Representaciones Globales y Clases Algebraicamente Extensibles

Miguel Campercholi

ÍNDICE GENERAL

Preliminares

Suponemos que el lector está familiarizado con los conceptos básicos de álgebra universal, teoría de modelos y teoría de reticulados distributivos. Referencias bibliográficas clásicas en estos campos son por ejemplo los libros [5], [16], [7] y [3].

Detallamos a continuación las definiciones básicas y convenciones notacionales que utilizaremos. Un *álgebra* será un modelo de un lenguaje de primer orden sin símbolos de relación. Cada vez que consideremos una clase de álgebras supondremos, sin mencionarlo explícitamente, que todas las álgebras de la clase son modelos de un mismo lenguaje. Sea $\mathcal{C}$ una clase de álgebras. Con $I(\mathcal{C})$, $S(\mathcal{C})$ y $H(\mathcal{C})$ denotaremos las clases de imágenes isomórficas, subálgebras e imágenes homomórficas de álgebras en $\mathcal{C}$ respectivamente. Escribiremos $P(\mathcal{C})$ (resp. $P_{\mathcal{U}}(\mathcal{C})$) para referirnos a la clase de productos directos (resp. ultraproductos) con factores en $\mathcal{C}$. Usaremos $\mathcal{C}_{SI}$ (resp. $\mathcal{C}_S$) para denotar la clase formada por las álgebras subdirectamente irreducibles (resp. simples) en $\mathcal{C}$. Con $V(\mathcal{C})$ denotaremos la variedad generada por $\mathcal{C}$, y con $Q(\mathcal{C})$ la cuasivariedad generada por $\mathcal{C}$. Recordamos que $V(\mathcal{C}) = HSP(\mathcal{C})$ y $Q(\mathcal{C}) = ISPP_{\mathcal{U}}(\mathcal{C})$. Si $\mathcal{C}$ es finita, digamos $\mathcal{C} = \{\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_n\}$, y O es un operador de clases, usualmente escribiremos $O(\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_n)$ en lugar de $O(\mathcal{C})$.

Sea $\mathbf{A}$ un álgebra. Escribiremos $\nabla^{\mathbf{A}}$ para denotar la congruencia universal de $\mathbf{A}$, y $\Delta^{\mathbf{A}}$ para denotar la congruencia diagonal o trivial de $\mathbf{A}$. Tanto el conjunto como el reticulado formado por las congruencias de $\mathbf{A}$ será denotado con $Con(\mathbf{A})$. Dos congruencias $\theta, \delta \in Con(\mathbf{A})$ *permutan* si $\theta \vee \delta = \{(a,b) \in \mathbf{A}^2 : \text{hay } c \in A \text{ tal que } (a,c) \in \theta \text{ y } (c,a) \in \delta\}$. Diremos que $\mathbf{A}$ es de *congruencias permutables* (o sólo permutable) cualesquiera dos congruencias de $\mathbf{A}$ permutan. Definimos $\Sigma(\mathbf{A}, \mathcal{C})$ como el conjunto $\{\theta \in Con(\mathbf{A}) : \mathbf{A}/\theta \in I(\mathcal{C})\}$. A lo largo de este trabajo utilizaremos los numerales en negrita $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, ...)$ para denotar diferentes álgebras, dependiendo del contexto. En todos los casos $\mathbf{n}$ denotará un álgebra que tiene al conjunto $n = \{0, ..., n-1\}$ como su universo, la operación ínfimo de reticulados ($\wedge$), definida por $0 < 1 < ... < n-1$, y posiblemente otras operaciones. E.g., según el contexto, escribiremos $\mathbf{2}$ para denotar el semireticulado de 2 elementos, el reticulado de 2 elementos, el álgebra de Boole de 2 elementos, etc.

CAPÍTULO 1

Clases Algebraicamente Extensibles

1.1. Introducción

Un gran afluente de nuevas e interesantes estructuras algebraicas resulta de considerar expansiones de estructuras conocidas. Es decir, tomar una clase de estructuras y estudiar la clase que resulta de añadir nuevas operaciones sobre algunos o todos los miembros de la clase original. Es de esperar que buena parte de las propiedades que hacían atractiva a la clase de partida serán heredadas por la nueva clase, convirtiéndola en un interesante objeto de investigación. Las formas de elegir las nuevas operaciones son muy diversas y provienen a su vez de distintas motivaciones. Pero casi siempre las operaciones a ser añadidas tienen una fuerte conexión con las operaciones ya existentes. Una posible forma de elegir una nueva operación es la siguiente. Supongamos que $\mathcal{C}$ es una clase de álgebras y sean $t_l(x_1, ..., x_n, y)$ y $s_l(x_1, ..., x_n, y)$, $l = 1, ...k$, términos. Si $\mathbf{A}$ es un miembro de $\mathcal{C}$ tal que para cada $\vec{a} \in A^n$ el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} t_1(\vec{a}, y) & = & s_1(\vec{a}, y) \\ & \vdots & \\ t_k(\vec{a}, y) & = & s_k(\vec{a}, y) \end{array}$$

cuenta con una única solución $y \in A$, nos encontramos con una operación n-aria en A, definida implícitamente por este sistema. Debe notarse además que el sistema de ecuaciones determina de manera natural una subclase de $\mathcal{C}$, a saber la subclase formada por las álgebras en las que el sistema tiene siempre una única solución. Para ilustrar esto consideremos por ejemplo la clase $\mathcal{SG}$ de todos los semigrupos, y el sistema de ecuaciones

$$xy = 1.$$

Claro está que la subclase de $\mathcal{SG}$ formada por los semigrupos para los que la ecuación de arriba cuenta siempre con una única solución es la clase de los grupos. Otro ejemplo proviene de considerar la variedad $\mathcal{D}_{01}$ de los reticulados distributivos acotados, y el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x \vee y &= 1 \\ x \wedge y &= 0. \end{aligned}$$

Nuevamente, la clase determinada por este sistema es una clase familiar: la clase de los reticulados Booleanos.

Un problema que surge de lo expuesto es el siguiente: *Dada una clase de álgebras C y un sistema de ecuaciones S, encontrar la subclase de C para cuyos miembros S cuenta siempre con una única solución.*

Otro interesante problema relacionado con el anterior es: *Dada una clase de álgebras $\mathcal{C}$ encontrar todas las subclases de $\mathcal{C}$ que pueden ser determinadas (en el sentido de la discusión anterior) por un sistema de ecuaciones.*

Es el segundo de estos problemas el que estudiaremos en este capítulo, en la forma de un problema de axiomatizabilidad. Más precisamente, estudiaremos el problema de la axiomatizabilidad por sentencias de la forma $(\forall\exists! \bigwedge eq)$.

1.2. Definiciones y Resultados Básicos

Definición 1 *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden sin símbolos de relación. Una sentencia será llamada una* Definición Ecuacional de Función *(DEF) en el lenguaje $\mathcal{L}$ si es de la forma*

$$\forall x_1, ..., x_n \exists! z_1, ..., z_m \bigwedge_{l=1}^{k} s_l(\vec{x}, \vec{z}) = t_l(\vec{x}, \vec{z})$$

donde p_l, q_l son $\mathcal{L}$-términos, $n \geq 0$ y $m \geq 1$.

Sea φ la DEF en el recuadro anterior, la Unicidad de *φ es la sentencia*

$$U(\varphi) = \forall\vec{x}\forall\vec{z}\forall\vec{y} \left(\bigwedge_{l=1}^{k} s_l(\vec{x}, \vec{z}) = t_l(\vec{x}, \vec{z}) \wedge \bigwedge_{l=1}^{k} s_l(\vec{x}, \vec{y}) = t_l(\vec{x}, \vec{y}) \right) \rightarrow \vec{z} = \vec{y},$$

y la Existencia de *φ es la sentencia*

$$E(\varphi) = \forall\vec{x}\exists\vec{z} \bigwedge_{l=1}^{k} s_l(\vec{x}, \vec{z}) = t_l(\vec{x}, \vec{z}).$$

Diremos que un álgebra $\mathbf{A}$ satisface φ, en símbolos $\mathbf{A} \vDash \varphi$, si y solo si

$$\mathbf{A} \vDash U(\varphi) \wedge E(\varphi).$$

En un contexto en el cual no haya ambigüedad respecto del lenguaje de una DEF, no lo mencionaremos explícitamente.

Definición 2 *Diremos que una clase de álgebras $\mathcal{C}$ es* Algebraicamente Extensible *(AE) cuando haya un conjunto de DEFs, digamos Γ, tal que $\mathcal{C} = Mod(\Gamma)$.*

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{S}$ clases de álgebras con $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}$. Diremos que $\mathcal{S}$ es una *subclase AE* de $\mathcal{C}$ si $\mathcal{S}$ es axiomatizable por DEFs relativamente a $\mathcal{C}$ (i.e. si hay una clase AE $\tilde{\mathcal{S}}$ tal que $\mathcal{S} = \mathcal{C} \cap \tilde{\mathcal{S}}$). Nótese que es posible que $\mathcal{S}$ sea una subclase AE de $\mathcal{C}$ sin ser $\mathcal{S}$ misma una clase AE.

El problema que estudiamos en este capítulo es el siguiente:

Problema 3 *Dada una variedad $\mathcal{V}$ caracterizar todas las subclases AE de $\mathcal{V}$.*

En las secciones subsiguientes presentamos soluciones a este problema para diversas variedades. Pero antes necesitaremos introducir algunos conceptos básicos y definiciones.

Nuestra primera observación es que las identidades pueden escribirse como DEFs. Por ejemplo, la identidad

$$t(x_1, ..., x_n) \approx s(x_1, ..., x_n)$$

es equivalente a la sentencia

$$\forall x_1, ..., x_n \exists! z_1 \ z_1 = x_1 \wedge t(x_1, ..., x_n) = s(x_1, ..., x_n).$$

De esto podemos concluir que las clases ecuacionales son clases AE.

Es claro que una DEF define implícitamente una función en cada álgebra que la satisface; a continuación damos una definición precisa de esta función, e introducimos nuestra manera de denotarla.

Definición 4 *Sea $\varphi = \forall x_1, ..., x_n \exists! z_1, ..., z_m \ \bigwedge_{l=1}^{k} s_l(\vec{x}, \vec{z}) = t_l(\vec{x}, \vec{z})$, y sea $\mathbf{A}$ un álgebra que satisface φ. La* función definida por φ en $\mathbf{A}$ *es el mapeo*

$$\begin{array}{lll} A^n & \to & A^m \\ \vec{a} & \mapsto & \text{el único } \vec{b} \in A^m \text{ tal que } \bigwedge_{l=1}^{k} s_l(\vec{a}, \vec{b}) = t_l(\vec{a}, \vec{b}). \end{array}$$

Escribiremos $[\varphi]^{\mathbf{A}}$ para denotar esta función, y con $[\varphi]_j^{\mathbf{A}}$ denotaremos la composición $\pi_j \circ [\varphi]^{\mathbf{A}}$, donde $\pi_j : A^m \to A$ es la j-ésima proyección canónica, para $j = 1, ..., m$.

El próximo lema reúne varias propiedades básicas de las funciones definidas por DEFs.

Lema 5 *Sea* $\varphi = \forall x_1, ..., x_n \exists! z_1, ..., z_m \bigwedge_{l=1}^{k} s_l(\vec{x}, \vec{z}) = t_l(\vec{x}, \vec{z})$.

(1) Sea $\{\mathbf{A}_i : i \in I\}$ *una familia de álgebras tal que* $\mathbf{A}_i \vDash \varphi$ *para todo* $i \in I$, *y sea* $\mathbf{P} = \prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$. *Entonces* $\mathbf{P} \vDash \varphi$ *y*

$$[\varphi]_j^{\mathbf{P}}(p_1, ..., p_n)(i) = [\varphi]_j^{\mathbf{A}_i}(p_1(i), ..., p_n(i))$$

para cada $i \in I$, $j = 1, ..., m$, *y cualesquiera* $p_1, ..., p_n \in \mathbf{P}$.

(2) Supongamos $\mathbf{A} \vDash \varphi$ *y sea* $\mathbf{B} \in S(\mathbf{A})$. *Entonces* $\mathbf{B} \vDash \varphi$ *sii* $[\varphi]^{\mathbf{A}}(B^n) \subseteq B^m$.

(3) Si $\mathbf{A} \vDash \varphi$ *y* $\theta \in Con(\mathbf{A})$ *es tal que* $\mathbf{A}/\theta \vDash U(\varphi)$, *entonces* $[\varphi]_1^{\mathbf{A}}, ..., [\varphi]_m^{\mathbf{A}}$ *preservan* θ. *I.e.* $\theta \in Con((\mathbf{A}, [\varphi]_1^{\mathbf{A}}, ..., [\varphi]_m^{\mathbf{A}}))$.

Prueba. Rutina. ■

Si bien el siguiente lema no es más que una sencilla observación, es con mucho el lema más veces aplicado en este capítulo.

Lema 6 *Sea* φ *una DEF. Si* $\mathbf{A} \vDash \varphi$ *y* $\mathbf{B} \in H(\mathbf{A}) \cap IS(\mathbf{A})$ *entonces* $\mathbf{B} \vDash \varphi$.

Prueba. Obsérvese que para cualquier DEF φ se tiene que $E(\varphi)$ es una fórmula positiva y $U(\varphi)$ es una fórmula universal. Por lo tanto $E(\varphi)$ es preservada por epimorfismos y $U(\varphi)$ es preservada por embeddings. ■

Como se verá a lo largo de este capítulo, hay un tipo de representación que ha sido clave en nuestro estudio de la axiomatizabilidad por DEFs: la representación de un álgebra como producto subdirecto global. Sea $\Pi\{\mathbf{A}_i : i \in I\}$ un producto directo de álgebras. Para $x, y \in \Pi\{A_i : i \in I\}$ el *ecualizador* de x e y es el conjunto

$$E(x, y) = \{i \in I : x(i) = y(i)\}.$$

Definición 7 (Krauss y Clark [15]) *Sea* $\mathbf{A} \subseteq \Pi\{\mathbf{A}_i : i \in I\}$ *un producto subdirecto. Diremos que* $\mathbf{A}$ *es* global *si existe una topología* τ *en* I *tal que:*

(G_1) $E(x, y) \in \tau$, *para todo* $x, y \in A$.

(G_2) $\mathbf{A}$ emparcha sobre τ, *i.e. para cada colección de conjuntos abiertos* $\{F_r : r \in R\} \subseteq \tau$ *y cada familia indexada de elementos* $\{x_r : r \in R\} \subseteq A$ *que cumplen*

$$\cup\{F_r : r \in R\} = I$$

y

$$F_s \cap F_t \subseteq E(x_s, x_t), \text{ para todo } s, t \in R,$$

hay un elemento $x \in A$ *tal que* $F_r \subseteq E(x, x_r)$, *para todo* $r \in R$.

Si $\mathcal{C}$ es una clase de álgebras escribiremos $Glo(\mathcal{C})$ para denotar la clase de todos los productos subdirectos globales con factores en $\mathcal{C}$.

La propiedad enunciada en el lema a continuación es la que hace de los productos subdirectos globales una herramienta clave para nuestro trabajo.

Lema 8 (Volger [20]) *Supongamos* $\mathbf{A} \subseteq \Pi\{\mathbf{A}_i : i \in I\}$ *es un producto subdirecto global, sea* φ *una DEF. Si* $\mathbf{A}_i \vDash \varphi$*, para todo* $i \in I$ *entonces* $\mathbf{A} \vDash \varphi$*.*

Cuando se estudia la axiomatizabilidad por un tipo determinado de sentencias relativo a una clase de álgebras $\mathcal{C}$, en muchas ocasiones suele reducirse el problema encontrando una subclase (substancialmente mas chica) $D \subseteq \mathcal{C}$ que contenga toda la información relativa a los axiomas en consideración.

Definición 9 *Sea* $\mathcal{C}$ *una clase de álgebras. Una clase* $D \subseteq \mathcal{C}$ *es* determinante para $\mathcal{C}$*, si para cualesquiera dos DEFs* φ_1, φ_2 *en el lenguaje de* $\mathcal{C}$ *se tiene que*

$$Mod(\varphi_1) \cap D = Mod(\varphi_2) \cap D \Rightarrow Mod(\varphi_1) \cap \mathcal{C} = Mod(\varphi_2) \cap \mathcal{C}.$$

Proposición 10 (Vaggione) *Sea* $\mathcal{Q}$ *una cuasivariedad, y sean* φ_1 *y* φ_2 *DEFs en el lenguaje de* $\mathcal{Q}$*. Supongamos que* $Mod(U(\varphi_1)) \cap \mathcal{Q}$ *y* $Mod(U(\varphi_2)) \cap \mathcal{Q}$ *son cuasivariedades finitamente generadas, y supongamos además que para cada álgebra finita* $\mathbf{A} \in \mathcal{Q}$ *se tiene*

$$\mathbf{A} \vDash \varphi_1 \Leftrightarrow \mathbf{A} \vDash \varphi_2.$$

Entonces

$$Mod(\varphi_1) \cap \mathcal{Q} = Mod(\varphi_2) \cap \mathcal{Q}.$$

Corolario 11 *Sea* $\mathcal{Q}$ *una cuasivariedad tal que todas sus subcuasivariedades son finitamente generadas. Entonces las álgebras finitas de* $\mathcal{Q}$ *son una clase determinante para* $\mathcal{Q}$*.*

Encontrar una DEF que distinga dos álgebras finitas concretas puede ser extremadamente complicado. El siguiente resultado nos ha sido útil en esa tarea.

Proposición 12 (Vaggione) *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra simple que genera una variedad de congruencias distributivas. Son equivalentes:*

(1) $V(\mathbf{A})$ *tiene congruencias principales ecuacionalmente definibles.*

(2) Hay una DEF φ *tal que para todo* $a, b, c, d \in A$

$$[\varphi]^{\mathbf{A}}(a, b, c, d) = \begin{cases} c & si\ a = b \\ d & si\ a \neq b. \end{cases}$$

1.3. Los Primeros Casos

En esta sección presentamos la solución del Problema 3 en las siguientes variedades: álgebras de Boole, reticulados distributivos, álgebras de Stone, semireticulados y variedades de grupos Abelianos finitamente generadas. Los primeros tres ejemplos fueron descubiertos por D. Vaggione [19] y son los que nos impulsaron a investigar el problema en otras variedades. Decidimos incluir las pruebas de estos ejemplos ya que resultan una introducción adecuada para que el lector se familiarice con las ideas y herramientas que serán empleadas en este capítulo.

1.3.1. Álgebras de Boole

Remitimos al lector a [3], donde encontrará una definición e información básica acerca de las álgebras de Boole. Con $\mathcal{B}_0$ denotaremos la variedad de las álgebras de Boole. Se sabe que $(\mathcal{B}_0)_{SI} = I(\mathbf{2})$, por lo cual $\mathcal{B}_0 = V(\mathbf{2})$. Necesitaremos la siguiente propiedad conocida del álgebra de Boole de dos elementos.

Lema 13 *Sean $n \geq 0$ y $f : 2^n \to 2$ una función cualquiera. Hay un término $s(x_1, ..., x_n)$ en el lenguaje de $\mathcal{B}_0$ tal que $f = s^{\mathbf{2}}$.*

Teorema 14 (Vaggione [19]) *Las subclases AE de $\mathcal{B}_0$ son:*

$$\{\textit{elementos triviales de } \mathcal{B}_0\} \textit{ y } \mathcal{B}_0.$$

Prueba. Sea $\mathcal{C} = Mod(\Sigma) \cap \mathcal{B}_0$, donde Σ es un conjunto de DEFs. Supongamos que hay un elemento no trivial $\mathbf{B}$ en $\mathcal{C}$; entonces $\mathbf{2} \in H(\mathbf{B}) \cap IS(\mathbf{B}) \subseteq \mathcal{C}$ (Lema 6). Sea $\varphi = \forall x_1, ..., x_n \exists! z_1, ..., z_m \ \bigwedge_{l=1}^{k} s_l(\vec{x}, \vec{z}) = t_l(\vec{x}, \vec{z})$ una sentencia en Σ. Por el Lema 13 tenemos términos $p_1(\vec{x}), ..., p_m(\vec{x})$ tales que $p_j^{\mathbf{2}} = [\varphi]_j^{\mathbf{2}}$, para $j = 1, ..., m$. Luego

$$\mathbf{2} \vDash \bigwedge_{l=1}^{k} s_l(\vec{x}, p_1(\vec{x}), ..., p_m(\vec{x})) \approx t_l(\vec{x}, p_1(\vec{x}), ..., p_m(\vec{x})),$$

y así

$$\mathcal{B}_0 \vDash \bigwedge_{l=1}^{k} s_l(\vec{x}, p_1(\vec{x}), ..., p_m(\vec{x})) \approx t_l(\vec{x}, p_1(\vec{x}), ..., p_m(\vec{x})).$$

En particular esto nos dice que

$$\mathcal{B}_0 \subseteq Mod(\{E(\varphi) : \varphi \in \Sigma\}).$$

Además como $\mathbf{2} \in Mod(\{U(\varphi) : \varphi \in \Sigma\})$, y como toda álgebra de Boole es isomorfa a una potencia subdirecta de $\mathbf{2}$, obtenemos que

$$\mathcal{B}_0 \subseteq Mod(\{U(\varphi) : \varphi \in \Sigma\}).$$

La combinación de estas inclusiones nos dice que $\mathcal{B}_0 \subseteq Mod(\Sigma)$. ∎

1.3.2. Reticulados Distributivos

Para consultar la definición y/o sobre propiedades básicas acerca de los reticulados distributivos (acotados) remitimos al lector a [3]. Denotaremos con $\mathcal{D}$ ($\mathcal{D}_{01}$) la variedad de los reticulados distributivos (acotados). Del siguiente teorema de representación obtendremos inmediatamente clases determinantes para las variedades $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}_{01}$.

Teorema 15 (Vaggione [18]) *Sea* $\mathbf{L}$ *un reticulado distributivo (acotado) y sea* $\Sigma = \Sigma(\mathbf{L}, \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\})$ ($\Sigma = \Sigma(\mathbf{L}, \{\mathbf{2}, \mathbf{3}\})$). *El mapeo*

$$\begin{array}{ccc} L & \rightarrow & \Pi\{L/\theta : \theta \in \Sigma\} \\ x & \mapsto & \langle x/\theta : \theta \in \Sigma\rangle \end{array}$$

es un embedding cuya imagen es un producto subdirecto global, considerando en Σ *la topología de los ecualizadores.*

Lema 16 (Vaggione [19])

(1) La clase $\{\mathbf{2}, \mathbf{3}\}$ *es determinante para la variedad* $\mathcal{D}$.

(2) La clase $\{\mathbf{2}, \mathbf{3}\}$ *es determinante para la variedad* $\mathcal{D}_{01}$.

Prueba. Daremos solamente la prueba de (2) ya que la de (1) es muy similar. Sean φ_1 y φ_2 dos DEFs tales que

$$Mod(\varphi_1) \cap \{\mathbf{2}, \mathbf{3}\} = Mod(\varphi_2) \cap \{\mathbf{2}, \mathbf{3}\};$$

y supongamos $\mathbf{L} \in \mathcal{D}_{01}$ satisface φ_1. Si $\mathbf{L}$ es trivial es inmediato que $\mathbf{L} \vDash \varphi_2$ por lo que supondremos que $|L| \geq 2$. Entonces $\mathbf{2} \in H(\mathbf{L}) \cap IS(\mathbf{L})$, y el Lema 6 nos dice que $\mathbf{2} \vDash \varphi_1$; luego $\mathbf{2} \vDash \varphi_2$. En particular tenemos que

$$\mathcal{D}_{01} = ISP(\mathbf{2}) \vDash U(\varphi_2).$$

Surgen ahora dos casos, dependiendo de si $\mathbf{3}$ es imagen homomórfica de $\mathbf{L}$ o no. Si $\mathbf{3} \in H(\mathbf{L})$ entonces $\mathbf{3} \vDash \varphi_1$, y luego $\{\mathbf{2}, \mathbf{3}\} \vDash \varphi_2$. Aplicando el Teorema 15 y la Proposición 8 obtenemos $\mathbf{L} \in Glo(\mathbf{2}, \mathbf{3}) \vDash \varphi_2$. Por último, si $\mathbf{3} \notin H(\mathbf{L})$ el Teorema 15 nos dice que $\mathbf{L} \in Glo(\mathbf{2})$, y por la Proposición 8 tenemos $\mathbf{L} \vDash \varphi_2$. ■

Teorema 17 (Vaggione [19])

(1) Las subclases AE de $\mathcal{D}$ *son:*

$$\{\textit{álgebras triviales en } \mathcal{D}\},$$

$$\{\textit{reticulados distributivos relativamente complementados}\} \textit{ y } \mathcal{D}.$$

(2) Las subclases AE de $\mathcal{D}_{01}$ son:

$$\{\textit{álgebras triviales en } \mathcal{D}_{01}\},$$

$$\{\textit{reticulados Booleanos}\} \textit{ y } \mathcal{D}_{01}.$$

Prueba. (2) En virtud del Lema anterior, las subclases AE de $\mathcal{D}_{01}$ están en correspondencia con las de $\{\mathbf{2},\mathbf{3}\}$, y como $\mathbf{2} \in H(\mathbf{3}) \cap IS(\mathbf{3})$ el Lema 6 nos dice que las únicas posibles subclases AE de $\{\mathbf{2},\mathbf{3}\}$ son:

$$\emptyset,\ \{\mathbf{2}\} \text{ y } \{\mathbf{2},\mathbf{3}\}.$$

Además las sentencias

$$\begin{aligned} \varphi_{\emptyset} &= \exists! z\ z = z \\ \varphi_{\{\mathbf{2}\}} &= \forall x \exists! z\ x \wedge z = 0,\ x \vee z = 1 \\ \varphi_{\{\mathbf{2},\mathbf{3}\}} &= \forall x \exists! z\ x = z \end{aligned}$$

muestran que las tres clases efectivamente son subclases AE de $\{\mathbf{2},\mathbf{3}\}$. ■

1.3.3. Álgebras de Stone

Un álgebra $(L, \wedge, \vee, *, 0, 1)$ es un *álgebra de Stone* si $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ es un reticulado distributivo acotado, y $*$ es una operación unaria en L que cumple:

$1^* \approx 0$

$0^* \approx 1$

$x \wedge (x \wedge y)^* \approx x \wedge y^*$

$x^* \vee x^{**} \approx 1.$

Las primeras tres identidades dicen que * es la operación de pseudo-complementación en L; i.e. a^* es el mayor elemento b de L tal que $b \wedge a = 0$. Para una exposición más detallada de las propiedades de las álgebras de Stone véase por ejemplo [3]. Con $\mathcal{B}_1$ denotaremos la variedad de las álgebras de Stone. Los únicos (salvo isomorfismos) subdirectamente irreducibles de $\mathcal{B}_1$ son $\mathbf{2}$ y $\mathbf{3}$. Por lo tanto $\mathcal{B}_1$ tiene sólo una subvariedad propia, a saber

$$\mathcal{B}_0 = V(\mathbf{2}) = \{\text{álgebras de Boole}\}.$$

Nótese que, como cada miembro de $\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_0$ tiene una subálgebra isomorfa a $\mathbf{3}$, las únicas subcuasivariedades de $\mathcal{B}_1$ son sus subvariedades.

Al igual que en el caso de los reticulados distributivos, también aquí un teorema de representación global se encarga de la mayor parte del trabajo.

Teorema 18 (Vaggione [18]) *Sea* $\mathbf{L}$ *un álgebra de Stone y sea* $\Sigma = \Sigma(\mathbf{L}, \{\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\})$. *El mapeo*

$$\begin{array}{ccc} L & \to & \Pi\{L/\theta : \theta \in \Sigma\} \\ x & \mapsto & \langle x/\theta : \theta \in \Sigma\rangle \end{array}$$

es un embedding cuya imagen es un producto subdirecto global, considerando en Σ *la topología de los ecualizadores.*

Para $\mathbf{L} \in \mathcal{B}_1$ sea $D(\mathbf{L})$ el conjunto de los elementos densos de $\mathbf{L}$, i.e.

$$D(\mathbf{L}) = \{a \in L : a^* = 0\}.$$

Obsérvese que $D(\mathbf{L})$ siempre es un filtro, y que los elementos densos son exactamente los de la forma $a \vee a^*$. Definimos

$$REL = \{\mathbf{L} \in \mathcal{B}_1 : D(\mathbf{L}) \text{ es relativamente complementado}\}.$$

Teorema 19 (Vaggione [19]) *Las subclases AE de* $\mathcal{B}_1$ *son:*

$$\{\textit{álgebras triviales en } \mathcal{B}_1\} \subset \mathcal{B}_0 \subset REL \subset \mathcal{B}_1.$$

Prueba. En primer lugar obsérvese que REL puede axiomatizarse relativamente a $\mathcal{B}_1$ con la DEF

$$\forall x, y \exists! z \ (x \vee x^* \vee y) \wedge z = x \vee x^*, \ (x \vee x^* \vee y) \vee z = 1.$$

Haremos uso de que $REL = Glo(\mathbf{2}, \mathbf{3})$, propiedad probada en [18].

