

Formación y evolución de exoplanetas:

Interacciones planeta-disco y fuerzas de marea

Estudiante: Pablo Benítez Llambay

Director: Dr. Cristián Beaugé

Marzo de 2011

FORMACIÓN Y EVOLUCIÓN DE EXOPLANETAS

Interacciones planeta-disco y Fuerzas de marea

Estudiante: Pablo Benítez Llambay

Director: Dr. Cristián Beaugé

- Trabajo Especial de la Licenciatura en Astronomía -

- Facultad de Matemática, Astronomía y Física -

- Universidad Nacional de Córdoba -

Córdoba, Marzo de 2011

Resumen

En este trabajo se estudian principalmente los procesos de formación y evolución planetaria en diferentes etapas. En la etapa temprana, se estudia el proceso desde la formación del disco protoplanetario hasta la formación del embrión planetario. Se estudia la interacción planeta-disco y las consecuencias de ésta. Se estudia el concepto de trampas planetarias y su aplicación a problemas concretos. En la etapa tardía se estudian las fuerzas de marea generadas por la interacción gravitatoria planeta-estrella, y en particular se aplican estos resultados a planetas de corto período. Como aplicación se realiza un estudio de la distribución masa-período de los exoplanetas de corto período conocidos y se propone una explicación para la forma de tal distribución. Por último, se aplican los estudios realizados a un caso exoplanetario particular: CoRoT-7.

Palabras Clave: Formación planetaria, discos protoplanetarios, migración planetaria, interacción planeta-disco, interacción planeta-estrella, fuerzas tidales, fuerzas de marea, distribución masa-período, exoplanetas, dinámica resonante, simulaciones hidrodinámicas, CoRoT-7.

Clasificación:

- 96. Solar System; planetology
 - 96.10.+i General; solar nebula; cosmogony.
 - 96.12.-a Planetology of solid surface planets
 - ◇ 96.12.Bc Origin and evolution
 - 96.15.-g Planetology of fluid planets
 - ◇ 96.15.Bc Origin and evolution

Agradecimientos

En primer lugar quiero dar un agradecimiento a mis padres, por haber permitido que realice mis sueños además del apoyo brindado durante estos años.

Quiero dar un agradecimiento especial a la Fundación Retama, la cual confió en mí y me brindó gran parte de los recursos económicos para poder realizar mi carrera. Sin esta ayuda seguramente el camino hacia este trabajo hubiera sido mucho más difícil.

Un agradecimiento especial para el Dr. Adrián Rodríguez por dedicarme parte de su tiempo y por su hospitalidad incondicional y un agradecimiento especial al Dr. Sylvio Ferraz-Mello. Ambos me recibieron en el Instituto de Astronomía, Geofísica y Ciencias atmosféricas (IAG), en San Pablo, donde esclarecieron parte de mis dudas. Con ellos aprendí gran parte de la teoría tidal que aquí presento.

Por último, quiero agradecer al coautor de este trabajo, mi director Dr. Cristián Beaugé. El agradecimiento es, entre otras muchas cosas, por el entusiasmo entregado, la sabiduría compartida y por las horas de discusión y pensamiento juntos. Las palabras para agradecerle siempre van a faltar, pero quiero que quede al menos escrito que este trabajo no existiría sin él.

Muchas gracias!

Pablo Benítez Llambay, Córdoba, Marzo de 2011

Índice general

1. Introducción	9
1.1. Motivación	9
1.2. Diagramación	10
1.2.1. Parte teórica	10
1.2.2. Parte de aplicaciones	10
I. Teoría	13
2. Interacción Planeta-Disco	15
2.1. Introducción	15
2.2. Colapso de la nube primordial y formación del disco	16
2.2.1. Tiempo de caída	17
2.2.2. Dimensiones del disco	18
2.2.3. Formación del disco	18
2.3. Formación planetaria	22
2.4. Migración planetaria	24
2.5. Migración de tipo I	25
2.5.1. Cálculos analíticos	26
2.6. Migración de tipo II	29
2.7. Cavidad interna en un disco de gas	31
2.7.1. Interacción del disco con la Magnetosfera estelar	31
2.7.2. Resumen	34
3. Interacción de dos planetas y trampas planetarias	35
3.1. Evolución de dos planetas resonantes	35
3.1.1. Ecuaciones de movimiento	35
3.1.2. Evolución dentro de la Resonancia	37
3.1.3. Perturbación en forma de un torque	39
3.2. Trampas planetarias	39
3.3. Estimando el torque	40
3.3.1. Sobre $\Omega(r)$	41
3.3.2. Sobre $B(r)$	44
3.3.3. Torque total	45
3.4. Condición límite de frenado	46

Índice general

3.5. Experimentos numéricos	49
3.5.1. Figuras	51
3.6. Resumen	54
4. Fuerzas tidales	59
4.1. Preliminares históricos	59
4.2. Preliminares teóricos	60
4.2.1. Fuerza gravitatoria	60
4.3. Modelando las fuerzas tidales	62
4.3.1. Desarrollo del potencial: Armónicos esféricos	63
4.3.2. Expansión en elementos orbitales	66
4.3.3. Ondas tidales	69
4.3.4. Potencial de retardo	70
4.3.5. Fuerza de marea	72
4.3.6. Variaciones temporales	73
4.3.7. Modelo lineal	76
4.4. Simplificando el modelo	78
4.4.1. Tiempo característico de migración orbital	78
4.4.2. Tiempo característico de circularización	81
4.4.3. Migración vs Circularización	82
4.4.4. Trayectoria en el espacio (a, e)	83
4.4.5. Modelo analítico	86
4.4.6. Solución completa	87
4.5. Resumen	93
II. Aplicaciones	95
5. Diagrama Masa-Período de Exoplanetas	97
5.1. Introducción	97
5.2. El diagrama masa-período	97
5.2.1. Región 3	101
5.3. El modelo	102
5.4. Simulaciones hidrodinámicas	103
5.4.1. Motivación	103
5.4.2. Código	104
5.4.3. Generando una cavidad	104
5.5. Explicando el diagrama masa-período	111
5.5.1. Simulaciones hidrodinámicas	111
5.5.2. Simulaciones vs Realidad	111
5.6. Evolución orbital por fuerzas de marea	114
5.6.1. Una variable normalizada	114
5.6.2. Muestra sintética	115
5.6.3. Edades estelares	117

5.7. Sobre CoRoT-7b	119
5.8. Resumen	123
6. CoRoT-7b	125
6.1. Introducción	125
6.2. Posibles escenarios	127
6.2.1. Modelo 1	127
6.2.2. Modelo 2	128
6.2.3. Modelo3	128
6.3. Simulaciones hidrodinámicas	128
6.3.1. Análisis de las simulaciones hidrodinámicas	129
6.4. Simulaciones n-cuerpos	135
6.4.1. Resultados	137
6.4.2. Dispersión planetaria y solución co-orbital.	140
6.4.3. Condición inicial posible para el sistema	142
6.5. Resumen	143
7. Comentarios finales	145
7.1. Conclusiones	145
7.2. Capítulo 2	145
7.3. Capítulo 3	146
7.4. Capítulo 4	147
7.5. Capítulo 5	147
7.6. Capítulo 6	148
7.7. Comentarios finales	148
7.8. Perspectivas futuras	149

1. Introducción

1.1. Motivación

Un tema de especial relevancia en la astronomía contemporánea es el estudio de cuerpos planetarios alrededor de otras estrellas. En la literatura suele denominárselos “exoplanetas”.

Desde el descubrimiento del primer exoplaneta alrededor de una estrella, en el año 1995, quedó demostrado que las ideas actuales sobre formación y evolución necesitaban ser revisadas.

Contrariamente a lo observado en el Sistema Solar, en donde los planetas gigantes (ej: Júpiter, Saturno) se hallan en regiones externas, la mayoría de los exoplanetas descubiertos en primera instancia, se hallan en regiones demasiado internas, a tan sólo unos pocos radios estelares de distancia. Según las teorías actuales de formación, es improbable que un cuerpo de tal masa pueda ser formado tan cerca de la estrella, por lo que sería necesario algún mecanismo capaz de generar una migración.

La migración planetaria se convirtió así en un mecanismo esencial en el proceso de formación, por lo que es imposible ignorarlo. La explicación más satisfactoria hasta la fecha es aquella que propone que los planetas son formados rápidamente en las primeras etapas de la vida de la estrella, mientras ésta aún posea un disco gaseoso alrededor. Un cuerpo planetario sumergido en tal disco experimenta un torque gravitacional neto y como consecuencia un intercambio de momento angular. Se sabe que el torque neto experimentado es negativo, por lo que el cuerpo pierde momento angular y migra hacia la estrella.

Sin embargo, si bien la migración planetaria resuelve un conflicto existente explicando la posición actual de ciertos cuerpos, agrega un problema, que a la fecha no tiene una solución completamente satisfactoria. El tiempo característico de migración por intercambio de momento angular es al menos diez veces más corto que el tiempo de vida medio de los discos circumestelares, también llamados discos protoplanetarios. Según esto, debería existir algún mecanismo capaz de frenar a tales cuerpos y así evitar que sean acretados hacia la estrella central.

Por otro lado, debido a la gran proximidad de estos cuerpos a la estrella central, la influencia gravitatoria no se corresponde con el problema kepleriano. Esto es, la interacción gravitatoria no corresponde a la interacción de dos fuentes puntuales. Por lo tanto, las fuerzas de marea son de gran importancia. Se sabe que estas fuerzas causan una migración orbital de los cuerpos involucrados y una circularización de sus órbitas. El conocimiento de la marea sufrida por los cuerpos necesita información de la estructura interna de ambos cuerpos, por lo que su estudio se ve fuertemente limitado.

1. Introducción

Es así que para comprender cómo es posible la formación de muchos de los exoplanetas observados, es necesario considerar, entre muchas otras cosas, al menos los escenarios de interacción protoplaneta-disco y planeta-estrella, que es el tema al que está dirigido este trabajo.

El objetivo de este trabajo es tratar de presentar de forma sintética pero clara ambos procesos migratorios, y luego aplicarlos a un problema actual de la astronomía, el cual se trata en los capítulos 4 y 5.

1.2. Diagramación

Este trabajo está dividido en dos partes principales, por un lado una parte teórica, y por otro una parte de aplicaciones.

1.2.1. Parte teórica

La parte teórica se divide en dos capítulos, cada uno de los cuales no presenta una conexión lógica.

En el primer capítulo (capítulo 2) se discuten temas referidos a la etapa temprana, es decir, a la formación del disco protoplanetario, a la formación planetaria, a la interacción planetaria con el disco y a la interacción del disco protoplanetario con la magnetósfera estelar. Este último concepto será de importancia en el capítulo 3, cuando se estudien las denominadas “trampas planetarias”.

En el segundo capítulo (capítulo 3) se estudia la interacción planetaria entre dos planetas resonantes. Este capítulo cuenta con aportes originales en cuanto al desarrollo del cálculo del torque actuante sobre un protoplaneta poco masivo en un disco de gas isotermino bidimensional, en cuanto al cálculo del torque actuante en lo que se define como “trampa planetaria” y en la caracterización de la masa crítica para el frenado de dos cuerpos migrantes en una trampa planetaria. Este desarrollo se utilizará en los capítulos de la segunda parte (capítulos 5 y 6).

En el tercer capítulo de la parte 1 (capítulo 4) se discute la evolución orbital de los planetas en las etapas tardías de formación, es decir, las fuerzas de marea. Se presenta de forma sintética la teoría estándar y se deducen las ecuaciones básicas involucradas. Este capítulo cuenta con aportes originales en lo que a soluciones para las ecuaciones estándar se refiere. Mediante aproximaciones, se construyen las ecuaciones de movimiento para el semieje y la excentricidad de planetas (considerando excentricidad e inclinación respecto del ecuador estelar bajas) sometidos a fuerzas tidales intensas. También se estudian en detalle los tiempos involucrados en el proceso tidal. Nuevamente, estos desarrollos serán empleados en la segunda parte.

1.2.2. Parte de aplicaciones

Esta parte está formada por dos capítulos (capítulos 5 y 6), los cuales presentan una conexión ya que el capítulo 6 es una motivación del capítulo 5.

En el primer capítulo de esta parte se aplican los desarrollos de los capítulos 1,2 y 3 en un problema particular de la astronomía: “la distribución masa-período de los exoplanetas cercanos a la estrella”. Debido a inconsistencias halladas entre el modelo propuesto para explicar tal distribución y dos observaciones exoplanetarias, se agrega un último capítulo.

Así, el capítulo 6 trata sobre el estudio de un sistema exoplanetario particular: CoRoT-7, el cual, dentro del modelo propuesto, no es consistente con el resto de los exoplanetas descubiertos hasta la fecha.

Por último, el capítulo 7 está dedicado a un resumen de todo el trabajo. En él se especifican los logros y las perspectivas futuras.

Parte I.

Teoría

2. Interacción Planeta-Disco

2.1. Introducción

El estudio de la formación planetaria es una tarea de importancia relevante en astronomía y ciertamente tiene un largo camino. El paradigma actual de la formación de sistemas planetarios, el cual está basado en la idea de un disco rotante de gas y polvo alrededor de una estrella, proviene principalmente de los trabajos de Kant y Laplace, además de otros en el siglo XIX, mientras que las primeras descripciones cuantitativas de la formación de planetas terrestres provienen de los trabajos de Safronov (1967).

El origen del Sistema Solar, y en general, la formación de los sistemas planetarios en el universo es un problema fundamental de la astronomía contemporánea. Cualquier modelo sobre la formación de los sistemas planetarios debe cumplir con ciertos requisitos mínimos, los cuales son fundados en las observaciones; por ejemplo, mínimamente debe ser capaz de reproducir los movimientos orbitales observados y las distancias entre los miembros del sistema que se quiere explicar. Sin embargo, el estudio de la formación planetaria es mucho más extenso, abarcando el estudio de las abundancias químicas, las teorías de formación estelar, las interacciones gravitatorias mutuas, entre otras. Así, la tarea se vuelve muy compleja.

El primer laboratorio planetario, y de hecho, el más completo al alcance es el Sistema Solar, el cual puede arrojar pistas muy importantes en cuanto a cómo debe ser el proceso de formación. El estudio de la formación del Sistema Solar no es una tarea reciente. Desde la antigüedad se viene estudiando este asunto, si bien no siempre con el rigor científico necesario. El paradigma actual sobre la formación de nuestro Sistema Solar y en general sobre la formación planetaria comenzó a plasmarse con las ideas de los grandes pensadores Kant y Laplace en el siglo XVIII. Estos autores proponían la llamada “Hipótesis Nebular” (ver por ejemplo Armitage 2010), la cual está basada en la idea de una nube de gas primordial, la cual se condensa y forma planetas. Mediante modelos astrofísicos, por ejemplo los de Machida & Matsumoto (2010), hoy se sabe que tales discos se forman naturalmente como un subproducto de la formación estelar. Además, existe abundante bibliografía que da cuenta de la existencia de tales discos alrededor de estrellas de presecuencia principal en nuestra galaxia, por ejemplo Mamajek (2009).

Según el paradigma actual sobre formación planetaria (ver por ejemplo Lissauer 1993), se piensa que los planetas son formados a partir de la acreción de planetesimales. Además, se sabe que para formar planetas gigantes es necesario que esta acreción sea suficientemente veloz como para permitir acreción de gas una vez formados los núcleos protoplanetarios. Esto significa que los núcleos de los planetas gigantes deben formarse al menos cuando el disco de gas aún está presente alrededor de la estrella.

2. Interacción Planeta-Disco

La interacción dinámica entre un embrión planetario y el disco en el cual se forma tiene consecuencias importantes sobre la evolución de los elementos orbitales del planeta (ver por ejemplo Goldreich & Tremaine 1979). Esta interacción se produce a través de la fuerza gravitatoria ejercida entre ambos cuerpos si el cuerpo protoplanetario es suficientemente masivo, mientras que en las etapas iniciales de formación, cuando los planetesimales son suficientemente pequeños, la interacción se produce a través de fuerzas viscosas con el gas. La dinámica del sistema puede ser modelada asumiendo un disco de materia y un cuerpo puntual, sumergido dentro del disco. La interacción principal entre ambos es un intercambio de momento angular, el cual constantemente fluye de un cuerpo hacia otro. En general el torque neto ejercido sobre el protoplaneta es no nulo, lo cual genera una migración orbital (Ward 1986).

Un hecho notable es que la interacción planeta-disco ha sido estudiada ampliamente utilizando la teoría lineal, y más recientemente a través de teorías no lineales en simulaciones numéricas. En la teoría lineal de Goldreich & Tremaine (1979), el potencial planetario es desarrollado en una serie de Fourier. Para cada armónico, la respuesta del disco es determinada por una ecuación de onda lineal e inhomogénea, la cual genera resonancias a diferentes radios. El momento angular es intercambiado entre el disco y el protoplaneta principalmente en la vecindad de lo que se conoce como resonancias de Lindblad y la resonancia corrotacional. Éstos autores dieron una expresión analítica para el torque neto ejercido entre el disco y el cuerpo puntual. Una limitación importante en esta teoría es que el disco es tratado como bidimensional.

Una mejor aproximación es desarrollada en el trabajo de Tanaka et al. (2002), quienes utilizan también el modelo lineal, pero tienen en cuenta los efectos de la tercer dimensión. Estos autores obtienen la mejor cuantificación conocida hasta ahora del torque sufrido por un planeta sumergido en un disco tridimensional localmente isoterma.

2.2. Colapso de la nube primordial y formación del disco

Es sabido que la formación estelar ocurre como consecuencia del colapso de una nube de gas y que este colapso se inicia como consecuencia de una sobredensidad local. Cuando la nube no presenta rotación, el colapso ocurre con simetría esférica y no contiene aspectos de gran interés. En este caso, toda la nube se encuentra en caída libre sobre si misma, y formaría un objeto compacto esférico si existiesen colisiones o disipación entre las partículas de la nube. Sin embargo, en general, una nube de gas presenta una pequeña rotación, la cual produce efectos muy interesantes en su evolución posterior.

Según Hartmann (2009) el colapso de la nube primordial puede ser detenido principalmente por dos razones:

1. Aumento de la temperatura del gas a un punto en el que la energía térmica del mismo sea comparable con la velocidad de escape del sistema. En otras palabras, que la presión de la nube sea comparable a la gravedad. Simulaciones numéricas sugieren que esto ocurre en regiones mucho más pequeñas que la nube inicial, donde la profundidad óptica de la nube es suficientemente grande como para atrapar la

2.2. Colapso de la nube primordial y formación del disco

energía radiante liberada del material que continúa cayendo.

2. Flujo de momento angular. El momento angular del material en caída hace que la materia tienda a agruparse en regiones exteriores.

Cuando la rotación inicial es no nula, y existe algún mecanismo disipativo, el resultado luego del colapso es la formación de un disco rotante de gas. En los comienzos del colapso, la fuerza de presión puede ser despreciada (en primera aproximación) frente a la fuerza gravitatoria, por lo que el material se encuentra prácticamente en caída libre bajo la acción de la gravedad (ver Hartmann 2009 p. 65).

Por lo tanto puede suponerse, a fin de realizar una simple estimación, que el tiempo de formación del disco puede ser aproximado por el tiempo de colapso de la nube esférica sobre si misma.

2.2.1. Tiempo de caída

Según Nelson (2010), el tiempo de caída de la nube sobre si misma puede ser aproximado por el tiempo de caída libre de la siguiente forma. Una partícula depositada a un radio R_n con excentricidad $e = 1$ (órbita radial) que cae libremente puede ser interpretada como una partícula que está en órbita circular a un radio $R_n/2$. En efecto, un partícula con $e = 1$ a un radio R_n presenta una distancia apocéntrica (considerada como la condición inicial) $R_n = a(1 + e)$, lo que da un valor para el semieje $a = R_n/2$.

Aplicando la tercer ley de Kepler:

$$P = \frac{2\pi(R_n/2)^{3/2}}{\sqrt{GM}} = \frac{\pi R_n^{3/2}}{\sqrt{2GM}} \quad (2.1)$$

donde G, M son la constante de gravitación universal y la masa central respectivamente. El tiempo de caída de la partícula (hacia el centro) será $t_c = \frac{1}{2}P$, por lo tanto:

$$t_c = \frac{\pi(R_n)^{3/2}}{\sqrt{8GM}} \quad (2.2)$$

Así, para estimar el tiempo de formación es necesario conocer las dimensiones iniciales de la nube, es decir, R_n . Para una estrella de masa solar, la nube primordial tiene un tamaño del orden de 0.1 pc, por lo que el tiempo de colapso para el disco es $\sim 10^5$ años. Es así que el colapso resulta muy veloz.

En el caso de no poder ser despreciada la presión, el efecto de ésta sobre el tiempo de colapso es incrementarlo. Sin embargo, en la gran escala, cuando la nube es suficientemente fría y poco densa, la aproximación es buena.

Es interesante notar que ya que el tiempo de caída libre escala como $t_c \propto \rho^{-1/2}$, una esfera de densidad uniforme colapsará toda junta hacia el centro al mismo tiempo (siempre que la presión sea despreciada). Por lo tanto, se concluye que las capas exteriores llegan con mayor velocidad al centro que las más interiores.

2. Interacción Planeta-Disco

2.2.2. Dimensiones del disco

También es posible estimar las dimensiones del disco a partir de algunas hipótesis adicionales, las cuales son movimiento kepleriano y conservación del momento angular.

Un elemento de masa dm a un radio r del centro de rotación de la nube posee cierta cantidad de momento angular J , dada por la expresión:

$$J = dm r^2 \Omega \quad (2.3)$$

donde r y Ω son respectivamente la distancia respecto del eje de rotación y la velocidad angular de la nube.

Cuando el disco es formado, se espera que posea un perfil de velocidad kepleriano en torno a la estrella central, (es decir, que la trayectoria provenga del problema de dos cuerpos para cada partícula) por lo que si el disco tiene un radio R_d , se satisface que:

$$\Omega(R_d) = \sqrt{\frac{GM_*}{R_d^3}} \quad (2.4)$$

Con lo cual se tiene:

$$J = R_d^2 \Omega(R_d) = \sqrt{GM_* R_d} \quad (2.5)$$

Si la nube primordial tiene un radio R_n , y el momento angular se conserva, se satisface que:

$$R_n^2 \Omega_0 = \sqrt{GM_* R_d} \quad (2.6)$$

con Ω_0 la velocidad angular de la nube en $r = R_n$. Por lo tanto, el radio del disco es:

$$R_d = \frac{R_n^4 \Omega_0^2}{GM_*} \quad (2.7)$$

Con esta última expresión pueden estudiarse órdenes de magnitud para las dimensiones del disco. Si se considera una estrella de masa solar, y una nube primordial de 0.1 pc, con una velocidad angular $\Omega \sim 10^{-14} \text{ rad s}^{-1}$ (Bate 1998), el tamaño típico del disco resulta $R_d \sim 400 \text{ UA}$.

2.2.3. Formación del disco

El gran tamaño de la nube inicial implica que aunque posea una pequeña rotación, por conservación de momento angular, la materia en caída libre hacia el centro terminará en un disco, el cual será soportado por la misma rotación.

2.2. Colapso de la nube primordial y formación del disco

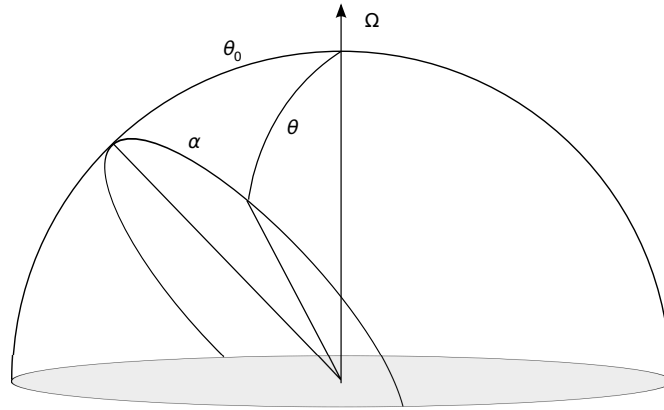


Figura 2.1.: Geometría de la órbita de un elemento de masa de la nube.

El modelo más sencillo que puede ser propuesto es aquel en el que las fuerzas de presión son despreciadas y las partículas se encuentran en caída libre sin interactuar entre ellas, tal cual es planteado por Ulrich (1976).

Por simplicidad, puede suponerse que la mayor parte de la masa se encuentra localizada en el centro de la nube, y que el gas se encuentra en caída libre hacia el centro. La solución del problema de dos cuerpos, referida al plano de movimiento formado por la trayectoria de la partícula es:

$$r = \frac{h^2/GM}{1 - \cos \alpha} \quad (2.8)$$

donde α es el ángulo de dirección de la partícula, medida desde el apastro¹ y h es el momento angular específico (por unidad de masa). Si la partícula proviene del infinito, es decir, con energía inicial nula, esta solución es una trayectoria parabólica.

Si se llama θ_0 al ángulo entre el plano orbital y el eje de rotación del sistema (ver figura 2.1), la transformación del plano orbital (r, α) al sistema (r, θ, ϕ) definido a partir de la rotación del sistema viene dada por:

$$\cos \theta = \cos \theta_0 \cos \alpha \quad (2.9)$$

$$\tan \phi = \frac{\tan \alpha}{\sin \theta_0} \quad (2.10)$$

Es sencillo demostrar que el momento angular h puede ser escrito como:

¹ α se relaciona con la anomalía verdadera f como $\alpha = f \pm \pi$.

2. Interacción Planeta-Disco

$$h = r^2 \dot{\alpha} \quad (2.11)$$

Derivando (2.8) y utilizando (2.11) se tiene que:

$$\dot{r} = \frac{GM}{h} \sin \alpha \quad (2.12)$$

Elevando al cuadrado (2.12) y utilizando (2.8) y (2.11), se tiene que la velocidad radial de la partícula es:

$$v_r^2 = \dot{r}^2 = -\frac{GM}{r} (1 + \cos \alpha) = -\frac{GM}{r} \left(1 + \frac{\cos \theta}{\cos \theta_0} \right) \quad (2.13)$$

La velocidad meridional puede ser calculada como:

$$v_\theta = r \dot{\theta} = r \frac{d\theta}{d\alpha} \dot{\alpha} = \frac{h}{r} \frac{d\theta}{d\alpha} \quad (2.14)$$

donde se ha utilizado que $\dot{\alpha} = h/r^2$. Por lo tanto:

$$v_\theta = \left(\frac{GM}{r} \right)^{1/2} (\cos \theta_0 - \cos \theta) \left(\frac{\cos \theta_0 + \cos \theta}{\cos \theta_0 \sin^2 \theta} \right)^{1/2} \quad (2.15)$$

Por último, la velocidad azimutal es:

$$v_\phi = r \sin \theta \dot{\phi} = r \sin \theta \frac{d\phi}{d\alpha} \dot{\alpha} = \frac{h}{r} \sin \theta \frac{d\phi}{d\alpha} \quad (2.16)$$

Por lo tanto:

$$v_\phi = \left(\frac{GM}{r} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{\cos \theta}{\cos \theta_0} \right)^{1/2} \frac{\sin \theta_0}{\sin \theta} \quad (2.17)$$

Es conveniente además calcular el momento angular respecto del eje de rotación de la nube:

$$H = h \sin \theta_0 \quad (2.18)$$

Por lo que la trayectoria de la partícula puede ser escrita como:

$$r = \left(\frac{H^2}{\sin^2 \theta_0} \right) \frac{1/GM}{1 - \cos \theta / \cos \theta_0} \quad (2.19)$$

2.2. Colapso de la nube primordial y formación del disco

Si se supone que la nube tiene un radio inicial r_0 y rota con una velocidad angular uniforme Ω_0 , se tiene que:

$$H = r_0^2 \Omega_0 \sin^2 \theta_0 \quad (2.20)$$

definiendo la cantidad $r_c = r_0^4 \Omega_0^2 / GM$, finalmente la trayectoria de la partícula puede ser escrita como:

$$\frac{r}{r_c} = \frac{\sin^2 \theta_0}{1 - \cos \theta / \cos \theta_0} \quad (2.21)$$

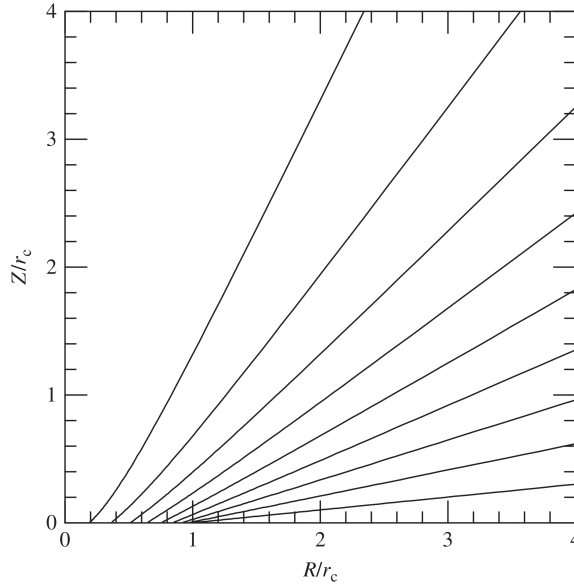


Figura 2.2.: Líneas de flujo del material que se encuentra en caída libre. Las líneas de flujo muestran intervalos iguales en $\cos \theta_0$, desde $\theta_0 = 0,1$ hasta $\theta_0 = 0,9$. Estos intervalos se corresponden con igual cantidad de masa inicial. Se observa como el material tiende a apilarse hacia el borde r_c . Figura de Hartmann (2009).

Las líneas de flujo de materia de la nube en un plano meridional pueden verse en la figura (2.2). Las partículas provenientes de latitudes altas poseen pequeño momento angular, por lo que su trayectoria es muy similar a una trayectoria radial. Las partículas provenientes de bajas latitudes tienden a apilarse cerca del borde r_c . Un hecho interesante es que todas las líneas de flujo atraviesan el plano ecuatorial dentro de $R = r_c$.

La densidad de la nube puede ser calculada asumiendo que la materia cae hacia el centro en estado estacionario. Una figura de la densidad puede verse en la figura (2.3). En ella pueden verse curvas de nivel de la densidad en un plano meridional. Se observa

2. Interacción Planeta-Disco

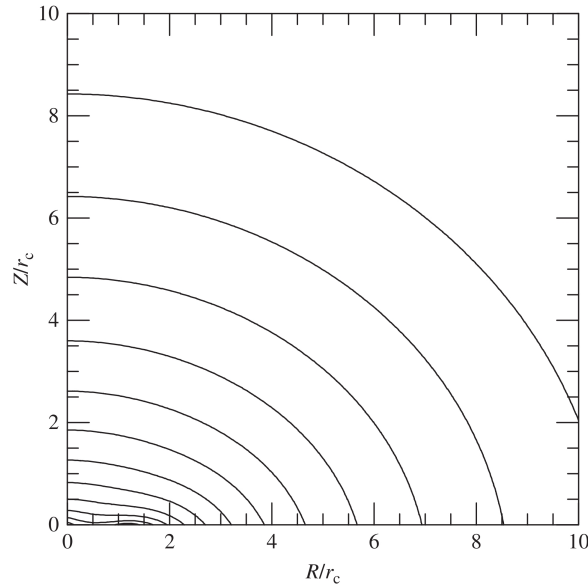


Figura 2.3.: Líneas de isodensidad para la solución de colapso rotatorio. Cada curva representa un incremento de densidad en un factor $2^{1/2}$ y crece hacia el centro. Se observa el aplanamiento de la densidad cerca del plano ecuatorial. Figura de Hartmann (2009).

que la densidad es prácticamente esférica a grandes distancias mientras que en $R < r_c$ se aplana.

Dentro de r_c la densidad se incrementa rápidamente mientras el radio decrece, y su forma funcional es $\rho \propto r^{-3/2}$ (Hartmann 2009).

La solución es completamente simétrica respecto del plano ecuatorial. Por este motivo, el material que proviene de ambos polos presenta igual velocidad en magnitud pero sus velocidades polares tienen direcciones opuestas. Esto significa que el material proveniente del hemisferio norte se encuentra con el material proveniente del hemisferio sur en el ecuador, donde se forma una región discontinua en la velocidad del gas. Esta región es una onda de choque (shock), la cual es un mecanismo de eficiente disipación. Si el gas se enfría rápidamente luego del shock, como se espera para la mayoría de las condiciones, el resultado final es la formación de un disco gaseoso alrededor del ecuador estelar.

2.3. Formación planetaria

Dos mecanismos generales han sido propuestos para explicar la formación de planetas: acreción de núcleos e inestabilidad gravitacional del gas. En el modelo de acreción de núcleos, un cuerpo sólido generado a partir de colisiones acumulativas crece hasta que adquiere un tamaño suficiente como para acretar el gas que hay alrededor de él (ver

por ejemplo Lissauer & Stevenson 2007) mientras que la inestabilidad gravitacional es un caso de fragmentación del disco. Un modelo híbrido postula que la fragmentación gravitatoria ocurre en capas densas de polvo, formando núcleos rápidamente.

Más allá de la evidencia de un núcleo en Saturno y la posibilidad de un núcleo en Júpiter, el modelo de acreción de núcleos es quizás el que más se adapte para explicar la formación planetaria. Sin embargo, presenta dos problemas importantes. Por un lado, la formación de planetesimales de tamaños del orden del km a partir de partículas del orden del cm es un proceso difícil de explicar, principalmente debido a que la gravedad entre partículas en esta etapa no es importante. Por este motivo es necesario recurrir a otro tipo de fuerzas de interacción, por ejemplo eléctricas. Por otro lado, los cuerpos con diferentes tamaños, en general presentan diferentes velocidades debido a la viscosidad del gas, por lo que colisiones entre ellos son más bien destructivas que acretoras o constructivas. Sin embargo, varios modelos de concentración de polvo podrían ayudar a reducir la velocidad relativa entre partículas y a incrementar la densidad, quizás a través de vórtices o remolinos en el disco o en otras estructuras turbulentas (Klahr & Bodenheimer 2006). Así, una vez formados los planetesimales del orden del km, las colisiones entre ellos son capaces de generar planetas terrestres y núcleos de planetas gigantes en escalas de tiempo relativamente cortas. Cuando estos cuerpos son suficientemente masivos es posible que capturen una atmósfera la cual puede tener una masa del orden de varias veces la masa del núcleo (ver por ejemplo Pollack et al. 1996).

Cuando el proceso es suficientemente rápido como para acretar algunas masas terrestres mientras el disco de gas aún está presente, entonces la acreción de gas sobre el núcleo puede ser muy eficiente y se forma así un planeta gigante gaseoso. Por otro lado, si la acreción es más lenta, o se produce en la región interior a lo que se denomina línea del hielo, entonces el resultado es un planeta pequeño rocoso (Beaugé et al. 2010).

Otra alternativa fue sugerida por Goldreich & Ward (1973). Estos autores sugirieron que los planetesimales podrían formarse por inestabilidad gravitacional. El modelo consiste en la condensación de partículas de polvo desde la nebulosa primordial. Estas partículas se depositan dentro de un disco delgado, el cual es gravitacionalmente inestable. Así, una primer generación de planetesimales, con un radio del orden de 10^{-1}cm pueden formarse a partir del disco de polvo por colapso gravitatorio en un lapso de tiempo ~ 1 año. Estas partículas aún son gravitacionalmente inestables, por lo que se agrupan en núcleos. La posterior contracción de estos núcleos se deberá al amortiguamiento del gas circundante. Luego de unos cientos de años, estos núcleos forman planetesimales del orden de los 5 Km. A partir de este punto, la acreción de núcleos se vuelve efectiva.

Sin embargo, la efectividad de este modelo está puesta en duda. Por ejemplo, Yamoto & Sekiya (2004), investigando la inestabilidad gravitacional de una capa de polvo de un disco protoplanetario no uniforme en densidad hallaron restricciones para la formación de planetesimales por este efecto. Otro problema es la turbulencia en el plano del disco, la cual puede inhibir la aglomeración de material. Esta turbulencia puede mezclar el polvo con el gas, evitando así la formación de una capa densa como para que la inestabilidad gravitacional ocurra (Michikoshi et al. 2010; Weidenschilling 1980).

Otro mecanismo propone la formación de planetas gigantes por inestabilidad gravita-

2. Interacción Planeta-Disco

cional del disco de gas (Boss 1997). Según este modelo, el disco se fragmentaría directamente en un planeta gigante. La principal ventaja de este modelo es la velocidad con la que puede producirse, por lo que permite la formación de los planetas en escalas de tiempo muy cortas ($\sim 10^6$ años). Los problemas presentes en este modelo son que la fragmentación del disco depende de forma muy sensible de las propiedades de enfriamiento del disco. Por otro lado, los fragmentos obtenidos en simulaciones numéricas son más masivos que los planetas gigantes conocidos.

2.4. Migración planetaria

El período orbital extremadamente corto de 51 Pegasi (Mayor & Queloz 1995) y de otros planetas masivos cercanos a la estrella central (Júpiteres calientes) plantean un problema para las teorías de formación planetaria, no sólo porque tales sistemas son poco parecidos al Sistema Solar, sino más bien porque las altas temperaturas en los discos protoplanetarios en radios cercanos a la estrella impiden la formación in situ de estos cuerpos.

Modelos de discos de Bell et al. (1997) muestran que para una estrella T tauri típica con una tasa de acreción de $\dot{M} \sim 10^{-8} M_{\odot}/\text{año}$, la temperatura interior a 0.1 UA excede los 1000 K, lo cual destruye hielos e incluso el polvo. Por lo tanto, al menos los núcleos de estos planetas calientes deben haber sido formados en otros lugares, y luego haber migrado hacia adentro.

Una posible respuesta puede provenir de la interacción entre embriones planetarios y el disco de gas. Torques gravitacionales entre un planeta y el disco protoplanetario dan como resultado una migración orbital del planeta y modifican la estructura de la densidad del disco. Es muy probable que este tipo de migración orbital juegue un rol muy importante en la formación y evolución posterior de sistemas planetarios. De hecho, quizás la mejor prueba de que la migración orbital existe en las etapas tempranas sea el descubrimiento de cuerpos planetarios tan cercanos a su estrella.

En la actualidad son conocidos tres mecanismos principales para producir una migración planetaria en las etapas primordiales, que comúnmente son llamados migración de tipo I, II, y III y todas deben su origen a interacciones gravitacionales mutuas entre el embrión planetario y el disco de gas.

La migración orbital implica una pérdida de momento angular del protoplaneta, el cual por las leyes de conservación debe ser depositado sobre el gas. El planeta perturba al gas y el momento angular se intercambia en regiones donde existen resonancias entre el movimiento orbital del disco y el movimiento orbital planetario. Para una cantidad pequeña de perturbadores poco masivos, las interacciones generan una onda de densidad, la cual forma una espiral en el gas y no es lo suficientemente intensa como para perturbar significativamente la densidad superficial promediada azimutalmente. Así, la tasa de migración es controlada por la suma de los torques ejercidos desde las resonancias internas y externas, conocidas como resonancias de Lindblad y las resonancias corrotacionales, que en general son no nulos. La onda exterior que se forma se lleva momento angular del cuerpo, mientras que la onda interior añade momento angular sobre éste. Como resultado

de este intercambio de momento angular, el planeta migra hacia la estrella (Ward 1997) y la escala de tiempo migratoria es extremadamente corta para masas del orden de 10 masas terrestres. Esto es un problema importante para el modelo de acreción de núcleos para formar planetas gigantes como Júpiter. Una posible solución a este problema es la presencia de núcleos significativamente menores que $10M_{Tierra}$, los cuales tendrían una rápida acreción de gas y formarían planetas gigantes antes de caer a la estrella. Otra forma de esquivar el problema sería la reducción de la migración de tipo I por interacciones con un disco turbulento, lo que daría como resultado una migración de camino aleatorio (random-walk) (Nelson & Papaloizou 2004). Sin embargo, la migración en un disco laminar es sólo dirigida por la asimetría existente entre el torque interior y el torque exterior. Este tipo de migración se conoce como Migración de tipo I y es muy bien entendida. Los cálculos numéricos y analíticos en este caso concuerdan, lo cual es un hecho notable dada la complejidad del problema.

Cuando la masa del protoplaneta es suficientemente grande (\sim Júpiter), la perturbación es tan importante que es capaz de repeler el gas de una región anular alrededor de la órbita planetaria. Así, se forma un vaciamiento del disco (gap) en el cual la densidad se ve reducida notablemente respecto de las regiones circundantes. Para planetas con una masa igual o mayor a la masa de Júpiter, el gap llega incluso a evacuarse completamente. La localización de los bordes (interior y exterior) del gap se determina a partir del balance entre el momento angular intercambiado por el planeta (el cual tiende a abrir el gap) y la viscosidad del disco protoplanetario (la cual tiende a cerrar el gap). En la mayoría de las circunstancias este balance actúa bloqueando al planeta, el cual migra en una escala de tiempo igual al tiempo viscoso del disco. Esto es conocido como migración de tipo II, la cual depende fundamentalmente de la eficiencia del transporte del momento angular en el disco. La existencia de numerosos planetas masivos cercanos a su estrella demuestra que la migración de tipo II juega un rol importante en las etapas primordiales.

La migración de tipo III involucra torques producidos por el material que fluye a través del radio coorbital. Ya que la estructura del disco y el flujo de material es complicado en esta región, existe incertidumbre sobre el comportamiento. La migración puede ser hacia adentro o hacia afuera y muy rápida. Es sabido que no es importante en discos poco masivos, por lo que será descartada del resto del trabajo.

2.5. Migración de tipo I

En la migración de tipo I, la perturbación inducida por el planeta sobre el disco de gas es pequeña, y el torque neto sufrido por el planeta tiene una pequeña dependencia con la microescala del disco. En particular, la viscosidad (el parámetro menos conocido en los modelos de discos protoplanetarios) actúa sólo indirectamente a través de su influencia en la magnitud del gradiente radial de densidad y de la velocidad del sonido. Generalmente, el torque neto es proporcional a la masa planetaria al cuadrado, por lo que la escala de tiempo de la migración es inversamente proporcional a la masa, $\tau \propto M_p^{-1}$. Por lo tanto, la migración de tipo I crece y se torna más importante mientras más masivo es el cuerpo, alcanzando el valor máximo justo en un valor anterior a la apertura del gap descrito en

2. Interacción Planeta-Disco

la sección anterior.

Lo interesante de este tipo de migración es que si se acepta el modelo de acreción de núcleos, siempre está presente en los protoplanetas o embriones planetarios, por lo que el estudio de las escalas de tiempo de este proceso es crucial para comprender la formación de sistemas planetarios.

Afortunadamente, como las perturbaciones son pequeñas (por definición de migración de tipo I), la linealización de las ecuaciones provee resultados analíticos que concuerdan muy bien con las simulaciones numéricas no lineales.

2.5.1. Cálculos analíticos

El cálculo más simple del torque ejercido en la migración de tipo I es debido a Goldreich & Tremaine (1979), quienes desprecian los efectos de la presión del disco cercano al planeta, y por lo tanto, dicho cálculo es válido para órdenes de resonancias bajos.

El intercambio neto de momento angular ocurre en lugares muy particulares del disco, los cuales se localizan en las llamadas resonancias de Lindblad.

En esta aproximación, las resonancias de Lindblad ocurren en un radio en el cual la frecuencia de epiciclo κ es un múltiplo entero de la velocidad angular en un marco de referencia en el cual el planeta tiene una velocidad angular Ω_p :

$$D(r) = \kappa^2 - m^2 (\Omega - \Omega_p)^2 = 0 \quad (2.22)$$

donde m es la masa planetaria y $\Omega = \Omega(r)$ es la velocidad angular del disco.

Para un disco kepleriano se satisface $\kappa = \Omega$, por lo que las resonancias se encuentran a un radio:

$$r_L = \left(1 \pm \frac{1}{m}\right)^{2/3} r_p \quad (2.23)$$

donde r_p es el radio orbital planetario. El menor orden resonante ocurre en $r = 1,587r_p$ y en $r = 0,630r_p$.

