_{12}$ . En las tres figuras las distribuciones son las obtenidas durante la simulación del vaciado para los tiempos  $t = 0,07$ ,  $t = 0,32$  y  $t = 0,72$ .

A diferencia de lo que se obtuvo para la tolva con  $\alpha = 75^\circ$ , en esta tolva se obtienen una

o dos zonas de concentración de tensiones  $\sigma_{22}$  sobre la pared y el valor de las mismas aumenta con el tiempo hasta la finalización de la simulación. En los tres tiempos se observa un núcleo de compresión de  $\sigma_{11}$  sobre el eje de simetría que se desplaza desde  $X_2 = 1,20m$  en la distribución (a) y asciende por el eje  $X_2$  hasta alcanzar la superficie libre superior del material y aumentando simultáneamente la magnitud de los valores de tensión. En este caso aparece una concentración de tensiones de corte sobre la pared de la tolva que se desplaza ascendiendo por la pared con el transcurso del tiempo y aumentando su magnitud. La combinación de las tres componentes de tensiones indican la presencia de un “arco” de material comprimido y por lo tanto mas rígido. Este arco de material mas rígido puede ocasionar que el material comprendido en él como por encima del mismo no salga de la tolva.

Al observar en conjunto las distribuciones de tensiones y las mallas indeformada y deformadas superpuestas es evidente que el material por debajo de la zona del arco se mueve hacia la salida mientras que el material dentro y por encima del mismo permanece prácticamente inmóvil. La deformación de la malla para  $t = 0,72$  permitiría delinear la posición aproximada del canal de flujo dentro del material, que puede aproximarse como una semi elipse con sus semi ejes coincidentes con las direcciones de los ejes de referencia  $X_1$  y  $X_2$ . El semi eje vertical de la elipse aumenta con el transcurso del tiempo  $t$ .

La distribución de la presión de contacto sobre la pared, para distintos tiempos de vaciado, se presentan en la Figura [8.2.11] junto con la distribución de la presión de contacto al finalizar el llenado incluida como referencia.

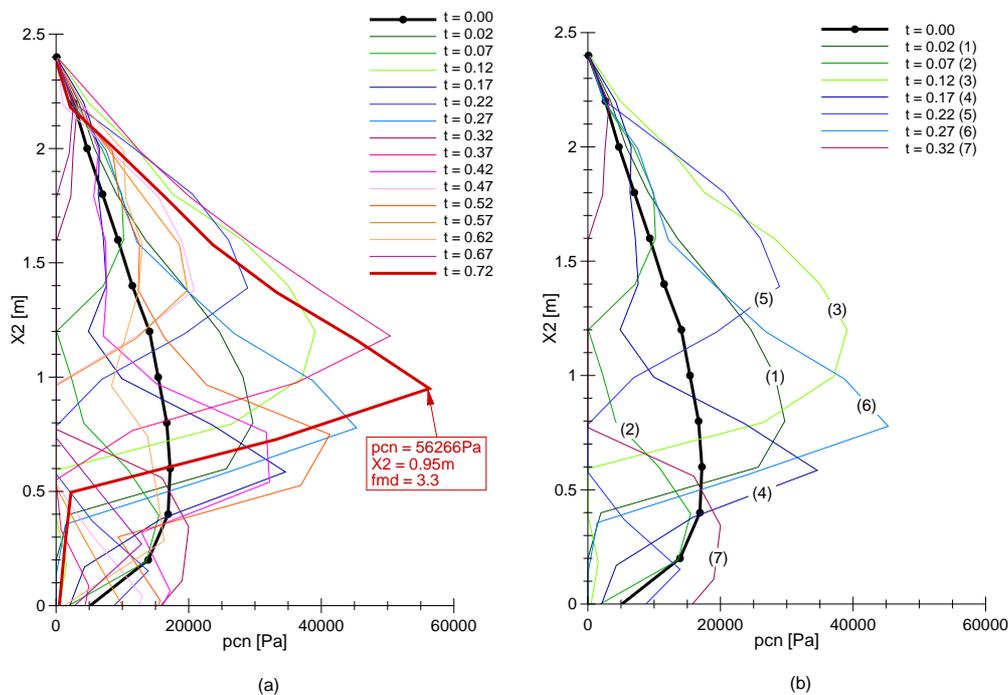


Figura 8.2.11: Tolva con  $\alpha = 50^\circ$ . Distribuciones de la presión de contacto para diferentes tiempos de vaciado

En la Figura [8.2.11 b)] se presentan solo las primeras siete distribuciones obtenidas durante

el vaciado y la distribución de referencia con el fin de observar con mayor claridad que sucede al iniciarse el proceso de vaciado. Al abrir la compuerta de salida el material que se encontraba inmediatamente por encima de la compuerta se descomprime y dilata volumetricamente disminuyendo la presión de contacto en el sexto inferior de la pared (curva (1)). Cuando el material comienza a descender se comprime por encontrar un espacio mas estrecho lo que causa que aumente la presión de contacto en el sexto inferior y disminuya en el tercio central de la altura de la tolva (curva (2)). Este ciclo se repite, observándose que el valor máximo sobre la pared disminuye para luego aumentar, en las distintas alturas, respecto de la distribución de referencia. El máximo valor de la presión de contacto al finalizar el llenado es  $p_{cn} = 17216Pa$  para  $X_2 = 0,60m$  mientras que el máximo valor obtenido durante la simulación del vaciado es  $p_{cn} = 56266Pa$  para  $X_2 = 0,95m$  en  $t = 0,72$  dando un factor de magnificación dinámico  $fmd = 3,3$  que se encuentra dentro del rango informado por diferentes autores que han desarrollado estudios experimentales.

### Tolva con $\alpha = 25^\circ$

Este caso corresponde a una tolva cónica cuya pared forma un ángulo  $\alpha = 25^\circ$  respecto de la horizontal. En la Figura [8.2.12 a) y b)] se presentan superpuestas las mallas indeformada y las correspondientes a los tiempos de vaciado  $t = 0,20$  y  $t = 0,41$ . En la Figura [8.2.12 c)] se indica la secuencia de salida de los elementos y con una “x” se indica el elemento que presentó  $|J| \leq 0$ , debido a la distorsión del mismo, dando lugar a la finalización de la simulación.

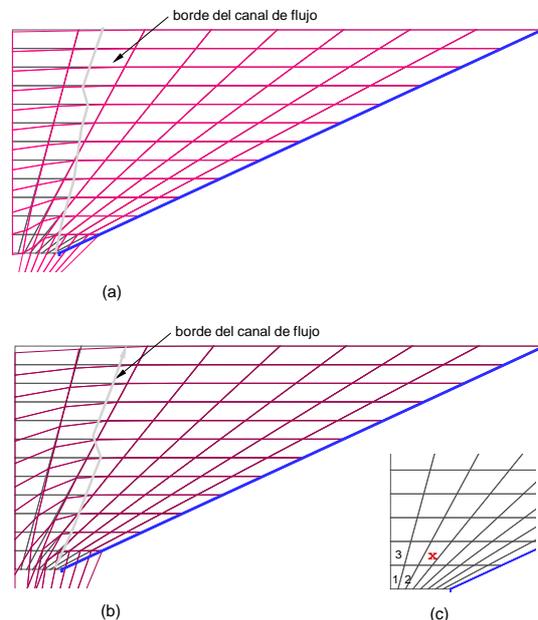


Figura 8.2.12: Tolva con  $\alpha = 25^\circ$ . a) Mallas indeformada y deformadas para  $t = 0,20$  y  $t = 0,41$ ; b) secuencia de salida

En las Figuras [8.2.12 a) y b)] además se observa que cerca de dos tercios del material se encuentra detenido luego de la apertura de la compuerta y hasta la finalización de la simulación del proceso de vaciado y que solo se mueve el material dentro del canal central de flujo. A diferencia de lo que se observó en las simulaciones de las tolvas cuyo ángulo de inclinación es  $\alpha = 50^\circ$  y  $\alpha = 75^\circ$ ,

donde todo o la mayor parte del material se ve afectado por la apertura de la compuerta. En este caso los resultados muestran un claro flujo canalizado (o en chimenea). El borde del canal se mantiene bastante estable durante la simulación de la descarga mostrando solo un leve ensanchamiento, las mallas deformadas evidencian que solo el material dentro del canal se encuentra en movimiento.

Para esta tolva las distribuciones de las tensiones en el material que se obtienen para sucesivos tiempos varían poco entre sí a medida que avanza el proceso. Esta es otra de las diferencias con las tolvas con mayor ángulo de inclinación. La distribución de la tensión vertical  $\sigma_{22}$  se muestra en la Figura [8.2.13] para los tiempos  $t = 0,20$  y a  $t = 0,41$  desde el inicio del vaciado, y se han superpuesto las mallas indeformada y deformada correspondientes en cada gráfico. Al comparar la distribución de la tensión con la deformación de la malla se pone en evidencia que la isolínea  $\sigma_{22} = -4000Pa$  pasa por el borde del canal de flujo. Entre la distribución para  $t = 0,20$  y para  $t = 0,41$  (final de la simulación) se mantiene la zona de concentración de tensiones sobre la pared en la cercanía de la salida, manteniendo su valor y disminuyendo el tamaño de la zona donde se produce la concentración de la tensión. También puede observarse la variación de la isolínea  $\sigma_{22} = -2000Pa$  dentro del canal de flujo, la cual presenta una "burbuja" sobre el eje de simetría centrada en  $X_2 = 1,00m$  que varía levemente su tamaño, alternadamente se presenta otra "burbuja" más que se produce a una coordenada  $X_2 > 1,00m$ . Ambas "burbujas" se encuentran limitadas por la isolínea  $\sigma_{22} = -4000Pa$ , y muestran la alternancia de disminución y aumento de la tensión que acompaña a la expansión o contracción de volumen del material en movimiento.

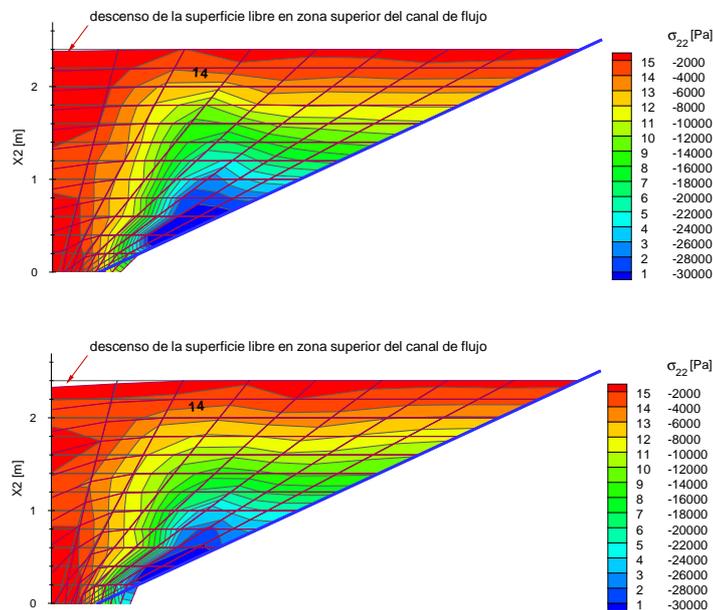


Figura 8.2.13: Tolva con  $\alpha = 25^\circ$ . Distribuciones de la tensión vertical  $\sigma_{22}$  para  $t = 0,20$  y  $t = 0,41$  de iniciado el vaciado para la tolva con  $\alpha = 25^\circ$

En la Figura [8.2.14] se observan las distribuciones de la tensión horizontal  $\sigma_{11}$  en el material que se obtienen para  $t = 0,20$  y a  $t = 0,41$  desde el inicio del vaciado. En concordancia con la distribución de la tensión  $\sigma_{22}$  la zona de concentración de tensiones sobre la pared se mantiene estable y las mayores variaciones de la distribución se dan en la zona del canal de flujo. La distribución de la

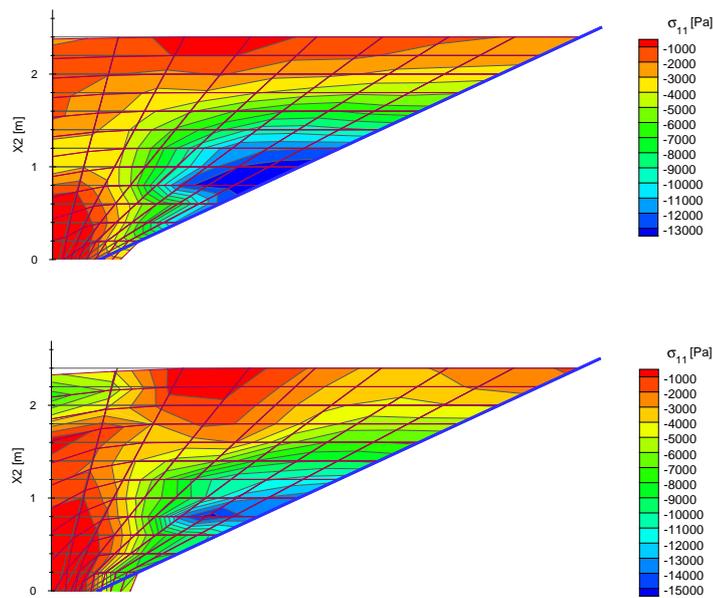


Figura 8.2.14: Tolva con  $\alpha = 25^\circ$ . Distribución de la tensión horizontal  $\sigma_{11}$  para  $t = 0,20$  y  $t = 0,41$  del vaciado

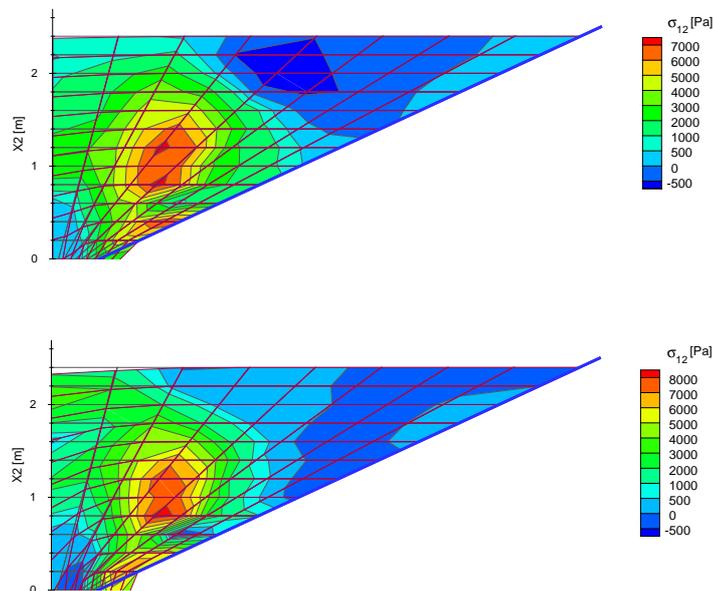


Figura 8.2.15: Tolva con  $\alpha = 25^\circ$ . Tensión de corte  $\sigma_{12}$  en el material para  $t = 0,20$  y  $t = 0,41$  de descarga

tensión  $\sigma_{11}$  muestra la tendencia del material a la formación de un “arco” que se ubica por encima de las “burbujas” de menor tensión vertical. También se observa una zona de baja tensión sobre el eje de simetría e inmediatamente por encima del borde de salida.

Una zona de alta tensión de corte  $\sigma_{12}$  se observa en el material detenido en la cercanía del borde del canal de flujo en la Figura [8.2.15]. En esta figura se observa una disminución del valor de la

tensión de corte en la parte superior de la pared de la distribución para  $t = 0,41$  respecto de la distribución para  $t = 0,20$ . Los mayores cambios de la distribución se dan en la zona del canal de flujo, al igual que para las otras dos componentes de tensión.

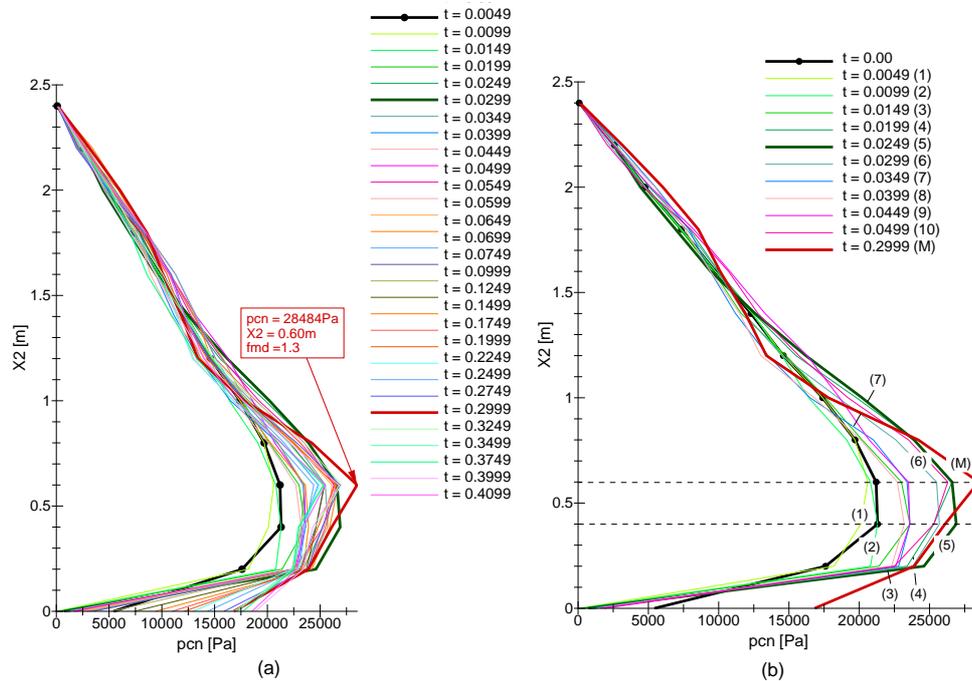


Figura 8.2.16: Tolva con  $\alpha = 25^\circ$ . Distribuciones de la presión de contacto para diferentes tiempos de vaciado

Las distribuciones de la presión normal de contacto  $p_{cn}$  sobre la pared de la tolva se presentan en la Figura [8.2.16]. Los mayores cambios en la magnitud de la presión de contacto aparecen en los dos quintos inferiores de la tolva. Los cambios en  $p_{cn}$  son mínimos en la parte superior de la pared de la tolva y oscilan en un entorno cercano a la distribución al final de la etapa de llenado ( $t = 0,00$ ) que se ha incluido con fines comparativos. Otra particularidad es que los valores máximos se ubican dentro de una franja limitada por  $X_2 = 0,4$  y  $X_2 = 0,6$  y la relación entre el máximo valor durante la descarga  $p_{cn} = 28484 Pa$  para  $X_2 = 0,39m$  y el máximo del final de llenado  $p_{cn} = 21330 Pa$  para  $X_2 = 0,60m$  es  $fmd = 1,3$  bastante bajo. A diferencia de lo que se obtuvo para las otras tolvas, las distribuciones de la presión normal sobre la pared se ubican dentro de una franja cercana a la distribución obtenida al finalizar el llenado.

En la Figura [8.2.16 b)] se muestran la distribución de presión normal al final del llenado, la distribución que contiene al máximo detectado durante la simulación del vaciado y las primeras diez distribuciones del inicio del vaciado. Al abrirse la compuerta de descarga la presión de contacto disminuye el tercio inferior (1) de la pared para aumentar su valor lentamente hasta la distribución (5) luego disminuye (7) aumentando nuevamente. Este ciclo se repite hasta el final de la simulación del vaciado.

Para esta tolva se ha obtenido el mínimo valor de  $fmd$  respecto de los valores que adopta este cociente para las otras dos tolvas. Esto podría interpretarse considerando que el material detenido amortigua las sobre presiones durante el vaciado.

## Comparación de las presiones normales de contacto en las tres tolvas

En la Figura[8.2.17 a)] se comparan las distribuciones de las presiones de contacto obtenidas en las simulaciones de las tres tolvas al final de la simulación del proceso de llenado y en la Figura[8.2.17 b)] se comparan las respectivas distribuciones de las envolventes de presión de contacto normal obtenidas durante la simulación del proceso de vaciado. La envolvente de máximas presiones de contacto durante el vaciado actuantes sobre la pared, se componen del máximo valor de presión de contacto registrado para cada valor de la coordenada  $X_2$  , por lo cual los puntos corresponden a diferentes tiempos.

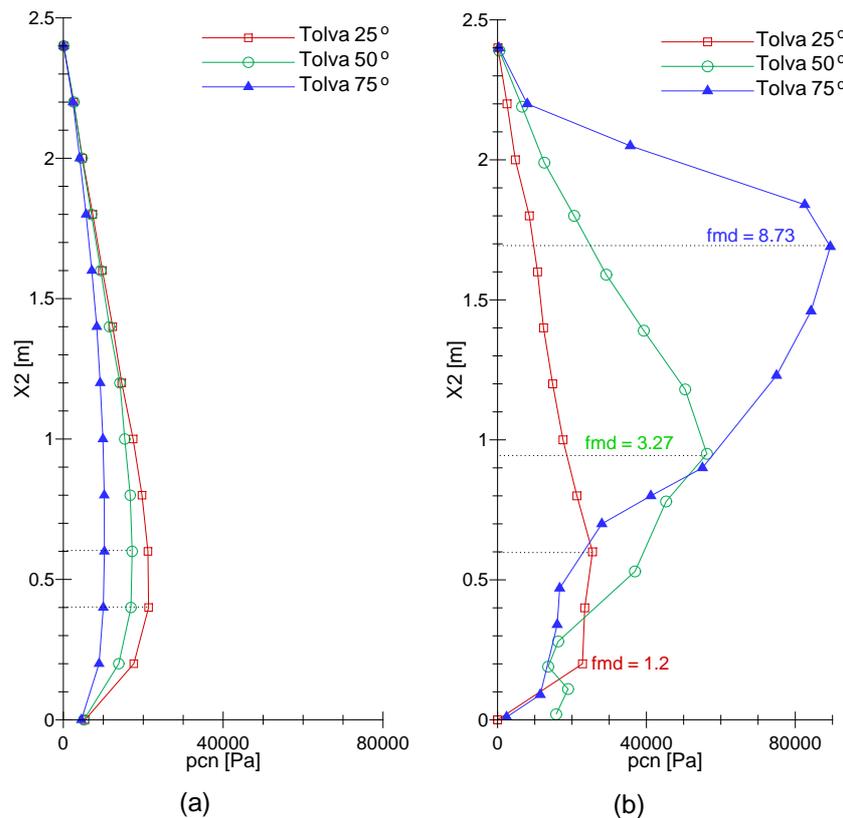


Figura 8.2.17: Distribuciones de la presión normal de contacto en tolvas: a) al finalizar el llenado; b) envolventes de vaciado

Al comparar los resultados presentados en los gráficos de la Figura[8.2.17] se observa que para la tolva de flujo másico ( $\alpha = 75^\circ$ ) el valor máximo al final del llenado es  $p_{cn} = 10238 Pa$  para  $X_2 = 0,80m$  y el valor máximo de la envolvente de la etapa de vaciado es  $p_{cn} = 8949 Pa$  para  $X_2 = 1,69m$  siendo el cociente de ambos máximos  $fmd = 8,73$  el más elevado de los tres casos. Para la tolva que presenta un flujo inestable, que no corresponde a un flujo másico ni a un flujo canalizado netos, ( $\alpha = 50^\circ$ ) el valor máximo de la presión normal de contacto al finalizar el llenado es  $p_{cn} = 17216 Pa$  para  $X_2 = 0,60m$  y el máximo valor de la envolvente de vaciado es  $p_{cn} = 56266 Pa$  para  $X_2 = 0,95m$  siendo el cociente de ambos máximos  $fmd = 3,27$ . Para la tolva de flujo canalizado, o en chimenea, ( $\alpha = 25^\circ$ ) el máximo valor de la presión normal de contacto al finalizar el vaciado es  $p_{cn} = 21330 Pa$  para  $X_2 = 0,40m$  y el máximo valor obtenido en la envolvente de presiones normales de contacto durante la simulación del vaciado es  $p_{cn} = 28484 Pa$  para  $X_2 = 0,60m$  dando el cociente entre

ambos máximos  $fmd = 1,30$  el mínimo valor de los tres casos.

Al comparar las tres curvas de distribución de  $p_{cn}$  al finalizar el llenado se observa que a medida que disminuye el ángulo de inclinación de la pared respecto de la horizontal aumentan los valores de las presiones de contacto poniendo en evidencia que la proporción del peso del material que es soportado por la pared aumenta lo cual parecería razonable pues la componente del peso normal a la pared aumenta al disminuir el ángulo de inclinación.

Durante el vaciado ocurre lo contrario, para la tolva de flujo másico se obtiene el mayor incremento de las presiones de contacto y las otras dos tolvas disminuyen los valores y también disminuye el valor del cociente entre  $(p_{cn})_{MAX}$  de vaciado respecto del correspondiente valor al final del llenado. Además la posición donde se detectan la ocurrencia de los máximos de vaciado (coordenada  $X_2$ ) es menor a medida que disminuye el ángulo  $\alpha$  de las tolvas.

La máxima relación para la tolva de flujo másico puede relacionarse con los cambios abruptos que sufre el material que primero se descomprime y expande volumétricamente y al descender se contrae volumétricamente y se comprime afectando marcadamente la presión de contacto en la pared. En el otro extremo, para la tolva con flujo en chimenea, el material comprendido entre el canal de flujo y la pared tiene un efecto amortiguador en el desarrollo de las presiones de contacto en la pared las cuales no sufren sustanciales variaciones. También se observa que al disminuir el ángulo de la tolva la posición donde se presenta el máximo valor de la presión de contacto desciende, siendo próxima a la salida para la tolva con  $\alpha = 25^\circ$  y cercana a la superficie libre superior para la tolva con  $\alpha = 75^\circ$ . El comportamiento de las tres tolvas durante el vaciado concuerda con el comportamiento descrito por diferentes investigadores experimentales como [Kaminski and Hamadeh, 1994].

### 8.3. Conclusiones

En la simulación del vaciado de la tolva cuyo ángulo respecto de la horizontal es  $\alpha = 75^\circ$  los resultados muestran que se produce un vaciado de tipo másico es decir todo el material dentro de la tolva inicia el movimiento hacia la salida a partir de la apertura de la compuerta.