Supongamos $\mathcal{C} = Mod(\Sigma) \cap \mathcal{B}_1$, donde Σ es un conjunto de DEFs. Si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}_0$ entonces o bien $\mathcal{C} = \{\text{álgebras triviales en } \mathcal{B}_1\}$ o $\mathcal{C} = \mathcal{B}_0$ (Teorema 14). Por esto podemos asumir que $\mathbf{L}$ pertenece a $\mathcal{C} - \mathcal{B}_0$. Por el Lema 6 tenemos

$$\{\mathbf{2}, \mathbf{3}\} \subseteq H(\mathbf{L}) \cap IS(\mathbf{L}) \subseteq \mathcal{C},$$

y de esto se sigue que

$$REL = Glo(\{\mathbf{2}, \mathbf{3}\}) \subseteq \mathcal{C}.$$

Por último supongamos que $\mathcal{C} \supsetneq REL$, y sea $\mathbf{L}' \in \mathcal{C} - REL$. Como $\mathbf{L}' \notin Glo(\mathbf{2}, \mathbf{3})$, el Teorema 18 implica que $\mathbf{4} \in H(\mathbf{L}')$, y así $\mathbf{4} \vDash E(\varphi)$, para toda φ en Σ. Al estar $\mathbf{3}$ en $\mathcal{C}$, sabemos que $\mathcal{B}_1 \vDash U(\varphi)$, para toda φ en Σ, lo cual nos dice que $\mathbf{4} \in \mathcal{C}$. Por lo tanto $\mathcal{B}_1 = Glo(\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}) \subseteq \mathcal{C}$. ∎

1.3.4. Semireticulados

Un *semireticulado* es un álgebra $\mathbf{S} = (S; \wedge)$ que satisface:

$x \wedge (y \wedge z) \approx (x \wedge y) \wedge z$

$x \wedge y \approx y \wedge x$

$x \wedge x \approx x.$

Un álgebra $\mathbf{S} = (S; \wedge, 0, 1)$ es un *semireticulado acotado* si $(S; \wedge)$ es un semireticulado y $\mathbf{S}$ satisface:

$x \wedge 1 \approx x$

$x \wedge 0 \approx 0$

$x \wedge x \approx x.$

Con $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{S}_{01}$) denotaremos la variedad de los semireticulados (resp. acotados). Es un hecho conocido que el único (salvo isomorfismos) miembro subdirectamente irreducible de $\mathcal{S}_{01}$ es $\mathbf{2}$; y lo mismo es vale para $\mathcal{S}$.

Lema 20 *La clase* $\{\mathbf{2}\}$ *es determinante para* $\mathcal{S}_{01}$.

Prueba. Nótese que todo semireticulado acotado no trivial tiene una subálgebra isomorfa a $\mathbf{2}$, y tiene a $\mathbf{2}$ como imagen homomórfica. Luego, por el Lema 6, sólo necesitamos probar que para toda DEF φ se tiene

$$\mathbf{2} \vDash \varphi \Rightarrow \mathcal{S}_{01} \vDash \varphi.$$

Supongamos φ es una DEF tal que $\mathbf{2} \vDash \varphi$. Como $\mathcal{S}_{01}$ es localmente finita y no tiene sub-cuasivariedades propias, por el Corolario 11 basta con ver que todos los miembros finitos de $\mathcal{S}_{01}$ satisfacen φ. Además, al tener que $\mathbf{2} \vDash U(\varphi)$, es claro que $\mathcal{S}_{01} \vDash U(\varphi)$. Por esto es suficiente con probar que φ vale en todas las álgebras libres finitamente generadas de $\mathcal{S}_{01}$. Sea $\mathbf{F}_{\mathcal{S}_{01}}(v_1, ..., v_n)$ el álgebra libre de $\mathcal{S}_{01}$ generada por $v_1, ..., v_n$. Es un ejercicio de rutina verificar que

$$\mathbf{F}_{\mathcal{S}_{01}}(v_1, ..., v_n) \cong \mathbf{1} \oplus \mathbf{2}^n,$$

donde $\mathbf{1} \oplus \mathbf{2}^n$ es el semireticulado acotado que se obtiene al agregar un nuevo elemento mínimo a $\mathbf{2}^n$. Esto nos dice que $(\mathbf{F}_{\mathcal{S}_{01}}(v_1, ..., v_n), \vee)$ es un reticulado distributivo acotado, que por el Teorema 15 es isomorfo a un producto subdirecto global con factores en $\{(\mathbf{2}, \vee), (\mathbf{3},\vee)\}$. Por la Proposición 8, cada DEF (en el lenguaje de $\mathcal{D}_{01}$) que vale en $\{(\mathbf{2}, \vee), (\mathbf{3},\vee)\}$ también debe valer en $(\mathbf{F}_{\mathcal{S}_{01}}(v_1, ..., v_n), \vee)$. Además, como $\mathbf{3} \in H(\mathbf{2}^3) \cap IS(\mathbf{2}^3)$, el Lema 6 implica que $\mathbf{3} \vDash \varphi$, y como $\vee$ no ocurre en φ se sigue que $(\mathbf{3}, \vee) \vDash \varphi$. Por lo tanto

$$\mathbf{F}_{\mathcal{S}_{01}}(v_1, ..., v_n) \vDash \varphi.$$

■

Como consecuencia inmediata del Lema 20 obtenemos la solución al Problema 3 para la variedad $\mathcal{S}_{01}$.

Teorema 21 *Las subclases AE de $\mathcal{S}_{01}$ son:*

$$\{elementos\ triviales\ de\ \mathcal{S}_{01}\}\ y\ \mathcal{S}_{01}.$$

El caso no acotado se obtiene fácilmente del teorema anterior.

Corolario 22 *Las subclases AE de $\mathcal{S}$ son:*

$$\{elementos\ triviales\ de\ \mathcal{S}\}\ y\ \mathcal{S}_{01}.$$

1.3.5. Variedades Finitamente Generadas de Grupos Abelianos

Consideraremos a los grupos como modelos del lenguaje $\{+,-,0\}$, donde $-$ es una operación unaria. Sea $n \geq 2$ y sea $\mathcal{G}_n$ la variedad de todos los grupos Abelianos que satisfacen la identidad

$$nx \approx x.$$

Recordamos al lector que $(\mathcal{G}_n)_{SI} = I(\{\mathbb{Z}_{p^k} : p^k \text{ divide a } n\})$, y que todo miembro de $\mathcal{G}_n$ es una suma directa de grupos en $(\mathcal{G}_n)_{SI}$. Además, si

$$\mathbf{G} = \bigoplus_{i \in I} \mathbf{G}_i$$

entonces

$$\mathbf{G} \vDash \varphi \Leftrightarrow \mathbf{G}_i \vDash \varphi \text{ para todo } i \in I.$$

De estos hechos se obtiene sin dificultades la prueba del siguiente resultado.

Lema 23 *La clase $(\mathcal{G}_n)_{SI}$ es determinante para $\mathcal{G}_n$.*

Con la ayuda del lema anterior resulta sencillo dar una solución al Problema 3 para las variedades $\mathcal{G}_n$.

Teorema 24 *Las subclases AE de $\mathcal{G}_n$ son exactamente sus subvariedades.*

Prueba. Gracias al Lema 23 sólo debemos probar que para cada DEF φ, hay una identidad ψ tal que

$$Mod(\varphi) \cap (\mathcal{G}_n)_{SI} = Mod(\psi) \cap (\mathcal{G}_n)_{SI}.$$

Como $\mathbb{Z}_{p^k} \in H(\mathbb{Z}_{p^j}) \cap IS(\mathbb{Z}_{p^j})$ siempre que $k \leq j$, el Lema 6 nos dice que $Mod(\varphi) \cap (\mathcal{G}_n)_{SI}$ es cerrado bajo el operador de clases S. En consecuencia es claro que hay una tal identidad ψ. ∎

1.4. Álgebras de Kleene Generalizadas

Un álgebra $\mathbf{A} = (A; \wedge, \vee, ^{-})$ será un *álgebra de Kleene generalizada* si $(A; \wedge, \vee)$ es un reticulado distributivo y $^{-}$ es una operación unaria en A que cumple:

$\overline{x \vee y} \approx \overline{x} \wedge \overline{y}$

$\overline{x \wedge y} \approx \overline{x} \vee \overline{y}$

$\overline{\overline{x}} \approx x$

$x \wedge \overline{x} \approx x \wedge \overline{x} \wedge (y \vee \overline{y})$.

Sea $\mathcal{K}$ la variedad de las álgebras de Kleene generalizadas. Un *álgebra de Kleene* es un álgebra $\mathbf{A} = (A; \wedge, \vee, ^{-}, 0, 1)$, para la cual $(A; \wedge, \vee, ^{-}) \in \mathcal{K}$, y $\mathbf{A}$ satisface las identidades

$0 \wedge x \approx 0$

$\overline{0} \approx 1$.

Denotaremos la variedad de las álgebras de Kleene por $\mathcal{K}_{01}$. Las clases $\mathcal{K}$ y $\mathcal{K}_{01}$ están estrechamente emparentadas. Por ejemplo ambas tienen a $I(\mathbf{2}, \mathbf{3})$ como su clase de subdirectamente irreducibles [3]. También es claro que cada miembro finito de $\mathcal{K}$ es el reducto de un álgebra en $\mathcal{K}_{01}$. Sin embargo hay importantes diferencias. Los reticulados de subcuasivariedades de $\mathcal{K}$ y de $\mathcal{K}_{01}$ son notablemente distintos; el primero es una cadena de cinco elementos mientras que el otro es infinito [2]. En el libro [3] el lector podrá encontrar resultados básicos acerca de las álgebras de Kleene. Sea $\mathcal{B}$ la subvariedad de $\mathcal{K}$ axiomatizada por $x \vee \overline{x} \approx y \vee \overline{y}$; nótese que $\mathcal{B}$ es equivalente a la variedad de las álgebras de Boole.

A lo largo de esta sección haremos un intensivo uso de la dualidad de Priestley para álgebras de Kleene; si bien incluimos a continuación un detalle de las propiedades básicas de esta dualidad, se espera cierta familiaridad por parte del lector con estos conceptos.

Salvo por los Lemas 28 y 30, todas las aplicaciones de la dualidad en esta sección son para álgebras finitas. Para el caso infinito sólo necesitaremos la correspondencia entre congruencias y conjuntos de filtros primos. Por estas razones presentaremos la dualidad únicamente para álgebras finitas, y la representación de congruencias para el caso general.

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$. Escribiremos $X(\mathbf{A})$ para denotar el poset de filtros primos de $\mathbf{A}$, ordenado por la inclusión de conjuntos (utilizaremos la misma notación para el universo de este poset). Sea $g_{\mathbf{A}}$ la función

$$\begin{array}{rcl} X(\mathbf{A}) & \to & X(\mathbf{A}) \\ p & \mapsto & \{x \in A : \overline{x} \notin p\} \end{array}$$

No es difícil verificar que:

$g_{\mathbf{A}}$ invierte orden,

$g_{\mathbf{A}} \circ g_{\mathbf{A}}$ es la función identidad y

$g_{\mathbf{A}}(p) \subseteq p$ o $p \subseteq g_{\mathbf{A}}(p)$, para todo $p \in X(\mathbf{A})$.

Para cada $a \in A$ definimos

$$\sigma(a) = \{p \in X(\mathbf{A}) : a \in p\}.$$

Sea τ la topología en $X(\mathbf{A})$ generada por

$$\{\sigma(x) : x \in A\} \cup \{X(\mathbf{A}) - \sigma(x) : x \in A\}$$

(si A es finito esta topología es la discreta). Sea

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq X(\mathbf{A}) : F \text{ es cerrado en } (X(\mathbf{A}), \tau) \text{ y } g_{\mathbf{A}}(F) = F\}.$$

Como $\mathcal{F}$ es cerrado bajo intersecciones arbitrarias resulta ser un reticulado respecto del orden de la inclusión. Un subconjunto F de $X(\mathbf{A})$ pertenece a $\mathcal{F}$ sii $F = F^{cl} \cup g_{\mathbf{A}}(F^{cl})$, donde F^{cl} es la clausura topológica de F en $(X(\mathbf{A}), \tau)$. El mapeo

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F} & \rightarrow & Con(\mathbf{A}) \\ F & \mapsto & \theta_F = \{(x, y) : \sigma(x) \cap F = \sigma(y) \cap F\} \end{array}$$

es un anti-isomorfismo de reticulados, cuya inversa está dada por

$$\theta \mapsto F(\theta) = \{p \in X(\mathbf{A}) : \text{para cada } (x, y) \in \theta,\ x \in p \text{ sii } y \in p\}.$$

Otra propiedad que necesitamos mencionar es que para cada $\theta \in Con(\mathbf{A})$ las estructuras $(X(\mathbf{A}/\theta), g_{\mathbf{A}/\theta})$ y $(F(\theta), g_{\mathbf{A}}|_{F(\theta)})$ están naturalmente identificadas.

Para $\mathbf{A}$ finita, el *dual de* $\mathbf{A}$ será el par $(X(\mathbf{A}), g_{\mathbf{A}})$. Las siguientes propiedades serán aplicadas sin ser citadas:

(1) $U \subseteq X(\mathbf{A})$ es un conjunto creciente sii $U = \sigma(a)$ para algún $a \in A$.

(2) La topología τ (definida arriba) es la topología discreta, y por lo tanto los subconjuntos de $X(\mathbf{A})$ en correspondencia con las congruencias de $\mathbf{A}$ son exactamente los preservados por $g_{\mathbf{A}}$.

(3) Para cada $\theta \in Con(\mathbf{A})$, se tiene que $(F(\theta), g_{\mathbf{A}}|_{F(\theta)})$ es isomorfo al dual de $\mathbf{A}/\theta$.

(4) Supongamos (X, g) es tal que X es un poset finito, $g : X \to X$ es una función que invierte orden, $g \circ g = Id$ y $g(x) \leq x$ o $x \leq g(x)$, para todo $x \in X$. Entonces los subconjuntos crecientes de X forman un álgebra de Kleene generalizada en la cual $\wedge$ es la intersección, $\vee$ es la unión, y la negación de Kleene está dada por $\overline{D} = g(X - D)$. Más aún, el dual de esta álgebra es (X, g). Recíprocamente, si $\mathbf{A}$ es un miembro finito de $\mathcal{K}$, entonces el álgebra de Kleene generalizada que se obtiene al realizar el proceso anterior a $(X(\mathbf{A}), g_{\mathbf{A}})$ es isomorfa a $\mathbf{A}$.

(5) Dos congruencias de $\mathbf{A}$, digamos θ y δ, permutan sii para cualesquiera $a, b \in A$ se cumple que $(\sigma(a) \cap F(\theta)) \cup (\sigma(b) \cap F(\delta))$ es creciente.

Para más detalles sobre la dualidad para álgebras de Kleene véase [8]. Cuando no haya riesgo de confusión escribiremos simplemente g en lugar de $g_{\mathbf{A}}$.

El siguiente resultado de representación es nuestro punto de inicio en el estudio las subclases AE de $\mathcal{K}$. Sea $\mathbf{D}$ el álgebra de Kleene generalizada de la Figura 1.1.

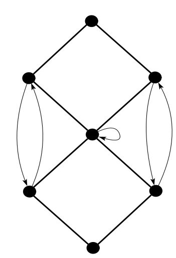


Figura 1.1: $\mathbf{D}$

Teorema 25 (Vaggione) *Sea* $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$, *y sea* $\Sigma = \Sigma(\mathbf{A}, \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{D}\})$. *El mapeo*

$$\begin{array}{ccc} A & \to & \Pi\{A/\theta : \theta \in \Sigma\} \\ x & \mapsto & \langle x/\theta : \theta \in \Sigma\rangle \end{array}$$

es un embedding cuya imagen es un producto subdirecto global, considerando en Σ *la topología de los ecualizadores.*

1.4.1. Una Clase Determinante para $\mathcal{K}$

Nos abocaremos en esta sección a encontrar una clase determinante para la variedad $\mathcal{K}$. Como veremos más adelante el mayor escollo para arribar a dicha clase es encontrar una clase determinante para $Q(\mathbf{4})$. Resolvemos este subproblema en dos etapas. Primero encontramos una clase de álgebras finitas $\mathcal{W}$, que es determinante para $Q(\mathbf{4})$ (Lema 31). Luego, en el Lema 40, concluimos que la clase $\{\mathbf{2},\mathbf{4},\mathbf{6},\mathbf{P}\}$ (donde $\mathbf{P}$ es el álgebra de Kleene generalizada de la Figura 1.2) es determinante para $\mathcal{W}$, y por lo tanto para $Q(\mathbf{4})$. Una vez resuelto este problema, dado que el reticulado de subcuasivariedades de $\mathcal{K}$ es muy simple, no hace falta mayor esfuerzo para probar el resultado principal de esta sección

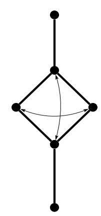


Figura 1.2: $\mathbf{P}$

Teorema 26 *La clase* $D_{\mathcal{K}} = \{\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5},\mathbf{6},\mathbf{D},\mathbf{P}\}$ *es determinante para* $\mathcal{K}$.

Daremos la prueba del Teorema 26 al final de la sección.

Comenzamos nuestro estudio con una caracterización de los duales de las álgebras en $Q(\mathbf{4})$. Ya que trabajaremos intensivamente con álgebras en esta cuasivariedad dicha caracterización resultará de gran utilidad.

Definición 27 *Sea* $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$, *definimos*

$$q(\mathbf{A}) = \{q \in X(\mathbf{A}) : q \subseteq g(q),\ q \neq g(q)\}.$$

Lema 28 *Sea* $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$. *Entonces* $\mathbf{A} \in Q(\mathbf{4})$ *sii para cada* $q \in q(\mathbf{A})$ *hay* $p \in X(\mathbf{A})$ *que satisface* $p = g(p)$ *y* $q \subset p \subset g(q)$.

Prueba. ($\Leftarrow$) Sea $\theta \in \Sigma(\mathbf{A},\mathbf{3})$. Entonces $F(\theta) = \{q, g(q)\}$, con $q \in q(\mathbf{A})$. Por hipótesis hay un filtro $p \in X(\mathbf{A})$ tal que $q \subset p \subset g(q)$. Si tomamos $\delta = \theta_{\{p,q,g(q)\}}$, tenemos que $\delta \subseteq \theta$ y $\delta \in \Sigma(\mathbf{A},\mathbf{4})$. Luego para cada $\theta \in \Sigma(\mathbf{A},\mathbf{3})$ hay una congruencia $\delta_\theta \in \Sigma(\mathbf{A},\mathbf{4})$, tal que $\delta_\theta \subseteq \theta$. De esto se obtine que el mapeo

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{A} & \to & \prod_{\theta\in\Sigma(\mathbf{A},\mathbf{3})} \mathbf{A}/\delta_\theta \times \prod_{\theta\in\Sigma(\mathbf{A},\mathbf{2})} \mathbf{A}/\theta \\ a & \mapsto & \left(\langle a/\delta_\theta : \theta \in \Sigma(\mathbf{A},\mathbf{3})\rangle, \langle a/\theta : \theta \in \Sigma(\mathbf{A},\mathbf{2})\rangle\right) \end{array}$$

es un embedding subdirecto.

($\Rightarrow$) Sean $q \in q(\mathbf{A})$ y $\theta = \theta_{\{q,g(q)\}}$. El hecho de que $\mathbf{A} \in Q(\mathbf{4})$ implica que $\cap\Sigma(\mathbf{A},\{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{4}\}) = \Delta^{\mathbf{A}} \subseteq \theta$, y como $\mathbf{A}$ es de congruencias distributivas y θ es completamente meet-irreducible, por [18], debe haber $\delta \in \Sigma(\mathbf{A},\mathbf{4})$ tal que $\delta \subseteq \theta$. ■

Definición 29 *Sea* $\mathcal{W} = \{\mathbf{A} \in Q(\mathbf{4}) : A$ *es finito y* $|q(\mathbf{A})| \leq 2\}$.

Lema 30 *Sea* $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$.

(1) Si $\mathbf{A} \in Q(\mathbf{4})$ *entonces para cada* $\theta \in \Sigma(\mathbf{A}, \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{D}\})$ *hay* $\delta \in \Sigma(\mathbf{A}, \mathcal{W})$ *tal que* $\delta \subseteq \theta$.

(2) Si δ_1 *y* δ_2 *son elementos minimales de* $\Sigma(\mathbf{A}, \mathcal{W})$ *entonces* $\delta_1 \vee \delta_2 \in \Sigma(\mathbf{A}, \mathcal{W})$.

Prueba. (1) Como $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{4} \in \mathcal{W}$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\theta \in \Sigma(\mathbf{A}, \{\mathbf{3}, \mathbf{5}, \mathbf{D}\})$. Obsérvese que tanto $\mathbf{5}$ como $\mathbf{D}$ se embeben subdirectamente en $\mathbf{3} \times \mathbf{3}$; luego hay $\theta_1, \theta_2 \in \Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{3})$ tales que $\theta = \theta_1 \cap \theta_2$. Por un razonamiento análogo al de la prueba del lema anterior podemos encontrar $\delta_1, \delta_2 \in \Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{4})$ tales que $\delta_i \subseteq \theta_i$, $i = 1, 2$. Es sencillo ver que $\delta_1 \cap \delta_2 \in \Sigma(\mathbf{A}, \mathcal{W})$, luego podemos tomar $\delta = \delta_1 \cap \delta_2 \subseteq \theta$.

(2) Como $(X(\mathbf{A}/\theta), g_{\mathbf{A}/\theta})$ y $(F(\theta), g_{\mathbf{A}}|_{F(\theta)})$ son isomorfos, tenemos que una congruencia δ está en $\Sigma(\mathbf{A}, \mathcal{W})$ si y solo si $F(\delta)$ es finito, $|q(\mathbf{A}) \cap F(\delta)| \leq 2$, y para cada $q \in q(\mathbf{A}) \cap F(\delta)$ hay un $p \in F(\delta)$ tal que $q \subseteq p = g_{\mathbf{A}}(p) \subseteq g_{\mathbf{A}}(q)$. Supongamos δ_1 y δ_2 son elementos minimales de $\Sigma(\mathbf{A}, \mathcal{W})$. Como $F(\delta_1 \vee \delta_2) = F(\delta_1) \cap F(\delta_2)$, es claro que $F(\delta_1 \vee \delta_2)$ es finito y que $|q(\mathbf{A}) \cap F(\delta_1 \vee \delta_2)| \leq 2$. Sea $q \in q(\mathbf{A}) \cap F(\delta_1) \cap F(\delta_2)$. Al estar δ_1 en $\Sigma(\mathbf{A}, Q(\mathbf{4}))$ por el Lema 28 sabemos que hay $p \in F(\delta_1)$ que cumple $q \subseteq p = g_{\mathbf{A}}(p) \subseteq g_{\mathbf{A}}(q)$. Este p debe estar en $F(\delta_2)$ pues si no tendríamos que $\delta = \theta_{F(\delta_2) \cup \{p\}} \in \Sigma(\mathbf{A}, \mathcal{W})$ con $\delta \subseteq \delta_2$ y $\delta \neq \delta_2$, lo cual contradice el hecho de que δ_2 es minimal. ■

Lema 31 *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra finita en* $Q(\mathbf{4})$ *y sea* φ *una DEF. Entonces*

$$\mathbf{A} \vDash \varphi \Leftrightarrow H(\mathbf{A}) \cap \mathcal{W} \vDash \varphi.$$

Prueba. ($\Leftarrow$) Si $\mathbf{A} \in \mathcal{W}$ no hay nada que probar, así que supondremos que $\mathbf{A} \notin \mathcal{W}$. Sea

$$\varphi = \forall x_1, ..., x_n \exists! z_1, ..., z_m \bigwedge_{t=1}^{k} p_t(\vec{x}, \vec{z}) = q_t(\vec{x}, \vec{z})$$

y supongamos $H(\mathbf{A}) \cap \mathcal{W} \vDash \varphi$. Como $\mathbf{A} \notin \mathcal{B}$ tenemos que $\mathbf{4} \in IS(\mathbf{A})$, y esto implica que

$$Q(\mathbf{4}) \vDash U(\varphi).$$

Sean $a_1, ..., a_n \in A$, veremos que hay $b_1, ..., b_m \in A$ tales que $\bigwedge_{t=1}^{k} p_t(\vec{a}, \vec{b}) = q_t(\vec{a}, \vec{b})$. Por el Teorema 25 podemos suponer que $\mathbf{A} \subseteq \prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$ es un producto subdirecto global con factores en $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{D}\}$. Sea M el conjunto formado por los elementos minimales de $\Sigma(\mathbf{A}, \mathcal{W})$. Para cada $\delta \in M$ definimos

$$U_\delta = \bigcap \{E(c, d) : (c, d) \in \delta\}.$$

Debe notarese que si $\delta \in M$, como $\mathbf{A}/\delta$ satisface φ, hay $b_1^\delta, ..., b_m^\delta \in A$ tales que

$$(p_t(a_1, ..., a_n, b_1^\delta, ..., b_m^\delta), q_t(a_1, ..., a_n, b_1^\delta, ..., b_m^\delta)) \in \delta,$$

para $t = 1, ..., k$.
Sea $j \in \{1, ..., m\}$, queremos aplicar la propiedad de emparche (G_2) de la Definición 7 al sistema

$$\{U_\delta : \delta \in M\}; \{b_j^\delta : \delta \in M\}.$$

En consecuencia necesitamos verificar que este sistema satisface todas las propiedades requeridas. Ya que todas las congruencias en M son finitas, es claro que cada U_δ es abierto en la topología de los ecualizadores. Además nótese que para todo $i \in I$ vale que

$$i \in U_\delta \Leftrightarrow \delta \subseteq \theta_i = \{(a, b) \in A : a(i) = b(i)\}$$

y

$$\theta_i \in \Sigma(\mathbf{A}, \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{D}\}).$$

Estos dos hechos en combinación con el punto (1) del Lema 30 implican que

$$\bigcup_{\delta \in M} U_\delta = I.$$

Supongamos $\delta, \gamma \in M$ y sea $i_0 \in U_\delta \cap U_\gamma$. Queremos ver que $i_0 \in E(b_j^\delta, b_j^\gamma)$, o equivalentemente que $(b_j^\delta, b_j^\gamma) \in \theta_{i_0}$. Por (2) del Lema 30 tenemos que $\mathbf{A}/\delta \vee \gamma \in \mathcal{W}$, y por lo tanto

$$\mathbf{A}/\delta \vee \gamma \vDash \varphi.$$

Luego hay un única solución $\vec{z}$ al sistema de ecuaciones

$$p_t(\vec{a}/\delta \vee \gamma, \vec{z}) = q_t(\vec{a}/\delta \vee \gamma, \vec{z}),\ t = 1, ..., k,$$

y al ser $(b_1^\delta/\delta \vee \gamma, ..., b_m^\delta/\delta \vee \gamma)$ y $(b_1^\gamma/\delta \vee \gamma, ..., b_m^\gamma/\delta \vee \gamma)$ dos soluciones de este sistema, necesariamente

$$(b_1^\delta/\delta \vee \gamma, ..., b_m^\delta/\delta \vee \gamma) = (b_1^\gamma/\delta \vee \gamma, ..., b_m^\gamma/\delta \vee \gamma).$$

Además, como $i_0 \in U_\delta \cap U_\gamma$, tenemos que $\delta \vee \gamma \subseteq \theta_{i_0}$, por lo cual

$$(b_1^\delta, b_1^\gamma), ..., (b_m^\delta, b_m^\gamma) \in \theta_{i_0}.$$

Ahora podemos tomar b_j como la solución del sistema de emparche

$$\{U_\delta : \delta \in M\}; \{b_j^\delta : \delta \in M\},$$

para $j = 1, ..., m$. Es sencillo verificar que $b_1, ..., b_m$ satisfacen

$$\bigwedge_{t=1}^{k} p_t(\vec{a}, \vec{b}) = q_t(\vec{a}, \vec{b}).$$

■

Notamos que una consecuencia directa del lema anterior es que $\mathcal{W}$ es una clase determinante para $\{\mathbf{A} \in Q(\mathbf{4}) : A \text{ es finito}\}$, luego aplicando el Corolario 11 obtenemos:

Corolario 32 *La clase $\mathcal{W}$ es determinante para $Q(\mathbf{4})$.*

La tarea que emprendemos a continuación es la de encontrar una subclase finita de $\mathcal{W}$ que también sea determinante para $Q(\mathbf{4})$.

Lema 33 *Sea $\mathbf{A}$ un álgebra y sea φ una DEF. Supongamos $\mathbf{A} \vDash U(\varphi)$ y supongamos que existen $\theta, \delta \in Con(\mathbf{A})$ con las siguientes propiedades:*

$\mathbf{A}/\theta \vDash E(\varphi)$ y $\mathbf{A}/\delta \vDash E(\varphi)$

$\mathbf{A}/(\theta \vee \delta) \vDash U(\varphi)$

$\theta \cap \delta = \Delta^{\mathbf{A}}$

θ y δ permutan.

Entonces $\mathbf{A} \vDash \varphi$.

Prueba. Sea

$$\varphi = \forall x_1, ..., x_n \exists! z_1, ..., z_m \bigwedge_{l=1}^{k} p_l(\vec{x}, \vec{z}) = q_l(\vec{x}, \vec{z}),$$

y sean $a_1, ..., a_n \in A$. Por hipótesis existen $b_1, ..., b_m, c_1, ..., c_m \in A$ tales que para $1 \leq l \leq k$

$$(p_l(\vec{a}, \vec{b}), q_l(\vec{a}, \vec{b})) \in \theta$$

y

$$(p_l(\vec{a}, \vec{c}), q_l(\vec{a}, \vec{c})) \in \delta.$$

Ahora, como $\mathbf{A}/(\theta \vee \delta) \vDash U(\varphi)$ y

$$(p_l(\vec{a}, \vec{b}), q_l(\vec{a}, \vec{b})), (p_l(\vec{a}, \vec{c}), q_l(\vec{a}, \vec{c})) \in \theta \vee \delta, \quad 1 \leq l \leq k,$$

tenemos

$$(b_1, c_1), ..., (b_m, c_m) \in \theta \vee \delta = \theta \circ \delta.$$

Luego hay $d_1, ..., d_m \in A$ que cumplen

$$(b_i, d_i) \in \theta \text{ y } (d_i, c_i) \in \delta, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Por último obsérvese que

$$(p_l(\vec{a}, \vec{d}), q_l(\vec{a}, \vec{d})) \in \theta \cap \delta = \Delta^{\mathbf{A}}, \quad 1 \leq l \leq k.$$

■

Nuestro primer paso es dividir $\mathcal{W}$ en varias subclases que estudiaremos por separado. Recuerdesé que $q(\mathbf{A}) = \{q \in X(\mathbf{A}) : q \subseteq g(q),\ q \neq g(q)\}$, definimos:

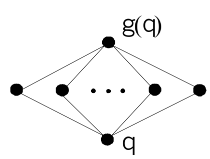
$\mathcal{W}_0 = \{\mathbf{A} \in \mathcal{W}$: para todo $p \in X(\mathbf{A}) - q(\mathbf{A})$ existe $q \in q(\mathbf{A})$ tal que $q \subsetneq p\}$,

$\mathcal{W}_1 = \{\mathbf{A} \in \mathcal{W} : |q(\mathbf{A})| = 1\} \cap \mathcal{W}_0$,

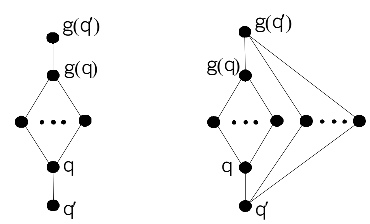
$\mathcal{W}_2 = \{\mathbf{A} \in \mathcal{W} : q(\mathbf{A})$ es una cadena de 2 elementos$\} \cap \mathcal{W}_0$,

$\mathcal{W}_3 = \{\mathbf{A} \in \mathcal{W} : q(\mathbf{A})$ es una anti-cadena de 2 elementos$\} \cap \mathcal{W}_0$.