Las resonancias con $r < r_p$ añaden momento angular al planeta, mientras que las de $r > r_p$ le quitan momento angular. El torque ejercido T_m en cada resonancia puede ser computado en términos de una función de fuerza ψ_m (Masset 2007):

$$T_m = -\pi^2 m \Sigma \frac{\psi_m^2}{r dD/dr} \quad (2.24)$$

donde Σ es la densidad superficial del disco y la forma explícita de ψ_m puede ser hallada en Goldreich & Tremaine (1979). Luego, el torque neto se obtiene sumando el torque ejercido en cada resonancia. En este régimen, el comportamiento del gas cercano al planeta, donde ψ_m es importante, es crítico.

Para las resonancias de Lindblad, el resultado es que el torque dominante es ejercido por números de onda $m \simeq r_p/h$, donde h es la escala vertical del disco, la cual viene dada

2.5. Migración de tipo I

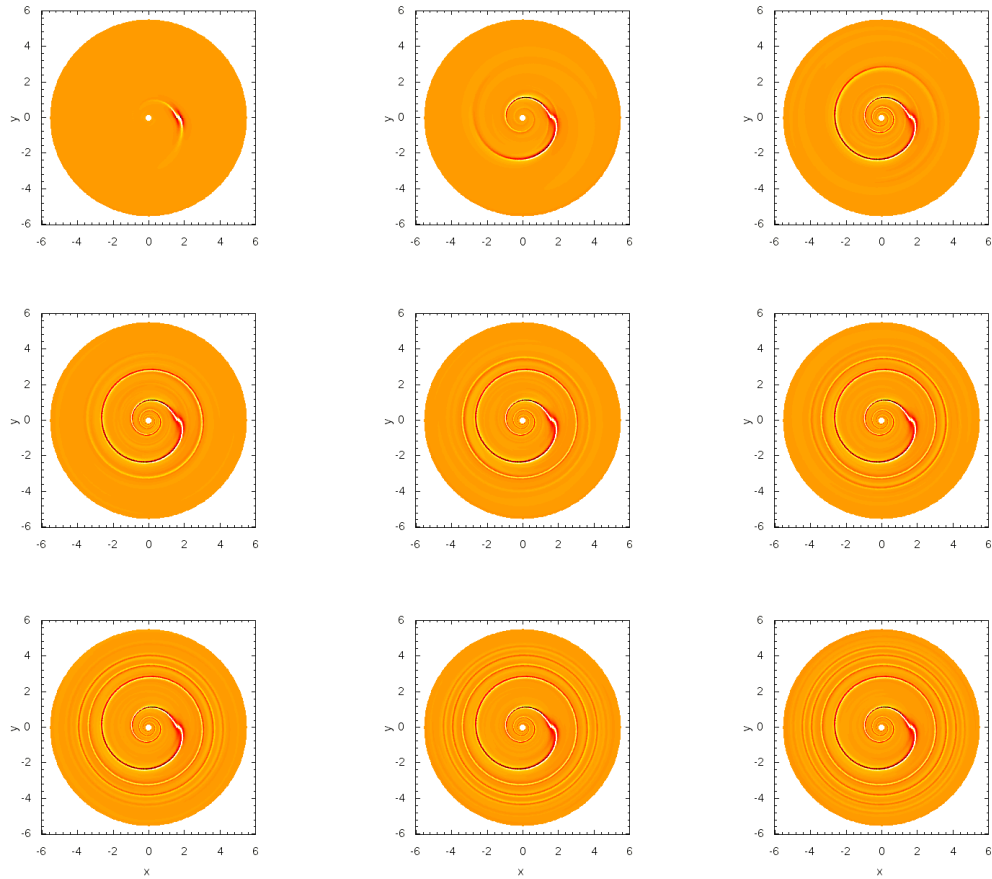


Figura 2.4.: Onda de densidad generada por un cuerpo telúrico sumergido en un disco gaseoso. La evolución es de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo. La simulación fue realizada con el código FARGO. La relación de aspecto h del disco es 0.03. Cuando la masa del planeta es incrementada, la perturbación aumenta. Un ejemplo de una gran perturbación puede verse en la figura 2.5.

como una relación entre la velocidad del sonido c_s y la frecuencia planetaria, dada por $h = c_s / \Omega_p$. Ward (1997) demostró que una rápida migración ocurre en este régimen para cualquier modelo de disco protoplanetario en el cual la velocidad del sonido decrece con el radio. Es interesante notar que el trabajo de Ward (1997) considera los efectos de la presión. El torque corrotacional (en general una cantidad positiva), el cual es nulo para discos con densidad superficial $\Sigma \propto r^{-3/2}$, puede alterar la magnitud del torque, pero en general no es lo suficientemente potente como para cambiar el sentido de la migración.

La observación de que la contribución al torque total que sufre el planeta por parte del gas proviene de regiones cercanas al planeta, implica que simulaciones bidimensionales del disco son en general inadecuadas, incluso para discos delgados. Es así que efectos físicos nuevos pueden entrar en juego al considerar la tercer dimensión.

2. Interacción Planeta-Disco

Tanaka et al. (2002) calcularon la interacción entre un planeta y un disco tridimensional isoterma verticalmente. Estos autores tuvieron en cuenta el torque corrotacional y el torque diferencial de Lindblad. Encontraron que el torque total se ve reducido en un factor 2-3 respecto del modelo bidimensional, sin embargo, la migración continúa siendo demasiado rápida como para explicar la formación planetaria según el modelo de acreción de núcleos. Definiendo el tiempo migratorio como:

$$\tau = \frac{r_p}{-\dot{r}_p} \quad (2.25)$$

Tanaka et al. (2002) obtuvieron que, para un disco con perfil de densidad $\Sigma \propto r^{-\beta}$:

$$\tau = (2,7 + 1,1\beta)^{-1} \frac{M_*}{M_p} \frac{M_*}{\Sigma r_p^2} \left(\frac{c_s}{r_p \Omega_p} \right)^2 \Omega_p^{-1} \quad (2.26)$$

lo cual escala inversamente proporcional a la masa planetaria y a la densidad local. Como el término entre paréntesis es la escala de altura, el tiempo decrece rápidamente para discos delgados. Aunque en estos cálculos la hipótesis isoterma es muy fuerte, la expresión anterior es conocida como la estimación estándar para el ritmo de decaimiento para migración de tipo I.

Un hecho interesante de remarcar es que la ecuación (2.24) es independiente del proceso físico que transporte el momento angular desde las resonancias. Por hipótesis, debe haber materia en aquella región. En el caso particular donde el momento angular es transportado a través de ondas de presión, la relación de dispersión para las perturbaciones sobre el disco es (ver por ejemplo Masset 2007):

$$\omega^2 = \kappa^2 + c_s^2 k^2 \quad (2.27)$$

con \mathbf{k} el vector de onda de la perturbación. De esta relación se deduce que no pueden existir tales ondas en una banda centrada en el radio corrotacional, por lo que ondas de presión no son capaces de remover momento angular de las regiones corrotacionales.

El momento angular intercambiado en la resonancia corrotacional es un proceso muy diferente a lo que ocurre con las resonancias de Lindblad, ya que las ondas de presión que podría evacuar el momento angular de la región corrotacional son evanescentes.

El proceso físico por el cual se intercambia momento angular en esta región es el movimiento del fluido a lo largo de islas de libración. Tantas islas como número de onda de la perturbación.

La escala de tiempo de la libración es mucho mayor que el tiempo orbital. Como consecuencia, el elemento de fluido librante puede ser pensado en movimiento circular (en un sistema no rotante) en escalas de tiempo orbital. Por lo tanto, estos elementos librantes transportan cierta cantidad de momento angular ya que poseen un desplazamiento radial en escalas grandes de tiempo. Ya que estos elementos de fluido van y vienen de un radio a otro (islas de libración), el transporte neto de momento angular tiene media cero en

escalas de tiempo grandes frente al tiempo de libración. Ya que el período de libración depende de la isla en cuestión, es esperable una diferencia de fase entre muchos elementos del fluido, por lo que el torque corrotacional debería tender a cero no solo en valor medio sino también instantáneamente. Esto es conocido como la saturación del torque corrotacional. La viscosidad puede extraer momento angular de las islas de libración y prevenir de ese modo la saturación. Esto es posible si la escala de tiempo viscosa de una isla es menor que la escala de tiempo de la libración (Ogilvie & Lubow 2003). Mucha más información puede ser hallada en Masset (2007).

2.6. Migración de tipo II

Para masas planetarias lo suficientemente grandes, el flujo de momento angular desde el planeta domina el flujo viscoso. Como consecuencia, el gas es expulsado de las resonancias de más alto orden, por lo que la densidad sufre un vaciamiento en las regiones próximas a r_c , formándose así un gap.

Dos condiciones son necesarias para la formación del gap (ver por ejemplo Armitage 2010). Por un lado es necesario que el radio de Hill r_H del planeta sea comparable al espesor del disco:

$$r_H = \left(\frac{q}{3}\right) r > h \longrightarrow q > 3 \left(\frac{h}{r}\right)^3 \quad (2.28)$$

con $q = M_p/M_*$

Esta condición es satisfecha para masas del orden Saturno o Júpiter en discos protoplanetarios usuales. Es decir, $q \sim 4 \times 10^{-4}$.

Una segunda condición para la formación del gap es que el torque ejercido por el planeta para remover el gas sea mayor que el torque ejercido por la viscosidad, el cual tiende a cerrar el gap.

Por un lado, el tiempo característico de cerrado del gap es:

$$t_c = \frac{(\Delta r)^2}{\nu} \quad (2.29)$$

mientras que el tiempo de apertura es:

$$t_a = \frac{1}{m^2 q^2 \Omega_p} \left(\frac{\Delta r}{r_c}\right)^2 \quad (2.30)$$

Utilizando que $\nu = \alpha c_s h$ (Shakura & Sunyaev 1973) y $m = r_c \Omega_c / c_s$ e igualando ambas expresiones, se tiene:

$$q > \left(\frac{c_s}{r_c \Omega_c}\right)^2 \alpha^{1/2} \quad (2.31)$$

2. Interacción Planeta-Disco

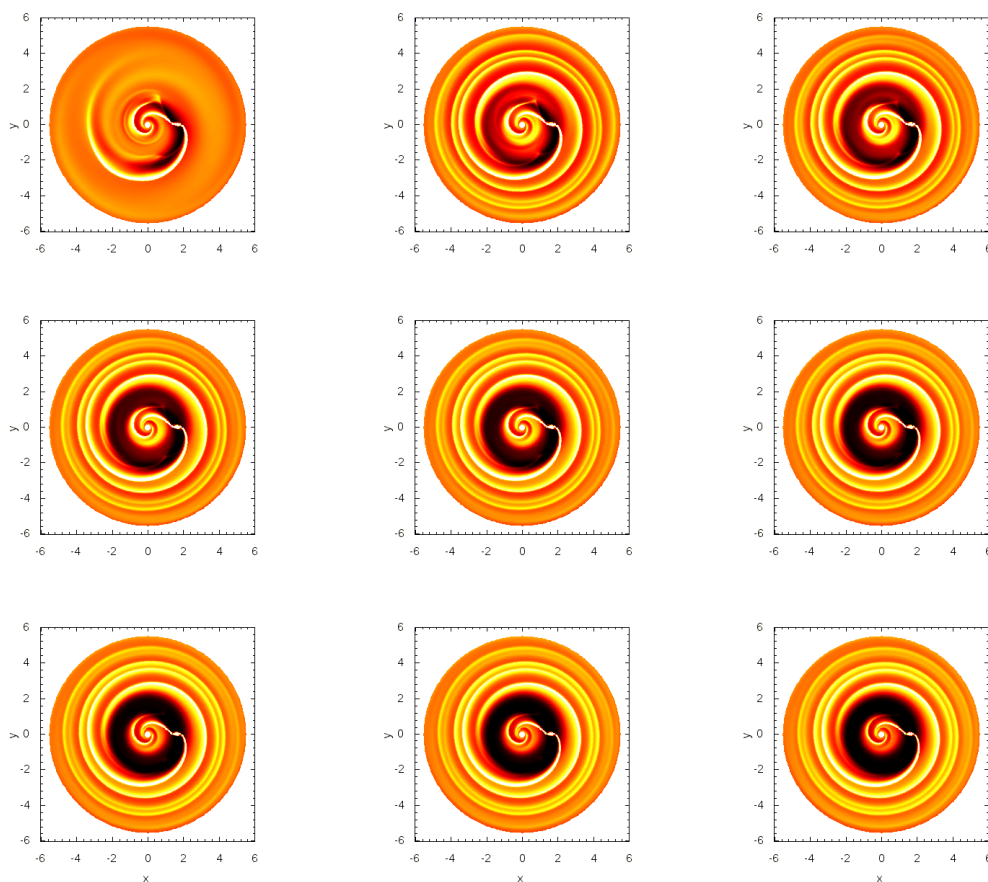


Figura 2.5.: Formación de un gap en un disco de gas. La evolución es de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo. Simulación realizada con el código FARGO. La relación de aspecto h del disco es 0.05. La masa planetaria es 3 veces la masa de Júpiter.

Para parámetros de disco $h/r \sim 0,05$, $\alpha \sim 10^{-2}$, la condición para la apertura del gap es $q \sim 10^{-4}$.

Combinando ambos requisitos, concluimos que un planeta con la masa de Júpiter abre un gap, mientras que un planeta como Saturno se halla en el límite.

Una vez abierto el gap, las resonancias de Lindblad se hallan en regiones donde no existe materia y lo mismo ocurre con la resonancia coorbital, por lo que no puede haber un intercambio de momento angular a través de ellas. Por lo tanto se espera que el planeta migre junto con el disco, a una velocidad dada por la solución de acreción radial, la cual es más lenta que la velocidad dada por la migración de tipo I.

La tasa de migración viscosa es:

$$\frac{dr}{dt} \sim -\frac{v}{r} \quad (2.32)$$

por lo que el tiempo migratorio será:

$$\tau_{mig} \sim \frac{r^2}{\nu} \quad (2.33)$$

Si se considera $M_p \sim M_J$, $h = 0,04$, $\alpha = 6 \times 10^{-3}$, y una condición inicial a 5 UA, la migración ocurre en un tiempo $\tau \sim 1,6 \times 10^5$ años, lo cual es mas lento que la migración de tipo I.

2.7. Cavidad interna en un disco de gas

En esta sección se considerará la formación de una cavidad en un disco de gas debido a interacciones con la estrella central. Es importante entender qué parámetros entran en juego para poder estimar de alguna forma el tamaño de la cavidad en estrellas diferentes. Esta sección se coloca como una justificación de las condiciones de contorno empleadas en los problemas que serán resueltos en los próximos capítulos.

Se seguirá el desarrollo realizado por Nelson (2010) en el cual se plantea la formación de una cavidad sólo por interacción del disco con la magnetósfera estelar.

2.7.1. Interacción del disco con la Magnetosfera estelar

Supongamos que la estrella central tiene un campo magnético. Además supongamos que la estrella central gira con una frecuencia angular ω y que las líneas de campo están forzadas a girar con la misma velocidad (congelamiento). El campo interactúa con el disco, y el resultado de esta interacción es un torque neto sobre las partículas del disco, el cual las aleja de la región central. Por esta razón las zonas cercanas a la estrella deben ser mucho menos densas. Supongamos que la estrella inicialmente es un dipolo axisimétrico. Si $\omega > \Omega(r)$, con Ω la velocidad angular del disco, entonces el campo magnético poloidal es convertido en toroidal, por lo tanto una componente azimutal de campo es generada (B_ϕ). Veamos como estimar el torque:

La fuerza magnética por unidad de volumen que actúa sobre el disco es:

$$\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (2.34)$$

Donde \mathbf{F} es la fuerza, \mathbf{J} es la corriente y $\times \mathbf{B}$ es el campo magnético.

Para calcular el torque, es necesario conocer F_ϕ . En coordenadas cilíndricas, la componente de $(\mathbf{J} \times \mathbf{B})_\phi$ es:

$$F_\phi = J_z B_R - J_R B_Z \quad (2.35)$$

Por la ley de Ampere:

$$\mu_0 J_R = \frac{1}{R} \frac{\partial B_z}{\partial \phi} - \frac{\partial B_\phi}{\partial z} \quad (2.36)$$

2. Interacción Planeta-Disco

$$\mu_0 J_z = \frac{1}{R} \frac{\partial(RB_\phi)}{\partial R} - \frac{1}{R} \frac{\partial B_R}{\partial \phi} \quad (2.37)$$

Asumiendo que el campo es axisimétrico:

$$F_\phi = \frac{B_R}{\mu_0 R} \frac{\partial(RB_\phi)}{\partial R} + \frac{B_z}{\mu_0} \frac{\partial B_\phi}{\partial z} \quad (2.38)$$

por lo tanto el torque por unidad de volumen es:

$$\tau = R(J \times B)_\phi = \frac{B_R}{\mu_0} \frac{\partial(RB_\phi)}{\partial R} + \frac{RB_z}{\mu_0} \frac{\partial B_\phi}{\partial z} \quad (2.39)$$

Para un disco delgado se tiene que $B_R \ll B_\phi, B_z$, por lo que en primera aproximación se puede despreciar el primer término de la ecuación anterior. Para obtener el torque total, es necesario integrar sobre todo el volumen del disco.

Si L es el momento angular total del disco, entonces \dot{L} vendrá dado por la integral del torque:

$$\dot{L} = \int_{-H}^H \int_{R_{min}}^{\infty} \tau \, 2\pi R \, dR dz = \int_{-H}^H \int_{R_{min}}^{\infty} \frac{RB_z}{\mu_0} \frac{\partial B_\phi}{\partial z} \, 2\pi R \, dR dz \quad (2.40)$$

Además, puede suponerse que el campo en z es constante sobre el disco, ya que éste es muy delgado. Por integración directa se tiene:

$$\dot{L} = 4\pi \int_{R_{min}}^{\infty} \frac{B_z B_\phi}{\mu_0} R^2 \, dR \quad (2.41)$$

Para realizar una simple estimación (órdenes de magnitud), puede suponerse que $B_\phi \simeq B_z$ y que el campo es dipolar, es decir: $B_z(R) = B_z(R_*) \left(\frac{R_*}{R}\right)^3$, donde R_* es el radio de la estrella central. La tasa de cambio del momento angular es entonces:

$$\dot{L} = \frac{4\pi}{3} \frac{B_z^2(R_*)}{\mu_0} \frac{R_*^6}{R^3} \quad (2.42)$$

La acreción de la masa contenida en lo que será la cavidad interna se producirá cuando exista un desbalance entre el torque viscoso y el torque magnético (el torque viscoso es una cantidad negativa mientras que el magnético es una cantidad positiva). En particular, el borde de la cavidad vendrá dado por el equilibrio entre ambos torques. El torque viscoso puede escribirse como:

2.7. Cavidad interna en un disco de gas

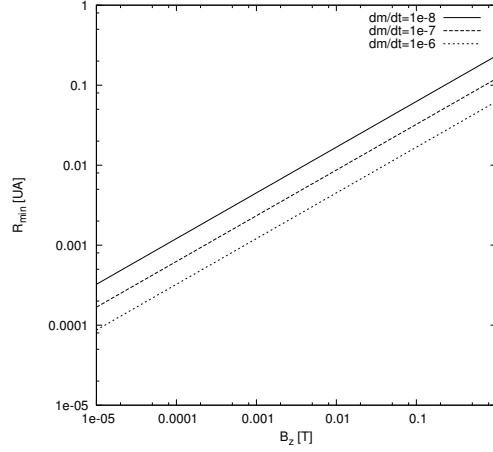


Figura 2.6.: Curvas dadas por (2.46), las cuales localizan el radio de la cavidad R_{min} en un disco gaseoso para diferentes valores de acreción. La masa y el radio estelares son iguales a los solares.

$$\dot{L} = -2\pi R^3 \nu \Sigma \frac{d\Omega}{dR} \quad (2.43)$$

donde ν es el coeficiente de viscosidad, Σ es la densidad superficial del disco y Ω es la velocidad angular del disco. Para el borde de la cavidad entonces debe satisfacerse la relación:

$$-\left(2\pi R^3 \nu \Sigma \frac{d\Omega}{dR}\right)_{R_{min}} = \frac{4\pi B_z^2(R_*)}{3} \frac{R_*^6}{\mu_0 R_{min}^3} \quad (2.44)$$

donde R_{min} es el lugar de equilibrio del torque. Este sitio será el lugar en donde termine el vacío central.

Utilizando que el disco tiene movimiento circular (ie: $\Omega(R) = \sqrt{GM_*/R}$) y que la tasa de acreción de materia está relacionada con la viscosidad a través de la relación $\dot{m} \simeq 3\pi\nu\Sigma$, se tiene que:

$$\frac{R_{min}}{R_*} = \left(\frac{4\pi B_z^2(R_*) R_*^{5/2}}{3\sqrt{GM_*} \dot{m} \mu_0} \right)^{2/7} \quad (2.45)$$

que puede reescribirse en término de constantes físicas como:

$$\frac{R_{min}}{R_*} = 50 \left(\frac{B_z(R_*)}{1 \text{ Tesla}} \right)^{4/7} \left(\frac{R_*}{R_\odot} \right)^{5/7} \left(\frac{\dot{m}}{10^{-8} M_\odot \text{ yr}^{-1}} \right)^{-2/7} \left(\frac{M_*}{M_\odot} \right) \quad (2.46)$$

2. Interacción Planeta-Disco

Esta expresión permite estimar el semieje en el cual debe encontrarse la cavidad interna en un disco protoplanetario, y por lo tanto, como se verá en el siguiente capítulo, el lugar en donde puede encontrarse la trampa planetaria.

La utilización de esta expresión para obtener resultados no es sencilla. La mayor dificultad radica en la incertidumbre en cuanto al valor de los campos magnéticos estelares en estrellas de presecuencia principal. Campos magnéticos que difieren solo en un orden de magnitud escalan de forma considerable el problema. Esto puede verse en la figura 2.6).

En el capítulo 5 se verá que las cavidades alrededor de otras estrellas de tipo solar tienen un valor mínimo compatible con $\sim 0,03$ UA, por lo que esto arroja un valor posible para los parámetros estelares involucrados. Asumiendo una tasa de acreción de $10^{-8}M_{\odot}/\text{año}$, los campos magnéticos en estrellas de presecuencia principal deberían ser del orden $\sim 10^{-2}, 10^{-1}$ T, lo cual está en buen acuerdo con las observaciones (Machida et al. 2007). No debe olvidarse que este valor proviene de una sencilla estimación indirecta utilizando un modelo muy simplificado de interacción con la magnetósfera estelar y de observaciones exoplanetarias.

2.7.2. Resumen

En este capítulo se presentó de forma muy breve el paradigma actual sobre formación planetaria, explicando cuales son las principales ideas referidas a la formación de planetas a partir de una nebulosa primordial. Por otro lado, se presentaron los problemas fundamentales en cada modelo. Se dieron las ideas elementales que permiten comprender la formación de un disco gaseoso a partir de la nube de gas inicial y se estudió el tiempo característico en el cual ocurre este proceso. También se estimó el tamaño inicial de esta estructura. Se dieron a conocer los principales problemas referidos a las ideas actuales sobre formación planetaria y se estudió una posible solución al problema referido a la migración planetaria. Se presentaron de forma sintética los tipos de migración en las etapas primitivas de formación. También se explicó brevemente un mecanismo que genera un vaciamiento en la región central del disco, aspecto que será de importancia en el siguiente capítulo cuando se estudien las trampas planetarias. Por otro lado, es interesante notar que el conocimiento de la estructura de estas cavidades puede resultar de importancia para la determinación de los parámetros estelares en estrellas de presecuencia principal.

3. Interacción de dos planetas y trampas planetarias

En el capítulo 6 se estudiará el caso de dos cuerpos migratorios, por lo que será necesario estudiar la dinámica de dos cuerpos migrantes los cuales interactúan entre si.

3.1. Evolución de dos planetas resonantes

En particular, se estudiará la evolución de dos cuerpos planetarios resonantes, ya que será el caso de interés en las secciones siguientes. Se seguirá el desarrollo de Gomes (1998).

3.1.1. Ecuaciones de movimiento

Si se considera el problema de tres cuerpos plano, en el cual hay una masa primaria m y dos masas secundarias m_1 y m_2 , las cuales se perturban mutuamente y orbitan de forma coplanar, el conjunto de variables canónicas adecuadas para su estudio es $(L, G - L, \lambda, \varpi)$, donde $L = (\mu a)^{1/2}$ y $G = L(1 - e^2)^{1/2}$, con a el semieje, e la excentricidad, λ la longitud media, ϖ la longitud del periastro y $\mu \simeq \gamma m$, con γ la constante de gravitación universal. Se supondrá que m_1 es el cuerpo interior.

Las ecuaciones que deben satisfacer las masas m_i son:

$$\begin{aligned} \dot{L}_j &= \frac{\partial R_j}{\partial \lambda_j} \\ \dot{G}_j - \dot{L}_j &= \frac{\partial R_j}{\partial \varpi_j} \end{aligned} \quad (3.1)$$

con $j = 1, 2$. R_j es la función perturbadora correspondiente al cuerpo i -ésimo, la cual viene dada por la expresión:

$$R_i = Gm_j \left(\frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} - \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{r_j^3} \right) \quad (3.2)$$

con $j \neq i$. Puede verse que hay dos términos, el primero comunmente llamado término directo $R^{(d)}$, y el segundo, llamado término indirecto $R^{(I)}$.

La expansión en serie de Fourier de la perturbación es:

3. Interacción de dos planetas y trampas planetarias

$$R_j = \sum_i C_i^j(a_1, e_1, a_2, e_2) \cos \phi_i \quad (3.3)$$

con ϕ dado por:

$$\phi_i = p_i \lambda_1 - q_i \lambda_2 - k_{1,i} \omega_1 - k_{2,i} \omega_2 \quad (3.4)$$

Por la propiedad de D'Alembert (ej. Murray & Dermott (1999)), $p_i, q_i, k_{1,i}, k_{2,i}$ son enteros y satisfacen que:

$$p_i - q_i - k_{1,i} - k_{2,i} = 0 \quad (3.5)$$

Las derivadas de R respecto de las variables angulares son:

$$\frac{\partial R_1}{\partial \lambda_1} = + \sum_i p_i \frac{\partial R_1}{\partial \phi_i} \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial R_1}{\partial \omega_1} = - \sum_i k_{1,i} \frac{\partial R_1}{\partial \phi_i} \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial \lambda_2} = - \sum_i q_i \frac{\partial R_1}{\partial \phi_i} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial \omega_2} = - \sum_i k_{2,i} \frac{\partial R_1}{\partial \phi_i} \quad (3.9)$$

Puede verse que hay una relación entre las partes directas de ambas funciones perturbadoras:

$$m_1 R_1^{(d)} = m_2 R_2^{(d)} \quad (3.10)$$

Mientras que para la parte indirecta los coeficientes C_i^j se escriben como:

$$C_i^1 = m_2 \frac{a_1}{a_2^2} \frac{p_i}{q_i} \bar{C}_i \quad (3.11)$$

$$C_i^2 = m_1 \frac{a_2}{a_1^2} \frac{q_i}{p_i} \bar{C}_i \quad (3.12)$$

donde los coeficientes \bar{C}_i son comunes a ambas perturbaciones.

En una resonancia de movimientos medios existen enteros p_i, q_i tal que:

3.1. Evolución de dos planetas resonantes

$$p_i n_1 + q_i n_2 = 0 \longrightarrow \frac{n_2}{n_1} = \frac{p_i}{q_i} \quad (3.13)$$

lo que da una relación para los semiejes resonantes:

$$\frac{a_2}{a_1} \simeq \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^{2/3} = \left(\frac{q_i}{p_i} \right)^{2/3} \quad (3.14)$$

donde se supuso que $m_i \ll M_*$. Reemplazando en (3.12), en una condición resonante se satisface la relación:

$$m_1 C_i^1 = m_2 C_i^2 \quad (3.15)$$

Por lo tanto, en esta condición se satisface que:

$$m_1 R_1 = m_2 R_2 \quad (3.16)$$

con R_i la función perturbadora completa.

3.1.2. Evolución dentro de la Resonancia

Suponiendo que ambos cuerpos se encuentran en una resonancia permanente definida por un ángulo resonante, dado por:

$$\phi = p\lambda_1 - q\lambda_2 - k_1\omega_1 - k_2\omega_2 \simeq cte \quad (3.17)$$

las ecuaciones de Hamilton para el momento de Delaunay asociado al semieje pueden ser escritas como:

$$\begin{aligned} \dot{L}_1 &= \frac{\partial R_1}{\partial \lambda_1} = p \frac{\partial R_1}{\partial \phi} \\ \dot{L}_2 &= \frac{\partial R_2}{\partial \lambda_2} = -q \frac{\partial R_2}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Según se vio anteriormente, en el caso resonante se satisface $m_1 R_1 = m_2 R_2$. Utilizando este hecho y las ecuaciones (3.18), se tiene que:

$$q m_1 \dot{L}_1 + p m_2 \dot{L}_2 = 0 \quad (3.19)$$

Ya que interesa el caso en el que existe una migración orbital, es decir, algún torque que genere un decaimiento orbital, es necesario incluir términos que den cuenta de la

3. Interacción de dos planetas y trampas planetarias

variación temporal de L_i , los cuales corresponden a términos no conservativos para el problema de tres cuerpos.

Esta disipación es añadida directamente a las ecuaciones de Hamilton en forma de funciones disipativas S_{L_i} :

$$\begin{aligned}\dot{L}_1 &= \frac{\partial R_1}{\partial \lambda_1} = p \frac{\partial R_1}{\partial \phi} + S_{L_1} \\ \dot{L}_2 &= \frac{\partial R_2}{\partial \lambda_2} = -q \frac{\partial R_2}{\partial \phi} + S_{L_2}\end{aligned}\quad (3.20)$$

con lo que (3.19) toma la forma:

$$qm_1\dot{L}_1 + pm_2\dot{L}_2 = qS_{L_1} + pS_{L_2}\quad (3.21)$$

Como se busca una resonancia permanente entre ambos cuerpos, debe satisfacerse la no existencia de variaciones de semieje relativo entre ellos, esto es:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{L_2}{L_1} \right) = \frac{1}{L_1} \left(\dot{L}_2 - \frac{L_2}{L_1} \dot{L}_1 \right) = 0 \longrightarrow \frac{\dot{L}_2}{L_2} = \frac{\dot{L}_1}{L_1}\quad (3.22)$$

A partir de las últimas dos expresiones, se obtiene que:

$$\frac{\dot{L}_1}{L_1} = \frac{\dot{L}_2}{L_2} = \frac{qm_1S_{L_1} + pm_2S_{L_2}}{qm_1L_1 + pm_2L_2}\quad (3.23)$$

Con esto, es posible analizar el caso en el cual la perturbación S es lo suficientemente poderosa como para soportar la variación acoplada de los semiejes de ambos planetas. Este análisis se puede realizar pidiendo que la variación del semieje de la masa m_1 sea nula, es decir:

$$\frac{dL_1}{dt} = 0 \longrightarrow qm_1S_{L_1} + pm_2S_{L_2} = 0\quad (3.24)$$

por lo tanto:

$$\frac{S_{L_2}}{S_{L_1}} = - \left(\frac{q}{p} \right) \left(\frac{m_1}{m_2} \right)\quad (3.25)$$

Si esta última condición es satisfecha, las variaciones en los elementos orbitales debido a S_{L_i} serán nulas. Como L_i se relaciona de forma directa con el semieje, la condición anterior coincide con la condición necesaria para detener una migración orbital. Vemos, que para anular una variación en el semieje, ambas perturbaciones deben ser de signo opuesto, o bien deben ser nulas.

3.1.3. Perturbación en forma de un torque

En esta sección se estudia la evolución de dos planetas resonantes sujetos a una migración orbital, la cual es generada por un torque neto aplicado sobre ellos.

Interesa hallar el valor del torque que debe ser ejercido sobre el planeta interior de modo tal que sea posible frenar la migración de ambos cuerpos. Por hipótesis, el planeta interior es la masa m_1 , por lo tanto, la perturbación ejercida sobre m_1 es:

$$S_{L_1} = -\frac{p}{q} \frac{m_2}{m_1} S_{L_2} \quad (3.26)$$

Existe una relación S_{L_i} con el torque ejercido sobre los cuerpos. Para hallar esta relación se supondrá que ambas masas se hallan en movimiento circular, por lo que se prueba, a partir de las leyes de Kepler y de la definición de momento angular que:

$$\mathcal{L}_i = m_i L_i \quad (3.27)$$

Además, el torque neto aplicado sobre un cuerpo es igual a la variación de su momento angular. Ya que por hipótesis el problema ocurre en el plano, se verifica la relación escalar:

$$\frac{d\mathcal{L}_i}{dt} = m_i \frac{dL_i}{dt} = \Gamma_i \quad (3.28)$$

con Γ_i el torque neto ejercido sobre la masa m_i . Por lo tanto:

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{1}{m_i} \Gamma_i \equiv S_{L_i} \quad (3.29)$$

Introduciendo en (3.25), la relación que deben satisfacer los torques para la existencia de equilibrio es:

$$\Gamma_1 = -\left(\frac{p}{q}\right) \Gamma_2 \quad (3.30)$$

Ahora es necesario estimar el torque al que están sometidos los cuerpos, por lo que se utilizarán resultados teóricos referidos a las fuerzas sufridas por un protoplaneta sumergido en un disco gaseoso.

3.2. Trampas planetarias

En las secciones anteriores se estudió brevemente la migración planetaria y se vio que el tiempo característico de migración es incompatible con la teoría de formación más aceptada actualmente, el modelo de acreción de núcleos. Esta rápida migración es un problema para explicar la formación planetaria según el paradigma actual. En efecto, la

3. Interacción de dos planetas y trampas planetarias

formación de un núcleo planetario es del orden 10^{6-7} años (Pollack et al. 1996) mientras que los tiempos de migración son del orden de 10^{2-5} años (Tanaka et al. 2002). Hoy se conocen mas de 500 exoplanetas y muchos están más alejados que $a = 0,1$, por lo tanto, la existencia de planetas a estas distancias constituye un problema que necesariamente debe ser resuelto.

Masset et al. (2006) propusieron la idea de la utilización del torque corrotacional a fin de contrarrestar el torque de Lindblad y de esa forma frenar la migración de un núcleo planetario. La idea principal es la fuerte dependencia del torque corrotacional con las variaciones locales en la densidad del disco. En las regiones donde gradiente es muy pronunciado, es esperable un torque corrotacional grande. Ya que el torque diferencial de Lindblad no depende fuertemente de las variaciones locales de densidad, y es opuesto al torque corrotacional, es esperable que en las regiones donde la densidad presenta grandes variaciones, exista un punto de equilibrio en el torque, y por lo tanto un frenado de la migración.

En el capítulo anterior se vio que en los discos de gas puede generarse un vaciamiento en la región central, lo que generaría un salto en la densidad, por lo que esta región actuaría como una trampa, evitando la migración.

En la siguiente sección se estimará el torque ejercido sobre un cuerpo en regiones del disco donde la densidad presenta un salto importante.

3.3. Estimando el torque

Es sabido (Tanaka et al. 2002; Masset et al. 2006) que el valor del torque corrotacional que se ejerce sobre un protoplaneta dentro de un disco de gas es:

$$\Gamma_c \propto \Sigma \frac{d[\log(\Sigma/B)]}{d \log r} \quad (3.31)$$

donde Σ es el perfil de densidad del gas y B es el parámetro de Oort, dado por la expresión:

$$B(r) = \Omega(r) + \frac{r}{2} \frac{d\Omega}{dr} \quad (3.32)$$

con $\Omega(r)$ la velocidad angular del gas.

La velocidad de un elemento de fluido del disco vendrá dada por:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}) \times \mathbf{r} \longrightarrow v = r\Omega(r) \quad (3.33)$$

donde se supuso movimiento circular.

Otra forma de escribir (3.31) es desarrollando la derivada logarítmica:

$$\Gamma_c \propto r \left(\frac{d\Sigma}{dr} - \frac{\Sigma}{B} \frac{dB}{dr} \right) \quad (3.34)$$

Por lo tanto, para calcular el torque corrotacional es necesario conocer la variación de B con la distancia:

$$\frac{dB}{dr} = \frac{3}{2} \frac{d\Omega}{dr} + \frac{r}{2} \frac{d^2\Omega}{dr^2} \quad (3.35)$$

Una forma útil de escribir el segundo término de (3.34) es: $\Sigma \frac{d \log B}{d \log r}$, por lo que (3.34) se escribe como:

$$\Gamma_c \propto r \left(\frac{d\Sigma}{dr} - \Sigma \frac{d \log B}{d \log r} \right) \quad (3.36)$$

Ahora se calculará el valor de los términos que aparecen en (3.35) para obtener una expresión de (3.36) en función sólo de la densidad.

3.3.1. Sobre $\Omega(r)$

De la componente radial de la ecuación de Navier-Stokes se tiene que:

$$\frac{v_\theta^2}{r} = \frac{GM_*}{r^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} \quad (3.37)$$

donde v_θ es la velocidad tangencial del gas, ρ es su densidad volumétrica, M_* es la masa estelar y P es la presión del gas. Utilizando (3.33), la definición $GM_*/r^3 = \Omega_k^2$ (movimiento kepleriano) y que $P = c_s^2 \rho$ con c_s la velocidad del sonido, la cual se asume contante, se tiene que:

$$\Omega^2(r) = \Omega_k^2(r) + \frac{c_s^2}{\rho r} \frac{d\rho}{dr} \quad (3.38)$$

Definiendo $h(r) = c_s/\Omega_k$, puede probarse a partir de la hipótesis de disco delgado y de la condición de equilibrio hidroestático en la dirección vertical, que $H/r = h \ll 1$.

Se define la densidad superficial Σ del disco como:

$$\Sigma(r) = \sqrt{2\pi} h(r) \rho(r) \longrightarrow \rho(r) = \frac{\Sigma(r) \Omega_k(r)}{\sqrt{2\pi} c_s} \quad (3.39)$$

A partir de (3.39), se tiene una expresión en función de Σ para calcular la variación de la densidad volumétrica ρ en función de la posición:

$$\frac{d\rho}{dr} = \frac{\Omega_k}{\sqrt{2\pi} c_s} \frac{d\Sigma}{dr} + \frac{\Sigma}{\sqrt{2\pi} c_s} \frac{d\Omega_k}{dr} \quad (3.40)$$

3. Interacción de dos planetas y trampas planetarias

De la definición de Ω_k , es inmediato que $d\Omega_k/dr = -(3\Omega_k)/(2r)$, por lo que utilizando (3.39) y (3.40) se tiene:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = \frac{1}{\Sigma} \left[\frac{d\Sigma}{dr} - \frac{3\Sigma}{2r} \right], \quad (3.41)$$

por lo que (3.38) se escribe como:

$$\Omega^2(r) = \Omega_k^2(r) + \frac{c_s^2}{\Sigma r} \left[\frac{d\Sigma}{dr} - \frac{3\Sigma}{2r} \right], \quad (3.42)$$

que escrito en términos del parámetro adimensional $h = H/r$, tiene la forma:

$$\Omega^2 = \Omega_k^2 \left[1 + h^2 \left(\frac{r}{\Sigma} \frac{d\Sigma}{dr} - \frac{3}{2} \right) \right] \quad (3.43)$$

Ya que el disco de gas en general es muy delgado ($h \ll 1$), es posible despreciar el término $(3/2)h^2$ frente a los otros dos, por lo que una expresión válida en la mayoría de los casos es:

$$\Omega^2 \simeq \Omega_k^2 \left[1 + h^2 \frac{r}{\Sigma} \frac{d\Sigma}{dr} \right] \quad (3.44)$$

Pueden realizarse algunas consideraciones respecto de la expresión (3.44). En regiones del disco en donde las variaciones de la densidad no son importantes, el segundo término de (3.44) puede ser despreciado. En efecto, ya que las variaciones de la densidad son pequeñas, $d\Sigma/dr \sim 0$, por lo que a efectos prácticos $h^2 d\Sigma/dr$ se anula más rápido incluso que $d\Sigma/dr$. Por lo tanto, en regiones suaves se tiene que $\Omega^2 \rightarrow \Omega_k^2$.

Por otro lado, en las regiones donde el gradiente de la densidad es grande, se pensaría que el segundo término domina sobre el primero, pero esto no es así salvo en un caso especial.

La condición que tiene que satisfacer la escala de variación de la densidad para que el segundo término sea importante es:

$$h^2 \frac{r}{\Sigma} \frac{d\Sigma}{dr} \sim h^2 \frac{\Delta\Sigma}{\Sigma} \frac{1}{(\lambda/r)} \sim \alpha \frac{h^2}{(\lambda/r)} \gg 1 \quad (3.45)$$

donde λ es la longitud típica de variación de la densidad. Entonces el segundo término será importante si:

$$\frac{\lambda}{r} \ll \alpha h^2 \quad (3.46)$$

En general, para las variaciones de densidad de interés se tiene que $\alpha \sim 1$; por lo tanto, para que el segundo término de (3.44) sea importante, la densidad debe tener

3.3. Estimando el torque

una variación apreciable en una escala $\lambda \ll h^2$, lo cual es una variación sumamente rápida. De ahora en adelante, se supondrá que λ es del orden de algunos H , es decir, $\lambda \sim nhr$ con n un número no muy grande (por ejemplo entre 1 y 10) por lo que una buena aproximación para Ω^2 en todo el espacio es:

$$\Omega^2 \simeq \Omega_k^2 \quad (3.47)$$

También es necesario calcular las variaciones de Ω a lo largo del disco. Derivando (3.44) se tiene que:

$$\frac{d\Omega^2}{dr} = \frac{d\Omega_k^2}{dr} + h^2 \frac{d\Omega_k^2}{dr} \frac{r}{\Sigma} \frac{d\Sigma}{dr} + h^2 \Omega_k^2 \left[\frac{1}{\Sigma} \frac{d\Sigma}{dr} - \frac{r}{\Sigma^2} \left(\frac{d\Sigma}{dr} \right)^2 + \frac{r}{\Sigma} \frac{d^2\Sigma}{dr^2} \right] \quad (3.48)$$

Se supondrá además que las variaciones en la densidad son tales que verifican las siguientes relaciones:

$$1 \ll \frac{1}{\Sigma} \frac{d\Sigma}{dr} \ll \dots \ll \frac{1}{\Sigma} \frac{d^n \Sigma}{dr^n} \quad (3.49)$$

Por lo tanto, de forma aproximada, pueden despreciarse las derivadas de menor orden frente a la de mayor orden:

$$\frac{d\Omega^2}{dr} \simeq \frac{d\Omega_k^2}{dr} + \frac{h^2 \Omega_k^2 r}{\Sigma} \frac{d^2\Sigma}{dr^2} \quad (3.50)$$

Utilizando que $d\Omega_k^2/dr = -3\Omega_k^2/r$, se tiene que:

$$\frac{d\Omega^2}{dr} = -\frac{3\Omega_k^2}{r} + \frac{h^2 \Omega_k^2 r}{\Sigma} \frac{d^2\Sigma}{dr^2} \quad (3.51)$$

Con (3.51) se tiene una expresión para calcular la variación de Ω con la posición:

$$\frac{d\Omega}{dr} = \frac{1}{2\Omega} \frac{d\Omega^2}{dr} \simeq \frac{1}{2\Omega_k} \frac{d\Omega^2}{dr}, \quad (3.52)$$

por lo que:

$$\frac{d\Omega}{dr} = -\frac{3\Omega_k}{2r} + \frac{h^2 \Omega_k}{2\Sigma} \frac{d^2\Sigma}{dr^2} \quad (3.53)$$

Derivando (3.53) se tienen todas las expresiones necesarias para calcular (3.34) o (3.36):

$$\frac{d^2\Omega}{dr^2} \simeq \frac{15}{4} \frac{\Omega_k}{r^2} + \frac{\Omega_k h^2}{2} \frac{r}{\Sigma} \frac{d^3\Sigma}{dr^3} \quad (3.54)$$

3. Interacción de dos planetas y trampas planetarias

donde se utilizó (3.49) para despreciar los términos con derivadas de orden menor que 3. Si bien en (3.53) no es posible realizar una separación de términos válidos cada uno por separado según se esté en la región suave del disco o en el escalón, en (3.54) es posible despreciar el primer término en las regiones donde la densidad presente variaciones importantes. Por lo tanto, en regiones de alta variación de la densidad se tiene como buena aproximación que:

$$\frac{d^2\Omega}{dr^2} \simeq \frac{\Omega_k h^2 r}{2 \Sigma} \frac{d^3\Sigma}{dr^3} \quad (3.55)$$

y en general:

$$\frac{d^2\Omega}{dr^2} \simeq \left(\frac{d^2\Omega}{dr^2}\right)_s + \left(\frac{d^2\Omega}{dr^2}\right)_f \simeq \frac{15 \Omega_k}{4 r^2} + \frac{\Omega_k h^2 r}{2 \Sigma} \frac{d^3\Sigma}{dr^3} \quad (3.56)$$

donde el subíndice s, f hace referencia a regiones de variaciones suaves o fuertes en el perfil de densidad del disco.