En las tolvas con menor ángulo de inclinación de la pared respecto de la horizontal, no todo el material inicia su movimiento hacia la salida al abrirse la compuerta de salida. En estos casos la metodología permite detectar las zonas donde el material presenta movimiento rápido, lento y las zonas donde el material granular permanece detenido. Pueden definirse tres de las cinco zonas de movimiento de grano establecidas por Brown y Hawksley y la posición cualitativa de los elipsoides que limitan las zonas con diferente movimiento establecidas por Kvapil. A partir de la deformación de la malla es posible delinear la posición aproximada del canal de flujo que se establece en el material granular.

El comportamiento del material de las tres tolvas durante las simulaciones de vaciado concuerda cualitativamente con el comportamiento descrito por diferentes investigadores experimentales como [Kaminski and Hamadeh, 1994].

Las simulaciones evidencian la importancia de la fricción entre el material granular y la pared que se refleja en el cambio de forma de las superficies libres superior e inferior del material granular y en la secuencia de salida de los elementos de grano. La fricción estática y cinética son importantes

durante el vaciado debido a la influencia que tienen tanto en las distribuciones de tensiones en el material granular como en las presiones de contacto y el tipo de flujo.

La mayoría de las simulaciones terminan debido a que el algoritmo detecta que el determinante jacobiano de algún elemento tiene valor nulo o negativo causado por la excesiva distorsión del elemento.

La metodología utilizada permite detectar concentraciones de tensiones y formación de arcos de compresión dentro del material granular que se producen durante el proceso de vaciado.

Las distribuciones de la presión normal de contacto varían al avanzar la descarga. La variación indica que se genera primero una onda de descompresión que se inicia en el material en contacto con la compuerta de descarga y viaja hacia arriba a medida que el material se expande. Luego el material desliza, por ser más estrecha la tolva se comprime dando lugar al inicio de una onda de compresión que también viaja desde abajo hacia arriba. El proceso se repite hasta la finalización de la simulación, causando tanto cambios en la forma de la distribución de la presión de contacto como en la posición y valor de los picos. Los resultados de las simulaciones de vaciado indican que los valores máximos de la presión normal de contacto no se producen inmediatamente después de la apertura de la compuerta de descarga.

Al comparar las distribuciones de la presión de contacto al finalizar el llenado, se observa que la posición del máximo se presenta en los tres casos a la misma coordenada  $X_2$  y a medida que disminuye el ángulo de inclinación de la pared respecto de la horizontal aumentan los valores de las presiones de contacto poniendo en evidencia que la proporción del peso del material que es soportado por la pared aumenta al disminuir el ángulo de inclinación de la pared de la tolva respecto de la horizontal. Por el contrario, cuando se comparan las envolventes de la presión normal de contacto durante el vaciado la posición del mayor valor depende del ángulo de inclinación de la tolva. Para la tolva con el mayor ángulo de inclinación de la pared la posición del máximo valor de la presión normal de contacto durante el vaciado se ubica cerca del borde superior de la tolva y desciende a medida que el ángulo de inclinación es menor. La ubicación de los máximos de vaciado en relación con el ángulo de la tolva coincide cualitativamente con el comportamiento informado por los investigadores que realizan mediciones de presiones de contacto.

El factor de magnificación dinámica que se obtiene para las tres tolvas analizadas depende del ángulo de inclinación de la pared de la tolva. Para la tolva con mayor ángulo se obtiene el mayor de los factores de magnificación, que puede relacionarse con los cambios abruptos que sufre el material. Para la tolva con flujo en chimenea, menor ángulo de inclinación de la pared, el material comprendido entre el canal de flujo y la pared tiene un efecto amortiguador en el desarrollo de las presiones de contacto sobre la pared las cuales no sufren sustanciales variaciones. En el caso de la tolva con mayor ángulo de inclinación de la pared el valor del factor de magnificación obtenido con las simulaciones esta fuera del rango informado por los experimentalistas que reportan relaciones  $2 \leq fmd \leq 5$ .

Los resultados muestran que la relación constitutiva implementada logra capturar los rasgos mas importantes del comportamiento del grano durante las simulaciones de vaciado.



# Capítulo 9

## Vaciado de silos

### 9.1. Introducción

El proceso de vaciado de un silo tanto desde el punto de vista de los fenómenos físicos como de los aspectos del modelo son idénticos a los descritos en el Capítulo 8 para las tolvas. En un silo el comportamiento durante el vaciado no solo depende del material dentro de la tolva sino también del material dentro del depósito ubicado sobre ésta.

El proceso de vaciado de un silo, al igual que en las tolvas, es un proceso dinámico con un periodo transitorio cuya duración depende de las características del material granular almacenado, de la rugosidad de las paredes y de la geometría de la estructura. El tipo de régimen de vaciado que puede ser, másico, canalizado o mixto. El tipo de flujo también depende de las características del material granular y de la estructura.

En el caso de un silo con flujo másico todo el material almacenado inicia su movimiento descendente cuando se abre la compuerta de descarga y presenta un régimen de flujo estable con una etapa transitoria de corta duración. Los silos que presentan flujo canalizado o mixto no siempre alcanzan a tener un régimen de descarga, en muchos casos el flujo es errático y depende de la altura de material dentro del depósito y de la interacción entre el material que se encuentra en las denominadas zonas muertas y el material que se encuentra en la chimenea donde se produce el flujo.

En silos muy esbeltos se producen temblores en la estructura producidos por la descompresión y recompresión del material que provoca que las presiones normales de contacto entre el material granular y la pared tengan súbitas e importantes variaciones acompañadas por los consecuentes cambios en la presión tangencial.

Al igual que en el Capítulo 8 el estado de tensiones y de deformaciones del material para iniciar el vaciado de un silo corresponde al que se obtuvo al final de la etapa de llenado progresivo. Para la etapa de vaciado se elimina el amortiguamiento viscoso del material granular y la apertura de la compuerta de descarga se simula eliminando la condición de contacto mecánico entre el material granular y la compuerta. La condición de contacto mecánico durante el vaciado con las restantes partes de la estructura son las mismas utilizadas en la etapa de llenado.

Durante el proceso de vaciado es posible que el material se halla expandido volumétricamente

tanto que los granos pierden contacto entre sí aun estando dentro del contenedor, obteniéndose el denominado estado disgregado como en Capítulo 8.

Cuando simultáneamente se cumple que el material está en estado disgregado y que geométricamente se encuentra fuera del silo se considera que el material salió.

La simulación de la etapa de vaciado puede terminar cuando se cumple una de las siguientes condiciones: el silo se ha vaciado, se alcanzó el tiempo máximo prefijado o cuando el determinante jacobiano de alguno de los elementos es menor o igual a cero (mismas situaciones descritas en el Capítulo 8).

## 9.2. Vaciado de un silo simétrico con tolva

Se modela el vaciado del silo experimental cuya geometría y características del material son los mismos que se utilizaron para la simulación de llenado en la sección 7.3.3. Las simulaciones de vaciado de dicho silo se realizaron para las dos mallas con las que se simuló el llenado distribuido, una con elementos uniformemente distribuidos en el ancho y otra donde los elementos en la zona cercana a la pared y al plano de unión de la tolva y el depósito tienen menor tamaño, y una malla con la que se simuló el llenado concéntrico. Al igual que en las simulaciones del vaciado de las tolvas, la condición inicial para el inicio del vaciado es la obtenida al final del proceso de llenado. En los tres casos se considera la estructura como infinitamente rígida en concordancia con la suposición hecha en el proceso de llenado.

También se simuló el llenado y el vaciado del silo utilizando para el grano la malla con elementos uniformes pero considerando que la estructura es flexible. Para la discretización de la estructura se utilizaron elementos de lámina, que permiten simular estados de deformación plana o axilsimétricos, de dos nodos disponibles en el programa SIMPACT. Con la incorporación de la flexibilidad de la estructura en el modelo se busca explorar la magnitud de la influencia en el comportamiento del material granular y el consecuente efecto sobre las distribuciones de tensiones y de las presiones de contacto.

### 9.2.1. Vaciado correspondiente al llenado distribuido utilizando una malla uniforme y estructura rígida

La simulación del vaciado del silo termina por ser  $|J| \leq 0$  en el elemento 124 de la capa 25, tal como sucedió en la simulación del vaciado de las tolvas. De las primeras 11 capas sale primero el elemento que tiene uno de sus lados sobre el eje de simetría y luego los restantes de la capa hasta llegar al elemento que tiene uno de sus lados en contacto con la pared. La secuencia de salida cambia para las capas a partir de la 12, que coincide con la formación de los primeros arcos de tensiones en el material granular. Para las capas 12 a 24 sale primero el elemento junto al eje de simetría luego los tres siguientes de la capa, sale el elemento junto al eje de la capa siguiente y luego el elemento en contacto con la pared. A causa de la fricción los elementos que deslizan sobre la pared de la tolva llegan con bastante distorsión a la abertura de salida, distorsión que aumenta con el número de la capa a la cual pertenece el elemento (las capas se numeran según su orden de ingreso al silo). Esto es similar a lo que ocurrió durante el vaciado de la tolva con  $\alpha = 75^\circ$ .

Durante la simulación del vaciado salen 24 capas y los dos elementos más cercanos al eje de simetría de la capa 25. Estas 24 capas llenaron el 40 % inferior de la tolva ( $0,49m$ ) y la superficie libre superior baja  $0,30m$  manteniéndose horizontal hasta la finalización de la simulación. Podría interpretarse que el flujo dentro del depósito es uniforme ya que tanto la superficie libre como la geometría de las capas dentro del depósito permanecen prácticamente horizontales al avanzar la descarga, cosa que no ocurre cuando el material entra en la tolva ya que las capas van adquiriendo una forma parabólica con su ápice sobre el eje de simetría a medida que descienden.

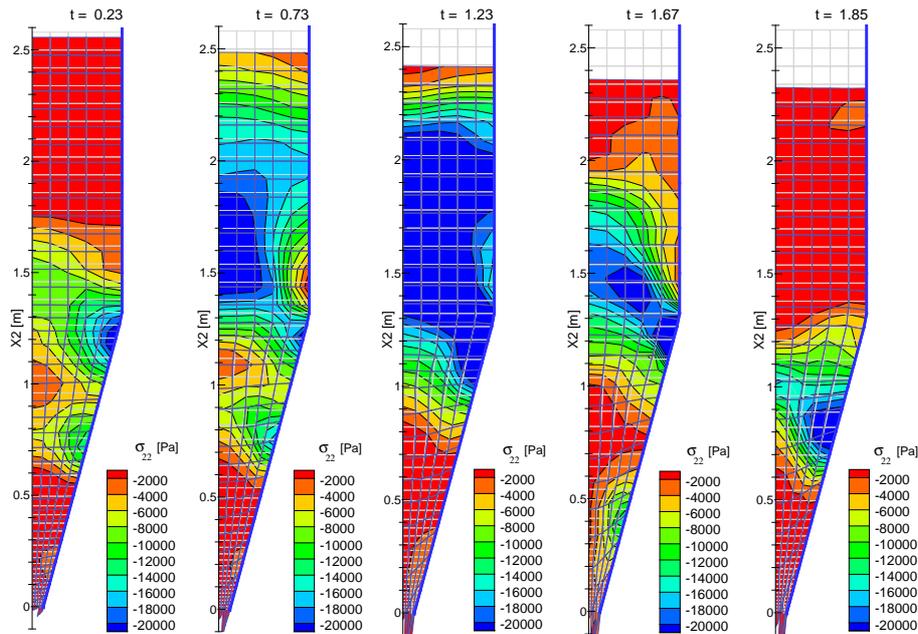


Figura 9.2.1: Tensiones verticales en el grano para diferentes tiempos de vaciado utilizando malla uniforme para el silo simétrico y estructura rígida.

Las distribuciones de las tensiones en el grano para  $t = 0,23$ ,  $t = 0,73$ ,  $t = 1,23$ ,  $t = 1,67$  y  $t = 1,85$  desde el inicio de la simulación del vaciado se presentan para  $\sigma_{22}$  en la Figura [9.2.1], para  $\sigma_{11}$  en la Figura [9.2.2] y para  $\sigma_{12}$  en la Figura [9.2.3].

En la Figura [9.2.1] pueden observarse tres concentraciones de  $\sigma_{22}$  sobre la pared de la tolva a  $X_2 = 0,20m$  a  $X_2 = 0,70m$  y en la transición entre la tolva y el depósito a  $X_2 = 1,25m$ . El material que se encuentra en el tercio inferior de la tolva y en los dos tercios superiores del depósito presentan muy bajas tensiones verticales. También puede observarse que todo el material dentro del silo se encuentra en movimiento, evidenciado por el descenso de la superficie libre del material en el depósito. En la distribución en  $t = 0,73$  se mantienen las tres zonas de concentración de tensiones en la tolva y surge una zona de baja tensión sobre la pared del depósito a  $X_2 = 1,50m$  junto con una “burbuja” de alta tensión sobre el eje de simetría en la mitad inferior del depósito. La burbuja de alta tensión expande su tamaño a casi todo el depósito y la zona superior de la tolva sobre la pared para  $t = 1,23$ , mientras la zona de bajas tensiones en la tolva ha ascendido a casi los dos tercios. Para  $t = 1,67$  se observa un arco de altas tensiones  $\sigma_{22}$  que se inicia en la zona de transición tolva - depósito y alcanza el eje de simetría a  $X_2 = 1,50m$  y una concentración de tensiones sobre la pared de la tolva entre  $X_2 = 0,30m$  y  $X_2 = 0,50m$ . Para  $t = 1,85$ , final de la simulación, casi todo

el material dentro del depósito presenta una tensión baja y se presenta un arco de altas tensiones que se inicia en la pared de la tolva a  $X_2 = 0,80m$  y alcanza el eje de simetría a  $X_2 = 1,00m$ .

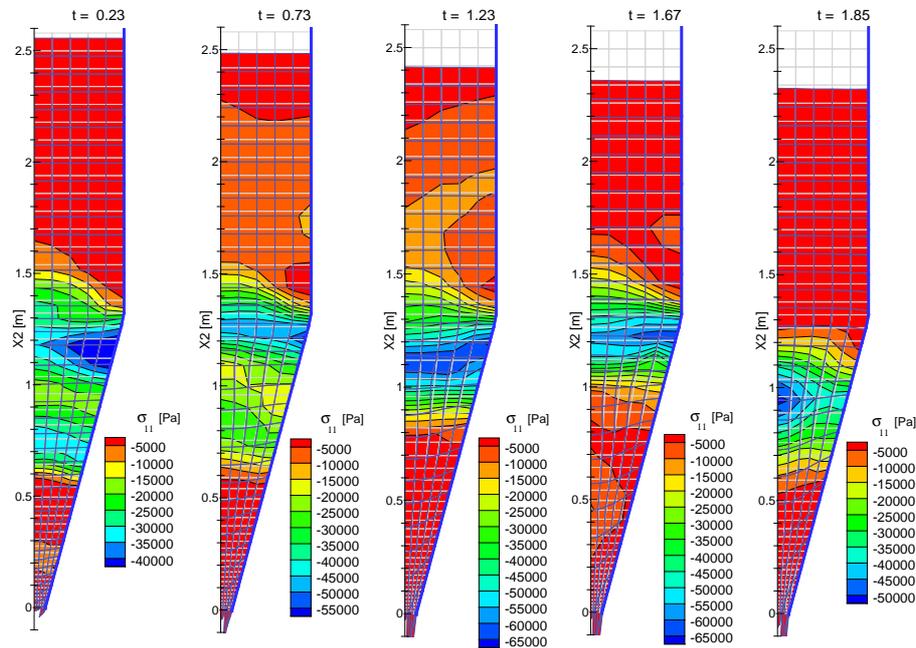


Figura 9.2.2: Tensiones horizontales en el grano para diferentes tiempos de vaciado utilizando malla uniforme para el silo simétrico y estructura rígida.

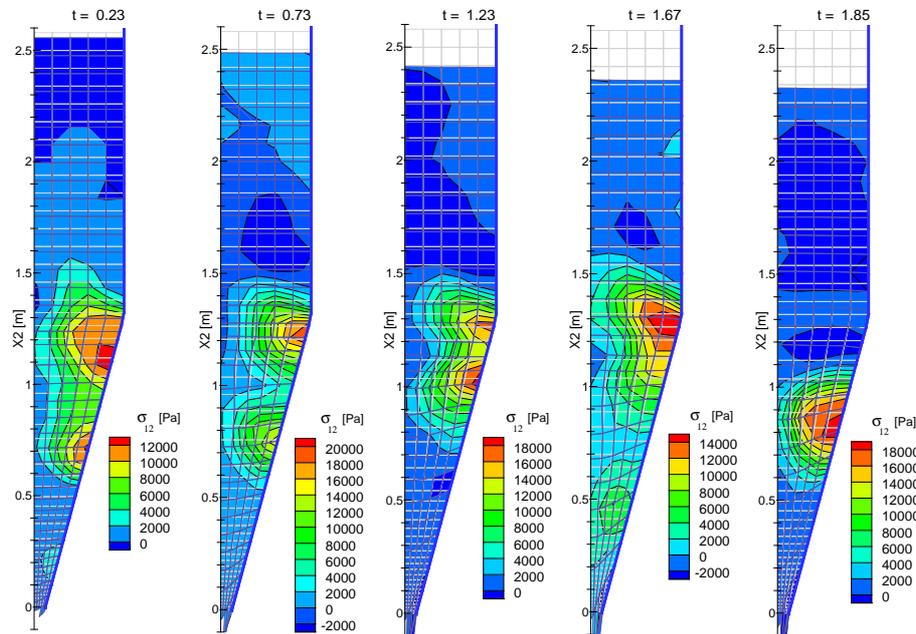


Figura 9.2.3: Tensiones de corte en el grano para diferentes tiempos de vaciado utilizando malla uniforme para el silo simétrico y estructura rígida.

En la Figura [9.2.2] para  $t = 0,23$  puede apreciarse con claridad la formación de dos arcos de compresión dentro de la tolva, uno a la mitad de la altura de la tolva y el otro en la transición entre la tolva y el depósito con tensiones  $\sigma_{11}$  elevadas, mientras el tercero cercano a la salida presenta tensiones muy bajas. Las posiciones de los arcos son concordantes con las observadas en

los diagramas de la tensión vertical.

Las posiciones de las concentraciones de la tensión  $\sigma_{12}$  en la Figura [9.2.3] concuerdan con las posiciones de las concentraciones de tensión horizontal de compresión correspondiente de la Figura [9.2.2]. Los máximos valores de la tensión de corte se presentan para  $t = 0,73$  y luego disminuye levemente el valor máximo pero de forma importante la zona de tensiones de corte más elevadas.

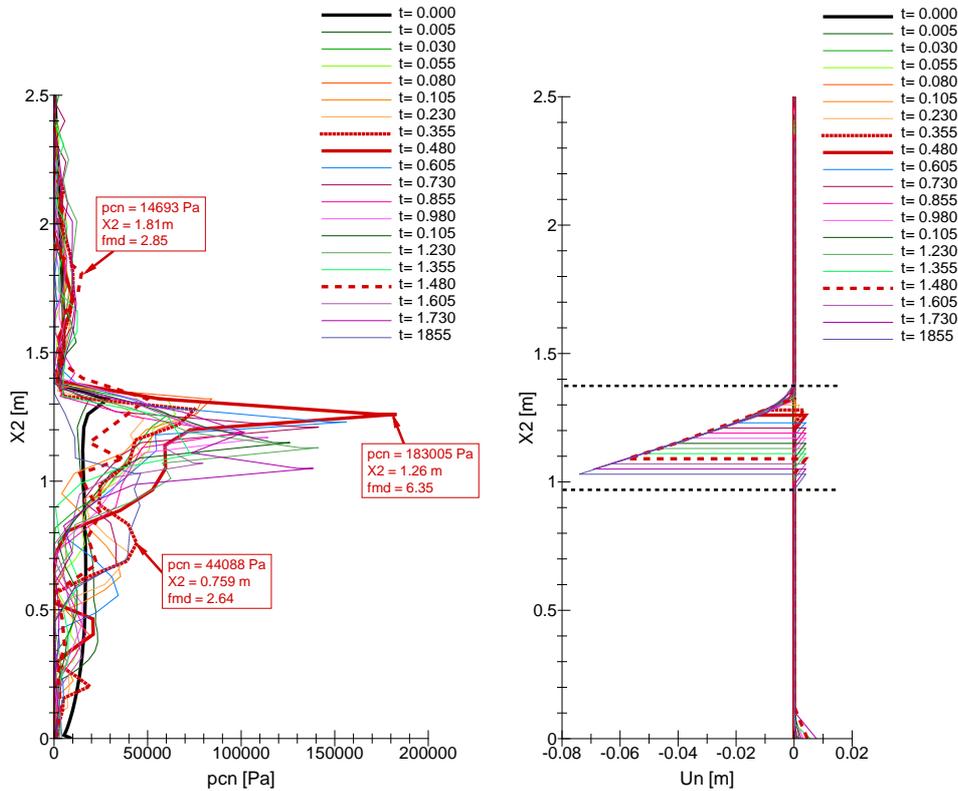


Figura 9.2.4: Distribuciones de la presión normal de contacto para distintos tiempos desde el inicio del vaciado utilizando malla uniforme en el silo simétrico y estructura rígida.

En la Figura [9.2.4] se presentan las distribuciones de la presión normal de contacto sobre la pared del silo para distintos tiempos de vaciado, incluyendo también la distribución que se obtuvo al finalizar la simulación del llenado progresivo como referencia. Los valores más elevados de la presión de contacto durante el vaciado se producen en el tercio superior de la pared de la tolva, donde se obtiene el máximo valor para la presión normal de contacto que es  $p_{cn} = 183005 Pa$  a  $X_2 = 1,26m$  en el tiempo  $t = 0,48$  desde el inicio del vaciado dando un  $fmd = 6,35$ . A la mitad de la altura de la tolva y a la mitad de la altura del depósito se obtuvieron dos picos con  $2,5 < fmd < 3,0$ . Las distribuciones de la presión de contacto presentan fuertes cambios tanto en la forma como en los valores para los distintos tiempos de vaciado. El valor  $fmd = 6,35$  es muy elevado, en comparación con los valores informados por distintos grupos de investigación experimentales, mientras los valores de  $fmd$  que se obtuvieron en el depósito y en la tolva están dentro del rango. Este comportamiento es análogo a lo que se obtuvo para la tolva con  $\alpha = 75^\circ$  pero cabe la posibilidad, en este caso, que el valor máximo de la presión de contacto en la transición se pueda atribuir en parte a la discretización utilizada. Si fuera este el caso, para la malla con mayor discretización en la zona de

la transición tolva - depósito debería obtenerse un  $fmd$  menor.

### 9.2.2. Vaciado correspondiente al llenado distribuido utilizando una malla no uniforme con transición depósito - tolva suavizada y estructura rígida.

La malla de elementos de grano tiene elementos más angostos cerca de la pared en toda la altura y capas más delgadas en la zona de transición tolva - depósito que permiten discretizar la geometría de la unión con una curva suave, un detalle de esta zona puede observarse en la Figura [9.2.5].

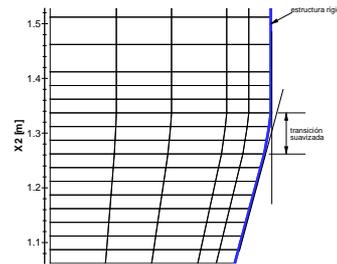


Figura 9.2.5: Detalle del suavizado de la malla en la transición tolva - depósito

Para esta malla, la finalización de la simulación del vaciado es causada por ser  $|J| \leq 0$  en el elemento 83 de la capa 17. La secuencia de salida de los elementos de las capas 1 a 12 cambia para las capas 13 a 17. En la secuencia para las primeras capas sale primero el elemento junto al eje de simetría y en orden los siguientes de la capa incluido el que tiene contacto con la pared. Para las capas 13 a 17, sale primero el elemento junto al eje salen los tres siguientes en orden, no sale el elemento junto a la pared, sale el elemento junto al eje de simetría de la capa de arriba y luego el elemento junto a la pared. De la capa 17 salen solo los dos elementos más cercanos al eje de simetría y la simulación termina por ser el determinante jacobiano del siguiente elemento menor que cero. A diferencia con lo que sucedió con la malla anterior, el elemento con mayor distorsión no es el que desliza sobre la pared sino el elemento adyacente.

Las distribuciones de las tensiones en el grano que se obtienen con esta malla se presentan en la Figura [9.2.6] para  $\sigma_{22}$ , en la Figura [9.2.7] para  $\sigma_{11}$  y en la Figura [9.2.8] para la tensión de corte  $\sigma_{12}$ . Las distribuciones de las tres tensiones cooresponden a los tiempos  $t = 0,01$ ,  $t = 0,17$ ,  $t = 0,37$  y  $t = 0,57$  a partir del inicio de la simulación del proceso de descarga.

Comparando los resultados de la Figura [9.2.6] respecto de los obtenidos con la malla uniforme, Figura [9.2.1], la ubicación de las zonas de concentración de tensiones es similar. En este caso el valor de la tensión en la zona de la transición es  $\sigma_{22} = -28000Pa$  mientras en el caso anterior fue de  $\sigma_{22} = -20000Pa$ , al igual que lo obtenido con la malla uniforme se ubica en la parte superior de la tolva muy cerca de la transición entre la tolva y el depósito. Hacia el final de la simulación se obtienen valores de tensión vertical más elevados que los obtenidos con la malla uniforme. Con esta malla el número de capas que sale del silo es menor, esto puede deberse a que los elementos cercanos a la pared inicialmente tienen una relación de lados que hace que la distorsión que sufren se manifieste antes y el proceso termine antes respecto de lo que se obtuvo con la malla uniforme.