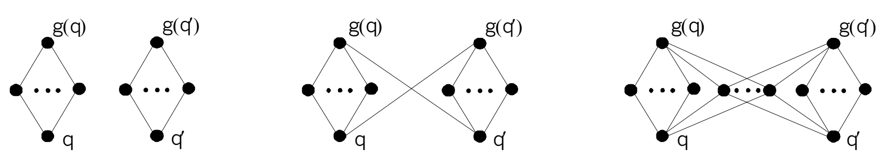
Las figuras que presentamos a continuación describen esquemáticamente los duales de las álgebras en las clases que acabamos de definir.



Dual de un álgebra en $\mathcal{W}_1$



Duales de álgebras en $\mathcal{W}_2$



Duales de álgebras en $\mathcal{W}_3$

En la siguiente serie de lemas φ es siempre una DEF. Recordamos al lector que $\mathbf{P}$ es el álgebra en la Figura 1.2.

Lema 34 *Si* $\mathbf{P} \vDash \varphi$ *entonces* $\mathcal{W}_1 \vDash \varphi$*.*

Prueba. Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{W}_1$, y supongamos $q(\mathbf{A}) = \{q\}$. Entonces

$$X(\mathbf{A}) = \{q, g(q)\} \cup Y,$$

donde

$$Y = \{p \in X(\mathbf{A}) : q \subsetneq p = g(p) \subsetneq g(q)\}.$$

Nuestro razonamiento será por inducción en el cardinal de Y. Si $|Y| = 1$ entonces $\mathbf{A} \cong \mathbf{4} \in H(\mathbf{P}) \cap IS(\mathbf{P})$ y podemos aplicar el Lema 6. Si $|Y| = 2$ entonces $\mathbf{A} \cong \mathbf{P}$. Supongamos $|Y| \geq 3$, y sean $p_1, p_2 \in Y$, $p_1 \neq p_2$. Definimos

$$F_1 = X(\mathbf{A}) - \{p_1\} \text{ y } F_2 = X(\mathbf{A}) - \{p_2\}.$$

Probaremos que θ_{F_1} y θ_{F_2} permutan. Sea

$$(a, b) \in \theta_{F_1} \vee \theta_{F_2} = \theta_{X(A)-\{p_1,p_2\}}$$

y sea

$$U = (\sigma(a) \cap F_1) \cup (\sigma(b) \cap F_2).$$

Como $U \cap F_1 = \sigma(a) \cap F_1$ y $U \cap F_2 = \sigma(b) \cap F_2$, basta con ver que U es un conjunto creciente. Supongamos $r \in \sigma(a) \cap F_1$ y $r \subsetneq s$, veremos que necesariamente $s \in U$. Si $s \in F_1$ entonces $s \in \sigma(a) \cap F_1 \subseteq U$. Si $s \notin F_1$ (i.e. $s = p_1$) entonces $r = q$. Ahora, como

$$(a, b) \in \theta_{X(\mathbf{A})-\{p_1,p_2\}} \subseteq \theta_{\{q\}}$$

tenemos que

$$a \in q \Leftrightarrow b \in q.$$

Luego

$$b \in q \subseteq p_1 = s \text{ y } s \in \sigma(b) \cap F_2 \subseteq U.$$

Notamos que $\mathbf{A}/\theta_{F_1}, \mathbf{A}/\theta_{F_2} \in \mathcal{W}_1$, lo que por hipótesis inductiva implica que

$$\mathbf{A}/\theta_{F_1} \vDash \varphi \text{ y } \mathbf{A}/\theta_{F_2} \vDash \varphi.$$

Además, como $\mathbf{4} \in IS(\mathbf{P})$ tenemos que $Q(\mathbf{4}) \vDash U(\varphi)$, y al saber que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}/\left(\theta_{F_1} \vee \theta_{F_2}\right)$ pertencen a $Q(\mathbf{4})$, aplicando el Lema 33 obtenemos que $\mathbf{A} \vDash \varphi$. ■

Sea $\mathbf{L}$ el álgebra de Kleene generalizada en la Figura 1.3.

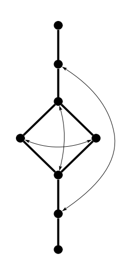


Figura 1.3: $\mathbf{L}$

Lema 35 *Si* $\mathbf{L} \vDash \varphi$ *entonces* $\mathcal{W}_2 \vDash \varphi$.

Prueba. Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{W}_2$. Supongamos $q(\mathbf{A}) = \{q', q\}$, con $q' \subsetneq q$. Claramente

$$X(\mathbf{A}) = \{q, q', g(q), g(q')\} \cup Y \cup Y',$$

donde

$$Y = \{p \in X(\mathbf{A}) : q \subsetneq p = g(p) \subsetneq g(q)\}$$

y

$$Y' = \{p \in X(\mathbf{A}) : q' \subsetneq p = g(p) \subsetneq g(q')\}.$$

Obsérvese que $q' \subsetneq q \subsetneq g(q) \subsetneq g(q')$ y por lo tanto $Y \subseteq Y'$.

Caso (i): $Y' - Y = \emptyset$. Ya que la prueba de este caso es muy similar a la del Lema 34 la dejamos al lector.

Caso (ii): $Y' - Y \neq \emptyset$. Sean $F_1 = X(\mathbf{A}) - (Y' - Y)$ y $F_2 = X(\mathbf{A}) - \{q, g(q)\}$. Veremos que θ_{F_1} y θ_{F_2} permutan. Fijamos $(a, b) \in \theta_{F_1} \vee \theta_{F_2} = \theta_{Y \cup \{q', g(q')\}}$. Probaremos que $U = (\sigma(a) \cap F_1) \cup (\sigma(b) \cap F_2)$ es creciente. Sean $r \in U$ y $s \supsetneq r$. Supongamos $r \in \sigma(a) \cap F_1$. Si $s \in F_1$ entonces $s \in \sigma(a) \cap F_1 \subseteq U$. Si por lo contrario $s \notin F_1$, tenemos $s \in Y' - Y$, y r debe ser igual a q'. Ahora, $(a, b) \in \theta_{\{q'\}}$ lo cual dice que $b \in q'$, y por lo tanto $b \in s$. Luego $s \in \sigma(b) \cap F_2 \subseteq U$. Supongamos $r \in \sigma(b) \cap F_2$. Si $s \in F_2$ tenemos $s \in \sigma(b) \cap F_2 \subseteq U$, así que supondremos que $s \notin F_2$. Se sigue que $s \in \{q, g(q)\}$. Si $s = q$ entonces $r = q'$, y como $(a, b) \in \theta_{\{q'\}}$ obtenemos que $a \in q' \subseteq q$. Esto nos dice que $s \in \sigma(a) \cap F_1 \subseteq U$. En el caso de que $s = g(q)$ hay dos posibilidades: o bien $r = q'$, y repetimos el razonamiento de arriba, o $r \in Y$. Pero en este caso nuevamente tenemos que $(a, b) \in \theta_Y \subseteq \theta_{\{r\}}$, y así $a \in r \subseteq s$. Por lo tanto $s \in \sigma(a) \cap F_1 \subseteq U$.

El Lema 6 nos dice que $\mathbf{P} \vDash \varphi$, y al pertenecer $\mathbf{A}/\theta_{F_2}$ a $\mathcal{W}_1$, por el Lema 34 tenemos que $\mathbf{A}/\theta_{F_2} \vDash \varphi$. Nótese que si definimos $Y_1, Y_1' \subseteq X(\mathbf{A}/\theta_{F_1})$ de la misma forma que definimos Y', Y para $\mathbf{A}$, entonces $Y_1' - Y_1' = \emptyset$. Luego, por el Caso (i), $\mathbf{A}/\theta_{F_1} \vDash \varphi$. La prueba concluye aplicando el Lema 33 a $\mathbf{A}$, θ_{F_1} y θ_{F_2}. ■

Lema 36 *Si* $\mathbf{P} \vDash \varphi$ *entonces* $\mathcal{W}_3 \vDash \varphi$.

Prueba. Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{W}_3$. Supongamos $q(\mathbf{A}) = \{q, q'\}$, con q y q' incomparables. Entonces

$$X(\mathbf{A}) = \{q, q', g(q), g(q')\} \cup Y \cup Y',$$

donde

$$Y = \{p \in X(\mathbf{A}) : q \subsetneq p = g(p) \subsetneq g(q)\}$$

y

$$Y' = \{p \in X(\mathbf{A}) : q' \subsetneq p = g(p) \subsetneq g(q')\}.$$

Consideremos primero el caso en el que $q \not\subseteq g(q')$. Definimos $F_1 = \{q, g(q)\} \cup Y$ y $F_2 = \{q', g(q')\} \cup Y'$. Es fácil ver que

$$\mathbf{A} \cong \mathbf{A}/\theta_{F_1} \times \mathbf{A}/\theta_{F_2}.$$

Ahora, como $\mathbf{A}/\theta_{F_1}, \mathbf{A}/\theta_{F_2} \in \mathcal{W}_1$ por el Lema 34 sabemos que $\mathbf{A}/\theta_{F_1} \vDash \varphi$ y $\mathbf{A}/\theta_{F_2} \vDash \varphi$. Luego $\mathbf{A} \vDash \varphi$, y concluimos la prueba de este caso.

Supongamos ahora que $q \subset g(q')$ y $Y \cap Y' \neq \emptyset$. Tomamos $F_1 = \{q, g(q)\} \cup Y$ y $F_2 = \{q', g(q')\} \cup Y'$. Veremos que θ_{F_1} y θ_{F_2} permutan. Sea $(a, b) \in \theta_{F_1} \vee \theta_{F_2} = \theta_{Y \cap Y'}$. Una vez más probaremos que $U = (\sigma(a) \cap F_1) \cup (\sigma(b) \cap F_2)$ es creciente. Supongamos $r \in \sigma(a) \cap F_1$ y sea $s \supsetneq r$. Si $s \in F_1$ entonces $s \in \sigma(a) \cap F_1 \subseteq U$, por lo cual asumiremos que $s \notin F_1$. Entonces se da $s = g(q')$ o $s \in Y'$. Además nótese que $r \in F_1$ y $r \subsetneq s$ implica que $r \in \{q\} \cup Y$. Supongamos $s = g(q')$. Si $r = q$, como para todo $p \in Y \cap Y'$, se tiene que $(a, b) \in \theta_{\{p\}}$, podemos concluir que $b \in p \subseteq s$. Luego $s \in \sigma(b) \cap F_2 \subseteq U$. Si $r \in Y$, como $r \subsetneq g(q')$, tenemos que $r \in Y \cap Y'$. Por ello, el hecho de que $(a, b) \in \theta_{\{r\}}$ implica $b \in r \subseteq s$. En conclusión $s \in \sigma(b) \cap F_2 \subseteq U$, y por lo tanto θ_{F_1} y θ_{F_2} permutan. La prueba de esta caso se termina aplicando el Lema 33.

El único caso que falta considerar es $q \subsetneq g(q')$ y $Y \cap Y' = \emptyset$. Sea $\tilde{X} = X(\mathbf{A}) \cup \{p\}$, con $p \notin X(\mathbf{A})$. Extendemos el orden de $X(\mathbf{A})$ por $q < p < g(q)$ y $q' < p < g(q')$. Definimos $\tilde{g} : \tilde{X} \to \tilde{X}$ por $\tilde{g}(p) = p$ y $\tilde{g}(t) = g_{\mathbf{A}}(t)$ para todo $t \in X(\mathbf{A})$. Sea $\tilde{\mathbf{A}}$ el álgebra de Kleene generalizada cuyo dual es $(\tilde{X}, \tilde{g})$. Observamos que $\tilde{\mathbf{A}} \in \mathcal{W}_3$, y por el caso resuelto inmediatamente antes que este sabemos que $\tilde{\mathbf{A}} \vDash \varphi$. Notamos también que $\mathbf{A} \cong \tilde{\mathbf{A}}/\theta_{X(\mathbf{A})}$, lo cual implica que $\mathbf{A} \vDash E(\varphi)$. La última observación es que $\mathbf{4} \in IS(\mathbf{P})$, y así $Q(\mathbf{4}) \vDash U(\varphi)$. ■

A continuación, en los Lemas 37, 38 y 39, resolvemos tres pequeños problemas de preservación que surgen en la prueba del Lema 40. Cabe mencionar que para probar los primeros dos de estos tres lemas utilizamos una técnica que involucra las funciones asociadas a una DEF. Esta técnica ha probado ser de gran utilidad, permitiéndonos resolver problemas que se resistían a los métodos empleados hasta ahora.

Necesitamos introducir una notación antes de probar nuestro siguiente lema. Sea $f : A^n \to A$ una función cualquiera, escribiremos $f \times f \times f$ para denotar el mapeo

$(A \times A \times A)^n \to A \times A \times A$

$((x_1, y_1, z_1), ..., (x_n, y_n, z_n)) \mapsto (f(x_1, ..., x_n), f(y_1, ..., y_n), f(z_1, ..., z_n)).$

Lema 37 *Si* $\{\mathbf{6}, \mathbf{P}\} \vDash \varphi$ *entonces* $\mathbf{L} \vDash \varphi$.

Prueba. Supongamos que contrariamente al enunciado existe una DEF

$$\varphi = \forall x_1, ..., x_n \exists! z_1, ..., z_m \bigwedge_l p_l = q_l$$

tal que $\{\mathbf{6},\mathbf{P}\} \vDash \varphi$ y $\mathbf{L} \nvDash \varphi$. Nótese que por el Lema 6, como $\mathbf{4} \in H(\mathbf{6}) \cap IS(\mathbf{6})$, tenemos que $\mathbf{4} \vDash \varphi$.

Definimos los siguientes subconjuntos de 4^3:

$S_6^1 = \{(0,0,0),(1,1,0),(1,1,1),(2,2,2),(2,2,3),(3,3,3)\}$

$S_6^2 = \{(0,0,0),(1,0,1),(1,1,1),(2,2,2),(2,3,2),(3,3,3)\}$

$S_P = \{(0,0,0),(1,1,1),(1,2,1),(2,1,2),(2,2,2),(3,3,3)\}$

$S_{P\times 4} = \{(0,0,k),(1,1,k),(2,1,k),(2,2,k),(3,3,k) : k = 0,1,2,3\}$

$S_L = \{(0,0,0),(1,1,0),(1,1,1),(1,2,1),(2,1,2),(2,2,2),(2,2,3),(3,3,3)\}$.

El lema 5 nos dice que $\mathbf{4}\times\mathbf{4}\times\mathbf{4} \vDash \varphi$, y además:

$[\varphi]_j^{\mathbf{4}\times\mathbf{4}\times\mathbf{4}} = [\varphi]_j^{\mathbf{4}} \times [\varphi]_j^{\mathbf{4}} \times [\varphi]_j^{\mathbf{4}} \qquad j = 1,...,m$

$[\varphi]_j^{\mathbf{4}\times\mathbf{4}\times\mathbf{4}}((S_6^i)^n) \subseteq S_6^i \qquad i = 1,2,\ j = 1,...,m$

$[\varphi]_j^{\mathbf{4}\times\mathbf{4}\times\mathbf{4}}((S_P)^n) \subseteq S_P \qquad j = 1,...,m$

$[\varphi]_j^{\mathbf{4}\times\mathbf{4}\times\mathbf{4}}((S_{P\times 4})^n) \subseteq S_{P\times 4} \qquad j = 1,...,m$

$[\varphi]_{j_0}^{\mathbf{4}\times\mathbf{4}\times\mathbf{4}}((S_L)^n) \nsubseteq S_L \qquad$ para algún $1 \leq j_0 \leq m$.

Como $\mathbf{4} \in IS(\mathbf{6})$ es claro que $\mathbf{4} \vDash U(\varphi)$, y al pertenecer $\mathbf{L}$ a $Q(\mathbf{4})$ tenemos que $\mathbf{L} \vDash U(\varphi)$. Luego $\mathbf{L} \nvDash E(\varphi)$. Obsérvese que entonces, para cualquier subconjunto $\{a_1,...,a_k\}$ de generadores de $\mathbf{L}$, modificando φ adecuadamente podemos construir una DEF φ' tal que

$$\varphi' = \forall x_1,...,x_k \exists! z_1,...,z_m \bigwedge_j p'_j = q'_j, \{\mathbf{6},\mathbf{P}\} \vDash \varphi'$$

y

$$\mathbf{L} \nvDash \varphi'.$$

Más aún podemos construir φ' de manera que la existencia falle cuando $x_1 = a_1,...,x_k = a_k$.

Ya que $\{(0,0,0),(1,1,0),(1,1,1),(1,2,1)\}$ es un conjunto de generadores de la subálgebra de $\mathbf{4}^3$ isomórfica a $\mathbf{L}$ y con universo S_L, por el razonamiento anterior podemos suponer que $n = 4$ y

$$[\varphi]_{j_0}^{\mathbf{4}\times\mathbf{4}\times\mathbf{4}}((0,0,0),(1,1,0),(1,1,1),(1,2,1)) \notin S_L.$$

Veremos que esto no es posible. Para facilitar la lectura de la prueba denotaremos con F a $[\varphi]_{j_0}^{\mathbf{4}\times\mathbf{4}\times\mathbf{4}}$ y con f a $[\varphi]_{j_0}^{\mathbf{4}}$.

Supongamos $(x,y,z) \in 4^3$ es tal que

$$F((0,0,0),(1,1,0),(1,1,1),(1,2,1)) = (x,y,z).$$

Entonces

$$\begin{aligned} f(0,1,1,1) &= x, \\ f(0,1,1,2) &= y, \\ f(0,0,1,1) &= z. \end{aligned}$$

Afirmación (i) $(x, y, z) \neq (1, 2, 0)$. Si por el contrario

$$F((0,0,0),(1,1,0),(1,1,1),(1,2,1)) = (1,2,0),$$

entonces

$$(0, v, 0) = F((0,0,0),(0,0,0),(1,1,1),(1,2,1)) \in S_P$$

y como $(0, v, 0)$ debe estar en S_P

$$v = f(0,0,1,2) = 0.$$

Pero de esto se obtiene que

$$(2,0,2) = F((0,0,0),(1,0,1),(1,1,1),(2,2,2)) \in S_6^2,$$

lo cual es una contradicción ya que $(2,0,2) \notin S_6^2$.

Afirmación (ii) $(x, y, z) \neq (2, 1, 3)$. Razonaremos nuevamente por el absurdo. Supongamos

$$F((0,0,0),(1,1,0),(1,1,1),(1,2,1)) = (2,1,3).$$

Entonces

$$(3, v, 3) = F((0,0,0),(0,0,0),(1,1,1),(1,2,1)) \in S_P,$$

por lo cual

$$v = f(0,0,1,2) = 3.$$

Pero de esto concluimos que

$$(1,3,1) = F((0,0,0),(1,0,1),(1,1,1),(2,2,2)) \in S_6^2$$

arribando a una contradicción.

Nuestra prueba concluye con un análisis por casos, en el cual veremos que cualquiera sea el valor que toma x, necesariamente $(x, y, z) \in S_L$.

Caso $x = 0$. Nótese que

$$(0,0,z) = (x,x,z) = F((0,0,0),(1,1,0),(1,1,1),(1,1,1)) \in S_6^1,$$

y por lo tanto $z = 0$. Ahora, como $S_L \subset S_{P\times 4}$ tenemos que $(0, y, 0) \in S_{P\times 4}$. Luego $y = 0$ y

$$(x, y, z) = (0,0,0) \in S_L.$$

Caso $x = 3$. Usando el mismo razonamiento que en el caso anterior se obtiene que $(x, y, z) = (3,3,3) \in S_L$.

Caso $x = 1$. Como

$$(1, 1, z) = F((0, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 1, 1)) \in S_6^1$$

obtenemos que $z \in \{0, 1\}$. Además de

$$(1, y, 1) = F((0, 0, 0), (1, 1, 1), (1, 1, 1), (1, 2, 1)) \in S_P$$

obtenemos que $y \in \{1, 2\}$. Luego

$$(x, y, z) \in \{(1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 2, 0), (1, 2, 1)\},$$

y por (i) sabemos que $(x, y, z) \neq (1, 2, 0)$, lo cual produce $(x, y, z) \in S_L$.
Caso $x = 2$. De

$$(2, 2, z) = F((0, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 1, 1)) \in S_6^1$$

se sigue que $z \in \{2, 3\}$, y como

$$(2, y, 2) = F((0, 0, 0), (1, 1, 1), (1, 1, 1), (1, 2, 1)) \in S_P$$

tenemos $y \in \{1, 2\}$. Por lo tanto

$$(x, y, z) \in \{(2, 1, 2), (2, 1, 3), (2, 2, 2), (2, 2, 3)\},$$

y (ii) dice que $(x, y, z) \neq (2, 1, 3)$. Luego $(x, y, z) \in S_L$. ■

Sean $\mathbf{T}$ y $\mathbf{R}$ las álgebras de Kleene generalizadas de las Figuras 1.4 y 1.5.

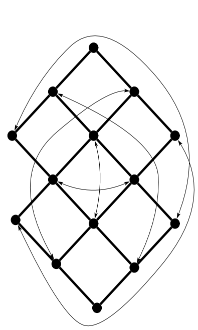


Figura 1.4: $\mathbf{T}$

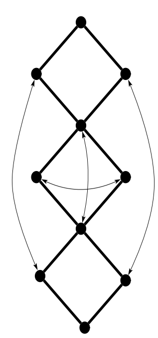


Figura 1.5: $\mathbf{R}$

Lema 38 *(1) Si* $\mathbf{T} \vDash \varphi$ *entonces* $\mathbf{R} \vDash \varphi$*.*

(2) Si $\mathbf{T} \vDash \varphi$ *entonces* $\mathbf{P} \vDash \varphi$*.*

Prueba. (1) Supongamos por el contrario que hay una DEF φ tal que $\mathbf{T} \vDash \varphi$ y $\mathbf{R} \nvDash \varphi$. Como $\mathbf{R}$ es 3-generado podemos suponer que φ tiene tres variables cuantificadas universalmente (ver la prueba del Lema 37). Nótese además que de $\mathbf{T} \vDash \varphi$, por el Lema 6, obtenemos que $\mathbf{4} \vDash \varphi$, y por lo tanto $\mathbf{4} \times \mathbf{4} \vDash \varphi$. Definimos los siguientes subconjuntos de 4×4:

$S_T = \mathbf{4} \times \mathbf{4} - \{(0,3),(3,0)\}$

$S_R = \mathbf{4} \times \mathbf{4} - \{(0,3),(3,0),(2,0),(0,2),(3,1),(1,3)\}$

$S_4 = \{(0,0),(1,0),(2,3),(3,3)\}$.

El Lema 5 dice que para $j = 1,2,3$

$[\varphi]_j^{\mathbf{4}\times\mathbf{4}} = [\varphi]_j^{\mathbf{4}} \times [\varphi]_j^{\mathbf{4}}$

$[\varphi]_j^{\mathbf{4}\times\mathbf{4}}((S_4)^3) \subseteq S_4$

$[\varphi]_j^{\mathbf{4}\times\mathbf{4}}((S_T)^3) \subseteq S_T$.

Ahora, como $\mathbf{R} \nvDash \varphi$ y $\{(1,0),(2,1),(3,2)\}$ es un conjunto de generadores de $\mathbf{R}$, podemos asumir que

$$[\varphi]_1^{\mathbf{4}\times\mathbf{4}}((1,0),(2,1),(3,2)) \notin S_R.$$

Supongamos

$$[\varphi]_1^{\mathbf{4}\times\mathbf{4}}((1,0),(2,1),(3,2)) = (3,1).$$

Entonces

$$[\varphi]_1^{\mathbf{4}\times\mathbf{4}}((0,0),(1,0),(2,3)) = (1,y) \in S_4,$$

y debe ser que $y = 0$. De esto obtenemos que

$$[\varphi]_1^{\mathbf{4}\times\mathbf{4}}((1,0),(2,0),(3,3)) = (3,0) \notin S_T,$$

lo cual es una contradicción. Los casos restantes producen contradicciones en la misma forma, y son dejados al lector.

(2) es una consecuencia inmediata de (1) vía el Lema 6, ya que $\mathbf{P} \in H(\mathbf{R}) \cap IS(\mathbf{R})$. ■

Sea $\mathbf{G}$ el álgebra de Kleene generalizada de la Figura 1.6.

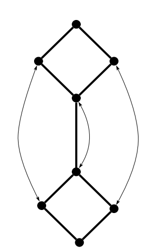


Figura 1.6: $\mathbf{G}$

Lema 39 *Si* $\mathbf{4} \models \varphi$ *entonces* $\mathbf{G} \models \varphi$.

Prueba. El dual de $\mathbf{G}$ es $\{q, g(q), p, q', g(q')\}$, donde $q \subsetneq p = g(p) \subsetneq g(q)$ y $q' \subsetneq p = g(p) \subsetneq g(q')$. Sean $F_1 = \{q, g(q), p\}$ y $F_2 = \{q', g(q'), p\}$. Veremos que θ_{F_1} y θ_{F_2} permutan. Para esto fijamos $(x, y) \in \theta_{F_1} \vee \theta_{F_2}$, y probaremos que $U = (\sigma(x) \cap F_1) \cup (\sigma(y) \cap F_2)$ es creciente. Sea $r \in \sigma(x) \cap F_1$, y tomamos $s \supsetneq r$. El único caso no trivial surge de suponer que $s = g(q')$. Si ese es el caso entonces $r \in \{p, q\}$. Ahora, como $(x, y) \in \theta_{F_1} \vee \theta_{F_2} = \theta_{\{p\}}$ y $x \in p$, tenemos que $y \in p$. Luego $s \in \sigma(y) \cap F_2$, y por lo tanto U es creciente. La prueba concluye aplicando el Lema 33 a $\mathbf{G}$, θ_{F_1} y θ_{F_2}. ■

Hemos recolectado toda la información necesaria para la prueba de nuestro siguiente resultado.

Lema 40 *La clase* $D_{Q(\mathbf{4})} = \{\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{6}, \mathbf{P}\}$ *es determinante para* $\mathcal{W}$.

Prueba. Sean φ_1 y φ_2 dos DEFs que cumplen

$$Mod(\varphi_1) \cap D_{Q(\mathbf{4})} = Mod(\varphi_2) \cap D_{Q(\mathbf{4})}.$$

Supongamos $\mathbf{A} \in \mathcal{W}$ es tal que $\mathbf{A} \models \varphi_1$, veremos que $\mathbf{A} \models \varphi_2$. Si $\mathbf{A}$ es trivial esto es inmediato, así es que supondremos$|A| \geq 2$. Supongamos $\mathbf{4} \not\models U(\varphi_1)$. Entonces $\mathbf{4} \notin IS(\mathbf{A})$, y necesariamente $\mathbf{A} \in \mathcal{B}$. Además, como $\mathbf{A}$ es no trivial tenemos $\mathbf{2} \in H(\mathbf{A}) \cap IS(\mathbf{A})$, y el Lema 6 produce

$$\mathbf{2} \in Mod(\varphi_1) \cap D_{Q(\mathbf{4})} = Mod(\varphi_2) \cap D_{Q(\mathbf{4})}.$$

Obsérvese que $\mathbf{A} \in \mathcal{B}$ implica que, $\mathbf{A}$ es isomorfa a un producto subdirecto global con factores en $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}\}$, luego por la Proposición 8 tenemos $\mathbf{A} \models \varphi_2$.

Supongamos $\mathbf{4} \models U(\varphi_1)$. Esto dice que $U(\varphi_1)$ vale en todo $Q(\mathbf{4})$. Deberemos considerar varios casos.

Caso $\mathbf{A} \in \mathcal{W}_1$. Si $\mathbf{A} \cong \mathbf{4}$ claramente $\mathbf{A} \models \varphi_2$. Si $\mathbf{A}$ no es isomorfa a $\mathbf{4}$, es fácil ver que $\mathbf{P} \in H(\mathbf{A})$. Así $\mathbf{P} \models \varphi_1$ y luego $\mathbf{P} \models \varphi_2$. Por último, el Lema 34 implica $\mathbf{A} \models \varphi_2$.

Caso $\mathbf{A} \in \mathcal{W}_2$. Nótese que toda álgebra en $\mathcal{W}_2$ tiene a $\mathbf{6}$ como imagen homomórfica. Si $\mathbf{A} \cong \mathbf{6}$ es inmediato que $\mathbf{A} \models \varphi_2$. Por otro lado, si $\mathbf{A} \not\cong \mathbf{6}$ entonces $\mathbf{P} \in H(\mathbf{A})$. Luego $\{\mathbf{6}, \mathbf{P}\} \models \varphi_1$, y por lo tanto $\{\mathbf{6}, \mathbf{P}\} \models \varphi_2$. El Lema 37 dice entonces que $\mathbf{L} \models \varphi_2$, y aplicando el Lema 35 obtenemos que $\mathcal{W}_2 \models \varphi_2$.