3.3.2. Sobre $B(r)$

Por definición, $B(r)$ es:

$$B(r) = \Omega(r) + \frac{r}{2} \frac{d\Omega}{dr}(r) \quad (3.57)$$

Multiplicando por Ω :

$$\Omega B = \Omega^2 + \Omega \frac{r}{2} \frac{d\Omega}{dr} = \Omega^2 + \frac{r}{4} \frac{d\Omega^2}{dr} \quad (3.58)$$

Utilizando (3.44) y (3.51) y despreciando las derivadas de orden menor que 2 se tiene:

$$\Omega B \simeq \frac{\Omega_k^2}{4} + \frac{\Omega_k^2 h^2 r}{4 \Sigma} \frac{d^2\Sigma}{dr^2} \quad (3.59)$$

Utilizando que $\Omega \longrightarrow \Omega_k$

$$B \simeq \frac{\Omega_k}{4} \left(1 + h^2 r \frac{d^2\Sigma}{\Sigma dr^2}\right) \quad (3.60)$$

Por lo cual, en la región suave del disco, $B \longrightarrow \Omega_k/4$.

Es interesante estudiar el parámetro de Oort en las regiones donde la densidad presenta gradientes importantes. Si $\lambda = nhr$, el orden del segundo término de (3.59) es:

$$h^2 r \frac{r}{\Sigma} \frac{d^3 \Sigma}{dr^3} \sim h^2 r \frac{r}{\Sigma} \frac{\Delta \Sigma}{\lambda^3} \simeq \frac{h^2 r^2}{\lambda^2} \simeq \left(\frac{1}{n}\right)^2 \quad (3.61)$$

Por lo tanto, en las regiones donde la densidad presenta un gran salto, si n es adecuado, $B \rightarrow \Omega_k/4$. Así, una buena aproximación para todo el espacio, cuando la escala de variación es la adecuada, es decir $n \sim 1 - 10$, es:

$$B(r) \simeq \frac{\Omega_k(r)}{4} \quad (3.62)$$

En la práctica, una escala de variación adecuada es $\lambda \simeq 5hr$. Si se incrementa mucho el valor de n , las derivadas de orden superior pueden perder importancia, lo que resulta en una disminución o incluso una desaparición del torque corrotacional.

La derivada logarítmica de B se escribe como:

$$\frac{d \log B}{d \log r} = \frac{r}{B} \frac{dB}{dr} \simeq -\frac{3}{2} + h^2 r^2 \frac{r}{\Sigma} \frac{d^3 \Sigma}{dr^3} \quad (3.63)$$

Con un análisis análogo al realizado para obtener (3.55), se ve que en las regiones donde la densidad varía rápidamente, la derivada logarítmica de B es:

$$\frac{d \log B}{d \log r} = h^2 r^2 \frac{r}{\Sigma} \frac{d^3 \Sigma}{dr^3} \quad (3.64)$$

Utilizando (3.55), es posible escribir (3.63) en términos de $d^2 \Omega/dr^2$:

$$\frac{d \log B}{d \log r} = \frac{2r^2}{\Omega_k} \frac{d^2 \Omega}{dr^2} \quad (3.65)$$

Las expresiones (3.55) y (3.65) son las que propone Masset et al. (2006) como una estimación cerca del borde de un escalón en la densidad del disco de gas.

3.3.3. Torque total

Reemplazando (3.63) en (3.36) se tiene para el torque corrotacional:

$$\Gamma_c \propto r \frac{d\Sigma}{dr} - \Sigma \left(-\frac{3}{2} + \frac{h^2 r^2}{2} \frac{r}{\Sigma} \frac{d^3 \Sigma}{dr^3} \right)$$

$$\Gamma_c \propto \frac{3}{2} \Sigma + r \frac{d\Sigma}{dr} - h^2 r^3 \frac{d^3 \Sigma}{dr^3} \quad (3.66)$$

3. Interacción de dos planetas y trampas planetarias

De forma aproximada, en regiones suaves del disco es posible despreciar los términos con derivadas, mientras que en regiones donde la densidad presenta variaciones importantes, los términos con derivadas son comparables entre ellos pero mucho mayores que el término sin derivadas. Por lo tanto, el torque corrotacional puede ser escrito como la suma de dos términos, uno válido en la región suave y el otro en el salto de densidad:

$$\Gamma_c \propto \Gamma_{cs} + \Gamma_{cf} \quad (3.67)$$

Para calcular el torque total, es necesario sumar el término del torque diferencial de Lindblad, por lo que:

$$\Gamma_{total} \propto \Gamma_{cs} + \Gamma_{cf} + \Gamma_{Lind} \quad (3.68)$$

Según Tanaka et al. (2002), en las regiones suaves del disco, el torque corrotacional es la mitad del torque diferencial de Lindblad con signo opuesto, entonces:

$$\Gamma_{total} \propto \Gamma_{cf} - \Gamma_{cs} \quad (3.69)$$

Por lo tanto:

$$\Gamma_{total} \propto r \frac{d\Sigma}{dr} - h^2 r^3 \frac{d^3 \Sigma}{dr^3} - \frac{3}{2} \Sigma \quad (3.70)$$

La proporcionalidad viene dada por los factores $a^4 n_p^2 q^2 h^{-2}$, con $q = m_p / m_*$ y $h = H/r$ (ver por ejemplo Masset 2007), por lo que:

$$\Gamma_{total} \simeq a^4 n_p^2 q^2 h^{-2} \left[r \frac{d\Sigma}{dr} - h^2 r^3 \frac{d^3 \Sigma}{dr^3} - \frac{3}{2} \Sigma \right] \quad (3.71)$$

Puede verse que en esta expresión es posible hallar un cero en el torque neto, por lo que en principio si la densidad presenta gradientes importantes, es posible detener la migración planetaria.

3.4. Condición límite de frenado

En esta sección se hallará la condición límite para las masas de modo tal que, dado un disco con una cavidad central y dos masas interactuantes con este y entre si, el borde de la cavidad sea capaz de detener la migración de ambos cuerpos.

Para esta tarea es necesario adoptar cierta función para el perfil de densidad superficial, la cual debe cumplir las hipótesis anteriormente utilizadas. El perfil adoptado es proporcional a la tangente hiperbólica:

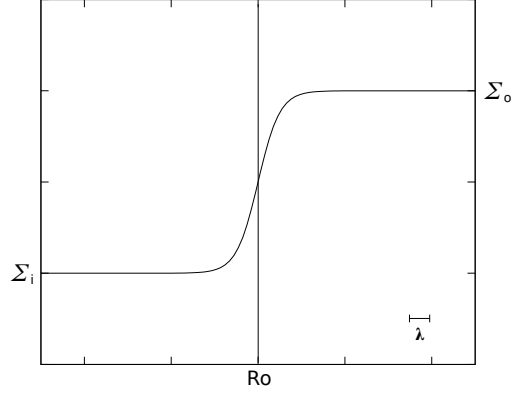


Figura 3.1.: Perfil de densidad adoptado.

$$\Sigma(r) = \left(\frac{\Sigma_o - \Sigma_i}{2} \right) \tanh \left(\frac{r - r_0}{\Delta} \right) + \frac{\Sigma_o + \Sigma_i}{2} \quad (3.72)$$

con Σ_o la densidad en el borde de la cavidad, Σ_i la densidad dentro de la cavidad, r_0 el centro de la cavidad y Δ la escala de variación espacial, la cual se relaciona con λ mediante la expresión $\lambda \simeq 6\Delta$. Esto es así ya que prácticamente en el intervalo $[r_0 - \lambda/2, r_0 + \lambda/2]$ la densidad pasa de Σ_o a Σ_i , en otras palabras, la transición ocurre en un intervalo de longitud λ . Una representación de la densidad puede verse en la figura (3.1).

Para calcular el torque total es necesario calcular las derivadas de la densidad:

$$\begin{aligned} \frac{d\Sigma}{dr} &= \frac{1}{2} \frac{\Sigma_o - \Sigma_i}{\Delta} \cosh^{-2} \left(\frac{r - r_0}{\Delta} \right) \\ \frac{d^3\Sigma}{dr^3} &= \frac{\Sigma_o - \Sigma_i}{\Delta^3} \left[2 \cosh^{-2} \left(\frac{r - r_0}{\Delta} \right) \tanh^2 \left(\frac{r - r_0}{\Delta} \right) - \cosh^{-4} \left(\frac{r - r_0}{\Delta} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.73)$$

Recordando que la condición de frenado es:

$$\Gamma_1 = - \left(\frac{p}{q} \right) \Gamma_2 \quad (3.74)$$

y reemplazando la expresión del torque:

$$\left(\frac{p}{q} \right) = - \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^4 \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 \left(\frac{q_1}{q_2} \right)^2 \left(\frac{h(r_1)}{h(r_2)} \right)^2 \frac{\Gamma^*(r_1)}{\Gamma^*(r_2)} \quad (3.75)$$

donde $\Gamma^*(r)$ es torque total en cada caso sin considerar los factores de proporcionalidad, es decir, la expresión (3.70).

3. Interacción de dos planetas y trampas planetarias

Utilizando la condición de resonancia y que $h(r_1) \sim h(r_2)$, se tiene que:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{1/3} = - \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 \frac{\Gamma^*(r_1)}{\Gamma^*(r_2)} \quad (3.76)$$

donde r_1 y r_2 están relacionados a través de la condición resonante.

Ya que se busca una condición límite, es necesario considerar el semieje $a_1 = r_c$ para el cual el torque es máximo. Por lo tanto, $(m_2/m_1)_{max}$ vendrá dado por:

$$\left(\frac{m_2}{m_1}\right)_{max} = - \left(\frac{q}{p}\right)^{1/6} \left(\frac{\Gamma^*(r_c)}{\Gamma^*(q/p)}\right)^{1/2} \quad (3.77)$$

Notar que (3.77) es una expresión general, válida para cualquier perfil de densidad.

Como estimación, se puede suponer que

$$\Gamma^*(p/q) \sim \Gamma(\infty) = -\frac{3}{2}\Sigma_o = cte \quad (3.78)$$

por lo que el problema se reduce a hallar r_c . Ya que la forma funcional del torque es muy complicada, resulta difícil hallar una expresión analítica para r_c . Una forma de realizar una estimación es asumir que el máximo se halla muy próximo a r_0 y calcular el valor del torque en r_0 (puede verse numéricamente que esta aproximación es buena). Además, ya que la región de interés es próxima al salto en densidad, puede ser despreciado el torque diferencial de Lindblad.

Por lo tanto:

$$\Gamma^*(r_c) \simeq \Gamma^*(r_0) \simeq r_0 \frac{d\Sigma}{dr}(r_0) - h(r_0)^2 r_0^3 \frac{d^3\Sigma}{dr^3}(r_0) \quad (3.79)$$

reemplazando el perfil de densidad, y recordando que $\Delta = nhr_0/6$, se tiene que:

$$\Gamma^*(r_0) \simeq 6 \left(\frac{\Sigma_o - \Sigma_i}{nh}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{36}{n^2}\right) \quad (3.80)$$

Por lo tanto, reemplazando (3.78) y (3.80) en (3.77) la condición límite de frenado es:

$$\left(\frac{m_2}{m_1}\right)_{max} = \sqrt{2} \left(\frac{q}{p}\right)^{1/6} \left(\frac{R-1}{R}\right)^{1/2} \left(\frac{72+n^2}{n^3h}\right)^{1/2} \quad (3.81)$$

con $R = \Sigma_o/\Sigma_i$.

3.5. Experimentos numéricos

Si se supone un perfil de densidad con $n = 5$, $h = 0,05$ y $R = 10$, puede calcularse la condición límite de frenado mediante (3.81). Esta función está representada en la figura (3.2). En ella puede observarse además la función exacta que describe el frenado. Esta función fue calculada de forma numérica, hallando el torque máximo y evaluando el torque en cada punto. Existe un apartamiento importante para resonancias de alto orden ($p/q \sim 1$). Esto se debe a la aproximación realizada en (3.78).

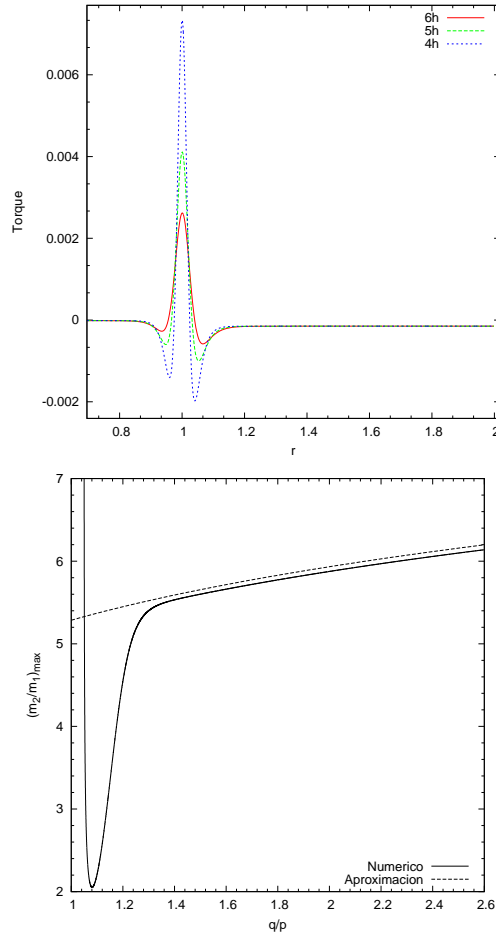


Figura 3.2.: Arriba: Torque calculado de forma numérica para tres valores diferentes de λ . En todos los casos $\Sigma_o/\Sigma_i = 10$ y $h = 0,05$. Abajo: Límite superior de relación de masas que pueden ser frenadas en el borde de una cavidad, en función de la conmensurabilidad entre ellas. En este caso se consideró un disco con una cavidad en la cual $\lambda = 5hr_0$ con $r_0 = 1$. La curva continua representa el valor exacto de la masa límite (calculado de forma numérica), mientras que la curva punteada es una sencilla aproximación analítica, dada por (3.81).

El comportamiento observado en la función de frenado exacta es muy interesante ya

3. Interacción de dos planetas y trampas planetarias

que hace evidente el aumento del torque ejercido sobre un cuerpo en las cercanías de r_0 . Por lo tanto, órdenes resonantes altos impiden el frenado de cuerpos en el borde de la cavidad del disco. Como se verá en el capítulo 5, figuras (6.10) y (6.11), un orden resonante alto puede generar una dispersión planetaria o una resonancia final estable 1:1, es decir, una configuración coorbital.

A fin de corroborar el límite hallado de forma teórica, es posible realizar unas integraciones numéricas utilizando un integrador de ncuerpos, en el cual se considera además de la interacción gravitatoria entre los cuerpos, una fuerza disipativa debida al torque ejercido por el disco sobre cada componente del sistema. En los trabajos de Ogihara et al. (2006) y Ogihara & Ida (2009) pueden encontrarse resumidas las expresiones analíticas para la fuerza que causa la migración orbital de tipo I, las cuales provienen de los desarrollos de Tanaka et al. (2002) y Tanaka & Ward (2004):

$$\begin{aligned}
 F_{damp,r} &= \left(\frac{M}{M_*}\right) \left(\frac{v_K}{c_s}\right)^4 \left(\frac{\Sigma r^2}{M_*}\right) \Omega (2A_r^c [v_\theta - r\Omega] + A_r^s v_r) \\
 F_{damp,\theta} &= \left(\frac{M}{M_*}\right) \left(\frac{v_K}{c_s}\right)^4 \left(\frac{\Sigma r^2}{M_*}\right) \Omega (2A_\theta^c [v_\theta - r\Omega] + A_\theta^s v_r) \\
 F_{mig,r} &= 0 \\
 F_{mig,\theta} &= -2,17 \left(\frac{M}{M_*}\right) \left(\frac{v_K}{c_s}\right)^2 \left(\frac{\Sigma r^2}{M_*}\right) \Omega v_K
 \end{aligned}$$

donde F_{damp} es la fuerza que amortigua la excentricidad., y F_{mig} es la fuerza que amortigua el semieje. v_K es la velocidad kepleriana (velocidad tangencial) y Ω es la velocidad angular. El valor numérico de los coeficientes es:

$$\begin{aligned}
 A_r^c &= 0,057 & A_r^s &= 0,176 \\
 A_\theta^c &= -0,868 & A_\theta^s &= 0,325
 \end{aligned}$$

Ya que en las secciones anteriores se calculó el torque, se decidió no utilizar la expresión propuesta para $F_{mig,\theta}$ y en su cuenta utilizar:

$$F_{mig,\theta} = \frac{\Gamma}{mr} \tag{3.82}$$

Como no se consideró el factor 2,17 que aparece en las ecuaciones, entonces debe ser quitado de las fuerzas de amortiguamiento, dividiéndolas por este factor. Es decir, las expresiones a utilizar son $0,46F_{damp}$.

Para las pruebas se utilizó un perfil de densidad con $h = 0,05$, $n = 5$, $R = 10$ y $r_0 = 0,1$ y para las integraciones de las ecuaciones se utilizó un método de Runge-Kutta 7/8, con una precisión de 10^{-11} .

3.5.1. Figuras

En esta sección se analizarán los resultados de las pruebas numéricas realizadas con el modelo de Tanaka et al. (2002) para el torque neto ejercido junto a las trampas planetarias. Además, se compararán los resultados obtenidos con el límite de frenado dado por la figura (3.2).

Figura 3.3

El cuerpo externo es posicionado en $r = 0,15$, mientras que el interno se ubica en $r = 0,12$. La masa estelar es de una masa solar y las masas planetarias están en una relación 1:1, siendo la masa menor igual a la masa terrestre. Ambos cuerpos migran de acuerdo a lo esperado, siendo más veloz la migración del cuerpo exterior. La rápida migración del cuerpo exterior acelera la migración del cuerpo interior. Mientras esto ocurre, ambos cuerpos se hallan en una resonancia de movimientos medios. En un tiempo $t \sim 0,8$ Ka (10^3 años), el cuerpo interior ingresa en la región en donde el torque presenta un mínimo local (ver figura (3.2)) y su migración se acelera. Ya que la tasa de migración en esta región supera a la migración del cuerpo exterior, la resonancia de movimientos medios se pierde. En ese momento las excentricidades comienzan a excitarse.

En un tiempo $t \sim 2,3$ Ka ambos cuerpos nuevamente entran en una resonancia de movimientos medios, la cual actúa de forma intermitente, por lapsos de tiempo de 0,3 Ka aproximadamente. Mientras la resonancia está presente, la excentricidad de los cuerpos se incrementa. Se observa que debido al aumento de excentricidad, el cuerpo interior pasa efectivamente sobre el borde de la cavidad del disco. En esos momentos el torque se vuelve máximo y ambos cuerpos experimentan una especie de rebote. Luego del rebote, la resonancia se pierde. Mientras la excentricidad se amortigua, la migración vuelve a comenzar, la resonancia es alcanzada nuevamente y se produce un rebote.

En este caso hay un acuerdo con la condición de frenado hallada anteriormente, ya que ambos cuerpos se mantienen en el exterior de la cavidad.

El mismo comportamiento es observado para razones de masas 2:1, 3:1.

Figura 3.4

El cuerpo externo es posicionado en $r = 0,15$, mientras que el interno se ubica en $r = 0,12$. La masa estelar es de una masa solar y las masas planetarias están en una relación 5:1, siendo la masa menor igual a la masa terrestre. Ambos cuerpos migran de acuerdo a lo esperado, siendo más veloz la migración del cuerpo exterior. La rápida migración del cuerpo exterior acelera la migración del cuerpo interior. A diferencia del caso de la figura 3.3, la resonancia de movimientos medios se alcanza rápidamente durante la migración, y ésta se mantiene. En un tiempo $t \sim 0,3$ Ka, el cuerpo interior ingresa en la región en donde el torque presenta un mínimo local (ver figura (3.2)) y su migración se acelera, sin embargo, ya que la migración del cuerpo exterior es tan veloz, la resonancia de movimientos medios se pierde por muy corto tiempo. Durante la migración inicial las excentricidades sufren una excitación importante.

3. Interacción de dos planetas y trampas planetarias

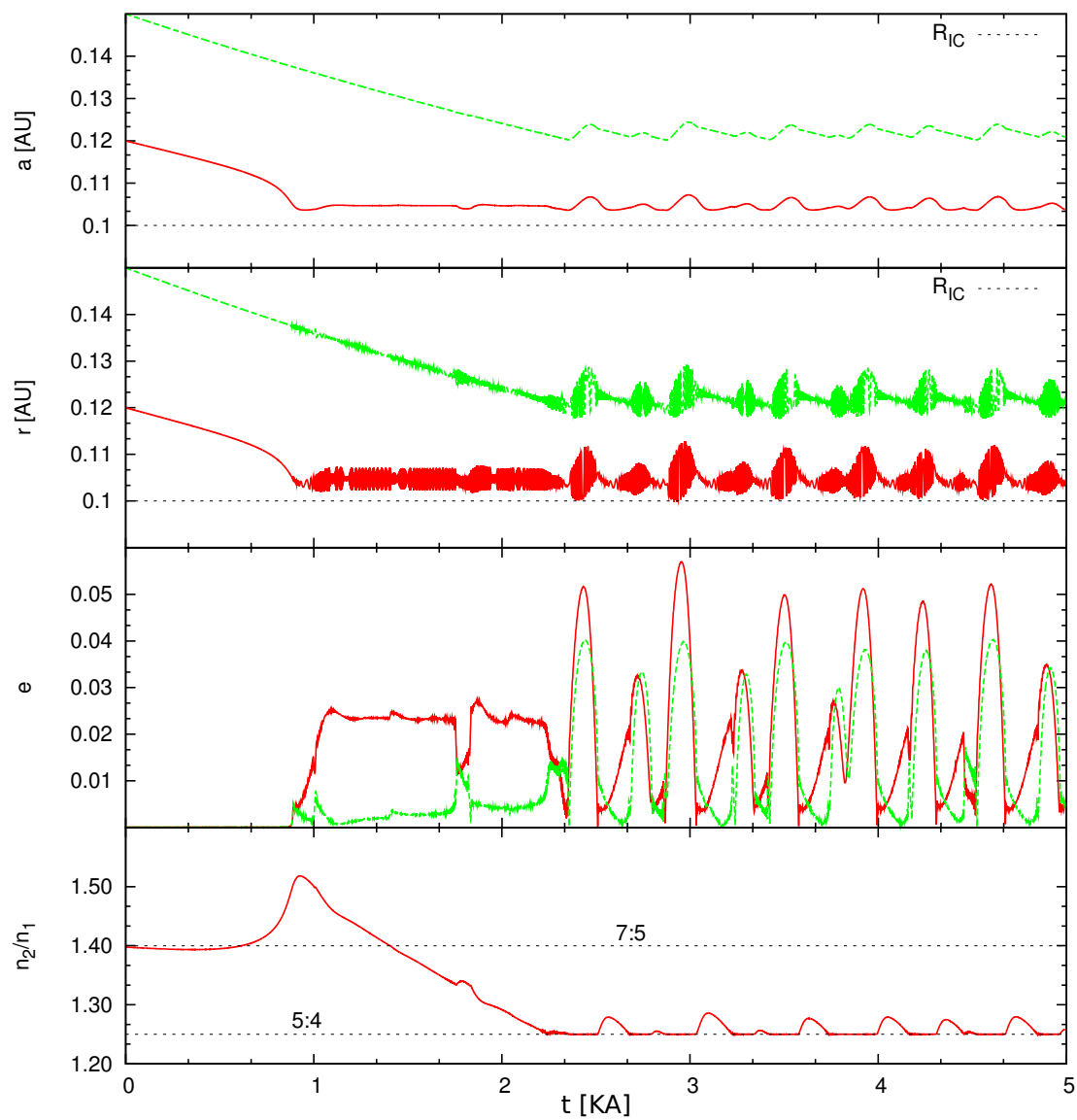


Figura 3.3.: Elementos orbitales de dos cuerpos sumergidos en un disco de gas. La relación de masas es 1:1. El planeta interior tiene la masa de la Tierra. Más detalles en el texto.

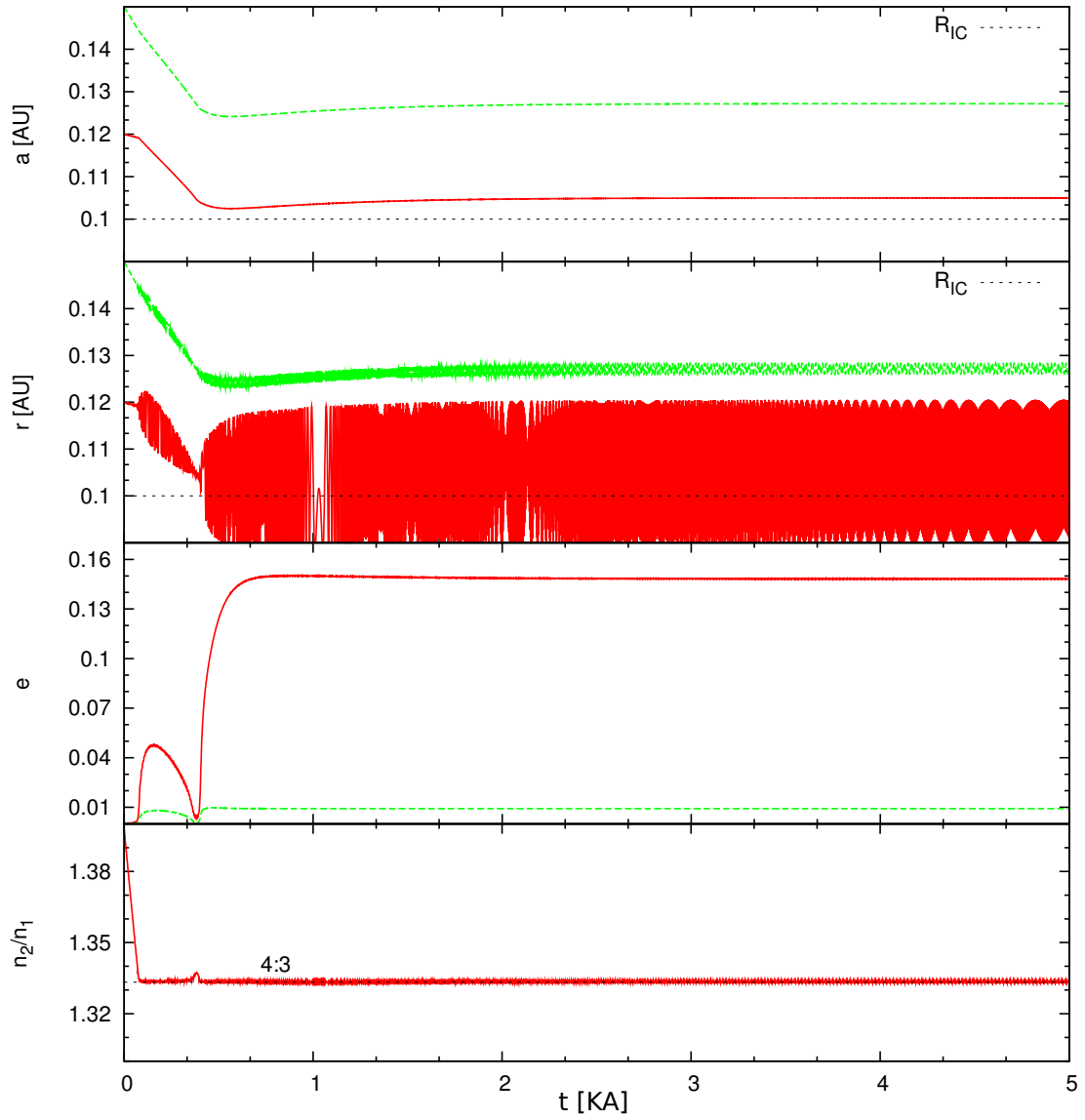


Figura 3.4.: Elementos orbitales de dos cuerpos sumergidos en un disco de gas. La relación de masas es 5:1. El planeta interior tiene la masa de la Tierra. Más detalles en el texto.

3. Interacción de dos planetas y trampas planetarias

Una vez que los cuerpos son frenados en el borde de la cavidad, las excentricidades se excitan nuevamente, esta vez una cantidad mucho mayor. Ya que la excentricidad del cuerpo interior es tan grande en este caso, este pasa parte del tiempo dentro de la cavidad y parte fuera, por lo que aparentemente el torque neto que puede ejercer sobre el cuerpo exterior es menor que el que se ejercía en el caso (3.3). Por esta razón la configuración es más estable.

Nuevamente hay un acuerdo con la condición de frenado hallada anteriormente, ya que los semiejes de ambos cuerpos se mantienen en el exterior de la cavidad.

El mismo comportamiento se observa con una relación de masas 4:1.

Figura 3.5

El cuerpo externo es posicionado en $r = 0,15$, mientras que el interno se ubica en $r = 0,12$. La masa estelar es de una masa solar y las masas planetarias están en una relación 6:1, siendo la masa menor igual a la masa terrestre. Ambos cuerpos migran de acuerdo a lo esperado, siendo más veloz la migración del cuerpo exterior. La rápida migración del cuerpo exterior acelera la migración del cuerpo interior. La resonancia de movimientos medios es alcanzada rápidamente. En un tiempo $t \sim 0,07$ Ka, el cuerpo interior ingresa en la región en donde el torque presenta un mínimo local (ver figura (3.2)) y su migración se acelera. Ya que la tasa de migración del cuerpo exterior es mucho mayor, esta aceleración no es suficiente como para perder la resonancia. Una vez que el cuerpo interior es atrapado en el borde de la cavidad, la migración del planeta interior se hace más lenta y la excentricidad comienza a excitarse.

Cuando el cuerpo exterior entra en la región donde el torque presenta un mínimo local, su migración se acelera. Esta rápida caída provoca el ingreso del cuerpo interior dentro de la cavidad del disco mientras que el cuerpo exterior es retenido por el borde.

El cuerpo interior continúa migrando debido a que el disco no está completamente vacío en el interior. Por esta razón la resonancia de movimientos medios se pierde. En ese momento las excentricidades se amortiguan debido a la fuerza disipativa del gas.

En este caso hay un acuerdo con la condición de frenado hallada anteriormente, ya que una relación de masas de 6:1 es superior a la condición límite hallada en (3.2)

El mismo comportamiento es observado para relaciones de masas mayores (ver por ejemplo la figura (3.6)).

3.6. Resumen

Se estudió la evolución orbital de dos cuerpos resonantes sujetos a fuerzas no conservativas. Se describió el torque efectuado por el disco sobre los planetas como una fuerza no conservativa y se halló una condición para que una trampa planetaria sea capaz de soportar la migración de ambos cuerpos. Además, fue posible caracterizar la condición límite que pueden satisfacer las masas de ambos cuerpos en función de los parámetros del disco para que puedan ser frenados por una trampa planetaria.

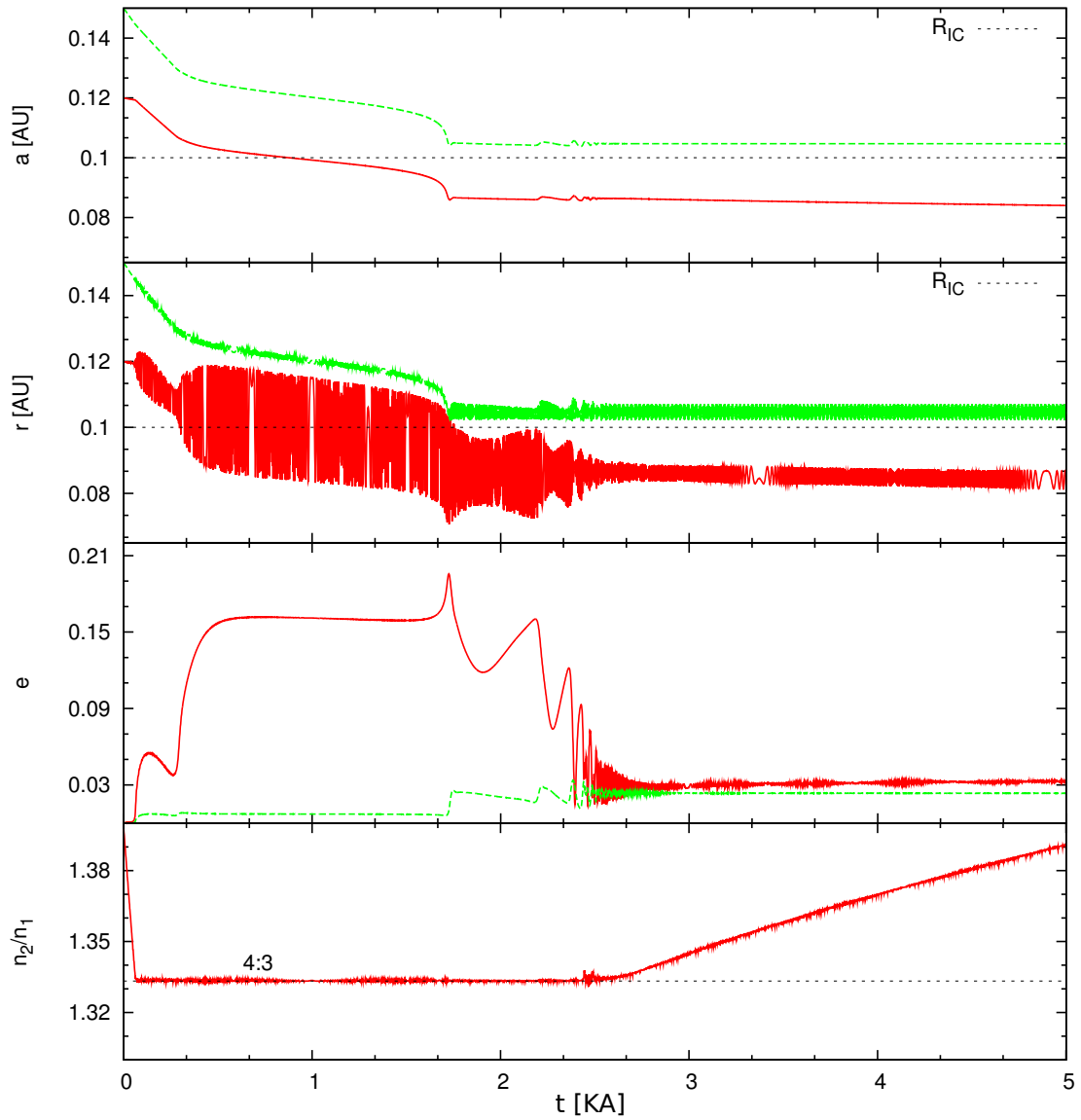


Figura 3.5.: Elementos orbitales de dos cuerpos sumergidos en un disco de gas. La relación de masas es 6:1. El planeta interior tiene la masa de la Tierra. Más detalles en el texto.

3. Interacción de dos planetas y trampas planetarias

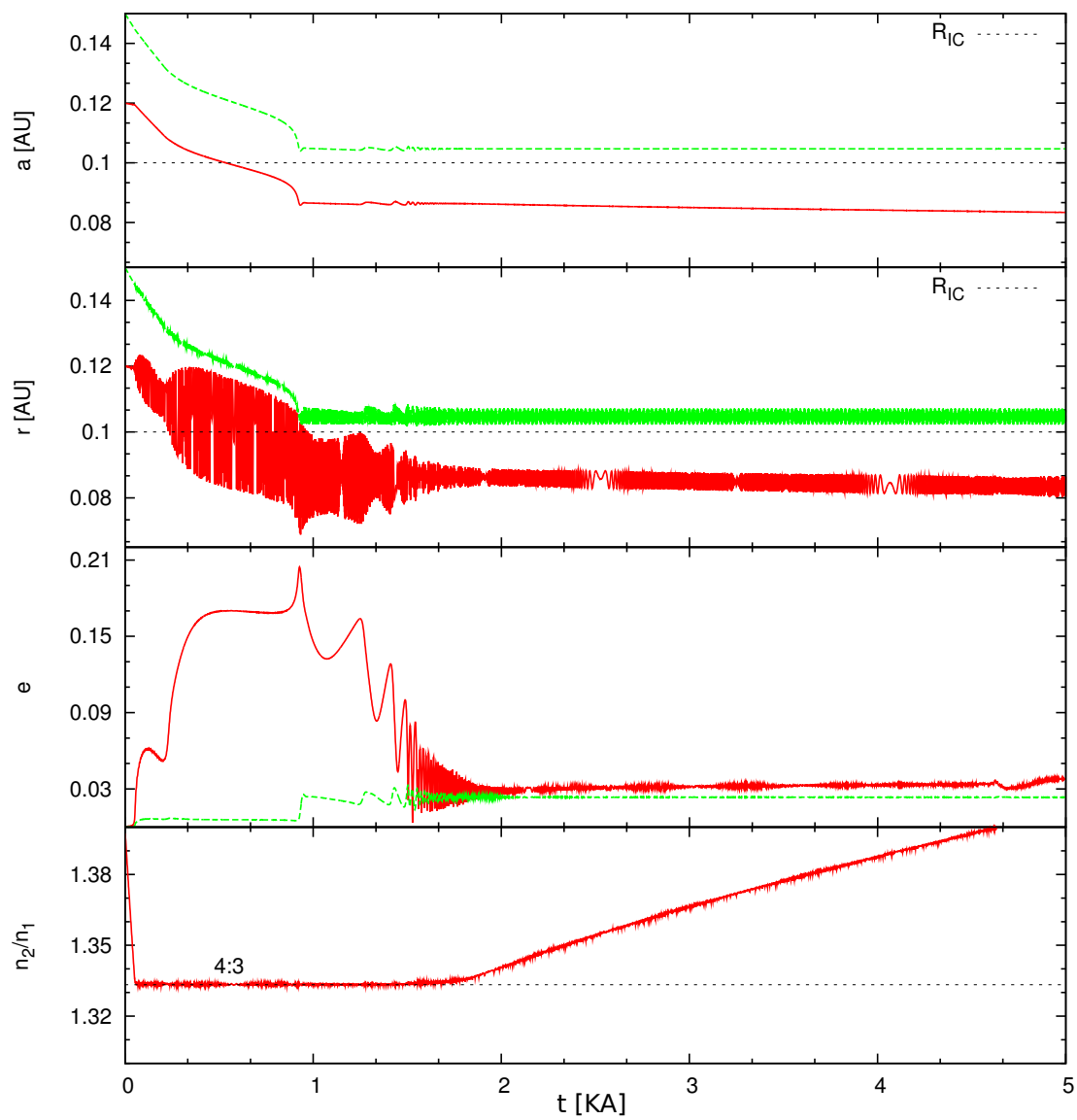


Figura 3.6.: Elementos orbitales de dos cuerpos sumergidos en un disco de gas. La relación de masas es 7:1. El planeta interior tiene la masa de la Tierra. Más detalles en el texto.

En cuanto a las trampas planetarias, se halló una expresión analítica aproximada para el torque y se verificó que en las vecindades de una cavidad en un disco protoplanetario es posible hallar las condiciones necesarias para el frenado de dos cuerpos resonantes y migratorios. Con la expresión hallada para el torque, se pudo calcular la fuerza a la que está sometido cada cuerpo. Junto con las expresiones para las fuerzas de amortiguamiento dadas por Tanaka et al. (2002), estas fuerzas fueron incorporadas en un código de ncuerpos. De esta forma fue posible reproducir bastante bien el resultado de simulaciones hidrodinámicas con un costo computacional mucho menor, las cuales pueden verse en el capítulo 6.

4. Fuerzas tidales

4.1. Preliminares históricos

La idea de fuerzas tidales se remonta a Immanuel Kant (1754), quien dijo que la Luna no sólo atrae a la Tierra, sino que también ejerce un un torque retardador sobre su superficie (ver por ejemplo Efroimsky & Williams 2009). Hoy sabemos que existe un Torque actuante sobre la Tierra que constantemente está frenando su rotación, mientras que por el contrario, la reacción de este torque aleja a nuestro satélite hacia una órbita de mayor altura. Kant tenía en mente sólo la acción de las mareas en los océanos, pero hoy sabemos que en realidad todos los cuerpos se deforman, ya sea como consecuencia de una rotación intrínseca de los mismos, o bien por la acción de una fuerza a distancia, por ejemplo, una fuerza gravitatoria. Kant además dijo que este torque debería anularse en el caso de una resonancia 1:1 entre la rotación terrestre y la órbita Lunar. La primera vez que se planteó que un sistema podría sufrir efectos tidales por deformación no sólo de su componente fluida sino también de su componente sólida, fue en el año 1863, de la mano de John Herschel, hijo del astrónomo William Herschel. La descripción matemática del problema vino unos años más tarde a través de George Darwin, hijo del naturalista Charles Darwin. Este autor, siguiendo a sus predecesores, Roche (1849) y Thompson (1863), los cuales calcularon figuras de equilibrio estático bajo un potencial, asumió que la Tierra era un fluido homogéneo, viscoso e incompresible y atribuyó las fuerzas de marea a esta viscosidad. Darwin (1880,1908) derivó las ecuaciones que describen el potencial perturbador generado por la deformación y lo expandió en una serie de Fourier. Luego lo escribió en elementos orbitales y utilizando las ecuaciones planetarias de Lagrange logró obtener una expresión para la variación temporal de los elementos orbitales de un cuerpo sometido a fuerzas tidales. Este trabajo fue retomado por numerosos autores, los cuales generalizaron las ideas de Darwin. Por ejemplo, se pueden citar los trabajos de de Kaula (1964), MacDonald (1964), Goldreich & Peale (1966), Mignard (1979), Mignard (1980), Hut (1981), Touma & Wisdom (1994), Neron de Surgy & Laskar (1997), Ferraz-Mello et al. (2008) y Efroimsky & Williams (2008).

El modo de proceder de Darwin para obtener las ecuaciones que rigen la evolución temporal de los elementos orbitales no es el único posible. Si bien se puede utilizar un tratamiento perturbativo para hallar las ecuaciones de evolución tidal, también es posible deducirlas de primeros principios físicos, utilizando solo las leyes de conservación del momento angular y de la energía. En las próximas secciones se adoptará esta forma de trabajo y se evitará el paso a través de las ecuaciones de Lagrange. De esta forma, la presentación del tema se realiza de forma más clara e intuitiva. En las secciones siguientes se seguirá la presentación realizada por Ferraz-Mello et al. (2008).

4.2. Preliminares teóricos

En esta sección se verá como es posible deducir las ecuaciones que rigen la evolución temporal de los elementos orbitales de un cuerpo que es perturbado por fuerzas de marea. Antes de esto, se introducirán algunos conceptos que serán de utilidad para comprender a que hace referencia la frase “fuerza de marea” o “fuerza tidal”.

4.2.1. Fuerza gravitatoria

El problema de dos cuerpos está resuelto bajo la hipótesis fundamental de que ambos cuerpos son masas puntuales, es decir, dos masas para las cuales vale la igualdad:

$$\mathbf{F} = -\nabla U = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}\mathbf{r} \quad (4.1)$$

con \mathbf{r} el vector que une ambas masas m_1 y m_2 . G es la constante de gravitación universal.