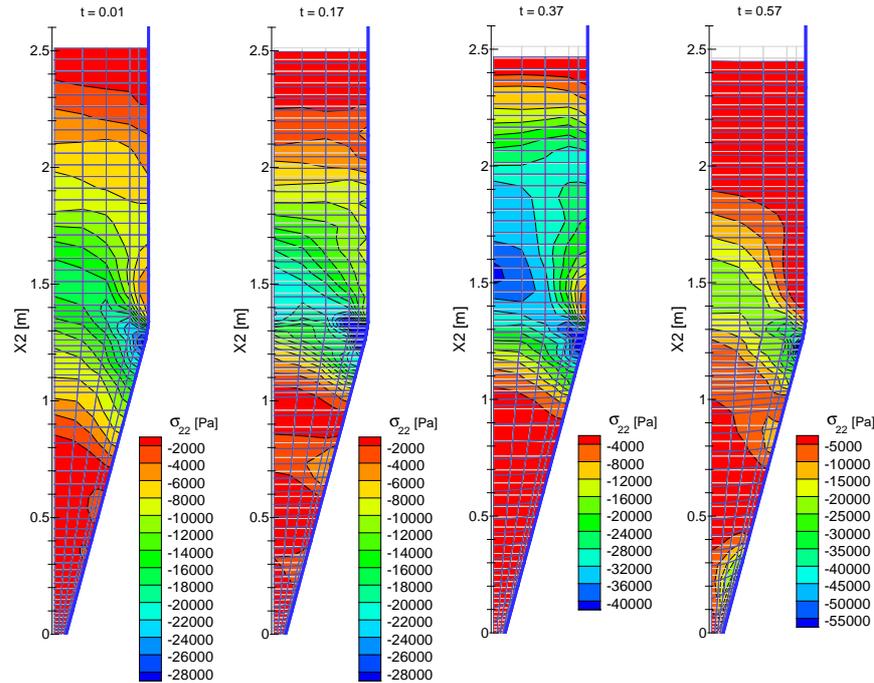


Figura 9.2.6: Tensiones verticales en el grano para distintos tiempos de iniciado el vaciado, para el silo simétrico con malla no uniforme y estructura rígida.

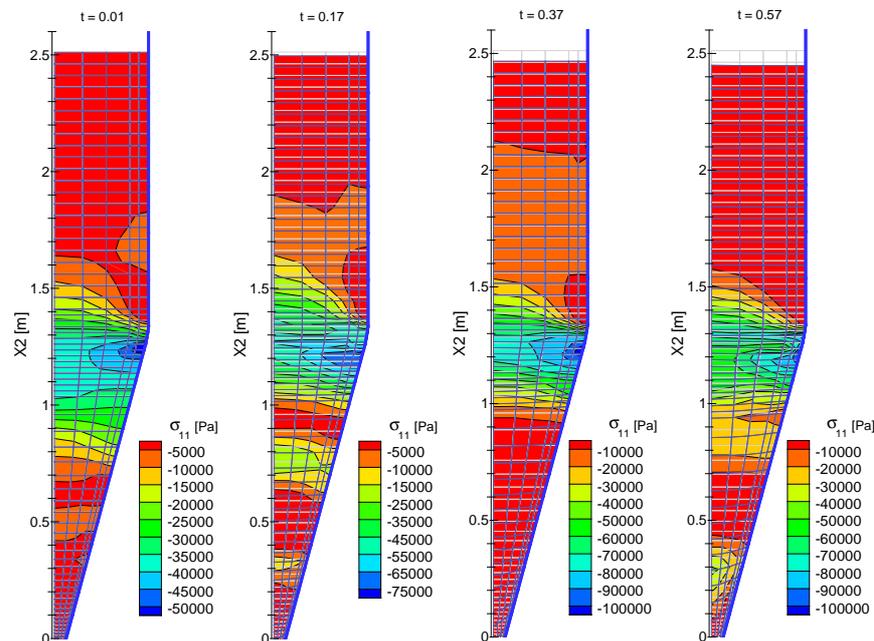


Figura 9.2.7: Tensiones horizontales en el grano para distintos tiempos de iniciado el vaciado, para el silo simétrico con malla no uniforme y estructura rígida.

Las distribuciones de la tensión horizontal  $\sigma_{11}$ , Figura [9.2.7] muestran valores absolutos del orden del doble de los obtenidos con la malla uniforme Figura [9.2.2] , manteniéndose similares las posiciones de las zonas de concentración de tensiones.

Las distribuciones de la tensión de corte, Figura [9.2.8], también presentan valores máximos

mayores a los obtenidos con la malla uniforme, manteniendo las posiciones de las zonas de concentración de tensión.

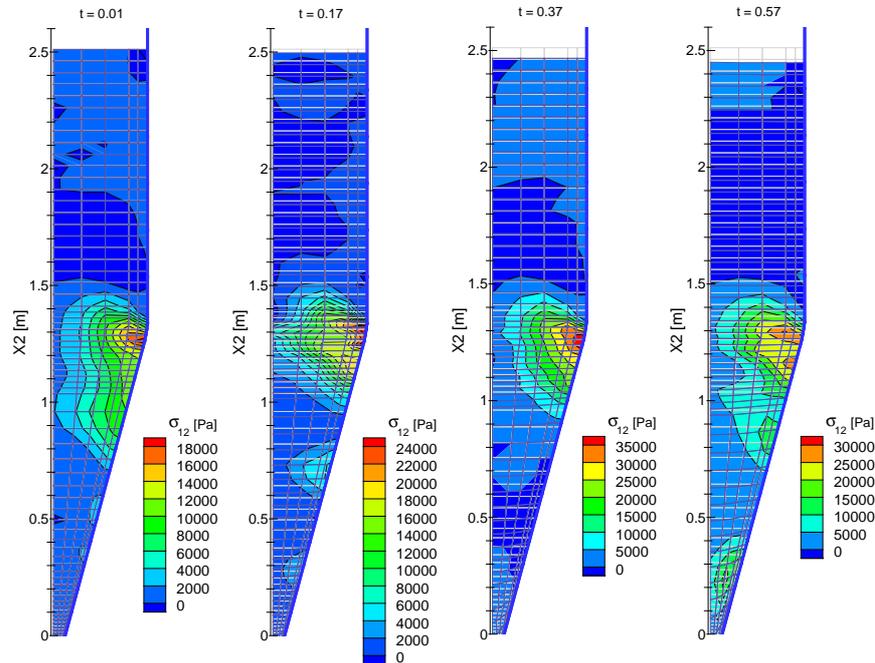


Figura 9.2.8: Tensiones de corte en el grano para distintos tiempos de iniciado el vaciado, para el silo simétrico con malla no uniforme y estructura rígida.

Las distribuciones de la presión de contacto que se obtienen con la malla no uniforme se presentan en la Figura [9.2.9]. Al igual que con la malla anterior el máximo valor de la presión de contacto se presenta en la zona de la transición tolva - depósito alcanzando en  $t = 0,37$  el valor  $p_{cn} = 131082 Pa$  para la coordenada  $X_2 = 1,24 m$ . El cociente entre el máximo valor de la presión de contacto obtenida en la etapa de vaciado y la máxima obtenida al finalizar el vaciado es  $fmd = 6,07$ .

Al comparar los resultados obtenidos para la descarga con la malla uniforme y la malla no uniforme se observa que los niveles de tensiones aumentan y las presiones de contacto disminuyen. La razón por la cual sucede esto puede explicarse a partir de las distribuciones del desplazamiento normal obtenidas para ambas mallas durante el proceso de vaciado.

En la Figura [9.2.4] los desplazamientos normales a la superficie de contacto  $U_n$  que se obtienen para la malla uniforme son casi el doble de los correspondientes a la malla no uniforme de la Figura [9.2.9]. Esto tiene dos efectos uno en el grano y otro en el contacto. En el grano, al ser los  $U_n$  menores el material se encuentra con mayor confinamiento lo cual produce una mayor presión y esto a su vez una mayor rigidez del material granular debido a que el módulo tangente es directamente proporcional a una potencia positiva de la presión. Las fuerzas de contacto, por otra parte, son proporcionales al “gap” o valor del desplazamiento perpendicular a la pared que no cumple estrictamente con la condición cinemática de contacto de no interpenetración del grano en la pared  $U_n$ , dado que el coeficiente de penalización no varía al ser el “gap” menor son menores las fuerzas de contacto y por ello las presiones de contacto.

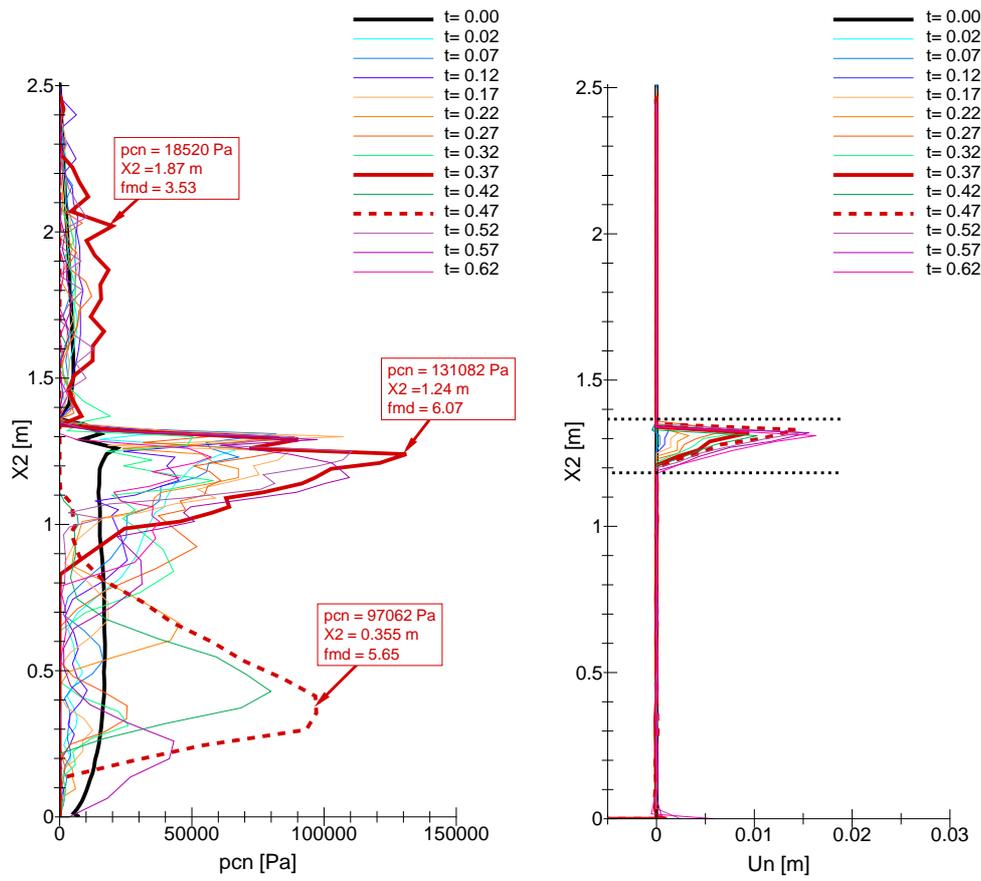


Figura 9.2.9: Distribuciones de la presión normal de contacto en distintos tiempos desde el inicio del vaciado, para el silo simétrico con malla no uniforme y estructura rígida.

### 9.2.3. Modelo de vaciado correspondiente al llenado distribuido utilizando una malla uniforme y estructura flexible.

En este modelo se han utilizado elementos de lámina de dos nodos para la estructura. El contacto se establece entre los elementos de lámina y el grano, utilizando el mismo algoritmo de contacto con fricción. Con la inclusión de la flexibilidad de la estructura se busca analizar la influencia de la misma en el desarrollo de las tensiones en el grano y las presiones de contacto sobre la pared.

La estructura está compuesta por chapas de acero de  $1\text{mm}$  de espesor. Se ha considerado que la estructura tendrá un comportamiento lineal elástico con módulo de Young  $E_a = 2,1 \cdot 10^{11} \text{N/m}^2$  y relación de Poisson  $\nu_a = 0,33$  y densidad  $\rho_a = 2755 \text{N/m}^3$ . La compuerta se considera infinitamente rígida y dotada de un marco rígido al cual esta vinculada la chapa que forma la tolva. Se considera que la estructura tiene dos anillos rigidizantes que impiden el desplazamiento lateral de los extremos superior e inferior del depósito. La malla de la estructura esta compuesta por 14 elementos en la tolva con nodos ubicados cada  $\Delta X_2 = 0,1\text{m}$  y 5 elementos en el depósito con espaciamiento  $\Delta X_2 = 0,2\text{m}$ .

La malla utilizada para el grano corresponde al modelo con malla uniforme de la (Sección 9.1.1).

La simulación del llenado progresivo es idéntica al modelo en el cual se supuso la estructura

infinitamente rígida, pero considerando la flexibilidad de la estructura en este caso. Para el inicio de la simulación del vaciado se removió la condición de contacto entre la compuerta y el grano y finalizó cuando en el elemento 115 se detectó que  $\det(\mathbf{J}) < 0$  habiendo salido del silo 112 elementos de grano (corresponden a las 22 capas inferiores de la tolva y parte de la capa 23 que llenaban aproximadamente la mitad inferior de la tolva).

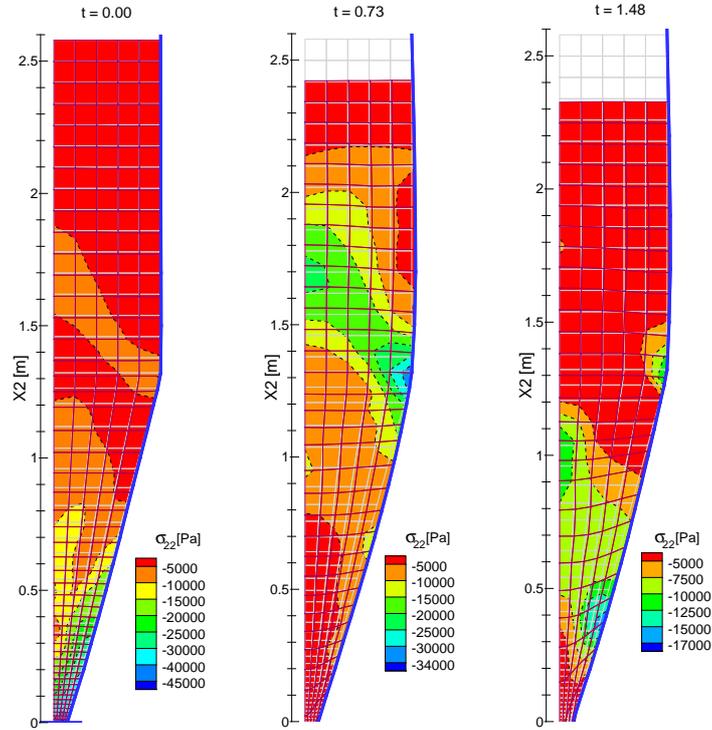


Figura 9.2.10: Tensiones verticales en el grano para distintos tiempos de iniciado el vaciado

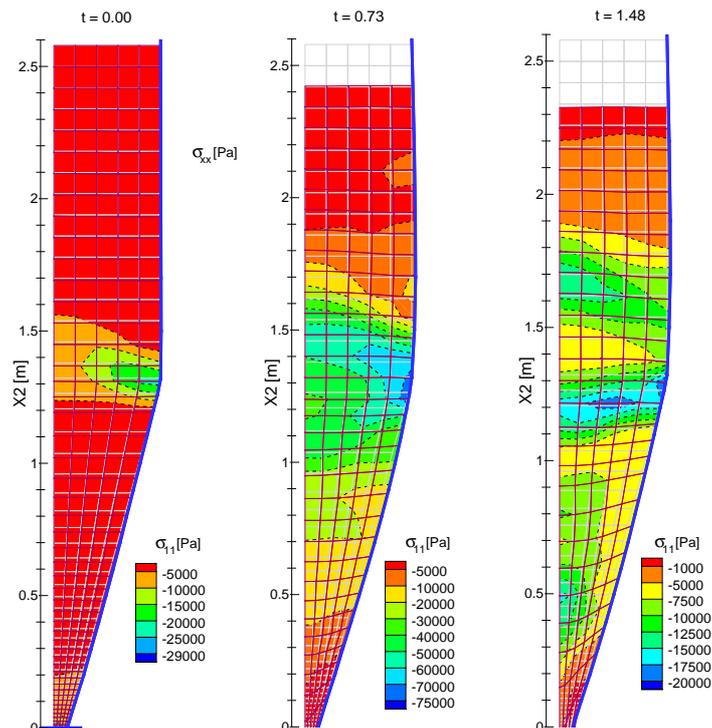


Figura 9.2.11: Tensiones horizontales en el grano para distintos tiempos de iniciado el vaciado

En la Figura [9.2.10] se muestra la distribución de la tensión vertical en el grano para  $t = 0,0$  de inicio del vaciado, que corresponde a la finalización del proceso de llenado. Se observa una zona con forma de arco con  $\sigma_{22} = -10000Pa$  que se inicia en la zona de transición entre la tolva y el depósito y llega hasta el eje de simetría y un pequeño núcleo de concentración de tensión sobre el eje de simetría para  $0,30m < X_2 < 0,40m$ . A diferencia del caso en que se consideró la estructura como infinitamente rígida, se desarrolla una zona de tensiones elevadas sobre la mitad inferior de la pared de la tolva.

Las distribuciones de la tensión vertical en el grano para  $t = 0,73$  y  $t = 1,48$  correspondientes a la simulación del proceso de vaciado mantienen una concentración de la tensión vertical en la zona de transición tolva - depósito.

En la Figura [9.2.11] se muestra la distribución de la tensión horizontal  $\sigma_{11}$  en el grano para  $t = 0,0$ ,  $t = 0,73$  y  $t = 1,48$ . Al finalizar el llenado es marcada la concentración de la tensión en la zona de transición y sobre la compuerta de descarga, durante el vaciado en esas dos zonas se produce una concentración de tensiones tendiente a formar un arco para luego relajarse y repetir el proceso.

En la Figura [9.2.12] se muestra la distribución de la tensión de corte  $\sigma_{12}$  en el grano para  $t = 0,0$ ,  $t = 0,73$  y  $t = 1,48$ . Al inicio del vaciado se desarrollan dos zonas de concentración de tensiones de corte, una sobre la pared de la tolva a un tercio de la altura (de la tolva) desde la compuerta y otra en la transición. Ambas tienen la particularidad de presentar un núcleo de tensión de corte con valor positivo y el otro negativo. Al igual que con las otras tensiones en estas zonas los valores aumentan y luego disminuyen cuando el grano desciende, repitiéndose el proceso durante la simulación del vaciado.

La Figura [9.2.13] las presiones normales de contacto reflejan las fuertes variaciones de las tensiones en el tercio inferior de la tolva y en la zona de transición tolva - depósito. Para  $X_2 = 0,252m$  se obtiene una presión máxima de contacto  $p_{cn} = 117729Pa$  que resulta 28 veces mayor que el valor correspondiente al final del llenado. En la zona de transición  $X_2 = 1,21m$  la presión máxima de contacto durante el vaciado es  $p_{cn} = 255763Pa$  dando un factor de magnificación de  $fmd = 4,56$  que se encuentra entre 3 y 5 lo cual coincide con lo informado por distintos investigadores que realizan mediciones. Sobre la pared del depósito se observan cuatro picos separados aproximadamente  $0,30m$  cuya magnitud aumenta y disminuye con el tiempo de vaciado, esta regularidad no se observa sobre la pared de la tolva.

Los valores de las tensiones  $(\sigma_{22})^{\min}$ ,  $(\sigma_{11})^{\min}$ ,  $(\sigma_{12})^{\min}$  (cerca de la compuerta) y  $(\sigma_{12})^{\max}$  (en la transición) para  $t = 0$ ,  $t = 0,73$  y para el final de las simulaciones de vaciado  $t = t_{FV}$ , obtenidas con los modelos con estructura infinitamente rígida y con estructura flexible se presentan en la Tabla [9.1] junto con los porcentajes de variación de las tensiones en el modelo con estructura flexible respecto de los obtenidos considerando la estructura rígida. Se observa que al finalizar el proceso de llenado los valores de las tensiones obtenidas considerando la flexibilidad de la estructura tienen valores bastante mayores respecto del caso de considerar la estructura rígida. A medida que avanza el proceso de vaciado los porcentajes disminuyen obteniéndose al finalizar el vaciado menores valores al considerar la flexibilidad de la estructura.

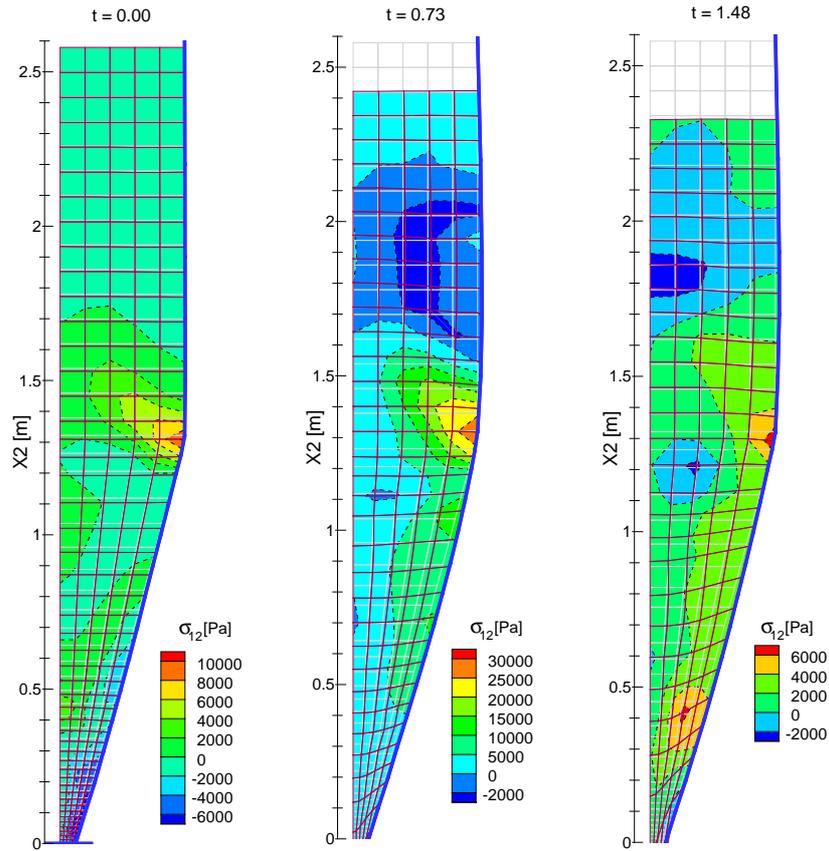


Figura 9.2.12: Tensiones de corte en el grano para distintos tiempos de iniciado el vaciado

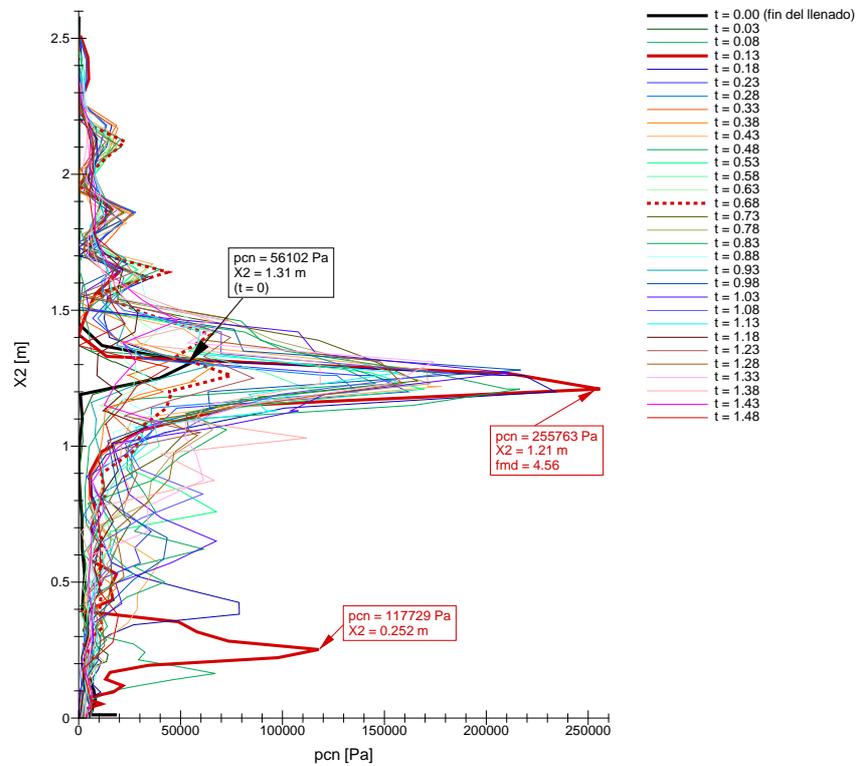


Figura 9.2.13: Presiones normales de contacto para distintos tiempos de iniciado el vaciado

	$t = 0,00$			$t = 0,73$			$t = t_{FV}$		
	Estr. Rígida	Estr. Flexible	%	Estr. Rígida	Estr. Flexible	%	Estr. Rígida	Estr. Flexible	%
$(\sigma_{22})^{\text{mín}}$	-30840	-46490	51	-24530	-34410	40	-26020	-17590	-32
$(\sigma_{11})^{\text{mín}}$	-15730	-29190	86	-56420	-77020	37	-52090	-20970	-60
$(\sigma_{12})^{\text{mín}}$	-4050	-7800	93	-3810	-2623	-31	-2330	-2561	10
$(\sigma_{12})^{\text{máx}}$	4451	10510	136	20240	30010	48	19610	7223	-63

Tabla 9.1 Comparación de las tensiones

La pared de la tolva y del depósito experimentan importantes desplazamientos durante el proceso de vaciado especialmente a mitad de las respectivas alturas como puede observarse en la Figura [9.2.14] donde se han superpuesto la estructura indeformada y varias deformadas.