Caso $\mathbf{A} \in \mathcal{W}_3$. Si $\mathbf{P} \in H(\mathbf{A})$, entonces $\mathbf{P} \models \varphi_1$. Por lo tanto $\mathbf{P} \models \varphi_2$, y vía el Lema 36 obtenemos $\mathcal{W}_3 \models \varphi_2$. Supongamos que $\mathbf{P} \notin H(\mathbf{A})$, y que $q(\mathbf{A}) = \{q, q'\}$, con q y q' incomparables. Tenemos entonces que

$$X(\mathbf{A}) = \{q, q', g(q), g(q')\} \cup Y \cup Y',$$

donde

$$Y = \{p \in X(\mathbf{A}) : q < p = g(p) < g(q)\}$$

e

$$Y' = \{p \in X(\mathbf{A}) : q' < p = g(p) < g(q')\}.$$

El hecho de que $\mathbf{P} \notin H(\mathbf{A})$ nos dice que $|Y| = |Y'| = 1$. Luego, si $Y \cap Y' \neq \emptyset$, entonces $\mathbf{A} \cong \mathbf{G}$, y el Lema 39 concluye la prueba de este caso. Supongamos entonces que $Y \cap Y' = \emptyset$. Surgen ahora dos subcasos dependiendo de si $q < g(q')$ o no. Si $q < g(q')$, entonces $\mathbf{A} \cong \mathbf{T}$, y podemos aplicar el Lema 38 para obtener que $\mathbf{P} \vDash \varphi_1$. Luego $\mathbf{P} \vDash \varphi_2$, y por el Lema 36 tenemos $\mathcal{W}_3 \vDash \varphi_2$. Si $q \not< g(q')$ es fácil ver que $\mathbf{A} \cong \mathbf{4} \times \mathbf{4}$, por lo que $\mathbf{A} \vDash \varphi_2$. Esto concluye la prueba del caso $\mathbf{A} \in \mathcal{W}_3$.

Observamos que $\mathcal{W}_0 = \mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 \cup \mathcal{W}_3$, por lo que el único caso que nos resta considerar es $\mathbf{A} \in \mathcal{W} - \mathcal{W}_0$. Se puede ver sin mayores dificultades que si $\mathbf{A} \in \mathcal{W} - \mathcal{W}_0$ entonces existen $\mathbf{A}' \in \mathcal{W}_0$ y $\mathbf{B} \in \mathcal{B}$ tales que $\mathbf{A} \cong \mathbf{A}' \times \mathbf{B}$. Además, como estamos bajo la suposición de que $Q(\mathbf{4}) \vDash U(\varphi_1)$, tenemos que $\mathbf{A} \vDash \varphi_1$ implica $\mathbf{A}' \vDash \varphi_1$ y $\mathbf{B} \vDash \varphi_1$. Usando los casos anteriores podemos ver que $\mathbf{A}' \vDash \varphi_2$ y $\mathbf{B} \vDash \varphi_2$. Luego $\mathbf{A} \vDash \varphi_2$. ■

El Lema anterior en conjunción con el Corolario 40 producen:

Corolario 41 *La clase* $D_{Q(\mathbf{4})} = \{\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{6}, \mathbf{P}\}$ *es determinante para* $Q(\mathbf{4})$.

Necesitamos ahora enfocar brevemente nuestra atención en las subcuasivariedades de $\mathcal{K}$.

Proposición 42 (Adams y Dziobiak [2]) *Las subcuasivariedades de* $\mathcal{K}$ *forman la siguiente cadena de 5 elementos:*

$$\{\textit{álgebras triviales en } \mathcal{K}\} \subset \mathcal{B} \subset Q(\mathbf{4}) \subset Q(\mathbf{2} \times \mathbf{3}) \subset \mathcal{K}.$$

Corolario 43 *Sea* φ *una DEF que tiene un modelo no trivial en* $\mathcal{K}$*. Entonces*

$$Mod(U(\varphi)) \cap \mathcal{K} \neq Q(\mathbf{2} \times \mathbf{3}),$$

y por lo tanto $Mod(\varphi) \cap \mathcal{K}$ *es una de las siguientes clases:*

$\{$*álgebras triviales en* $K\}$

$\mathcal{B}$

$Q(\mathbf{4})$

$\mathcal{K}$.

Prueba. Supongamos $\mathbf{2} \times \mathbf{3} \vDash U(\varphi)$, y sea $\mathbf{A}$ un elemento no trivial de $Mod(\varphi) \cap \mathcal{K}$. Si $\mathbf{2} \in H(\mathbf{A})$ es claro que $\mathbf{2} \vDash E(\varphi)$, y no es difícil de ver que en ese caso $\mathbf{2} \times \mathbf{3} \vDash U(\varphi)$ implica $\mathbf{3} \vDash U(\varphi)$. Luego $\mathcal{K} \subseteq Mod(U(\varphi))$. Por otro lado si $\mathbf{2} \notin H(\mathbf{A})$ entonces $\mathbf{4} \notin H(\mathbf{A})$, y el Teorema 25 nos dice que $\mathbf{A}$ es un producto subdirecto global con factores en $\{\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{5}, \mathbf{D}\}$. Como cada uno de estos factores satisface $\exists! z\ z = \overline{z}$ la Proposición 8 implica que $\mathbf{A} \vDash \exists! z\ z = \overline{z}$. De esto obtenemos que $\mathbf{3} \in IS(\mathbf{A})$, y se sigue que $\mathcal{K} \subseteq Mod(U(\varphi))$. ■

Estamos finalmente en condiciones de dar la prueba del resultado principal de esta sección.

Prueba del Teorema 26. Supongamos φ_1 y φ_2 son DEFs en el lenguaje de $\mathcal{K}$, que satisfacen

$$Mod(\varphi_1) \cap D_{\mathcal{K}} = Mod(\varphi_2) \cap D_{\mathcal{K}}.$$

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ tal que $\mathbf{A} \vDash \varphi_1$. Obsérvese que, por el Corolario 43, o bien $Mod(U(\varphi_1)) \cap \mathcal{K}$ está contenido en $Q(\mathbf{4})$ o coincide con $\mathcal{K}$. Supongamos $Mod(U(\varphi_1)) \cap \mathcal{K} \subseteq Q(\mathbf{4})$. Entonces, como $D_{Q(\mathbf{4})} \subseteq D_{\mathcal{K}}$, tenemos que

$$Mod(\varphi_1) \cap D_{Q(\mathbf{4})} = Mod(\varphi_2) \cap D_{Q(\mathbf{4})}.$$

Luego, del hecho de que $\mathbf{A} \in Q(\mathbf{4})$ y el Corolario 41 se desprende que $\mathbf{A} \vDash \varphi_2$. Consideremos el caso en que $\mathcal{K} \subseteq Mod(U(\varphi_1))$. En este caso tenemos que $H(\mathbf{A}) \vDash \varphi_1$. En particular

$$H(\mathbf{A}) \cap \{\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{D}\} \vDash \varphi_1,$$

por lo cual

$$H(\mathbf{A}) \cap \{\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{D}\} \vDash \varphi_2.$$

Ahora, el Teorema 25 nos dice que $\mathbf{A}$ es isomorfa a un producto subdirecto global con factores en $H(\mathbf{A}) \cap \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{D}\}$, y podemos aplicar la Proposición 8 para obtener que $\mathbf{A} \vDash \varphi_2$. ■

1.4.2. El Reticulado de Subclases AE de $\mathcal{K}$

Como ya hemos visto, la clase $D_{\mathcal{K}} = \{\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, \mathbf{D}, \mathbf{P}\}$ concentra toda la información necesaria para determinar las subclases AE de $\mathcal{K}$. La tarea que nos queda entonces es encontrar las subclases AE de $D_{\mathcal{K}}$. Hacemos esto en el Teorema 47, con ayuda de los Lemas 44 y 45. A pesar de que $D_{\mathcal{K}}$ es una clase pequeña de álgebras finitas, el determinar cuales subconjuntos de $D_{\mathcal{K}}$ son axiomatizables por DEFs no es un problema sencillo.

Para el primer lema de esta sección necesitamos introducir la siguiente notación. Sea A un conjunto y $f : A^n \to A$ una función. Escribiremos $f \times f$ para denotar la función

$(A \times A)^n \to A \times A$
$((x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)) \mapsto (f(x_1, ..., x_n), f(y_1, ..., y_n))$.

Lema 44 *Sea $f : 3^n \to 3$ un función cualquiera, y sea $F = f \times f$. Definimos los siguientes subconjuntos de 3×3 :*
$S_2 = \{(0,0),(2,2)\}$,
$S_4^1 = \{(0,0),(0,1),(2,1),(2,2)\}$,
$S_4^2 = \{(0,0),(1,0),(1,2),(2,2)\}$,
$S_5^1 = \{(0,0),(0,1),(1,1),(2,1),(2,2)\}$,
$S_5^2 = \{(0,0),(1,0),(1,1),(1,2),(2,2)\}$,
$S_D = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$.
Entonces:

(1) Si $F((S_2)^n) \subseteq S_2$ y $F((S_D)^n) \subseteq S_D$ entonces $F((S_4^j)^n) \subseteq S_4^j$ para $j = 1, 2$.

(2) Si $F((S_5^j)^n) \subseteq S_5^j$ para $j = 1, 2$ entonces $F((S_D)^n) \subseteq S_D$.

(3) Si $F((S_4^j)^n) \subseteq S_4^j$ para $j = 1, 2$ entonces $F((S_D)^n) \subseteq S_D$.

Prueba. (1) Probaremos que $F((S_4^1)^n) \subseteq S_4^1$. Supongamos que esto no se cumple, i.e. que existen $(a_1, b_1), ..., (a_n, b_n) \in S_4^1$ tales que $F((a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)) \notin S_4^1$. Entonces, como $F((S_D)^n) \subseteq S_D$, tenemos que

$$F((a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)) \in \{(1,0),(1,1),(1,2)\}$$

y por lo tanto

$$f(a_1, ..., a_n) = 1.$$

De $(a_i, b_i) \in S_4^1$ se desprende que $a_i \in \{0, 2\}$, y esto dice que $(a_i, a_i) \in S_2$, para $i = 1, ..., n$. Pero entonces

$$F((a_1, a_1), ..., (a_n, a_n)) = (1,1) \notin S_2,$$

lo cual es una contradicción.

(2) Veremos que negar este enunciado produce un absurdo. Supongamos que hay $(a_1, b_1), ..., (a_n, b_n) \in S_D$ tales que

$$F((a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)) \in \{(0,2),(2,0)\} = 3 \times 3 - S_D.$$

Analizaremos el caso en que $F((a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)) = (0, 2)$. Sean $(a_1', b_1), ..., (a_n', b_n)$ los pares que se obtienen al reemplazar en $(a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)$ cada par de la forma $(1, 0)$ por $(0, 0)$, y cada par de la forma $(1, 2)$ por $(2, 2)$. Después de estos reemplazos tenemos que

$$(a_1', b_1), ..., (a_n', b_n) \in S_5^1.$$

Luego, como

$$F((a_1', b_1), ..., (a_n', b_n)) = (f(a_1', ..., a_n'), 2) \in S_5^1,$$

obtenemos

$$f(a_1',...,a_n') = 2. \qquad (*)$$

Sean $(a_1,b_1'),...,(a_n,b_n')$ los pares que se obtienen al reemplazar en $(a_1,b_1),...,(a_n,b_n)$ cada par de la forma $(0,1)$ por $(0,0)$, y cada par de la forma $(2,1)$ por $(2,2)$. Un razonamiento análogo al de arriba produce

$$f(b_1',...,b_n') = 0. \qquad (**)$$

Observamos que

$$a_1' = b_1',...,a_n' = b_n',$$

por lo cual

$$(a_1',b_1'),...,(a_n',b_n') \in S_5^1.$$

Pero (*) y (**) dicen que

$$F((a_1',b_1'),...,(a_n',b_n')) = (2,0) \notin S_5^1,$$

lo cual es una contradicción.
El caso $F\left((a_1,b_1),...,(a_n,b_n)\right) = (2,0)$ es análogo.
(3) Supongamos que hay $(a_1,b_1),...,(a_n,b_n) \in S_D$ tales que

$$F\left((a_1,b_1),...,(a_n,b_n)\right) \in \{(0,2),(2,0)\} = 3\times 3 - S_D.$$

Veremos que no es posible que

$$F\left((a_1,b_1),...,(a_n,b_n)\right) = (0,2)$$

(el caso $F\left((a_1,b_1),...,(a_n,b_n)\right) = (0,2)$ es similar). Sean $(a_1,b_1'),...,(a_n,b_n')$ los pares que se obtienen al reemplazar en $(a_1,b_1),...,(a_n,b_n)$ cada par de la forma $(0,1)$ por $(0,0)$, cada par de la forma $(2,1)$ por $(2,2)$, y cada par de la forma $(1,1)$ por $(1,0)$. Nótese que

$$(a_1,b_1'),...,(a_n,b_n') \in S_4^2,$$

y como

$$F((a_1,b_1'),...,(a_n,b_n')) = (0,f(b_1',...,b_n')) \in S_4^2,$$

obtenemos

$$f(b_1',...,b_n') = 0.$$

Es claro que $(b_i,b_i') \in S_4^2$, para $i = 1,...,n$, luego

$$F((b_1,b_1'),...,(b_n,b_n')) = (2,0)$$

es una contradicción. ■

Recordamos al lector que **D** es el álgebra en la Figura 1.1.

Lema 45 *Sea φ una DEF.*

(1) Si $\mathbf{2} \vDash \varphi$ y $\mathbf{D} \vDash \varphi$ entonces $\mathbf{4} \vDash \varphi$.

(2) Si $\mathbf{5} \vDash \varphi$ entonces $\mathbf{D} \vDash \varphi$.

(3) Si $\mathbf{3} \vDash \varphi$ y $\mathbf{4} \vDash \varphi$ entonces $\mathbf{D} \vDash \varphi$.

Prueba. (1) Sea

$$\varphi = \forall x_1, ..., x_n \exists! z_1, ..., z_m \bigwedge s(\vec{x}, \vec{z}) = t(\vec{x}, \vec{z}).$$

Ya que $\mathbf{D} \vDash \varphi$ y $\mathbf{3} \in H(\mathbf{D}) \cap IS(\mathbf{D})$, el Lema 6 nos dice que $\mathbf{3} \vDash \varphi$. Aplicando (1) del Lema 5, obtenemos que

$$[\varphi]_j^{\mathbf{3}} \times [\varphi]_j^{\mathbf{3}} = [\varphi]_j^{\mathbf{3}\times\mathbf{3}},$$

y por (2) del mismo lema obtenemos

$$[\varphi]_j^{\mathbf{3}\times\mathbf{3}}((S_2)^n) \subseteq S_2$$

y

$$[\varphi]_j^{\mathbf{3}\times\mathbf{3}}((S_D)^n) \subseteq S_D, \quad j = 1, ..., m.$$

Luego el punto (1) del Lema 44 dice que

$$[\varphi]_j^{\mathbf{3}\times\mathbf{3}}((S_4^1)^n) \subseteq S_4^1, \quad j = 1, ..., m,$$

y por esto

$$[\varphi]^{\mathbf{3}\times\mathbf{3}}((S_4^1)^n) \subseteq S_4^1.$$

La prueba concluye aplicando (2) del Lema 5.

(2) y (3) se obtienen del Lema 44 de una manera análoga a la del punto (1). ∎

Presentamos a continuación las DEFs que nos servirán para axiomatizar las subclases AE de $\mathcal{K}$.

Definición 46 *Sean:*

$$\begin{array}{lcll}
\varphi_{TRI} & = & \exists! z & z = z \\
\varphi_{\mathcal{K}} & = & \forall x \exists! z & z = x \\
\varphi_{FIX} & = & \exists! z & z = \overline{z} \\
\varphi_{\mathcal{B}} & = & \exists! z & z = z \vee \overline{z} \\
\varphi_{Q(\mathbf{4})} & = & \forall x \exists! z & (x \wedge \overline{x}) \vee z = x \vee \overline{x} \\
\varphi_{RCD} & = & \forall x_1, x_2, x_3 \exists! z & z \wedge (x_1 \vee \overline{x}_1 \vee (x_3 \wedge x_2)) = x_1 \vee \overline{x}_1 \\
 & & & z \vee (x_1 \vee \overline{x}_1 \vee (x_3 \wedge x_2)) = x_1 \vee \overline{x}_1 \vee x_2
\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_{NEW} \quad = \quad & \forall x_1, x_2 \exists! z \\
& z \vee \overline{z} = x_1 \vee \overline{x}_1 \\
& z \wedge ((x_1 \vee \overline{x}_1) \wedge \overline{x}_2) \vee (x_1 \wedge \overline{x}_1)) \leq ((x_1 \vee \overline{x}_1) \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \overline{x}_1) \\
& z \vee ((x_1 \vee \overline{x}_1) \wedge \overline{x}_2) \vee (x_1 \wedge \overline{x}_1)) \geq ((x_1 \vee \overline{x}_1) \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \overline{x}_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_{PER} \quad = \quad & \forall x_1, x_2 \exists! z \\
& z \vee \overline{z} = x_1 \vee \overline{x}_1 \\
& z \leq ((x_1 \vee \overline{x}_1) \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \overline{x}_1) \\
& z \vee ((x_1 \vee \overline{x}_1) \wedge \overline{x}_2) \vee (x_1 \wedge \overline{x}_1) \geq ((x_1 \vee \overline{x}_1) \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \overline{x}_1)
\end{aligned}
$$

Es necesario hacer algunos comentarios sobre las sentencias recién definidas.

La sentencia $\varphi_{\mathcal{B}}$ es equivalente a la identidad $x \vee \overline{x} \approx y \vee \overline{y}$, y es por lo tanto un axioma para la clase $\mathcal{B}$.

La sentencia $\varphi_{Q(\mathbf{4})}$ es equivalente a su unicidad, $U(\varphi_{Q(\mathbf{4})})$. Es un axioma para $Q(\mathbf{4})$ [2].

La sentencia φ_{RCD} vale en un álgebra de Kleene generalizada $\mathbf{A}$ sii el intervalo $[a \vee \overline{a}, a \vee \overline{a} \vee b]$ es Booleano para todo $a, b \in A$. Esto es lo mismo que decir que el filtro $D(\mathbf{A}) = \{x \vee \overline{x} : x \in A\}$ es relativamente complementado.

Para $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ se tiene que $\mathbf{A} \vDash \varphi_{NEW}$ sii para cada intervalo $[a \wedge \overline{a}, a \vee \overline{a}]$ y cada $b \in [a \wedge \overline{a}, a \vee \overline{a}]$, existe un único $c \in [a \wedge \overline{a}, a \vee \overline{a}]$, que tiene a $\overline{c}$ como su complemento en ese intervalo, y satisface

$$c \wedge \overline{b} \leq b \leq c \vee \overline{b}.$$

Es fácil verificar que $\mathbf{4} \vDash \varphi_{NEW}$ pero $\mathbf{3} \nvDash U(\varphi_{NEW})$.

Al igual que φ_{NEW}, la sentencia φ_{PER} equivale a la existencia y unicidad de un elemento complementado en cada intervalo de la forma $[a \wedge \overline{a}, a \vee \overline{a}]$, que satisface ciertas ecuaciones. Es un hecho interesante que la existencia de estos elementos para un álgebra de $\mathcal{K}$ es equivalente a que el álgebra sea de congruencias permutables. No es difícil ver que las únicas álgebras en $D_{\mathcal{K}}$ que son de congruencias permutables son $\mathbf{2}$ y $\mathbf{3}$.

Teorema 47 *Las subclases AE de* $D_{\mathcal{K}} = \{\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, \mathbf{D}, \mathbf{P}\}$ *son:*

$\emptyset, \{\mathbf{2}\}, \{\mathbf{3}\}$,

$\{\mathbf{2}, \mathbf{3}\}, \{\mathbf{2}, \mathbf{4}\}, \{\mathbf{3}, \mathbf{D}\}$,

$\{\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{6}\}, \{\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{P}\}, \{\mathbf{3}, \mathbf{5}, \mathbf{D}\}$,

$\{\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{6}, \mathbf{P}\}$,

$\{\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{D}, \mathbf{P}\}$,

$\{\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, \mathbf{D}, \mathbf{P}\}$.

Prueba. En la tabla que presentamos a continuación utilizamos las sentencias de la Definición 46 para comprobar que todos los conjuntos listados en el enunciado de este teorema son en efecto subclases AE de $D_{\mathcal{K}}$.

$\emptyset : \varphi_{TRI}$	$\{\mathbf{2},\mathbf{4},\mathbf{6}\} : \varphi_{NEW}$
$\{\mathbf{2}\} : \varphi_{\mathcal{B}}$	$\{\mathbf{2},\mathbf{4},\mathbf{P}\} : \varphi_{RCD}, \varphi_{Q(\mathbf{4})}$
$\{\mathbf{3}\} : \varphi_{FIX}, \varphi_{PER}$	$\{\mathbf{3},\mathbf{5},\mathbf{D}\} : \varphi_{FIX}$
$\{\mathbf{2},\mathbf{3}\} : \varphi_{PER}$	$\{\mathbf{2},\mathbf{4},\mathbf{6},\mathbf{P}\} : \varphi_{Q(\mathbf{4})}$
$\{\mathbf{2},\mathbf{4}\} : \varphi_{NEW}, \varphi_{RCD}$	$\{\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{D},\mathbf{P}\} : \varphi_{RCD}$
$\{\mathbf{3},\mathbf{D}\} : \varphi_{FIX}, \varphi_{RCD}$	$\{\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5},\mathbf{6},\mathbf{D},\mathbf{P}\} : \varphi_{\mathcal{K}}$.

Nos resta ver que estos son los únicos subconjuntos de $D_{\mathcal{K}}$ axiomatizables por DEFs. Supongamos

$$\mathcal{S} \subseteq \{\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5},\mathbf{6},\mathbf{D},\mathbf{P}\}$$

es una subclase AE de $D_{\mathcal{K}}$. Comenzamos con la observación de que cada $\mathbf{A} \in D_{\mathcal{K}}$ satisface

$$H(\mathbf{A}) \cap IS(\mathbf{A}) \cap \{\mathbf{2},\mathbf{3}\} \neq \emptyset.$$

Luego, el Lema 6 implica que $\mathcal{S} = \emptyset$ o $\mathcal{S} \cap \{\mathbf{2},\mathbf{3}\} \neq \emptyset$.

Caso $\mathbf{3} \in \mathcal{S}, \mathbf{2} \notin \mathcal{S}$.

Como $\mathbf{2} \notin \mathcal{S}$, por el Lema 6 tenemos que

$$\mathcal{S} \cap \{\mathbf{4},\mathbf{6},\mathbf{P}\} = \emptyset.$$

Además tenemos que $\mathbf{5} \in \mathcal{S}$ implica $\mathbf{D} \in \mathcal{S}$ ((2) del Lema 45). Por lo tanto $\mathcal{S}$ debe ser una de las siguientes:

$\{\mathbf{3}\}$
$\{\mathbf{3},\mathbf{D}\}$
$\{\mathbf{3},\mathbf{5},\mathbf{D}\}$.

Caso $\mathbf{2} \in \mathcal{S}, \mathbf{3} \notin \mathcal{S}$.

Del Lema 6 se desprende que

$$\mathcal{S} \cap \{\mathbf{5},\mathbf{D}\} = \emptyset.$$

Supongamos $\mathbf{4} \notin \mathcal{S}$. Entonces podemos usar el Lema 6 para concluir que $\mathcal{S} \cap \{\mathbf{6},\mathbf{P}\} = \emptyset$, y $\mathcal{S}$ debe ser el singulete:

$\{\mathbf{2}\}$.

Por otro lado, si $\mathbf{4} \in \mathcal{S}$, entonces $\mathcal{S}$ es alguna de las siguientes:

$\{\mathbf{2},\mathbf{4}\}$
$\{\mathbf{2},\mathbf{4},\mathbf{6}\}$
$\{\mathbf{2},\mathbf{4},\mathbf{P}\}$
$\{\mathbf{2},\mathbf{4},\mathbf{6},\mathbf{P}\}$.

Caso $\{\mathbf{2},\mathbf{3}\} \subseteq \mathcal{S}$, $\mathbf{4} \notin \mathcal{S}$.

El Lema 6 nos dice que

$$\mathcal{S} \cap \{\mathbf{6},\mathbf{P}\} = \emptyset.$$

Por (1) del Lema 45 obtenemos que $\mathbf{D} \notin \mathcal{S}$. Ahora (2) del Lema 45 dice que $\mathbf{5} \notin \mathcal{S}$, y $\mathcal{S}$ debe ser:

$\{\mathbf{2}, \mathbf{3}\}$.

Caso $\{\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\} \subseteq \mathcal{S}$.
El punto (3) del Lema 45 implica que $\mathbf{D} \in \mathcal{S}$. Por el Teorema 25 sabemos que $\mathbf{P}$ es isomorfo a un producto subdirecto global con factores en $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\}$, por lo que através de la Proposición 8 tenemos que $\mathbf{P} \in \mathcal{S}$. De la misma forma se prueba que si $\mathbf{5} \in \mathcal{S}$ entonces $\mathbf{6} \in \mathcal{S}$. Además, como $\mathbf{5} \in H(\mathbf{6}) \cap IS(\mathbf{6})$, sabemos que si $\mathbf{6} \in \mathcal{S}$ entonces $\mathbf{5} \in \mathcal{S}$. Estos argumentos dejan solamente dos opciones para $\mathcal{S}$, a saber:

$\{\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{D}, \mathbf{P}\}$

$\{\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, \mathbf{D}, \mathbf{P}\}$. ■

Definición 48 *Definimos las siguientes subclases de* $\mathcal{K}$*:*

$FIX = Mod(\varphi_{FIX}) \cap \mathcal{K}$,

$RCD = Mod(\varphi_{RCD}) \cap \mathcal{K}$,

$NEW = Mod(\varphi_{NEW}) \cap \mathcal{K}$,

$PER = Mod(\varphi_{PER}) \cap \mathcal{K}$.

El siguiente resultado es consecuencia inmediata de los Teoremas 26 y 47.

Teorema 49 *Las siguientes son todas las subclases AE de* $\mathcal{K}$*:*
$\{$*álgebras triviales en* $\mathcal{K}\}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{B}$, $Q(\mathbf{4})$, FIX, NEW, PER, RCD, $FIX \cap PER$, $FIX \cap RCD$, $NEW \cap RCD$, $RCD \cap Q(\mathbf{4})$.

La Figura 1.7 muestra el reticulado que estas clases forman bajo el orden de la inclusión.

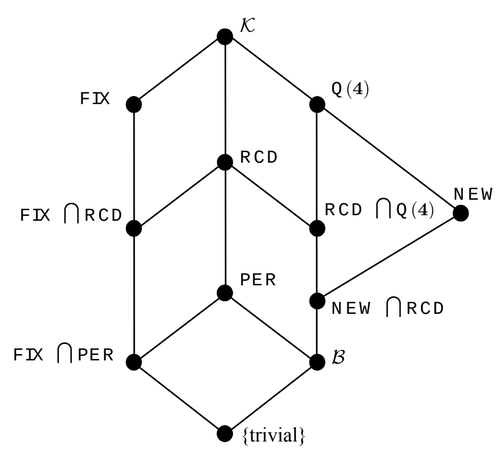


Figura 1.7: Subclases AE de $\mathcal{K}$

1.4.3. Las Variedades $\mathcal{V}_{PER}$ y $\mathcal{V}_{NEW}$

Cuando una clase AE, digamos $\mathcal{C}$, es cerrada bajo cocientes, es posible considerar a $\mathcal{C}$ como una variedad de un lenguaje expandido. Para ilustrar esto veremos cómo se obtiene la variedad asociada a la clase PER.

Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje que se obtiene al agregar al lenguaje de $\mathcal{K}$ un nuevo símbolo de función binario f. Definimos la clase de $\mathcal{L}$-álgebras

$$\mathcal{V}_{PER} = \{(\mathbf{A}, [\varphi_{PER}]^{\mathbf{A}}) : \mathbf{A} \in PER\}.$$

Por el Lema 5 tenemos que $HSP(\mathcal{V}_{PER}) \subseteq \mathcal{V}_{PER}$; luego $\mathcal{V}_{PER}$ es una variedad. Es sencillo dar axiomas ecuacionales para $\mathcal{V}_{PER}$. Basta con tomar un conjunto de identidades que axiomatice $\mathcal{K}$ y agregar las ecuaciones de la sentencia

$$\begin{array}{lcl} \varphi_{PER} & = & \forall x_1, x_2 \exists! z \\ & & z \vee \overline{z} = x_1 \vee \overline{x}_1 \\ & & z \leq ((x_1 \vee \overline{x}_1) \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \overline{x}_1) \\ & & z \vee ((x_1 \vee \overline{x}_1) \wedge \overline{x}_2) \vee (x_1 \wedge \overline{x}_1) \geq ((x_1 \vee \overline{x}_1) \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \overline{x}_1) \end{array}$$

reemplazando la variable z por el término $f(x_1, x_2)$. Esto produce los siguientes axiomas:

$\forall x_1, x_2\ f(x_1, x_2) \vee \overline{f(x_1, x_2)} = x_1 \vee \overline{x}_1$

$\forall x_1, x_2\ f(x_1, x_2) \leq ((x_1 \vee \overline{x}_1) \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \overline{x}_1)$

$\forall x_1, x_2\ f(x_1, x_2) \vee ((x_1 \vee \overline{x}_1) \wedge \overline{x}_2) \vee (x_1 \wedge \overline{x}_1) \geq ((x_1 \vee \overline{x}_1) \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \overline{x}_1)$

Via (3) del Lema 5 vemos que el reticulado de congruencias de $(\mathbf{A}, [\varphi_{PER}]^{\mathbf{A}})$ es el mismo que el de $\mathbf{A}$, para toda $\mathbf{A} \in PER$. Esto nos dice que $(\mathcal{V}_{PER})_{SI} = I\{\mathbf{2}, \mathbf{3}\}$. Además nos dice que cada álgebra en $\mathcal{V}_{PER}$ es de congruencias permutables. De hecho, sin mucho más trabajo, puede verse que $\mathcal{V}_{PER}$ es una variedad con discriminador (ver Definición 51 de la Sección 1.5).