Sin embargo, su solución sigue siendo válida incluso si los cuerpos tienen dimensiones, siempre que estos tengan una distribución esférica de masa¹. Esto puede demostrarse por cuenta directa, o más fácilmente a través de la ley de Gauss:

Supongamos que un cuerpo tiene una distribución de masa esférica, es decir:

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho(r)$$

Por la simetría del problema, es posible utilizar la relación de Gauss:

$$\int_S \left(\frac{\mathbf{F}(r)}{m} \right) d\mathbf{s} = -G \int_V \rho(r) dV \rightarrow \frac{4\pi r^2}{m} F(r) = -4\pi G \int_0^r \rho(r') r' dr' \quad (4.2)$$

Por lo tanto, si la distribución de masa es radial, se verifica que:

$$\mathbf{F}(r) = -\frac{GmM(r)}{r^3}\mathbf{r} \quad (4.3)$$

Luego, para el problema exterior a la densidad ρ , la solución del problema de dos cuerpos se mantiene inalterada.

Sin embargo, los cuerpos presentes en el universo no son esferas perfectas, y en general más se alejarán de éstas cuanto mayores perturbaciones sufran. Estas deformaciones producirán fuerzas tanto radiales como tangenciales, las cuales perturbarán la solución del problema de dos cuerpos conocida.

Supongamos una masa puntual localizada en una posición que denotaremos por r_* y supongamos que esta masa ejerce una fuerza gravitatoria sobre una distribución de

¹En realidad, la característica que debe preservarse para mantener válida la solución del problema de dos cuerpos es la ausencia de fuerzas no radiales y la posibilidad de escribir a la fuerza radial neta como una fuerza de rotacional nulo, proveniente de un potencial Kepleriano.

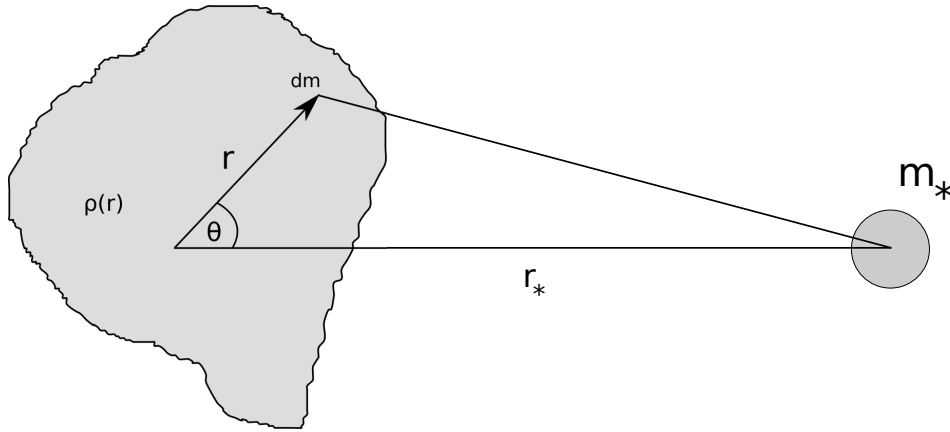


Figura 4.1.: Esquema para el potencial de una masa puntual sobre una masa con dimensiones.

materia $\rho(\mathbf{r})$ no necesariamente radial (un esquema representativo puede verse en la figura (4.1)).

De acuerdo a la notación de la figura (4.1), el potencial gravitatorio de m_* sobre un punto de masa dm correspondiente a m puede ser escrito de la forma:

$$dU = -\frac{Gm_*dm}{r_*} \left[1 + \left(\frac{r}{r_*}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{r_*}\right)\cos(\theta) \right]^{-1/2} \quad (4.4)$$

donde se utilizó el teorema del coseno. Escribiendo (4.4) a segundo orden en r/r_* ($r < r_{max} \ll r_*$):

$$dU \simeq -\frac{Gm_*dm}{r_*} \left[1 + \left(\frac{r}{r_*}\right)\cos\theta + \left(\frac{r}{r_*}\right)^2 P_2(\cos\theta) \right] \quad (4.5)$$

con P_2 el polinomio de Legendre de orden 2.

Ya que (4.4) es el potencial sobre un elemento de masa de m , para hallar el potencial total al que está sometida m , se debe calcular:

$$\begin{aligned} U_{tot} &= \int dU \\ &= -\int \frac{Gm_*}{r_*} \left[1 + \left(\frac{r}{r_*}\right)\cos\theta + \left(\frac{r}{r_*}\right)^2 P_2(\cos\theta) \right] dm \\ &= -\int_V \frac{Gm_*}{r_*} \left[1 + \left(\frac{r}{r_*}\right)\cos\theta + \left(\frac{r}{r_*}\right)^2 P_2(\cos\theta) \right] \rho(\mathbf{r})dV \end{aligned} \quad (4.6)$$

4. Fuerzas tidales

Esta expresión sumada a la elección de un correcto sistema de coordenadas es de utilidad para hallar la fuerza a la que está sometida la masa m . Además, como se tiene el potencial escrito de forma diferencial, esta expresión es útil para resolver el problema del movimiento general de m (rotación+traslación).

4.3. Modelando las fuerzas tidales

Si bien (4.6) permite calcular las fuerzas de marea, en la práctica es una expresión poco manejable, por lo que en esta sección se hará de forma diferente. Se relacionará el potencial ejercido por el cuerpo extendido con sus propiedades inerciales, es decir, sus momentos de inercia.

Para el desarrollo del potencial se seguirá el desarrollo propuesto por Beutler (2005), el cual está inspirado en el desarrollo del potencial de Kaula. Luego, para el cálculo de las fuerzas se seguirá el trabajo de Ferraz-Mello et al. (2008).

Supongamos que hay dos cuerpos en el universo, separados por una distancia r . Debido a la fuerza gravitatoria mutua, ya que estos cuerpos no son rígidos perfectos, se deformarán. En primera aproximación es posible asumir que estos cuerpos son fluidos no viscosos. Por simplicidad, de ahora en adelante se supondrá que sólo uno de los dos cuerpos se deforma ², al que se llamará m , mientras que el restante será llamado M .

Si la rotación del cuerpo extendido es despreciada³, la forma de equilibrio adoptada por esta masa es lo que se conoce como esferoide de Jeans (ver Tisserand 1891), el cual tiene dos ejes iguales ($b=c$) y cuyo eje mayor apunta hacia M . Además, este elipsoide es prolado ($a > b$), y su valor de prolalidad viene dado por la expresión:

$$\epsilon = \frac{a - b}{b} = \frac{15MR^3}{4mr^3} \quad (4.7)$$

donde R es el radio medio de m y r es la distancia que separa a las masas.

Ya que en general ϵ es una cantidad pequeña, el problema consiste en hallar la forma del potencial de un esferoide “casi esférico”. Para ello se desarrollará el potencial del cuerpo deformado en función de los armónicos esféricos.

El potencial gravitatorio debido a una distribución ρ es:

$$V(\mathbf{r}) = -Gm \int_V \frac{\rho_{pr}(\mathbf{r}_\rho)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\rho|} dV \quad (4.8)$$

con $\rho_{pr} = \rho/m$ la densidad relativa al cuerpo.

Ya que interesa hallar el potencial en el espacio no ocupado por ρ , el potencial en esta región satisface la ecuación de Laplace:

²Sin esta suposición, no es posible aplicar el resultado de Jeans para la forma de un fluido no viscoso en un potencial puntual.

³Esta aproximación es suficientemente buena, para más detalles ver apéndice A de Ferraz-Mello et al. (2008).

$$\nabla^2 V = \left[\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial r_i^2} \right] V(\mathbf{r}) = 0 \quad (4.9)$$

con condiciones de contorno impuestas por ρ . r_i son las coordenadas cartesianas x, y, z .

4.3.1. Desarrollo del potencial: Armónicos esféricos

Dada la geometría del problema, es más adecuado un sistema de coordenadas esférico, que está relacionado con las componentes cartesianas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} r_1 &= r \cos \phi \cos \lambda; & r &= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} \\ r_2 &= r \cos \phi \sin \lambda; & \phi &= \arcsin \frac{r_3}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}} \\ r_3 &= r \sin \phi; & \lambda &= \arctan \frac{r_2}{r_1} \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde ϕ es la latitud y λ la longitud. Las coordenadas r_i con $i = 1, 2, 3$ denotan las coordenadas cartesianas x, y, z respectivamente.

El laplaciano debe ser transformado de forma adecuada para trabajar con estas variables. La forma que adopta en coordenadas esféricas es:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \quad (4.11)$$

Planteando separación de variables para el potencial V de la forma:

$$V(\mathbf{r}) = R(r)\Phi(\phi)\Lambda(\lambda) \quad (4.12)$$

y utilizando esta expresión en la ecuación de Laplace, es posible obtener la forma general de V para que sea solución de (4.9):

$$V(r, \lambda, \phi) = -\frac{Gm}{r} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^i \sum_{k=0}^i P_i^k(\sin \phi) \{C_{ik} \cos k\lambda + S_{ik} \sin k\lambda\} \quad (4.13)$$

donde R es el radio medio del esferoide y P_i^k son los polinomios asociados de Legendre. Los coeficientes de C_{ik} y S_{ik} se determinan a partir de relaciones de ortogonalidad. La expresión resultante para calcularlos es:

4. Fuerzas tidales

$$C_{i0} = \frac{1}{R} \int_V \rho_{p_r}(\mathbf{r}_\rho) r_\rho^i P_i(\sin \phi_\rho) dV \quad ; \quad i \geq 0$$

$$C_{ik} = \frac{2}{R} \frac{(i-k)!}{(i+k)!} \int_V \rho_{p_r}(\mathbf{r}_\rho) r_\rho^i P_i^k(\sin \phi_\rho) \sin(k\lambda_\rho) dV \quad ; \quad i, k \geq 0, k \leq i$$

$$S_{i0} = 0 \quad ; \quad i \geq 0$$

$$S_{ik} = \frac{2}{R} \frac{(i-k)!}{(i+k)!} \int_V \rho_{p_r}(\mathbf{r}_\rho) r_\rho^i P_i^k(\sin \phi_\rho) \cos(k\lambda_\rho) dV \quad ; \quad i, k > 0, k \leq i$$

Ya que el cuerpo es prácticamente esférico, sólo bastará calcular los coeficientes hasta el subíndice $i = 2, k = 2$.

$$C_{00} = \int_V \rho_{p_r} r_\rho^0 dV = 1$$

$$C_{10} = \frac{1}{R} \int_V \rho_{p_r} r_\rho \sin \phi_\rho dV = \frac{1}{R} \int_V \rho_{p_r} r_{3\rho} dV = \frac{r_{3CM}}{R} = 0$$

$$C_{11} = \frac{1}{R} \int_V \rho_{p_r} r_\rho \cos \phi_\rho \cos \lambda_\rho dV = \frac{1}{R} \int_V \rho_{p_r} r_{1\rho} dV = \frac{r_{1CM}}{R} = 0$$

$$S_{11} = \frac{1}{R} \int_V \rho_{p_r} r_\rho \cos \phi_\rho \sin \lambda_\rho dV = \frac{1}{R} \int_V \rho_{p_r} r_{2\rho} dV = \frac{r_{2CM}}{R} = 0$$

donde r_{iCM} es la coordenada i -ésima del centro de masa. Notar que estos coeficientes son cero sólo en un sistema que tiene por origen el centro de masa de la distribución ρ .

$$\begin{aligned}
 C_{20} &= \frac{1}{R^2} \int_V \rho_p r_\rho^2 \left[\sin^2 \phi_\rho - \frac{1}{2} \cos^2 \phi_\rho \right] dV \\
 &= \frac{1}{R^2} \int_V \rho_p r_\rho \left[r_{3\rho}^3 - \frac{1}{2} (r_{1\rho}^2 + r_{2\rho}^2) \right] dV \\
 &= \frac{1}{MR^2} \left[\frac{1}{2} (I_{11} + I_{22}) - I_{33} \right] = \frac{1}{mR^2} \left[\frac{1}{2} (A + B) - C \right] \\
 C_{21} &= \frac{1}{R^2} \int_V \rho_p r_\rho^2 \cos \lambda_\rho \cos \phi_\rho \sin \phi_\rho dV \\
 &= \frac{1}{R^2} \int_V \rho_p r_{1\rho} r_{3\rho} dV = -\frac{1}{mR^2} I_{13} = 0 \\
 S_{21} &= \frac{1}{R^2} \int_V \rho_p r_\rho^2 \sin \lambda_\rho \cos \phi_\rho \sin \phi_\rho dV \\
 &= \frac{1}{R^2} \int_V \rho_p r_{2\rho} r_{3\rho} dV = -\frac{1}{mR^2} I_{23} = 0 \\
 C_{22} &= \frac{1}{4R^2} \int_V \rho_p r_\rho^2 \cos^2 \phi_\rho (\cos^2 \lambda_\rho - \sin^2 \lambda_\rho) dV \\
 &= \frac{1}{4R^2} \int_V \rho_p (r_{1\rho}^2 - r_{2\rho}^2) dV \\
 &= \frac{1}{4MR^2} (I_{22} - I_{11}) = \frac{1}{4MR^2} (B - A) \\
 S_{22} &= \frac{1}{2R^2} \int_V \rho_p r_\rho^2 \cos^2 \phi_\rho \cos \lambda_\rho \sin \lambda_\rho dV \\
 &= \frac{1}{2R^2} \int_V \rho_p r_{1\rho} r_{2\rho} dV \\
 &= -\frac{1}{2MR^2} I_{12} = 0
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

donde se impuso la condición $C_{21} = S_{21} = S_{22} = 0$, esto es, los ejes del sistema de coordenadas están orientados según los ejes principales de inercia del esferoide; I_{11} es el momento de inercia respecto del eje mayor. En las expresiones anteriores también se realizó el reemplazo de notación $I_{11} = A$, $I_{22} = B$, $I_{33} = C$.

El potencial desarrollado es entonces:

$$\begin{aligned}
 V(r, \lambda, \phi) &= -\frac{Gm}{r} - \frac{G}{r^3} \left(\frac{3}{2} \sin^2 \phi - \frac{1}{2} \right) \left[\frac{1}{2} (A + B) - C \right] \\
 &\quad - 3 \frac{G}{r^3} \cos^2 \phi \left[\frac{1}{4} (B - A) \cos 2\lambda \right]
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Retomando la hipótesis de esferoide de Jeans ($b=c$), (4.15) se escribe como:

$$V(r, \lambda, \phi) = -\frac{Gm}{r} \left[1 + \frac{B - A}{2mr^2} (3 \cos^2 \psi - 1) \right] \tag{4.16}$$

4. Fuerzas tidales

donde $\cos \psi = \cos \lambda \cos \phi$.

4.3.2. Expansión en elementos orbitales

Con (4.16) se tiene el punto de partida para comenzar a calcular las fuerzas tidales. Una aproximación más suele hacerse. Dado que el esferoide es casi esférico $a \simeq b$ y debido a la forma de los momentos principales de inercia, puede asumirse que $B - A \simeq \epsilon A$. De todas formas, la propagación de esta suposición puede seguirse fácilmente, por lo que los resultados que obtendremos pueden ser adaptados sin dificultad. La expresión (4.16) queda así:

$$V(r, \lambda, \phi) = -\frac{Gm}{r} \left[1 + \frac{\epsilon A}{2mr^2} (3 \cos^2 \psi - 1) \right] \quad (4.17)$$

A fin de evitar la mezcla de variables, se llamará de ahora en adelante al punto de observación $r \rightarrow r_*$ y se dejará la letra r para representar la distancia entre las masas m y M .

Una observación es que la forma tan sencilla de (4.17) es debida a la adecuada elección del sistema de referencia utilizado. En principio, esta ecuación es válida para la calcular la fuerza tidal experimentada por el cuerpo puntual, sin embargo no es el camino adecuado si lo que se busca es una descripción más interesante del problema.

El problema consiste en hallar como varían con el tiempo las variables fundamentales del sistema. Ya que interesa hallar sólo las variaciones seculares del sistema, es necesario escribir (4.17) de un modo adecuado que permita eliminar las frecuencias rápidas del sistema. Lo más natural es escribir (4.17) de forma que el parámetro de menor frecuencia (sobre el que se hará un promedio) quede escrito de forma explícita. Este parámetro es la anomalía media del cuerpo puntual, medida desde un sistema planetocéntrico, con origen en el centro de masa del planeta deformado.

Consideremos un punto \mathbf{r}_* en el espacio y el radio vector \mathbf{r} hacia M . Consideremos como plano fundamental el plano del ecuador planetario y consideremos además que el eje x de nuestro sistema apunta hacia el nodo ascendente. Interesa describir el ángulo ψ de (4.17) en función de los elementos orbitales de M y de r_* , es decir, en función del argumento del pericentro ω , la anomalía verdadera v , la inclinación I (la cual puede ser pensada también como la oblicuidad), la excentricidad e y el semieje a . Esto es válido en el caso que M realmente tenga una órbita elíptica. Esto será siempre así ya que, como veremos más adelante, la fuerza tidal es sólo una pequeña perturbación, la cual genera variaciones seculares.

Utilizando los triángulos de la Fig. (4.2) y a partir del teorema del coseno para triángulos esféricos se tiene que:

$$\cos \psi = \cos \theta \cos \theta^* + \sin \theta \sin \theta^* \cos (\varphi - \varphi^*) \quad (4.18)$$

Ahora es necesario escribir a θ y φ en término de los elementos orbitales de M . A partir del teorema del seno y del coseno para triángulos esféricos, se tienen las relaciones:

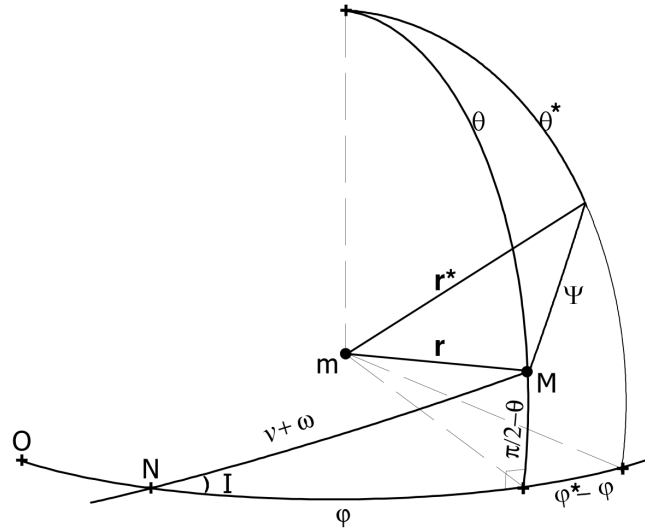


Figura 4.2.: Triángulos esféricos que deben ser resueltos para hallar una relación entre el ángulo ψ y los elementos orbitales de m . El centro de la esfera corresponde con el centro de masa de m . El esferoide m tiene su eje de simetría apuntando constantemente hacia M . Figura de Ferraz-Mello et al. (2008)

$$\sin \theta = \cos(\omega + v) \cos \varphi + \sin(\omega + v) \sin \varphi \cos I \quad (4.19)$$

$$\cos \theta = \sin(\omega + v) \sin I \quad (4.20)$$

$$\varphi \simeq v + \omega - \frac{1}{4} \sin(2v + 2\omega) \sin^2 I \quad (4.21)$$

donde φ fue desarrollado a orden 2 en la inclinación.

La anomalía verdadera puede ser expandida en serie de potencias de la excentricidad y coeficientes dependientes de la anomalía media ℓ :

$$v = \ell + 2e \sin \ell + \frac{5}{4} e^2 \sin 2\ell \quad (4.22)$$

y lo mismo puede hacerse con el radio vector:

$$r = a \left[1 - e \cos \ell + \frac{1}{2} e^2 (1 - \cos 2\ell) \right] \quad (4.23)$$

Con estas expresiones se tiene todo lo necesario para escribir el potencial U en término de los elementos orbitales. De ahora en adelante se hará una separación del potencial en

4. Fuerzas tidales

dos partes:

$$U = U_0 + U_1 \quad (4.24)$$

donde U_0 es el potencial del problema de dos cuerpos puntual y U_1 corresponde a un potencial perturbativo, al cual se le llamará potencial tidal. No es difícil ver que el potencial tidal es una cantidad mucho menor que el potencial Kepleriano:

$$\begin{aligned} \frac{U_1}{U_0} &= \frac{r^* G(B-A)(3\cos^2\psi - 1)}{Gm \cdot 2r^{*3}} \\ &\propto r^* \frac{R^2(3\cos^2\psi - 1)}{2r^{*3}} \\ &< \left(\frac{R}{r^*}\right)^2 \ll 1 \iff R \ll r \end{aligned} \quad (4.25)$$

donde se asumió que el momento de inercia es proporcional a mR^2 con R el radio medio del esferoide. Siempre que la distancia sea grande comparada con el radio medio del cuerpo deformado, la órbita de M será Kepleriana y el potencial podrá expandirse en términos dependientes de dichos elementos. Además, U_1 puede denominarse potencial perturbador.

Si se reemplaza en (4.17) las expresiones hasta aquí encontradas y se expande a orden 2 en la inclinación y excentricidad, se tiene que:

$$\begin{aligned} U_2 &= -\frac{3k_f GMR^5}{4a^3 r^{*3}} \left[-\frac{2}{3} - e^2 + \left(1 + \frac{3}{2}e^2 - \frac{1}{2}S^2\right)P^2 \right. \\ &\quad + \left(1 - \frac{5}{2}e^2 - \frac{1}{2}S^2\right)P^2 \cos(2\varphi^* - 2\ell - 2\omega) + \frac{7}{2}eP^2 \cos(2\varphi^* - 3\ell - 2\omega) \\ &\quad - \frac{1}{2}eP^2 \cos(2\varphi^* - \ell - 2\omega) + \frac{17}{2}e^2P^2 \cos(2\varphi^* - 4\ell - 2\omega) \\ &\quad - \left(2 - 3P^2\right)e \cos \ell - \left(3 - \frac{9}{2}P^2\right)e^2 \cos 2\ell \\ &\quad \left. + QS \left(\sin \varphi^* - \sin(\varphi^* - 2\ell - 2\omega) \right) + \frac{1}{2}P^2S^2 \left(\cos 2\varphi^* + \cos(2\ell + 2\omega) \right) \right] \end{aligned} \quad (4.26)$$

con

$$\begin{aligned} S &= \sin I \\ P &= \sin \theta^* \\ Q &= \sin 2\theta^* \end{aligned}$$

donde se escribió de forma explícita una forma para ϵ dada por (ver Tisserand 1891):

$$\epsilon = \frac{15}{4} \left(\frac{M}{m} \right) \left(\frac{R}{r} \right)^3 \quad (4.27)$$

y donde se definió k_f como:

$$k_f = \frac{15A}{4mR^2} \quad (4.28)$$

este parámetro pertenece a los llamados números de Love (ver teoría de la elasticidad, por ejemplo: “Tratado de la teoría Matemática de la Elasticidad”, por A. E. H. Love, 1926).

4.3.3. Ondas tidales

La ecuación (4.26) permite realizar un análisis detallado de las frecuencias fundamentales involucradas en el problema. Para esto se puede imaginar que θ^* y φ^* son la colatitud y longitud de un punto sobre el esferoide, el cual rota con una frecuencia angular Ω en la dirección z . Se tiene entonces que $\varphi^* = \Omega t + \varphi_0^*$. Todos los términos son funciones armónicas que dependen de φ^* de la forma $\varphi^* - \alpha$, con α una función de la anomalía media, la cual tiene una frecuencia n asociada. Por lo tanto, cada término de (4.26) presenta frecuencias bien definidas.

N	Frecuencia
0	$2\Omega - 2n$
1	$2\Omega - 3n$
2	$2\Omega - n$
3	$2\Omega - 4n$
4	2Ω
5	n
6, 7	$2n$
8	$\Omega - 2n$
9	Ω

Tabla 4.1.: Frecuencias características del potencial tidal. N corresponde al número de onda, según el orden en que aparece en el desarrollo (4.26).

De acuerdo a la nomenclatura de Beutler (2005) y Ferraz-Mello et al. (2008) estas ondas pueden dividirse en tres clases: sectoriales, zonales y tesserales. A grandes rasgos puede decirse que:

- Las ondas sectoriales son aquellas de la forma $P^2 \cos(2\varphi^* - \alpha)$, es decir, dependen de la latitud y de la longitud. Estos términos son máximos en el ecuador y en longitudes $\varphi^* = \alpha/2$.

4. Fuerzas tidales



Figura 4.3.: Función armónica sectorial. Los colores representan cambio de signo. en este caso es un armónico esférico con $i=6$, $k=0$.

- Las ondas zonales son aquellas que son independientes de la longitud φ^* .
- Las ondas Tisserales son aquellas de la forma $QS \sin(\varphi^* - \alpha)$. Son máximas a latitudes de 45° y cuando la longitud φ^* es igual a α .

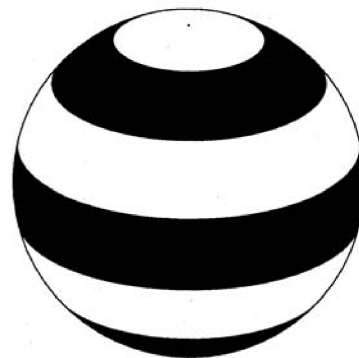


Figura 4.4.: Función armónica zonal. Los colores representan cambio de signo. en este caso es un armónico esférico con $i=6$, $k=0$.

4.3.4. Potencial de retardo

Ya que los planetas están muy lejos de ser fluidos perfectos no viscosos, es necesario incluir de alguna forma la viscosidad planetaria. Un buen modo de introducirla⁴ es

⁴En realidad el más utilizado en la literatura.

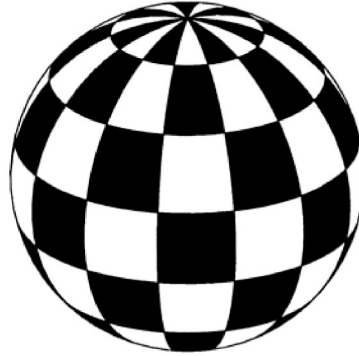


Figura 4.5.: Función armónica Tesseral. Los colores representan cambio de signo. en este caso es un armónico esférico con $i=13$, $k=7$.

considerar que la deformación planetaria debida al campo gravitatorio puntual tiene un cierto retardo, de modo tal que cuanto mayor sea el retardo, mayor viscosidad asociada presentará el planeta.

Este retardo será añadido en forma de un ángulo de fase ε . El tratamiento es sencillo, la idea consiste en añadir a cada frecuencia fundamental de (4.26) un ángulo de fase ε_i y expandir cada término a primer orden en el retardo:

$$\begin{aligned} \cos(f_i(\varphi^*, l)) &\rightarrow \cos(f_i(\varphi^*, l) - \varepsilon_i) \simeq \cos(f_i(\varphi^*, l)) + \varepsilon \sin(f_i(\varphi^*, l)) \\ \sin(f_i(\varphi^*, l)) &\rightarrow \sin(f_i(\varphi^*, l) - \varepsilon_i) \simeq \sin(f_i(\varphi^*, l)) - \varepsilon \cos(f_i(\varphi^*, l)) \end{aligned}$$

de esta forma es posible escribir el potencial (4.26) de la forma:

$$U_1 = U_1^0 + U_1^1 \quad (4.29)$$

donde U_1^0 es el potencial no retardado dado por (4.26) (primer término del desarrollo). U_1^1 es el potencial de retardo, obtenido luego de agregar a cada frecuencia una fase arbitraria de retardo y expandirla a primer orden en el retardo, y es dado por:

4. Fuerzas tidales

$$\begin{aligned}
U_1^1 = & -\frac{3k_f GMR^5}{8a^3 r^{*3}} \left[P^2 \varepsilon_0 (2 - 5e^2 - S^2) \sin(2\varphi^* - 2\ell - 2\omega) \right. \\
& + eP^2 (7\varepsilon_1 \sin(2\varphi^* - 3\ell - 2\omega) - \varepsilon_2 \sin(2\varphi^* - \ell - 2\omega)) \\
& + 17e^2 P^2 \varepsilon_3 \sin(2\varphi^* - 4\ell - 2\omega) + P^2 S^2 \varepsilon_4 \sin 2\varphi^* \\
& - e\varepsilon_5 (4 - 6P^2) \sin \ell - 3e^2 \varepsilon_6 (2 - 3P^2) \sin 2\ell \\
& \left. + P^2 S^2 \varepsilon_7 \sin(2\ell + 2\omega) + 2QS (\varepsilon_8 \cos(\varphi^* - 2\ell - 2\omega) - \varepsilon_9 \cos \varphi^*) \right]
\end{aligned}$$

De esta forma se tiene el potencial gravitatorio generado por el esferoide en todo el espacio respecto de un sistema posicionado en el centro de masa del mismo, con el eje z según su dirección de rotación.

A partir del potencial es posible obtener el campo gravitatorio en el espacio, y a partir de éste se puede obtener la fuerza a la que está sometida M^* .

4.3.5. Fuerza de marea

A partir de (4.30) es posible calcular la fuerza de marea que sufrirá M^* a lo largo de su órbita. En realidad, a partir de (4.30) es posible calcular la fuerza a la que está sometida cualquier partícula en el espacio. Ya que el sistema considerado es inercial, la fuerza total sobre M^* se calcula como:

$$\frac{\mathbf{F}}{M^*} = -\nabla_{r^*} U_1 = -\frac{\partial U_1}{\partial r^*} \hat{\mathbf{r}}^* - \frac{1}{r^*} \frac{\partial U_1}{\partial \theta^*} \hat{\boldsymbol{\theta}}^* - \frac{1}{r^* \sin \theta^*} \frac{\partial U_1}{\partial \phi^*} \hat{\boldsymbol{\phi}}^* \quad (4.30)$$

Es fácil ver que el término U_1^0 sólo contribuye con una fuerza radial, mientras que el término U_1^1 contribuye con fuerzas en las tres direcciones r_i , con r_1 la dirección radial, r_2 la dirección polar y r_3 la dirección azimutal:

$$\begin{aligned}
F_1(\mathbf{r}) = & \frac{3k_f GM^2 R^5}{8a^7} \left[-3e(8\varepsilon_0 - 7\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 2\varepsilon_5) \sin \ell \right. \\
& - 3e^2(21\varepsilon_0 - 4\varepsilon_2' - 17\varepsilon_3 + 4\varepsilon_5 + 3\varepsilon_6) \sin 2\ell \\
& \left. + 3S^2(\varepsilon_0 - \varepsilon_4 - \varepsilon_7 - 2\varepsilon_8 + 2\varepsilon_9) \sin(2\ell + 2\omega) \right] \quad (4.31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_2(\mathbf{r}) = & \frac{3k_f GM^2 R^5}{8a^7} \left[eS(+8\varepsilon_0 - 7\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 6\varepsilon_5 - 12\varepsilon_8 + 4\varepsilon_9 + 6\varepsilon_{15} + 2\varepsilon_{16}) \cos \omega \right. \\
 & - eS(8\varepsilon_0 - 7\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 6\varepsilon_5 + 4\varepsilon_8 - 12\varepsilon_9 - 6\varepsilon_{14} + 14\varepsilon_{17}) \cos(2\ell + \omega) \\
 & \left. - 4S(\varepsilon_8 - \varepsilon_9) \cos(\ell + \omega) \right] \quad (4.32)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_3(\mathbf{r}) = & \frac{3k_f GM^2 R^5}{8a^7} \left[(4 - 14e^2 - 3S^2)\varepsilon_0 + 56e^2\varepsilon_1 + 2S^2(\varepsilon_8 + \varepsilon_9) \right. \\
 & + e(16\varepsilon_0 + 14\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2) \cos \ell + e^2(44\varepsilon_0 - 8\varepsilon_2 + 34\varepsilon_3) \cos 2\ell \\
 & \left. + S^2(\varepsilon_0 + 2\varepsilon_4 - 2\varepsilon_8 - 2\varepsilon_9) \cos(2\ell + 2\omega) \right]. \quad (4.33)
 \end{aligned}$$

A partir de estas expresiones es posible obtener la variación de los elementos orbitales de M^* . Hay dos métodos posibles: (i) Las ecuaciones de Gauss; (ii) Principios de conservación. Una línea de trabajo más clara e intuitiva es la segunda opción, por lo tanto será la adoptada en las siguientes líneas. No se hará el desarrollo correspondiente, sin embargo se enunciarán las hipótesis fundamentales involucradas y se escribirán las ecuaciones obtenidas. El desarrollo completo puede verse en Ferraz-Mello et al. (2008).

4.3.6. Variaciones temporales

Cuando se estudia la evolución orbital por períodos de tiempo prolongados, una forma efectiva de realizar esta tarea es promediando las cantidades involucradas respecto de los términos de corto período. Este método es útil para realizar un estudio de la dinámica secular del problema. Sin embargo, realizando estos promedios se pierde la posibilidad de realizar un estudio de la dinámica resonante, la cual puede dar lugar a comportamientos novedosos y no esperados.

La frecuencia más rápida involucrada en la fuerza tidal es la asociada a la anomalía media l , es decir, la frecuencia n . El promedio sobre la fuerza se realiza según la siguiente expresión:

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{F} dl \quad (4.34)$$

donde el símbolo integral debe interpretarse como integración componente a componente. De esta forma, los términos de corto período son eliminados y las frecuencias correspondientes son reemplazadas por sus contribuciones medias.

Por las leyes de conservación, el momento angular y la energía del sistema deben conservarse a lo largo del tiempo. Estas leyes son las que permiten relacionar las fuerzas

4. Fuerzas tidales

con los cambios temporales en los elementos orbitales.

A partir de la ley de conservación del momento angular, es posible deducir cual es la variación de la velocidad de rotación del esferoide Ω y del ángulo de oblicuidad J . Si suponemos que M^* es puntual y que sólo posee momento angular orbital, y que el esferoide es lo suficientemente masivo como para poseer sólo momento angular rotacional, se satisface que $\dot{L}_{rot} + \dot{L} = 0$. Ya que las variaciones de momento angular orbital son producidas únicamente a partir del torque ejercido por el esferoide ($\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$), debe verificarse que $\dot{\mathbf{L}}_{rot} = -\mathbf{M}$ donde M es el vector momento de la fuerza \mathbf{F} respecto del origen ubicado en el centro de masa del esferoide. Además, ya que el cuerpo es un esferoide de proladidad muy pequeña (casi una esfera), se verifica que $L_{rot} \simeq C\Omega$, donde C es el momento de inercia respecto del eje de rotación.

Por lo tanto, la variación del Ω vendrá dada por la ecuación:

$$C \langle \dot{\Omega} \rangle = - \langle M_z \rangle \quad (4.35)$$

y la variación del ángulo J es:

$$C\Omega \langle \dot{J} \rangle = - \langle M_y \rangle \quad (4.36)$$

Reemplazando el valor del torque en estas ecuaciones, se tiene:

$$\langle \dot{\Omega} \rangle = - \frac{3k_f GM^2 R^5}{8Ca^6} \left[4\epsilon_0 + e^2(-20\epsilon_0 + 49\epsilon_1 + \epsilon_2) + 2S^2(-2\epsilon_0 + \epsilon_8 + \epsilon_9) \right] \quad (4.37)$$

$$\langle \dot{J} \rangle = \frac{3k_f GM^2 R^5}{4C\Omega a^6} S(\epsilon_0 + \epsilon_8 - \epsilon_9) \quad (4.38)$$

Estas ecuaciones son generales y no hay ninguna suposición más que las enunciadas anteriormente.

A partir del cálculo del trabajo realizado por las fuerzas tidales y la expresión de la energía para el problema de Kepler junto con la tercera ley de Kepler, es posible obtener la ecuación que rige la variación del semieje para M^* :

$$\begin{aligned} \langle \dot{n} \rangle = & - \frac{3n}{2a} \langle \dot{a} \rangle = - \frac{9n^2 k_f MR^5}{8ma^5} \\ & \times \left[4\epsilon_0 - e^2(20\epsilon_0 - \frac{147}{2}\epsilon_1 - \frac{1}{2}\epsilon_2 + 3\epsilon_5) - 4S^2(\epsilon_0 - \epsilon_8) \right] \end{aligned} \quad (4.39)$$

Por otro lado, el momento angular orbital Kepleriano es:

$$|\mathcal{L}| = \frac{Mm}{m+M} na^2 \sqrt{1-e^2} = \frac{GMm}{na} \sqrt{1-e^2}. \quad (4.40)$$

donde a y e son el semieje (astrocéntrico) y la excentricidad respectivamente. A partir de (4.40) es posible obtener una expresión para la variación de la excentricidad y la inclinación.

Para obtener la variación de la inclinación se razona de forma análoga a la utilizada en la obtención de la expresión para la variación de J . La variación del módulo de L vendrá dada por los torques actuantes en la dirección de L , mientras que el cambio en la inclinación vendrá dado por el torque ejercido de forma perpendicular a L .

Escrito en forma de ecuaciones:

$$|\dot{L}| = M_{\perp} \quad |L|\dot{I} = M_{\parallel} \quad (4.41)$$

donde:

$$\begin{aligned} M_{\perp} &= M_z \cos I - M_y \sin I \\ M_{\parallel} &= -M_z \sin I - M_y \cos I. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Se tiene entonces:

$$\langle \dot{e} \rangle = -\frac{3nek_f MR^5}{8ma^5} \left(2\varepsilon_0 - \frac{49}{2}\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2 + 3\varepsilon_5 \right) \quad (4.43)$$

$$\langle \dot{I} \rangle = \frac{3nk_f SMR^5}{4ma^5} (-\varepsilon_0 + \varepsilon_8 - \varepsilon_9) \quad (4.44)$$

Una vez más, este par de ecuaciones es general, en el sentido que no hay ninguna suposición intermedia que no haya sido enunciada de forma explícita anteriormente.

Aún falta una ecuación más para el sistema, la evolución temporal de la longitud del pericentro ω , la cual necesita un pasaje a través de las ecuaciones de Gauss y además es necesario expandir a mayor orden en excentricidad e inclinación las ecuaciones para que el tratamiento siga siendo a segundo orden (ver errata Ferraz-Mello et al. 2008). Para nuestros fines, el desarrollo hasta aquí expuesto será suficiente.

Resumiendo, las ecuaciones que rigen la evolución temporal de los elementos orbitales son:

$$\langle \dot{\Omega} \rangle = -\frac{3k_f GM^2 R^5}{8Ca^6} \left[4\varepsilon_0 + e^2(-20\varepsilon_0 + 49\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + 2S^2(-2\varepsilon_0 + \varepsilon_8 + \varepsilon_9) \right] \quad (4.45)$$

$$\langle \dot{j} \rangle = \frac{3k_f GM^2 R^5}{4C\Omega a^6} S(\varepsilon_0 + \varepsilon_8 - \varepsilon_9) \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} \langle \dot{n} \rangle &= -\frac{3n}{2a} \langle \dot{a} \rangle = -\frac{9n^2 k_f MR^5}{8ma^5} \\ &\times \left[4\varepsilon_0 - e^2(20\varepsilon_0 - \frac{147}{2}\varepsilon_1 - \frac{1}{2}\varepsilon_2 + 3\varepsilon_5) - 4S^2(\varepsilon_0 - \varepsilon_8) \right] \end{aligned} \quad (4.47)$$

4. Fuerzas tidales

$$\langle \dot{e} \rangle = -\frac{3nek_f MR^5}{8ma^5} \left(2\varepsilon_0 - \frac{49}{2}\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2 + 3\varepsilon_5 \right) \quad (4.48)$$

$$\langle \dot{I} \rangle = \frac{3nk_f SMR^5}{4ma^5} (-\varepsilon_0 + \varepsilon_8 - \varepsilon_9) \quad (4.49)$$

4.3.7. Modelo lineal

En la teoría lineal, también llamado modelo de Mignard (Mignard 1979), se supone que el retardo es proporcional a la frecuencia asociada; además se supone que la constante de proporcionalidad es la misma para cada retardo. Dicha constante es el tiempo de retardo:

$$\varepsilon_i = \tau n_i \quad (4.50)$$

donde n_i viene dado por la tabla (4.1).

Sin embargo, será útil trabajar de otra forma. Se asumirá el modelo lineal y se considerará el caso de planetas cercanos a su estrella. Bajo esta suposición, se satisface que $\Omega_* \ll n$ con n el movimiento medio planetario.

De este modo la tabla (4.1) se transforma en:

N	Frecuencia
0	$\sim -2n$
1	$\sim -3n$
2	$\sim -n$
3	$\sim -4n$
4	~ 0
5	n
6, 7	$2n$
8	$\sim -2n$
9	~ 0

Tabla 4.2.: Frecuencias características del potencial tidal para planetas cercanos a su estrella ($\Omega_* \ll n$).

Además, se empleará una nueva variable Q de forma que $|\varepsilon_0| = 1/Q$. Para escribir los demás retardos, se utilizará el modelo lineal y la hipótesis de planetas cercanos (ver tabla (4.2)).

En la literatura es común trabajar con las ecuaciones escritas en términos dependientes del parámetro $Q' = 3Q/2k_f$.

Como ejemplo se presentará la forma clásica de la ecuación que rige la evolución temporal del semieje planetario cuando la inclinación y la excentricidad son nulas.

ε_i	$\varepsilon_i(\varepsilon_0)$
ε_0	$- \varepsilon_0 $
ε_1	$-\frac{2}{3} \varepsilon_0 $
ε_2	$-\frac{1}{2} \varepsilon_0 $
ε_3	$-2 \varepsilon_0 $
ε_4	~ 0
ε_5	$\frac{1}{2} \varepsilon_0 $
$\varepsilon_{6,7}$	$ \varepsilon_0 $
ε_7	$- \varepsilon_0 $
ε_8	~ 0

 Tabla 4.3.: Retardos en función del retardo fundamental ε_0 .

Si se supone como cuerpo extendido a la estrella central, ya que la inclinación y la excentricidad son nulas, la ecuación se reduce a:

$$\frac{3n}{2a} \langle \dot{a} \rangle = 4\varepsilon_0 \frac{9n^2 k_f M_p R_*^5}{8M_* a^5} \quad (4.51)$$

Utilizando la tercer ley de Kepler ($n^2 a^3 \simeq GM_*$) y la definición de Q' se tiene que:

$$\frac{1}{a} \langle \dot{a} \rangle = -\frac{9}{2} \sqrt{\frac{G}{M_*}} \frac{M_p R_*^5}{Q_*'} a^{-13/2} \quad (4.52)$$

Ésta es la ecuación utilizada en Jackson et al. (2009) para el cálculo de la marea estelar. A esta ecuación se le debe agregar el término de marea planetaria además de incluir el caso general en el cual la excentricidad y la inclinación son no nulas.

Procediendo de este modo, y junto con la tabla (4.3), es posible deducir el conjunto de ecuaciones clásicas que rigen los procesos tidales. En las páginas siguientes se estudiará un caso particular de migración tidal (planetas prácticamente circulares cercanos a su estrella). Este estudio empleará las ecuaciones tidales para el semieje y la excentricidad. Por esta razón, aquí se escriben de forma explícita en la forma que suelen aparecer en la literatura (ver Jackson et al. 2009). La deducción de ellas, como se dijo con anterioridad, es directa a partir de lo expuesto hasta aquí.

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = - \left[\frac{63}{2} (GM_*^3)^{1/2} \frac{R_p^5}{Q_p' M_p} e^2 + \frac{9}{2} \left(\frac{G}{M_*} \right)^{1/2} \frac{R_*^5 M_p}{Q_*'} \left(1 + \frac{57}{4} e^2 \right) \right] a^{-13/2} \quad (4.53)$$

$$\frac{1}{e} \frac{de}{dt} = - \left[\frac{63}{4} (GM_*^3)^{1/2} \frac{R_p^5}{Q_p' M_p} + \frac{225}{16} \left(\frac{G}{M_*} \right)^{1/2} \frac{R_*^5 M_p}{Q_*'} \right] a^{-13/2} \quad (4.54)$$

4.4. Simplificando el modelo

En esta sección se justificarán una serie de simplificaciones al modelo, las cuales consistirán en despreciar la excentricidad de los planetas cercanos a la estrella, pero será añadido el efecto producido por ella. Esto quedará justificado desde un punto de vista de escalas de tiempo. En efecto, si podemos demostrar que el tiempo de circularización de una órbita (por efecto de fuerzas tidales) es mucho menor que el tiempo característico de decaimiento orbital, entonces al despreciar la excentricidad en la integración de las ecuaciones de evolución tidal no se estará cometiendo un error importante y la simplificación será válida. Para que las líneas anteriores estuviesen completas, debería verificarse además que los efectos migratorios en esa escala tan corta de tiempo sean despreciables. Lamentablemente esto no será así.