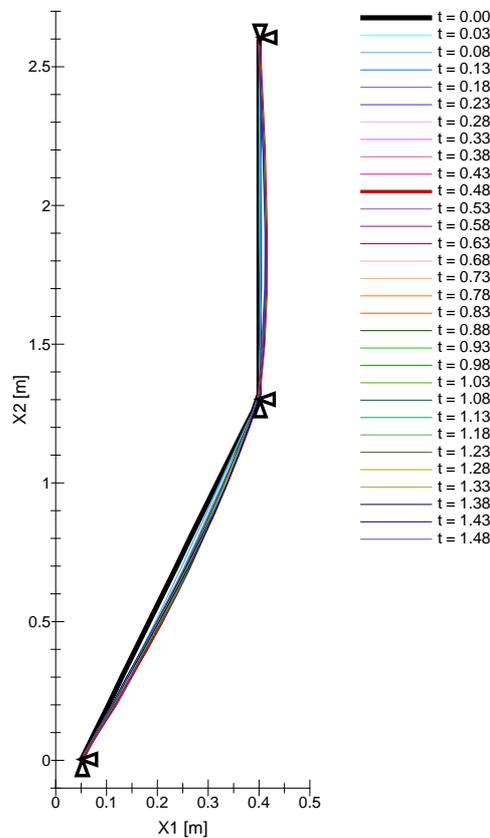


Figura 9.2.14: Deformadas de la estructura durante el proceso de vaciado

Los esfuerzos de membrana, Figura [9.2.15], son constantes en la mayor parte de la pared del depósito para un dado tiempo y en la mayor parte de la pared de la tolva, presentando una variación lineal en la zona inferior del depósito.

Los momentos flectores, Figura [9.2.16], presentan picos sobre la pared del depósito de magnitud variable con el tiempo en concordancia con las posiciones de los picos de presiones de contacto. Sobre la pared de la tolva los diagramas de momentos también presentan picos de magnitud variable con el tiempo de vaciado pero no es clara su relación con la variación de las presiones de contacto como en el caso del depósito.

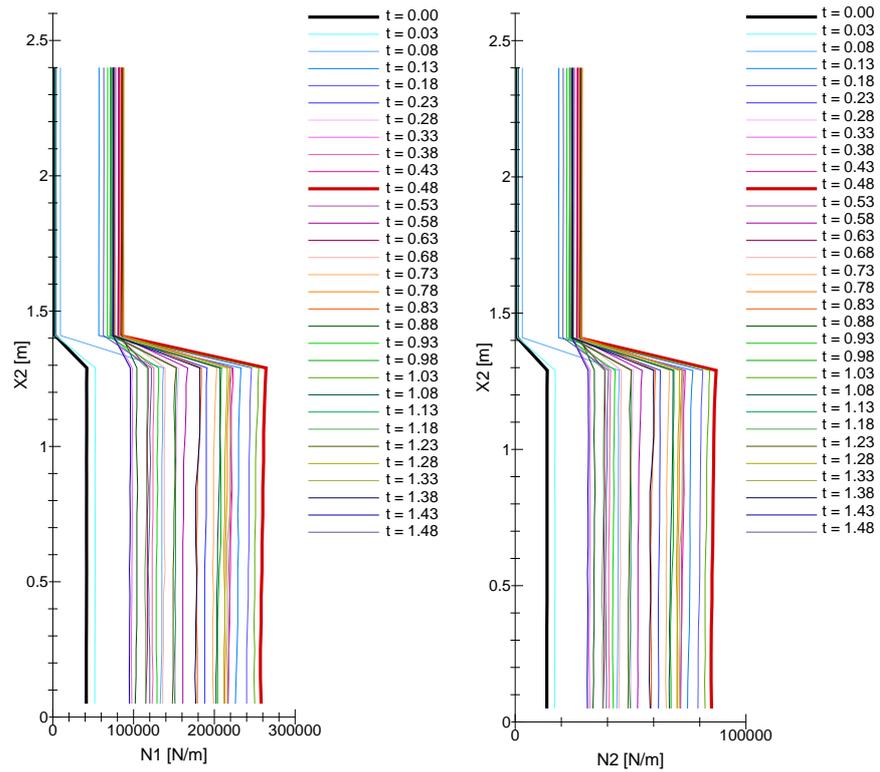


Figura 9.2.15: Distribuciones de los esfuerzos normales en la estructura durante el proceso de vaciado

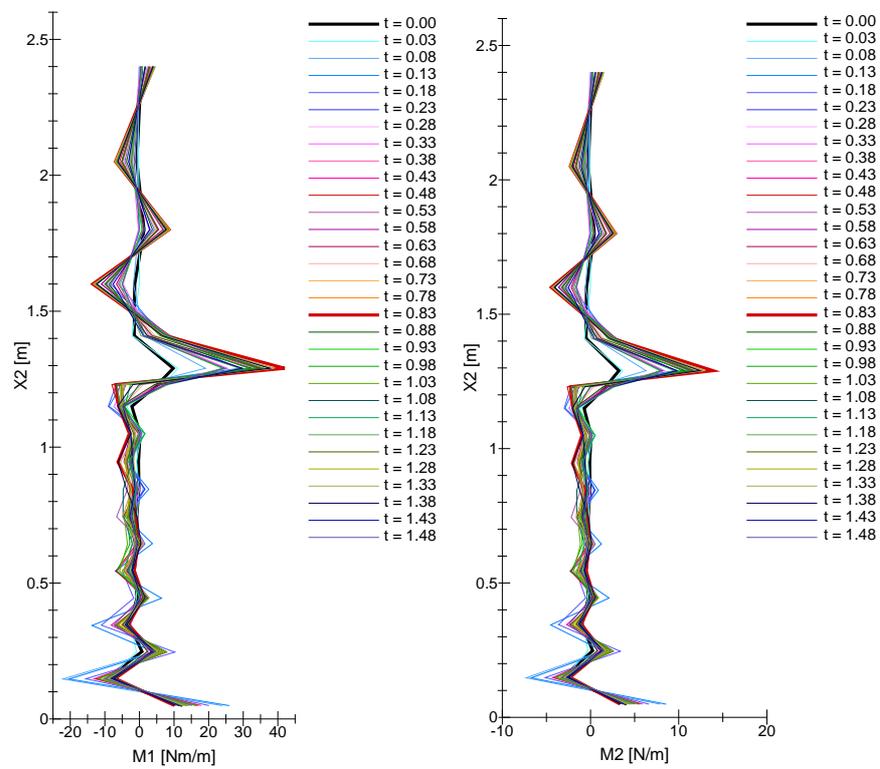


Figura 9.2.16: Distribuciones de los momentos flectores en la estructura durante el proceso de vaciado

El esfuerzo de corte en la estructura, Figura[9.2.17] para distintos tiempos de vaciado presenta dos zonas de mayor valor del esfuerzo de corte coincidentes con las zonas de concentración de

tensiones de corte en el grano, una en la parte inferior de la tolva y otra en la zona de transición tolva - depósito. En todo el desarrollo de la estructura el esfuerzo de corte oscila respecto del valor nulo salvo en las dos zonas mencionadas.

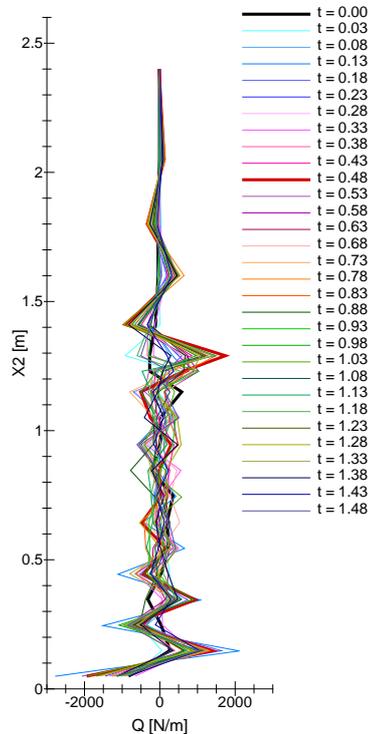


Figura 9.2.17: Distribuciones del esfuerzo de corte en la estructura durante el proceso de vaciado

#### 9.2.4. Vaciado correspondiente al llenado concéntrico con malla no uniforme y estructura rígida

Respecto del modelo con el cual se simuló el llenado distribuido del mismo silo, solo cambia la geometría de las capas, manteniéndose los demás aspectos del modelo de llenado idénticos.

El orden de salida de los elementos es diferente al que se obtuvo en la simulación del vaciado del silo que se llenó en forma distribuida. En este caso sale primero el elemento que tiene uno de sus lados sobre la pared de la tolva y luego en orden los siguientes hasta el elemento que tiene uno de sus lados sobre el eje de simetría en las primeras cuatro capas. En las siguientes capas sale primero el elemento con uno de sus lados sobre la pared, luego uno o mas elementos de la misma capa ubicados consecutivamente hacia el eje, sale el elemento sobre la pared de la capa siguiente y luego terminan de salir los elementos de la capa inferior cercanos al eje de simetría del silo. Esta secuencia de salida de los elementos indica que el método de llenado que se utilizó efectivamente cambia el patrón de vaciado del silo.

En la Figura [9.2.18] se observan las distribuciones de la tensión vertical en el grano para los tiempos de vaciado  $t = 0,12$ ,  $t = 0,62$ ,  $t = 0,86$  y  $t = 1,15$ . Puede observarse que la posición de los núcleos de compresión se ubican para algunos tiempos sobre la pared de la tolva (inicio de la formación del arco de compresión) y para otros sobre el eje de simetría (corresponde al momento en que se completa la formación del arco de compresión). Luego que el núcleo de compresión se

posicionó sobre el eje de simetría se produce la descompresión seguida de un descenso del material dentro del silo para iniciarse nuevamente el proceso. Respecto de los casos de llenado distribuido en este caso la magnitud de las tensiones es aproximadamente la mitad, en concordancia con lo reportado por algunos grupos experimentales que han detectado que con llenado concéntrico el material se compacta menos que en el caso de llenado distribuido y consecuentemente se tiene una disminución de la magnitud de las tensiones y presión de contacto.

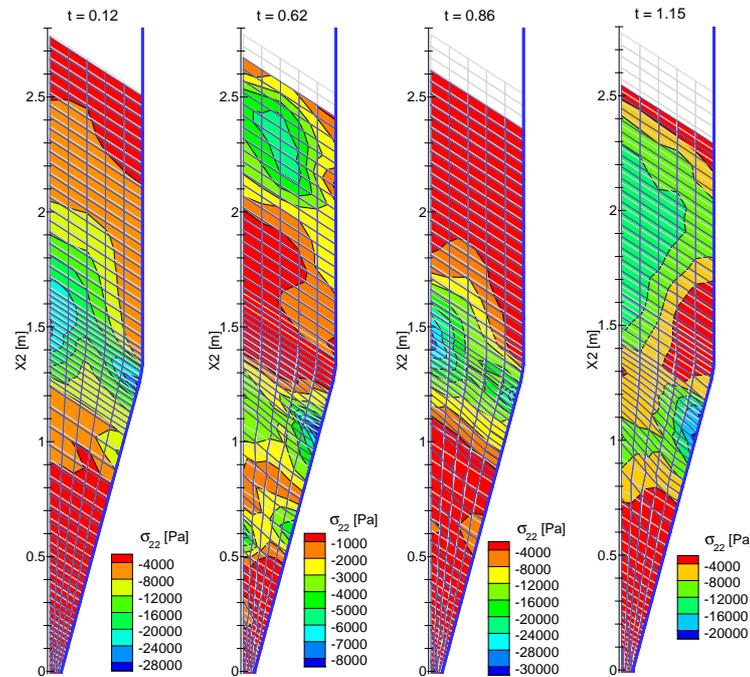


Figura 9.2.18: Tensiones verticales en el grano para distintos tiempos de iniciado el vaciado

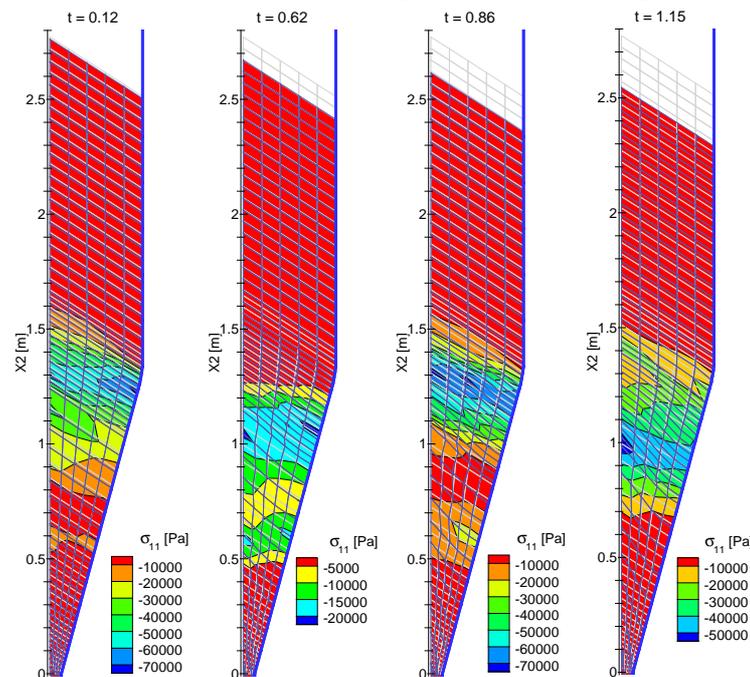


Figura 9.2.19: Tensiones horizontales en el grano para distintos tiempos de iniciado el vaciado

Las distribuciones de la tensión horizontal en el grano se presentan en la Figura [9.2.19] para los

mismos tiempos de vaciado que las tensiones verticales. Estas figuras muestran con mas claridad que la llegada del arco de compresión se produce en la parte superior de la tolva para  $0,90m < X_2 < 1,25m$  y otro arco cuya llegada a la pared se produce para  $X_2 \approx 0,60m$ .

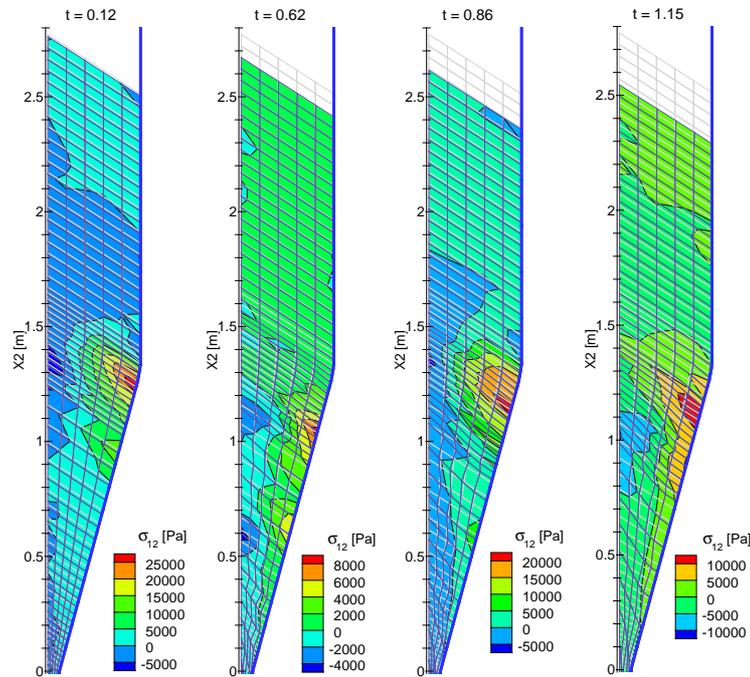


Figura 9.2.20: Tensiones de corte en el grano para distintos tiempos de iniciado el vaciado

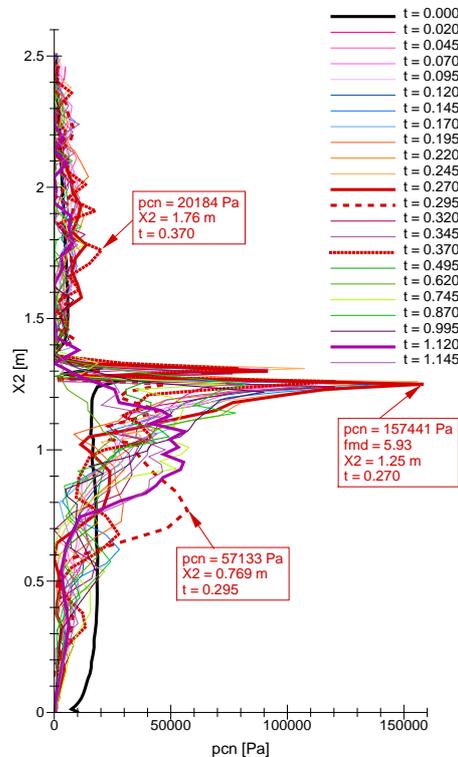


Figura 9.2.21: Distribuciones de la presión normal de contacto en distintos tiempos desde el inicio del vaciado

La distribución de las tensiones de corte de la Figura [9.2.20] muestran valores mas elevados de

la tensión en concordancia con las zonas donde la tensión horizontal presenta valores de compresión elevados donde el arco llega a la pared de la tolva.

La distribución de la presión de contacto sobre la pared de la tolva y el depósito se muestran en la Figura [9.2.21]. El máximo valor de la presión de contacto, al igual que en los casos de llenado concéntrico, se produce en la transición tolva - depósito presentándose otro pico de menor magnitud para  $X_2 \simeq 0,75m$  al igual que en los casos en que se consideró la estructura rígida y llenado distribuido. Al igual a los casos en que se supuso la estructura rígida los valores de la presión de contacto en la parte inferior de la tolva son menores a los correspondientes al final del llenado.

### 9.3. Vaciado de un silo asimétrico con tolva (estructura rígida)

Se presentan aquí los resultados obtenidos durante la simulación del vaciado del silo asimétrico de deformación plana cuyo llenado se presentó en 7.3.4. Este silo tiene una de las paredes vertical en toda su altura mientras la otra presenta un quiebre en la parte inferior y un tramo vertical.

#### 9.3.1. Vaciado correspondiente al llenado distribuido

A continuación se presentan los resultados obtenidos durante la simulación del vaciado correspondiente al llenado distribuido.

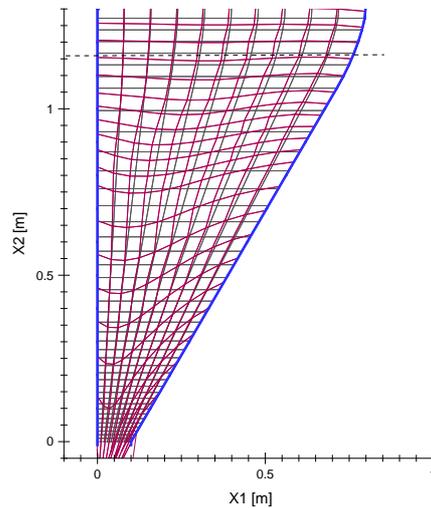


Figura 9.3.1: Detalle de la malla al finalizar la simulación del vaciado

En la Figura [9.3.1] se pueden observar la malla indeformada y la malla deformada superpuestas, esta última indica que los mayores desplazamientos verticales se producen aproximadamente a  $0,05m$  de la pared vertical indicando un patrón de flujo asimétrico que acompaña a la geometría de la parte inferior del silo. Para coordenadas  $X_2 > 1,15m$  las capas se mantienen prácticamente horizontales mientras que las inferiores van adoptando una forma parabólica con el vértice cercano a la pared vertical.

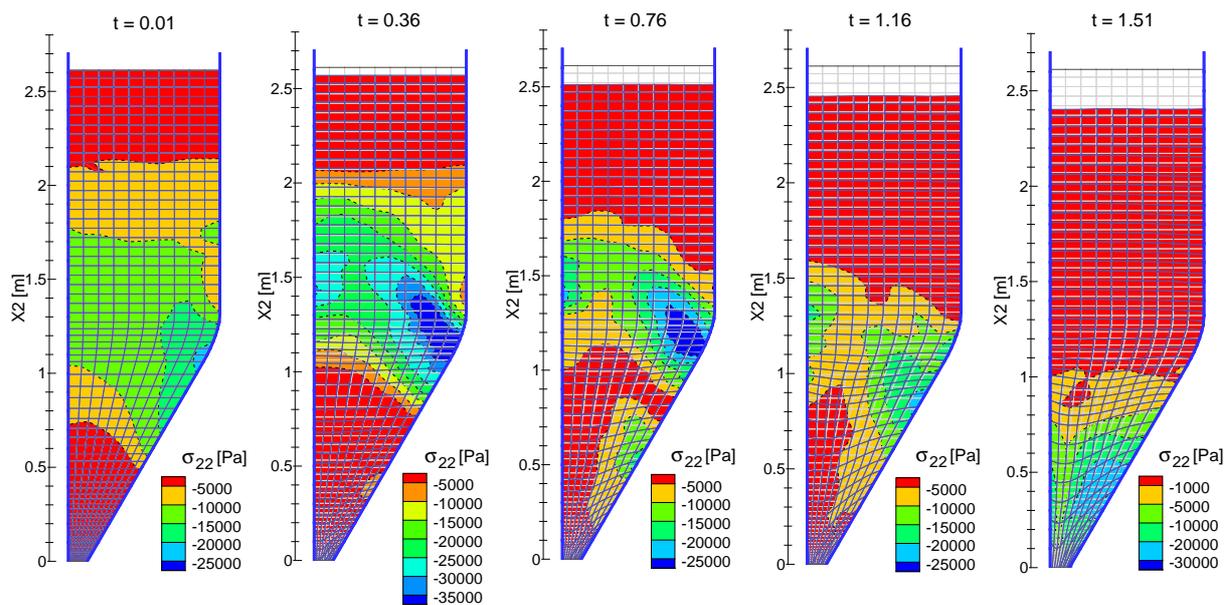


Figura 9.3.2: Distribuciones de la tensión vertical desde el inicio y hasta la finalización de la simulación del vaciado.

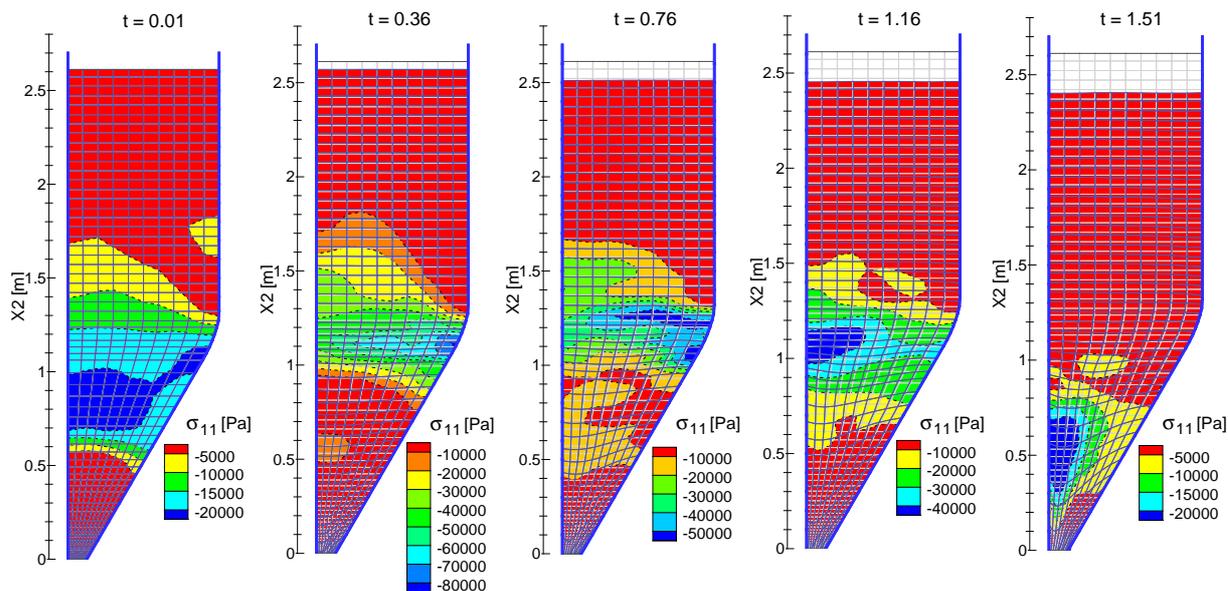


Figura 9.3.3: Distribuciones de la tensión horizontal desde el inicio y hasta la finalización de la simulación del vaciado.

En la Figura [9.3.2] se presentan las distribuciones de la tensión vertical para los tiempos de vaciado  $t = 0,01$ ,  $t = 0,36$ ,  $t = 0,76$ ,  $t = 1,16$  y  $t = 1,51$ . En todos los casos aparece una concentración de tensiones sobre la pared inclinada, cuyo valor varía en los primeros cuatro tiempos en más o menos un 40%. Al inicio de la descarga el mayor valor de compresión se sitúa inmediatamente debajo de la coordenada  $X_2$  correspondiente al quiebre y lentamente va descendiendo. Salvo en los casos en que se completa el arco que se inicia sobre la pared inclinada no se producen concentraciones

de tensión sobre la pared vertical izquierda del silo, como es de esperarse por tener menor tensión normal a la pared. Al igual que en el silo simétrico se observa que una onda de compresión viaja desde la zona de la compuerta hasta alcanzar la superficie libre superior del material y lo mismo ocurre con la onda de descompresión.

En la Figura [9.3.3] se pueden observar las distribuciones de la tensión horizontal que presentan una zona de alta compresión unas veces sobre la pared vertical y otras sobre la pared inclinada donde la formación del arco de tensiones alcanza cada pared. En estas distribuciones se observa con claridad el cambio de posición de la zona de valores mas elevados de compresión en el grano.

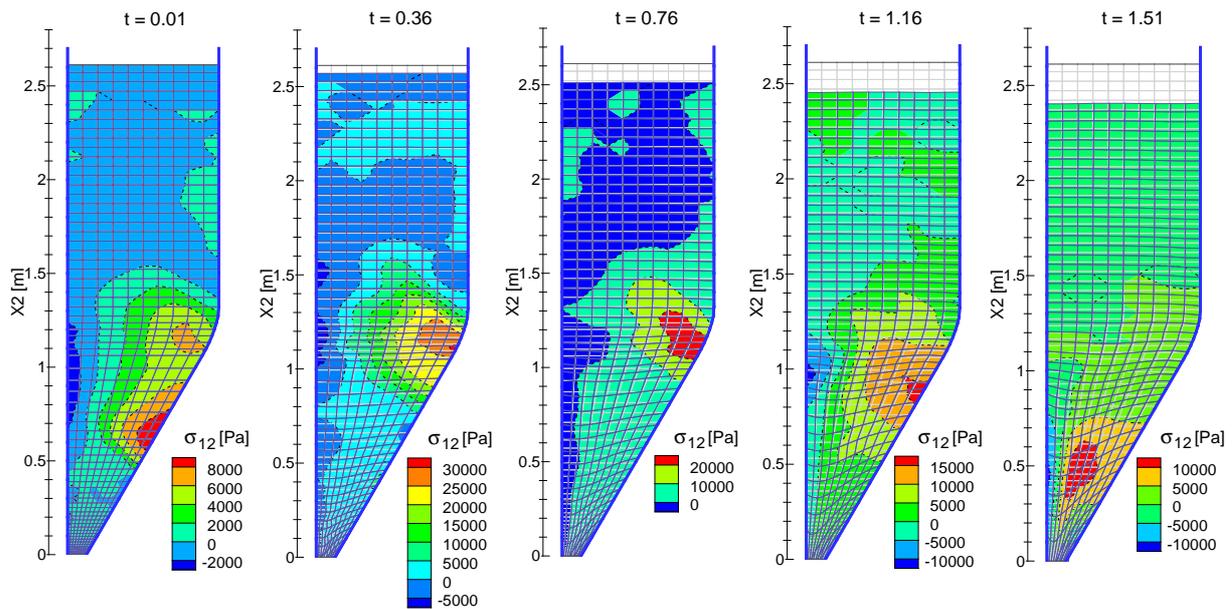


Figura 9.3.4: Distribuciones de la tensión de corte desde el inicio y hasta la finalización de la simulación del vaciado.