El mismo tipo de construcción puede hacerse para las clases FIX y DRC, ya que estas también son cerradas bajo cocientes. Si bien la clase NEW no es cerrada bajo cocientes también resulta el reducto de una variedad. Extendemos el lenguaje de $\mathcal{K}$ con un símbolo de función binario h, y para este nuevo lenguaje definimos la clase

$$\mathcal{V}_{NEW} = \{(\mathbf{A}, [\varphi_{NEW}]^{\mathbf{A}}) : \mathbf{A} \in NEW\}.$$

Proposición 50 *(1) La clase $\mathcal{V}_{NEW}$ es una variedad, y además*

$$(\mathcal{V}_{NEW})_{SI} = I\{(\mathbf{2}, [\varphi_{NEW}]^{\mathbf{2}}), (\mathbf{4}, [\varphi_{NEW}]^{\mathbf{4}})\}.$$

(2) Para cada $\mathbf{A} \in NEW$ se tiene que $\Sigma(\mathbf{A}, Q(\mathbf{4})) = Con((\mathbf{A}, [\varphi_{NEW}]^{\mathbf{A}}))$.

(3) Los axiomas a continuación junto con axiomas para $\mathcal{K}$, axiomatizan $\mathcal{V}_{NEW}$.

(N_1) $\forall x, y \quad h(x,y) \vee \overline{h(x,y)} = x \vee \overline{x}$

(N_2) $\forall x, y \quad h(x,y) \wedge ((x \vee \overline{x}) \wedge \overline{y}) \vee (x \wedge \overline{x})) \leq ((x \vee \overline{x}) \wedge y) \vee (x \wedge \overline{x}))$

(N_3) $\forall x, y \quad h(x,y) \vee ((x \vee \overline{x}) \wedge \overline{y}) \vee (x \wedge \overline{x})) \geq ((x \vee \overline{x}) \wedge y) \vee (x \wedge \overline{x}))$

(N_4) $\forall x, y \quad h(x,\overline{y}) = \overline{h(x,y)}$

(N_5) $\forall x, y, z \quad h(x, y \vee z) = h(x,y) \vee h(x,z)$.

Prueba. (1) Veremos que $\mathcal{V}_{NEW} = V((\mathbf{4},[\varphi_{NEW}]^{\mathbf{4}}))$. Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{V}_{NEW}$, y sea $\mathbf{A}'$ el reducto de $\mathbf{A}$ al lenguaje de $\mathcal{K}$. Como $\mathbf{A}' \vDash U(\varphi_{NEW})$ se sigue que $\mathbf{A}' \in Q(\mathbf{4}) = ISP(\mathbf{4})$. Ahora (3) del Lema 5 nos dice que $\Sigma(\mathbf{A}', Q(\mathbf{4})) \subseteq Con(\mathbf{A})$, y de esto obtenemos

$$\mathbf{A} \in ISP((\mathbf{4},[\varphi_{NEW}]^{\mathbf{4}})) \subseteq V((\mathbf{4},[\varphi_{NEW}]^{\mathbf{4}})).$$

Supongamos ahora que $\mathbf{A} \in V((\mathbf{4},[\varphi_{NEW}]^{\mathbf{4}}))$. Por el Lema de Jónsson [14] tenemos que $\mathbf{A} \in ISP((\mathbf{4},[\varphi_{NEW}]^{\mathbf{4}}))$, y por lo tanto $\mathbf{A} \vDash U(\varphi_{NEW})$. De esto se desprende que $h^{\mathbf{A}} = [\varphi_{NEW}]^{\mathbf{A}}$, y si $\mathbf{A}'$ es el reducto de $\mathbf{A}$ al lenguaje de $\mathcal{K}$, tenemos que $\mathbf{A} = (\mathbf{A}', [\varphi_{NEW}]^{\mathbf{A}'})$.

(2) es consecuencia inmediata de (1).

(3) Es fácil ver que $(\mathbf{2},[\varphi_{NEW}]^{\mathbf{2}})$ y $(\mathbf{4},[\varphi_{NEW}]^{\mathbf{4}})$ satisfacen (N_1) a (N_5); por lo que $\mathcal{V}_{NEW}$ también. Supongamos $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ es tal que $(\mathbf{A}, \eta)$ satisface (N_1) a (N_5). Probaremos primero que $\mathbf{A} \in Q(\mathbf{4})$. Esto es equivalente a mostrar que $\mathbf{A} \vDash \forall x \exists ! z\ (x \wedge \overline{x}) \vee z = x \vee \overline{x}$. Sean $a, b \in A$ tales que $(a \wedge \overline{a}) \vee b = a \vee \overline{a}$. Nótese que

$$\eta(a \vee \overline{a} \vee \overline{b}, a \vee \overline{a}) = \eta(a \vee \overline{a} \vee \overline{b}, a) \vee \overline{\eta(a \vee \overline{a} \vee \overline{b}, a)}.$$

Luego

$$\eta(a \vee \overline{a} \vee \overline{b}, a) \vee \overline{\eta(a \vee \overline{a} \vee \overline{b}, a)} = a \vee \overline{a} \vee \overline{b},$$

lo cual implica

$$\eta(a \vee \overline{a} \vee \overline{b}, a \vee \overline{a}) = a \vee \overline{a} \vee \overline{b}$$

y

$$\eta(a \vee \overline{a} \vee \overline{b}, a \wedge \overline{a}) = a \wedge \overline{a} \wedge b.$$

Como $(a \wedge \overline{a}) \vee b = a \vee \overline{a}$, vale que

$$\begin{aligned} a \vee \overline{a} \vee \overline{b} &= \eta(a \vee \overline{a} \vee \overline{b}, (a \wedge \overline{a}) \vee b) \\ &= \eta(a \vee \overline{a} \vee \overline{b}, a \wedge \overline{a}) \vee \eta(a \vee \overline{a} \vee \overline{b}, b) \\ &= (a \wedge \overline{a} \wedge b) \vee \eta(a \vee \overline{a} \vee \overline{b}, b) \\ &= \eta(a \vee \overline{a} \vee \overline{b}, b). \end{aligned}$$

Ahora, ya que $\eta(a \vee \overline{a} \vee \overline{b}, b) \wedge \overline{b} \leq b$, tenemos que $\overline{b} \leq b$. Nótese también que $b \leq a \vee \overline{a}$, por lo cual $(a \wedge \overline{a}) \leq \overline{b}$. Así es que $(a \wedge \overline{a}) \leq b$, y por lo tanto $b = a \vee \overline{a}$.

Al estar $\mathbf{A}$ en $Q(\mathbf{4})$ sabemos que $\mathbf{A} \vDash U(\varphi_{NEW})$. Luego, como ($N_1$) a ($N_3$) valen en $(\mathbf{A}, \eta)$, necesariamente $\eta = [\varphi_{NEW}]^{\mathbf{A}}$. ■

1.5. Variedades con Discriminador

En esta sección estudiamos el Problema 3 en el contexto de las variedades con discriminador. En virtud de las fuertes propiedades que tienen estas variedades, el problema en cuestión puede reformularse, transformándose en uno más sencillo en muchos casos.

Presentamos primero las definiciones y herramientas básicas de las que haremos uso en esta sección, y luego aplicamos estos resultados para caracterizar las subclases AE de algunas variedades con discriminador.

Definición 51 *Una variedad es llamada* con discriminador *si es generada por una clase $\mathcal{C}$ para la cual existe un término $t = t(x, y, z)$ (llamado* término discriminador*) tal que*

$$t^{\mathbf{A}}(a, b, c) = \begin{cases} a & si\ a \neq b \\ c & si\ a = b \end{cases} \tag{D}$$

para toda $\mathbf{A} \in \mathcal{C}$.

Si un álgebra $\mathbf{A}$ tiene un término ternario t que satisface (D) es llamada *cuasiprimal*.

En el caso de las variedades con discriminador contamos con un tipo de representación aún más poderosa que los productos globales: los productos Booleanos.

Definición 52 (Burris y Werner [6]) *Sea $\mathbf{A} \subseteq \Pi\{\mathbf{A}_i : i \in I\}$ un producto subdirecto. Diremos que $\mathbf{A}$ es un* producto Booleano *si hay una topología Booleana (i.e. compacta, Hausdorff y 0-dimensional) en I tal que:*

(B_1) $E(x, y)$ es clopen para todo $x, y \in A$.

(B_2) Para cada subconjunto clopen $U \subseteq I$, y cualesquiera $x, y \in A$, el elemento $x|_U \cup y|_U$ está en A.

Si $\mathcal{C}$ es una clase de álgebras, escribiremos $\Gamma^a(\mathcal{C})$ para denotar la clase de todos los productos Booleanos con factores en $\mathcal{C}$. Todo producto Booleano es un producto subdirecto global (folclore), por lo que la Proposición 8 vale para productos Booleanos. De hecho la preservación funciona en ambas direcciones para este tipo de descomposición.

Lema 53 *Supongamos $\mathbf{A} \subseteq \Pi\{\mathbf{A}_i : i \in I\}$ es un producto Booleano, y sea φ una DEF. Entonces*

$$\mathbf{A} \vDash \varphi \Leftrightarrow \mathbf{A}_i \vDash \varphi\ \forall i \in I.$$

Prueba. ($\Rightarrow$) Supongamos que contrariamente al enunciado hay una DEF

$$\varphi = \forall x_1, ..., x_n \exists! z_1, ..., z_m \bigwedge_{j=1}^{k} p_j(\vec{x}, \vec{z}) = q_j(\vec{x}, \vec{z})$$

tal que $\mathbf{A} \vDash \varphi$ y $\mathbf{A}_{i_0} \nvDash \varphi$, para algún $i_0 \in I$. Entonces, ya que $\mathbf{A}_{i_0} \in H(\mathbf{A})$, debe ser que $\mathbf{A}_{i_0} \nvDash U(\varphi)$. Por lo tanto existen $\vec{\alpha} \in A_{i_0}^n$ y $\vec{\beta}, \vec{\gamma} \in A_{i_0}^m$ tales que $\vec{\beta} \neq \vec{\gamma}$ y

$$\mathbf{A}_{i_0} \vDash \bigwedge_{j=1}^{k} p_j(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = q_j(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \wedge \bigwedge_{j=1}^{k} p_j(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) = q_j(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}).$$

Como $\mathbf{A} \subseteq \Pi\{\mathbf{A}_i : i \in I\}$ es subdirecto, hay $\vec{a} \in A^n$ y $\vec{c} \in A^m$ tales que $\vec{a}(i_0) = \vec{\alpha}$ y $\vec{c}(i_0) = \vec{\gamma}$. Además, como $\mathbf{A} \vDash \varphi$, hay un $\vec{b} \in A^m$ que cumple

$$\mathbf{A} \vDash \bigwedge_{j=1}^{k} p_j(\vec{a}, \vec{b}) = q_j(\vec{a}, \vec{b}).$$

Nótese que podemos suponer que $\vec{b}(i_0) = \vec{\beta}$ (si este no fuera el caso basta con redefinir $\vec{\beta}$). Sea

$$U = \bigcap_{j=1}^{k} E(p_j(\vec{a}, \vec{c}), q_j(\vec{a}, \vec{c})).$$

Es claro que U es clopen, por lo que aplicando (B_2) m veces podemos obtener un $\vec{d} \in A^m$ tal que $\vec{d}$ coincide con $\vec{c}$ en U, y con $\vec{b}$ en $I - U$. Pero entonces tendríamos que

$$\mathbf{A} \vDash \bigwedge_{j=1}^{k} p_j(\vec{a}, \vec{d}) = q_j(\vec{a}, \vec{d})$$

para $\vec{d} \neq \vec{b}$, lo que contradice el hecho de que $\mathbf{A} \vDash U(\varphi)$. ■

El siguiente resultado es una de las herramientas fundamentales en esta sección. Una prueba del mismo puede encontrarse por ejemplo en [5].

Teorema 54 (Bulman-Fleming, Keimel, Werner) *Toda álgebra en una variedad con discriminador es un producto Booleano de factores simples o triviales.*

En combinación, el Lema 53 y el Teorema 54 producen:

Corolario 55 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad con discriminador. Entonces $\mathcal{V}_S$ es determinante para $\mathcal{V}$.*

Se sabe que en una variedad con discriminador $\mathcal{V}$, las álgebras de $\mathcal{V}_S$ son exactamente las $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ no triviales para las que el término discriminador t satisface (D).

En el estudio del problema de caracterizar las subclases AE de $\mathcal{V}_S$, podemos aprovechar que las ecuaciones son muy expresivas en un álgebra cuasi-primal. Como veremos a continuación, muchas fórmulas abiertas son lógicamente equivalentes a ecuaciones en las álgebras de $\mathcal{V}_S$.

Una fórmula de primer orden es *abierta* si no tiene cuantificadores. Diremos que una fórmula es *ST-abierta* si es abierta y además es satisfacible por álgebras triviales. El siguiente lema es una propiedad conocida de las variedades con discriminador. El lector puede encontrar una prueba en [21].

Lema 56 *Supongamos que $\mathcal{V}$ es una variedad con discriminador, y sea $O(\vec{x})$ una fórmula ST-abierta en el lenguaje de $\mathcal{V}$. Entonces existen términos $p(\vec{x})$ y $q(\vec{x})$ tales que para cualesquiera $\mathbf{A} \in \mathcal{V}_S$ y $\vec{a} \in A^n$ se tiene que $\mathbf{A} \vDash O(\vec{a})$ sii $\mathbf{A} \vDash p(\vec{a}) = q(\vec{a})$.*

Definición 57 *Una* sentencia $\forall\exists!$ *(resp. $\forall\exists!STa$) es una sentencia de la forma*

$$\forall x_1, ..., x_n \exists! z_1, ..., z_m \; O(\vec{x}, \vec{z}),$$

donde O es una fórmula abierta (resp. ST-abierta), $n \geq 0$ y $m \geq 1$.

La unicidad y existencia de las sentencias $\forall\exists!$ y $\forall\exists!$STa, al igual que su semántica se definen y denotan de la misma manera que en el caso de las DEF (veasé Definición 1). Diremos que una clase de álgebras $\mathcal{C}$ es una *clase* $\forall\exists!$ (resp. $\forall\exists!$STa) si es axiomatizable con sentencias $\forall\exists!$ (resp. $\forall\exists!$STa). Una clase $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}$ será una *subclase* $\forall\exists!$ (resp. $\forall\exists!$STa) de $\mathcal{C}$ si es axiomatizable relativamente a $\mathcal{C}$ con sentencias $\forall\exists!$ (resp. $\forall\exists!$STa).

Reuniendo las propiedades que hemos visto tienen las variedades con discriminador no es difícil probar el siguiente:

Lema 58 (Vaggione) *Sea $\mathcal{V}$ una variedad con discriminador. Los mapeos*

$$\begin{gathered}\{\textit{subclases AE de } \mathcal{V}\} \to \{\textit{subclases } \forall\exists!STa \textit{ de } \mathcal{V}_S\} \\ \mathcal{C} \mapsto \mathcal{C} \cap \mathcal{V}_S\end{gathered}$$

y

$$\begin{gathered}\{\textit{subclases } \forall\exists!STa \textit{ de } \mathcal{V}_S\} \to \{\textit{subclases AE de } \mathcal{V}\} \\ \mathcal{C} \mapsto I\Gamma^a(\mathcal{C})\end{gathered}$$

preservan el orden de la inclusión, y son uno inverso del otro.

Notamos que el lema anterior efectivamente reduce el Problema 3 al problema de encontrar las subclases $\forall\exists!$STa de $\mathcal{V}_S$.

En algunos casos el Lema 58 vale si reemplazamos $\forall\exists!$STa por $\forall\exists!$.

Lema 59 (Vaggione) *Las siguientes condiciones son equivalentes para una variedad con discriminador $\mathcal{V}$.*

(1) Ningún álgebra no trivial de $\mathcal{V}$ tiene una subálgebra trivial.

(2) Ningún álgebra no trivial de $\mathcal{V}_S$ tiene una subálgebra trivial.

(3) Existen dos términos unarios $0(w), 1(w)$ en el lenguaje de $\mathcal{V}$ tales que

$$\mathcal{V}_S - \{\textit{álgebras triviales}\} \vDash 1 \neq 0.$$

Corolario 60 *Si una variedad con discriminador $\mathcal{V}$ satisface alguna de las propiedades equivalentes del lema anterior, entonces los Lemas 56 y 58 valen si reemplazamos $\forall\exists!STa$ por $\forall\exists!$.*

1.5.1. Variedades de la Forma $V(\mathbf{A})$ con A Primal

El primer caso que analizaremos es una generalización del caso de las álgebras de Boole (Teorema 14). La noción de álgebra primal fue introducida por Foster [11], y es una generalización natural del álgebra de Boole de dos elementos.

Un álgebra finita $\mathbf{A}$ es *primal* si para cada $n \geq 0$ y cada $f : A^n \to A$ hay un término $s(x_1, ..., x_n)$ en el lenguaje de $\mathbf{A}$ tal que $f = s^{\mathbf{A}}$.

Es claro que si $\mathbf{A}$ es primal, tenemos en particular que hay un término t que satisface (D) (i.e. $\mathbf{A}$ es cuasiprimal). Por lo tanto $V(\mathbf{A})$ es una variedad con discriminador. Nótese además que $\mathbf{A}$ no tiene subálgebras propias, por lo que el Lema de Jónsson [14] nos dice que $V(\mathbf{A})_S = I(\mathbf{A})$. De estos hechos se deduce nuestro siguiente resultado.

Teorema 61 *Sea $\mathbf{A}$ un álgebra primal. las únicas subclases AE de $V(\mathbf{A})$ son sus subvariedades $\mathbf{A}$, a saber $V(\mathbf{A})$ y $\{$álgebras triviales en $V(\mathbf{A})\}$.*

1.5.2. Álgebras Monádicas

Un *álgebra monádica* es un álgebra $\mathbf{A} = (A; \wedge, \vee, ^-, c, 0, 1)$ donde $(A; \wedge, \vee, ^-, 0, 1)$ es un álgebra de Boole y c es una operación unaria en A que cumple:

$c(0) \approx 0$

$x \wedge c(x) \approx x$

$c(x \vee y) \approx c(x) \vee c(y)$

$c(x \wedge c(y)) \approx c(c(x) \wedge c(y))$.

Por [21], $\mathcal{MO}$ es una variedad con discriminador cuyas álgebras simples son las que satisfacen

$$c(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = 0 \\ 1 & \text{if } x \neq 0. \end{cases}$$

La siguiente propiedad básica sobre los automorfismos de un álgebra monádica simple es la herramienta clave en este caso. Si $\mathbf{A}$ es un álgebra cualquiera y $S \subseteq A$, escribiremos $Sg^{\mathbf{A}}(S)$ para denotar la subálgebra de $\mathbf{A}$ generada por S.

Lema 62 *Sea* $\mathbf{A} \in \mathcal{MO}_S$ *y sean* S, T *subconjuntos finitos de* A. *Si hay un* $b \in T - Sg^{\mathbf{A}}(S)$ *entonces existe un automorfismo* $f : Sg^{\mathbf{A}}(S \cup T) \to Sg^{\mathbf{A}}(S \cup T)$ *tal que* $f(s) = s$ *para todo* $s \in S$, *y* $f(b) \neq b$.

Prueba. Como $b \notin Sg^{\mathbf{A}}(S)$ debe haber un átomo a de $Sg^{\mathbf{A}}(S)$ tal que $b \wedge a \neq 0 \neq \overline{b} \wedge a$. Sean a_1, a_2 dos átomos de $Sg^{\mathbf{A}}(S \cup T)$ tales que $a_1 \leq b \wedge a$ y $a_2 \leq \overline{b} \wedge a$. Sea X el conjunto formado por los átomos de $Sg^{\mathbf{A}}(S \cup T)$. Definimos la biyección $g : X \to X$ por $g(a_1) = a_2$, $g(a_2) = a_1$ y $g(x) = x$ para los demás elementos de X. Dejamos al lector la verificación de que el automorfismo $f : Sg^{\mathbf{A}}(S \cup T) \to Sg^{\mathbf{A}}(S \cup T)$ inducido por g tiene las propiedades deseadas. ■

Lema 63 *Sea* $O = O(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)$ *una fórmula abierta en el lenguaje de* $\mathcal{MO}$. *Si* $\mathbf{A} \in \mathcal{MO}_S$ *es tal que* $\mathbf{A} \vDash \forall\vec{x}\exists!\vec{y}\, O(\vec{x}, \vec{y})$, *entonces* $S(\mathbf{A}) \vDash \forall\vec{x}\exists!\vec{y}\, O(\vec{x}, \vec{y})$.

Prueba. Este lema es una consecuencia directa de la siguiente:

Afirmación. *Si* $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m \in A$ *son tales que* $A \vDash O(\vec{a}, \vec{b})$, *entonces* $b_i \in Sg^{\mathbf{A}}(\{a_1, ..., a_n\})$, *para* $i = 1, ..., m$.

Supongamos por el contrario que $\mathbf{A} \vDash O(\vec{a}, \vec{b})$ y que hay un $b_{i_0} \notin Sg^{\mathbf{A}}(\{a_1, ..., a_n\})$. Sean $S = \{a_1, ..., a_n\}$ y $T = \{b_1, ..., b_m\}$. Por el Lema 62 hay un automorfismo $f : Sg^{\mathbf{A}}(S \cup T) \to Sg^{\mathbf{A}}(S \cup T)$ tal que $f(a_j) = a_j$, para $j = 1, ..., n$, y $f(b_{i_0}) \neq b_{i_0}$. Como

$$\begin{array}{lll} \mathbf{A} \vDash O(\vec{a}, \vec{b}) & \text{sii} & Sg^{\mathbf{A}}(S \cup T) \vDash O(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m) \\ & \text{sii} & Sg^{\mathbf{A}}(S \cup T) \vDash O(f(a_1), ..., f(a_n), f(b_1), ..., f(b_m)) \\ & \text{sii} & \mathbf{A} \vDash O(f(a_1), ..., f(a_n), f(b_1), ..., f(b_m)) \\ & \text{sii} & \mathbf{A} \vDash O(a_1, ..., a_n, f(b_1), ..., f(b_m)) \end{array}$$

es claro que $\mathbf{A} \vDash O(\vec{a}, f(b_1), ..., f(b_m))$, pero $(f(b_1), ..., f(b_m)) \neq \vec{b}$ arribando a una contradicción. ■

Teorema 64 *Las subclases AE de* $\mathcal{MO}$ *son exactamente sus subvariedades.*

Prueba. Sea $\mathcal{C}$ una subclase AE de $\mathcal{MO}$. Por el Lema 58 sabemos que $\mathcal{C} = I\Gamma^a(\mathcal{C} \cap \mathcal{MO}_S)$, luego $\mathcal{C} \subseteq V(\mathcal{C} \cap \mathcal{MO}_S)$. Ahora, el Lema de Jónsson [14] nos dice que

$$V(\mathcal{C} \cap \mathcal{MO}_S)_{SI} \subseteq HSP_{\mathcal{U}}(\mathcal{C} \cap \mathcal{MO}_S);$$

y como $\mathcal{C} \cap \mathcal{MO}_S$ es una clase de primer orden de formada por álgebras simples, y cerrada bajo el operador de clases S (Lema 63), tenemos que

$$V(\mathcal{C} \cap \mathcal{MO}_S)_{SI} = \mathcal{C} \cap \mathcal{MO}_S.$$

Por último, obsérvese que $V(\mathcal{C} \cap \mathcal{MO}_S)$ es una variedad con discriminador, por lo que el Teorema 54 produce

$$V(\mathcal{C} \cap \mathcal{MO}_S) \subseteq I\Gamma^a(\mathcal{C} \cap \mathcal{MO}_S) = \mathcal{C}.$$

■

Queremos señalar que la única propiedad específica de la variedad $\mathcal{MO}$ que requerimos en la prueba del Teorema 64 es la enunciada en el Lema 62. Luego este resultado vale en toda variedad con discriminador en la cual vale el Lema 62.

1.5.3. P-álgebras

Sea $\mathcal{L}_\mathcal{P}$ el lenguaje que resulta de agregar el símbolo de función binario $\Rightarrow$ al lenguaje de los reticulados distributivos acotados. Dada una cadena $\mathbf{C} \in \mathcal{D}_{01}$ definimos

$$x \Rightarrow^{\mathbf{C}} y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

La variedad $\mathcal{P} = V(\{(\mathbf{C}, \Rightarrow^{\mathbf{C}}) : \mathbf{C} \text{ es una cadena acotada}\})$ es equivalente a la variedad de las P-álgebras, definida por Epstein y Horn en [9]. La variedad $\mathcal{P}$ es con discriminador, y su clase de álgebras simples es $\{(\mathbf{C}, \Rightarrow^{\mathbf{C}}) : \mathbf{C}$ es una cadena acotada no trivial$\}$.

Lema 65 *Sea $O(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)$ una fórmula abierta en el lenguaje de $\mathcal{P}$. Supongamos $\mathbf{C} \in \mathcal{P}_S$ es tal que $\mathbf{C} \vDash \forall\vec{x}\exists!\vec{y}\, O(\vec{x}, \vec{y})$.*

(1) Si hay $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m \in C$ tales que algún $b_{i_0} \notin \{a_1, ..., a_n, 1, 0\}$ y $\mathbf{C} \vDash O(\vec{a}, \vec{b})$, entonces para toda $\mathbf{D} \in \mathcal{P}_S$ con $|D| > |C|$ se tiene que $\mathbf{D} \nvDash \forall\vec{x}\exists!\vec{y}\, O(\vec{x}, \vec{y})$.

(2) Si $\mathbf{C} \vDash O(\vec{a}, \vec{b})$ implica $\{b_1, ..., b_m\} \subseteq \{a_1, ..., a_n, 1, 0\}$, entonces toda $\mathbf{D} \in \mathcal{P}_S$ finita con $|D| \leq |C|$ satisface $\forall\vec{x}\exists!\vec{y}\, O(\vec{x}, \vec{y})$.

(3) Si C es infinito entonces $\mathcal{P}_S \vDash \forall\vec{x}\exists!\vec{y}\, O(\vec{x}, \vec{y})$.

Prueba. (1) Sea $S = \{a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m, 0, 1\}$. Renombramos los elementos de S por $c_0, ..., c_{k+1}$ de manera que

$$0 = c_0 < c_1 < ... < c_k < c_{k+1} = 1,$$

y sea $1 \leq j_0 \leq k$ tal que $c_{j_0} = b_{i_0}$. Tomamos $S' = S \cup \{x\}$, y definimos $\mathbf{S}' \in \mathcal{P}_S$ como el álgebra que tiene universo S' y satisface

$$0 = c_0 < ... < c_{j_0} < x < c_{j_0+1} < ... < c_{k+1} = 1.$$

Claramente

$$\mathbf{S}' \vDash O(\vec{a}, b_1, ..., b_m)$$

y

$$\mathbf{S}' \vDash O(\vec{a}, b_1, ..., b_{i_0-1}, x, b_{i_0+1}, ..., b_m).$$

Se sigue que $\mathbf{S}'$ falla la unicidad de $\forall\vec{x}\exists!\vec{y}\ O(\vec{x},\vec{y})$, y como $\mathbf{S}'$ se puede embeber en toda $\mathbf{D} \in \mathcal{P}_S$ con $|D| > |C|$ hemos concluido la prueba del punto (1).

(2) Sea $\mathbf{D} \in \mathcal{P}_S$ finita tal que $|D| \leq |C|$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $D \subseteq C$. Sean $a_1, ..., a_n \in D$; como $\mathbf{C} \vDash \forall\vec{x}\exists!\vec{y}\ O(\vec{x},\vec{y})$ hay un único $\vec{b} \in C^m$ tal que $\mathbf{C} \vDash O(\vec{a},\vec{b})$. Por hipótesis sabemos que $\vec{b} \in D^m$, y luego $\mathbf{D} \vDash O(\vec{a},\vec{b})$. Obsérvese que hay un único $\vec{b} \in D^m$ pues hay un único $\vec{b}$ en C^m.

(3) Supongamos C es infinito. Si hubiera $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m \in C$ tales que $C \vDash O(\vec{a},\vec{b})$, y con $b_{i_0} \notin \{a_1, ..., a_n, 1, 0\}$ para algún i_0, podríamos repetir el razonamiento empleado en (1) para obtener $\mathbf{S}' \in \mathcal{P}_S$ finita la cual falla la unicidad de $\forall\vec{x}\exists!\vec{y}\ O(\vec{x},\vec{y})$. Pero esto produciría una contradicción ya que $\mathbf{S}'$ se pude embeber en $\mathbf{C}$. Luego podemos suponer que $\mathbf{C}$ satisface la hipótesis del punto (2), y por lo tanto cada $\mathbf{D} \in \mathcal{P}_S$ finita satisface $\forall\vec{x}\exists!\vec{y}\ O(\vec{x},\vec{y})$. Claramente esto dice que $\mathcal{P}_S \vDash \forall\vec{x}\exists!\vec{y}\ O(\vec{x},\vec{y})$. ■

Lema 66 *Las subclases AE de $\mathcal{P}_S$ son: $\emptyset$, $\mathcal{P}_S$, y las clases*

$$\mathcal{C}_{n,m} = I(\mathbf{2}, ..., \mathbf{n}, \mathbf{n+m}), \quad 2 \leq n, 0 \leq m.$$

Prueba. La sentencia

$$\begin{aligned}\forall x_1, ..., x_{n+1}\exists! y_1, ..., y_m \quad & (x_1 < ... < x_{n+1} \wedge y_1 < ... < y_m \wedge \bigwedge_{i,j} y_i \neq x_j) \vee \\ & (\neg(x_1 < ... < x_{n+1}) \wedge \bigwedge_i y_i = x_1)\end{aligned}$$

es un axioma de $\mathcal{C}_{n,m}$ relativo a $\mathcal{P}_S$, cuando $2 \leq n$ y $1 \leq m$. Además, la sentencia

$$\forall x_1, ..., x_{n+1} \bigvee_{i \neq j} x_i = x_j$$

es un axioma para $\mathcal{C}_{n,0}$ relativo a $\mathcal{P}_S$.