El estudio que haremos en esta primera parte consiste principalmente en el análisis de los tiempos característicos de migración. Por lo tanto, como introducción se define el tiempo característico de un proceso físico.

El tiempo característico de un proceso físico se define como el proceso multiplicado por la inversa de de su variación temporal:

$$\tau_f = f \left| \frac{df}{dt} \right|^{-1} \quad (4.55)$$

4.4.1. Tiempo característico de migración orbital

El tiempo característico de migración orbital por fuerzas de marea es:

$$\begin{aligned} \tau_a &= a \left| \frac{da}{dt} \right|^{-1} = \\ &= \left[\frac{63}{2} (GM_*^3)^{1/2} \frac{R_p^5}{Q'_p M_p} e^2 + \frac{9}{2} \left(\frac{G}{M_*} \right)^{1/2} \frac{R_*^5 M_p}{Q'_*} \left(1 + \frac{57}{4} e^2 \right) \right]^{-1} a^{13/2} \end{aligned} \quad (4.56)$$

Para realizar un estudio más sencillo es conveniente separar el proceso en dos partes, una correspondiente a la marea estelar, y otra correspondiente a la marea planetaria. Si sólo se considera la marea planetaria, se necesita considerar solo el primer término del corchete de (4.56). Formalmente se puede considerar que $1/Q'_* \rightarrow 0$. Se tiene entonces que:

$$\tau_a^p = \left[\frac{63}{2} (GM_*^3)^{1/2} \frac{R_p^5}{Q'_p M_p} e^2 \right]^{-1} a^{13/2} \quad (4.57)$$

por lo tanto:

$$\tau_a^p \propto \frac{1}{e^2} \quad (4.58)$$

Por lo que cuando la excentricidad tiende a cero, la marea planetaria se torna ineficiente y no es capaz de generar un decaimiento orbital. Al ser inversamente proporcional con e^2 , incluso un decaimiento pequeño en la excentricidad afecta notablemente la tasa migratoria.

Ya que interesa realizar una simplificación del modelo, es interesante notar que si se lograra demostrar que el tiempo de circularización es mucho más corto que el tiempo de decaimiento debido a la marea planetaria, o bien que la tasa de migración por marea planetaria es pequeña comparada con la migración posterior a la circularización del sistema, es decir, migración sólo debida a marea estelar, entonces se podría suponer que $1/Q'_p = 0$ para todo tiempo sin cometer un error significativo. Es bueno notar que cuando la excentricidad es nula, la resolución de las ecuaciones es muy simple.

Inspirados en el párrafo anterior, se puede estudiar la marea estelar, es decir, cuando $1/Q'_p = 0$. La ecuación que rige la variación temporal del semieje adopta la forma:

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = -\frac{9}{2} \left(\frac{G}{M_*} \right)^{1/2} \frac{R_*^5 M_p}{Q'_*} \left(1 + \frac{57}{4} e^2 \right) a^{-13/2} \quad (4.59)$$

y el tiempo característico es:

$$\tau_a^* = \left[\frac{9}{2} \left(\frac{G}{M_*} \right)^{1/2} \frac{R_*^5 M_p}{Q'_*} \left(1 + \frac{57}{4} e^2 \right) \right]^{-1} a^{13/2} \quad (4.60)$$

Por lo tanto, la migración debida a marea estelar continúa incluso si la órbita es circular. Es interesante la comparación entre los tiempos de migración orbital para el caso planetario y el caso estelar:

$$\begin{aligned} \frac{\tau_a^*}{\tau_a^p} &= 7 \left(\frac{M_*}{M_p} \right)^2 \left(\frac{R_p}{R_*} \right)^5 \left(\frac{Q_*}{Q_p} \right) \left(\frac{e^2}{1 + \frac{57}{4} e^2} \right) \\ &\simeq 7e^2 \left(\frac{M_*}{M_p} \right)^2 \left(\frac{R_p}{R_*} \right)^5 \left(\frac{Q_*}{Q_p} \right) \end{aligned} \quad (4.61)$$

donde se realizó un desarrollo a orden 2 en la excentricidad.

La expresión (4.61) está acotada inferiormente, ya que los parámetros físicos tanto estelares como planetarios están acotados. La cota de (4.61) vendrá dada por los valores más pequeños del numerador y los más grandes del denominador. El orden de los valores numéricos para estas cotas son, asumiendo una estrella de tipo solar:

4. Fuerzas tidales

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{M_*}{M_p}\right)_{min} &\sim \frac{10^0}{10^{-2}} \\
 \left(\frac{R_p}{R_*}\right)_{min} &\sim \frac{10^5}{10^6} \\
 \left(\frac{Q_*}{Q_p}\right)_{min} &\sim \frac{10^6}{10^5}
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

bajo estas suposiciones (4.61) es del orden:

$$\frac{\tau_a^*}{\tau_a^p} \sim 7e^2 \tag{4.63}$$

Así, en este caso extremo, para despreciar la marea planetaria frente a la estelar es necesario que la excentricidad satisfaga $e \ll 0,38$. Esta es una condición favorable en la mayoría de los casos. En casos más realistas, la condición resultante se vuelve más restrictiva.

Veamos ahora la cota superior, es decir, cuando el numerador es máximo y el denominador es mínimo. Si se considera una estrella de masa $M_* = M_\odot$, entonces:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{M_*}{M_p}\right)_{max} &\sim \frac{10^0}{10^{-6}} \\
 \left(\frac{R_p}{R_*}\right)_{max} &\sim \frac{10^4}{10^6} \\
 \left(\frac{Q_*}{Q_p}\right)_{max} &\sim \frac{10^6}{10^4}
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

bajo estas suposiciones (4.61) es del orden:

$$\frac{\tau_a^*}{\tau_a^p} \sim 7 \times 10^4 \times e^2 \tag{4.65}$$

Por lo tanto, en este caso extremo, para despreciar la marea planetaria frente a la estelar, es necesario que la excentricidad satisfaga $e \ll 0,0038$. Esta condición es mucho más restrictiva que el caso estudiado en las líneas anteriores.

Así, no es posible afirmar que el tiempo de migración por marea planetaria sea mucho menor que el tiempo de migración por marea estelar. En vista de esta dificultad, se estudiarán los tiempos característicos de circularización.

4.4.2. Tiempo característico de circularización

En la ecuación (4.54) se observa claramente que $e(t)$ es una función que decrece monótonamente con el tiempo. Además, si $e(t') = 0$ para algún t' , se tiene que $e(t) = 0$ para todo $t > t'$. En esta sección se estudiará el tiempo característico de circularización. El tiempo característico de evolución para la excentricidad es:

$$\tau_e = \left[\frac{63}{4} (GM_*^3)^{1/2} \frac{R_p^5}{Q'_p M_p} + \frac{225}{16} \left(\frac{G}{M_*} \right)^{1/2} \frac{R_*^5 M_p}{Q'_*} \right]^{-1} a^{13/2} \quad (4.66)$$

Utilizando los mismos argumentos de la sección anterior, se puede separar el tiempo de circularización en dos, uno para la marea planetaria y otro para la marea estelar. El tiempo característico de circularización para el término de marea planetaria es:

$$\tau_e^p = \left[\frac{63}{4} (GM_*^3)^{1/2} \frac{R_p^5}{Q'_p M_p} \right]^{-1} a^{13/2} \quad (4.67)$$

mientras que el tiempo característico de circularización para la marea estelar es:

$$\tau_e^* = \left[\frac{225}{16} \left(\frac{G}{M_*} \right)^{1/2} \frac{R_*^5 M_p}{Q'_*} \right]^{-1} a^{13/2} \quad (4.68)$$

El cociente entre el tiempo de circularización por marea estelar y planetaria es:

$$\begin{aligned} \frac{\tau_e^*}{\tau_e^p} &= \frac{252}{225} \left(\frac{M_*}{M_p} \right)^2 \left(\frac{R_p}{R_*} \right)^5 \left(\frac{Q_*}{Q_p} \right) \\ &\simeq \left(\frac{M_*}{M_p} \right)^2 \left(\frac{R_p}{R_*} \right)^5 \left(\frac{Q_*}{Q_p} \right) \end{aligned} \quad (4.69)$$

Utilizando los valores dados en (4.63) y (4.65) para la comparación entre el tiempo de circularización por marea planetaria y estelar, se tiene:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\tau_e^*}{\tau_e^p} \right)_{min} &= 1 \\ \left(\frac{\tau_e^*}{\tau_e^p} \right)_{max} &= 10^4 \end{aligned} \quad (4.70)$$

De esto se ve que el tiempo de circularización por marea planetaria es, en general, mucho más corto que el tiempo de circularización por marea estelar. Por lo tanto, en la práctica, es posible despreciar el efecto circularizador de la marea estelar.

4.4.3. Migración vs Circularización

Ya que en general la excentricidad inicial no será muy pequeña, no es posible asumir que la migración estará gobernada por la marea estelar. La comparación entre el tiempo de circularización y de migración se hará suponiendo que ambos términos contribuyen al decaimiento orbital. En cuanto a la circularización, en la sección anterior se demostró que a fines prácticos es posible despreciar la circularización por marea estelar:

$$\left[\frac{\tau_a^p + \tau_a^*}{\tau_e^p} \right]^{-1} = \left[\frac{\tau_a^p}{\tau_e^p} + \frac{\tau_a^*}{\tau_e^p} \right]^{-1} \quad (4.71)$$

$$= 2 \left[\frac{1}{e^2} + 7 \left(\frac{M_*}{M_p} \right)^2 \left(\frac{R_p}{R_*} \right)^5 \left(\frac{Q_*}{Q_p} \right) \frac{1}{1 + 57e^2/4} \right]^{-1} \quad (4.72)$$

$$\simeq 2 \left[e^2 + \frac{1}{7} \left(\frac{M_p}{M_*} \right)^2 \left(\frac{R_*}{R_p} \right)^5 \left(\frac{Q_p}{Q_*} \right) \right] \quad (4.73)$$

Si se consideran nuevamente los valores extremos (4.63) y (4.65), se tiene que:

$$\left[\frac{\tau_e^p}{\tau_a} \right]_{min} = 2 \left[e^2 + \frac{10^{-4}}{7} \right] \ll 1 \quad (4.74)$$

$$\left[\frac{\tau_e^p}{\tau_a} \right]_{max} = 2 \left[e^2 + \frac{1}{7} \right] < 1 \quad (4.75)$$

Así, el tiempo de circularización es más corto que el tiempo de migración en todos los casos. En el caso más general (intermedio entre las cotas), se ve que la circularización es mucho más veloz que la migración.

En el caso máximo, un factor diez en las escalas de tiempo no es un argumento muy fuerte a favor del desprecio de la marea planetaria en las ecuaciones.

Es necesario notar además que un tiempo de circularización corto frente al tiempo migratorio, no necesariamente significa que sea posible despreciar la migración debida a los términos dependientes de la excentricidad. En efecto, la migración debida a la marea planetaria puede ser muy localizada temporalmente, sin embargo, la tasa migratoria puede ser alta. En la siguiente sección se cuantificará este efecto y se presentará un modelo simplificado, en el sentido de despreciar los términos dependientes de la excentricidad, sin embargo se considerará la migración rápida debida a estos términos.

Para realizar esta tarea es necesario resolver, al menos de forma aproximada las ecuaciones (4.53) y (4.54) y de esta forma cuantificar el decaimiento orbital inicial.

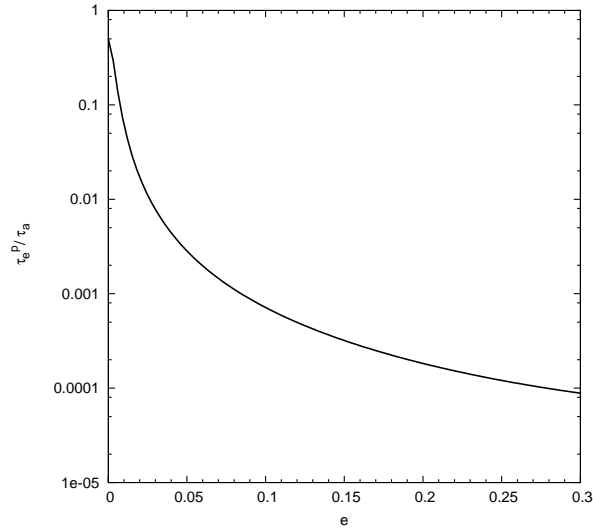


Figura 4.6.: Tiempo característico de circularización respecto del tiempo característico de migración. Se observa que a muy baja excentricidad el tiempo tiende a ser comparable, mientras que para una excentricidad $e \sim 0,05$ la migración es mucho más lenta que la circularización.

4.4.4. Trayectoria en el espacio (a, e)

Por simplicidad, se modificará la notación de las ecuaciones (4.53) y (4.54):

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = - [\alpha e^2 + \beta (1 + \gamma e^2)] a^{-13/2} \quad (4.76)$$

$$\frac{1}{e} \frac{de}{dt} = -\varepsilon a^{-13/2} \quad (4.77)$$

donde α , β , γ , ε son las constantes correspondientes a cada término de (4.53) y (4.54). α y β están relacionados por:

$$\frac{\alpha}{\beta} = 7 \left(\frac{Q_*}{Q_p} \right) \left(\frac{M_*}{M_p} \right)^2 \left(\frac{R_p}{R_*} \right)^5 \quad (4.78)$$

y ε se relaciona con α , β como:

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{2} + \frac{72}{225} \beta \quad (4.79)$$

Si se introducen nuevas variables u, v , tales que:

4. Fuerzas tidales

$$\begin{aligned} u &= \ln a \\ v &= \ln e \end{aligned} \quad (4.80)$$

se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \frac{da}{dt} &= \frac{du}{dt} \\ \frac{1}{e} \frac{de}{dt} &= \frac{dv}{dt} \end{aligned} \quad (4.81)$$

Despejando de (4.76) $a^{-13/2}$ y reemplazando en (4.77) se tiene que:

$$\frac{dv}{dt} = \left(\frac{\varepsilon}{\eta \exp(2v) + \beta} \right) \frac{du}{dt} \quad (4.82)$$

con $\eta = \alpha + \beta\gamma$

La expresión (4.82) es una ecuación diferencial que describe la trayectoria tidal en el espacio (u, v) . La integración de esta ecuación es directa:

$$u(v) = \frac{\eta}{2\varepsilon} \exp(2v) + \frac{\beta}{\varepsilon} v + c \quad (4.83)$$

con $c = - \left[\frac{\eta}{2} \exp(2v_0) - \beta v_0 \right] \frac{1}{\varepsilon} + u_0$. En el espacio (a, e) esta expresión toma la forma:

$$a(e) = e^{\beta/\varepsilon} \exp\left(\frac{\eta}{2\varepsilon} e^2\right) \exp(c) \quad (4.84)$$

Por (4.63), α/β está acotado inferiormente:

$$\left[\frac{\alpha}{\beta} \right]_{min} \sim 7 \quad (4.85)$$

En la mayoría de los casos de interés, se tendrá que:

$$\frac{\alpha}{\beta} \gg 1 \quad (4.86)$$

Por lo tanto, se verifica que:

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\sim \frac{\alpha}{2} \\
\frac{\beta}{\varepsilon} &\sim 0 \\
\frac{\eta}{2\varepsilon} &\sim 1
\end{aligned}
\tag{4.87}$$

Escribiendo c de forma explícita y haciendo $e^{\beta/\varepsilon} = 1$ se tiene:

$$a(e) \simeq a_0 \exp\left(-\frac{\eta}{2\varepsilon}(e_0^2 - e^2)\right) \simeq a_0 \exp(e^2 - e_0^2) \tag{4.88}$$

Por lo tanto:

$$\frac{a(e)}{a_0} \simeq \exp(e^2 - e_0^2) \tag{4.89}$$

Esta expresión permite cuantificar que fracción de la migración total es debida principalmente a la migración planetaria ($e \neq 0$). Si se considera el caso límite (fijado como $e = 0,3$), se tiene:

$$\frac{a(0)}{a} \simeq \exp(-0,3^2) \simeq 0,9 \tag{4.90}$$

Con esto, se demostró que la migración por marea planetaria contribuye a un decrecimiento del semieje en un 10%.

Anteriormente se había demostrado que el tiempo de circularización era, para la mayoría de los casos de interés, mucho más corto que el tiempo migratorio debido a marea estelar. Esta característica es de gran importancia si se quiere hallar un modelo simplificado. En efecto, a partir de esta característica de los sistemas físicos reales, es posible asumir que la marea planetaria ocurre en un tiempo muy corto, y (4.89) permite cuantificar cuanto es el decaimiento orbital en ese intervalo de tiempo. En otras palabras, sería posible cuantificar correctamente el decaimiento orbital considerando un sistema que parte de un estado en el que la excentricidad es nula, resolver las ecuaciones trivialmente y agregar un decaimiento extra debido a (4.89).

Por lo tanto, si de ahora en adelante se supone $e = 0$, para cuerpos que estén dentro del rango de parámetros considerados, la migración planetaria puede ser añadida como una constante dada por (4.89), y de esta forma el problema se simplifica. Esta aproximación será válida siempre que se consideren tiempos de integración en los cuales se pueda producir la circularización orbital, y además sean tiempos lo suficientemente breves como para despreciar realmente la marea estelar.

4. Fuerzas tidales

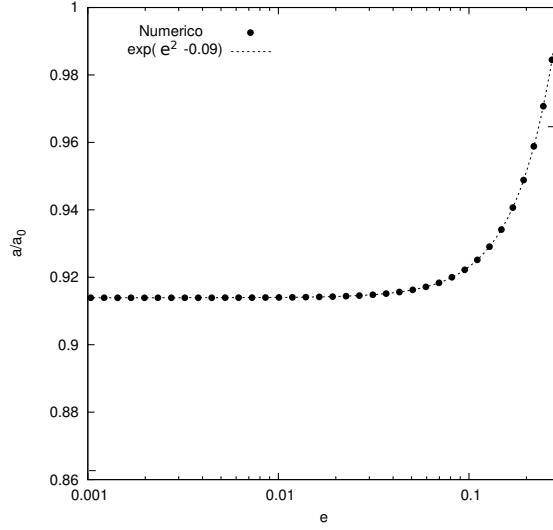


Figura 4.7.: Comparación entre la solución estimada (4.89) y la solución numérica de (4.53) y (4.54) (Numérico). La solución analítica y numérica coinciden. Los parámetros para la integración numérica fueron: $M_* = M_\odot$, $M_p = M_{Jup}$, $Q_* = 10^6$, $Q_p = 10^4$, $R_* = R_\odot$, $R_p = R_{Jup}$. Las estimaciones (4.87) son buenas.

4.4.5. Modelo analítico

Según las estimaciones realizadas en la sección anterior, los tiempos de circularización son más rápidos que los tiempos migratorios al menos en un factor 10 (ver figura 4.6). Esto implica que en escalas de tiempo relativamente cortas la excentricidad se anula. Además demostramos que la migración producida por una excentricidad no nula es a lo sumo del 10%.

Una forma de eliminar el término de marea planetaria es asumir que la excentricidad es nula. Bajo esta hipótesis, la ecuación que rige la evolución temporal de la excentricidad desaparece (es decir, $e(t) = 0$ para todo t) y la evolución temporal del semieje está gobernada por:

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = -\frac{9}{2} \left(\frac{G}{M_*} \right)^{1/2} \frac{R_*^5 M_p}{Q_*} a^{-13/2}, \quad (4.91)$$

lo que equivale a resolver la ecuación:

$$\frac{da}{dt} = -\beta a^{-11/2} \quad (4.92)$$

$$a^{11/2} da = -\beta dt \Rightarrow \int_{a_0}^{a(t)} a^{11/2} da = \int_{t_0}^t \beta dt \quad (4.93)$$

Por lo que:

$$a(t) = \left[-\frac{13}{2}\beta(t - t_0) + a_0^{13/2} \right]^{2/13}. \quad (4.94)$$

Utilizando la definición de β

$$a(t)^{13/2} = -\frac{13}{2} \left[\frac{9}{2} \left(\frac{G}{M_*} \right)^{1/2} \frac{R_*^5 M_p}{Q_*} \right] (t - t_0) + a_0^{13/2}. \quad (4.95)$$

De acuerdo a lo expuesto en la sección anterior, si se desea aplicar este modelo simplificado al caso con excentricidad no nula, a (4.95) debe añadirse un término que de cuenta de la fracción de migración debido a la marea planetaria. Esto puede hacerse partiendo del hecho que el tiempo de migración por marea planetaria es mucho más corto que el tiempo de migración por marea estelar. Por lo tanto, la marea planetaria puede ser incluida como una corrección en a_0 , es decir, el semieje cuando $t = t_0$:

$$a_0 \rightarrow a(t_0) = a_0 \exp(-e_0^2) \quad (4.96)$$

por lo tanto, en este modelo simplificado, la evolución temporal del semieje viene dada por:

$$a(t)^{13/2} = -\frac{13}{2} \left[\frac{9}{2} \left(\frac{G}{M_*} \right)^{1/2} \frac{R_*^5 M_p}{Q_*} \right] (t - t_0) + a_0^{13/2} \exp\left(-\frac{13}{2}e_0^2\right) \quad (4.97)$$

Una comparación entre el modelo y la solución numérica de las ecuaciones completas puede verse en la figura (4.8).

4.4.6. Solución completa

Veamos ahora cómo es posible resolver las ecuaciones (4.76) (4.77) de forma general. En la sección anterior se vio como escribir $a(e)$. Se puede hacer uso de dicha expresión en (4.77) y obtener así una ecuación diferencial sólo para e .

$$a(e) = a_0 e^{\beta/\varepsilon} \exp\left(\frac{\eta}{2\varepsilon}(e^2 - e_0^2)\right) \quad (4.98)$$

donde no se supuso $\eta/2\varepsilon \sim 1$ para resolver un caso más general y no se despreciará el factor $e^{\beta/\varepsilon}$ ya que se estudiará lo que ocurre cuando $e \rightarrow 0$. Los factores constantes se denotarán con C .

La ecuación diferencial que gobierna la evolución de la excentricidad es:

4. Fuerzas tidales

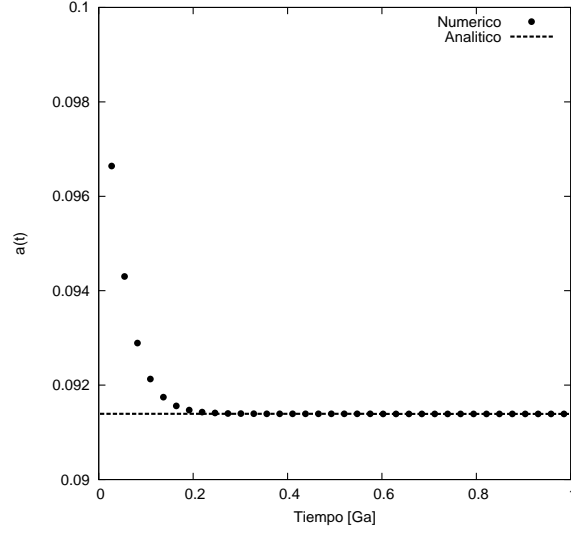


Figura 4.8.: Comparación entre la solución numérica de las ecuaciones (4.53) y (4.54) y la corrección a la ecuación (4.97) del modelo simplificado. El modelo simplificado corregido considera de forma correcta la caída en semieje debida a la región donde la excentricidad es apreciable. Los parámetros utilizados son: $M_* = M_\odot$, $M_p = M_{Jup}$, $Q_* = 10^6$, $Q_p = 10^4$, $R_* = R_\odot$, $R_p = R_{Jup}$.

$$\frac{1}{e} \frac{de}{dt} = -\epsilon a^{-13/2} = -C e^{-\frac{13\beta}{2\epsilon}} \exp\left(-\frac{13\eta}{4\epsilon} e^2\right) \quad (4.99)$$

Reordenando los factores:

$$e^{\frac{13\beta}{2\epsilon}-1} \exp\left(\frac{13\eta}{4\epsilon} e^2\right) de = -C dt \quad (4.100)$$

Desarrollando a segundo orden en e :

$$e^{\frac{13\beta}{2\epsilon}-1} \left(1 + \frac{13\eta}{4\epsilon} e^2\right) de = -C dt \quad (4.101)$$

Integrando:

$$\frac{e^{\frac{13\beta}{2\epsilon}+2}}{\frac{13\beta}{2\epsilon}+2} + \frac{e^{\frac{13\beta}{2\epsilon}}}{\frac{13\beta}{2\epsilon}} = -C(t-t_0) + D \quad (4.102)$$

Sumando los términos, y despreciando $13\beta/2\epsilon$ frente a la unidad (aproximación muy buena según se demostró anteriormente), se tiene que:

$$e^{\frac{13\beta}{2\varepsilon}} \left(\frac{13\beta}{2\varepsilon} e^2 + 2 \right) \simeq [-C(t - t_0) + D] \frac{13\beta}{\varepsilon} \quad (4.103)$$

Ya que $\frac{13\beta}{2\varepsilon} \ll 1$ y $e \ll 1$, una buena aproximación es:

$$e^{\frac{13\beta}{2\varepsilon}} \simeq [-C(t - t_0) + D] \frac{13\beta}{2\varepsilon} \quad (4.104)$$

En principio esta expresión ya puede ser despejada fácilmente y así es posible obtener $e(t)$ como una potencia de $2\varepsilon/13\beta$, sin embargo, ya que $\frac{13\beta}{2\varepsilon} \ll 1$ se puede reescribir $e^{\frac{13\beta}{2\varepsilon}}$:

$$e^{\frac{13\beta}{2\varepsilon}} \simeq 1 + \frac{13\beta}{2\varepsilon} \ln(e) \quad (4.105)$$

Tomando exponencial a ambos miembros de (4.104) luego de haber utilizado el resultado anterior:

$$e(t) \simeq e_0 \exp(-C(t - t_0)) \quad (4.106)$$

donde C viene dado por:

$$C = a_0^{-13/2} \varepsilon \exp\left(\frac{13\eta}{4\varepsilon} e_0^2\right) \quad (4.107)$$

Esta expresión es mucho más atractiva que la expresión en términos de una potencia en función de β y ε . Una función exponencial tiene un comportamiento muy bien conocido y es muy sencillo determinar un tiempo característico de decaimiento. En este caso, el tiempo característico de decaimiento de la excentricidad es:

$$\tau_e = \frac{a_0^{13/2}}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{13\eta}{4\varepsilon} e_0^2\right) \quad (4.108)$$

Una buena aproximación es:

$$e(t) = e_0 \exp\left[-a_0^{-13/2} \varepsilon \exp\left(\frac{13\eta}{2\varepsilon} e_0^2\right) (t - t_0)\right] \quad (4.109)$$

$$\text{con } \varepsilon = \frac{63}{4} (GM_*^3)^{1/2} \frac{R_p^5}{Q'_p M_p} + \frac{225}{16} \left(\frac{G}{M_*}\right)^{1/2} \frac{R_*^5 M_p}{Q'_*}$$

A partir de (4.109) es posible obtener $a(t)$, ya que $a(e)$ es conocido:

$$a(e) = a_0 \left(\frac{e}{e_0}\right)^{\beta/\varepsilon} \exp\left(-\frac{\eta}{2\varepsilon} e_0^2\right) \exp\left(\frac{\eta}{2\varepsilon} e^2\right) \quad (4.110)$$

4. Fuerzas tidales

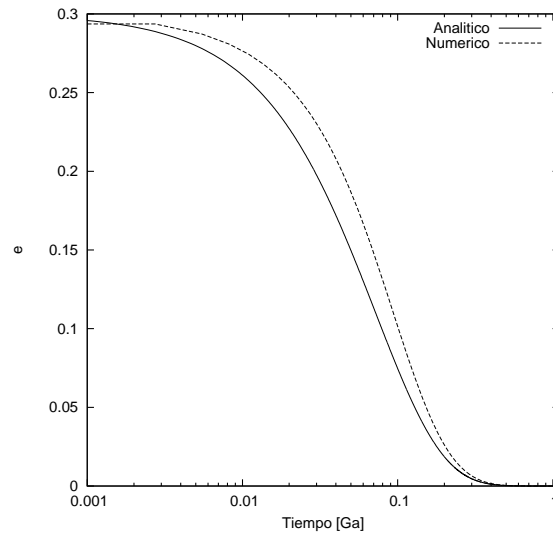


Figura 4.9.: Comparación entre la integración numérica de las ecuaciones tidales completas y el modelo analítico. En este gráfico se muestra la evolución de la excentricidad. La curva continua es según la ecuación (4.109), mientras que la curva punteada es la integración numérica. Ambas fueron realizadas con los mismos parámetros: $M_* = M_\odot$, $M_p = M_{Jup}$, $Q_* = 10^6$, $Q_p = 10^4$, $R_* = R_\odot$, $R_p = R_{Jup}$. El acuerdo entre la integración numérica y el modelo analítico es bueno pese a las aproximaciones intermedias. Las discrepancias se deben a que la excentricidad utilizada es $e = 0,3$, lo cual es un valor muy grande para los desarrollos utilizados en la resolución de las ecuaciones, por lo que el apartamiento observado es el máximo esperable. En la figura (4.10) pueden verse las discrepancias cuando la excentricidad es aún menor.

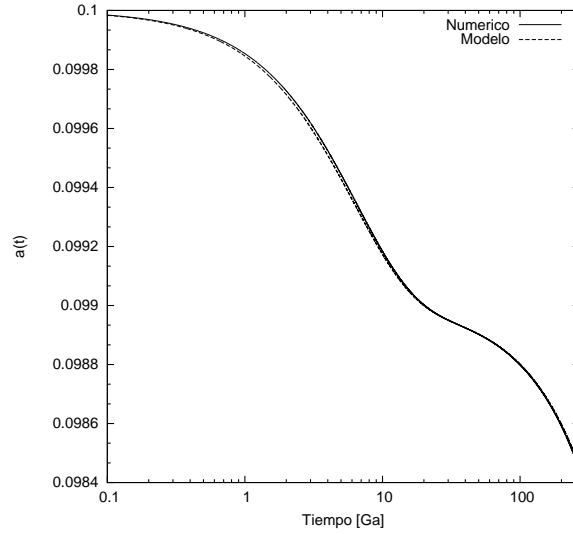


Figura 4.10.: Comparación entre la solución numérica y analítica (dada por el modelo aproximado) para a . Se representa la solución dada por (4.112). La solución analítica es muy buena. Los parámetros utilizados fueron: $M_* = M_\odot$, $M_p = M_{Jup}$, $Q_* = 10^6$, $Q_p = 10^6$, $R_* = R_\odot$, $R_p = R_{Jup}$, $a_0 = 0,1$, $e_0 = 0,1$.

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 a(t) &= a_0 \exp\left(-\frac{\eta}{2\varepsilon} e_0^2\right) \exp\left[\frac{\eta}{2\varepsilon} e_0^2 \exp\left(-2a_0^{-13/2} \varepsilon \exp\left(\frac{13\eta}{4\varepsilon} e_0^2\right) (t - t_0)\right)\right] \\
 &\times \exp\left[-\frac{\beta}{\varepsilon} a_0^{-13/2} \varepsilon \exp\left(\frac{13\eta}{4\varepsilon} e_0^2\right) (t - t_0)\right] \quad (4.111)
 \end{aligned}$$

Realizando las aproximaciones correspondientes:

$$\begin{aligned}
 a(t) &= a_0 \exp(-e_0^2) \exp\left[e_0^2 \exp\left(-2a_0^{-13/2} \varepsilon \exp\left(\frac{13}{2} e_0^2\right) (t - t_0)\right)\right] \\
 &\times \exp\left[\beta a_0^{-13/2} \varepsilon \exp\left(\frac{13}{2} e_0^2\right) (t - t_0)\right] \quad (4.112)
 \end{aligned}$$

Las expresiones encontradas hasta aquí son válidas siempre que $e \neq 0$. A partir de la forma de $e(t)$ es fácil ver que $e(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Por lo tanto, la solución es válida para todo t , siempre que la condición inicial sea $e_0, a_0 \neq 0$. El caso con excentricidad inicial 0 ya fue estudiado anteriormente.

Las ecuaciones que describen la evolución debida a fuerzas tidales serán entonces:

4. Fuerzas tidales

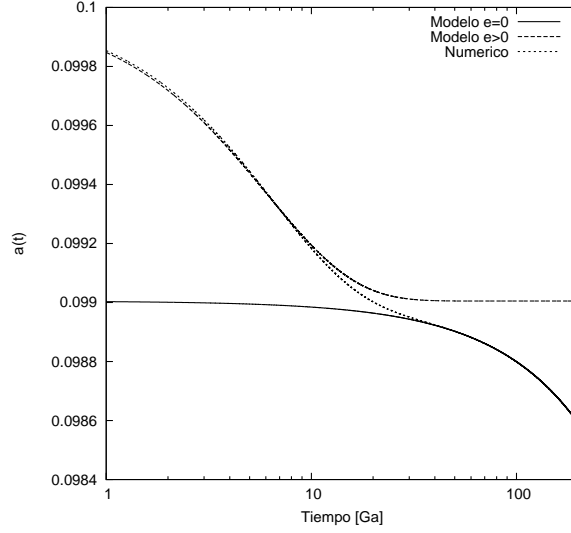


Figura 4.11.: Comparación entre la solución para a numérica y analítica. En este gráfico se representa la solución dada por 4.113 y por 4.97. La solución analítica es muy buena salvo en la región de transición entre el régimen planetario y estelar. Los parámetros utilizados fueron: $M_* = M_\odot$, $M_p = M_{Jup}$, $Q_* = 10^6$, $Q_p = 10^6$, $R_* = R_\odot$, $R_p = R_{Jup}$, $a_0 = 0,1$, $e_0 = 0,1$.

$$a(t) = a_0 \exp\left(-\frac{\eta}{2\varepsilon} e_0^2\right) \exp\left[\frac{\eta}{2\varepsilon} e_0^2 \exp\left(-2a_0^{-13/2} \varepsilon \exp\left(\frac{13\eta}{4\varepsilon} e_0^2\right) (t - t_0)\right)\right] \\ \times \exp\left[\frac{\beta}{\varepsilon} a_0^{-13/2} \varepsilon \exp\left(\frac{13\eta}{4\varepsilon} e_0^2\right) (t - t_0)\right] \quad \text{si } e \neq 0$$

$$a(t) = \left[-\frac{13}{2} \beta (t - t_0) + a_0^{13/2} \exp\left(-\frac{13\eta}{4\varepsilon} e_0^2\right)\right]^{2/13} \quad \text{si } e = 0$$

$$e(t) = e_0 \exp\left[-a_0^{-13/2} \varepsilon \exp\left(\frac{13\eta}{4\varepsilon} e_0^2\right) (t - t_0)\right] \quad \text{si } e \neq 0$$

$$e(t) = 0 \quad \text{si } e = 0$$

Pueden hacerse otras simplificaciones. Si interesa el estudio de la caída del cuerpo en la región donde la excentricidad está lejos de anularse, una buena aproximación es hacer $e^{\beta/\varepsilon} \sim 1$, ya que este término no contribuye fuera de un entorno de $e \simeq 0$. Por lo tanto:

$$a(t) = a_0 \exp\left(-\frac{\eta}{2\epsilon} e_0^2\right) \exp\left[\frac{\eta}{2\epsilon} e_0^2 \exp\left(-2a_0^{-13/2} \epsilon \exp\left(\frac{13\eta}{4\epsilon} e_0^2\right) (t - t_0)\right)\right] \quad (4.113)$$

En la figura (4.11) puede verse esta aproximación comparada con la solución real. Una comparación entre la solución (4.112) y la solución numérica puede verse en la figura (4.10).

4.5. Resumen

En este capítulo se estudiaron los efectos de marea sobre un cuerpo no rígido, el cual presenta una inercia al cambio. Se expusieron los fundamentos de la teoría tidal de acuerdo con el artículo de Ferraz-Mello et al. (2008) y se reprodujeron de forma breve sus principales resultados. Muchos otros detalles pueden ser encontrados en el artículo original. Se escribieron las ecuaciones tidales de acuerdo al artículo de Jackson et al. (2009) y se mostró de forma clara cuales son las hipótesis necesarias para obtener tales ecuaciones. El mayor logro de este capítulo fue el estudio de los tiempos característicos de los sistemas físicos reales que satisfacen las hipótesis necesarias para la validez de las ecuaciones tidales presentadas. Se estudiaron dos tipos de soluciones diferentes para tales ecuaciones, una general, y otra muy sencilla, la cual, por medio de un factor agregado reproduce muy bien la migración por largos períodos de tiempo. Se realizaron comparaciones entre las diferentes soluciones obtenidas y se vio que el acuerdo es muy bueno.

Parte II.

Aplicaciones

5. Diagrama Masa-Período de Exoplanetas

5.1. Introducción

En esta segunda parte, se aplicarán los desarrollos de los capítulos anteriores a un problema concreto de la astronomía. Hasta aquí se estudiaron dos ambientes bien enmarcados, los cuales son: (i) la etapa en la cual los protoplanetas comienzan a formarse, y (ii) la etapa en la que los planetas resultantes de estos protoplanetas interactúan con su estrella central. En este segundo marco, de acuerdo a las hipótesis presentadas cuando se desarrollaron las ecuaciones tidales, es necesario que los planetas se encuentren muy cerca de la estrella central. Esta última hipótesis es satisfecha siempre que se tenga en cuenta una rápida migración, por ejemplo, migración de tipo I y migración de tipo II.

Una aplicación de estos dos conceptos es entonces el estudio de los exoplanetas cercanos a su estrella central. En las siguientes secciones se analizará la posibilidad de explicar ciertas características observadas de estos exoplanetas de corto período a partir de los desarrollos realizados previamente.

5.2. El diagrama masa-período

Cuando se observa como se distribuyen los semiejes de los exoplanetas de acuerdo a la masa que presentan, puede advertirse una estructura notable en la distribución resultante, en especial cuando se observan períodos menores a 10 días. En la figura (5.1) se puede observar dicha distribución. En la misma se representan todos los exoplanetas conocidos hasta la fecha y, en un recuadro, en la región superior izquierda, aquellos con un período menor a 12 días.

En la figura (5.2) se observa que los planetas forman varios grupos que a simple vista parecen desconectados. Es probable que cada una de estas estructuras observadas tenga un origen ajeno a la casualidad, interesante de ser estudiado. Sin embargo, el estudio de toda la distribución supera ampliamente a este trabajo.

En este trabajo se estudiará la región 3, sin tratar de explicar la agrupación en la región 4.

La región 3 del diagrama masa-período presenta dos características muy notorias. Por un lado, se observa un vacío en la región de los planetas poco masivos y subgigantes de corto período, y por otro, se observa una mayor concentración de planetas subgigantes en torno a un período de 3 días. Si bien existen unos pocos planetas poco masivos que pueblan la región de corto período, estos casos son aislados y son objetos que presentan ciertas características sobresalientes, por lo que podría pensarse que no son buenos

5. Diagrama Masa-Período de Exoplanetas

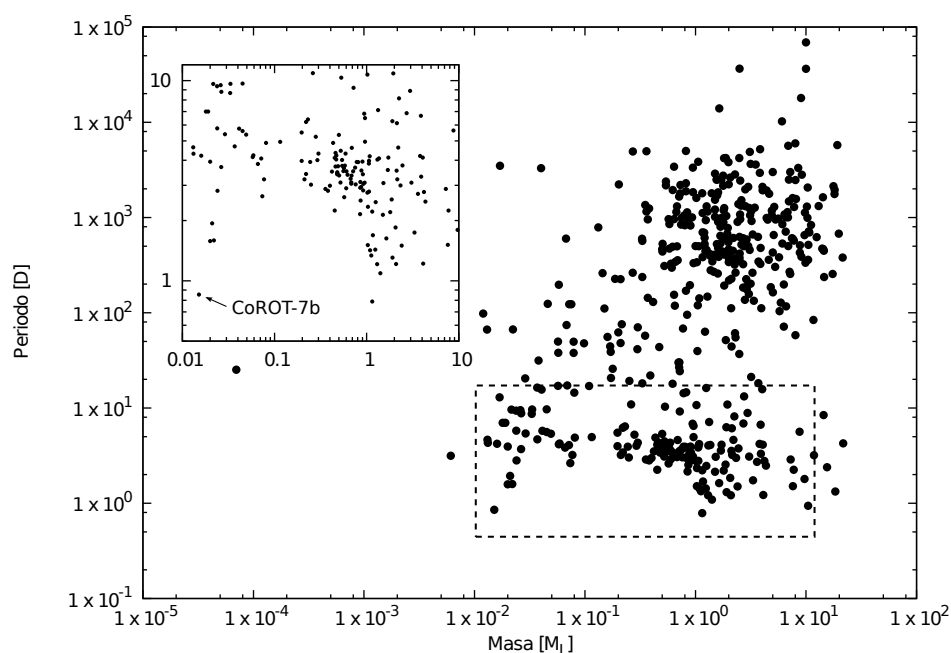


Figura 5.1.: Se muestra la distribución masa-período de todos los exoplanetas conocidos hasta la fecha. En el recuadro se observa la misma distribución pero para planetas con un período menor a 12 días. La línea a trazos representa el recuadro en el contexto de todos los exoplanetas. Datos de <http://exoplanet.eu>.

ejemplos para realizar estadística en la región. La principal característica es que orbitan alrededor de estrellas de baja masa.

Una posible explicación para la distribución observada en la región 3 sería atribuirla a un efecto de selección, debido a las técnicas observacionales empleadas. Actualmente, las técnicas más empleadas para la detección de exoplanetas son la utilización del efecto Doppler de la luz, y la variación del brillo de la estrella central por ocultación, conocido como método de tránsitos u ocultación.

La técnica Doppler permite detectar movimientos radiales de la estrella central, los cuales son producidos por fuerzas ejercidas por cuerpos planetarios. Estos movimientos luego son atribuidos a uno o más planetas que giran en torno a la estrella. Este movimiento se determina a partir de la medición del corrimiento de ciertas líneas espectrales, las cuales son producidas cuando la luz generada en la estrella atraviesa su atmósfera.

Ya que el movimiento de la línea aumenta con el movimiento de la estrella, es más sencillo detectar cuerpos masivos y cercanos a ésta. Por otro lado, es de interés notar que los cuerpos poco masivos que se detectan mediante este método necesariamente presentan distancias cortas a su estrella principal. La distancia máxima a la que se podrá encontrar un cuerpo de su estrella para poder ser detectado depende fundamentalmente de la precisión con la que se pueden medir corrimientos de líneas espectrales.