Las distribuciones de la tensión de corte presentan mayores valores sobre la pared inclinada en concordancia con los mayores valores de la componente normal a la cual acompaña cuando descende por la misma al avanzar la descarga como puede observarse en la Figura [9.3.4].

Las presiones normales de contacto que se desarrollan sobre la pared vertical se presenta a la izquierda de la malla y las que se desarrollan sobre la pared con quiebre a la derecha de la malla en la Figura [9.3.5]. Sobre la pared vertical las tensiones durante el vaciado para  $0,00 < X_2 < 0,60m$  al inicio del vaciado son menores que las correspondientes al final del llenado, a medida que el material descende comienzan a aumentar los valores de la presión normal de contacto en esa zona. El máximo valor  $p_{cn} = 70295Pa$  se desarrolla en  $X_2 = 1,15m$  siendo la relación de éste respecto del máximo sobre la pared vertical al final del llenado  $fmd = 4,43$  para  $t = 1,21$  desde el inicio del vaciado. Las presiones de contacto sobre la pared con quiebre son similares a las que se obtuvieron en el silo simétrico donde el quiebre de la pared se corresponde con la zona de transición tolva - depósito. Los mayores valores de la presión normal de contacto se desarrollan en la parte superior de la pared inclinada siendo el máximo valor  $p_{cn} = 126976Pa$  para  $X_2 = 1,15m$  en ese caso tiene un  $fmd = 6,02$  que se obtiene para  $t = 0,61$  de iniciado el vaciado.

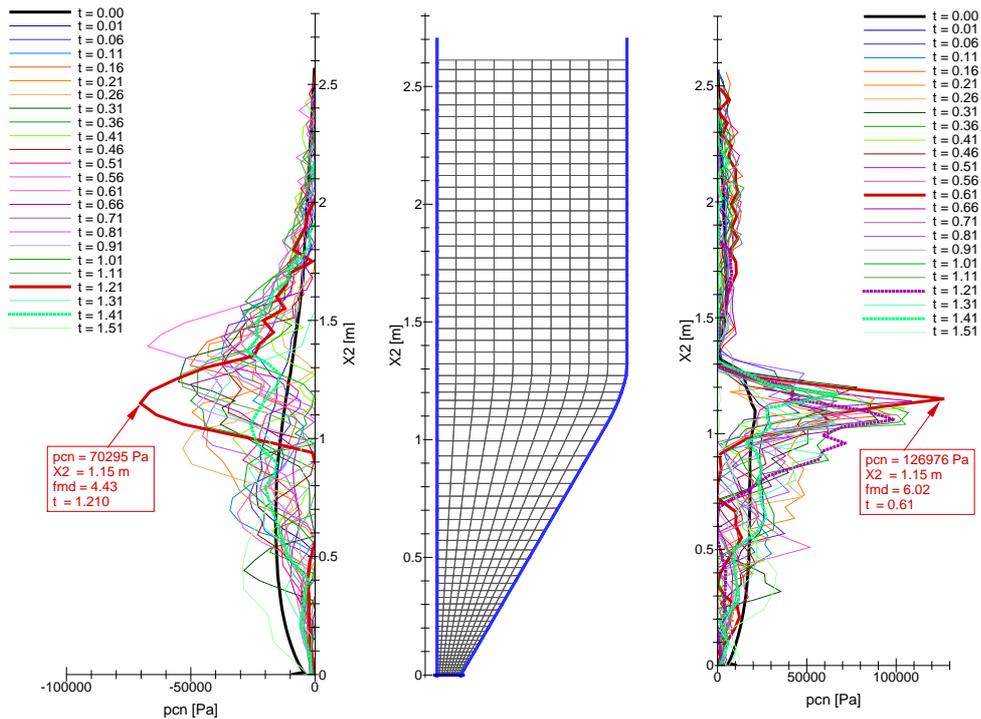


Figura 9.3.5: Distribuciones de la presión normal de contacto para distintos tiempos durante la simulación del vaciado.

### 9.3.2. Vaciado correspondiente al llenado concéntrico

Se presentan a continuación las distribuciones de tensiones para los tiempos de vaciado  $t = 0,02$ ,  $t = 0,08$ ,  $t = 0,14$  y  $t = 0,20$  correspondientes al llenado concéntrico.

Las distribuciones de la tensión vertical en el grano se muestran en la Figura [9.3.6] donde puede observarse un arco (inferior) bastante estable en el tiempo que toca la pared vertical aproximadamente a  $X_2 \simeq 0,5m$  y otro arco (superior) que se inicia inmediatamente por debajo del quiebre de la pared derecha y que llega a la pared vertical en  $X_2 \simeq 1,50m$  que también presenta un carácter bastante estable. Estos arcos de tensiones estables durante el vaciado del silo que se ha llenado en forma concéntrica solo permite que salga parte del material de las cinco capas inferiores ubicado cerca de la pared vertical. Este comportamiento indica una mayor influencia de la fricción sobre la pared inclinada que influye en la distribución de tensiones y a que se encuentren dificultades para vaciar el silo por la sola acción de la gravedad.

Las distribuciones de la tensión horizontal en la Figura [9.3.7] muestran que el arco superior, es estable y con tensiones de compresión bastante elevadas sobre la pared inclinada. El arco inferior es también bastante estable pero da lugar a tensiones de compresión mucho menores que las del arco superior.

En la Figura [9.3.8] las distribuciones de la tensión de corte muestran valores elevados en las zonas donde los arcos de tensiones se encuentran con las paredes, siendo los valores de las tensiones mayores en la pared inclinada y menores cerca de la pared vertical.

Las distribuciones de las presiones normales de contacto sobre la pared vertical y la pared con quiebre se muestran en la Figura [9.3.9] a la izquierda y derecha de la malla del silo respectivamente.

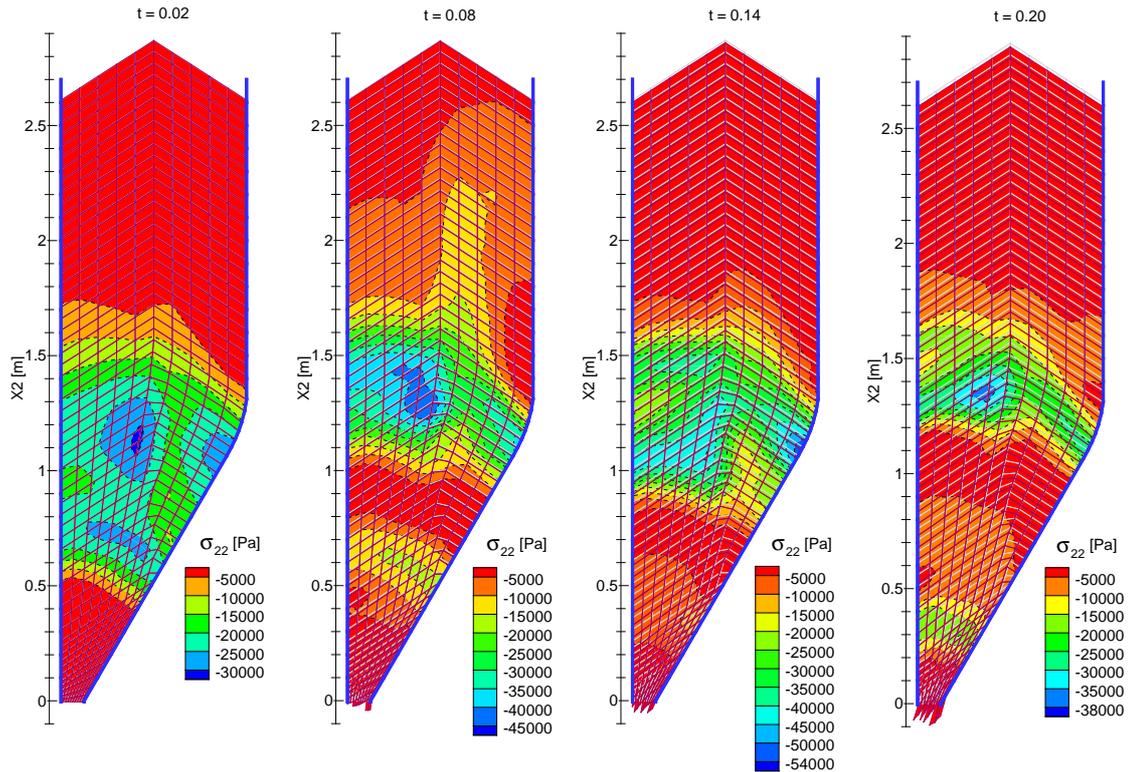


Figura 9.3.6: Distribuciones de la tensión vertical desde el inicio y hasta la finalización de la simulación del vaciado.

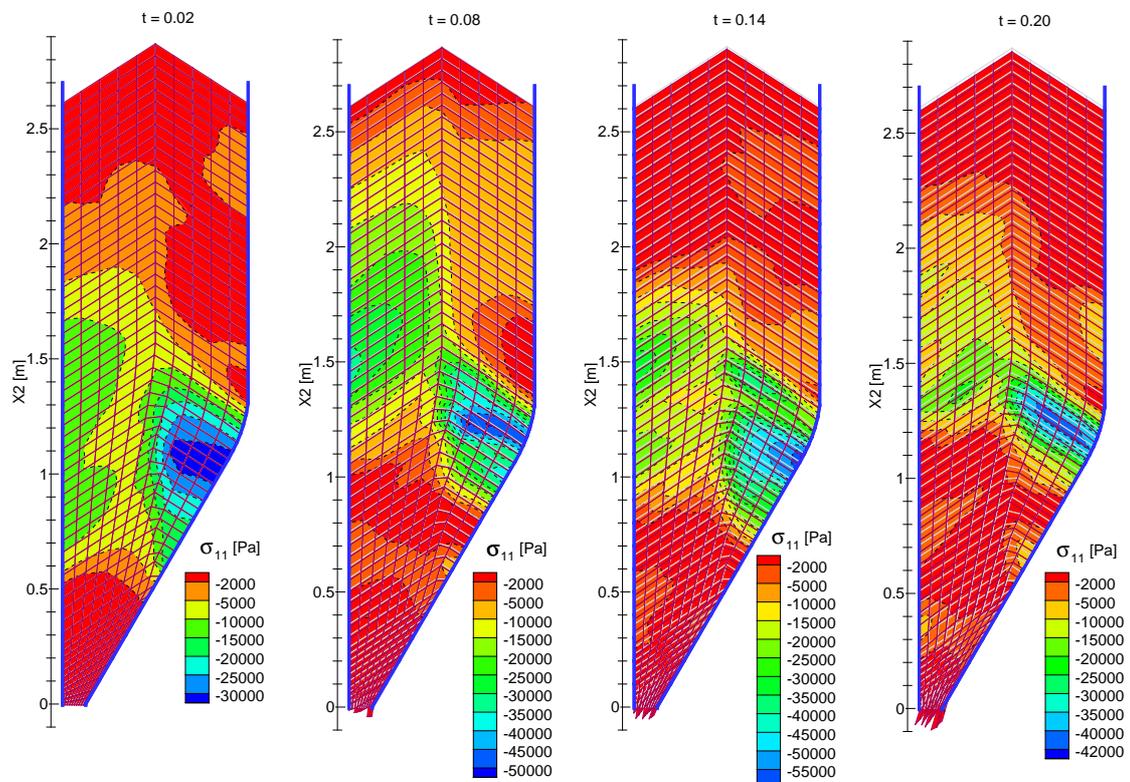


Figura 9.3.7: Distribuciones de la tensión horizontal desde el inicio y hasta la finalización de la simulación del vaciado.

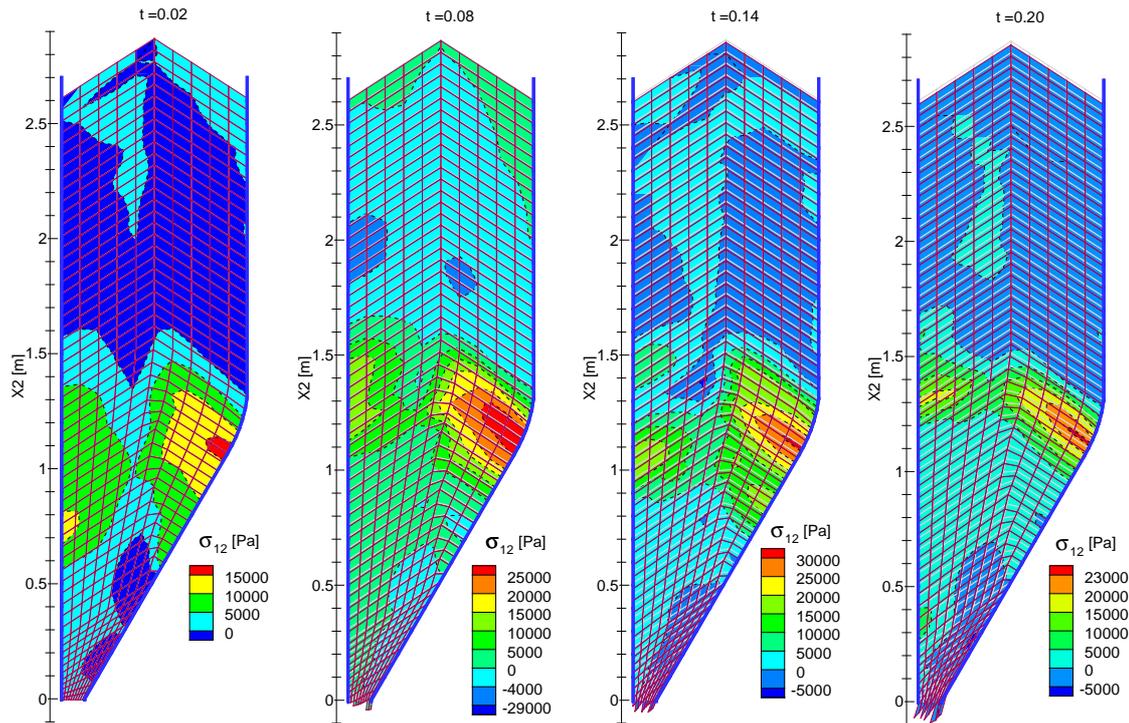


Figura 9.3.8: Distribuciones de la tension de corte desde el inicio y hasta la finalizacion de la simulacion del vaciado.

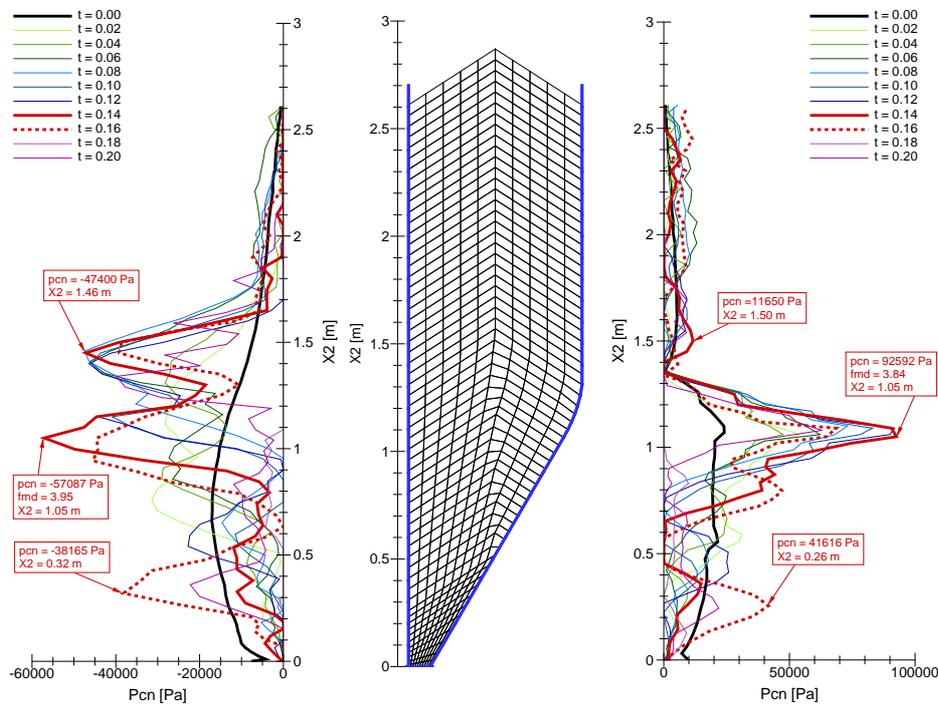


Figura 9.3.9: Distribuciones de la presion normal de contacto para distintos tiempos durante la simulacion del vaciado.

La distribución sobre la pared vertical presenta en este caso tres picos de tensiones elevadas, uno  $p_{cn} = 47400Pa$  en  $X_2 = 1,46m$  y otro  $p_{cn} = 57087Pa$  en  $X_2 = 1,05m$  que da un  $fmd = 3,95$

y un tercer pico con  $p_{cn} = 38165Pa$  en  $X_2 = 0,32m$ . Este comportamiento es bastante diferente del que se obtuvo durante la simulación del vaciado correspondiente al llenado distribuido. Las presiones de contacto sobre la pared con quiebre presentan un valor máximo  $p_{cn} = 92592Pa$  para  $X_2 = 1,05m$  que de un  $fmd = 3,84$  y aparece un pico de  $p_{cn} = 41616Pa$  para  $X_2 = 0,26m$ .

En este caso, los valores máximos de la presión de contacto en ambas paredes se obtienen para  $t = 0,14$  y los picos en la parte inferior (en  $X_2 = 0,32m$  en la pared vertical y en  $X_2 = 0,26m$  en la pared inclinada) también se presentan simultáneamente en  $t = 0,16$ , a diferencia del comportamiento que se obtuvo al vaciar el mismo silo pero con llenado distribuido.

Otra diferencia aparece en la secuencia de salida de los elementos durante el vaciado del silo respecto de cuando se llenó en forma distribuida. Las secuencia de salida de los elementos correspondiente al llenado distribuido se muestran en la Figura [9.3.10 a)] y en Figura [9.3.10 b)] la secuencia de salida durante el vaciado del silo que se llenó en forma concéntrica.

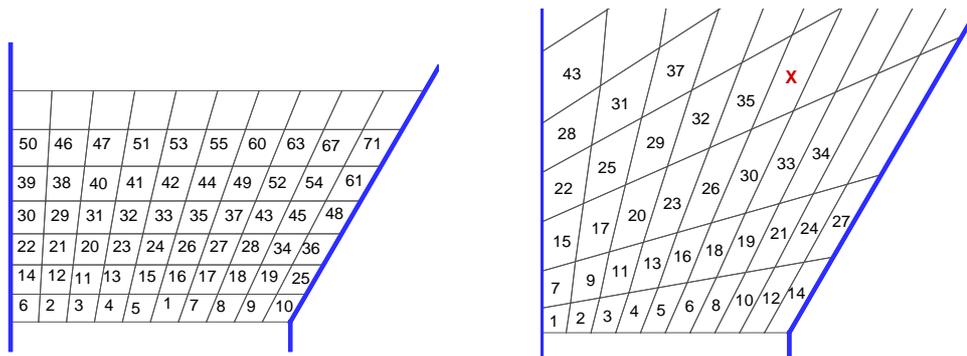


Figura 9.3.10: Secuencia de salida durante el vaciado del silo asimétrico. a) correspondiente al llenado distribuido; b) correspondiente al llenado concéntrico

Tanto la magnitud como las distribuciones de tensiones son diferentes en el material en contacto con la compuerta al finalizar la simulación del proceso de llenado, como puede observarse en la Figura [7.3.20] y la Figura [7.3.21], lo cual está relacionado con la rigidez del material y su compacidad y esto afecta la manera en la cual el material se comporta al inicio del vaciado dando diferentes secuencias de salida de los elementos.

## 9.4. Conclusiones

De los resultados obtenidos en las distintas simulaciones del vaciado del *silosimétrico de deformación plana* en las cuales se consideraron distintas posibilidades en lo referente al tipo de llenado, las características de las mallas utilizadas y de rigidez de la estructura se observa que todas las simulaciones de vaciado terminan debido a que el determinante jacobiano de un elemento muy distorsionado tiene un valor negativo o nulo.

Cuando se analizan los resultados del vaciado correspondiente a un llenado distribuido se detecta que la secuencia de salida de los elementos de una capa respecto de otra cambia debido a la influencia de la formación de arcos de compresión en el material granular al avanzar la simulación del vaciado. También se observa que el flujo dentro del depósito es uniforme lo cual se evidencia en que las capas dentro del depósito permanecen horizontales al igual que la superficie libre superior. Dentro de la tolva el flujo de material tiene mayor velocidad sobre el eje de simetría y es más lento cerca de la pared a consecuencia del desarrollo de la fricción entre el grano y la pared.

Al analizar las distribuciones de las tensiones que se desarrollan durante la simulación del vaciado se observan arcos de tensiones de compresión dentro del material que ocupa la parte inferior del depósito y la tolva, cuya posición varía a medida que avanza el proceso de vaciado. También se observa en las distribuciones de tensiones que sobre el eje de simetría, en la parte inferior del depósito, se forma una zona de elevada tensión de compresión junto con una zona de baja tensión en cercanía de la pared. Al avanzar la descarga, la zona de elevada tensión de compresión aumenta de tamaño hasta alcanzar la pared y completar un arco que por expansión del material se descomprime, reiniciándose el ciclo.

Las distribuciones de las presiones de contacto presentan fuertes variaciones especialmente sobre la pared de la tolva. Los valores máximos ocurren en la zona de transición depósito - tolva, dando valores del factor de magnificación dinámica mayores o cercanos a seis independientemente del método de llenado y de la geometría de la transición (con vértice o con una curva suave). A un tercio de la altura de la tolva desde la compuerta se desarrolla un pico local de presión de contacto normal que puede alcanzar valores mayores a cinco veces la máxima presión de contacto de llenado en la tolva. Al considerar en el modelo la flexibilidad de la estructura, el factor de magnificación dinámica se reduce a 4.6 en la zona de la transición.

La discretización utilizada en la zona cercana a la pared influye en los valores de interpenetración del algoritmo de contacto, en los niveles de tensiones que se obtienen y en los valores de las presiones de contacto.

La secuencia de salida de los elementos obtenida en correspondencia a los métodos de llenado distribuido y concéntrico son diferentes, indicando que el tipo de llenado influye en la manera en la cual se produce la descarga del silo por gravedad.

En los resultados obtenidos al simular el vaciado del *siló asimétrico de deformación plana*, correspondientes al llenado de tipo distribuido se detecta que al inicio de la descarga el mayor valor de tensión de compresión se sitúa inmediatamente por debajo del quiebre de la pared y su posición descende a medida que avanza la simulación del vaciado.

Al analizar las distribuciones de las tensiones se observa que los mayores valores de la tensión vertical de compresión se desarrollan en la cercanía de la pared con quiebre y son del orden de un treinta por ciento mayores respecto de las que se desarrollan cerca de la pared vertical. Por otra parte la distribución de la tensión horizontal presenta un núcleo cercano a la pared vertical con valor elevado, cuya posición cambia a medida que avanza el vaciado.

Las presiones normales de contacto presentan valores máximos sobre ambas paredes a similar coordenada vertical, pero se alcanzan a diferentes tiempos a partir del inicio del vaciado del silo. El factor de magnificación dinámica sobre la pared con quiebre es un treinta y cinco por ciento

mayor al que se obtiene sobre la pared vertical.

Al analizar las distribuciones de tensiones obtenidas durante la simulación del vaciado del silo asimétrico correspondiente al llenado concéntrico, éstas muestran la formación de arcos de compresión estables en posición y en tiempo desde el inicio del vaciado. Estos arcos estables provocan inconvenientes para que el silo se vacíe por acción de la gravedad, siendo estos resultados diferentes a los obtenidos al simular el vaciado correspondiente al llenado distribuido. El método de llenado influye sobre el flujo del material granular al iniciar el vaciado evidenciándose en la secuencia de salida de los elementos.

El factor de magnificación dinámico que se obtiene sobre la pared vertical es similar para ambos tipos de llenado. Para la pared con quiebre el factor de magnificación dinámico que se obtiene al vaciar el silo cuando el llenado fue de tipo concéntrico es aproximadamente el 60% del que se obtuvo cuando se simuló el vaciado correspondiente al llenado distribuido. Esto pone de manifiesto que el método de llenado tiene una notoria influencia en las presiones normales de contacto durante el vaciado.

## Capítulo 10

# Conclusiones y líneas de trabajo futuro

### 10.1. Síntesis de la presente tesis

En esta tesis se propone una relación constitutiva para materiales granulares almacenados a granel, basada en las relaciones constitutivas propuestas para arenas dentro de la mecánica de los suelos. La relación propuesta permite capturar el comportamiento del material cuando es sometido a estados de tensiones de bajos a medios y deformaciones pequeñas a grandes, considerando que la interacción entre las partículas es solo friccional. La elección del modelo constitutivo se basó en cumplir con las siguientes premisas: que fuera lo más simple posible, que contuviera el menor número de parámetros posible, que permita capturar la compresibilidad volumétrica tanto elástica como plástica, que considerara la dependencia de los parámetros resistentes de la presión, que sea posible que el material se distorsione plásticamente sin cambio de volumen ni de presión y que los parámetros de caracterización puedan encontrarse utilizando procedimientos simples a partir de datos experimentales estándar.