Veamos que éstas son todas las subclases AE de $\mathcal{P}_S$. Sea $\varphi = \forall\vec{x}\exists!\vec{y}\ O(\vec{x},\vec{y})$, con O cualquier fórmula abierta. Si hay álgebras finitas arbitrariamente grandes en $\mathcal{P}_S \cap Mod(\varphi)$ entonces φ tiene un modelo infinito en $\mathcal{P}_S$, y (3) del

Lema 65 nos dice que $\mathcal{P}_S \vDash \varphi$. Supongamos entonces que hay una mayor álgebra finita en $\mathcal{P}_S \cap Mod(\varphi)$, digamos $\mathbf{k}$. Sea $\mathbf{n} \in \mathcal{P}_S \cap Mod(\varphi)$ la que sigue a $\mathbf{k}$ en tamaño. Nótese que como $\mathbf{k} \vDash \varphi$ necesariamente $\mathbf{n}$ y O deben satisfacer las hipótesis del punto (2) del Lema 65. Luego $Mod(\varphi) \cap \mathcal{P}_S = I(\{\mathbf{1}, ..., \mathbf{n}, \mathbf{k}\})$. ■

1.6. Intersección de Subálgebras

Una clase de álgebras $\mathcal{C}$ se dice *cerrada bajo intersección de subálgebras* si para cualesquiera $\mathbf{B}, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in \mathcal{C}$

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in S(\mathbf{B}) \text{ y } A_1 \cap A_2 \neq \emptyset \text{ implica } \mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2 \in \mathcal{C}.$$

Sea $\mathbf{A}$ un álgebra cualquiera y supongamos $\mathcal{C} \subseteq S(\mathbf{A})$. Es un ejercicio de rutina verificar que si $\mathcal{C}$ es axiomatizable por sentencias $\forall\exists!$ relativamente a $S(\mathbf{A})$, entonces es cerrada bajo intersección de subálgebras. El teorema principal de esta sección dice que bajo ciertas hipótesis la recíproca vale.

Si $\mathbf{A}$ es un álgebra escribiremos $Aut(\mathbf{A})$ para denotar el conjunto formado por los automorfismos de $\mathbf{A}$.

Teorema 67 *Sea $\mathbf{A}$ un álgebra cuasiprimal sin subálgebras triviales. Entonces son equivalentes:*

(1) Toda subclase de $S(\mathbf{A})$ cerrada bajo intersección de subálgebras es axiomatizable por sentencias $\forall\exists!$ relativamente a $S(\mathbf{A})$.

(2) Las siguientes condiciones valen en $\mathbf{A}$.

(2a) No hay dos subálgebras isomorfas distintas de $\mathbf{A}$.

(2b) Si $\mathbf{B} \leq \mathbf{A}$ y $f, g \in Aut(\mathbf{B})$ son tales que $f(b) = g(b)$, para algún $b \in B$, entonces $f = g$.

Prueba. (1)⇒(2). Como para cada $\mathbf{S} \leq \mathbf{A}$ tenemos que $\{\mathbf{S}\}$ es una subclase $\forall\exists!$ de $\mathcal{C}$ se sigue que no puede haber una subálgebra de $\mathbf{A}$ isomorfa a $\mathbf{S}$ más allá de $\mathbf{S}$ misma. Esto prueba (2a). En lugar de probar (2b) daremos una prueba de la siguiente condición equivalente.

(2b′) *Si $\mathbf{B} \leq \mathbf{A}$ y $f \in Aut(\mathbf{B})$ son tales que $f(b) = b$, para algún $b \in B$, entonces $f = id_B$.*

Sean $\mathbf{B} \leq \mathbf{A}$ y $f \in Aut(\mathbf{B})$. Definimos $F = \{b \in B : f(b) = b\}$. Supongamos $F \neq \emptyset$, y sea $\mathbf{F}$ la subálgebra de $\mathbf{B}$ cuyo universo es F. Si $\mathbf{F} \neq \mathbf{B}$ existe una sentencia $\forall\exists!$, digamos φ, tal que $\mathbf{B} \vDash \varphi$ y $\mathbf{F} \nvDash \varphi$. Obsérvese que

$\mathbf{F} \vDash U(\varphi)$, por lo cual hay un $\vec{a} = (a_1, ..., a_n) \in F^n$ tal que $[\varphi]^{\mathbf{B}}(\vec{a}) \notin F^m$ (Lema 5). Sea $j \in \{1, ..., m\}$ tal que $[\varphi]_j^{\mathbf{B}}(\vec{a}) \notin F$. Pero entonces

$$f([\varphi]_j^{\mathbf{B}}(\vec{a})) = [\varphi]_j^{\mathbf{B}}(f(a_1), ..., f(a_n)) = [\varphi]_j^{\mathbf{B}}(\vec{a}),$$

y esto dice que $[\varphi]_j^{\mathbf{B}}(\vec{a}) \in F$, lo cual no es posible. Por lo tanto debe ser que $\mathbf{F} = \mathbf{B}$, i.e. $f = id_B$.

(2)⇒(1). Sea $\mathbf{A}$ un álgebra cuasiprimal sin subálgebras triviales, y que satisface las condiciones (2a) y (2b). Supondremos que $A = \{1, 2, ..., n\}$.

Afirmación 1 *Sea $\mathbf{S} \leq \mathbf{A}$. Supongamos $S = \{s_1, ..., s_k\}$, con $s_1 < \cdots < s_k$. Hay una fórmula abierta $O_{\mathbf{S}}(x_1, ..., x_k)$ tal que $\mathbf{A} \vDash O_{\mathbf{S}}(a_1, ..., a_k)$ sii $(a_1, ..., a_k) \in \{(\gamma(s_1), ..., \gamma(s_k)) : \gamma \in Aut(\mathbf{S})\}$.*

Nótese que si $\mathcal{L}$ es el lenguaje de $\mathbf{A}$, hay un $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}$ finito tal que el reducto $\mathbf{A}_0$ de $\mathbf{A}$ a $\mathcal{L}_0$ tiene exactamente los mismos subuniversos y automorfismos internos que $\mathbf{A}$. Sea $\mathbf{S} \leq \mathbf{A}$, y sea $\mathbf{S}_0$ el reducto de $\mathbf{S}$ a $\mathcal{L}_0$. Es un ejercicio de rutina el construir una fórmula abierta $O_{\mathbf{S}_0}$ que cumpla

$$\mathbf{A}_0 \vDash O_{\mathbf{S}_0}(a_1, ..., a_k) \Leftrightarrow (a_1, ..., a_k) \in \{(\gamma(s_1), ..., \gamma(s_k)) : \gamma \in Aut(\mathbf{S}_0)\}.$$

Por último obsérvese que por nuestra elección de $\mathcal{L}_0$ podemos tomar $O_{\mathbf{S}} = O_{\mathbf{S}_0}$.

Afirmación 2 *Sea $\mathbf{S} < \mathbf{M} \leq \mathbf{A}$. Supongamos $S = \{s_1, ..., s_k\}$, $M = S \cup \{m_1, ..., m_l\}$, $s_1 < \cdots < s_k$ y $m_1 < \cdots < m_l$. Hay una fórmula abierta $\phi_{\mathbf{S},\mathbf{M}}(x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_l)$ con las siguientes propiedades.*

(a) Si $\mathbf{A} \vDash \phi_{\mathbf{S},\mathbf{M}}(a_1, ..., a_k, b_1, ..., b_l)$ entonces

$$\begin{array}{rcl} (b_1, ..., b_l) & \in & \{(f(m_1), ..., f(m_l)) : f \in Aut(\mathbf{M})\} \text{ y} \\ (a_1, ..., a_k) & \in & \{(\gamma(s_1), ..., \gamma(s_k)) : \gamma \in Aut(\mathbf{S})\}. \end{array}$$

(b) Para cada $(a_1, ..., a_k) \in \{(\gamma(s_1), ..., \gamma(s_k)) : \gamma \in Aut(\mathbf{S})\}$ hay un único $\vec{b} \in M^l$ tal que $\mathbf{A} \vDash \phi_{\mathbf{S},\mathbf{M}}(a_1, ..., a_k, b_1, ..., b_l)$.

Para $s \in S$ sea $o_{\mathbf{S}}(s) = \{\gamma(s) : \gamma \in Aut(\mathbf{S})\}$, y análogamente para $m \in M$ definimos $o_{\mathbf{M}}(m) = \{f(s) : f \in Aut(\mathbf{S})\}$. Nótese que si $f \in Aut(\mathbf{M})$, por (2a), tenemos que $f(S) = S$. De esto se obtiene que $o_{\mathbf{M}}(s) \subseteq o_{\mathbf{S}}(s)$ para todo $s \in S$. Si $o_{\mathbf{M}}(s_1) \subsetneq o_{\mathbf{S}}(s_1)$ elegimos un $t_2 \in o_{\mathbf{S}}(s_1) - o_{\mathbf{M}}(s_1)$. Es claro que $o_{\mathbf{M}}(s_1) \cup o_{\mathbf{M}}(t_2) \subseteq o_{\mathbf{S}}(s_1)$ y que $o_{\mathbf{M}}(s_1) \cap o_{\mathbf{M}}(t_2) = \emptyset$. Nuevamente, si $o_{\mathbf{M}}(s_1) \cup o_{\mathbf{M}}(t_2) \subsetneq o_{\mathbf{S}}(s_1)$ elegimos un $t_3 \in o_{\mathbf{S}}(s_1) - (o_{\mathbf{M}}(s_1) \cup o_{\mathbf{M}}(t_2))$. Nótese que $o_{\mathbf{M}}(s_1) \cup o_{\mathbf{M}}(t_2) \cup o_{\mathbf{M}}(t_3)$ es una unión disjunta contenida en $o_{\mathbf{S}}(s_1)$. Si repetimos este proceso hasta agotar los elementos de $o_{\mathbf{S}}(s_1)$ obtenemos $t_2, ..., t_r \in o_{\mathbf{S}}(s_1)$ tales que

$$o_{\mathbf{M}}(s_1) \cup o_{\mathbf{M}}(t_2) \cup \cdots \cup o_{\mathbf{M}}(t_r) = o_{\mathbf{S}}(s_1),$$

y los conjuntos del lado izquierdo de esta igualdad son disjuntos de a pares. Ya que $t_2, ..., t_r \in o_{\mathbf{S}}(s_1)$, existen $\gamma_2, ..., \gamma_r \in Aut(\mathbf{S})$ tales que $\gamma_j(s_1) = t_j$, para $j = 2, ..., r$. Si denotamos con γ_1 la identidad en S tenemos que

$$o_{\mathbf{S}}(s_1) = o_{\mathbf{M}}(\gamma_1(s_1)) \cup o_{\mathbf{M}}(\gamma_2(s_1)) \cup \cdots \cup o_{\mathbf{M}}(\gamma_r(s_1)),$$

y

$$o_{\mathbf{M}}(\gamma_i(s_1)) \cap o_{\mathbf{M}}(\gamma_j(s_1)) \neq \emptyset \Leftrightarrow i = j.$$

Para $j = 1, ..., r$ sea g_j la permutación de $\{1, ..., k\}$ definida por $g_j(x) = y$ sii $\gamma_j(s_x) = s_y$. Sea $O(x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_l)$ una fórmula abierta tal que $\mathbf{A} \vDash O(a_1, ..., a_k, b_1, ..., b_l)$ sii

$$(a_1, ..., a_k, b_1, ..., b_l) \in \{(f(s_1), ..., f(s_k), f(m_1), ..., f(m_l)) : f \in Aut(\mathbf{M})\}.$$

La prueba de que una tal fórmula O existe es dejada al lector, ya que es muy similar a la prueba de la Afirmación 1. Definimos

$$\phi_{\mathbf{S},\mathbf{M}}(x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_l) = \bigvee_{j=1}^{n} O(x_{g_j^{-1}(1)}, ..., x_{g_j^{-1}(k)}, y_1, ..., y_l).$$

Comprobaremos a continuación que esta fórmula satisface (a) y (b).
Supongamos $\mathbf{A} \vDash \phi_{\mathbf{S},\mathbf{M}}(a_1, ..., a_k, b_1, ..., b_l)$. Entonces

$$\mathbf{A} \vDash O(a_{g_j^{-1}(1)}, ..., a_{g_j^{-1}(k)}, b_1, ..., b_l)$$

para algún j, lo cual nos dice que existe $f \in Aut(\mathbf{M})$ tal que

$$(a_{g_j^{-1}(1)}, ..., a_{g_j^{-1}(k)}, b_1, ..., b_l) = (f(s_1), ..., f(s_k), f(m_1), ..., f(m_l)).$$

Luego $a_{g_j^{-1}(y)} = f(s_y)$, para $y = 1, ...k$, y así $a_x = f(s_{g_j(x)}) = f(\gamma_j(x))$, para $x = 1, ..., k$. Como $f \circ \gamma_j \in Aut(\mathbf{S})$, sabemos que $\phi_{\mathbf{S},\mathbf{M}}$ satisface (a).
Sea $(a_1, ..., a_k) \in \{(\gamma(s_1), ..., \gamma(s_k)) : \gamma \in Aut(\mathbf{S})\}$. Ya que $a_1 \in o_{\mathbf{S}}(s_1)$, debe haber un j_0 tal que $a_1 \in o_{\mathbf{M}}(\gamma_{j_0}(s_1))$. Luego tenemos un $g \in Aut(\mathbf{M})$ tal que $g(\gamma_{j_0}(s_1)) = a_1$, lo cual en combinación con (2b) nos dice que

$$(a_1, ..., a_k) = (g(\gamma_{j_0}(s_1)), ..., g(\gamma_{j_0}(s_k))).$$

Obsérvese que $a_{g_{j_0}^{-1}(y)} = g(\gamma_{j_0}(s_{g_{j_0}^{-1}(y)})) = g(s_y)$, para $y = 1, ..., k$. Se sigue que si tomamos $\vec{b} = (g(m_1), ..., g(m_l))$, entonces

$$(a_{g_{j_0}^{-1}(1)}, ..., a_{g_{j_0}^{-1}(k)}, b_1, ..., b_l) = (g(s_1), ..., g(s_k), g(m_1), ..., g(m_l))$$

y $\mathbf{A} \vDash \phi_{\mathbf{S},\mathbf{M}}(a_1, ..., a_k, b_1, ..., b_l)$. Nos resta ver que este $\vec{b}$ es único. Supongamos que $\vec{c} \in A^l$ es tal que $\mathbf{A} \vDash \phi_{\mathbf{S},\mathbf{M}}(\vec{a}, \vec{c})$. Si repetimos el razonamiento empleado en la prueba de (a) obtenemos un j y un $f \in Aut(\mathbf{M})$ que cumplen

$$(\vec{a}, \vec{c}) = (f(\gamma_j(s_1)), ..., f(\gamma_j(s_k)), f(m_1), ..., f(m_l)).$$

Ahora, como $f(\gamma_j(s_1)) = g(\gamma_{j_0}(s_1))$, se sigue que

$$f(\gamma_j(s_1)) \in o_{\mathbf{M}}(\gamma_{j_0}(s_1)) \cap o_{\mathbf{M}}(\gamma_j(s_1))$$

y por lo tanto $j = j_0$. Aplicando la condición (2b), $f(\gamma_{j_0}(s_1)) = g(\gamma_{j_0}(s_1))$ implica $f = g$; i.e. $\vec{c} = \vec{b}$. Esto concluye la prueba de la Afirmación 2.

Fijamos ahora una clase $\mathcal{C} \subseteq S(\mathbf{A})$, cerrada bajo intersección de subálgebras. Construiremos un conjunto $\Sigma_{\mathcal{C}}$ de sentencias $\forall\exists!$ que cumpla

$$Mod(\Sigma_{\mathcal{C}}) \cap S(\mathbf{A}) = \mathcal{C}.$$

Para cada $\mathbf{S} \in S(\mathcal{C})$ definimos:

$$Min(\mathbf{S}) = \{\mathbf{M} \in \mathcal{C} : \mathbf{S} \leq \mathbf{M} \text{ y no existe } \mathbf{N} \in \mathcal{C} \text{ tal que } \mathbf{S} \leq \mathbf{N} < \mathbf{M}\}.$$

Notamos que, al ser $\mathcal{C}$ cerrada bajo intersección de subálgebras, $Min(\mathbf{S}) \neq \emptyset$ para toda $\mathbf{S} \in S(\mathcal{C})$.

Afirmación 3 *Para cada $\mathbf{S} \in S(\mathcal{C}) - \mathcal{C}$ hay una sentencia $\forall\exists!$, llamémosla $\varphi_{\mathbf{S}}$, tal que*

$$Mod(\varphi_{\mathbf{S}}) \cap S(\mathbf{A}) = \{\mathbf{B} \in S(\mathbf{A}) : \mathbf{S} \nleq \mathbf{B} \ \text{o} \ |S(\mathbf{B}) \cap Min(\mathbf{S})| = 1\}. \qquad (*)$$

Supongamos $S = \{s_1, ..., s_k\}$, donde $s_1 < \cdots < s_k$. Recordamos que $|A| = n$. Definimos las fórmulas abiertas $\alpha(x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_n)$ y $\beta(x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_n)$ por:

$$\alpha(\vec{x}, \vec{y}) = \neg O_{\mathbf{S}}(\vec{x}) \wedge \bigwedge_{j=1}^{n} y_j = x_1$$

$$\beta(\vec{x}, \vec{y}) = \bigvee_{\mathbf{M} \in Min(\mathbf{S})} \left(\phi_{\mathbf{S},\mathbf{M}}(\vec{x}, y_1, ..., y_{|M|-k}) \wedge \bigwedge_{j=|M|-k+1}^{n} y_j = x_1 \right).$$

($O_{\mathbf{S}}$ es la fórmula dada por la Afirmación 1.) Definimos

$$\varphi_{\mathbf{S}} = \forall x_1, ..., x_k \exists! y_1, ..., y_n \alpha(\vec{x}, \vec{y}) \vee \beta(\vec{x}, \vec{y}).$$

Veremos que $\varphi_{\mathbf{S}}$ satisface la propiedad deseada. Comenzamos por la inclusión $\subseteq$ de (*). Sea $\mathbf{B} \in Mod(\varphi_{\mathbf{S}}) \cap S(\mathbf{A})$, y supongamos $\mathbf{S} \leq \mathbf{B}$. Como $\vec{s} = (s_1, ..., s_k) \in B^k$ y $\mathbf{B} \vDash O_{\mathbf{S}}(\vec{s})$, debe haber un $\vec{b} = (b_1, ..., b_n) \in B^n$ tal que $\mathbf{B} \vDash \beta(\vec{s}, \vec{b})$. Luego hay un álgebra $\mathbf{M}_0 \in Min(\mathbf{S})$ tal que

$$\mathbf{B} \vDash \phi_{\mathbf{S},\mathbf{M}_0}(\vec{s}, b_1, ..., b_{|M_0|-k}) \wedge \bigwedge_{j=|M_0|-k+1}^{n} b_j = s_1.$$

Notamos que de (a) de la Afirmación 2 se desprende que $\mathbf{M}_0 \leq \mathbf{B}$. Supongamos que hay un álgebra $\mathbf{M} \in S(\mathbf{B}) \cap Min(\mathbf{S}) - \{\mathbf{M}_0\}$. Entonces, por la Afirmación 2, existe $(c_1, ..., c_{|M|-k}) \in M^{|M|-k} \subseteq B^{|M|-k}$ tal que $\mathbf{B} \vDash \phi_{\mathbf{S},\mathbf{M}}(\vec{s}, c_1, ..., c_{|M|-k})$. Pero entonces $\mathbf{B} \vDash \beta(\vec{s}, c_1, ..., c_{|M|-k}, s_1, ..., s_1)$, y como $M - S = \{c_1, ..., c_{|M|-k}\}$ y $M_0 - S = \{b_1, ..., b_{|M_0|-k}\}$, podemos concluir que $(c_1, ..., c_{|M|-k}, s_1, ..., s_1) \neq \vec{b}$. Esto contradice el hecho de que $\mathbf{B} \vDash U(\varphi_{\mathbf{S}})$, luego debe ser que $S(\mathbf{B}) \cap Min(\mathbf{S}) = \{\mathbf{M}_0\}$.

Veamos ahora que vale la inclusión $\supseteq$ de (*). Sea $\mathbf{B} \in \mathbf{S}(\mathbf{A})$. Es claro que si $\mathbf{S} \not\leq \mathbf{B}$, entonces $\mathbf{B} \vDash \varphi_{\mathbf{S}}$, así es que supondremos que $S(\mathbf{B}) \cap Min(\mathbf{S}) = \{\mathbf{M}_0\}$. Sea $\vec{a} = (a_1, ..., a_k) \in B^k$. Si

$$\vec{a} \notin \{(\gamma(s_1), ..., \gamma(s_k)) : \gamma \in Aut(\mathbf{S})\}$$

la Afirmación 1 nos dice que $\mathbf{B} \vDash \neg O_{\mathbf{S}}(\vec{a})$, y de la Afirmación 2 sigue no hay $\vec{c} \in B^n$ para el cual $\mathbf{B} \vDash \beta(\vec{a}, \vec{c})$. Por lo tanto $(a_1, ..., a_1)$ es el único $\vec{y} \in B^n$ tal que $\mathbf{B} \vDash \alpha(\vec{a}, \vec{y}) \vee \beta(\vec{a}, \vec{y})$. Veamos que sucede si hay $\gamma_0 \in Aut(\mathbf{S})$ tal que

$$(a_1, ..., a_k) = (\gamma_0(s_1), ..., \gamma_0(s_k)).$$

En este caso, por las Afirmaciones 1 y 2, tenemos que $\mathbf{B} \not\vDash \alpha(\vec{a}, \vec{y})$ para todo $\vec{y} \in B^n$, y

$$\mathbf{B} \not\vDash \phi_{\mathbf{S},\mathbf{M}}(\vec{a}, y_1, ..., y_{|M|-k}) \wedge \bigwedge_{j=|M|-k+1}^{n} y_j = a_1,$$

para todo $\mathbf{M} \in Min(\mathbf{S}) - \{\mathbf{M}_0\}$ y todo $\vec{y} \in B^n$. Además, por (b) de la Afirmación 2, sabemos que hay un único $(b_1, ..., b_{|M_0|-k}) \in M_0^{|M_0|-k} \subseteq B^{|M_0|-k}$ tal que $\mathbf{B} \vDash \phi_{\mathbf{S},\mathbf{M}_0}(\vec{a}, b_1, ..., b_{|M_0|-k})$. De estos hechos podemos concluir que $(b_1, ..., b_{|M_0|-k}, a_1, ..., a_1)$ es el único $\vec{y} \in B^n$ para el cual $\mathbf{B} \vDash \alpha(\vec{a}, \vec{y}) \vee \beta(\vec{a}, \vec{y})$. Por lo tanto $\mathbf{B} \vDash \varphi_{\mathbf{S}}$. Con esto hemos finalizado la prueba de la Afirmación 3.

Afirmación 4 *Hay un conjunto finito de identidades $\Gamma_{S(\mathcal{C})}$ tal que*

$$Mod(\Gamma_{S(\mathcal{C})}) \cap S(\mathbf{A}) = S(\mathcal{C}).$$

La prueba de la Afirmación 4 es dejada al lector.

Sea

$$\Sigma_{\mathcal{C}} = \Gamma_{S(\mathcal{C})} \cup \{\varphi_{\mathbf{S}} : \mathbf{S} \in S(\mathcal{C}) - \mathcal{C}\}.$$

Afirmación 5 *$Mod(\Sigma_{\mathcal{C}}) \cap S(\mathbf{A}) = \mathcal{C}$.*

En virtud las Afirmaciones 3 y 4 tenemos que

$$Mod(\Sigma_{\mathcal{C}}) \cap S(\mathbf{A}) = \bigcap_{\mathbf{S} \in S(\mathcal{C}) - \mathcal{C}} \{\mathbf{B} \in S(\mathcal{C}) : \mathbf{S} \not\leq \mathbf{B} \text{ o } |S(\mathbf{B}) \cap Min(\mathbf{S})| = 1\}.$$

Probaremos entonces que

$$\mathcal{C} = \bigcap_{\mathbf{S} \in S(\mathcal{C}) - \mathcal{C}} \{\mathbf{B} \in S(\mathcal{C}) : \mathbf{S} \not\leq \mathbf{B} \text{ o } |S(\mathbf{B}) \cap Min(\mathbf{S})| = 1\}.$$

($\subseteq$) Sea $\mathbf{B} \in \mathcal{C}$ y sea $\mathbf{S} \in (S(\mathcal{C}) - \mathcal{C}) \cap S(\mathbf{B})$. Como $\mathbf{B} \in \mathcal{C}$ sabemos que $S(\mathbf{B}) \cap Min(\mathbf{S}) \neq \emptyset$. Sean $\mathbf{M}, \mathbf{M}' \in S(\mathbf{B}) \cap Min(\mathbf{S})$. Ya que $\emptyset \neq M \cap M' \subseteq B$, y $\mathcal{C}$ es cerrada bajo intersección de subálgebras, tenemos que $\mathbf{M} \cap \mathbf{M}' \in \mathcal{C}$. Luego, de la definición de $Min(\mathbf{S})$ obtenemos $\mathbf{M} = \mathbf{M}'$.

($\supseteq$) Sea

$$\mathbf{B}_0 \in \bigcap_{\mathbf{S} \in S(\mathcal{C}) - \mathcal{C}} \{\mathbf{B} \in S(\mathcal{C}) : \mathbf{S} \nleq \mathbf{B} \text{ o } |S(\mathbf{B}) \cap Min(\mathbf{S})| = 1\}.$$

Si $\mathbf{B}_0 \in S(\mathcal{C}) - \mathcal{C}$ entonces $|S(\mathbf{B}_0) \cap Min(\mathbf{B}_0)| = 1$. Así que si tomamos $\mathbf{M} \in S(\mathbf{B}_0) \cap Min(\mathbf{B}_0)$ tenemos que $B_0 \subseteq M \subseteq B_0$, por lo que $\mathbf{B}_0 = \mathbf{M} \in \mathcal{C}$. ■

El Teorema 67 en combinación con el Lema 58 producen:

Corolario 68 *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra cuasiprimal sin subálgebras triviales, y que satisface las condiciones (2a) y (2b) del Teorema 67. Entonces* $\mathcal{C} \subseteq V(\mathbf{A})$ *es algebraicamente extensible sii* $\mathcal{C}$ *es cerrada bajo intersección de subálgebras, bajo la formación de productos Booleanos y bajo isomorfismos.*

Una aplicación inmediata del corolario anterior es la caracterización de las subclases AE de una variedad generada por un álgebra semiprimal sin subálgebras triviales.

Definición 69 (Foster y Pixley [10]) *Un álgebra* $\mathbf{A}$ *se dice* semiprimal *si es cuasiprimal y satisface:*

(S_1) No hay dos subálgebras isomorfas distintas de $\mathbf{A}$*.*

(S_2) Ninguna subálgebra de $\mathbf{A}$ *tiene un automorfismo distinto de la identidad.*

Como ejemplo de álgebra semiprimal tenemos el álgebra de Łukasievicz simple de orden n, la cual denotaremos con $\mathbf{L}_n$ (véase [21] para una definición). Aplicando los resultados de esta sección calculamos las subclases AE de $V(\mathbf{L}_n)$ para n igual 4, 5 y 6. En la Figura 1.8 puede verse el reticulado que forman las subclases AE de $V(\mathbf{L}_6)$ con el orden de la inclusión. Dejamos los detalles al lector.

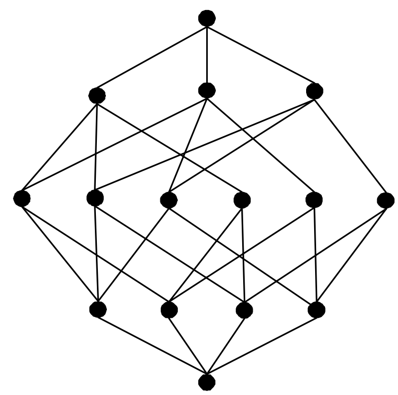


Figura 1.8: Subclases AE de $V(\mathbf{L}_6)$

CAPÍTULO 2

MS-álgebras

Presentamos en este capítulo dos resultados obtenidos como aplicaciones de la representación global en la variedad de las MS-álgebras. El primero es una caracterización análoga al célebre resultado de L. Nachbin [17] para reticulados distributivos. El segundo es un resultado acerca de la descomposición de sistemas de congruencias en MS-álgebras con esqueleto permutable.

Un álgebra $(A, \wedge, \vee, ^-, 0, 1)$ es una *MS-álgebra* si $(A, \wedge, \vee, 0, 1)$ es un reticulado distributivo acotado, y $^-$ es una operación unaria en A que satisface:

$\overline{(x \wedge y)} = \overline{x} \vee \overline{y}$

$\overline{(x \vee y)} = \overline{x} \wedge \overline{y}$

$x \leq \overline{\overline{x}}$

$\overline{1} = 0.$

Escribiremos $\mathcal{MS}$ para denotar la variedad de las MS-álgebras. Un álgebra $\mathbf{A} \in \mathcal{MS}$ es un álgebra de *de Morgan* si satisface la identidad $\overline{\overline{x}} = x$. Con $\mathcal{M}$ denotaremos la variedad de las álgebras de de Morgan. Para mayor información acerca de las MS-álgebras véase por ejemplo [4].