Ya que la detectabilidad de cuerpos poco masivos en la región 3 del diagrama no es

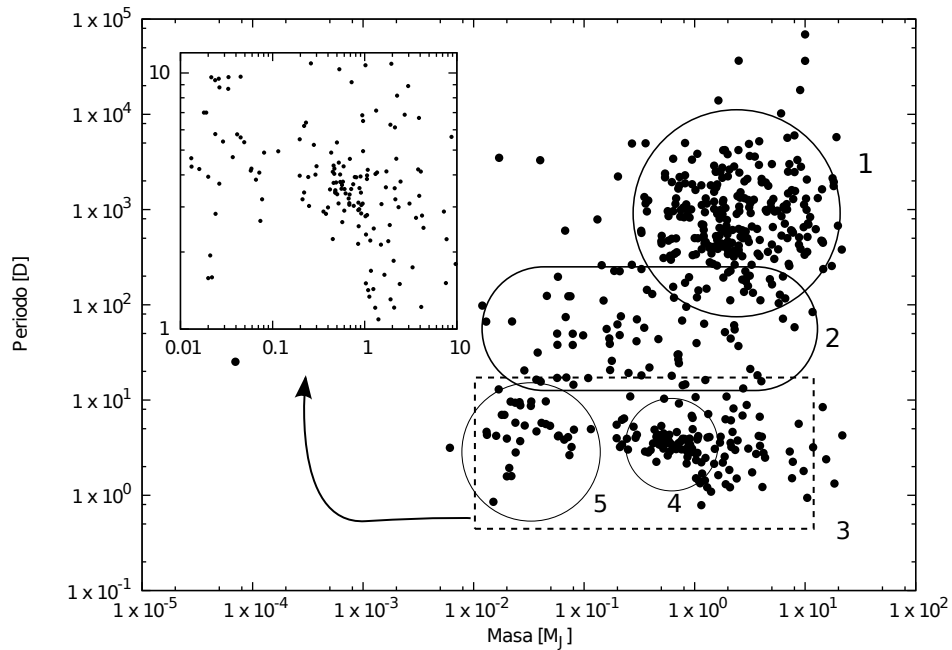


Figura 5.2.: Se muestra el diagrama masa-período dividido en subgrupos. Se observa que los exoplanetas no se distribuyen de forma uniforme. Son distinguibles 3 grupos principales. El grupo 1 correspondiente a los planetas de largo período, los del grupo 2, correspondiente a planetas con una alta dispersión en el diagrama, y los del grupo 3, los cuales son los planetas de corto período. Dentro de este grupo se pueden diferenciar dos poblaciones o subgrupos, una región de alta densidad, con un período aproximado de 3 días, con masas comprendidas entre la masa de Neptuno y la masa de Júpiter (región 4) y una correspondiente a los planetas poco masivos (región 5), la cual es una región no muy poblada. El recuadro en la esquina superior izquierda es una ampliación de la región 3. Datos de <http://exoplanet.eu>

5. Diagrama Masa-Período de Exoplanetas

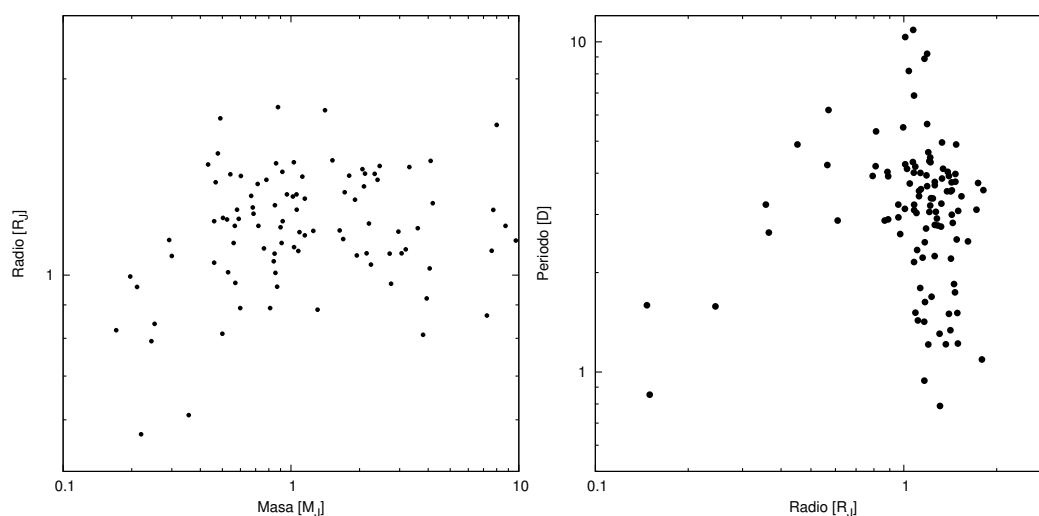


Figura 5.3.: Se muestra la relación existente entre el radio y la masa planetaria (figura izquierda). Para masas pequeñas se observa un comportamiento lineal, mientras que para masas mayores esta relación no es observada. De acuerdo a esta relación no es esperable un apartamiento significativo de forma entre un diagrama masa-período y un diagrama radio-período (figura derecha). Datos de <http://exoplanet.eu>.

un problema para la técnica Doppler actual, en principio no debería deberse a un efecto de selección observacional.

Por otro lado, la detección de caída de brillo de una estrella por medio del método de tránsito es prácticamente independiente de la distancia al observador, por lo que en principio la detección está limitada al volumen del cuerpo que eclipsa a la estrella y a la distancia del cuerpo a la estrella. En este sentido, la detectabilidad no se ve afectada por la masa sino por el radio del exoplaneta.

Este método favorece por lo tanto la detección de planetas gigantes frente a los pequeños. Una vez más, realizando un análisis a distancia fija, prevalece la detección entonces la detección de planetas grandes frente a los pequeños (siempre asumiendo inclinación orbital de 90 respecto del plano del cielo). Sin embargo, a masa fija lo que ocurre es que deberían ser detectados mayor cantidad de planetas cercanos a la estrella que lejanos, y esto no es lo que ocurre.

En la figura (5.3) izquierda puede verse que la relación entre la masa y el período, en escala logarítmica, tiene una tendencia creciente para masas menores a la masa de Júpiter y luego el comportamiento es mucho mas disperso. Debido a esta relación, no es esperable observar un apartamiento muy grande entre un diagrama masa-período y un diagrama radio-período, el cual puede verse en la figura (5.3) derecha.

En este trabajo se asumirá que la región 3 del diagrama masa-período no es debida a un efecto de selección observacional y se explicará como resultado de un proceso evolutivo, en el cual actúan fuerzas tidales con el disco protoplanetario, trampas planetarias y fuerzas tidales planeta-estrella.

5.2.1. Región 3

Entre todos los planetas detectados alrededor de otras estrellas, un grupo de especial interés en la actualidad es el grupo llamado de los “planetas calientes”, caracterizado por semiejes muy pequeños ($a < 0,1$ UA). Debido a la proximidad de estos planetas a la estrella central, fuerzas de marea circularizan rápidamente la órbita, razón por la cual la mayor parte de la distribución observada actualmente presenta excentricidades bajas. Es interesante notar que la excentricidad dada para la mayor parte de los planetas detectados es una cota superior.

Dado que la formación in-situ de estos planetas es altamente improbable, el modelo más aceptado en la actualidad es suponer que fueron formados lejos de la estrella central, y luego, debido principalmente a fuerzas tidales con el disco, migraron hacia el interior.

Un aspecto muy interesante de estos exoplanetas es su distribución masa-período. En ella se observa un marcado escalón en aproximadamente una masa igual a la masa de Júpiter (Benítez-Llambay et al. 2011). Esta distribución hace pensar que existe algún mecanismo selectivo para cada masa. Si se asume que todos los planetas fueron formados inicialmente a partir de un disco de gas, es lícito pensar que un proceso de selección bien podría haber ocurrido en las primeras etapas formativas.

Masset et al. (2006) presentaron resultados de simulaciones hidrodinámicas en las cuales se observa la existencia de un punto de equilibrio en el torque que sufre un planeta de baja masa inmerso en un disco de gas con una cavidad interna (ver capítulo 3, trampas planetarias). Este punto de equilibrio se halla en el borde de la cavidad y es suficientemente estable como para permitir que el planeta frene su migración hacia el interior. Sin embargo, existe una masa crítica m_c para la cual, si un planeta tiene una masa $m > m_c$, entonces el punto de equilibrio desaparece, pero aparece un nuevo equilibrio en el interior de la cavidad (Masset et al. 2006; Kuchner & Lecar 2002).

Según estos resultados, parecería ser que planetas de baja masa pueden encontrar un equilibrio más lejos de la estrella central que los planetas de masa mayor que la masa crítica. Este resultado es similar a lo que se observa actualmente en la región 3 del diagrama masa-período de los exoplanetas descubiertos. En base a esta idea, Benítez-Llambay et al. (2011) realizaron simulaciones hidrodinámicas y fueron capaces de obtener un escalón similar al observado.

Si los resultados anteriores son correctos, entonces existe un problema con unos pocos puntos de la distribución observada; CoRoT-7b (Léger et al. 2009), y más recientemente Kepler-10b, son los exoplanetas que más se apartan de esta distribución. La posición de CoRoT-7b puede verse en la figura (5.1).

Una solución posible al problema puede venir del hecho de que CoRoT-7b no es un planeta aislado. Recientemente se ha descubierto un compañero: CoRoT-7c (Queloz et al. 2009). Benítez-Llambay et al. (2011) propusieron que en realidad la posición observada actualmente para CoRoT-7b puede ser el resultado de una dispersión planetaria con su compañero. Analizando la evolución dinámica de dos planetas migrando hacia la cavidad interna de un disco protoplanetario, Morbidelli et al. (2008) encontraron configuraciones de equilibrio, en las cuales ambos planetas son capturados en resonancia mientras que el interno es retenido en la cavidad interna. Sin embargo esta configuración parecía ocurrir

5. Diagrama Masa-Período de Exoplanetas

sólo cuando el planeta externo era de menor masa que el interno. En el caso contrario, la configuración resonante es inestable, dando origen a una excitación de la excentricidad y como consecuencia una dispersión planetaria. En algunos casos esto conducía a una inyección del cuerpo menor en la cavidad, mientras que la órbita del mayor era trasladada hacia afuera de la cavidad.

La razón de masas y la ubicación en el diagrama masa-período del sistema planetario CoRoT-7 se encuadran en este escenario, lo cual permitiría explicar la ubicación de ambos planetas en el diagrama masa-período. Sin embargo, las simulaciones hidrodinámicas de Morbidelli et al. (2008) sólo consideran pocas razones de masa y no fueron aplicadas al caso particular de CoRoT-7.

Para entender la razón por la que CoRoT-7b se halla en esa posición, un primer paso es entender por que los demás planetas presentan esa estructura tan particular en el diagrama masa-período. Este será el objetivo de las siguientes secciones, mientras que en el próximo capítulo analizaremos el caso particular de CoRoT-7.

5.3. El modelo

En esta sección se describirá el modelo que se desarrollará para explicar la distribución masa-período observada.

Para esta tarea se utilizarán las siguientes herramientas:

- Observaciones de exoplanetas
- Teoría tidal
- Exoplanetas generados de forma sintética
- Simulaciones hidrodinámicas
- Trampas planetarias

El mecanismo propuesto es el siguiente. En un principio, se forman embriones planetarios, los cuales serán los progenitores de lo que luego serán los planetas de un sistema planetario. Mientras esto sucede, el disco protoplanetario efectúa un cambio importante en su región central; debido a la acreción de gas, y a una viscosidad importante, el centro del disco sufre un vaciamiento, generando un gradiente de densidad pronunciado en algún radio no muy lejano a la estrella central.

Debido a la formación temprana de los embriones planetarios, el disco no tiene suficiente tiempo para disiparse, por lo que la interacción planeta-disco es fuerte. En esta etapa se produce una rápida migración hacia la estrella central.

En la región donde el gradiente de densidad es pronunciado puede producirse un frenado en la migración del embrión. De esta forma sería posible explicar la presencia de planetas cercanos a la estrella central.

En las siguientes secciones se verá además que esta explicación puede ser reforzada mediante simulaciones hidrodinámicas y la teoría tidal. A través de estos métodos no

solo se dará una posible explicación a la presencia de exoplanetas calientes sino que también se podrá describir por que razón la distribución observada en la región 3 tiene forma de escalón.

5.4. Simulaciones hidrodinámicas

5.4.1. Motivación

Según se vio en el capítulo 2, en las etapas formativas la interacción entre el embrión planetario y el disco protoplanetario es muy fuerte. Estudiar este problema requiere, entre otras cosas, la resolución de las ecuaciones de la hidrodinámica sumadas al potencial gravitatorio. Hacer esto en general es muy difícil. Un análisis cualitativo y cuantitativo puede realizarse cuando la masa del embrión planetario es chica (por ejemplo, unas masas terrestres), y cuando el disco protoplanetario no es considerado autogravitante. En este contexto la linealización de las ecuaciones (Tanaka et al. 2002) arroja un buen resultado.

Sin embargo, cuando se consideran masas mayores (a partir de la masa de Neptuno), el problema ya no es descripto de forma adecuada por las ecuaciones linealizadas. Debido a este inconveniente es necesario realizar una integración numérica de las ecuaciones involucradas. Esto es lo que se conoce con el nombre de simulaciones hidrodinámicas.

En este trabajo se realizan una serie de simulaciones hidrodinámicas motivadas en unos resultados previos. En particular, consideraremos la idea propuesta en un principio por Kuchner & Lecar (2002), la cual sugiere que un planeta gigante en órbita circular podría detener su migración en un disco con una cavidad central (un vaciamiento del gas por acreción) si su período orbital es la mitad del período orbital del borde, es decir, una resonancia de movimientos medios 2:1. En esta configuración, las resonancias de Lindblad serían todas interiores a la cavidad, y por lo tanto no sería posible una transferencia de momento angular entre el planeta y el disco. Es necesario notar que estos autores no corroboraron mediante simulaciones hidrodinámicas tal afirmación.

Además, según se vio en el capítulo 1, es posible generar una trampa planetaria para planetas con masas tales que no alteren significativamente el perfil de densidad, es decir, que no logren abrir un gap en el disco. Masset et al. (2006) realizaron una serie de simulaciones hidrodinámicas para estudiar la evolución orbital de planetas de baja masa sumergidos en un disco protoplanetario con una cavidad interna. Estos autores hallaron que todos los cuerpos migraban, además, la velocidad de migración era dependiente de la masa planetaria, y lo más importante es que todos eran atrapados en el borde de la cavidad en una configuración estable. Según estos resultados, si se asume que los parámetros estelares están acotados, si las trampas planetarias son comunes, entonces debería observarse que planetas poco masivos tienden a ubicarse en regiones más alejadas que los planetas más masivos. Sumado a esto, es necesario realizar un estudio incluyendo la teoría tidal, ya que como se vio en la sección 2, las fuerzas de marea generan un decaimiento en semieje.

Para completar los resultados de Kuchner & Lecar (2002), Benítez-Llambay et al. (2011) realizaron una serie de simulaciones hidrodinámicas de planetas sumergidos en

5. Diagrama Masa-Período de Exoplanetas

un disco con una cavidad interna, utilizando un rango amplio de masas. De esta forma se encontró que los planetas de baja masa son efectivamente retenidos en el borde de una cavidad mientras que los de masa mayor ($m > M_{Jup}$) efectivamente ingresan en la cavidad, deteniendo su migración en una resonancia 2:1 con el borde de la cavidad.

5.4.2. Código

Para realizar las simulaciones hidrodinámicas se utilizó el código FARGO, escrito por el Dr. Masset (Masset 2000). Este código resuelve las ecuaciones de Navier-Stokes y la ecuación de continuidad para un disco gaseoso, el cual rota con velocidad kepleriana. Este disco está sometido a la fuerza gravitatoria estelar, la cual actúa desde el centro del disco. Es posible añadir fuentes gravitatorias externas, las cuales hacen el rol de protoplanetas sumergidos en el disco.

Los protoplanetas son tratados como masas puntuales, y las variables físicas son tratadas de forma euleriana.

Una ventaja importante del código es la posibilidad de paralelización utilizando OpenMP y MPI, lo que disminuye los tiempos de las simulaciones de forma considerable cuando se dispone de múltiples procesadores.

Un detalle importante es que la integración se realiza con un disco que no es autogravitante y las integraciones de las órbitas planetarias se realizan mediante un integrador Runge-Kutta de quinto orden.

Para realizar nuestras simulaciones, realizamos un cambio del código respecto de la versión disponible (<http://fargo.in2p3.fr>). Por recomendación del autor, se sustituyó la línea 232 del archivo SideEuler.c por la línea:

```
penul_vr=-3.0*VISCOSITY/Rinf[nr-1]*(-SIGMASLOPE+.5);
```

5.4.3. Generando una cavidad

Antes de comenzar a realizar las simulaciones es necesario generar una condición de contorno estacionaria. Es decir, un disco protoplanetario bidimensional estable, el cual interactuará posteriormente con el protoplaneta. Para lograr esto, debe realizarse una simulación de un disco protoplanetario con FARGO en ausencia de planeta.

FARGO permite modificar una gran cantidad de parámetros, a través de un archivo de parámetros (*.par). A continuación se describen los parámetros que serán utilizados posteriormente:

Parámetros del disco:

- AspectRatio : Este parámetro define la relación H/r a una distancia $r = 1$.
- Sigma0 : Es la densidad superficial del disco a $r=1$ (donde las unidades de distancia son adimensionales, que luego deben ser escaladas correctamente).
- Viscosity : Es la viscosidad del disco. Se observa que un valor demasiado elevado para este parámetro ($\sim 10^{-4}$) genera ondas en el perfil de densidad. Ya que la

escala de tiempo de migración depende de este parámetro (fundamentalmente la migración de tipo II), es conveniente adoptar el valor mas grande posible siempre que no altere la estabilidad de la cavidad para disminuir los tiempos de cómputo.

- **CavityRadius** : Este parámetro hace referencia a la localización del borde de la cavidad (R_{IC}), en unidades adimensionales. Por recomendación del autor, debe considerarse un valor igual o superior a 2,0 cuando las masas planetarias involucradas son grandes.
- **CavityRatio**: Es la razón deseada entre la densidad superficial del gas fuera y dentro de la cavidad.
- **CavityWidth**: Es el ancho de la cavidad interna en unidades de altura del disco. ($H=ASPECTRATIO*R$).
- **OuterSourceMass** : Este parámetro hace referencia a la inyección de masa desde el exterior. Debe ser YES para tener una condición estacionaria.
- **SigmaSlope** : Este parámetro es el índice (α) de la ley de potencia que describe el perfil de densidad $\Sigma(r) = \Sigma_0 r^{-\alpha}$ donde Σ_0 es el parámetro Sigma0.

Parámetros planetarios:

- **PlanetConfig** : En este campo debe colocarse la ruta del archivo (*.cfg) en donde se encuentran: los nombres de los planetas, la distancia a la estrella, la masa, si acretan gas, si sienten la gravedad del disco y si se perturban entre ellos. Este archivo contiene los elementos orbitales de cada planeta.
- **ThicknessSmoothing** : Parámetro de suavizado.

Parámetros del método numérico

- **Transport**: Este parámetro puede ser seteado como FARGO o STANDARD para definir como debe ser utilizado el algoritmo de advección azimutal. Por defecto el parámetro está en FARGO. (Masset 2000).
- **InnerBoundary**: Este parámetro puede tomar los valores WALL (o RIGID), OPEN o NON_REFLECTING. Especifica la condición de contorno en el borde interno. WALL o RIGID fijan la velocidad radial a cero en el borde. No puede haber flujo de material de o hacia la grilla polar, es decir, el disco. La masa total del disco es conservada (la frontera exterior tiene una condición WALL por defecto). OPEN implica que puede haber flujo de materia hacia el exterior de la grilla. La masa total decrece con el tiempo. NON-REFLECTING aplica una condición límite para la transmisión de ondas. Dispone de un algoritmo (aproximación WKB) muy eficiente para la eliminación de ondas reflejadas. No se aplica estrictamente la conservación de la masa y momento angular ya que la onda se lleva parte del momento angular del disco.

5. Diagrama Masa-Período de Exoplanetas

- **Disk:** Este parámetro está definido como YES por defecto. Hace referencia a la existencia o no de un disco gaseoso. Colocar este parámetro en NO trasforma a FARGO en un integrador planetario.
- **OmegaFrame:** Este parámetro es la velocidad angular del marco de referencia. Si se le asigna el valor 0, se tiene un sistema de referencia no rotante astrocéntrico. Esto es usado sólo si **Frame** (ver más adelante) tiene el valor Fixed.
- **Frame:** Este campo puede tomar tres valores diferentes: **Fixed**, **Corotating** y **Guiding-Center**. Cuando se establece como **Fixed**, el marco de referencia rota con velocidad angular constante, especificada por **OmegaFrame**. Cuando se le asigna el valor **Corotating**, el marco es corrotacional con el planeta número 0, es decir, el que ocupa la primer línea de parámetros en el archivo *.cfg. Si el planeta migra o tiene una órbita excéntrica, la velocidad angular no es constante en el tiempo, por lo que el sistema de referencia tampoco la tendrá. Cuando se establece el valor **Guiding-Center**, el marco corrota con el movimiento medio del planeta 0, generando un sistema de referencia que varía su velocidad mucho más suavemente que en el caso **Corotating**. En este sistema de referencia es posible observar el movimiento del planeta debido a su excentricidad y precesión.
- **IndirectTerm:** Este parámetro por defecto tiene un valor YES. Si toma el valor NO, no se realiza el cálculo del término indirecto del potencial, el cual se debe a la aceleración de la primaria causada por interacción con los planetas y el disco.

Parámetros de malla

- **Nrad , Nsec :** Son dos parámetros que establecen de que forma será dividida la grilla polar para realizar los cálculos. Nrad es un número entero que especifica cuantas divisiones radiales presentará la grilla. Nsec es un número entero que especifica la división azimutal.
- **Rmin, Rmax :** Estos parámetros fijan los extremos del disco.
- **RadialSpacing :** Este parámetro puede tomar los valores Arithmetic o Logarithmic. En el primer caso, el ancho de cada zona radial es constante (progresión aritmética). En el segundo caso, el ancho de la zona radial es proporcional a su distancia (progresión geométrica). En este caso, la relación de aspecto es la misma para todas las zonas. Cuando se corre una simulación, se genera el archivo de control (**used_rad.dat**), el cual contiene información de cómo fue subdividida la malla radialmente. Es posible, sin embargo, tener una progresión más compleja que aritmética o geométrica, incluso puede ser arbitraria. Esto es muy útil por ejemplo si hace falta una alta resolución en la vecindad de la órbita del planeta. Para hacer esto debe incluirse en el directorio de salida un archivo con el nombre **radii.dat** en formato ASCII, con una columna **float**, la cual debe contener Nrad+1 valores para cada radio, en orden creciente. Una vez corrida la simulación, se crea el

archivo `used_rad.dat`, el cual sirve para chequear que el programa halla tomado correctamente el input `radii.dat`.

Parámetros de salida

- `Ntot`= Este parámetro fija el número total de salidas que hará el programa.
- `Ninterm`: Este parámetro establece el número de cálculos intermedios que se realizan (cubriendo cada intervalo de tiempo `DT`) entre dos salidas sucesivas de las variables hidrodinámicas. Dicho de otra forma, es la cantidad de pasos `DT` que se realizan antes de generar una salida hidrodinámica. Si sólo interesa la dinámica de planetas es recomendable asignarle un valor grande. Si no se tiene en cuenta este recaudo, se estará generando gran cantidad de información innecesaria. Esto tiene dos consecuencias importantes, por un lado se consume mucho tiempo de escritura en disco, y por otro, el espacio en disco es muy grande.
- `DT`: Esta variable `float` representa el intervalo elemental de tiempo. A fin de no degradar el rendimiento del código, `DT` debería establecerse en un valor mucho más grande que el paso de tiempo permitido por el criterio CFL. El código divide el intervalo $[t, t+DT]$ en tantos pasos como sea necesario para satisfacer el criterio CFL. El último paso es ajustado de modo tal que el nuevo tiempo es exactamente $t+DT$. Sólo los archivos planetarios de salida se actualizan por cada paso de tiempo `DT`. Las salidas hidrodinámicas se producen cada `Ninterm` pasos.

Preparando el archivo de parámetros

Para crear el disco con una cavidad central es necesario ajustar algunos parámetros en un archivo (`.par`). Para definir la cavidad es necesario ajustar los parámetros:

```
Cavityradius
CavityRatio
CavityWidth
OuterSourceMass=YES
```

Además, es necesario ajustar el archivo de parámetros planetarios (`.cfg`). Una copia del archivo de parámetros planetarios viene incluida con el código, a modo de ejemplo. Lo importante es que el archivo que se escoja para la fabricación del disco posea planetas con masa nula y que no puedan interactuar de ninguna forma con el disco, es decir, fijar en `OFF` los campos referidos a interacción.

Un detalle importante cuando se está generando el disco con una cavidad es que el archivo `*.cfg` debe contener información de al menos un planeta que luego formará parte de la simulación. Además, los planetas que estén en dicho archivo deben estar configurados de modo tal que no interactúen con el disco ni entre ellos (`Feels Disk NO` y `Feels Other NO`). Si bien la frase anterior es redundante, es importante ya que de lo

5. Diagrama Masa-Período de Exoplanetas

contrario, cuando se desee simular el disco con la cavidad central y con planetas, se generará una onda, por lo que la simulación no podrá ser realizada. El perfil que se genera cuando ocurre este error puede verse en la figura (5.5).

Un aspecto interesante del proceso de creación es que sólo es necesario considerar dos zonas azimutales. Esto es así porque no hay interés en simular un disco detallado azimutalmente. Sólo interesa construir el perfil de densidad. Esto acelera mucho el proceso de creación, ya que reduce las zonas de integración en un factor N_{sec} .

En cuanto a las condiciones límites para el disco, éstas pueden ser escogidas según sean las necesidades.

Es recomendable que la salida de datos sea fijada en un número bastante grande (de esta forma se evita pérdida de tiempo por escritura), o incluso puede deshabilitarse la escritura continua (es decir, que se vaya reemplazando el último archivo de salida constantemente, para ahorrar espacio en disco).

Una vez realizadas las tareas enunciadas anteriormente, debe correrse FARGO. La simulación debe ser frenada cuando el perfil de densidad del disco alcance un estado estacionario y tenga una forma suave, como puede verse en la figura (5.4).

Una vez finalizada la simulación del disco, es necesario guardarla para utilizarla como condición inicial para las futuras simulaciones con planetas. Ya que el disco posee sólo dos zonas azimutales, es necesario dividirlo en la cantidad de zonas que vaya a tener la simulación con planetas. Esta tarea puede ser realizada con un programa que puede ser descargado de la página oficial de FARGO, llamado `adopt.pro`, el cual funciona bajo IDL. La función de este programa es dividir el disco azimutalmente y renombrar a 0 los archivos de salida. Como entrada debe darse el último archivo de salida durante la creación del disco (`gasdens####.dat`) en la forma:

```
adopt, nsec=####, nb=####
```

donde `nsec` es la cantidad de zonas azimutales deseadas y `nb` es el número correspondiente a la última salida de FARGO durante la creación del disco. Luego, debe modificarse el archivo `dims.dat`, corrigiendo el último valor (2) al valor `nsec`.

Una vez realizado esto, se puede almacenar el disco guardando sólo los archivos:

```
gasdens0.dat  
gasvrad0.dat  
gasvtheta0.dat  
used_rad.dat  
dims.dat
```

Para realizar simulaciones con este disco, es necesario colocar estos archivos en una carpeta nueva, la cual debe ser el directorio de salida del archivo (`.par`) que se vaya a simular.

Para considerar como condición inicial al disco ya creado, FARGO debe ser llamado con la opción `-s 0`, donde `s` significa la condición inicial, que luego de haber aplicado `adopt.pro` es `gas***0.dat`:

```
./fargo -s 0 in/*****.par
```

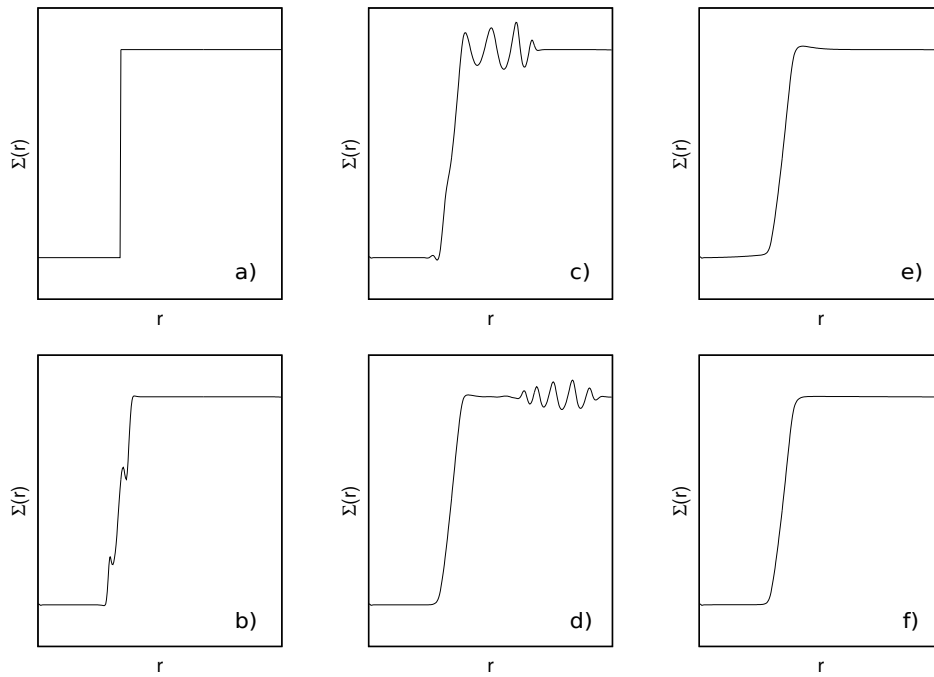



Figura 5.4.: Evolución temporal del perfil de densidad de un disco sin planetas. Como condición inicial (a) se consideró un escalón en la densidad. Se observa como se generan ondas en los momentos tempranos del disco (b,c,d). Si bien en (e) desaparecieron las ondas, aún se observa una protuberancia en la densidad. El estadio estacionario es alcanzado en (f). La relación temporal es: a) $t=0$, b) $t=1$, c) $t=10$, d) $t=20$, e) $t=100$, f) $t=3500$.

5. Diagrama Masa-Período de Exoplanetas

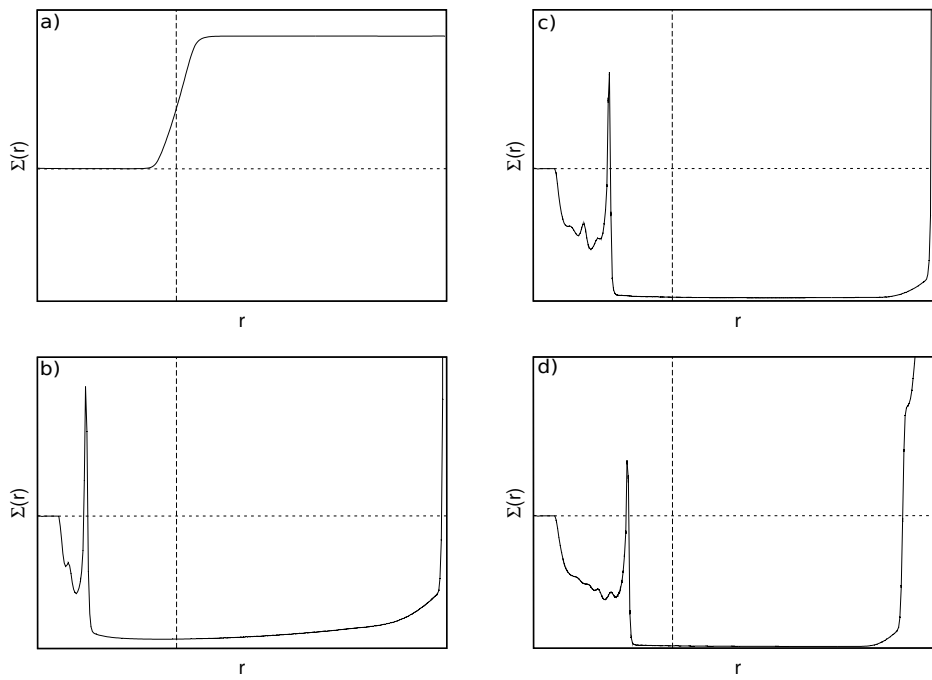


Figura 5.5.: Error ocurrido en una simulación cuando no se tiene en cuenta durante la construcción de la cavidad que los planetas no deben interactuar con el disco.

5.5. Explicando el diagrama masa-período

El objetivo de esta sección es justificar el modelo presentado en la sección 3.3, el cual propone que planetas poco masivos son efectivamente retenidos en el borde de una cavidad en un disco de gas, mientras que planetas más masivos son capaces de ingresar en la cavidad, por lo que la forma final de la distribución sería muy similar al diagrama masa-período de los exoplanetas. Para ello se utilizarán simulaciones hidrodinámicas realizadas con FARGO.

5.5.1. Simulaciones hidrodinámicas

Las simulaciones hidrodinámicas fueron realizadas con FARGO, considerando una estrella central de masa solar y un disco bidimensional localmente isoterma. La densidad considerada es $\Sigma = 10^{-4} M_{\odot} r_0^{-2}$ y uniforme con r_0 una escala típica de longitud (recordemos que FARGO trabaja con distancias adimensionales). Si $r_0 \sim 0,01 \text{UA}$, se tiene que $\Sigma \sim 900 \text{g cm}^{-2}$. La viscosidad cinemática también se considerada uniforme fuera de la cavidad central, con un valor $\nu = 10^{-5} r_0^2 \Omega_0^{-1}$, con Ω_0 la velocidad angular en r_0 . La relación de aspecto del disco es $H/r = 0,05$.

El disco presenta 384 zonas azimutales y 306 zonas radiales. El radio mínimo del disco es $0,2 r_0$ mientras que el radio exterior es $3,5 r_0$. El radio de la cavidad central es $1,8 r_0$. El salto en la densidad es $R = \Sigma_o / \Sigma_i = 10$, mientras que el ancho de la cavidad es $\Delta r = 0,5 r_0$. La condición de contorno considerada es no reflectante para ambos extremos del disco.

En cada simulación, se colocó un planeta de masa m a una distancia $r = 2,5 r_0$ en órbita circular. El intervalo de masas consideradas es $0,01 M_J < m < 10 M_J$. Se realizaron un total de 18 simulaciones y siempre se observó que el planeta migró hacia la estrella. Todos alcanzaron un estado estacionario. Dos ejemplos extremos de este comportamiento pueden verse en la figura (6.4). Así, la propuesta de Kuchner & Lecar (2002) es verificada.

Si bien no se muestra aquí, la excentricidad de los planetas siempre fue amortiguada por el disco. En todos los casos, la excentricidad final fue $e \sim 10^{-3}$, por lo que las órbitas fueron prácticamente circulares. Es interesante notar que otros autores obtienen resultados que no parecen estar en acuerdo con estos resultados. Un ejemplo es el trabajo de Rice et al. (2008). Estos autores consideran planetas masivos, los cuales pueden ingresar dentro de la cavidad, y observan un aumento de la excentricidad cuando el planeta se encuentra dentro. Esto podría explicarse mediante el hecho de que las configuraciones numéricas no son las mismas. En FARGO, el interior de la cavidad nunca se vacía, sólo presenta una disminución en la densidad, mientras que en las simulaciones de Rice et al. (2008), el interior se encuentra vacío. El amortiguamiento de la excentricidad debido a la presencia de gas en las inmediaciones planetarias parecería ser muy importante.

5.5.2. Simulaciones vs Realidad

Todas las simulaciones hidrodinámicas fueron realizadas con los mismos parámetros excepto la masa planetaria. Ya que la escala del problema no está completamente deter-

5. Diagrama Masa-Período de Exoplanetas

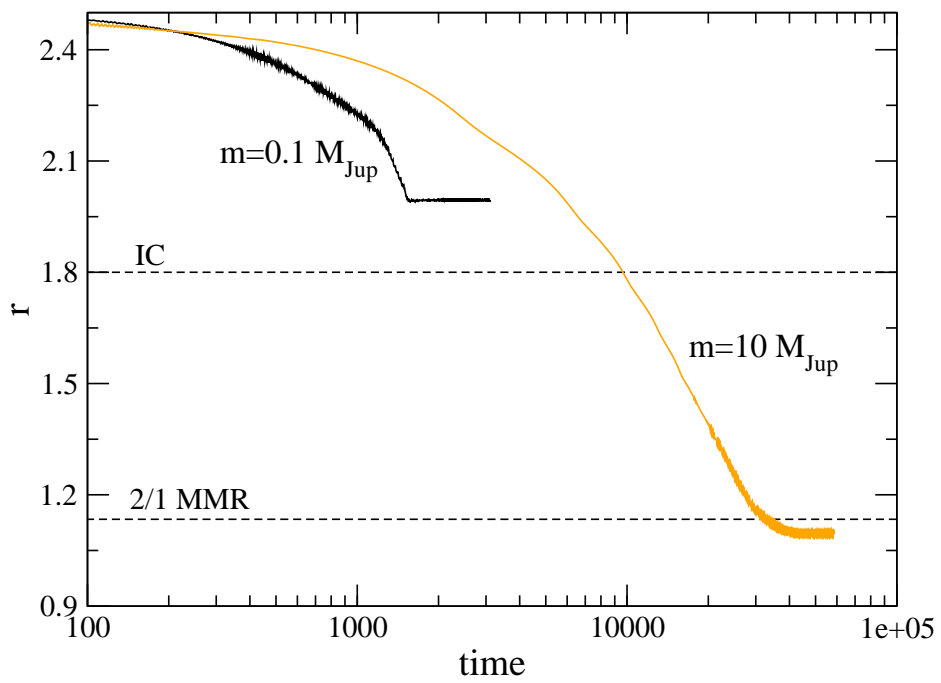


Figura 5.6.: Evolución del semieje de dos planetas pertenecientes cada uno a sistemas diferentes. El planeta poco masivo es detenido en el borde de la cavidad en el disco, mientras que el planeta más masivo ingresa al interior de la cavidad y es detenido en las proximidades de una resonancia de movimientos medios 2:1 con el borde de la cavidad.

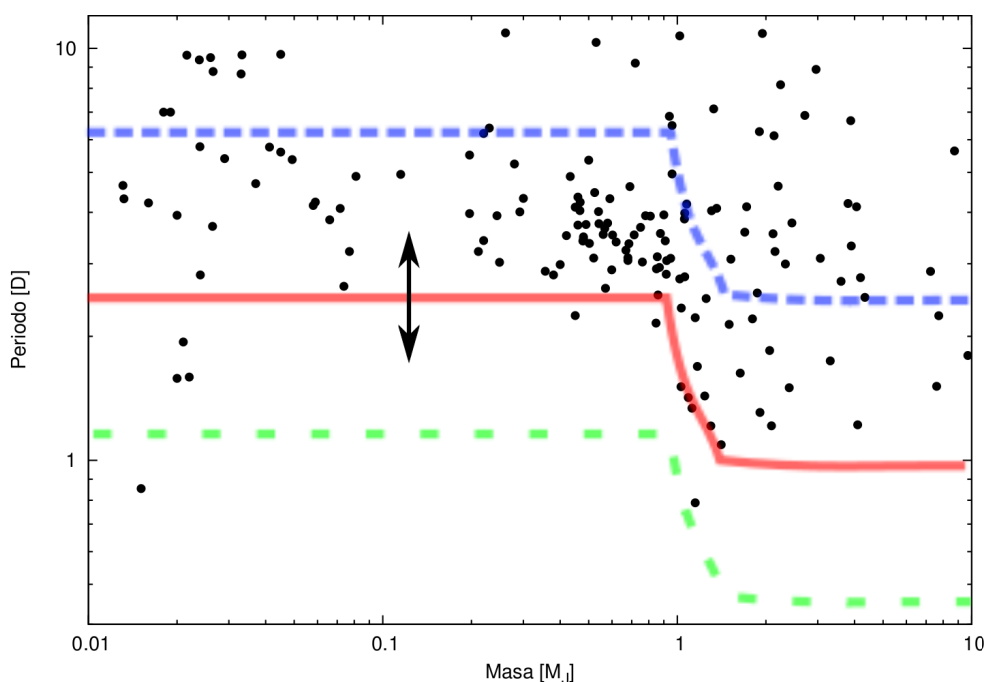


Figura 5.7.: Ya que las simulaciones hidrodinámicas son adimensionales, cuando las comparamos con las observaciones, disponemos de un grado de libertad. Este grado de libertad puede aprovecharse para desplazar verticalmente los resultados de las simulaciones. La línea continua representa una localización aceptable (este análisis es sólo cualitativo).

minada debido a la utilización de unidades adimensionales para la distancia, se dispone de un grado de libertad para escalar las simulaciones a fin de compararlas con las observaciones. Por esta razón, es posible colocar los resultados de las simulaciones en el diagrama masa-período y desplazarlos de forma vertical (a todos juntos) hasta hacerlos coincidir con el escalón observado. Esto puede verse en la figura (5.7).

Las simulaciones concuerdan muy bien con las observaciones. Los exoplanetas con masas más pequeñas que la masa de Júpiter tienen un período del orden de los 2 o 3 días, mientras que los planetas mayores presentan períodos del orden de 1 día. Es notable incluso la relación de aspecto entre la curva proveniente de la simulación y el escalón observado en el diagrama.

Sin embargo, las simulaciones hidrodinámicas fueron realizadas para estrellas de una masa solar, mientras que la masa de las estrellas anfitrionas del diagrama masa-período no son todas iguales. Por otro lado, están presentes los efectos tidales. Las simulaciones hidrodinámicas reproducen un tiempo muy cercano a la formación de los planetas y no tienen en cuenta fuerzas de marea estelar y planetaria (planeta y estrella puntual). En la región 3 del diagrama masa-período, los efectos tidales son muy importantes, los cuales serán mayores mientras más viejos sean los sistemas.

Por estas dos razones, la comparación entre las simulaciones hidrodinámicas realizadas

5. Diagrama Masa-Período de Exoplanetas

con FARGO y las observaciones no puede realizarse de forma tan directa como se observa en la figura (5.7).

5.6. Evolución orbital por fuerzas de marea

5.6.1. Una variable normalizada

Ya que los exoplanetas observados en la región 3 del diagrama masa-período presentan distancias astrocéntricas muy pequeñas, las fuerzas tidales involucradas son muy intensas. Estas fuerzas generan dos efectos principales:

- Circularización orbital
- Migración orbital

Por otro lado, ya que los exoplanetas no tienen estrellas de igual masa, radio, y entre ellos tampoco tienen iguales radios, la evolución tidal de cada uno es diferente. Por lo tanto, colocar a todos los exoplanetas juntos en un diagrama masa-período fuertemente afectado de evolución tidal no necesariamente puede arrojar una estructura ordenada.

Una solución puede ser hallar una variable que sea independiente de las características individuales de cada exoplaneta. Se trata de buscar entonces una cantidad que evolucione de la misma forma para todos los exoplanetas en la misma cantidad de tiempo.

En el capítulo 2 se vio que las fuerzas de marea generan una circularización orbital muy rápida. Por este motivo, se supondrá que los exoplanetas de la región del diagrama masa-período presentan órbitas casi circulares.

Recordando la expresión para el semieje cuando intervienen fuerzas tidales y las órbitas son circulares¹ :

$$a(t)^{13/2} \propto \left(\frac{M_{\odot}}{M_*} \right)^{1/2} \left(\frac{R_*}{R_{\odot}} \right)^5 \left(\frac{M_p}{M_{\odot}} \right) \frac{1}{Q_*} t, \quad (5.1)$$

Por lo tanto, el semieje tidal es función de M_* , R_* , M_p y Q_* . Si bien Q_* dependerá en general de los parámetros estelares como la masa y el radio, ya que esta dependencia no es conocida y además interesa estudiar un comportamiento general, se considerará a Q_* como un parámetro, igual para todas las estrellas de la muestra. Ya que en general su valor es muy mal conocido, sólo se dará una estimación de su magnitud. Así, las variables que molestan para una comparación directa en el diagrama masa-periodo son:

- Masa estelar
- Radio estelar

¹Al haber supuesto excentricidad nula, desaparecen los efectos de la marea planetaria, por lo que el radio planetario y el parámetro tidal planetario no son necesarios.

De esta forma, puede definirse un semieje no dependiente del radio estelar y masa estelar:

$$a^* = a \left(\frac{M_*}{M_\odot} \right)^{1/13} \left(\frac{R_\odot}{R_*} \right)^{10/13} \quad (5.2)$$

En la figura (5.8) se observa el diagrama m - a^* , el cual presenta una estructura mejor delimitada que el diagrama masa-período.