El principal objetivo ha sido generar un modelo físico que represente el comportamiento de materiales ensilados considerando un modelo constitutivo elastoplástico dentro de la mecánica de los medios continuos considerando que los procesos pueden ser casi estáticos o dinámicos. Para tener en cuenta un efecto de amortiguamiento de tipo viscoso se sumó la contribución de las fuerzas de amortiguamiento a la ecuación de movimiento de Cauchy. El contorno del dominio se considera formado por tres partes complementarias y mutuamente excluyentes donde se tienen desplazamientos prescritos o fuerzas prescritas o condición de contacto con fricción de tipo Coulomb. La solución aproximada a la ecuación de gobierno se obtiene por medio del método de elementos finitos y el proceso de solución numérico consta de una discretización espacial, un algoritmo de integración para plasticidad independiente de la velocidad de deformación y de la integración en el tiempo.

Se ha propuesto un elemento de deformación plana / axilsimetría para considerar las tipologías más comunes de geometría de los silos y tolvas. En la formulación del elemento se adoptó una formulación Lagrangeana actualizada en la cual las deformaciones y las tensiones han sido referidas

al sistema corrotacional definido en cada punto de integración de la cuadratura de Gauss Legendre. Todas las expresiones y transformaciones necesarias han sido obtenidas en forma detallada. Debido a que los materiales granulares pueden presentar flujo isocórico se subintegran las componentes volumétricas con el fin de evitar el bloqueo por volumen. Para ordenar y facilitar los cálculos se utiliza la descomposición de los tensores de tensiones y de deformaciones en sus partes esférica y desviadora que se utilizan para calcular el vector de fuerzas internas de cada elemento.

Se han descrito las partes que componen el modelo constitutivo considerando la ley elástica, la superficie de fluencia, el potencial plástico (o regla de flujo) y la ley de endurecimiento ablandamiento. La ley elástica considera que el módulo elástico tangente es una función de potencia de la presión y que la relación de Poisson es constante. La función de fluencia es discontinua y está compuesta por una parte fija que corresponde al modelo de Drucker Prager (como aproximación al criterio de Mohr Coulomb) para considerar la fluencia por corte que se produce al alcanzarse el estado crítico y una parte móvil que corresponde al modelo Cam Clay modificado para considerar la fluencia por consolidación. Ambas han sido expresadas en función de dos invariantes del tensor de tensiones que son la presión y la tensión desviadora generalizada. La regla de flujo que corresponde al modelo de Drucker Prager es no asociada y permite se produzcan deformaciones por corte sin cambio volumétrico ni de la presión mientras la regla de flujo que corresponde al modelo Cam Clay modificado es asociada y permite se produzcan tanto deformaciones plásticas volumétricas como de distorsión. La ley de endurecimiento - ablandamiento isótropa empírica es función de la deformación plástica volumétrica y permite determinar el tamaño del elipsoide que representa al modelo Cam Clay modificado en el espacio de tensiones. Las variables internas del modelo son las componentes del tensor de deformaciones plásticas desviadoras, la deformación plástica volumétrica y la presión de preconsolidación (la cual fija el tamaño del elipsoide). Se presentan en forma explícita y detallada las expresiones del algoritmo de integración de las ecuaciones constitutivas y el algoritmo de selección de la superficie de fluencia activa y cálculos auxiliares. Se describe la metodología para obtener los parámetros constitutivos a partir de datos experimentales correspondientes a ensayos estándar de la mecánica de suelos. Se describen y explicitan las hipótesis de comportamiento del material granular asociadas a la simulación del proceso de vaciado.

El modelo constitutivo se ha puesto a prueba utilizándolo en la simulación de ensayos triaxiales de compresión isotrópica y ensayos de compresión convencional drenado. Estos ensayos fueron utilizados para validar el modelo propuesto al comparar los resultados de las simulaciones con datos experimentales y sacar conclusiones respecto de la capacidad del modelo para capturar los diferentes aspectos del comportamiento de materiales granulares dentro del rango de tensiones posible de desarrollarse en silos de dimensiones reales.

Se describe la metodología que se utilizó para aproximar el llenado continuo de una tolva o un silo mediante un llenado progresivo por adición de capas de material, considerando el peso propio del material que se almacena. Debido a que el llenado es un proceso que se considera casi estático, se describe cómo evaluar los parámetros de amortiguamiento a incluir en el modelo y las pruebas para corroborar que se hayan adoptado valores correctos. En la simulación del llenado progresivo el material se divide en capas en el momento de construir la malla de elementos. Cada capa tiene asociado un tiempo a partir del cual se considera que el material ha ingresado al silo, se analiza como

evaluar el lapso entre el tiempo de una capa y la subsiguiente con el fin de permitir que el material ingresado haya alcanzado un nuevo estado de equilibrio. Se analiza la influencia del espesor de las capas en la distribución de las presiones sobre la pared. También se analiza la influencia de suponer que no hay fricción entre el material granular y la pared y cuando se tiene contacto con fricción teniendo como referencia las presiones que se desarrollan sobre la pared. La pared es considerada infinitamente rígida en la mayoría de los casos de aplicación. Los casos de aplicación permiten comparar las presiones normales de contacto obtenidas de las simulaciones con las predicciones de fórmulas teóricas desarrolladas para tolvas cónicas y evaluar las hipótesis bajo las cuales fueron deducidas. Las simulaciones de llenado de silos permiten comparar los resultados obtenidos con la metodología propuesta con los resultados numéricos obtenidos por otros investigadores o bien con datos experimentales de ensayos de silos de laboratorio. Estas comparaciones permiten evaluar la importancia de distintos aspectos del modelo en las predicciones y determinar los rangos de validez.

Finalmente se describen los fenómenos físicos durante el proceso de vaciado y los correspondientes aspectos del modelo numérico. El proceso se aplica al vaciado de tolvas cónicas y a un silo simétrico y otro asimétrico. Se simula el vaciado del mismo silo pero considerando dos procedimientos de llenado diferentes.

## 10.2. Principales conclusiones

En el desarrollo de ésta tesis se realizaron desarrollos computacionales a los cuales se les hicieron pruebas para determinar la bondad de los mismos en los rangos de interés y se estudiaron casos de llenado y vaciado de tolvas y silos. En base a ellos se pueden establecer algunas conclusiones relevantes.

### 10.2.1. Simulación de ensayos de compresión isótropa y de compresión convencional drenados

La simulación de ensayos de compresión isótropa y de compresión convencional drenados permitieron realizar un control detallado del funcionamiento conjunto de la relación constitutiva y el elemento finito implementados.

Al simular el ensayo de compresión isótropa se comprobó que el reemplazo del tercer invariante por la presión en el cálculo del módulo tangente de descarga recarga no cambia los resultados y se evita el calculo de las tensiones principales. La relación de Poisson para bajos niveles de presión no afecta los resultados siempre que se encuentre dentro de valores cercanos a 0.3. En lo referente al coeficiente que fija la forma del elipsoide los resultados son coincidentes con los resultados experimentales en el rango de bajas presiones al utilizar tanto el valor obtenido a partir de ensayos o el valor estimado con la expresión empírica, lo cual proporciona una alternativa confiable para su estimación en los casos que no se cuente con los valores de ensayos.

En las simulaciones del ensayo de compresión convencional drenado los resultados obtenidos al utilizar la presión en reemplazo del tercer invariante en la evaluación del módulo tangente de descarga recarga son coincidentes al igual que en el ensayo de compresión isótropa. La relación de Poisson tiene muy poca influencia entre la relación de tensión y la deformación axial presentando

leve influencia en la relación entre la deformación volumétrica y la deformación axial. El valor del coeficiente de forma del elipsoide proporciona similares predicciones en el rango de presiones de interés (menores a 300000Pa) ya sea que se obtuvo a partir de los datos experimentales o fue estimado con la relación empírica confirmando que éste último es una alternativa confiable. Las predicciones del modelo presentan un mejor acuerdo con los datos experimentales al incrementar la presión de confinamiento, en todos los casos se obtiene muy buen acuerdo en el rango de tensiones de interés. El modelo no es capaz de capturar la dilatación que presenta el material en los ensayos cuando  $\varepsilon_{ax} > 0,07$ , pero la falta de acuerdo de las predicciones se produce para tensiones bastante más elevadas de las esperables en un silo de tamaño real, se puede concluir que la predicción del modelo es muy buena en el rango de tensiones de interés.

### 10.2.2. Simulación del llenado

Se propone una metodología para la simulación del llenado y los procedimientos para definir los valores a asignar a los parámetros del modelo y las consideraciones a tener en cuenta al elaborar la malla de elementos finitos.

La manera establecida para la evaluación de los parámetros de amortiguamiento a asignar al material granular para la etapa de llenado solo depende de las propiedades del material granular y de la altura máxima a alcanzar al finalizar la simulación del llenado y es independiente del espesor de las capas y de la malla de elementos finitos. Los parámetros así determinados permiten que el sistema alcance los valores de desplazamientos estáticos correspondientes.

Los espesores de las capas inmediatamente sobre el fondo o sobre la compuerta y las cercanas a la superficie libre del grano influyen en las tensiones y las presiones de contacto. En la metodología establecida para la simulación del llenado progresivo el amortiguamiento es menos efectivo en las capas inferiores y eso causa que el sobrepaso de los desplazamientos respecto del valor estático afecte tanto las deformaciones como las tensiones y consecuentemente las presiones de contacto. En el caso de las capas superiores, un menor espesor permite que el material adquiera mayor rigidez al ser comprimido por el material que se encuentra por encima, obteniéndose resultados prácticamente coincidentes cuando el espesor es del orden de 0.20m.

La relación constitutiva elastoplástica influye marcadamente en las tensiones y las presiones de contacto cuando las tensiones en el material granular provocan una deformación volumétrica plástica no nula y el elipsoide comienza a expandirse a medida que el material endurece.

Los valores de los coeficientes de penalización utilizados en el algoritmo de contacto influyen de manera importante en las interpenetraciones (no cumplimiento de la condición de no interpenetración del algoritmo de contacto) mientras que su influencia sobre las tensiones es mucho menor.

- Al aplicar la metodología para simular el llenado de *tolvas cónicas* con diferentes ángulos de inclinación de la pared respecto del plano horizontal se observa que el valor máximo de la presión normal de contacto al finalizar el proceso de llenado progresivo aumenta a medida que disminuye el ángulo de inclinación de la tolva respecto de la horizontal. La distancia vertical desde la compuerta hasta la posición del valor máximo es aproximadamente un sexto de la

altura máxima de llenado y es independiente del ángulo de inclinación de la pared de la tolva. También se observa que la distribución de la presión normal de contacto sobre la pared de la tolva no es de tipo hidrostático y que la presencia de la compuerta tiene el efecto de disminuir las presiones de contacto sobre la pared para valores de la coordenada vertical menores a un quinto de la altura máxima de la tolva ( $0 < X_2 < H/5$ ). El número de capas cuyos valores estables de la relación de fricción al finalizar el proceso de llenado es cercano al valor límite, dado por el coeficiente de fricción estático, aumenta cuando el ángulo de inclinación de la pared de la tolva respecto de la horizontal disminuye. Esto indica que una mayor proporción del peso del material es transmitido a la estructura por medio de la fricción desarrollada en el contacto grano - pared.

- A partir de la simulación del llenado concéntrico del *siló de fondo plano* con la metodología propuesta, se obtiene un mejor cumplimiento de la condición de no interpenetración al asignar mayores valores a los coeficientes de penalización a los segmentos inferiores y disminuir los valores de penalización a medida que el segmento está a mayor altura respecto del fondo. Las presiones de contacto muestran poca sensibilidad a los valores asignados a los coeficientes de penalización. Los valores de presión normal de contacto que se obtienen al llenar el silo utilizando el modelo elastoplástico son un 38 % mayores que las obtenidas al utilizar el modelo elástico. Al comparar los resultados obtenidos al utilizar el modelo constitutivo elastoplástico con los valores de la fórmula de Jansen se observa que la distribución de las presiones normales de contacto son levemente superiores de la fórmula de Jansen en los dos tercios inferiores de la pared y son muy semejantes en el tercio superior donde también coincide con la distribución que se obtiene de la fórmula de Reimbert. La notoria diferencia con la distribución obtenida con el modelo elástico indica la relevancia del cambio de rigidez del material al producirse la contracción volumétrica.
- Al aplicar la metodología para simular el llenado del *siló simétrico* de deformación plana de laboratorio, considerando que el llenado se realiza tanto de modo distribuido como concéntrico se observa que las distribuciones de las tensiones en el material granular son diferentes en uno y otro caso poniéndose de manifiesto la influencia del método de llenado en el desarrollo de las tensiones. También se observa que la concentración de tensiones en la transición entre la tolva y el depósito es poco influenciada por la geometría de la misma. Cuando se simula el llenado como de tipo concéntrico se desarrolla una zona de tensión de corte nula en la cercanía del eje de simetría en el depósito característica que no aparece cuando se simula el llenado con capas horizontales correspondiente a un llenado distribuido. Los valores de la presión de contacto obtenidas con el modelo se encuentran dentro de los valores experimentales en el depósito cuando se simula el llenado distribuido y son algo mayores cuando se simula el llenado concéntrico. El mejor acuerdo con los valores experimentales de los resultados obtenidos al simular el llenado como de tipo distribuido, llevaría a confirmar que en los experimentos se utilizó este tipo de llenado. El coeficiente de fricción cinético adoptado tiene influencia en los valores de la presión de contacto pero no en la forma de la distribución de la misma, el valor de este coeficiente no es conocido.

- Cuando se simula el llenado del *silo asimétrico* como de tipo distribuido, se observa que la presencia de la pared inclinada afecta la distribución de las tensiones en la mitad inferior del depósito (zona donde ambas paredes son verticales). Las tensiones cerca de la pared con quiebre son mayores a las que tienen lugar cerca de la pared vertical en la mitad inferior del silo. Cuando se simula el llenado como concéntrico, se observa que la distribución de las tensiones en todo el depósito es afectada por la presencia de la pared inclinada. Para ambos tipos de llenado, la distribución de las tensiones verticales cerca de la pared inclinada es afectada por el valor adoptado para el coeficiente de fricción estático, obteniéndose una marcada concentración de la tensión al utilizar el mayor valor de fricción. A diferencia del silo simétrico, el valor del coeficiente de fricción cinético modifica tanto la forma de la distribución como los valores de la presión normal de contacto sobre la pared inclinada. Las distribuciones de la presión normal de contacto sobre la pared con quiebre obtenidas con el modelo son mucho más cercanas a los valores experimentales, en especial al adoptar el menor valor para el coeficiente de fricción y un modelo de llenado de tipo distribuido. La forma de las distribuciones de la presión de contacto sobre la pared vertical es suave mientras sobre la pared con quiebre presenta un máximo en la parte superior de la pared inclinada y un mínimo local en la parte inferior del tramo vertical de la misma cuando se simula el llenado como de tipo distribuido. Al simular el llenado como de tipo concéntrico, las presiones de contacto que se obtienen de la simulación no capturan los valores de las mediciones sobre la pared vertical pero sí sobre la pared con quiebre. Para este tipo de llenado también se obtiene una distribución suave de la presión de contacto sobre la pared vertical, mientras que la distribución de la presión de contacto presenta dos máximos locales sobre la pared inclinada y un mínimo local en la parte inferior del tramo vertical.

### 10.2.3. Vaciado de tolvas

En la simulación del vaciado de tolvas los resultados muestran que se produce un vaciado de tipo másico en la tolva con mayor ángulo de inclinación respecto de la horizontal, lo cual coincide con las recomendaciones, con base empírica, para el diseño de tolvas. En las tolvas con menor ángulo de inclinación de la pared respecto de la horizontal, no todo el material inicia su movimiento hacia la salida al abrirse la compuerta de salida. En estos casos la metodología permite detectar las zonas donde el material presenta movimiento rápido, movimiento lento y las zonas donde el material granular permanece detenido.

Las simulaciones evidencian la importancia de la fricción entre el material granular y la pared que se refleja en el cambio de forma de las superficies libres superior e inferior del material granular y en la secuencia de salida de los elementos de grano. La fricción estática y cinética son importantes durante el vaciado debido a la influencia que tienen tanto en las distribuciones de tensiones en el material granular como en las presiones de contacto y el tipo de flujo que se produce.

La metodología utilizada permite detectar concentraciones de tensiones y formación de arcos de compresión dentro del material granular a lo largo de la simulación del proceso de vaciado.

Las distribuciones de la presión normal de contacto varían al avanzar la descarga. La variación indica que se genera primero una onda de descompresión que se inicia en el material en contacto

con la compuerta de descarga y viaja hacia arriba a medida que el material se expande. Luego el material desliza, por ser más estrecha la tolva se comprime dando lugar al inicio de una onda de compresión que también viaja desde abajo hacia arriba. El proceso se repite hasta la finalización de la simulación, causando tanto cambios en la forma de la distribución de la presión de contacto como en la posición y valor de los valores máximos. Los valores máximos de la presión normal de contacto no se producen inmediatamente después de la apertura de la compuerta de descarga. Las envolventes de la presión normal de contacto durante el vaciado muestran que la posición del mayor valor depende del ángulo de inclinación de la tolva, para la tolva con mayor ángulo de inclinación se ubica cerca del borde superior y la posición del máximo desciende cuando disminuye el ángulo de la tolva. La magnitud de la presión normal máxima durante el vaciado aumenta al incrementarse el valor del ángulo de inclinación de la pared de la tolva respecto de la horizontal. La ubicación de los máximos de vaciado en relación con el ángulo de la tolva coincide cualitativamente con el comportamiento informado por investigadores que realizan mediciones de presiones normales a la pared. El factor de magnificación dinámica que se obtiene para las tres tolvas analizadas depende del ángulo de inclinación de la pared de la tolva. Para la tolva con mayor ángulo de inclinación de la pared, y que presenta flujo de tipo másico, el valor del factor de magnificación dinámico es superior al de las otras dos tolvas donde el material con movimiento lento o estancado amortigua los valores de sobre presión sobre la pared.

Los resultados muestran que la relación constitutiva implementada logra capturar los rasgos más importantes del comportamiento del grano durante las simulaciones de vaciado, dado el buen acuerdo de los resultados obtenidos en las simulaciones con los informes de diferentes grupos experimentalistas.

#### 10.2.4. Vaciado de silos

En las distintas simulaciones del vaciado tanto del silo simétrico como asimétrico se observa que terminan debido a que el determinante jacobiano de un elemento muy distorsionado tiene un valor negativo o nulo.

- En el caso de las simulaciones de vaciado del *siló simétrico de deformación plana* el flujo del material granular, correspondiente al llenado distribuido, que se encuentra dentro del depósito es uniforme lo cual se evidencia por permanecer las capas dentro del depósito horizontales al igual que la superficie libre superior. Dentro de la tolva el flujo de material tiene mayor velocidad sobre el eje de simetría y es más lento cerca de la pared a consecuencia del desarrollo de la fricción entre el grano y la pared. Las distribuciones de las tensiones muestran la formación de arcos de tensiones de compresión dentro del material granular que ocupa la parte inferior del depósito y la tolva, cuya posición varía a medida que avanza el proceso de vaciado. Las distribuciones de las presiones de contacto presentan fuertes variaciones especialmente sobre la pared de la tolva. Los valores máximos ocurren en la zona de transición depósito - tolva, dando valores del factor de magnificación dinámica mayores o cercanos a seis independientemente del método de llenado y de la geometría de la transición. Al considerar en el modelo la flexibilidad de la estructura, el factor de magnificación dinámica se reduce a 4.6 en la zona

de la transición. La secuencia de salida de los elementos obtenida en correspondencia a los métodos de llenado distribuido y concéntrico son diferentes. Esto indica que el tipo de llenado influye en la manera en la cual se produce la descarga por gravedad del silo.

- Las distribuciones de tensiones en el material granular obtenidas al simular el vaciado del *silo asimétrico de deformación plana* correspondientes al llenado de tipo distribuido muestran que al inicio del vaciado se forma un arco de compresión que llega a ambas paredes del silo inmediatamente por debajo del nivel correspondiente al quiebre de la pared derecha. A medida que avanza la descarga la posición a la cual el arco llega a la estructura desciende. Las distribuciones de la tensión vertical muestran mayores valores cerca de la pared con quiebre respecto a las que se desarrollan cerca de la pared vertical. Las distribuciones de la tensión horizontal muestran un núcleo que se ubica cerca de la pared vertical y cambia su posición y tamaño al avanzar la descarga. El factor de magnificación dinámica sobre la pared con quiebre es un treinta y cinco por ciento mayor al que se obtiene sobre la pared vertical al simular el vaciado correspondiente al llenado distribuido. Las distribuciones de tensiones correspondientes al llenado concéntrico muestran la formación de arcos de compresión cuya posición permanece estable en el tiempo lo cual dificulta el vaciado por gravedad del silo. El factor de magnificación dinámica que se obtiene sobre la pared vertical es similar para ambos tipos de llenado. Sin embargo para la pared con quiebre el factor de magnificación dinámica que se obtiene al vaciar el silo cuando el llenado fue de tipo concéntrico es aproximadamente el 60% del que se obtuvo cuando se simuló el vaciado correspondiente al llenado distribuido. Esto pone de manifiesto que el método de llenado tiene una notoria influencia en las presiones normales de contacto durante el vaciado.

### 10.3. Principales contribuciones de esta tesis

- La relación **constitutiva** implementada combinando para la función de fluencia el modelo de Drucker Prager y el modelo Cam Clay junto con reglas de flujo no asociada y asociada respectivamente y la ley de endurecimiento isótropo para el modelo Cam Clay, contiene los siguientes aportes. La combinación utilizada para la superficie de fluencia, no se ha encontrado en otros trabajos. La relación constitutiva se ha implementado de una manera simple y requiere un mínimo de parámetros. El modelo Cam Clay junto con la ley de endurecimiento empírica propuesta, ajustada dentro del rango de tensiones bajo a medio, logra capturar los rasgos relevantes del comportamiento de los materiales granulares gruesos incluyendo su cambio de volumen y de rigidez.
- Los factores que influyen en el modelo de llenado progresivo, como intervienen y como evaluarlos. El proceso de llenado es donde mayores cuidados debe tenerse al momento de plantear el modelo numérico por ser donde se establecen la discretización vinculada al tipo de llenado (distribuido o concéntrico); el amortiguamiento que permite simular el llenado como un proceso cuasi estático y su relación con el tiempo en el cual se incorporan las capas de material, los parámetros que regirán el contacto entre el material y la pared incluyendo los valores de

penalización y los coeficientes de fricción. Todos estos factores afectan los estados de tensión y de deformación del grano durante el llenado, lo cual a su vez condiciona su comportamiento durante el vaciado.

- La relación constitutiva combinada con la condición de estado disgregado del material granular permiten capturar el comportamiento del grano dentro del silo o tolva al inicio del vaciado. Con esto se reproducen cualitativamente los tipos de flujo asociados a las diferentes geometrías informados por grupos experimentalistas.
- En los silos con flujo másico se captura el movimiento del grano uniforme en el depósito y cómo se modifica éste al entrar el material en la tolva.
- En los silos con flujo canalizado o mixto se logra definir la posición del borde del canal de flujo dentro del material granular, y las zonas de material con movimiento acelerado con movimiento lento y la zona de material estancado (o zona muerta) en concordancia con las observaciones experimentales.
- Los valores de las presiones de contacto que actúan solicitando a la estructura que se calculan con la metodología propuesta, capturan tanto la forma de la distribución como sus valores razonablemente bien al compararlos con los resultados de experimentos.
- Las sobrepresiones que se generan durante el inicio de la etapa de vaciado, indican que los silos con flujo másico son los sometidos a mayores solicitaciones e involucran la fricción entre el grano y la pared en todo el silo. Además las fluctuaciones son muy importantes, fluctuaciones que pueden producir el fenómeno de “sacudida” (quaking) durante el vaciado.
- En los silos con flujo canalizado o mixto, las sobrepresiones calculadas durante el inicio del vaciado son menores a las obtenidas en silos másicos.
- Se logra capturar cualitativamente la formación de arcos de compresión y cuán estables son, lo cual permite evaluar si un diseño de silo se vaciará por gravedad o deben preverse dispositivos para promover el vaciado. También se logra detectar cómo se produce el movimiento dentro del canal de flujo.

#### 10.4. Líneas de trabajo futuro

1 En el **código** empleado

- Reemplazar el modelo de Drucker Prager en la superficie de fluencia por el modelo de Matsuoka Nakai. Con esto se mejora la forma de la superficie de fluencia en el plano octahédrico y se incluye algún acoplamiento entre la parte esférica y la desviadora debido a la presencia del tercer invariante.
- Implementar un elemento triangular que no bloquee cuando las deformaciones volumétricas plásticas sean nulas o muy cercanas a ser nulas (material en estado crítico), como los presentados en [Flores, 2006] y [Castello and Flores, 2008], será de mucha utilidad.

- La fricción entre el grano y la pared requiere de un detallado estudio, tanto en la evaluación de los coeficientes de fricción estático y cinético como en la manera de simular lo que sucede cuando el cociente entre la presión tangente y la presión normal son muy cercanas al valor límite reflejado en el coeficiente de fricción estático. Esto contribuirá a esclarecer la evolución del desarrollo de la fricción, importante para la evaluación del comportamiento estructural.
  - Implementar una técnica de remallado para posibilitar la simulación total del vaciado de silos máxicos.
  - Para el caso de silos con flujo canalizado o mixto es relevante seguir la evolución de los bordes del canal de flujo durante el vaciado. Cuidados especiales deberán tenerse en cuenta de utilizar una técnica de remallado la cual podría combinarse definiendo una superficie de contacto grano - grano en el borde del canal de flujo para posibilitar la simulación total del vaciado por gravedad en caso que este sea posible.
  - Para el proceso de llenado implementar modificaciones en el código de modo que el programa determine cuando agregar cada capa en función de que el sistema haya alcanzado un estado estable.
- 2 Otra línea de trabajo está dirigida al **estudio experimental de materiales granulares**.
- Para la caracterización del comportamiento mecánico macroscópico de materiales granulares gruesos es indispensable realizar estudios experimentales que permitan evaluar los parámetros necesarios tanto para el modelo constitutivo como para la fricción. Comparando los resultados experimentales con simulaciones detectar sus rangos de validez. Se deberá evaluar cómo afectan otros parámetros tales como el contenido de humedad y/o la temperatura al comportamiento mecánico del material granular y la posibilidad de su incorporación al modelo. Para el caso de materiales orgánicos como cereales o leguminosas además deberá hacerse una evaluación de la hipótesis de no deformabilidad de los granos y sus consecuencias en el modelo.
- 3 Una tercera línea de trabajo está relacionada con la posibilidad de generar datos experimentales de **mediciones de presiones en silos**, que debe incluir el estudio de la ubicación de dispositivos y la selección de los dispositivos más adecuados estableciendo sus errores.