Haremos uso de la dualidad de Priestley para MS-álgebras. Daremos aquí un breve resumen de las propiedades de esta dualidad, los detalles pueden consultarse en [4]. Utilizaremos la misma notación que la introducida en la Sección 1.4, es decir $(X(\mathbf{A}), g_{\mathbf{A}})$ será el dual de una MS-álgebra $\mathbf{A}$. El poset $X(\mathbf{A})$, la función $g_{\mathbf{A}}$, los conjuntos $\sigma(a)$ y la topología τ se definen de la misma manera que en la Sección 1.4. La función $g_{\mathbf{A}}$ es continua (respecto de τ) y tiene las siguientes propiedades:

$g_{\mathbf{A}}$ invierte orden

$p \subseteq g_{\mathbf{A}}(g_{\mathbf{A}}(p))$ para todo $p \in X(\mathbf{A})$.

Sea

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq X(\mathbf{A}) : F \text{ es cerrado en } (X(\mathbf{A}), \tau) \text{ y } g_{\mathbf{A}}(F) = F\}.$$

Nótese que $\mathcal{F}$ es cerrado bajo intersecciones arbitrarias, y por lo tanto es un reticulado respecto del orden de la inclusión. Un subconjunto F de $X(\mathbf{A})$ pertenece a $\mathcal{F}$ sii $F = F^{cl} \cup g_{\mathbf{A}}(F^{cl}) \cup g_{\mathbf{A}}^2(F^{cl})$, donde F^{cl} es la clausura topológica de F en $(X(\mathbf{A}), \tau)$. Denotaremos con $\overline{F}$ a $F^{cl} \cup g_{\mathbf{A}}(F^{cl}) \cup g_{\mathbf{A}}^2(F^{cl})$. El mapeo

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F} & \rightarrow & Con(\mathbf{A}) \\ F & \mapsto & \theta_F = \{(x, y) : \sigma(x) \cap F = \sigma(y) \cap F\} \end{array}$$

es un anti-isomorfismo de reticulados, cuya inversa está dada por

$$\theta \mapsto F(\theta) = \{p \in X(\mathbf{A}) : \text{para cada } (x, y) \in \theta,\ x \in p \text{ sii } y \in p\}.$$

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{MS}$. Diremos que un elemento $z \in A$ es *central* si $z \vee \overline{z} = 1$. Los elementos centrales de $\mathbf{A}$ están identificados naturalmente con las congruencias factor de $\mathbf{A}$. Dados $x, y \in A$ escribiremos $x \Leftrightarrow y$ para denotar el mayor central $u \in A$ que cumple $u \wedge x = u \wedge y$, si un tal u existe. Con $\lfloor x \rfloor$ denotaremos el mayor central $v \in A$ tal que $v \leq x$, siempre que haya un tal v. Cabe notar que si A es finito tanto $x \Leftrightarrow y$ como $\lfloor x \rfloor$ existen para todo $x, y \in A$.

Obsérvese que para toda álgebra directamente indescomponible, y en particular para los elementos de $\mathcal{MS}_S$, los únicos elementos centrales son 0 y 1. Luego en estas MS-álgebras $\Leftrightarrow$ es el test de igualdad, y $\lfloor x \rfloor$ es la función que vale 1 si $x = 1$, y 0 para toda otra entrada.

2.1. Representaciones Globales

En esta sección calculamos, para las variedades $\mathcal{M}$ y $\mathcal{MS}$, clases de factores con la propiedad de que cada álgebra en la variedad puede representarse como producto subdirecto global con factores en estas clases. Estas clases ya habían sido calculadas, en [12] para $\mathcal{M}$ y en [13] para $\mathcal{MS}$, pero en ambos trabajos las clases encontradas son incompletas.

2.1.1. Representación Global en $\mathcal{MS}$

Sea $\mathbf{K}$ la MS-álgebra en la Figura 2.1. La Figura 2.2 describe el dual de $\mathbf{K}$.

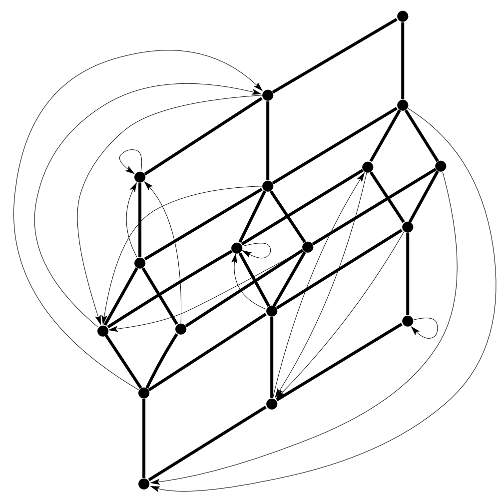


Figura 2.1: **K**

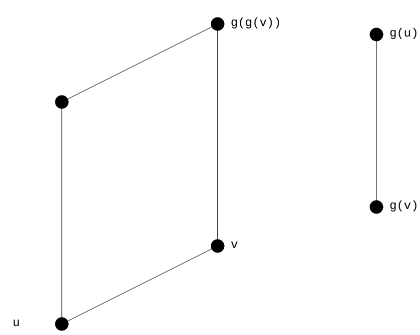


Figura 2.2: Dual de **K**

Teorema 70 *Toda álgebra en $\mathcal{MS}$ es un producto subdirecto global con factores en $IS(K)$.*

Prueba. Veremos primero que

$$IS(\mathbf{K}) = \{\mathbf{A} \in \mathcal{MS} : X(\mathbf{A}) = \overline{\{p,q\}},\ p,q \in X(\mathbf{A}),\ p \leq q\}.$$

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{MS}$, y sean $p,q \in X(\mathbf{A})$ tales que $X(\mathbf{A}) = \overline{\{p,q\}}$ y $p \leq q$. Nótese que

$$\overline{\{p,q\}} = \{p, q, g_{\mathbf{A}}(p), g_{\mathbf{A}}(q), g^2_{\mathbf{A}}(p), g^2_{\mathbf{A}}(q)\}.$$

Definimos $f : X(\mathbf{K}) \to X(\mathbf{A})$ por

$f(u) = p,\ f(v) = q$
$f(g_{\mathbf{K}}(u)) = g_{\mathbf{A}}(p)$
$f(g_{\mathbf{K}}(v)) = g_{\mathbf{A}}(q)$
$f(g^2_{\mathbf{K}}(u)) = g^2_{\mathbf{A}}(p)$
$f(g^2_{\mathbf{K}}(v)) = g^2_{\mathbf{A}}(q)$.
Como f es un morfismo de $(X(\mathbf{K}), g_{\mathbf{K}})$ sobre $(X(\mathbf{A}), g_{\mathbf{A}})$, induce através de la dualidad un embedding de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{K}$. Luego

$$IS(\mathbf{K}) \supseteq \{\mathbf{A} \in \mathcal{MS} : X(\mathbf{A}) = \overline{\{p, q\}},\ p, q \in X(\mathbf{A}),\ p \leq q\}.$$

Tomemos ahora $\mathbf{A} \in IS(\mathbf{K})$ y sea h un embedding de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{K}$. La función $f : X(\mathbf{K}) \to X(\mathbf{A})$, definida por $f(r) = h^{-1}(r)$ es un morfismo de $(X(\mathbf{K}), g_{\mathbf{K}})$ sobre $(X(\mathbf{A}), g_{\mathbf{A}})$. Es fácil verificar que entonces $X(\mathbf{A}) = \overline{\{f(u), f(v)\}}$. Por lo tanto

$$IS(\mathbf{K}) \subseteq \{\mathbf{A} \in \mathcal{MS} : X(\mathbf{A}) = \overline{\{p, q\}},\ p, q \in X(\mathbf{A}),\ p \leq q\}.$$

Ahora, por [13], cada álgebra en $\mathcal{MS}$ es isomorfa un producto subdirecto global con factores en

$$ISP_u(\{\mathbf{A} \in \mathcal{MS} : X(\mathbf{A}) = \overline{\{p, q\}},\ p \leq q\}) = ISP_u(IS(\mathbf{K})) = IS(\mathbf{K}).$$

■

Con la ayuda de una computadora calculamos todas las subálgebras de $\mathbf{K}$. Hay 97 de ellas salvo isomorfismos.

2.1.2. Representación Global en $\mathcal{M}$

Denotaremos con $\mathbf{M}$ al álgebra de de Morgan en la Figura 2.3. Las Figuras 2.4 a 2.10 muestran todas las subálgebras de $\mathbf{M}$ (salvo isomorfismos). Las álgebras $\mathbf{2}$, $\mathbf{3}$ y $\mathbf{S}$ son las únicas subálgebras permutables de $\mathbf{M}$. Es interesante notar que $\mathcal{M}_S = I(\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{S})$.

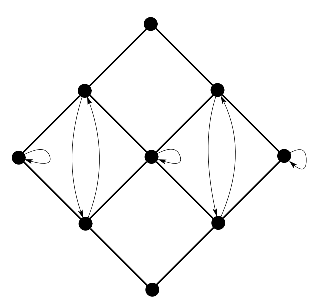


Figura 2.3: $\mathbf{M}$

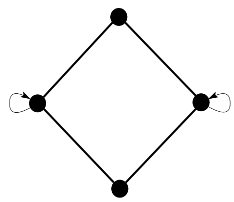


Figura 2.4: **S**

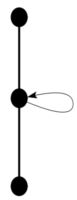


Figura 2.5: **3**

Figura 2.6: **2**

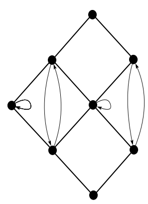


Figura 2.7: **E**

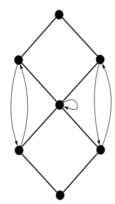


Figura 2.8: **D**

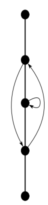


Figura 2.9: **5**

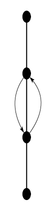


Figura 2.10: **4**

Teorema 71 *Toda álgebra de $\mathcal{M}$ es un producto subdirecto global con factores en $IS(\mathbf{M})$.*

Prueba. Esta demostración es análoga a la del Teorema 70, por lo que la dejamos al lector. ■

2.2. Caracterización de las MS-álgebras Permutables

Antes de poder caracterizar las MS-álgebras permutables será necesario primero caracterizar las álgebras permutables en la variedad $\mathcal{M}$.

Lema 72 *Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}$. Son equivalentes:*

(1) $\mathbf{A}$ *es de congruencias permutables.*

(2) $x \Leftrightarrow y$ *existe para todo* $x, y \in A$, *y* $\mathbf{A}$ *satisface*

$$\forall x \ (x \Leftrightarrow 0) \vee (x \Leftrightarrow 1) \vee (x \Leftrightarrow \overline{x}) = 1.$$

(3) $H(\mathbf{A}) \cap \{\mathbf{M}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{D}, \mathbf{E}\} = \emptyset$.

(4) $\mathbf{A}$ *es un producto subdirecto global con factores simples.*

(5) Si p, q son filtros primos de $\mathbf{A}$ tales que $p \subsetneq q$, entonces $g(p) = q$.

(6) $\mathbf{A}$ satisface la DEF

$$\varphi_{\lfloor\ \rfloor} = \forall x \exists ! y\ (x = y \vee (x \wedge \overline{x}),\ y \vee \overline{y} = 1).$$

(7) $\lfloor x \rfloor$ existe para todo $x \in A$, y $\mathbf{A}$ satisface

$$\forall x\ x = \lfloor x \rfloor \vee (x \wedge \overline{x}).$$

(8) $\mathbf{A}$ satisface la DEF

$$\begin{aligned} \varphi_{\Leftrightarrow} \quad = \quad & \forall x, y \exists ! z\ (z \geq x \wedge y \wedge \overline{x} \wedge \overline{y},\ z \vee x \vee y \geq \overline{x} \wedge \overline{y}, \\ & z \vee \overline{x} \vee \overline{y} \geq x \wedge y,\ z \wedge x = z \wedge y\ z \vee \overline{z} = 1). \end{aligned}$$

Prueba. La equivalencia de los puntos (1),(2),(3) y (4) fue probada en [12][1]. La prueba de (1)$\Leftrightarrow$(5) se encuentra en [1]. Las implicaciones (4)$\Rightarrow$(6) y (4)$\Rightarrow$(8) se deducen de la Proposición 8.

Como $E(\varphi_{\lfloor\ \rfloor})$ y $E(\varphi_{\Leftrightarrow})$ son sentencias positivas se preservan por imágenes y homomórficas, y como ninguna de las álgebras en $\{\mathbf{M}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{D}, \mathbf{E}\}$ satisface $E(\varphi_{\lfloor\ \rfloor})$ ni $E(\varphi_{\Leftrightarrow})$, siguen (6)$\Rightarrow$3 y (8)$\Rightarrow$(3).

Veamos que vale (7)$\Rightarrow$(6). Observamos que (7) implica $\mathbf{A} \vDash E(\varphi_{\lfloor\ \rfloor})$. Luego, como $\mathcal{M}_{SI} \vDash U(\varphi_{\lfloor\ \rfloor})$, tenemos que $\mathbf{A} \vDash U(\varphi_{\lfloor\ \rfloor})$.

Para finalizar probaremos (4)$\Rightarrow$(7). Sea $\{\mathbf{A}_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{M}_S$ tales que $\mathbf{A} \subseteq \{\mathbf{A}_i : i \in I\}$ es un producto subdirecto global de. Tomamos $a \in A$. Notamos que

$$I - E(a, 1) = E(a, 0) \cup E(a, \overline{a}),$$

por lo que $I - E(a, 1)$ es abierto en la topología de los ecualizadores. Por (G_2) de la Definición 7 existe un $z \in A$ tal que $E(z, 1) \supseteq E(a, 1)$ y $E(z, 0) \supseteq I - E(a, 1)$. Es fácil ver que $z = \lfloor a \rfloor$. Además, ya que para todo $i \in I$ en $\mathbf{A}_i$ se cumple

$$a(i) = z(i) \vee (a(i) \wedge \overline{a}(i)),$$

podemos concluir que $a = z \vee (a \wedge \overline{a})$. ■

Es interesante notar que en las álgebras de de Morgan permutables las DEFs $\varphi_{\Leftrightarrow}$ y $\varphi_{\lfloor\ \rfloor}$ definen las operaciones $\Leftrightarrow$ y $\lfloor\ \rfloor$ respectivamente. I.e., si $\mathbf{A} \in \mathcal{M}$ es de congruencias permutables entonces $[\varphi_{\Leftrightarrow}]^{\mathbf{A}} =$'$\Leftrightarrow$' y $[\varphi_{\lfloor\ \rfloor}]^{\mathbf{A}} =$'$\lfloor\ \rfloor$'.

Para $\mathbf{A} \in \mathcal{MS}$ escribiremos $Sk(\mathbf{A})$ para denotar el *esqueleto* de $\mathbf{A}$, es decir $Sk(\mathbf{A}) = \{\overline{x} : x \in A\}$. Es claro que $Sk(\mathbf{A})$ es un subuniverso de $\mathbf{A}$; con

[1] Observamos que en [12] el álgebra $\mathbf{E}$ fue omitida en la clase de factores globales. Sin embargo las pruebas siguen siendo válidas en ese trabajo.

$\mathbf{Sk}(\mathbf{A})$ denotaremos la subálgebra de $\mathbf{A}$ cuyo universo es $Sk(\mathbf{A})$. Es sabido que $\mathbf{Sk}(\mathbf{A})$ es la mayor subálgebra de $\mathbf{A}$ la cual es un álgebra de de Morgan.

Nos será de utilidad encontrar la clase de subálgebras de $\mathbf{K}$ con esqueleto permutable (recordamos que $\mathbf{K}$ es el álgebra en la Figura 2.1). Para este propósito necesitamos introducir las MS-álgebras $\mathbf{N}_1$ y $\mathbf{N}_2$, representadas con sus duales en las figuras a continuación.

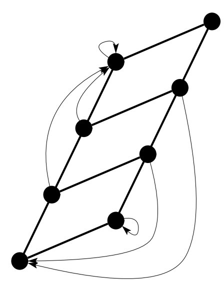


Figura 2.11: $\mathbf{N}_1$

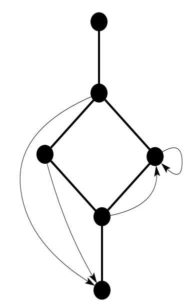


Figura 2.13: $\mathbf{N}_2$

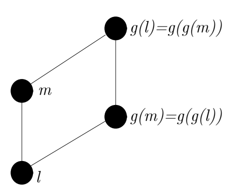


Figura 2.12: Dual de $\mathbf{N}_1$

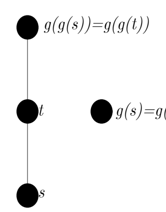


Figura 2.14: Dual de $\mathbf{N}_2$

Lema 73 $\{\mathbf{A} \in IS(\mathbf{K}) : \mathbf{Sk}(\mathbf{A})$ *es de congruencias permutables*$\} = IS(\mathbf{N}_1) \cup IS(\mathbf{N}_2)$

Prueba. ($\subseteq$) Sea $\mathbf{A} \in IS(\mathbf{K})$ tal que $\mathbf{Sk}(\mathbf{A})$ es permutable. Por la prueba del Teorema 70 sabemos que existen $p, q \in X(\mathbf{A})$ tales que $p \subseteq q$ y $X(\mathbf{A}) = \overline{\{p, q\}}$. Analizaremos dos casos.

Caso $g_{\mathbf{A}}(p) = g_{\mathbf{A}}(q)$. Sea $f : X(\mathbf{N}_1) \to X(\mathbf{A})$definida por:

$f(s) = p,\ f(t) = q$

$f(g_{\mathbf{N}_1}(s)) = g_{\mathbf{A}}(p)$

$f(g_{\mathbf{N}_1}(t)) = g_{\mathbf{A}}(q)$

$f(g^2_{\mathbf{N}_1}(s)) = g^2_{\mathbf{A}}(p)$
$f(g^2_{\mathbf{N}_1}(t)) = g^2_{\mathbf{A}}(q)$
Como $g^2_{\mathbf{A}}(p) = g^2_{\mathbf{A}}(q)$ tenemos que f es un morfismo de $(X(\mathbf{N}_1), g_{\mathbf{N}_1})$ sobre $(X(\mathbf{A}), g_{\mathbf{A}})$. Este morfismo induce dualmente un embedding de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{N}_1$.

Caso $g_{\mathbf{A}}(q) \subsetneq g_{\mathbf{A}}(p)$. Ya que $X(\mathbf{Sk}(\mathbf{A})) = \{g_{\mathbf{A}}(r) : r \in X(\mathbf{A})\}$, el punto (5) del Lema 72 nos dice que $g^2_{\mathbf{A}}(q) = g_{\mathbf{A}}(p)$. Luego, como $g^3_{\mathbf{A}} = g_{\mathbf{A}}$, sabemos que $g^2_{\mathbf{A}}(p) = g_{\mathbf{A}}(q)$. Podemos proceder ahora como en el caso de arriba definiendo un morfismo de $(X(\mathbf{N}_2), g_{\mathbf{N}_2})$ sobre $(X(\mathbf{A}), g_{\mathbf{A}})$.

($\supseteq$) Esta inclusión se prueba de la misma manera que en la prueba del Teorema 70. ■

El último paso antes de poder presentar nuestro teorema de caracterización de las MS-álgebras permutables es listar todas las subálgebras no permutables de $\mathbf{N}_1$ y $\mathbf{N}_2$. Las subálgebras no permutables de $\mathbf{N}_1$ son $\mathbf{N}_1^1$, $\mathbf{N}_1^2$, $\mathbf{N}_1^3$, $\mathbf{N}_1^4$ y $\mathbf{N}_1^5$. Estas álgebras pueden verse en las Figuras 2.15 a 2.19. Notamos además que la única subálgebra propia de $\mathbf{N}_2$ que no es permutable es isomorfa a $\mathbf{N}_1^1$.

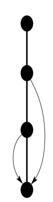


Figura 2.15: $\mathbf{N}_1^1$

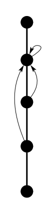


Figura 2.16: $\mathbf{N}_1^2$

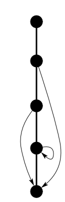


Figura 2.17: $\mathbf{N}_1^3$

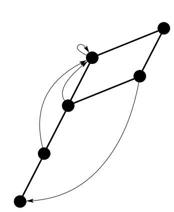


Figura 2.18: $\mathbf{N}_1^4$

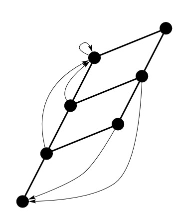


Figura 2.19: $\mathbf{N}_1^5$

Teorema 74 (Campercholi y Vaggione) *Sea* $\mathbf{A} \in \mathcal{MS}$*. Son equivalentes:*

(1) $\mathbf{A}$ *es de congruencias permutables.*

(2) $\mathbf{Sk}(\mathbf{A})$ *es de congruencias permutables y cada intervalo de la forma* $[y, \overline{\overline{y}}]$ *es Booleano.*

(3) $\mathbf{A}$ *satisface las DEFs*

$$\begin{array}{lcll} \varphi_{Sk} & = & \forall x, y \exists ! z & z \geq \overline{\overline{x}} \wedge \overline{\overline{y}} \wedge \overline{x} \wedge \overline{y},\ z \vee \overline{\overline{x}} \vee \overline{\overline{y}} \geq \overline{x} \wedge \overline{y}, \\ & & & z \vee \overline{x} \vee \overline{y} \geq \overline{\overline{x}} \wedge \overline{\overline{y}},\ z \wedge \overline{\overline{x}} = z \wedge \overline{\overline{y}},\ z \vee \overline{z} = 1 \\ & & & \\ \varphi_{\mathbf{c}} & = & \forall x \forall y \exists ! z & ((x \vee y) \wedge \overline{\overline{y}}) \vee z = \overline{\overline{y}},\ ((x \vee y) \wedge \overline{\overline{y}}) \wedge z = y. \end{array}$$

(4) Si p, q *son filtros primos de* $\mathbf{A}$ *y* $p \subsetneq q$ *entonces* $g^2(p) = q$ *o* $g^2(p) = g(q) \subsetneq q$*.*

(5) $H(\mathbf{A}) \cap \{\mathbf{M}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_1^1, \mathbf{N}_1^2, \mathbf{N}_1^3, \mathbf{N}_1^4, \mathbf{N}_1^5, \mathbf{N}_2\} = \emptyset$*.*

(6) $\mathbf{A}$ *es un producto subdirecto global con factores en* $\mathcal{MS}_{SI}$*.*

Prueba. (1)$\Rightarrow$(2). Nótese que $\mathbf{Sk}(\mathbf{A})$ es un cociente de $\mathbf{A}$, y por lo tanto debe ser permutable. Sean $y \in \mathbf{A}$ y $z \in [y, \overline{\overline{y}}]$. Ya que

$$\theta(y, z) = \theta_{Lat}(y, z) \vee \theta_{Lat}(\overline{y}, \overline{z}) \vee \theta_{Lat}(\overline{\overline{y}}, \overline{\overline{z}}),$$

como $\overline{y} = \overline{z}$ e $\overline{\overline{y}} = \overline{\overline{z}}$, es claro que $\theta(y, z) = \theta_{Lat}(y, z)$. De igual manera podemos probar que $\theta(z, \overline{\overline{y}}) = \theta_{Lat}(z, \overline{\overline{y}})$. Como $\mathbf{A}$ es permutable e

$$(y, \overline{\overline{y}}) \in \theta_{Lat}(z, \overline{\overline{y}}) \vee \theta_{Lat}(y, z),$$

hay un x en A tal que $(y, x) \in \theta_{Lat}(z, \overline{\overline{y}})$ y $(x, \overline{\overline{y}}) \in \theta_{Lat}(y, z)$. Utilizando las ecuaciones usuales que definen las congruencias principales en los reticulados distributivos se ve que x es el complemento de z en $[y, \overline{\overline{y}}]$.

(2)$\Rightarrow$(3). Obsérvese que $\mathbf{A} \vDash \varphi_{Sk}$ si y solo $\mathbf{Sk}(\mathbf{A}) \vDash \varphi_{\Leftrightarrow}$. Aplicando el Lema 72 obtenemos que $\mathbf{A}$ satisface φ_{Sk}.

(3)$\Rightarrow$(4). Sean $p \subsetneq q$ filtros primos de $\mathbf{A}$. Veremos primero que $g^2(p) \subseteq q$. Supongamos contrariamente que hay un elemento $a \in g^2(p) - q$. Sea $b \in q - p$ y tomemos c como el complemento de $(b \vee a) \wedge \overline{\overline{a}}$ en el intervalo $[a, \overline{\overline{a}}]$. Nótese que $\overline{\overline{a}} \in p$ y que $(b \vee a) \wedge \overline{\overline{a}} \notin p$. De esto obtenemos que $c \in p$ (pues $\overline{\overline{a}} = c \vee ((b \vee a) \wedge \overline{\overline{a}})$), y por lo tanto $c \in q$. Pero de esto deducimos que

$$a = (b \vee a) \wedge \overline{\overline{a}} \wedge c \in q,$$

lo cual es una contradicción.

Ahora, si $g^2(p) = q$ es claro que vale (4), por lo cual podemos suponer que $g^2(p) \neq q$. Como $p \subsetneq q$ tenemos que $g(q) \subseteq g(p)$, y no es posible que $g(q) = g(p)$ pues sino $g^2(q) = g^2(p) \subsetneq q$. Así es que necesariamente $g(q) \subsetneq g(p)$. Nótese que $\mathbf{A} \vDash \varphi_{Sk}$ sii $\mathbf{Sk}(\mathbf{A}) \vDash \varphi_{\Leftrightarrow}$. Luego por el Lema 72 resulta que $\mathbf{Sk}(\mathbf{A})$ es permutable. Sabemos que el dual de $\mathbf{Sk}(\mathbf{A})$ es $(\{g(r) : r \in X(\mathbf{A})\}, g)$, por lo que (5) del Lema 72 produce $g^2(p) = g(q)$.

(4)$\Rightarrow$(1). Para comprobar que $\mathbf{A}$ es permutable basta con ver que las congruencias compactas de $\mathbf{A}$ permutan. Sean $\theta, \delta \in Con(\mathbf{A})$ compactas. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\theta \cap \delta = \Delta$ (si $\mathbf{A}$ satisface la condición sobre sus filtros primos enunciada en (4) entonces $\mathbf{A}/(\theta \cap \delta)$ también, y si $\theta/(\theta \cap \delta)$ y $\delta/(\theta \cap \delta)$ permutan, entonces θ y δ permutan). Fijamos $(a, b) \in \theta \vee \delta$. Veremos hay un $c \in A$ tal que $(a, c) \in \theta$ y $(c, b) \in \delta$. Nótese que como θ, δ son compactas, Y_θ y Y_δ son clopens de $X(\mathbf{A})$. Luego

$$U = (Y_\theta \cap \sigma(a)) \cup (Y_\delta \cap \sigma(b))$$

es clopen. Probaremos que U es creciente. Sean $p \in Y_\theta \cap \sigma(a)$ y $q \in X(\mathbf{A})$ tales que $p \subsetneq q$. Como $\theta \cap \delta = \Delta$ tenemos $Y_\theta \cup Y_\delta = X(\mathbf{A})$. Si $q \in Y_\theta$ es claro que $q \in U$, por lo cual consideraremos el case en que $q \notin Y_\theta$. Nótese que $q \in Y_\delta$, y además que $q \neq g^2(p)$ pues $g^2(p) \in g^2(Y_\theta) \subseteq Y_\theta$. Luego (4) nos dice que $g^2(p) = g(q) \subsetneq q$. Como

$$g^2(p) \in Y_\theta \cap Y_\delta \cap \sigma(a) = Y_\theta \cap Y_\delta \cap \sigma(b)$$

necesariamente $b \in q$, y por lo tanto $q \in Y_\delta \cap \sigma(b) \subseteq U$. Por ser U un clopen creciente hay un $c \in A$ tal que $U = \sigma(c)$. Una corta verificación muestra que $Y_\theta \cap U = Y_\theta \cap \sigma(a)$ y $Y_\delta \cap U = Y_\delta \cap \sigma(b)$. De esto se desprende de manera inmediata que c es el elemento buscado.

(1)$\Rightarrow$(5). En primer lugar nótese que la propiedad de ser permutable es preservada por imágenes homomórficas. Ahora, las álgebras en $\{\mathbf{M}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{D}, \mathbf{E}\}$ son álgebras de de Morgan no permutables (podemos aplicar el Lema 72 para verificar esto). Además todas las álgebras en $\{\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_1^1, \mathbf{N}_1^2, \mathbf{N}_1^3, \mathbf{N}_1^4, \mathbf{N}_1^5, \mathbf{N}_2\}$ tienen un elemento x con $[x, \overline{\overline{x}}]$ no Booleano. Entonces por la implicación (1)$\Rightarrow$(2) de esta prueba, no son permutables.

(5)$\Rightarrow$(3). Necesitaremos probar primero que si $\mathbf{A} \in IS(\mathbf{K})$ no es permutable entonces necesariamente tiene una imagen homomórfica en

$$\{\mathbf{M}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_1^1, \mathbf{N}_1^2, \mathbf{N}_1^3, \mathbf{N}_1^4, \mathbf{N}_1^5, \mathbf{N}_2\}.$$

Supongamos entonces que $\mathbf{A} \in IS(\mathbf{K})$ no es permutable. Por (1)$\Rightarrow$(2) de este Teorema sabemos que o bien $\mathbf{Sk}(\mathbf{A})$ no es permutable o que hay un $x \in A$ tal que $[x, \overline{\overline{x}}]$ no es complementado. Si $\mathbf{Sk}(\mathbf{A})$ no es permutable, por el Lema 72, $\mathbf{Sk}(\mathbf{A})$ tiene una imagen homomórfica en $\{\mathbf{M}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{D}, \mathbf{E}\}$. Además, como $\mathbf{Sk}(\mathbf{A}) \in H(\mathbf{A})$, podemos concluir que

$$H(\mathbf{A}) \cap \{\mathbf{M}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{D}, \mathbf{E}\} \neq \emptyset.$$

Consideremos ahora el caso en que $\mathbf{Sk}(\mathbf{A})$ es permutable. Por el Corolario 73, tenemos $\mathbf{A} \in IS(\mathbf{N}_1) \cup IS(\mathbf{N}_2)$. Sabemos además que $\mathbf{A}$ debe contener un x tal que $[x, \overline{\overline{x}}]$ no es complementado. Es fácil ver que el conjunto $\{\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_1^1, \mathbf{N}_1^2, \mathbf{N}_1^3, \mathbf{N}_1^4, \mathbf{N}_1^5, \mathbf{N}_2\}$ contiene todas las subálgebras de $\mathbf{N}_1$ o $\mathbf{N}_2$ que contienen un tal x.