Aún persiste una diferencia importante entre cada miembro de la distribución. Esta diferencia es la edad de cada sistema planetario. Cada sistema presenta una edad diferente, y por lo tanto una evolución tidal diferente. Esto se podría solucionar fácilmente conociendo la edad de cada uno. Así, a partir de la ecuaciones tidales integradas hacia el pasado podría normalizarse en edad. Esta normalización se hará en las siguientes secciones.

5.6.2. Muestra sintética

Si bien no existe certeza sobre cual es el mecanismo de selección que moldea la distribución actual, es posible analizar si una distribución inicial con una determinada forma puede dar como resultado de interacciones tidales una distribución similar a la observada. Para esto, se generaron tres muestras sintética de exoplanetas, las cuales se encuentran en el rango de masas y semiejes considerados.

En el capítulo 3, figuras (4.10) y (4.11), se vio que la migración tidal se acelera a medida que el semieje disminuye (cuando la excentricidad es nula). Además, es esperable la presencia de un semieje inicial para el cual todo planeta depositado en ese semieje caiga efectivamente hacia su estrella. Esto puede observarse en detalle en la figura (5.10).

Muestras

En la figura (5.9) se observan tres distribuciones diferentes, las cuales fueron generadas con los mismos parámetros para sus planetas. Las edades de los sistemas varían de forma aleatoria entre 1 y 8 Ga y las órbitas se fijaron circulares.

Se generó una distribución que abarque todo el espacio m - a^* y se la hizo evolucionar en el tiempo a través de la ecuación (4.97). Como puede deducirse de (4.97), los planetas más masivos migran más velozmente que aquellos menos masivos. Por lo tanto, el resultado de hacer evolucionar esta distribución es un diagrama m - a^* con un vaciamiento de la región más masiva. Este resultado es contrario a lo observado en el diagrama real.

Por otro lado, se generó una nueva distribución, pero considerando la existencia de algún mecanismo que frena a los planetas en un cierto semieje. En este caso se escogió como semieje de frenado $a_0 = 0,04$ UA. Una vez más, se evolucionó la muestra. El resultado es muy diferente a lo observado en la distribución anterior. En este caso los planetas más masivos migran más velozmente que los menos masivos, pero ya que el semieje inicial es lo suficientemente grande, los planetas poco masivos permanecen prácticamente inmóviles durante toda su vida. Por lo tanto, se forma una región poblada de planetas masivos cercanos a la estrella, mientras que los planetas poco masivos se

5. Diagrama Masa-Período de Exoplanetas

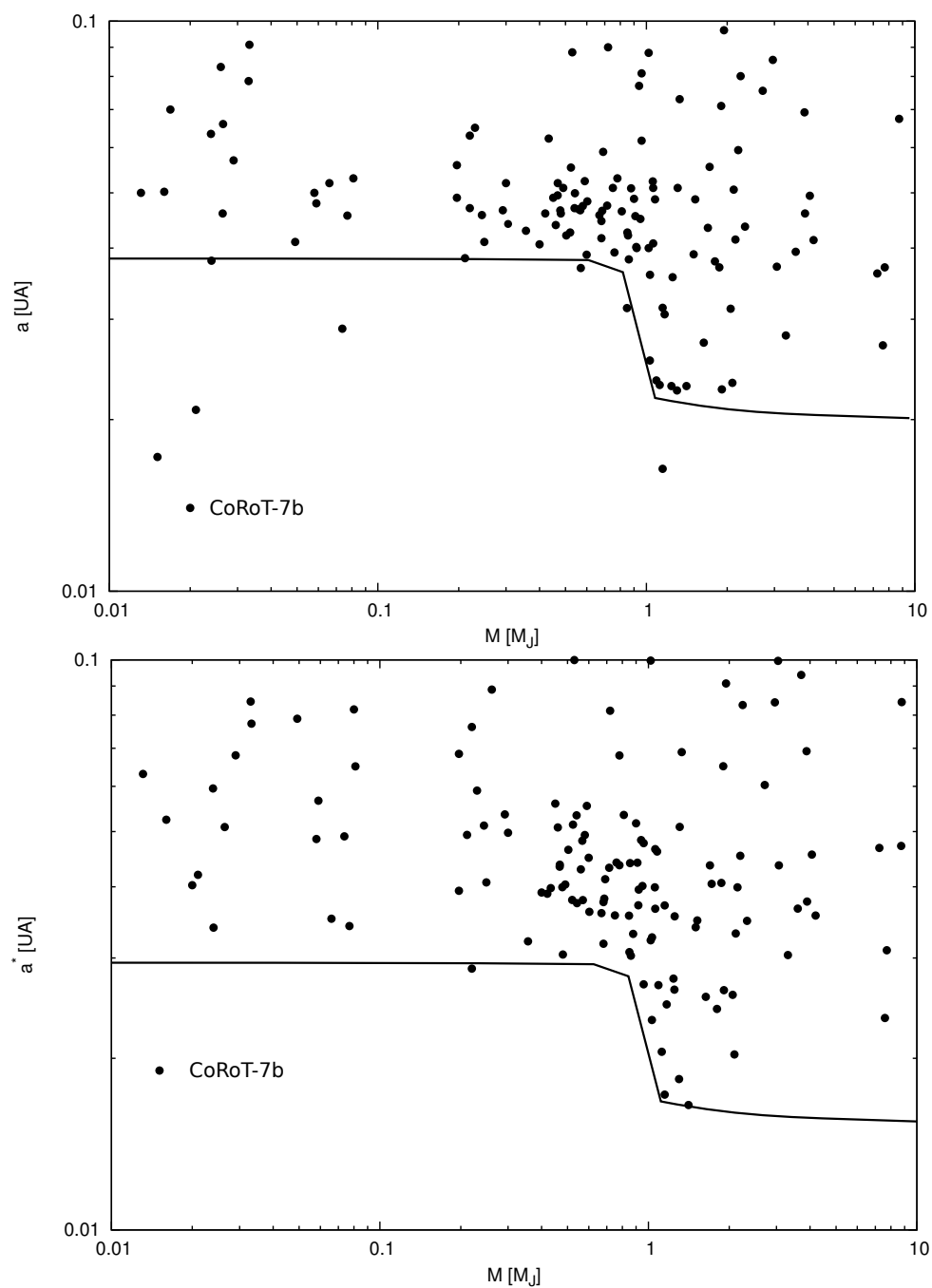


Figura 5.8.: En la figura superior puede verse el diagrama masa-semieje para la región 3 del diagrama masa-período. Se observa el mismo escalón, sin embargo unos pocos puntos de baja masa presentan semiejes más pequeños que los demás planetas de baja masa. En la figura inferior se observa el mismo diagrama pero utilizando la variable a^* . Los puntos de baja masa ahora están posicionados siguiendo el escalón. El único exoplaneta que no respeta esto es CoRoT-7b, señalado en ambas figuras.

mantienen siempre alejados. Esto es lo observado en el diagrama m - a^* real. Según este resultado, el diagrama masa-período actual podría ser una evidencia de la existencia de un mecanismo de frenado para los exoplanetas. Esta es una idea que debe analizarse con mucho más detalles utilizando técnicas estadísticas, lo cual está fuera del objetivo de este trabajo.

A fin de estudiar la hipótesis propuesta por Masset et al. (2006), se creó otra distribución, la cual asume la existencia de un límite inferior para los parámetros que darían origen a una cavidad, el borde interior se lo situó en $a_0 \sim 0,04$ UA. Como es esperable según las simulaciones hidrodinámicas, los planetas más masivos ingresan en la cavidad, mientras que los menos masivos son retenidos cercanos a ésta. Nuevamente, se evolucionó la muestra mediante (4.97) y se obtuvo una distribución resultante. El resultado fue similar al obtenido en la distribución anterior. Es decir, se observa un diagrama resultante muy similar al generado a partir de observaciones astronómicas.

En este sentido, no es posible proponer que lo que se observa actualmente en el diagrama proviene exclusivamente de una trampa planetaria. Sin embargo, a la fecha no es conocido ningún mecanismo de frenado que detenga a todos los cuerpos en un semieje inferior independientemente de la masa, por lo que sería un mecanismo satisfactorio.

Así, la principal característica del diagrama masa-período podría ser explicable a partir de efectos tidales incluyendo algún mecanismo de frenado para los protoplanetas.

Es interesante notar que Jackson et al. (2009) afirman que la distribución actual de las órbitas de los exoplanetas muestra evidencia de destrucción por efectos tidales (es decir, por caída a la estrella). Según estos autores, efectos tidales podrían explicar la disminución de cuerpos observados cerca de la estrella central y la concentración de ellos en períodos cercanos a los tres días. Además, afirman que no sería necesaria la consideración de otros mecanismos además de efectos tidales.

Resumiendo, en esta sección se vio que si bien las fuerzas tidales son aparentemente las moldeadoras del diagrama masa-período, y por lo tanto de los semiejes observados, no alcanzaría simplemente con considerarlos sobre cualquier distribución inicial de cuerpos. Por lo tanto, parecería ser necesaria la inclusión de otros efectos además de los tidales, por ejemplo, las trampas planetarias.

5.6.3. Edades estelares

Anteriormente se aclaró que las observaciones actuales del diagrama masa-período están muy afectadas por fuerzas de marea diferentes para cada sistema. Con la definición de la nueva variable a^* , parte de estas diferencias fueron corregidas. Sin embargo aún quedan pendientes las edades estelares.

Importancia de los efectos tidales

De acuerdo a la figura (5.10), si $a_0 \sim 0,03$, en menos de 10 Ga todos los cuerpos deberían caer a su estrella. Es más, mientras más masivos sean los cuerpos, más rápidamente caerán. Por este motivo, si los efectos tidales fuesen realmente fuertes en la región 3 del diagrama, debería observarse un vacío en un diagrama masa-edad estelar a medida que

5. Diagrama Masa-Período de Exoplanetas

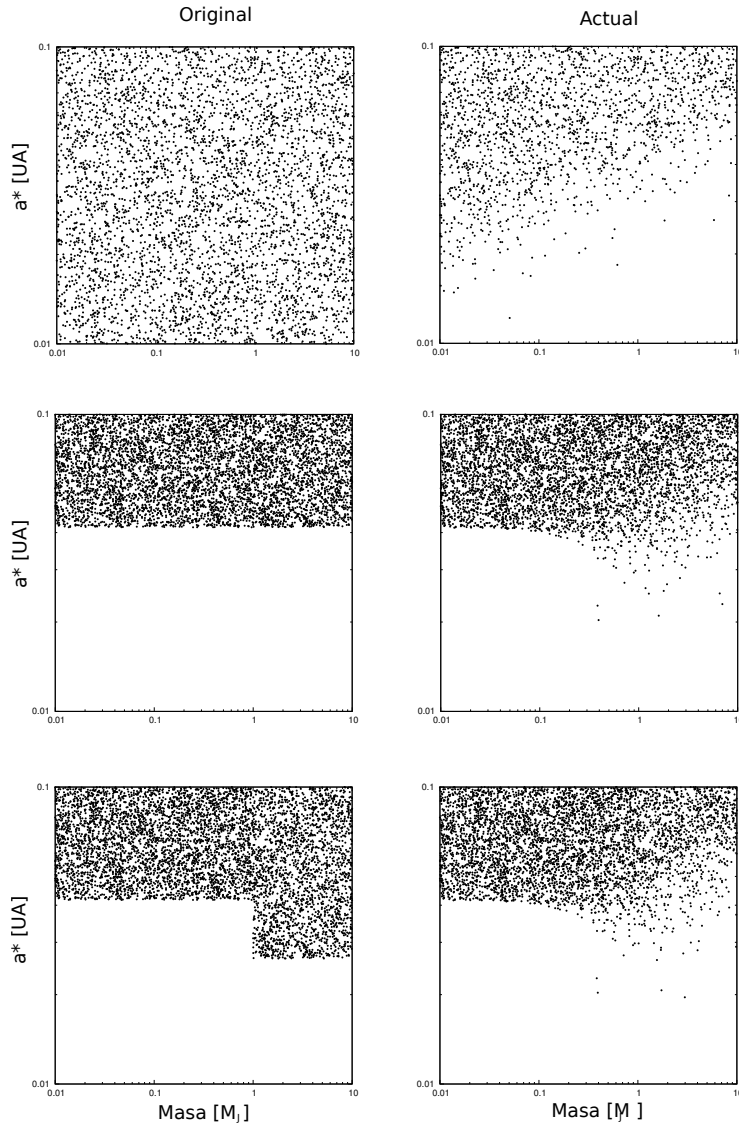


Figura 5.9.: Evolución de una muestra sintética de exoplanetas. Para hacerlos evolucionar se utilizó (4.97) con excentricidad nula y edades aleatorias, comprendidas entre 1 y 8 *Ga*. El parámetro tidal en este caso fue $Q_* = 10^6$. Cada fila representa una distribución diferente. Las distribuciones iniciales se hallan a la izquierda y las evolucionadas a la derecha. Para evolucionarlas se utilizó (4.97). Observamos que un diagrama denso inicialmente, luego de la evolución produce algo muy diferente a lo observado en el diagrama real. Mientras que un diagrama vacío en las proximidades de la estrella produce un resultado muy similar al observado. Por lo tanto, el diagrama a^* –masa observado podría ser una evidencia de la existencia de un mecanismo de frenado o trampas planetarias. Si bien el escalón no se ubica en la posición observada, esto se debe a que la posición de este depende del parámetro T/Q_* , el cual es desconocido. $T/Q_* \sim 10^{-6}$ posiciona correctamente el escalón.

se incrementa la masa y la edad. Este diagrama puede observarse en la figura (5.11). Efectivamente, el vacío se observa en las regiones de mayor masa y edad. De esta figura se concluye que los efectos tidales parecerían ser muy importantes en esta región y consecuentemente, sería el mecanismo dominante como moldeador de la distribución masa-período.

Ya que interesa estudiar el decaimiento orbital de los cuerpos por efectos de marea, se busca el semieje inicial para el cual el cuerpo cae a la estrella en un tiempo T :

$$a_0^{13/2} = \beta(M_p)T = cM_pT \longrightarrow a_0^c = (cM_pT)^{2/13} \quad (5.3)$$

donde c es función de la masa estelar y el radio estelar. Ya que la variable es a^* , c es una constante. Esta expresión dice cuál es el semieje inicial para cada masa planetaria y edad, de modo que el planeta caiga hacia la estrella.

En la figura (5.12) se observan las curvas obtenidas a partir de (5.3) superpuestas al diagrama m - a^* . Esta superposición da una idea de cuál puede ser el destino de los exoplanetas de la distribución. Sin embargo, en la figura (5.12) no hay información sobre la edad planetaria. Para esto, debe notarse que en la figura (5.11) existe una relación entre la edad de los cuerpos y su masa. No se observan cuerpos muy masivos en sistemas viejos. Por lo tanto es esperable que la mayoría de los cuerpos masivos que se hallan por debajo de la línea correspondiente a 1 GA en la figura (5.12) no acompañen a su estrella durante toda su vida.

Muestra homogénea en edades

A partir de la recopilación de las edades estelares (sólo para 94 miembros) junto a las ecuaciones tidales, se pudo reconstruir la distribución original de exoplanetas. El resultado puede verse en la figura (5.13). Según este resultado, la distribución actual parecería provenir de una estructura la cual presenta un escalón. Sin embargo, para obtener una conclusión más certera es necesario disponer de mayor cantidad de observaciones. Una posible explicación a la ausencia de información respecto al escalón inicial puede provenir de la figura (5.12). En efecto, los cuerpos que pertenecen a la región inferior del escalón son los más afectados por fuerzas tidales, razón por la cual podrían haber sido destruidos tempranamente.

Así, en esta sección hemos brindado argumentos a favor de la hipótesis de la formación del escalón en el diagrama masa-período como un resultado de la interacción tidal entre el planeta y la estrella, tal cual había sugerido el experimento en la figura (5.9).

5.7. Sobre CoRoT-7b

Hasta ahora, en todos los análisis previos, el exoplaneta CoRoT-7b siempre aparece como un caso aislado, ubicado en la región de baja masa y corto período. Es interesante notar que no se ha logrado corregir la posición de CoRoT-7b debido principalmente a que orbita una estrella de características muy similares a las del Sol, por lo que $a^* \sim a$.

5. Diagrama Masa-Período de Exoplanetas

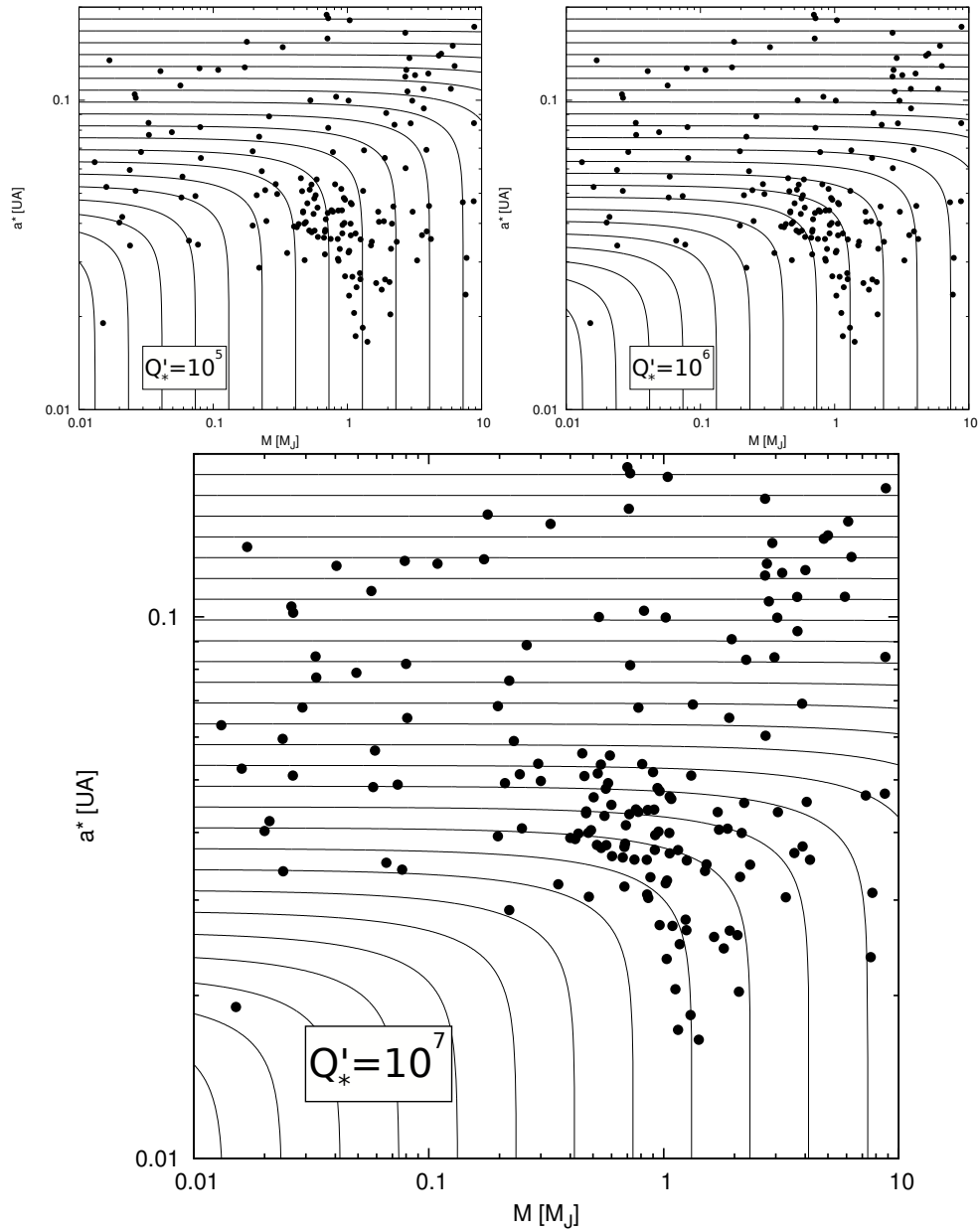


Figura 5.10.: Diagrama masa- a^* con curvas de nivel de la función (4.97) superpuestas. En todas las curvas se consideró $T = 10$ Ga y diferentes valores de Q'_* . Cada curva está equiespaciada en escala logarítmica con a_0 . Observamos que el mejor acuerdo se produce para un parámetro tidal del orden de $Q'_* \sim 10^7$. El mejor ajuste se produce para un semieje inicial $a_0 \sim 0,035$, lo cual corresponde a un período orbital $P \sim 2,4$ días.

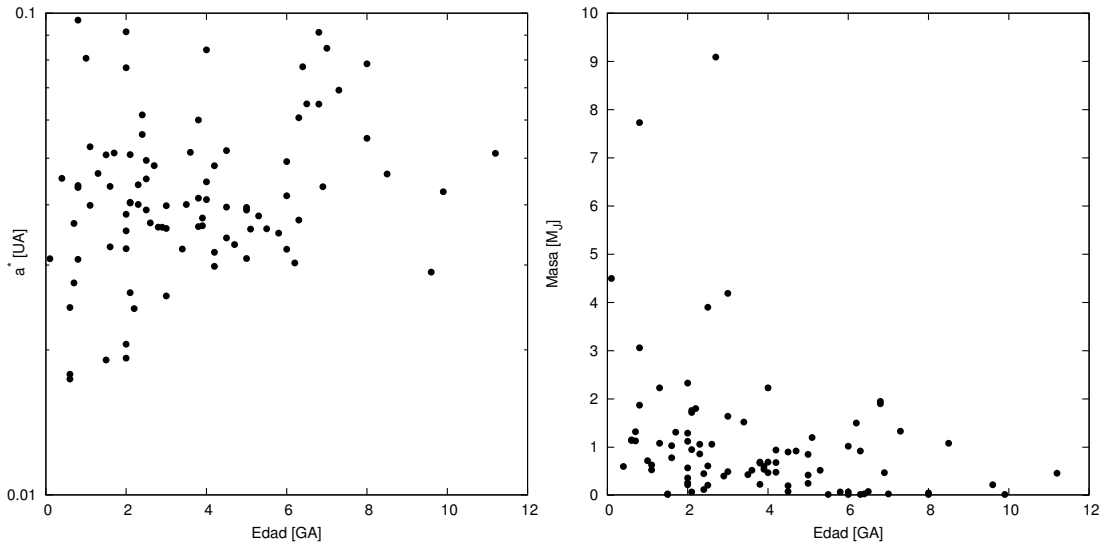


Figura 5.11.: A la izquierda se observa un diagrama a^* -edad. De esta figura notamos que los semiejes pequeños están reservados exclusivamente para los sistemas jóvenes, tal cual esperábamos a causa de las fuerzas tidales. En la derecha observamos un diagrama masa-edad. Este resultado es más interesante que el de la figura izquierda. Tal cual habíamos predicho, los cuerpos más masivos pertenecen a sistemas jóvenes, ya que de otro modo estos ya habrían tenido el tiempo suficiente como para caer hacia la estrella.

De acuerdo a las curvas de la figuras (5.10) y (5.12) este exoplaneta experimentaría una caída a su estrella en los próximos 8 GA. Este escenario es posible ya que la edad del sistema CoRoT-7 es $\sim 1,5GA$.

Otro ejemplo muy interesante que está en desacuerdo con lo hasta aquí desarrollado es el exoplaneta Kepler-10b, el cual presenta unas características muy similares a las de CoRoT-7b, pero la principal diferencia es que el sistema es muy viejo ($\sim 10GA$). Sin embargo, según se vio con anterioridad, por más que Kepler-10b en un comienzo haya pertenecido al borde del escalón actual, un tiempo tan prolongado no tiene efectos demasiado importantes en la migración planetaria a menos que el cuerpo presente alguna excentricidad inicial importante². Esto podría ser explicado quizás a partir de la presencia de otro cuerpo en el sistema Kepler-10, que haya sido capaz de perturbar significativamente la órbita de Kepler-10b.

La hipótesis del mecanismo de frenado sumada a la interacción tidal de los planetas con sus respectivas estrellas, explicaría satisfactoriamente la estructura observada en el diagrama masa-período. Sin embargo, la ubicación de CoRoT-7b no puede ser ignorada y es necesario aclarar la razón de su ubicación en el diagrama.

Esta característica tan particular de estos dos sistemas es el punto de partida del siguiente capítulo, en el cual se analizará solo el caso de CoRoT-7b.

²Si bien 10 GA de evolución terminan destruyendo a un cuerpo en la posición de Kepler-10b, en el pasado su posición era más externa, por lo que en esa región inicial los efectos tidales son menores.

5. Diagrama Masa-Período de Exoplanetas

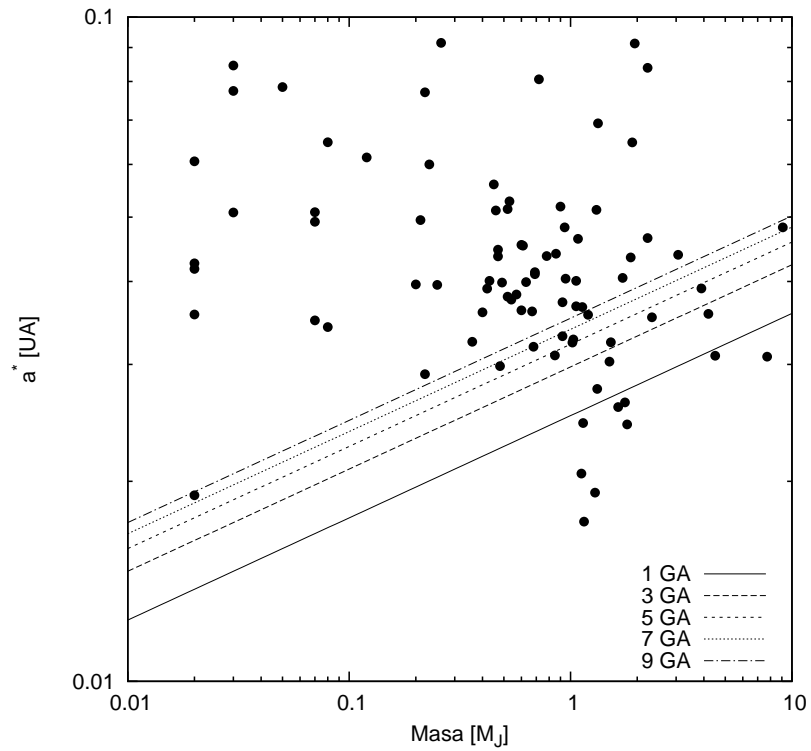


Figura 5.12.: Se observa el diagrama m - a^* de los exoplanetas conocidos de los cuales disponemos información sobre la edad del sistema, es decir, la misma muestra que en la figura (5.11). Superpuesto al diagrama se observan las curvas dadas por la ecuación (5.3). Se puede apreciar que hay una población importante de exoplanetas gigantes que caerán a su estrella en tan sólo 1 GA.

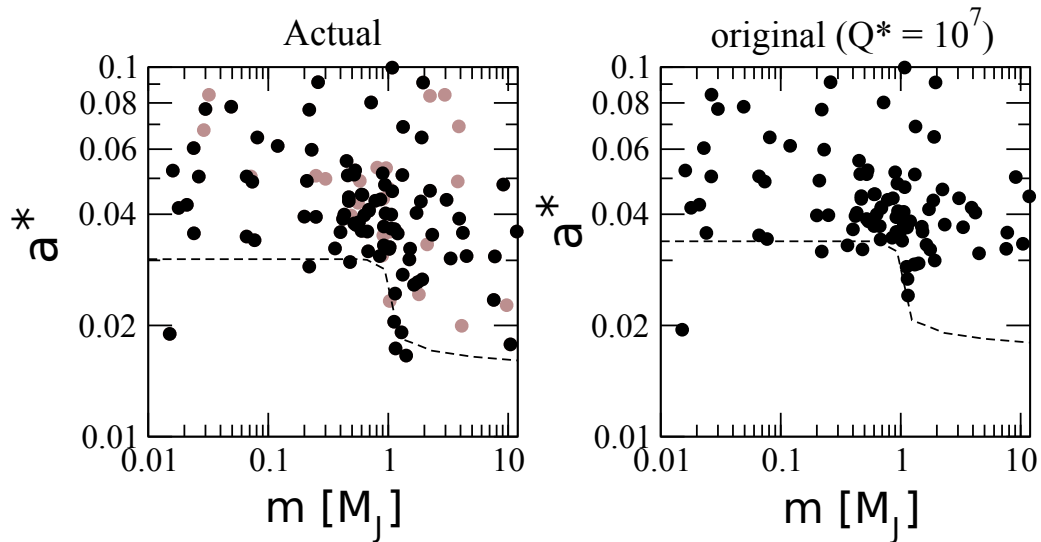


Figura 5.13.: Izquierda: distribución actual de exoplanetas. Los círculos negros muestran planetas para los cuales los parámetros estelares, incluyendo la edad, se encuentran disponibles. Los círculos grises corresponden a cuerpos para los cuales la información estelar no está completa. Derecha: Distribución original, reconstruida a partir de la evolución tidal. La curva a trazos representa el resultado de las simulaciones hidrodinámicas.

5.8. Resumen

En este capítulo se analizó la distribución masa-período de los exoplanetas conocidos hasta la fecha. En particular se estudió la región que comprende a los exoplanetas de corto período. Se vio que esta región (región 3 en el texto) presenta una característica muy notoria, la cual es un vaciamiento en la región con período menor a 2.5 días para los planetas enanos y subgigantes.

Se presentó un modelo que permitiría explicar esta estructura. Para corroborar tal modelo se realizaron una serie de simulaciones hidrodinámicas con el código FARGO de un disco con un vaciamiento central. Se halló que planetas con una masa menor que la masa de Júpiter eran atrapados levemente más allá del borde de la cavidad en el disco, mientras que los planetas de mayor masa no eran retenidos en este sector. Los cuerpos más masivos continuaron su migración hacia el interior de la cavidad. En efecto, los cuerpos más masivos entran en un régimen migratorio de tipo II, por lo que la densidad en su entorno está muy alterada. Al ingresar en la región en donde el torque corrotacional debería ser muy intenso, al no haber gas, su efecto desaparece. En este caso, la migración era detenida en una resonancia de movimientos medios 2:1 con el borde de la cavidad, lo cual se corresponde con la resonancia de Lindblad más externa. Ya que las simulaciones tienen escalas de distancia normalizadas, es posible reescalar la distancia y así hacer coincidir el resultado con las observaciones. Así, las simulaciones hidrodinámicas reproducen de forma muy satisfactoria el escalón observado en el diagrama masa-período.

5. Diagrama Masa-Período de Exoplanetas

Además, se discutieron las complicaciones en cuanto a la comparación directa de las simulaciones con las observaciones, las cuales son principalmente los efectos tidales diferentes para cada cuerpo y las edades de los sistemas. Para solucionar el primer problema se definió un semieje normalizado, el cual no depende de los parámetros estelares. Para solucionar el segundo se hizo evolucionar hacia el pasado (mediante las ecuaciones tidales) la muestra actual de exoplanetas y de esta forma se normalizó en edades la muestra.

También se vio que la distribución actual parecería ser compatible con un parámetro tidal $Q'_* \sim 10^7$.

En este capítulo también se generaron muestras sintéticas de exoplanetas, las cuales sirvieron para hacer un experimento cualitativo. Se vio que en principio una muestra inicial en la que existen cuerpos retenidos a un semieje fijo es casi idéntica a una muestra la cual posee el un escalón de razón en período 2:1. A pesar de esto, a través de la normalización en edad fue posible observar una leve evidencia de que la configuración inicial de la muestra de exoplanetas en el diagrama masa-período presentaría un escalón como lo describen las simulaciones hidrodinámicas.

Por otro lado, se estudió el decaimiento orbital de la muestra de exoplanetas actual, y se demostró que los efectos tidales están presentes y son de gran importancia. Además, se pudo corroborar y completar el resultado de Jackson et al. (2009), observando evidencia de destrucción planetaria al no hallar cuerpos masivos en sistemas viejos (que en la variable normalizada se observa más claramente que en el artículo de estos autores), y al demostrar, a través de una muestra sintética, que la distribución actual no puede ser formada si no existe algún mecanismo de frenado durante la formación.

Por último, se discutió brevemente el caso de CoRoT-7 y Kepler-10, los cuales serán el objeto de estudio del siguiente capítulo.

6. CoRoT-7b

6.1. Introducción

CoRoT-7 es un sistema planetario descubierto por la misión espacial CoRoT. Esta misión está preparada para realizar fotometría de muy alta precisión en un campo amplio de forma simultánea. Durante una observación es posible monitorear cerca de 12000 estrellas simultáneamente y de forma ininterrumpida durante 150 días. CoRoT es ideal para detectar planetas con períodos menores a 50 días.

Dado que la señal de tránsito es proporcional a la superficie proyectada del planeta, los primeros resultados fueron enfocados hacia la detección de planetas masivos. Sin embargo, CoRoT tiene la capacidad de detectar planetas significativamente más pequeños. La sensibilidad de CoRoT es tal que puede detectar planetas con radios tan chicos como $2R_{Tierra}$.

El satélite CoRoT descubrió el tránsito de un planeta pequeño alrededor de la estrella CoRoT-7. Luego de la utilización de observaciones desde Tierra y desde el espacio, realizadas en diferentes bandas, se concluyó que CoRoT-7b tiene un radio $R_b = 1,68 \pm 0,09 R_{Tierra}$ (Léger et al. 2009; Queloz et al. 2009). La amplitud del tránsito se detectó mediante el satélite; la estrella es considerada una estrella activa de tipo espectral G9V. La masa del planeta se estimó mediante mediciones de velocidad radial y una primer cota para su masa es $M_b < 21 M_{Tierra}$, que luego fue mejorada, para ser establecida actualmente en aproximadamente $5 M_{Tierra}$ (Queloz et al. 2009). El período orbital determinado es el más corto detectado hasta la fecha, y su valor es $P = 0,8536$ días. El semieje es $a = 0,0172 UA$ por lo que la temperatura en su superficie debe ser muy elevada. Por completitud se presentan los parámetros de la estrella CoRoT-7 en las tablas (6.1), (6.2):

A continuación, en la tabla (6.3), se resumen los parámetros orbitales para el sistema planetario CoRoT-7.

6. CoRoT-7b

Tabla 6.1.: CoRoT-7 IDs, coordenadas y magnitudes. Tabla obtenida de Léger et al. (2009)

<i>CoRoT</i> ID	102708694, LRa01 E2 0165	
<i>USNO-A2</i>	0825-03049717	
<i>2-MASS</i>	06434947-0103468	
<i>TYCHO</i>	4799-1733-1	
α (2000)	06:43:49.0	
δ (2000)	-01:03:46.0	
B-mag ^(a)	12.524	± 0.018
V-mag ^(a)	11.668	± 0.008
r' -mag ^(a)	11.378	± 0.008
i' -mag ^(a)	10.924	± 0.017
J ^(c)	10.301	± 0.021
H ^(c)	9.880	± 0.022
K _s ^(c)	9.806	± 0.019
μ_α ^(b)	12.9 ms/año	1.4
μ_δ ^(b)	-4.0 ms/año	1.5

(a) *Exo-Dat*, basado en observaciones tomadas en el telescopio *INT*.

(b) Catálogo *TYCHO* .

(c) Catálogo *2-MASS* .

Tabla 6.2.: Parámetros de CoRoT-7 derivados de velocidad radial y análisis espectroscópicos. Tabla realizada por Léger et al. (2009)

v_{rad} (km s ⁻¹)	+31.174	± 0.0086
$v_{\text{rot}} \sin i$ (km s ⁻¹)	< 3.5	
T _{eff}	5275K	± 75
log g	4.50	± 0.10
[M/H]	+0.03	± 0.06
Tipo Espectral	G9 V	
M_\star	0.93	± 0.03
R_\star	0.87	± 0.04
M_V	5.78	± 0.10
Edad	1.2 - 2.3 GA	
Distancia	150 pc	± 20

Tabla 6.3.: Parámetros orbitales para CoRoT-7b/7c según Queloz et al. (2009).

Parámetro	CoRoT-7b	CoRoT-7c
Período [DJ]	$0,85353 \pm 2 \times 10^{-5}$	$3,698 \pm 0,003$
T_{tr} [DJ]	$2454446,731 \pm 3 \times 10^{-3}$	
T_0 [DJ]	$2454446,508 \pm 0,029$	$24544445,0 \pm 0,7$
K [$m s^{-1}$]	$3,5 \pm 0,6$	$4,0 \pm 0,5$
e	0	0
ω [\hat{A}°]	180	180
m [M_{Tierra}]	$4,8 \pm 0,08$	$8,4 \pm 0,09$
a [UA]	0.017	0.046

6.2. Posibles escenarios

Ya que el sistema planetario CoRoT-7 es un sistema de múltiples planetas, es posible que la interacción mutua entre ellos pueda explicar la posición de CoRoT-7b. Mientras CoRoT-7c se halla en la región esperada según su masa en el diagrama masa-período, no ocurre lo mismo con CoRoT-7b.

En sistemas con múltiples miembros, es esperable que las interacciones gravitatorias entre los miembros sea muy importante, y por lo tanto competitiva frente a las interacciones tidales de los planetas con la estrella, o incluso entre ellos mismos. Por esta razón, en sistemas múltiples habría que tener en cuenta la dinámica conjunta y no podrían ser utilizadas las ecuaciones tidales como lo hemos hecho en el capítulo 3.

6.2.1. Modelo 1

Una posible explicación vendría a través del capítulo 3, cuando se estudiaron las trampas planetarias, sumando las ecuaciones tidales vistas en el capítulo 4. Se vio que cuando un cuerpo solo migra por efectos tidales con el disco, el cual presenta un gradiente pronunciado en su densidad, puede ser retenido en el borde de esta cavidad, o bien ingresar en ella, según sea la masa del cuerpo. Por otro lado, en el capítulo 6 se vio que aparentemente el valor mínimo para el frenado de cuerpos planetarios, es decir, las cavidades con menores semiejes en los discos de las estrellas observadas, estaría en un semieje $a \sim 0,03$ (Fig. 5.8), un semieje en el cual los efectos tidales son muy importantes.

Por lo tanto, el escenario sería el siguiente: Cuando se formaron ambos cuerpos, experimentaron una rápida migración en el disco (migración de tipo I). Ya que CoRoT-7c es más masivo que su compañero, este migra más velozmente. La interacción gravitatoria entre ambos cuerpos empuja a CoRoT-7b y frena a CoRoT-7c. Ambos cuerpos continúan su migración hasta que CoRoT-7b llega al borde de la cavidad del disco, posicionada en $a \sim 0,03$. El borde es lo suficientemente estrecho como para ejercer sobre CoRoT-7b un torque lo suficientemente fuerte como para retenerlo un tiempo en esa posición, mientras CoRoT-7c continúa su migración. Esta interacción genera un incremento en la excentricidad de CoRoT-7b, y en algún instante, logra ingresar en el interior de la cavidad. Una

6. CoRoT-7b

Tabla 6.4.: Parámetros utilizados en las simulaciones

Cavidad	AspectRatio	Sigma0	Viscosity	CavitiRadius	CavityRatio	CavityWidth
1	0.05	10^{-4}	10^{-5}	2.0	10.0	2.0
2	0.05	10^{-4}	2×10^{-5}	2.0	2.0	5.0

vez dentro, debido a las fuerzas tidales con la estrella central la excentricidad se amortigua rápidamente, pero, según vimos en el capítulo 2, mientras esto sucede, la migración orbital producida es grande, lo cual termina alejando a CoRoT-7b de su compañero y acercándolo demasiado a la estrella.

6.2.2. Modelo 2

Otro escenario posible es una dispersión planetaria. Morbidelli et al. (2008) presentaron resultados de simulaciones hidrodinámicas de varios cuerpos sumergidos en un disco de gas de forma simultánea. Estos autores observaron que varios cuerpos eran dispersados y que la configuración de equilibrio era alcanzada sólo cuando quedaban pocos individuos en el sistema. Este modelo parecería adecuarse a las condiciones actuales del sistema CoRoT-7, ya que presenta más de un miembro. En este sentido, podría esperarse que CoRoT-7b haya sido dispersado de su órbita de formación a través de un encuentro cercano con su compañero CoRoT-7c.

6.2.3. Modelo3

Un tercer modelo proviene de Valencia et al. (2010) y Jackson et al. (2010), quienes propusieron que CoRoT-7b podría ser el núcleo sólido de un planeta gaseoso gigante, cuya envoltura gaseosa se ha evaporado. En la literatura se continúan analizando las curvas de velocidad radial correspondientes al sistema planetario CoRoT-7, estableciéndose valores de masa muy diferentes, por ejemplo $9 M_{Tierra}$ (Ferraz-Mello et al. 2010) y $2 M_{Tierra}$ (Pont et al. 2011) para CoRoT-7b. El valor superior de masa parecería indicar un planeta de composición rocosa, el valor inferior sería compatible con un núcleo de un planeta gigante, el cual ha perdido toda su envoltura gaseosa.

6.3. Simulaciones hidrodinámicas

Para poner a prueba el primer modelo propuesto, se realizaron simulaciones hidrodinámicas del sistema planetario CoRoT-7, en las cuales fueron tenidas en cuenta las razones de masas de ambos cuerpos y se utilizaron dos perfiles de densidad diferentes. Los parámetros utilizados en la formación de los discos empleados pueden verse en (6.4). Ambas simulaciones fueron realizadas considerando un disco de gas, el cual posee una cavidad interior. La diferencia entre ambos perfiles es la zona de transición de la densidad y la razón entre la densidad interior y la exterior.

En el cuadro (6.5) se muestran las condiciones iniciales para cada planeta.

Tabla 6.5.: Condiciones iniciales para cada planeta.

Cavidad	Planeta	Semieje (a)	Velocidad inicial	Masa [$1 = M_{\odot}$]
1	CoRoT-7b	2.5	0.632455532	0.000014766
	CoRoT-7c	3.5	0.53452248382	0.000025594
2	CoRoT-7b	2.3	0.659380473	0.000014766
	CoRoT-7c	2.9	0.58722022	0.000025594

Las simulaciones fueron realizadas con una resolución de 306 zonas radiales espaciadas linealmente y 384 zonas azimutales. Los bordes del disco se fijaron en 0.2 como radio interno y 5.5 como radio externo. La condición de contorno se fijó como no reflectante. La relación de aspecto se estableció en 0.05.

6.3.1. Análisis de las simulaciones hidrodinámicas

Las simulaciones difieren, como se mencionó anteriormente, en la receta adoptada para la formación de la cavidad. Mientras que en la primera simulación se generó una cavidad angosta y de alta razón de densidades, en la segunda simulación se consideró una cavidad más suave (tabla 6.4). Ambas se discuten a continuación.

Cavidad 1

Tal como se describió en la tabla (6.4), la primera simulación asume una cavidad angosta y con un gran salto en la densidad. Esto implica que el torque corrotacional ejercido en el borde de la cavidad sobre los planetas debe ser importante, lo que en principio debería inhibir el pasaje planetario por el borde. La Figura (6.2) muestra el resultado de la evolución dinámica de ambos planetas durante la simulación (aproximadamente $1,2 \times 10^5$ períodos orbitales). En el gráfico superior se muestran los semiejes en función del tiempo. La escala es arbitraria, dada en unidades espaciales computacionales. La línea de trazos en $a = 2$ muestra la posición definida del centro del borde de la cavidad. El gráfico del centro muestra las excentricidades en función del tiempo. Los colores se mantienen respecto de la figura superior. Finalmente, el gráfico inferior presenta el cociente de movimientos medios de ambos planetas n_1/n_2 . Las líneas horizontales se corresponden a resonancias importantes de movimientos medios de primer orden.

Inicialmente, ambos planetas se encuentran bastante separados. Ya que la tasa de migración de Tipo I es proporcional a la masa planetaria (Ward 1997) (Capítulo 2), m_2 migra más rápidamente que m_1 . Ambos cuerpos mantienen órbitas prácticamente circulares, aunque se perciben pequeñas oscilaciones causadas principalmente por las perturbaciones gravitacionales mutuas.

En $t \sim 25000$ el planeta interno ingresa al borde de la cavidad, siendo frenado en $a \sim 2,25$; se mantiene casi inalterado durante el resto de la simulación. Este valor del semieje es prácticamente igual a la distancia de equilibrio obtenida en simulaciones con un único planeta (Masset et al. 2006).