# Anexo 1

## Relación de registro de las celdas de presión

La precisión con la cual la celda registra la presión depende de la relación de registro. Esta relación es función de las características del material con el que se llena el silo (módulo de deformación del material de relleno  $E_f$ , espesor de la zona del material de relleno cuya deformación es afectada por la compresión de la celda  $H_f$ ) y de las características de la celda de presión (módulo de compresibilidad de la celda  $M_c$ , dimensiones de la celda: espesor  $t_c$ , diámetro  $D_c$  y la distancia que sobresale de la pared  $d_c$ ). El relleno ejerce una presión  $\sigma_{hf}$  sobre la pared, pero al deformarse la celda registra un valor  $\sigma_c$  diferente de  $\sigma_{hf}$ . La relación de registro se define como:

$$\begin{aligned} R &= \frac{\sigma_c}{\sigma_{hf}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{E_f t_c}{H_f M_c}} \end{aligned}$$

$E_f / H_f$  depende del material con el cual se llena el silo mientras  $t_c / M_c$  es una característica de la celda. Si la relación  $t_c / M_c$  tiende a cero  $R$  tenderá a ser 1. Con el fin de lograr un valor de  $R$  lo más cercano posible a 1 se trata de maximizar  $M_c$ . Durante el vaciado la celda puede sobresalir de la pared y modificar la deformación del material delante de ella, entonces la relación de registro será:

$$R = \frac{\frac{1+d_c E_f}{\sigma_{hf} H_f}}{\frac{1+E_f t_c}{H_f M_c}}$$

La celda conocida como de deformación cero tiene una relación de registro prácticamente unitaria, tanto para carga como descarga, lo cual hace más exactas las mediciones. Blight y Bentel dan ejemplos de funcionamiento de este tipo de celdas.

## Descripción de los strain gages

Los strain gage son resistencias sensibles a la deformación extremadamente delgadas y pequeñas unidas a un material de soporte que es adherido a la estructura y transforma las deformaciones de la superficie en cambios de resistencia eléctrica, el conjunto es conocido como estampilla. Los cambios de resistencia son leídos directamente como deformaciones, carga, presión, etc. en el apropiado instrumento. El tamaño de la estampilla a utilizar depende del gradiente de deformaciones en la zona donde se lo va a adherir y si se requiere de un valor medio (como en el caso de materiales

compuestos por fibras y una matriz o en el hormigón) o sobre un área muy pequeña para minimizar cualquier integración de las deformaciones.

La sensibilidad del gage es definida por el cociente entre la relación de cambio unitario de resistencia ( $\Delta R/R$ ) y la deformación unitaria ( $\Delta L/L$ ) que se denomina factor de calibración  $GF$ . Este factor es función del diseño del gage, de la aleación utilizada en la grilla, la historia termomecánica y de la temperatura de medición.

Las geometrías de las grillas son diseñadas para medir la deformación en la dirección axial de la grilla y ser afectadas lo menos posible por las deformaciones en la dirección transversal. Los gage con grilla simple miden en una dirección. En campos biaxiales, donde las direcciones principales son inciertas, suelen utilizarse strain gage de tres elementos o roseta, compuesto por grillas orientadas a  $0^\circ - 45^\circ - 90^\circ$  o  $0^\circ - 60^\circ - 120^\circ$  que permiten determinar las magnitudes de dos deformaciones principales y su dirección. Si la dirección de las deformaciones principales es conocida pueden utilizarse rosetas "T" de dos grillas. Las deformaciones de corte no pueden medirse directamente, en general se requiere conocer la dirección de la máxima deformación de corte.

Los strain gage deben ser instalados en puntos adecuados y con mucho cuidado para obtener mediciones precisas y confiables. Para cumplir esto se requiere seguir estrictamente el procedimiento suministrado por el fabricante incluyendo el uso de accesorios, herramientas y suministros. La selección del adhesivo es de principal importancia. Algunos son simples de aplicar y curar pero se degradan rápidamente mientras otros más estables requieren mayor tiempo y temperatura de curado. También debe cuidarse la selección del estaño para soldadura y de la cubierta que protege del ambiente a la estampilla.

Debido a que los cambios de resistencia por unidad de micro deformación son muy pequeños se utiliza un circuito para convertir los cambios de resistencia en voltaje. Generalmente utilizan un puente Wheatstone conectado a un amplificador de corriente continua de alta ganancia para dar a la señal un nivel conveniente para ser manejado por un dispositivo digital o un adquirente de datos. Una descripción más detallada puede encontrarse en [Lineback, 1996].

Los strain gage son parte de las celdas de carga resistivas y de las sondas.

# Anexo 2

## Determinación de parámetros constitutivos

La mayoría de los datos del material, arena fina lavada del río Sacramento se obtuvieron de [Lee and Seed, 1967].

El peso específico de la fracción sólida es  $\gamma_s = 26800N/m^3$  por lo tanto la densidad de los mismos es  $\rho_s = 2731,9Kg/m^3$ . La relación de vacíos mínima  $e_{\text{mín}} = 0,61$  y la máxima  $e_{\text{máx}} = 1,03$ .

Los ensayos corresponden a cuatro densidades iniciales  $D_r = 38\%$  ( $e_o = 0,87$ ),  $D_r = 60\%$  ( $e_o = 0,78$ ),  $D_r = 78\%$  ( $e_o = 0,71$ ) y  $D_r = 100\%$  ( $e_o = 0,61$ ) de las cuales interesa  $D_r = 38\%$  cuya relación de vacíos inicial es  $e_o = 0,87$ .

### Densidad del material granular

La densidad inicial del material granular se calcula a partir de la densidad de la fracción sólida y de la relación de vacíos inicial.

$$\begin{aligned}\rho_o &= \frac{\rho_s}{1 + e_o} \\ &= \frac{2731,9Kg/m^3}{1 + 0,87}\end{aligned}$$

El valor a suministrar como dato es:

$$\rho_o = 1460Kg/m^3$$

### Parámetros elásticos

#### Módulo de descarga recarga

$$E_{ur} = k_{ur} p_a \left( \frac{p}{p_a} \right)^n$$

**Exponente** Según el trabajo de [Duncan and Chang, 1970] es razonable suponer el comportamiento tensión deformación del suelo en descarga y recarga puede ser aproximado con alto grado de precisión como lineal elástico. Ese comportamiento lineal es independiente del valor de la relación de tensiones y el valor representativo del módulo depende solo de la presión de confinamiento. La variación del valor del módulo con la presión de confinamiento puede representarse con la expresión (??), donde  $E_{ur}$  es el valor del módulo de descarga recarga y  $k_{ur}$  el correspondiente número módulo.

La influencia de la presión de confinamiento es medida por el valor  $n$ , que para propósitos prácticos es el mismo para descarga recarga que para carga primaria.

En primer lugar se obtendrá el exponente realizando el ajuste hiperbólico a las curvas tensión deformación en carga primaria correspondientes a los ensayos de compresión triaxial estándar drenados. Con este procedimiento se encuentran los valores del número módulo  $k$  (que no se utilizará) y el valor del exponente  $n$  que definen el módulo tangente  $E_t$ . Los datos de los ensayos para las tres menores presiones de confinamiento son los que se presentan en la Tabla 1, y los valores transformados en la Tabla 2 obtenidos de la Fura 4 pag. 124 de [Lee and Seed, 1967].

$\sigma_3 = 100000N/m^2$		$\sigma_3 = 200000N/m^2$		$\sigma_3 = 450000N/m^2$	
$\varepsilon_{ax}$	$\sigma_1 N/m^2$	$\varepsilon_{ax}$	$\sigma_1 N/m^2$	$\varepsilon_{ax}$	$\sigma_1 N/m^2$
0,0019	216923	0,0011	369231	0,0028	778846
0,0056	255769	0,0038	430769	0,0047	900000
0,0103	284615	0,0094	507692	0,0075	1003846
0,0150	305769	0,0150	557692	0,0141	1133654
0,0310	334615	0,0226	596154	0,0226	1237500
0,0498	353846	0,0338	634615	0,0451	1401923
0,0630	367308	0,0451	663077	0,0630	1479808
0,1109	384615	0,0602	692308	0,0865	1540385
0,1278	380769	0,0912	723077	0,1203	1592308
0,1786	376923	0,1203	738462	0,1466	1600962
		0,1504	740000	0,1767	1592308
		0,1795	738462		

Tabla 1: Valores de los ensayos de compresión normal drenados

$\sigma_3 = 100000N/m^2$		$\sigma_3 = 200000N/m^2$		$\sigma_3 = 450000N/m^2$	
$\varepsilon_{ax}$	$\varepsilon_{ax}/(\sigma_1 - \sigma_3)$	$\varepsilon_{ax}$	$\varepsilon_{ax}/(\sigma_1 - \sigma_3)$	$\varepsilon_{ax}$	$\varepsilon_{ax}/(\sigma_1 - \sigma_3)$
0,0019	$1,60810^{-8}$	0,0011	$6,66410^{-9}$	0,0028	$8,57410^{-9}$
0,0056	$3,62010^{-8}$	0,0038	$1,62910^{-8}$	0,0047	$1,04410^{-8}$
0,0103	$5,60010^{-8}$	0,0094	$3,05510^{-8}$	0,0075	$1,35810^{-8}$
0,0150	$7,30810^{-8}$	0,0150	$4,20410^{-8}$	0,0141	$2,06210^{-8}$
0,0310	$1,32210^{-7}$	0,0226	$5,69410^{-8}$	0,0226	$2,86410^{-8}$
0,0498	$1,96210^{-7}$	0,0338	$7,78510^{-8}$	0,0451	$4,73910^{-8}$
0,0630	$2,35610^{-7}$	0,0451	$9,74210^{-8}$	0,0630	$6,11510^{-8}$
0,1109	$3,89710^{-7}$	0,0602	$1,22210^{-7}$	0,0865	$7,93010^{-8}$
0,1278	$4,55210^{-7}$	0,0912	$1,74310^{-7}$	0,1203	$1,05310^{-7}$
0,1786	$6,44810^{-7}$	0,1203	$2,23410^{-7}$	0,1466	$1,27410^{-7}$
		0,1504	$2,78510^{-7}$	0,1767	$1,54710^{-7}$
		0,1795	$3,33410^{-7}$		

Tabla 2: Valores transformados de los ensayos de compresión normal drenados

Los datos de la Tabla 2 fueron graficados y obtenidas las rectas de regresión de los valores para cada presión de confinamiento.

El ajuste corresponde a  $Log(E_i) = A + BLog(\sigma_3)$  siendo  $A = 5,12903 \pm 0,25526$  y  $B = 0,52228 \pm 0,04794$ . El parámetro  $B$  del ajuste es el valor del exponente  $n$  que se estaba buscando, el limite superior para  $n$  es  $0,57022 \simeq 0,57$  que coincide con el valor dado por [Lade, 1977] para este material. Debido a que no se cuenta con un gráfico ni con datos de una curva descarga recarga de un ensayo triaxial  $(\sigma_1 - \sigma_3; \varepsilon_{ax})$  no pudo realizarse el ajuste para encontrar  $E_{ur}$ , para luego poder calcular el numero modulo  $k_{ur}$  con la expresión:

$$k_{ur} = \frac{E_{ur}}{p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a}\right)^n}$$

por esta razón se adoptó el valor para  $k_{ur}$  dado por Lade [Lade, 1977] para la arena del río Sacramento.

### Parámetros para definir la superficie de fluencia $f_1$

En [Lee and Seed, 1967] el valor del ángulo de fricción interna (parámetro del criterio de falla de Mohr Coulomb) para tensiones bajas a medias es  $\phi = 34^\circ$  y no presenta cohesión por lo cual  $c = 0$ . Estos valores corresponden al ajuste de una recta a los círculos de Mohr en un gráfico de la tensión de corte en función de la tensión normal figura 6 pág. 126 de la referencia.

### Parámetros para definir la superficie de fluencia $f_2$

#### Parámetro M (forma del elipsoide)

El valor del parámetro  $M$  se obtiene como la pendiente de la línea de estado crítico. Donde el estado critico es la condición ultima a la que tiende la respuesta del material donde las deformación plástica de corte podría continuar sin producir cambios en el volumen ni en las tensiones efectivas. Estos estados están definidos por la tensión desviadora generalizada  $q_{cs}$  la presión  $p_{cs}$  y la relación de vacíos  $e_{cs}$  en ese estado particular, siendo  $M = q_{cs}/p_{cs}$  llamada relación de tensiones en el estado critico.

En Figura 13 a) pag. 131 de [Lee and Seed, 1967], el valor para  $\phi_{cs} = 37^\circ$  con el cual no puede estimarse  $M$  debido a que  $\phi_{cs}$  es el ángulo que forma la envolvente de falla a volumen constante en el plano definido por la tensión de corte y la tensión normal. De la Figura 13 b) se obtuvieron los datos de tensión desviadora de falla y presión de confinamiento critica que se presentan en la Tabla 3 en base a esos datos se obtuvieron los valores de  $q = \sigma_1 - \sigma_3$  y  $p = \sigma_{3cs}$  que se presentan en la Tabla 4 valores que permiten estimar el valor de  $M$ .

Tabla 3: Tensión desviadora y presión de confinamiento para deformación volumétrica nula

Tensión desviadora en falla	Presión de confinamiento crítica
$(\sigma_1 - \sigma_3)_f$ [Pa]	$\sigma_{3cr}$ [Pa]
625000	200000
1625000	550000
2625000	850000
4875000	1550000

Tabla 4: Tensión desviadora generalizada y presión para deformación volumétrica nula

$q_{cs}$	$p_{cs}$
[Pa]	[Pa]
625000	408333
1625000	1091666
2625000	1725000
4875000	3175000

ajustando una recta a los valores de la Tabla 4, se tiene que  $M = 1,54$ .

Otra forma de estimar el valor del parámetro  $M$  es utilizando la expresión dada por Wood en [Wood, 1991] (ec. 7.13 pág. 179) para estados de compresión:

$$\begin{aligned}
 M &\simeq \frac{\phi}{25} \\
 &\simeq \frac{34}{25} \\
 M &\simeq 1,36
 \end{aligned}$$

### Ley de endurecimiento $p_o(\Delta^p)$

Los valores del ensayo de compresión isótropa para  $e_o = 0,87$  se presentan en la Tabla 5 fueron extraídos de la Figura 2 pag.123 de [Lee and Seed, 1967]. Cabe aclarar que los datos corresponden a valores de presión  $p > p_{pc}$  donde  $p_{pc} = 50000Pa$  es el valor de la precarga aplicada a la probeta (o presión de confinamiento inicial). Luego de aplicada  $p_{pc}$  se miden las deformaciones volumétricas totales. La deformación volumétrica se calcula a partir del volumen específico  $V = 1 + e$  y del volumen específico inicial  $V_o = 1 + e_o$  como  $\Delta = (V - V_o)/V_o$  (considerando como positiva la contracción de volumen) o bien  $\Delta = (e - e_o)/(1 + e_o)$ .

Tabla 5: Valores experimentales de la curva de compresión normal isotrópica para  $e_o = 0,87$

$\Delta$	$p[Pa]$
0.0000 $10^0$	50000
1.5170 $10^{-3}$	100093
3.0341 $10^{-3}$	201353
5.3097 $10^{-3}$	254339
7.5852 $10^{-3}$	406044
1.2136 $10^{-2}$	599864
1.9722 $10^{-2}$	1063669

Tomando como base lo expresado en el capítulo 11 de [Desai and Siriwardane, 1984], se estiman las deformaciones volumétricas elásticas con el siguiente procedimiento:

$$\Delta^e = \frac{p - p_{pc}}{K(p)}$$

donde  $K(p)$  es el modulo volumétrico que se calcula haciendo:

$$K(p) = \frac{E_{ur}(p)}{3(1 - 2\nu)}$$

donde

$$E_{ur}(p) = k_{ur} pa \left( \frac{p}{pa} \right)^n$$

con  $p = \sigma_3$  y  $\nu$  es la relación de Poisson. Una vez estimado el valor de la deformación elástica puede obtenerse la deformación volumétrica plástica

$$\Delta^p = \Delta - \Delta^e$$

a cada valor de  $\Delta^p$  se le asigna el valor de  $p$  al cual corresponde, dado que es máximo valor posible en el material. Con ello se obtienen los valores que se presentan en la Tabla 6, a los cuales se ajusta un polinomio cuadrático que definen la ley de endurecimiento  $p_o(\Delta^p)$ .

Tabla 6: Valores estimados  $\Delta^p - p$

$\Delta^p$	$p[Pa]$
0	50000
$5.78 \cdot 10^{-4}$	100093
$1.13 \cdot 10^{-3}$	201353
$3.06 \cdot 10^{-3}$	254339
$4.58 \cdot 10^{-3}$	406044
$8.42 \cdot 10^{-3}$	599864
$1.48 \cdot 10^{-2}$	1063669

En la figura correspondiente al ensayo de compresión isótropa se graficaron  $\Delta - p$  y  $\Delta^p - p$  indicando para un valor de  $p$   $\Delta^p$  y  $\Delta^e$ , los valores de la Tabla 6 se presentan junto con el polinomio ajustado por mínimos cuadrados.

Los coeficientes del ajuste ( $a_1, a_2, a_3$ ) definen la ley de endurecimiento en base a la cual se evaluara el parámetro  $p_o$  que fija el tamaño del “cap” con

$$p_o(\Delta^p) = a_1 + a_2 \Delta^p + a_3 (\Delta^p)^2$$

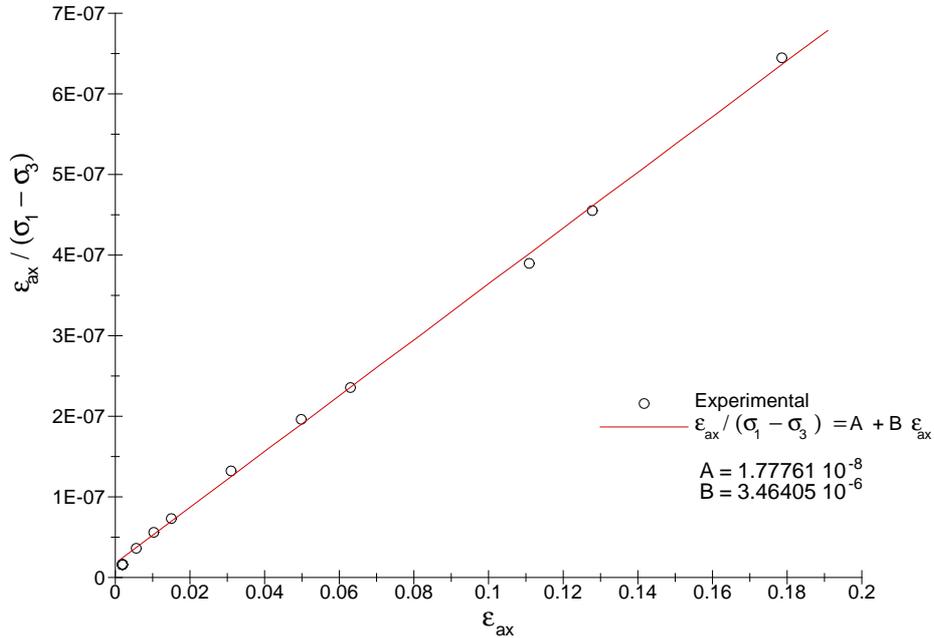
$$a_1 = 77719$$

$$a_2 = 6,39 \cdot 10^7$$

$$a_3 = 1,53 \cdot 10^8$$

(De contarse con ensayos de compresión isótropa con descarga y recarga, de los mismos podrían obtenerse los pares de valores ( $p_o, \Delta^p$ ))

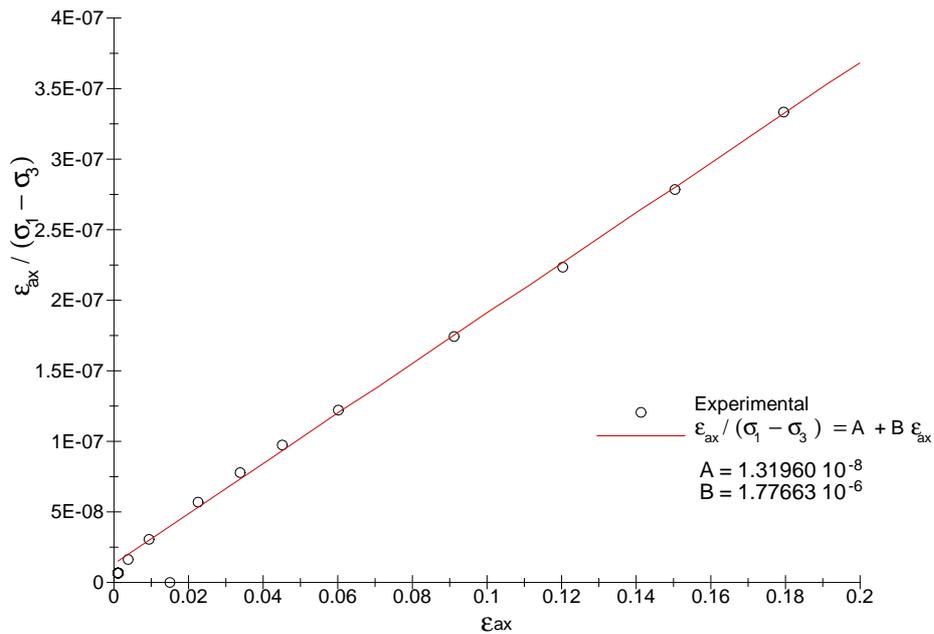
Para  $\sigma_3 = 100000N/m^2$



Ensayo de compresion convencional drenado para  $\sigma_3 = 100000Pa$

El valor de  $E_i = 1/A = 56255309Pa$ , obteniendose el primer par ordenado (100000, 56255309) necesario para el siguiente ajuste.

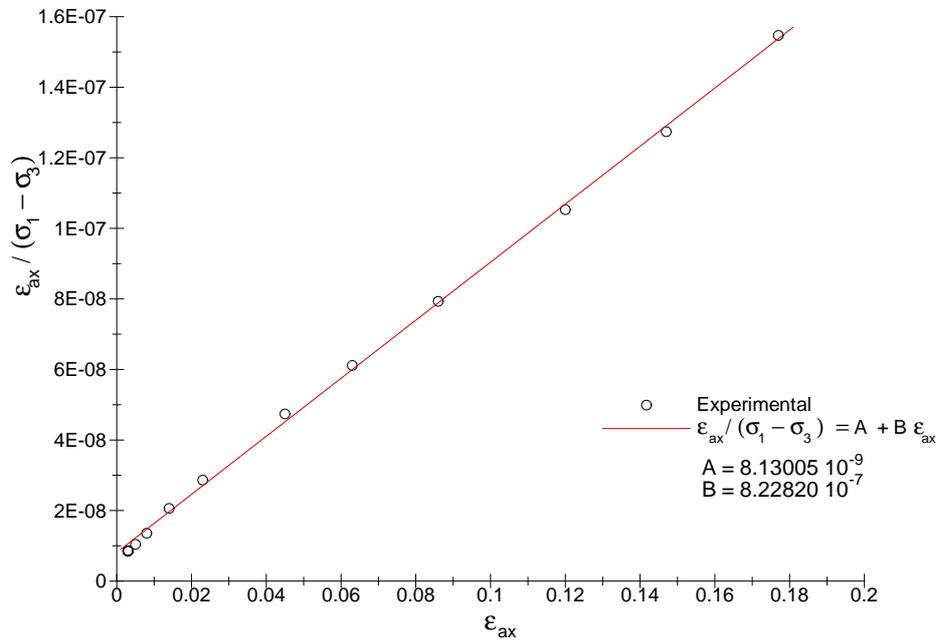
Para  $\sigma_3 = 200000N/m^2$



Ensayo de compresion convencional drenado para  $\sigma_3 = 200000Pa$

El valor de  $E_i = 1/A = 75780540Pa$ , obteniendose el segundo par ordenado (200000, 75780540)

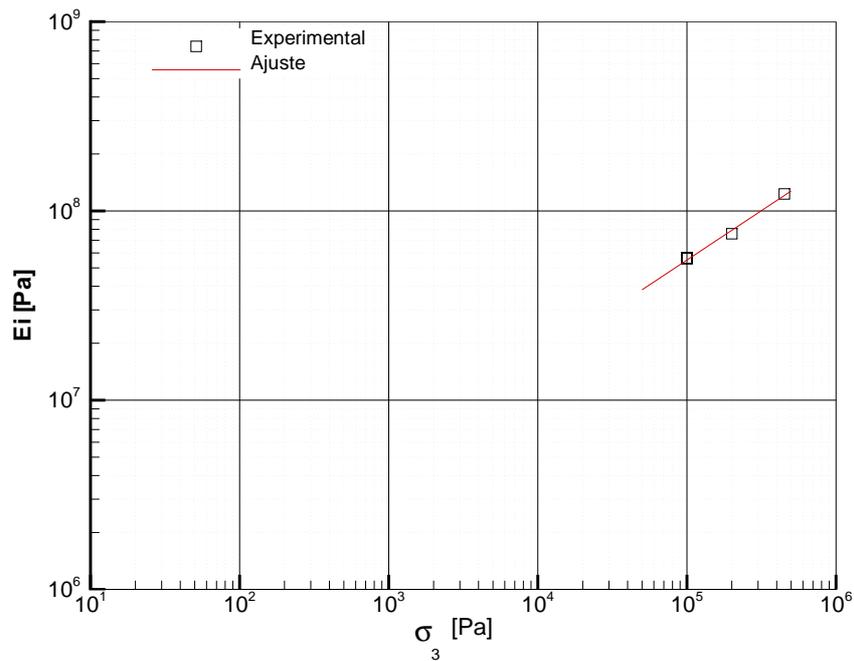
Para  $\sigma_3 = 450000 N/m^2$



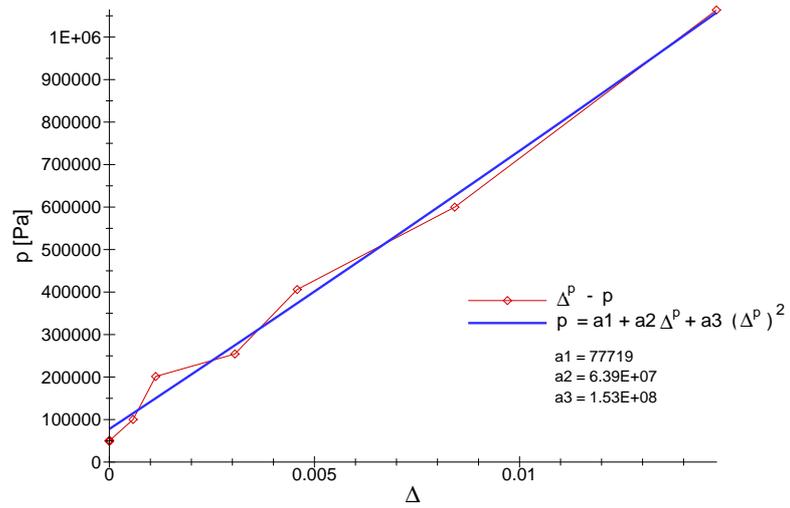
Ensayo de compresión convencional drenado para  $\sigma_3 = 450000 Pa$

El valor de  $E_i = 1/A = 123000470 Pa$ , obteniéndose el tercer par ordenado (450000, 123000470).