Supongamos ahora que $\mathbf{A}$ satisface (5). Entonces, nuestra conclusión anterior mas el Teorema 70 dicen que $\mathbf{A}$ es un producto subdirecto global con factores permutables. Por (1)⇒(3), estos factores satisfacen$\varphi_{Sk} \wedge \varphi_{\mathbf{c}}$, lo cual vía la Proposición 8 implica que $\mathbf{A} \vDash \varphi_{Sk} \wedge \varphi_{\mathbf{c}}$.

(1)⇒(6). Al ser $\mathcal{MS}_{SI}$ una clase universal (para una descripción de $\mathcal{MS}_{SI}$ véase [4]), la prueba de esta implicación es inmediata de [18].

(6)⇒(3). Todos los miembros de $\mathcal{MS}_{SI}$ son permutables (esto puede verificarse aplicando (2) de este teorema por ejemplo). Luego por (1)⇒(3) tenemos que $\mathcal{MS}_{SI} \vDash \varphi_{Sk} \wedge \varphi_{\mathbf{c}}$, y aplicando la Proposición 8 obtenemos que $\mathbf{A} \vDash \varphi_{Sk} \wedge \varphi_{\mathbf{c}}$. ■

2.3. La Variedad de las MS-álgebras Permutables

En la Sección 1.4.3 del Capítulo I vimos que cuando una subclase AE de una variedad es cerrada bajo cocientes puede ser presentada como una varie-
dad de un lenguaje expandido. Este es el caso de la clase de las MS-álgebras permutables. El Teorema 74 nos dice que una MS-álgebra es permutable si y solo si satisface las DEFs φ_{Sk} y $\varphi_{\mathbf{c}}$. Luego, si $\mathbf{A} \in \mathcal{MS}$ es permutable podemos definir dos nuevas operaciones en $\mathbf{A}$, a saber $[\varphi_{Sk}]^{\mathbf{A}}$ y $[\varphi_{\mathbf{c}}]^{\mathbf{A}}$. Será conveniente utilizar una notación más sugestiva para estas funciones, así es que las denotaremos con $\Leftrightarrow_s$ y $\mathbf{c}$ respectivamente. Es claro que la función $\mathbf{c}$, una vez fijada su segunda entrada en un valor arbitrario y, es la operación complemento en el intervalo $[y, \overline{\overline{y}}]$, i.e.

$$\mathbf{c}(x, y) = \text{complemento de } (x \vee y) \wedge \overline{\overline{y}} \text{ en el intervalo } [y, \overline{\overline{y}}].$$

La función $\Leftrightarrow_s$ extiende a la operación $\Leftrightarrow$ de $\mathbf{Sk}(\mathbf{A})$. En efecto, por el Teorema 74 tenemos que $\mathbf{Sk}(\mathbf{A})$ es permutable, y entonces del Teorema 72 se sigue que $\Leftrightarrow$ está definida en $Sk(\mathbf{A})$. Decimos que $\Leftrightarrow_s$ es una extensión pues para $x, y \in A$ vale que

$$x \Leftrightarrow_s y = \text{mayor central } z \in \mathbf{A} \text{ tal que } \overline{\overline{x}} \wedge z = \overline{\overline{y}} \wedge z.$$

Sea $\mathcal{L}_{\mathcal{MS}_P}$ el lenguaje que resulta de agregar al lenguaje de $\mathcal{M}$ dos nuevos símbolos de función binarios: $\Leftrightarrow_s$ y $\mathbf{c}$. Definimos la siguiente clase de modelos de $\mathcal{L}_{\mathcal{MS}_P}$:

$$\mathcal{MS}_P = \{(\mathbf{A}, [\varphi_{Sk}]^{\mathbf{A}}, [\varphi_{\mathbf{c}}]^{\mathbf{A}}) : \mathbf{A} \in \mathcal{MS},\ \mathbf{A} \text{ es permutable}\}.$$

Proposición 75 *La clase $\mathcal{MS}_P$ es una variedad, axiomatizable por:*

axiomas para $\mathcal{MS}$

$x \Leftrightarrow_s y \geq \overline{\overline{x}} \wedge \overline{\overline{y}} \wedge \overline{x} \wedge \overline{y}$

$(x \Leftrightarrow_s y) \vee \overline{\overline{x}} \vee \overline{\overline{y}} \geq \overline{x} \wedge \overline{y}$

$(x \Leftrightarrow_s y) \vee \overline{x} \vee \overline{y} \geq \overline{\overline{x}} \wedge \overline{\overline{y}}$

$(x \Leftrightarrow_s y) \wedge \overline{\overline{x}} = (x \Leftrightarrow_s y) \wedge \overline{\overline{y}}$

$(x \Leftrightarrow_s y) \vee \overline{(x \Leftrightarrow_s y)} = 1$

$\mathbf{c}(x, y) \vee ((x \vee y) \wedge \overline{\overline{y}}) = \overline{\overline{y}}$

$\mathbf{c}(x, y) \wedge ((x \vee y) \wedge \overline{\overline{y}}) = y.$

Prueba. Es claro que $\mathcal{MS}_P$ satisface estas identidades. Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{MS}$ y supongamos f y g son dos operaciones binarias en A tales que $(\mathbf{A}, f, g)$ satisface los axiomas del enunciado. Es claro que $\mathbf{A} \vDash E(\varphi_{Sk}) \wedge E(\varphi_{\mathbf{c}})$. Además, como cada álgebra en $\mathcal{MS}_{SI}$ es permutable, por (3) del Teorema 74, sabemos que $\mathcal{MS}_{SI} \vDash \varphi_{Sk} \wedge \varphi_{\mathbf{c}}$. En particular $\mathcal{MS}_{SI} \vDash U(\varphi_{Sk}) \wedge U(\varphi_{\mathbf{c}})$, y esto implica que $\mathbf{A} \vDash U(\varphi_{Sk}) \wedge U(\varphi_{\mathbf{c}})$. ■

Una propiedad agradable que tiene toda variedad construida a partir de una clase AE de esta forma es que los reticulados de congruencias de las álgebras expandidas coinciden con los reticulados de congruencias originales ((3) del Lema 5). En particular esto nos dice que las álgebras subdirectamente irreducibles de la nueva variedad son exactamente las expansiones de las miembros subdirectamente irreducibles de la variedad original. I.e., en nuestro caso tenemos

$$(\mathcal{MS}_P)_{SI} = \{(\mathbf{A}, [\varphi_{Sk}]^{\mathbf{A}}, [\varphi_{\mathbf{c}}]^{\mathbf{A}}) : \mathbf{A} \in \mathcal{MS}\}.$$

Una variedad $\mathcal{V}$ es de congruencias permutables sii tiene un término de Mal'cev [16]. Es decir un término $\rho(x, y, z)$ tal que

$$\mathcal{V} \vDash \rho(x, x, y) = \rho(y, x, x) = y.$$

En nuestro próximo resultado encontramos un término de Mal'cev para la variedad $\mathcal{MS}_P$.

Proposición 76 *Definimos los términos $B(x, y, z), \rho_1(x, y, z), \rho_2(x, y, z)$ y $\rho(x, y, z)$ de la siguiente manera:*

$B = (\mathbf{c}(x, z) \wedge (y \vee z) \wedge \overline{\overline{z}}) \vee (\mathbf{c}(y, z) \wedge (x \vee z) \wedge \overline{\overline{z}})$

$\rho_1 = (B(x, y, x \wedge y \wedge z) \wedge z) \vee (B(x, z, x \wedge y \wedge z) \wedge y) \vee (B(y, z, x \wedge y \wedge z) \wedge x)$

$\rho_2 = ((\overline{x} \Leftrightarrow_s \overline{y}) \wedge z) \vee ((\overline{x} \Leftrightarrow_s \overline{z}) \wedge y) \vee ((\overline{y} \Leftrightarrow_s \overline{z}) \wedge x)$

$\rho = (\rho_1(x, y, z) \wedge (\overline{x} \Leftrightarrow_s \overline{y}) \wedge (\overline{x} \Leftrightarrow_s \overline{z})) \vee (\rho_2(x, y, z) \wedge \overline{(\overline{x} \Leftrightarrow_s \overline{y}) \wedge (\overline{x} \Leftrightarrow_s \overline{z})}).$

Entonces ρ es un término de Mal'cev para $\mathcal{MS}_P$.

Prueba. Es claro que basta con probar que ρ es un término de Mal'cev para las álgebras en $(\mathcal{MS}_P)_{SI} = \{(\mathbf{A}, \Leftrightarrow_s, \mathbf{c}) : \mathbf{A} \in \mathcal{MS}_{SI}\}$. Para todas estas álgebras

$$B(x,y,z) = \begin{cases} \overline{\overline{z}} & \text{si } (y \vee z) \wedge \overline{\overline{z}} = (x \vee z) \wedge \overline{\overline{z}} \\ z & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

ya que todos los intervalos de la forma $[z, \overline{\overline{z}}]$ tienen a lo sumo dos elementos. Además, si $\mathbf{A} \in (\mathcal{MS}_P)_{SI}$, los únicos elementos centrales en $\mathbf{A}$ son 1 y 0. Luego

$$\overline{x} \Leftrightarrow_s \overline{y} = \begin{cases} 1 & \text{si } \overline{x} = \overline{y} \\ 0 & \text{si } \overline{x} \neq \overline{y}. \end{cases}$$

Consideraremos el caso en que $x = y$. Supongamos primero que $\overline{x} \neq \overline{z}$. Como $(\overline{x} \Leftrightarrow_s \overline{z}) = 0$ sabemos que $\rho(x,y,z) = \rho_2(x,y,z) = z$. Ahora, si $\overline{x} = \overline{z}$ y $x \neq z$ tenemos

$$\begin{aligned} \rho(x,y,z) &= \rho_1(x,y,z) \\ &= (\overline{\overline{x \wedge y \wedge z}} \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z) \\ &= \overline{\overline{z}} \wedge z \\ &= z. \end{aligned}$$

Por último, si $x = y = z$ entonces

$$\begin{aligned} \rho(x,y,z) &= \rho_1(x,y,z) \\ &= (\overline{\overline{x \wedge y \wedge z}} \wedge z) \vee (\overline{\overline{x \wedge y \wedge z}} \wedge y) \vee (\overline{\overline{x \wedge y \wedge z}} \wedge x) \\ &= (\overline{\overline{z}} \wedge z) \vee (\overline{\overline{y}} \wedge y) \vee (\overline{\overline{x}} \wedge x) \\ &= z \vee y \vee x \\ &= z. \end{aligned}$$

El caso $y = z$ es análogo. ■

2.4. Sistemas de Congruencias en MS-álgebras con Esqueleto Permutable

Un *sistema de congruencias* en un álgebra $\mathbf{A}$ es una $2n$-tupla

$$(\theta_1, \ldots, \theta_n, x_1, \ldots, x_n)$$

donde $\theta_1, \ldots, \theta_n \in Con(\mathbf{A})$, $x_1, \ldots, x_n \in A$ y $(x_i, x_j) \in \theta_i \vee \theta_j$, para $1 \leq i, j \leq n$. Una *solución* del sistema $(\theta_1, \ldots, \theta_n, x_1, \ldots, x_n)$ es un elemento $x \in A$ tal que $(x, x_i) \in \theta_i$ para $i = 1, \ldots, n$.

Sea $\mathbf{A}$ una MS-álgebra, y supongamos $(\theta_1, \ldots, \theta_n; x_1, \ldots, x_n)$ es un sistema en $\mathbf{A}$ para el cual hay una solución s. Entonces, para cada $1 \leq k \leq n$, el sistema

$$(\theta_1, \ldots, \theta_n; (x_1 \vee x_k) \wedge \overline{\overline{x_k}}, \ldots, (x_n \vee x_k) \wedge \overline{\overline{x_k}})$$

tiene una solución, a saber $s_k = (s \vee x_k) \wedge \overline{\overline{x_k}})$, y el sistema

$$(\theta_1, \ldots, \theta_n; \overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})$$

tiene a $\overline{s}$ como solución. Veremos en esta sección (Teorema 78) que, cuando el esqueleto de $\mathbf{A}$ es permutable, con las soluciones de estos sistemas restringidos es posible construir una solución para el sistema original.

Ya que el esqueleto de una MS-álgebra $\mathbf{A}$ es siempre un álgebra de de Morgan, en virtud de la equivalencia (1)$\Leftrightarrow$(2) del Lema 72 tenemos que: $\mathbf{Sk}(\mathbf{A})$ es permutable sii $x \Leftrightarrow y$ existe para todo $x, y \in Sk(\mathbf{A})$, y

$$(x \Leftrightarrow 0) \vee (x \Leftrightarrow 1) \vee (x \Leftrightarrow \overline{x}) = 1, \forall x \in Sk(\mathbf{A}).$$

(Recordamos que $x \Leftrightarrow y$ es el mayor central z tal que $x \wedge z = y \wedge z$.) Es decir que en toda MS-álgebra con esqueleto permutable contamos con la operación $\Leftrightarrow$ sobre el esqueleto. Las siguientes dos propiedades de $\Leftrightarrow$ son fáciles de verificar, y serán aplicadas sin mencionarlas explícitamente:

$x \Leftrightarrow x = 1$

$x \Leftrightarrow y = \overline{x} \Leftrightarrow \overline{y}$.

Observamos además que las congruencias de una MS-álgebra con esqueleto permutable son preservadas por la operación parcial $\Leftrightarrow$. Esto es consecuencia del punto (3) del Lema 5.

El último resultado que necesitamos establecer antes de pasar al teorema principal de esta sección es la siguiente propiedad de las álgebras de Boole. (La prueba es dejada al lector.)

Lema 77 *Sea* $\mathbf{B}$ *un álgebra de Boole, y sean* $a_1, ..., a_n \in B$*. Entonces*

$$\bigvee_{U \subseteq \{1,\ldots,n\}} \left(\bigwedge_{k \in U} a_k \;\wedge \bigwedge_{k \in \{1,\ldots,n\}-U} \overline{a_k} \right) = 1$$

Teorema 78 *Sea* $\mathbf{A}$ *una MS-álgebra con esqueleto permutable. Sea* $(\theta_1, \ldots, \theta_n; x_1, \ldots, x_n)$ *una sistema de congruencias en* $\mathbf{A}$*, y supongamos que existen* $z \in Sk(\mathbf{A})$ *y* $s_1, \ldots, s_n \in A$ *tales que* z *es solución de*

$$(\theta_1, \ldots, \theta_n; \overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})$$

y s_k *es solución de*

$$(\theta_1, \ldots, \theta_n; (x_1 \vee x_k) \wedge \overline{\overline{x_k}}, \ldots, (x_n \vee x_k) \wedge \overline{\overline{x_k}}),$$

para $k = 1, \ldots, n$*. Entonces*

$$s = \bigvee_{U \subseteq \{1,\ldots,n\}} \left(\left(\bigwedge_{k \in U} \overline{x_k} \Leftrightarrow z \right) \wedge \left(\bigwedge_{k \in \{1,\ldots,n\}-U} \overline{\overline{x_k} \Leftrightarrow z} \right) \wedge \left(\bigwedge_{k \in U} s_k \right) \right)$$

es una solución de $(\theta_1, \ldots, \theta_n; x_1, \ldots, x_n)$.

Prueba. Para facilitar la lectura de esta prueba escribiremos $x \equiv_\theta y$ para denotar igualdad módulo θ.

Sea $1 \leq l \leq n$, probaremos que $(s, x_l) \in \theta_l$. Para cada $U \subseteq \{1, ..., n\}$ definimos

$$t_U = \left(\bigwedge_{k \in U} \overline{x_k} \Leftrightarrow z \right) \wedge \left(\bigwedge_{k \in \{1,\ldots,n\} - U} \overline{\overline{x_k} \Leftrightarrow z} \right) \wedge \left(\bigwedge_{k \in U} s_k \right)$$

Nótese que si $l \notin U$ tenemos

$$t_U \leq \left(\bigwedge_{k \in \{1,\ldots,n\} - U} \overline{\overline{x_k} \Leftrightarrow z} \right) \equiv_{\theta_l} \left(\bigwedge_{k \in \{1,\ldots,n\} - U} \overline{\overline{x_k} \Leftrightarrow \overline{x_l}} \right) \leq \overline{\overline{x_l} \Leftrightarrow \overline{x_l}} = 0.$$

Por otro lado si $l \in U$ debe ser que

$$\begin{aligned}
\left(\bigwedge_{k \in U} \overline{x_k} \Leftrightarrow z \right) \wedge \left(\bigwedge_{k \in U} s_k \right) & \equiv_{\theta_l} \\
& \equiv_{\theta_l} \left(\bigwedge_{k \in U} \overline{x_k} \Leftrightarrow \overline{x_l} \right) \wedge \left(\bigwedge_{k \in U} (x_l \vee x_k) \wedge \overline{\overline{x_k}} \right) \\
& = x_l \wedge \left(\bigwedge_{k \in U - \{l\}} (\overline{x_k} \Leftrightarrow \overline{x_l}) \wedge (x_l \vee x_k) \wedge \overline{\overline{x_k}} \right) \\
& = x_l \wedge \left(\bigwedge_{k \in U - \{l\}} (\overline{x_k} \Leftrightarrow \overline{x_l}) \wedge \overline{\overline{x_k}} \right) \\
& = x_l \wedge \left(\bigwedge_{k \in U - \{l\}} (\overline{\overline{x_k}} \Leftrightarrow \overline{\overline{x_l}}) \wedge \overline{\overline{x_k}} \right) \\
& = x_l \wedge \left(\bigwedge_{k \in U - \{l\}} (\overline{\overline{x_k}} \Leftrightarrow \overline{\overline{x_l}}) \wedge \overline{\overline{x_l}} \right) \\
& = x_l \wedge \left(\bigwedge_{k \in U - \{l\}} \overline{\overline{x_k}} \Leftrightarrow \overline{\overline{x_l}} \right) \\
& = x_l \wedge \left(\bigwedge_{k \in U - \{l\}} \overline{x_k} \Leftrightarrow \overline{x_l} \right)
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{cases} t_U \equiv_{\theta_l} 0 & \text{si } l \notin U \\ t_U \equiv_{\theta_l} x_l \wedge \left(\bigwedge_{k \in U - \{l\}} (\overline{x_k} \Leftrightarrow \overline{x_l}) \right) \wedge \left(\bigwedge_{k \in \{1,\ldots,n\} - U} \overline{\overline{x_k} \Leftrightarrow \overline{x_l}} \right) & \text{si } l \in U. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
s &\equiv_{\theta_l} \bigvee_{\substack{U\subseteq\{1,\ldots,n\}\\ l\in U}} x_l \wedge \left(\bigwedge_{k\in U-\{l\}} (\overline{x_k} \Leftrightarrow \overline{x_l})\right) \wedge \left(\bigwedge_{k\in\{1,\ldots,n\}-U} \overline{\overline{x_k} \Leftrightarrow \overline{x_l}}\right) \\
&= x_l \wedge \left(\bigvee_{\substack{U\subseteq\{1,\ldots,n\}\\ l\in U}} \left(\bigwedge_{k\in U-\{l\}} (\overline{x_k} \Leftrightarrow \overline{x_l})\right) \wedge \left(\bigwedge_{k\in\{1,\ldots,n\}-U} \overline{\overline{x_k} \Leftrightarrow \overline{x_l}}\right)\right) \\
&= x_l \wedge 1.
\end{aligned}$$

(En el último paso aplicamos el Lema 77.) ■

Para $\theta \in Con(\mathbf{A})$ y $S \subseteq A$ pondremos θ^S para denotar la restricción de θ a S, i.e. $\theta^S = \theta \cap (S\times S)$. Es claro que si S es un subuniverso de $\mathbf{A}$ entonces $\theta^S \in Con(\mathbf{S})$. Inclusive si S es un intervalo, y por lo tanto un subreticulado de $\mathbf{A}$, vale que $\theta^S \in Con((S,\wedge,\vee))$. Sean $a,b \in A$ tales que $a \leq b$, y sea $[a,b] = \{z \in A : a \leq z \leq b\}$. Notamos que si $(\theta_1,\ldots,\theta_n; x_1,\ldots,x_n)$ es un sistema en $\mathbf{A}$ entonces

$$(\theta_1^{[a,b]},\ldots,\theta_n^{[a,b]}; (x_1\vee a)\wedge b,\ldots,(x_n\vee a)\wedge b)$$

es un sistema en el reticulado $([a,b],\wedge,\vee)$, y

$$(\theta_1^{Sk(A)},\ldots,\theta_n^{Sk(A)}; \overline{x_1},\ldots,\overline{x_n})$$

es un sistema en el álgebra de de Morgan $\mathbf{Sk}(\mathbf{A})$. Observamos además que

$$(\theta_1,\ldots,\theta_n; (x_1\vee a)\wedge b,\ldots,(x_n\vee a)\wedge b)$$

tiene una solución en A si y solo si

$$(\theta_1^{[a,b]},\ldots,\theta_n^{[a,b]}; (x_1\vee a)\wedge b,\ldots,(x_n\vee a)\wedge b)$$

tiene una solución $[a,b]$. Análogamente, $(\theta_1,\ldots,\theta_n; \overline{x_1},\ldots,\overline{x_n})$ tiene una solución en A si y solo si

$$(\theta_1^{Sk(A)},\ldots,\theta_n^{Sk(A)}; \overline{x_1},\ldots,\overline{x_n})$$

tiene una solución en $Sk(\mathbf{A})$.

Es un hecho conocido que si un álgebra tiene congruencias distributivas y permutables, entonces todo sistema en el álgebra tiene solución. De esto obtenemos que si $\mathbf{A}$ es una MS-álgebra con esqueleto permutable, todo sistema en $\mathbf{Sk}(\mathbf{A})$ tiene solución. Luego de estas consideraciones podemos reformular el Teorema 78 de la siguiente forma:

Teorema 79 *Sea* $\mathbf{A}$ *una MS-álgebra con esqueleto permutable, y sea* $(\theta_1, \ldots, \theta_n; x_1, \ldots, x_n)$ *una sistema de congruencias en* $\mathbf{A}$. *Sea* $z \in Sk(\mathbf{A})$ *una solución de*

$$(\theta_1^{Sk(\mathbf{A})}, \ldots, \theta_n^{Sk(\mathbf{A})}; \overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}),$$

y supongamos que existen $s_k \in [x_k, \overline{\overline{x_k}}]$, $1 \leq k \leq n$, *tales que* s_k *es solución de*

$$(\theta_1^{[x_k,\overline{\overline{x_k}}]}, \ldots, \theta_n^{[x_k,\overline{\overline{x_k}}]}; (x_1 \vee x_k) \wedge \overline{\overline{x_k}}, \ldots, (x_n \vee x_k) \wedge \overline{\overline{x_k}}),$$

para $k = 1, \ldots, n$. *Entonces*

$$\bigvee_{U \subseteq \{1,\ldots,n\}} \left(\left(\bigwedge_{k \in U} \overline{x_k} \Leftrightarrow z \right) \wedge \left(\bigwedge_{k \in \{1,\ldots,n\}-U} \overline{\overline{x_k} \Leftrightarrow z} \right) \wedge \left(\bigwedge_{k \in U} s_k \right) \right)$$

es una solución de $(\theta_1, \ldots, \theta_n; x_1, \ldots, x_n)$.

Como una aplicación directa de este teorema tenemos:

Corolario 80 *Sea* $\mathbf{A}$ *una MS-álgebra con esqueleto permutable. Un sistema* $(\theta_1, \ldots, \theta_n; x_1, \ldots, x_n)$ *en* A *tiene solución si y solo si los sistemas*

$$(\theta_1^{[x_k,\overline{\overline{x_k}}]}, \ldots, \theta_n^{[x_k,\overline{\overline{x_k}}]}; (x_1 \vee x_k) \wedge \overline{\overline{x_k}}, \ldots, (x_n \vee x_k) \wedge \overline{\overline{x_k}})$$

tienen solución para $1 \leq k \leq n$.

Como veremos en el ejemplo que presentamos a continuación, no es posible remover la hipótesis de permutabilidad sobre el esqueleto en los teoremas de esta sección.

Ejemplo 81 *Sea* $\mathbf{A}$ *la MS-álgebra de la Figura 2.20. Sean* θ *y* δ *las congruencias de* $\mathbf{A}$ *definidas por las Figuras 2.21 y 2.22. El sistema* $(\theta, \delta; 1, y)$ *no tiene solución en* A. *Sin embargo es sencillo verificar que* $(\theta^{Sk(A)}, \delta^{Sk(A)}; \overline{1}, \overline{y})$ *tiene solución, y como los intervalos* $[1, \overline{\overline{1}}]$ *y* $[y, \overline{\overline{y}}]$ *tienen uno y dos elementos respectivamente, las restricciones de* $(\theta, \delta; 1, y)$ *a estos intervalos también cuentan con soluciones.*

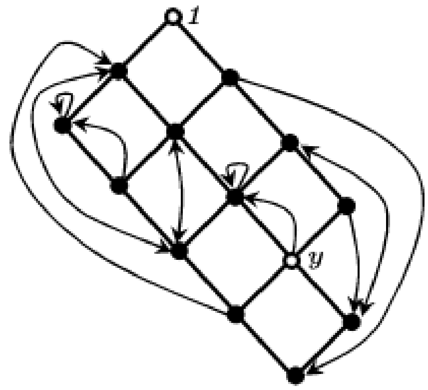


Figura 2.20: **A**

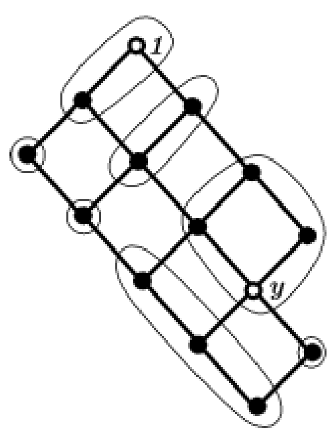


Figura 2.21: θ

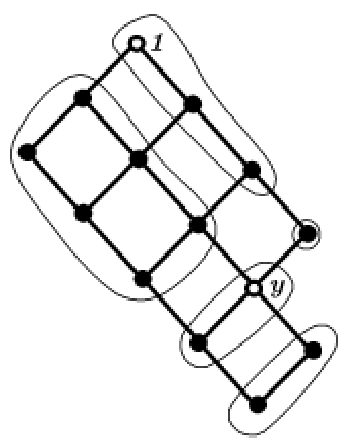


Figura 2.22: δ

BIBLIOGRAFÍA

[1] M. E. Adams and R. Beazer, *Congruence relations on de Morgan algebras*, Algebra Universalis **26** (1989), no. 1, 103–125.

[2] M. E. Adams and W. Dziobiak, *Lattices of quasivarieties of 3-element algebras*, J. Algebra **166** (1994), no. 1, 181–210.

[3] R. Balbes and P. Dwinger, *Distributive lattices*, University of Missouri Press, Columbia, Missouri, 1974.

[4] T. S. Blyth and J. C. Varlet, *Ockham algebras*, Oxford University Press, 1994.

[5] S. Burris and H. Sankapanavar, *A course in universal algebra*, Springer Verlag, New York, 1981.

[6] S. Burris and H. Werner, *Sheaf constructions and their elementary properties*, Trans. Amer. Math. Soc. **248** (1979), 269–309.

[7] C. C. Chang and J. H. Keisler, *Model Theory*, 3rd ed., North Holland Publ. Co., 1987.

[8] W. H. Cornish and P. R. Fowler, *Coproducts of Kleene algebras*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **27** (1979), 209–220.

[9] G. Epstein and A. Horn, *P-algebras, an abstraction from Post algebras*, Algebra Universalis **7** (1974), 195–206.

[10] A. L. Foster and A. F. Pixley, *Semi-categorical algebras I*, Math. Z. **92** (1964), 30–50.

[11] A.F. Foster, *An existence theorem for functionally complete universal algebras*, Math. Z. **71** (1959), 69–82.

[12] H. Gramaglia and D. J. Vaggione, *Birkhoff-like sheaf representation for varieties of lattice expansions*, Studia Logica **56** (1996), no. 1-2, 111–131.

[13] ———, *(Finitely) subdirectly irreducible and Birkhoff-like sheaf representation for certain varieties of lattice ordered structures*, Algebra Universalis **38** (1997), no. 1, 56–91.

[14] B. Jónsson, *Algebras whose congruence lattices are distributive*, Math. Scand. **21** (1967), 110–121.

[15] P. H. Krauss and D. M. Clark, *Global Subdirect Products*, Amer. Math. Soc. Mem. **210** (1979).

[16] R. N. McKenzie, G. McNulty, and W. Taylor, *Algebras, Lattices, Varieties*, vol. I, Wadsworth & Brooks/Cole, Monterey, California, 1990.

[17] L. Nachbin, *Une propriété charactéristique des algèbres Booliénnes*, Portugal. Math. **6** (1947), 115–118.

[18] D. J. Vaggione, *Sheaf representation and chinese remainder theorems*, Algebra Universalis **29** (1992), 232–272.

[19] ———, *Axiomatizabilidad por sentencias de la forma (A)(E)!&p=q*, Manuscrito, 2001.

[20] H. Volger, *Preservation theorems for limits of structures and global sections of sheaves of structures*, Math. Z. **166** (1970), 27–53.

[21] H. Werner, *Discriminator algebras, algebraic representation and model theoretic properties*, Akademie Verlag, Berlin, 1978.