Los tres pares se grafican utilizando escala logarítmica en ambos ejes, y se ajusta una recta.



Representación doble logarítmica de los pares  $\sigma_3 - E_i$



Ensayo de compresión isotrópica

# Anexo 3

## Fórmulas teóricas para tolvas cónicas

### Teoría de Walker

Walker utilizó el método de las rebanadas diferenciales que originalmente fue utilizado por Janssen para determinar las presiones, tensiones normales, que el material ejerce sobre las paredes de silos cilíndricos.

Para condiciones estáticas, o de llenado inicial, Walker supuso que la tensión principal mayor es vertical. Esto conduce a una distribución hidrostática de la presión vertical, o tensión vertical. La distribución de tensiones resultante se denomina “campo de tensiones pico”. Si se supone que la fricción está totalmente movilizada la presión sobre la pared estará dada por  $p_i$ , siendo:

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \gamma(H - z) + \sigma_{zt} \\ F_i &= \frac{1}{1 + \mu \cot \beta} \\ p_i &= F_i \sigma_z\end{aligned}$$

donde  $\sigma_z$  es la tensión media a la altura  $z$  que se mide desde el vértice del cono en la dirección del eje de simetría de la tolva,  $H$  es la altura del material dentro de la tolva medida desde el vértice (no desde la posición de la compuerta),  $\gamma$  es la densidad del material granular,  $\sigma_{zt}$  es la tensión en la transición entre la tolva y el depósito cilíndrico,  $\mu$  es el coeficiente de fricción entre el material granular y la pared y  $\beta$  es el ángulo entre la pared de la tolva y el eje de simetría.

Bajo condiciones de flujo Walker examinó una rebanada elemental cilíndrica horizontal y supuso que el material adyacente a la pared se encuentra en falla pasiva. Dando las expresiones:

$$\begin{aligned}2\varepsilon_f &= \frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \mu - \cos^{-1} \left( \frac{\mu}{\sin \phi \sqrt{1 + \mu^2}} \right) \\ B &= \frac{\sin \phi \sin (2\beta + 2\varepsilon_f)}{1 - \sin \phi \cos (2\beta + 2\varepsilon_f)} \\ n &= \frac{2BD}{\tan \beta} \quad D = 1 \\ \sigma_z &= \frac{\gamma H}{n - 1} \left[ \frac{z}{H} - \left( \frac{z}{H} \right)^n \right] + \sigma_{zt} \left( \frac{z}{H} \right)^n \\ F_f &= \frac{1 + \sin \phi \cos (2\varepsilon_f)}{1 - \sin \phi \cos (2\beta + 2\varepsilon_f)} \\ p_f &= F_f D \sigma_z\end{aligned}$$

La distribución de tensión resultante se denomina frecuentemente como “campo de tensiones en arco”.

[Ooi and Rotter, 1991] observan en su trabajo que las teorías de Walker para el llenado y el vaciado parecen ser diferentes, porque en el llenado la distribución de presiones es independiente de las propiedades de falla del material mientras que en la etapa de vaciado (flujo) depende del ángulo de fricción interna. Esta diferencia nubla la verdad, ya que la teoría de llenado es un caso límite de la teoría de flujo y las ecuaciones de flujo serían de aplicación más general.

Si se supone que la relación entre la presión en la pared  $p$  y la tensión vertical media  $\sigma_z$  es constante y de valor  $FD$  en toda la tolva, por condición de equilibrio, se tiene la primera expresión de  $\sigma_z$ . Si se considera también el equilibrio de toda la tolva se encuentra que las presiones sobre la pared de la tolva deben satisfacer la siguiente condición:

$$n = 2(FD\mu \cot \beta + FD - 1)$$

que lleva a que las expresiones de  $n$  y  $B$  ya no sean necesarias. Quedan entonces al consideración de equilibrio y la relación entre las presiones  $FD$ . La relación entre las presiones en el material y sobre la pared puede derivarse suponiendo que el material se encuentra en estado de falla plástica, como en la deducción de las ecuaciones de flujo de Walker, o suponiendo que no hay tensiones de corte en planos verticales dentro del sólido. Esta última lleva a que  $n = 0$ . Otras suposiciones pueden utilizarse o para encontrar la relación  $FD$ , que representan modificaciones a la teoría de Walker tales como de la Walters o Mc Lean.

### Teoría de Walters y otras modificaciones a la teoría de Walker

Walter extendió la teoría de Walker para considerar que las tensiones verticales que actúan en una rebanada horizontal del material no son uniformes. Para ello supuso que toda la masa de material granular se encuentra en condición de falla plástica. Supuso que al finalizar el llenado el material se encuentra en estado de falla activa tal como se lo define en el ámbito de la mecánica de los suelos. Para el vaciado supuso que el material se encuentra en falla pasiva. Con el fin de simplificar las ecuaciones supuso que la tensión de corte vertical varía linealmente con el radio. Estas suposiciones llevan a las mismas expresiones para  $\sigma_z$ ,  $F_f$  y  $n$  obtenidas por Walker, pero ahora se debe reemplazar a  $\varepsilon_f$  por  $\varepsilon$  que se transcribe a continuación y el parámetro  $D$  debe calcularse con la expresión dada que se da seguidamente.

$$\begin{aligned} 2\varepsilon &= \frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \mu \pm \cos^{-1} \left( \frac{\mu}{\sin \phi \sqrt{1 + \mu^2}} \right) \\ \eta &= \tan^{-1} \left[ \frac{\sin(2\varepsilon + 2\beta) \sin \phi}{1 + \cos(2\varepsilon + 2\beta) \sin \phi} \right] \\ c &= \left( \frac{\tan \eta}{\tan \phi} \right)^2 \\ y &= \frac{2}{3c} \left[ 1 - (1 - c)^{3/2} \right] \\ D &= \frac{\cos \eta (1 + \sin^2 \phi) \pm 2\sqrt{\sin^2 \phi - \sin^2 \eta}}{\cos \eta [(1 + \sin^2 \phi) \pm 2y \sin \phi]} \end{aligned}$$

En las expresiones anteriores signo (+) corresponde a la condición de llenado y el (-) a la condición de flujo durante el vaciado.

Si la teoría de Walter se expresa en términos del parámetro  $B$ , entonces se tiene que:

$$n = 2 \left( \frac{BD}{\tan \beta} + D - 1 \right)$$

La solución de Walter da tensiones muy elevadas para la condición de llenado inicial, salvo que el semi ángulo de la tolva  $\beta$  sea muy pequeño esto es si:

$$\beta < \frac{1}{2} (\pi - 12\varepsilon_i)$$

siendo  $\varepsilon_i$  el valor de  $\varepsilon$  para llenado inicial. Esta limitación implica que el estado activo sería válido solo para tolvas de pared muy empinada (tolvas de flujo másico). El estado pasivo que se supuso que ocurre durante la descarga y es idéntico al que supuso Walker si se adopta para el factor de distribución  $D = 1$ .

La suposición de que la tensión de corte varía linealmente con el radio, en cualquier plano horizontal, puede verse como no válida si toda la masa está en falla y el ángulo  $\beta$  de la tolva es mayor que:

$$\beta_{\text{máx}} = \frac{1}{2} \left[ \phi - \tan^{-1} \mu + \cos^{-1} \left( \frac{\mu}{\sin \phi \sqrt{1 + \mu^2}} \right) \right]$$

que corresponde a las denominadas tolvas de flujo canalizado, hasta cierto valor del ángulo  $\beta$ .

## Modelos teóricos para la distribución de presiones en silos

El modelo de distribución de presiones en las paredes de un silo ejercidas por el material almacenado pueden ser obtenidas utilizando los métodos de Janssen o de Reimbert. Una descripción de ambos pueden encontrarse en el trabajo de Liévin [Lievin 1987].

La expresión para calcular la distribución de presiones dada por Janssen es:

$$p_{cn} = \left( \frac{\gamma Ar}{\mu_s \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right)} \right) \left[ 1 - \exp \left( \frac{-z \mu_s \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right)}{r} \right) \right]$$

siendo:

- $\gamma$  peso específico del material granular
- $A$  área de la sección horizontal del silo
- $P$  perímetro de la sección horizontal del silo
- $r$  radio hidráulico ( $r = A/P$ )
- $\mu_s$  coeficiente de fricción entre el material granular y la pared ( $\mu_s = \tan \phi_w$ )
- $\phi$  ángulo de fricción interna del material granular
- $z$  profundidad medida respecto de la intersección superficie libre y la pared
- $H$  altura de la intersección superficie libre y la pared respecto del fondo

Para un silo cilíndrico el radio hidráulico  $r = R/2$  a la mitad del radio, mientras que para un silo de sección rectangular

$$r = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Bt}{2(B+t)} = \frac{B}{2}$$

donde  $B$  es el ancho de la sección y  $t$  la profundidad. El método de llenado que Janssen utilizó en su trabajo experimental fue tal que la superficie libre era horizontal (llenado distribuido). A partir de los resultados experimentales propuso la expresión para  $p_{cn}$ .

La expresión correspondiente al modelo de Reimbert es:

$$p_{cn} = \gamma A \left( z + \frac{h}{3} - \frac{z^2}{z + A} \right)$$

siendo  $\gamma$ ,  $A$  y  $z$  los mismos que en el caso del método de Janssen y  $h$  es la altura del cono que forma el material granular cuando el silo se llena de manera concéntrica.

# Bibliografía

- [Arnold and McLean, 1978] Arnold, P. and McLean, A. (1978). Wall load in steel bins. *Journal of the Australian Institute of Steel Construction*, 12(3):2–23.
- [Arnold et al., 1982] Arnold, P., McLean, A., and Roberts, W. (1982). Bulk solids: storage, flow and handling. Technical report, The University of Newcastle Research Associates (TUNRA).
- [Benik, 1989] Benik, E. (1989). *Flow and stress analysis of cohesionless bulk materials in silos related to codes*. Doctoral Thesis. PhD thesis, The University of Twente, Enschede, The Netherlands.
- [Blight, 1983] Blight, G. (1983). Measuring pressures in silos with pressure cells. In *2nd International Conference on Design of Silos for Strength and Flow*, volume 1, pages 217–229, Stratford-on-Avon, U.K.
- [Blight and Bentel, 1988] Blight, G. and Bentel, G. (1988). Measurements on full size silos. *Bulk Solids Handling*, 8(3):343–346.
- [Bridgwater, 1980] Bridgwater, J. (1980). On the width of failure zones. *Geotechnique*, 30:533–536.
- [Calil and Haaker, 1989] Calil, C. and Haaker, G. (1989). Overpressure coefficients in silos with funnel flow. *Powder Handling & Processing*, 1(1):67–71.
- [Castello and Flores, 2008] Castello, W. and Flores, F. (2008). A triangular finite element with local remeshing for the large strain analysis of axisymmetric solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198:332–343.
- [Chen et al., 2001] Chen, J., Yu, S., Ooi, J., and Rotter, J. (2001). Finite element modelling of filling pressures in a full scale silo. *Journal of Engineering Mechanics*, 127(10):1058–1066.
- [Chen, 1980] Chen, W. (1980). Plasticity in soil mechanics and landslides. *Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE - EM3*, 106:443–464.
- [Chen and Baladi, 1985] Chen, W. and Baladi, G. (1985). *Soilplasticity. Theory and Implementation*. Elsevier.
- [Chen and Han, 1988] Chen, W. and Han, D. (1988). *Plasticity for Structural Engineers*. Springer Verlag.
- [Crisfield, 1991] Crisfield, M. (1991). *Non-linear finite element analysis of solids and structures. Essentials*, volume 1. John Wiley & Sons.

- [Crisfield, 1998] Crisfield, M. (1998). *Non-linear finite element analysis of solids and structures. Advanced topics. (reprint)*, volume 2. John Wiley & Sons.
- [Dafalias and Herrmann, 1980] Dafalias, Y. and Herrmann, L. (1980). A bounding surface soil plasticity model. *Procedures International Symposium Soils Under Cyclic and Transient Loading*, pages 335–345.
- [Desai and Siriwardane, 1984] Desai, C. and Siriwardane, H. (1984). *Constitutive Laws for Engineering Materials. With emphasis on geologic materials*. Prentice Hall.
- [Diez and Godoy, 1991] Diez, M. and Godoy, L. (1991). Pressures in spherical silos during discharge. *International Journal of Powder Handling & Processing*, 3(2):137–140.
- [Diez and Godoy, 1992] Diez, M. and Godoy, L. (1992). Viscoplastic incompressible flow of frictional cohesive solids. *International Journal of Mechanics Sciences*, 34:395–408.
- [Duncan and Chang, 1970] Duncan, M. and Chang, C. (1970). Nonlinear analysis of stress and strain in soils. *Journal of the Soil Mechanics Foundation Division ASCE*, 96:1629–1653.
- [Elaskar and Godoy, 1998] Elaskar, S. and Godoy, L. (1998). Constitutive relations for compressible granular materials using non-newtonian fluid mechanics. *International Journal of Mechanical Sciences*, 40:1001–1018.
- [Elaskar et al., 2000] Elaskar, S., Godoy, L., Gray, D., and Stiles, J. (2000). A viscoplastic approach to model the flow of granular solids. *International Journal of Solids and Structures*, 37(15):2185–2214.
- [Flores, 1999] Flores, F. (1999). Simpack/delta. an explicit finite element program. Technical report, Departamento de Estructuras, Universidad Nacional de Córdoba.
- [Flores, 2006] Flores, F. (2006). A two-dimensional linear assumed strain triangular element for finite deformations analysis. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 73(6):970–976.
- [Guaita Fernández et al., 1996] Guaita Fernández, M., Ayuga Tellez, F., and Aguado Rodriguez, P. (1996). Aplicación del método de los elementos finitos en la estimación de empujes estáticos sobre las paredes de silos. *III Congreso Internacional de Ingeniería de Proyectos*, pages 1658–1665.
- [Guines et al., 2002] Guines, D., Léotoingand, L., and Ragneau, E. (2002). Numerical investigations of flow patterns in a cylindrical silo using an ale approach. In *15th ASCE Engineering Mechanics Conference*, pages 2–5, Columbia University New York.
- [Hamadeh and Kaminski, 1996] Hamadeh, H. and Kaminski, M. (1996). Measurement of pressure distribution inside de silo model. *Powder Handling & Processing*, 8(2):153–154.
- [Häussler and Eibl, 1984] Häussler, U. and Eibl, J. (1984). Numerical investigations on discharging silos. *Journal of Engineering Mechanics*, 110(6):957–971.
- [Hinton, 1992] Hinton, E. E. (1992). *NAFEMS. Introduction to nonlinear finite element analysis*. NAFEMS.

- [Hughes, 2000] Hughes, T. (2000). *The finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Publications Inc.
- [Hvorslev, 1976] Hvorslev, M. (1976). *The changeable interaction between soils and pressure cells; tests and reviews at the Waterways Experiment Station*. Technical Report 5-76-7, US Army Engineer Waterways Experiment Station.
- [Jambu, 1963] Jambu, N. (1963). Soil compressibility as determined by oedometer and triaxial tests. *European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering Proceedings*, 1:19–25.
- [Janssen, 1895] Janssen, H. (1895). Versuche über getreidedruck in silozellen". *VDI Zeit schrift (Düsseldorf)*, 29:1045–1049.
- [Jenike, 1961] Jenike, A. (1961). *Gravity flow of bulk solids*. Bul. 108, The University of Utah, Engng. Exp. Station, USA.
- [Jenike, 1964] Jenike, A. (1964). *Storage and flow of solids*. Bul. 123, The University of Utah, Engng. Exp. Station, USA.
- [Kaminski and Hamadeh, 1994] Kaminski, M. and Hamadeh, H. (1994). An experimental investigation of funnel flow and wall pressure variation in silos. *Powder Handling & Processing*, 6(4):389–393.
- [Karlsson et al., 1998] Karlsson, T., Klisinski, M., and Runesson, K. (1998). Finite element simulation of granular material flow in plane silos with complicated geometry. *Powder Technology*, 99:29–39.
- [Kmita, 1991] Kmita, J. (1991). An experimental analysis of internal silo loads. *Bulk Solids Handling*, 11(2):459–468.
- [Kodner and Zelasko, 1963] Kodner, R. and Zelasko, J. (1963). Void ratio effects on the hyperbolic stress - strain response of sand. *Laboratory Shear Testing of Soils, ASTM Standard Technical Publication No. 361, Ottawa,*, pages 250–257.
- [Lade, 1972] Lade, P. (1972). *The stress-strain and strength characteristics of cohesionless soils*. PhD thesis, University of Cambridge.
- [Lade, 1977] Lade, P. (1977). Elasto-plastic stress-strain theory for cohesionless soil with curved yield surfaces. *International Journal Solids and Structures*, 13:1019–1035.
- [Lade, 1982] Lade, P. (1982). Localization effects in triaxial tests on sand. In *IUTAM Symp. Deformation and Failure of Granular Materials*, pages 461–472, Delft.
- [Lade and Duncan, 1973] Lade, P. and Duncan, J. (1973). Cubical triaxial tests on cohesionless soil. *Proc ASCE J. Soil Mech. Found. Engg. Div*, 99(SM10):793–812.
- [Lade and Duncan, 1975] Lade, P. and Duncan, J. (1975). Elasto - plastic stress - strain theory for cohesionless soil. *Proc ASCE J. Geotechnical Engineering Division*, 101(GT10):1037–1053.

- [Lambe and Whitman, 1991] Lambe, T. and Whitman, R. (1991). *Mecánica de suelos*. Ed. Limusa.
- [Lee and Seed, 1967] Lee, K. and Seed, H. (1967). Drained strength characteristics of sands. *Journal of the Soil Mechanics Foundation Division ASCE*, 93:117–141.
- [Lievin, 1987] Lievin, A. (1987). Pressures exerted on the walls of silos. comparison of the calculation method of janssen and that of reimbert according to the tests carried out by janssen. *Bulk Solids Handling*, 7(1):147–155.
- [Lineback, 1996] Lineback, L. (1996). Asm hand book. non destructive evaluation and quality control. *ASM International, IV edition*, XVII:448–450.
- [Martínez et al., 2002] Martínez, M., Alfaro, I., and Doblaré, M. (2002). Simulation of axisymmetric discharging in metallic silos. analysis of de induced pressure distribution and comparison with different standards. *Engineering Structures*, 24:1561–1574.
- [Matsuoka, 1976] Matsuoka, H. (1976). On the significance of the spatial mobilised plane. *Soil and Foundations*, 16:91–100.
- [Matsuoka and Nakai, 1974] Matsuoka, H. and Nakai, T. (1974). Stress deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses. *Proceedings of Japan Society of Civil Engineers*, (232):59–70.
- [Mc Lean, 1988] Mc Lean, A. (1988). A closer examination of the variation of wall friction angle with major consolidation stress. *Bulk Solids Handling*, 8(4):195–199.
- [Mroz, 1967] Mroz, Z. (1967). On the description of anisotropic work hardening. *Journal of Mechanical Phys. of Solids*, 15:163–175.
- [Ooi and Rotter, 1991] Ooi, J. and Rotter, J. (1991). Elastic predictions of pressures in conical silo hoppers. *Engineering Structures*, 13:2–12.
- [Ortiz and Simo, 1986] Ortiz, M. and Simo, J. (1986). An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *International Journal of Numerical Methods Engineering*, 23:353–366.
- [Peattie and Sparrow, 1954] Peattie, K. and Sparrow, R. (1954). The fundamental action of earth pressure cells. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2:141–155.
- [Prevost, 1977] Prevost, J. (1977). Mathematical modelling of monotonic and cyclic undrained clay behaviour. *International Journal Numerical and Analytical Methods Geomechanics*, 1:195–216.
- [Reimbert et al., 1971] Reimbert, M., , and Reimbert, A. (1971). On the plastic flow of coulomb solids beyond original failure. *J. of Appl. Mech., Trans. ASME*, 81(E):599–602.
- [Richart et al., 1970] Richart, F., Woods, R., and Hall, J. J. (1970). *Vibrations of soils and foundations*. Prentice Hall.

- [Roberts, 1982] Roberts, A. (1982). *Modern concepts in the design and engineering of bulk solids handling systems*. TUNRA Bulk Solids Research, The University of Newcastle, Australia.
- [Roberts, 1991] Roberts, A. (1991). Recent developments and future directions. *Bulk Solids Handling*, 11(1):17–35.
- [Roberts et al., 1990] Roberts, A., Ooms, M., and Wiche, S. (1990). Concepts of boundary friction, adhesion and wear in bulk solids handling operations. *Bulk Solids Handling*, 10(2):179–187.
- [Rombach and Eibl, 1989] Rombach, G. and Eibl, J. (1989). Numerical simulation of filling and discharging processes in silos. In *Third International Conference on Bulk Materials, Storage, Handling and Transportation*, pages 48–52, Newcastle.
- [Rong et al., 1997] Rong, G., Ooi, J., and Rotter, J. (1997). Discrete element model of particulate solids in silos. *Mechanics of Deformation and Flow of Particulate Materials*. ASCE, pages 321–334.
- [Roscoe, 1970] Roscoe, K. (1970). The influence of strains in soil mechanics. *Geotechnique*, 20:129–170.
- [Rotter et al., 1998] Rotter, J., Holst, J., Ooi, J., and Sanad, A. (1998). Silo pressure predictions using discrete element and finite element analysis. *Philosophic Transactions Royal Society London*, 356:2685–2712.
- [Rowe, 1962] Rowe, P. (1962). The stress dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact. In *Royal Society*, volume 269 of *Series A*, pages 500–527.
- [Runesson and Nilson, 1986] Runesson, K. and Nilson, L. (1986). Finite element of the gravitational flow of granular material. *Bulk Solids Handling*, 6(5):241–248.
- [Sanad et al., 2001] Sanad, A., Ooi, J., Holst, J., and Rotter, J. (2001). Computations of granular flow and pressures in a flat bottomed silo. *Journal of Engineering Mechanics*, 127(10):1033–1050.
- [Schmidt and Wu, 1989] Schmidt, L. and Wu, Y. (1989). Prediction of dynamic wall pressures on silos. *Bulk Solids Handling*, 19(3):99–104.
- [Schofield and Wroth, 1968] Schofield, A. and Wroth, P. (1968). *Critical State Soil Mechanics*. Mc Graw Hill.
- [Schulze, 1998] Schulze, D. (1998). Silo quaking. In Brown, C. and Nielsen, J., editors, *Silos. Fundamentals of theory, behaviour and design*, pages 171–182. E&FN SPON.
- [Schwedde, 1998] Schwedde, J. (1998). Flow patterns. In by C.J. Brown, E. and Nielsen, J., editors, *Silos. Fundamentals of theory, behaviour and design*, pages 112–117.
- [Stroud, 1971] Stroud, M. (1971). *The behaviour of sand at low stress levels in the simple shear apparatus*. PhD Thesis. PhD thesis, University of Cambridge.

- [Tano et al., 1994] Tano, E., Godoy, L., and Diez, M. (1994). Numerical modelling of the flow of solids stored in silos. *Computer Methods and Advances in Geomechanics*, 2:1281–1286.
- [Vermeer, 1982] Vermeer, P. (1982). A five constant model unifying well - established concepts. In *International Workshop on Constitutive Behaviour of Soils*, Grenoble Rotterdam. Balkema.
- [Vesic and Clough, 1968] Vesic, A. and Clough, G. (1968). Behaviour of granular materials under high stresses. *Soil Mechanics Foundation Engineering Division, ASCE*, 94(SM3):661–688.
- [Wood, 1991] Wood, D. (1991). *Soil behaviour and critical state soil mechanics*. Cambridge University Press.
- [Wroth and Houlsby, 1985] Wroth, C. and Houlsby, G. (1985). Soil mechanics - property characterization and analysis procedures. *Proceedings of the Eleventh International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, 1:1–55.
- [Yang and Hsiau, 2001] Yang, S. and Hsiau, S. (2001). The simulations and experimental study of granular materials discharged from a silo with the placement of inserts. *Powder Technology*, 120:244–255.
- [Zhong, 1993] Zhong, Z. (1993). *Finite element procedures for contact - impact problems*. Oxford University Press.
- [Zhong et al., 2001] Zhong, Z., Ooi, J., and Rotter, J. (2001). The sensitivity of silo flow and wall stresses to filling method. *Engineering Structures*, 23:756–767.
- [Zienkiewicz et al., 1978] Zienkiewicz, O., Jain, P., and Oñate, E. (1978). Flow of solids during forming and extrusion, some aspects of numerical solutions. *International Journal of Solids and Structures*, 14:15–38.