6. CoRoT-7b

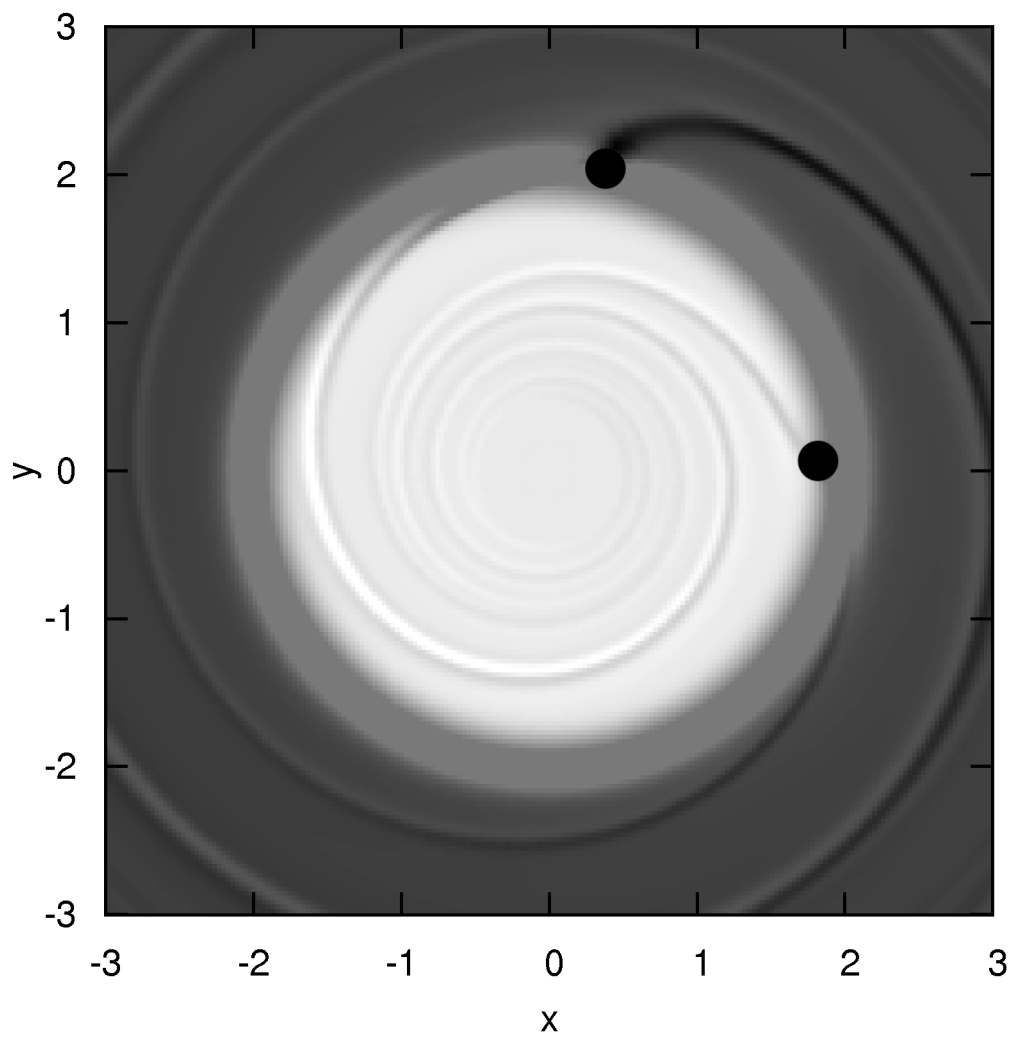


Figura 6.1.: Captura de la simulación realizada con el segundo perfil de densidad. Se observan las ondas de densidad generadas por ambos cuerpos. La región más clara corresponde a la cavidad.

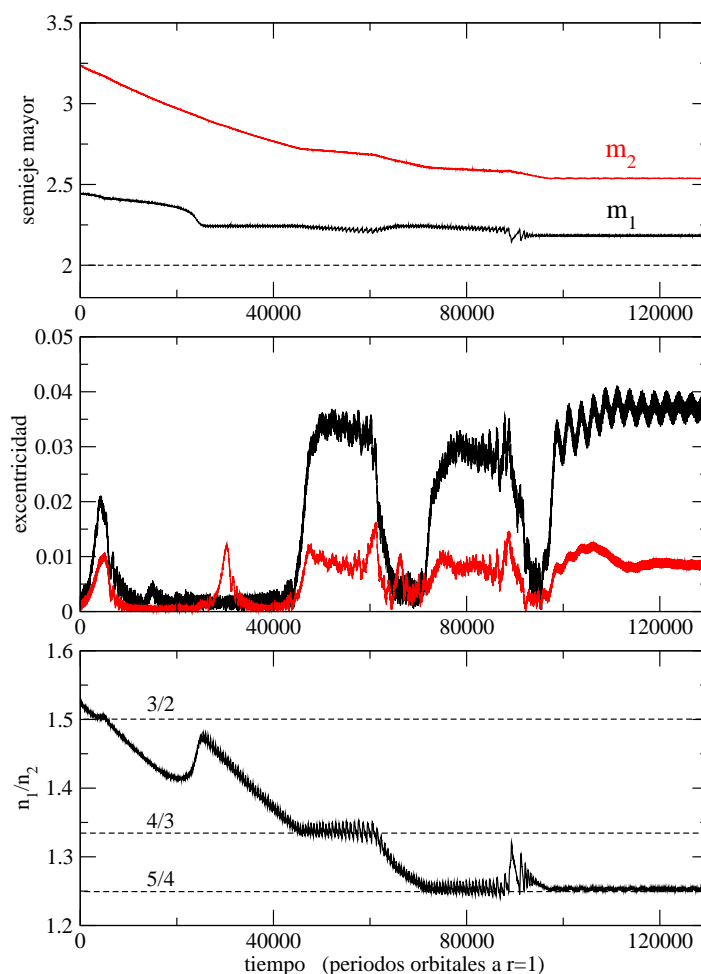


Figura 6.2.: Evolución orbital de dos planetas (masas similares a Corot-7) interactuando con un disco con cavidad estrecha (Cavidad 1).

La captura de m_1 no afecta el decaimiento orbital de m_2 , que continúa en una migración convergente hacia el cuerpo interno. Sin embargo, en $t \sim 40000$ ambos planetas son capturados en la resonancia de movimientos medios $4/3$. En este momento, las excentricidades son excitadas; e_1 adquiere valores mayores que e_2 (ya que $m_2 > m_1$). No obstante la captura, esta conmensurabilidad no es lo suficientemente fuerte como para contrarrestar el efecto disipativo del disco y, en $t \sim 60000$ ambos planetas abandonan la resonancia.

Fuera de la conmensurabilidad, ambas órbitas vuelven a circularizarse y m_2 retorna su migración hasta llegar a la resonancia $5/4$, configuración que parece ser lo suficientemente poderosa como para contrarrestar la influencia del torque de Lindblad. A partir de este momento, los semiejes de ambos cuerpos permanecen prácticamente inalterados. En $t \sim 95000$ se observa un cambio temporario en las excentricidades.

6. CoRoT-7b

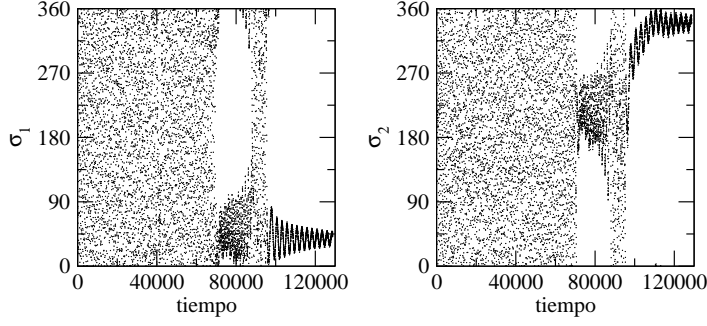


Figura 6.3.: Evolución temporal de los ángulos resonantes $\sigma_i = 5\lambda_2 - 4\lambda_1 - \omega_i$ asociados a la resonancia 5/4.

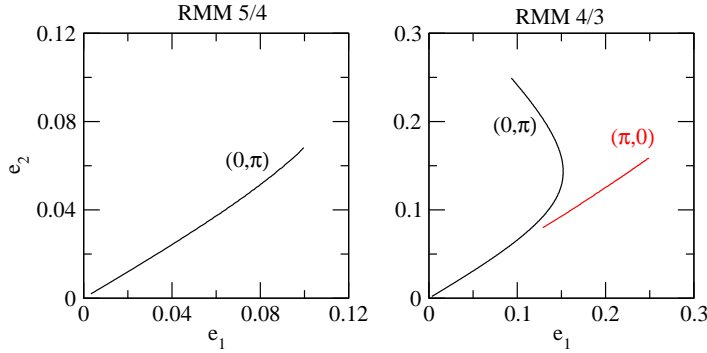


Figura 6.4.: Soluciones ACR estables para las resonancias 5/4 (izquierda) y 4/3 (derecha) para la razón de masas definida por los planetas de Corot-7. Los valores dentro de los paréntesis denotan los valores de equilibrio de σ_1 y de σ_2 .

Para ver si este comportamiento está asociado a algún cambio en el modo resonante, la Figura (6.3) muestra la evolución de ambos ángulos resonantes σ_1 en función del tiempo. Notamos que ambos ingresos en la 5/4 están acompañados por libraciones asimétricas de los dos ángulos críticos. Este comportamiento es típico de lo que se denomina una solución corrotacional (ACR) (Beaugé et al. 2006; Michtchenko et al. 2006), y se corresponde con puntos fijos del problema promediado sobre los ángulos rápidos.

La Figura (6.4) muestra las familias de ACR para las resonancias 5/4 y 4/3 para el valor de m_2/m_1 correspondiente al sistema planetario Corot-7. Cada punto de las familias está asociado a un valor diferente del momento angular total del sistema (ver Michtchenko et al. (2006) para mayores detalles). Todas las ACR estables son simétricas: i.e. σ_i libra alrededor de cero o π , y en el problema conservativo no se observan soluciones asimétricas. Por lo tanto, es de esperar que las soluciones asimétricas observadas en la simulación hidrodinámica sean causadas por la perturbación del disco. El defasaje del punto de equilibrio de valores simétricos hacia asimétricos es típico de una fuerza disipativa no adiabática (Beauge & Ferraz-Mello 1993).

En conclusión, el principal resultado de esta simulación hidrodinámica es una configuración estable en la que ambos planetas permanecen capturados en órbitas estables dentro de la resonancia $4/3$, donde el cuerpo menor está atrapado en el borde de la cavidad. Aunque la solución resonante se corresponde a una ACR, tal como se observa en la mayoría de los sistemas extrasolares resonantes conocidos (e.g. GJ876, HD82943, HD73526), el carácter asimétrico de los ángulos críticos se debe a la presencia de un fuerte término disipativo, originado por el gas. De todos modos, es de esperar que el sistema evolucione hacia ACR simétricos una vez que el disco gaseoso se disipe.

La configuración de dos planetas con $m_2 > m_1$ y el interno capturado en el borde de la cavidad es compatible con la estructura jerárquica observada para los sistemas extrasolares GJ581 y HD40307. Sin embargo, en principio, no es un mecanismo que explicaría la configuración observada para Corot-7, donde el planeta interno Corot7-b se encuentra con un período orbital muy por debajo del resto de la población de exoplanetas calientes.

Cavidad 2

Para analizar la robustez de los resultados anteriores, se realizaron una serie de cinco simulaciones hidrodinámicas, con la misma cavidad, pero variando las masas de los planetas (manteniendo $m_2 > m_1$) y los semiejes iniciales. En todos los casos se obtuvo el mismo comportamiento: el planeta interno se alojaba en el borde de la cavidad, atrayendo el cuerpo más masivo en una resonancia de movimientos medios. La configuración final fue siempre dinámicamente estable.

Este resultado, sin embargo, no es análogo al presentado por Morbidelli et al. (2008) donde un sistema con $m_2/m_1 > 1$ no conseguía ser estabilizado por la cavidad, originando una dispersión planetaria y la inyección del planeta menor hacia dentro de la cavidad. Ya que los autores de ese trabajo consideraron cavidades más suaves, se realizó una nueva simulación donde se consideró una cavidad más suave (tabla 6.4). Los resultados son mostrados en la Figura (6.5).

Se observa un comportamiento bastante diferente al caso de Cavidad 1. Luego de una primera etapa de decaimiento orbital conjunto, ambos planetas son capturados en la resonancia $4/3$. Ya que esto ocurre antes de llegar al borde de la cavidad, ambos cuerpos continúan su migración manteniendo constante su razón de movimientos medios. En $t \sim 50000$ el planeta interno m_1 ingresa a la región del borde de la cavidad; sin embargo, dado que la cavidad es ahora más suave, el torque corrotacional no es lo suficientemente fuerte como para mantener ambos planetas capturados. Así, m_1 no es frenado sino que continúa su decaimiento orbital, ingresando dentro de la cavidad propiamente dicha.

El decaimiento orbital de m_1 continúa hasta que ahora m_2 es frenado por el borde de la cavidad, hecho que ocurre en $t \sim 90000$. Durante el resto de la simulación, ambos cuerpos permanecen capturados en la resonancia $4/3$, pero en una configuración que parecería ser inestable. Ambas excentricidades son excitadas y adquieren valores cada vez más elevados. Esto es particularmente notorio en m_2 , cuyo valor muestra oscilaciones de amplitud creciente, llegando a valores del orden de $\sim 0,25$.

La Figura (6.6) presenta el comportamiento de los ángulos resonantes de la resonancia

6. CoRoT-7b

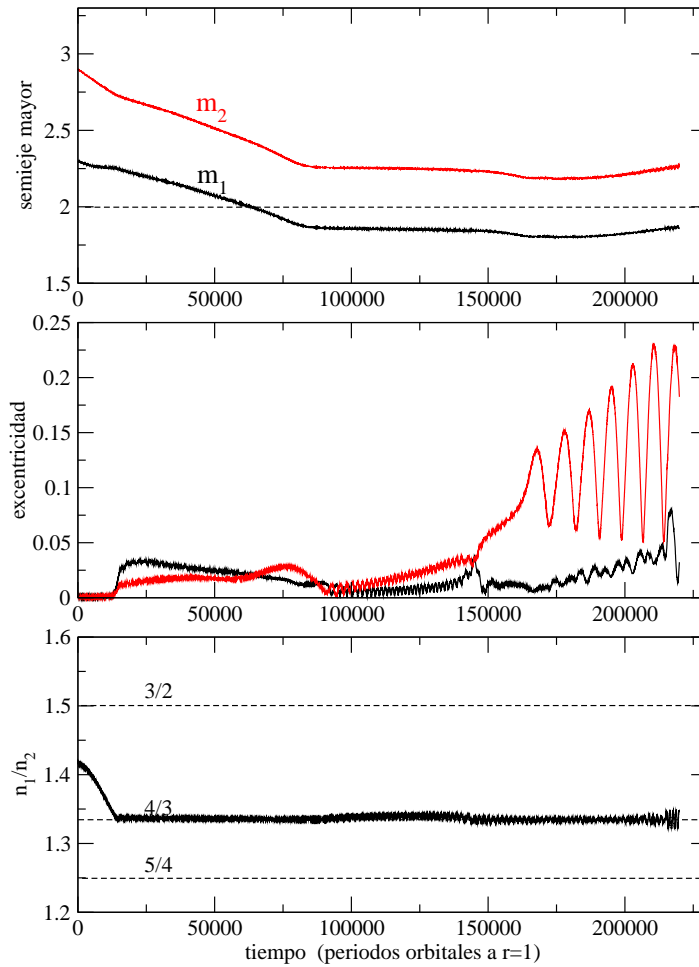


Figura 6.5.: Simulación de dos planetas (simil Corot-7) con una cavidad suave.

4/3. Al igual que en la simulación con la Cavidad 1, aquí también notamos dos ventanas de captura en la commensurabilidad. La primera es caracterizada por bajas excentricidades y ACR asimétricos. La segunda ocurre en excentricidades crecientes y con valores de ambos ángulos cercanos a π . No obstante, de la Figura (6.4) vemos que ninguno de estos regímenes son observados en el problema conservativo; así, nuevamente estimamos que estas soluciones son fuertemente afectadas por la interacción con el gas.

Por último, la Figura (6.7) muestra la evolución de los semiejes de ambos planetas, así como sus distancias pericéntricas q_i y apocéntricas Q_i . Estos últimos se muestran en líneas quebradas. A partir de $t \sim 180000$ se cumple la condición $Q_1 > q_2$, lo que implica que ambas órbitas se cruzan. En ausencia de un adecuado mecanismo de protección, ambos planetas podrían sufrir encuentros cercanos, desencadenando una dispersión y eyección de uno de los cuerpos. Un posible mecanismo de protección es la configuración resonante. Puede demostrarse que $\Delta\omega = \sigma_2 - \sigma_1 = 0$ constituye un poderoso mecanismo

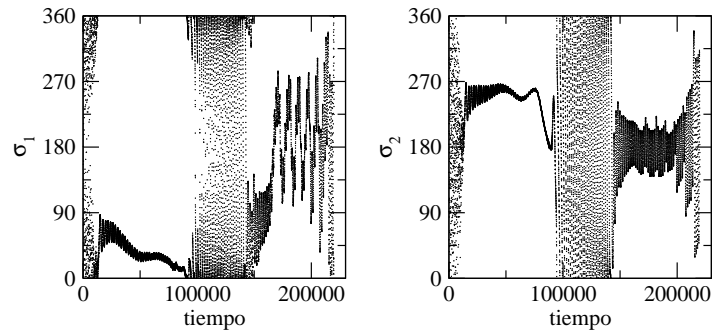


Figura 6.6.: Evolución temporal (para la Cavidad 2) de los ángulos resonantes $\sigma_i = 4\lambda_2 - 3\lambda_1 - \omega_i$ asociados a la resonancia 4/3.

que evita encuentros próximos de los planetas. De la Figura (6.6) se puede apreciar que esto efectivamente ocurre durante casi toda la última parte de la simulación, excepto (quizás) en los últimos pasos, donde la amplitud de oscilación de $\Delta\omega$ parece adquirir valores próximos a π . Así, es de esperar que ambos planetas sufran un encuentro próximo dispersivo a partir de $t \sim 220000$.

Vemos que esta simulación permitiría quizás explicar la inyección del planeta menor dentro de la cavidad. Sin embargo, al final se observa un comportamiento extraño en la densidad, por lo que la validez de esta simulación podría estar en duda.

Un problema importante surge cuando se quieren comparar estos resultados con las escalas reales del problema. Cuando se integra un sistema de un solo cuerpo, el escaleo de las unidades se realiza de forma trivial, y la dinámica resonante no es un problema. Sin embargo, cuando existe un segundo cuerpo en el sistema, la escala del problema sí es importante, esto es, el problema no es invariante ante cambios de escala. En efecto, un factor de escala no puede corregir las diferencias entre la atracción gravitatoria de la estrella central y las interacciones mutuas entre los cuerpos. Por otro lado, la dinámica resonante entre ambos depende fuertemente de la separación entre ambos, de la masa estelar y de la masa individual de cada uno.

Es por esto que en la sección siguiente se utilizará el modelo de Tanaka et al. (2002) para la migración de tipo I y se integraran las ecuaciones en un integrador de n-cuerpos, el cual insume mucho menos tiempo de cálculo.

6.4. Simulaciones n-cuerpos

Como completitud, se aplicará el modelo de Tanaka et al. (2002), en la forma que fue mostrado en el capítulo 2, donde las fuerzas del gas son agregadas en forma de torques disipativos sobre los planetas CoRoT-7b y CoRoT-7c.

Se supone que ambos cuerpos fueron formados en un disco el cual posee una cavidad localizada en $r = 0,02$ UA, lo cual está en acuerdo con lo obtenido en el capítulo 5. Además, inicialmente el cuerpo más masivo se localiza en la región exterior.

6. CoRoT-7b

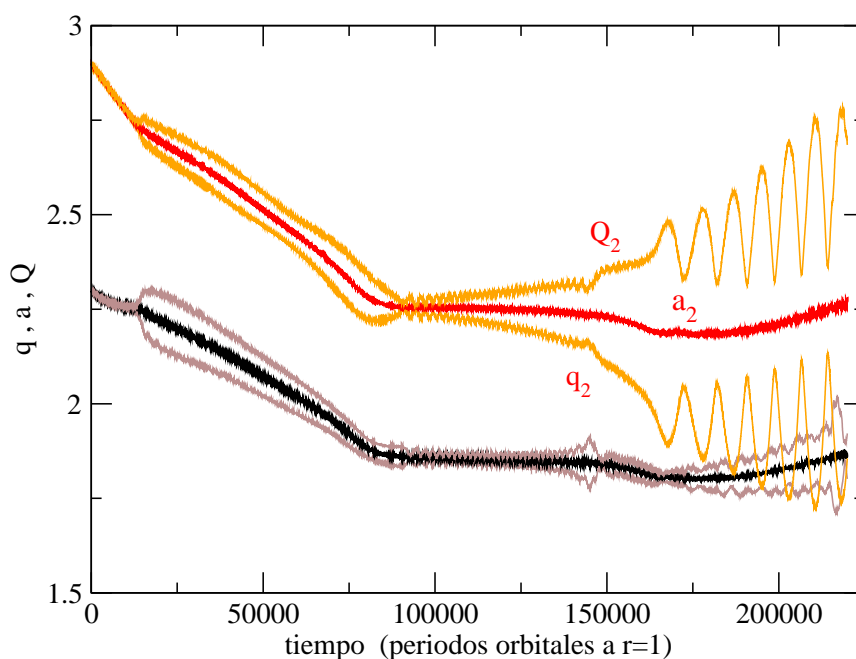


Figura 6.7.: Evolución de los semiejes (líneas gruesas) de ambos planetas en la simulación con la Cavidad 2. En líneas quebradas mostramos también los valores de las distancias pericéntricas q y apocéntricas Q .

El perfil de densidad fue creado con el código FARGO, del modo en que fue explicado en el capítulo 4; se hizo de esta manera para reproducir de la mejor forma posible las simulaciones hidrodinámicas. Los perfiles de densidad son idénticos a los empleados en la cavidad 1 y 2 del capítulo 4. Los resultados de las integraciones pueden verse en las figuras (6.8) y (6.9). En ambas figuras la relación de aspecto se fijó en $h = 0,05$ y la densidad en el borde de la cavidad en $10^5 g/cm^2$.

6.4.1. Resultados

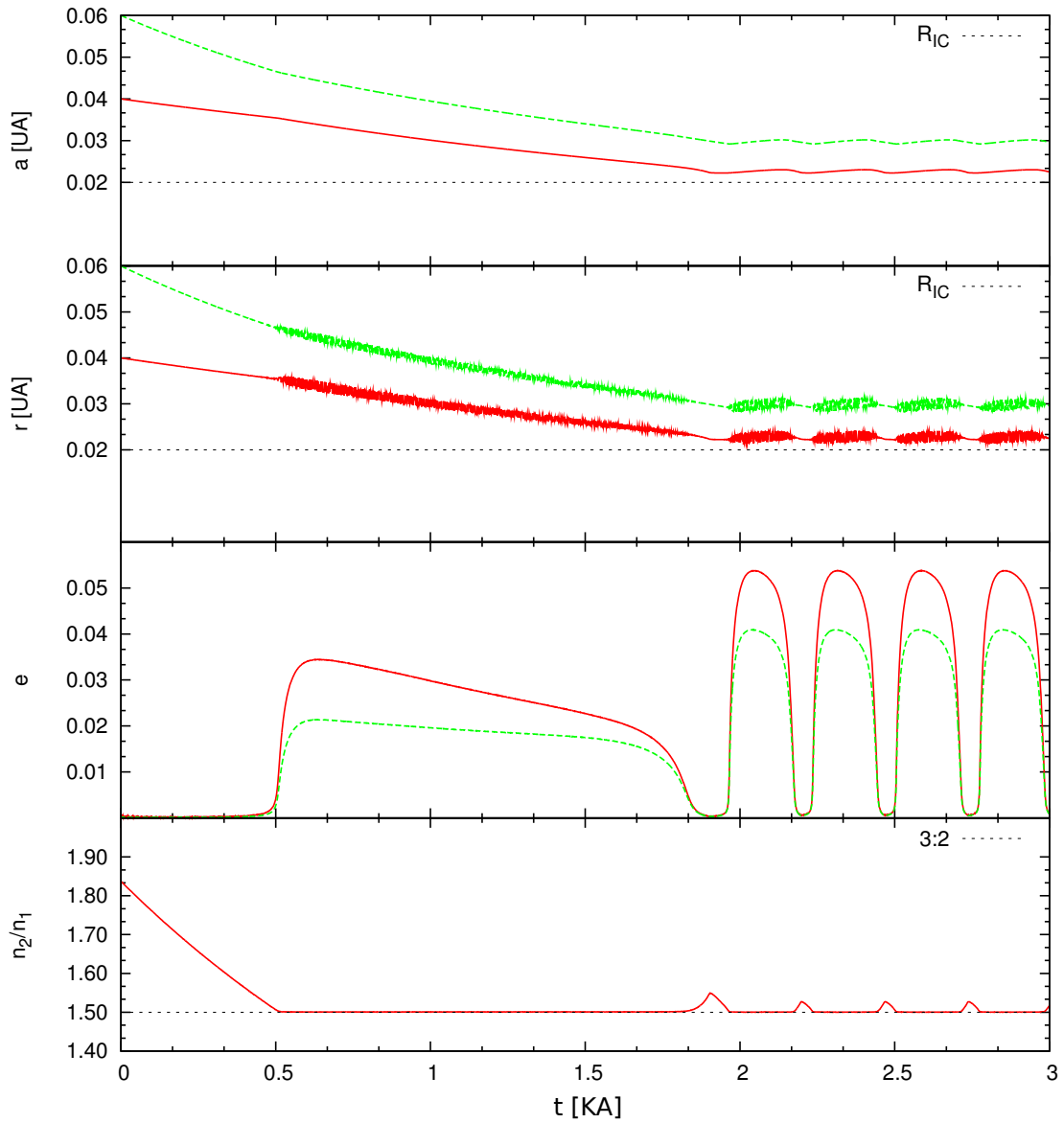


Figura 6.8.: Evolución orbital de un sistema planetario similar al sistema CoRoT-7, el cual sufre fuerzas disipativas debidas a un disco de gas. Esta figura debe ser comparada con la figura (6.2), ya que el perfil de densidad empleado es el mismo (cavidad1).

Cavidad 1 - Figura (6.8)

Ambos cuerpos son depositados en semiejes $a_1 = 0,06$ y $a_2 = 0,05$, siendo el cuerpo más masivo el más externo. Se observa un rápido decaimiento inicial, tal cual se espera según

6. CoRoT-7b

lo visto en el capítulo 1. Luego de este decaimiento, ambos planetas son atrapados en una resonancia de movimientos medios 3:2. Ya que esto ocurre en las primeras etapas, antes de llegar a la cavidad en el disco, esta configuración es mantenida durante el resto de la migración. Mientras ambos cuerpos migran, sus excentricidades aumentan, pero de forma muy moderada. Aproximadamente 2 KA después, esta resonancia se pierde. Esto se debe a que el planeta interior ingresa en la región en donde el torque es máximo. Sin embargo, poco tiempo después, esta configuración es alcanzada nuevamente. Cuando el planeta exterior llega al lugar en el que iguala el torque que es capaz de ejercer el planeta interior, soportado por la cavidad en el disco. Su migración es entonces detenida y ambos cuerpos se mantienen en una configuración aparentemente estable. Al igual que en el capítulo 2, la excentricidad sufre incrementos repentinos, asociados con pasajes del cuerpo interior a través del lugar en donde el torque es positivo y máximo. El pasaje del cuerpo interno a través de esta región impulsa a ambos cuerpos hacia afuera. La migración se produce nuevamente, la excentricidad se amortigua rápidamente, la resonancia se vuelve a perder por corto tiempo, el planeta exterior continúa migrando y toda la configuración se repite nuevamente.

Cavidad 2 - Figura (6.9)

Ambos cuerpos son depositados en semiejes $a_1 = 0,06$ y $a_2 = 0,05$, siendo el cuerpo más masivo el más externo. Se observa un rápido decaimiento inicial, tal cual se espera según lo visto en el capítulo 1. Luego de este decaimiento, ambos planetas son atrapados en una resonancia de movimientos medios 3:2. Ya que esto ocurre en las primeras etapas, antes de llegar a la cavidad en el disco, esta configuración es mantenida durante el resto de la migración. Mientras ambos cuerpos migran, sus excentricidades aumentan, pero de forma muy moderada. En este caso, la resonancia se mantiene por el resto de la integración. Cuando el planeta interior llega al borde la cavidad en el disco, se observa una disminución en la velocidad de migración. Esto es esperable ya que el borde de la cavidad trata de frenarlo constantemente. Sin embargo, ya que en este caso la cavidad no es lo suficientemente estrecha, el torque no es suficientemente grande como para contrarrestar el torque efectuado por el cuerpo externo, el cual continúa su migración. En cuando la migración disminuye de velocidad, la excentricidad sufre una nueva excitación. La migración continúa, por lo que el cuerpo interior ingresa en el interior de la cavidad. El cuerpo externo continúa su migración, hasta que finalmente es retenido en el borde de la cavidad. En ese momento la excentricidad se amortigua y el sistema alcanza una configuración estable.

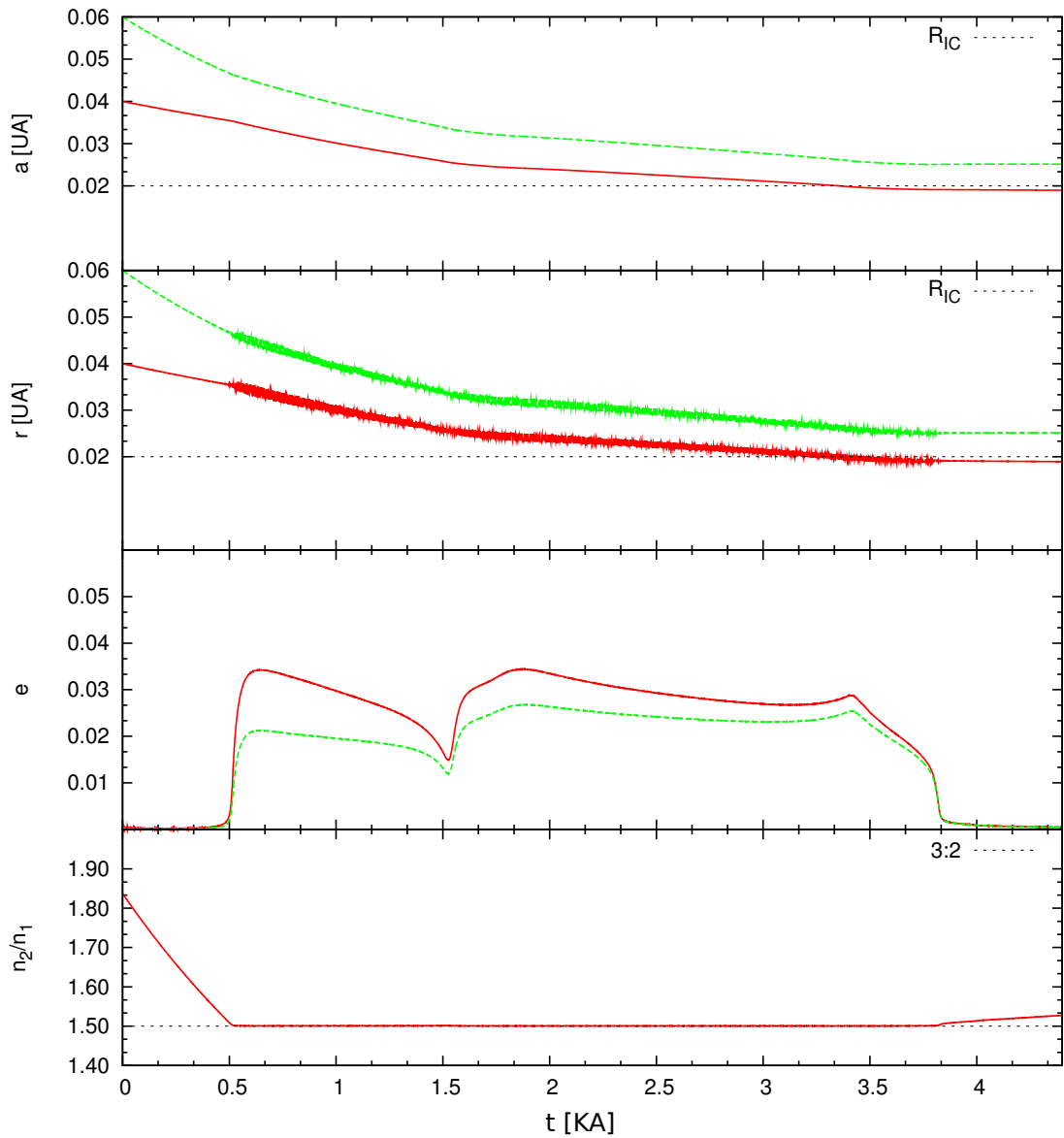


Figura 6.9.: Evolución orbital de un sistema planetario similar al sistema CoRoT-7, el cual sufre fuerzas disipativas debidas a un disco de gas. Esta figura debe ser comparada con la figura (6.3) ya que el perfil de densidad utilizado es el mismo (cavidad2).

6.4.2. Dispersión planetaria y solución co-orbital.

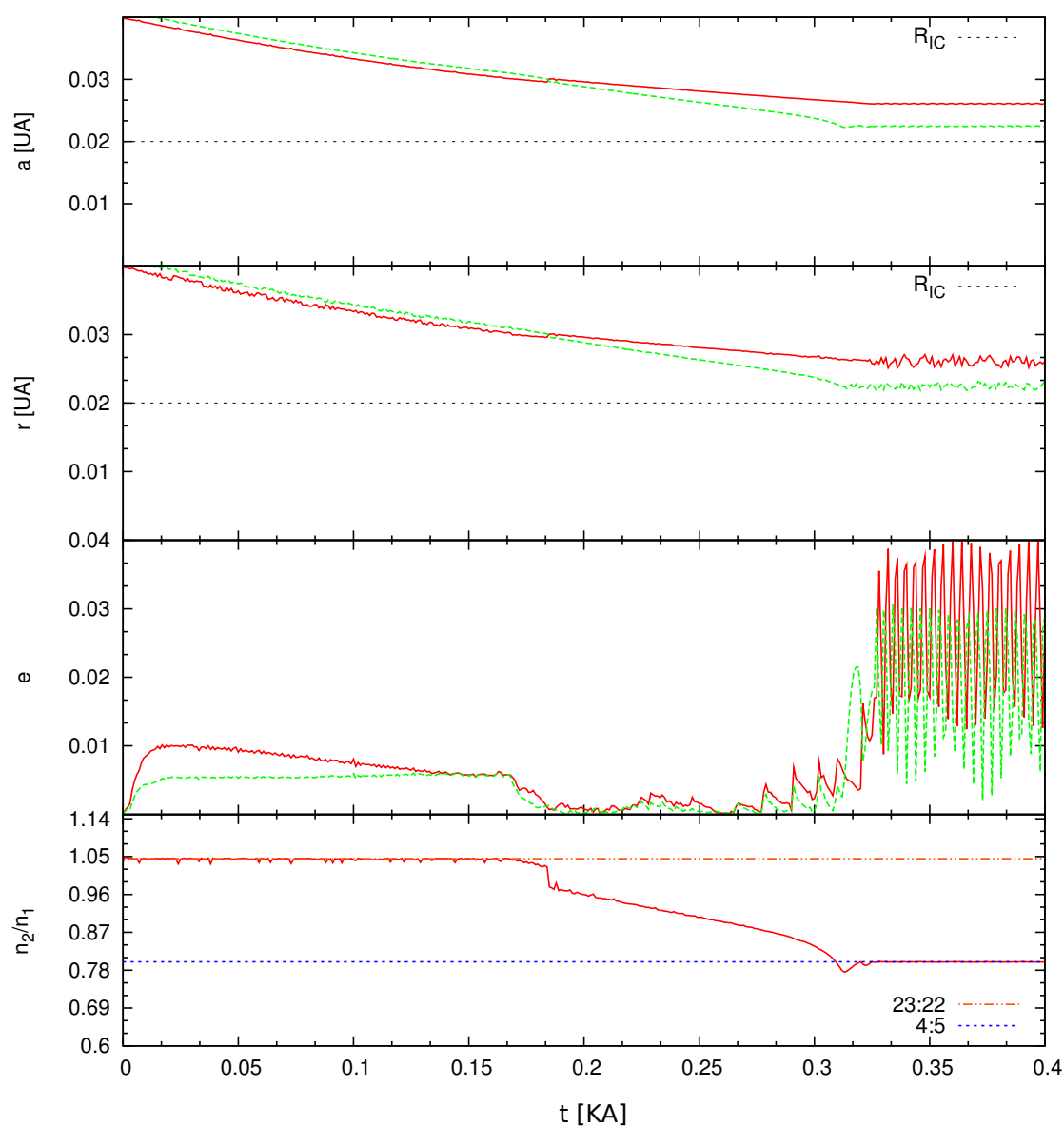


Figura 6.10.: Evolución orbital de un sistema planetario similar al sistema CoRoT-7, el cual sufre fuerzas disipativas debidas a un disco de gas. El perfil de densidad empleado es el correspondiente a la cavidad 1. En esta integración se observa una dispersión planetaria. Con esto queda demostrado que las dispersiones pueden ocurrir.

El aspecto más interesantes de las integraciones que no involucran la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes, es que son mucho más veloces. Esta mejora en la velocidad

permite investigar de forma más amplia el espacio de condiciones iniciales y así buscar soluciones especiales. Es así que fueron encontradas dos soluciones muy interesantes, las cuales son, una dispersión planetaria y una configuración estable co-orbital.

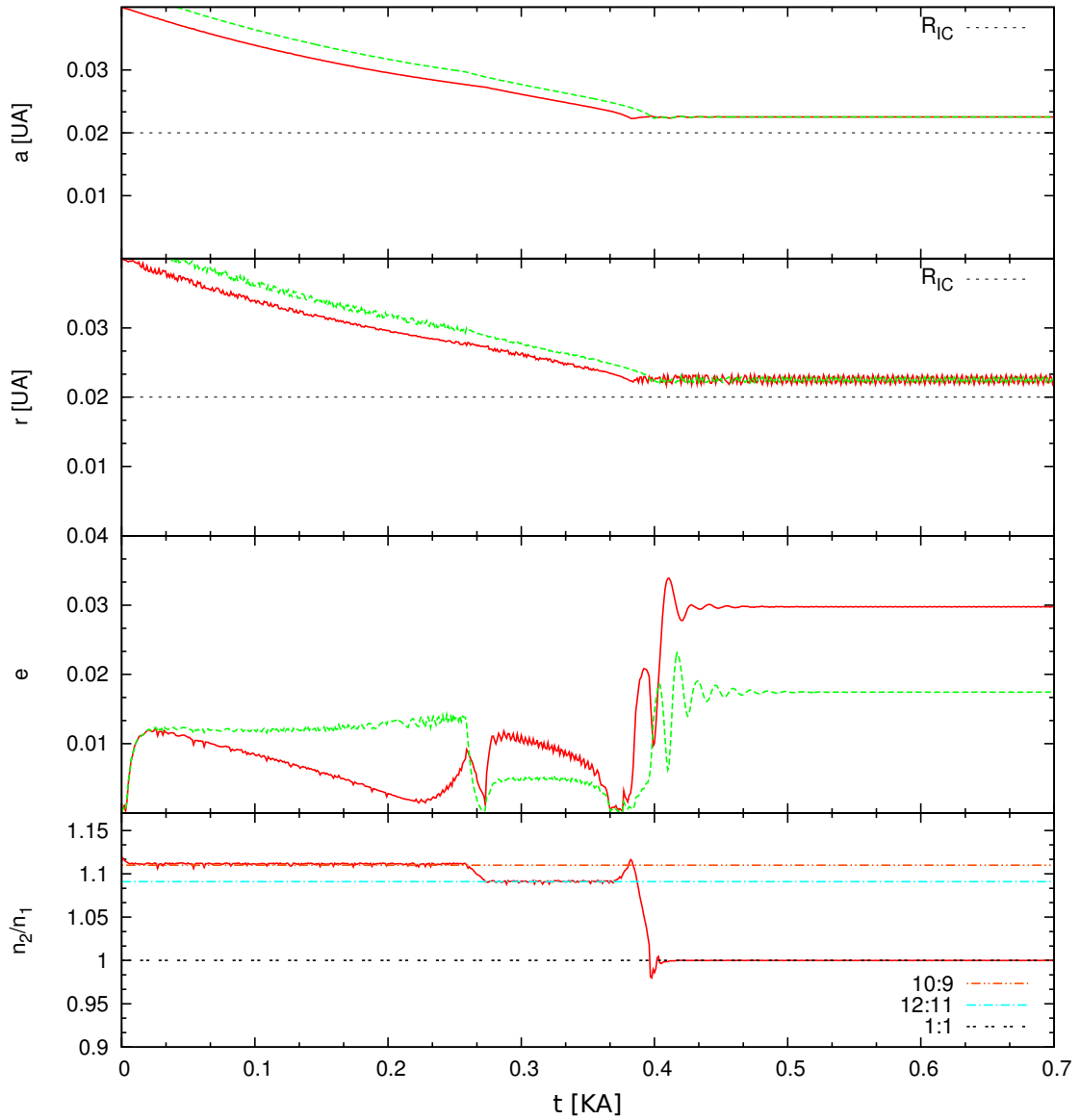


Figura 6.11.: Evolución orbital de un sistema planetario similar al sistema CoRoT-7, el cual sufre fuerzas disipativas debidas a un disco de gas. El perfil de densidad empleado es el correspondiente a la cavidad 1. En esta integración se observa una configuración resultante coorbital. Para producir esta configuración es necesario alejar al sistema del estado de adiabaticidad, es decir, la migración debe acelerarse. En este caso la densidad se fijo en $5 \times 10^5 \text{g/cm}^2$ para acelerar la migración

6. CoRoT-7b

Estas soluciones pueden verse en las figuras (6.10) y (6.11). Para el caso de dispersión, las condiciones iniciales fueron semiejes iniciales de 0.04 y 0.041 UA, mientras que para obtener la solución coorbital, los semiejes fueron 0.04 y 0.043 UA. La dispersión observada no reproduce los resultados de Morbidelli et al. (2008), ya que el cuerpo menor es alejado. Por lo tanto, la solución dispersiva no permitiría explicar la configuración observada en el sistema CoRoT-7, sin embargo es una solución interesante.

6.4.3. Condición inicial posible para el sistema

Como último análisis, se buscará la condición inicial posible para CoRoT-7b y CoRoT-7c de modo que puedan evolucionar hacia su posición actual. Si las condiciones halladas en esta sección resultan razonables, entonces podrían brindar una explicación satisfactoria a la configuración observada en el sistema CoRoT-7.

La idea es buscar la condición inicial que aleje lo más posible a ambos cuerpos. Esta condición justamente es con CoRoT-7b dentro de la cavidad en el disco, ya que entre ambos se genera una resonancia levemente mayor a 2:1. Suponiendo que el borde de la cavidad se halla en las cercanías de la ubicación actual de CoRoT-7c junto con el tiempo de vida del sistema CoRoT-7 y las condiciones observadas en la actualidad, a través de la ecuación (4.97) es posible reconstruir la excentricidad inicial que debería presentar CoRoT-7b.

Una aproximación que puede hacerse en la expresión (4.97) es la siguiente. Ya que la migración por marea estelar es muy pequeña, y el sistema CoRoT-7 es un sistema muy joven, podemos desprestigiar el primer término. Así, (4.97) puede ser escrito como:

$$a(t) \simeq a_0 \exp -e_0^2 \quad (6.1)$$

Una resonancia 2:1 con el borde de la cavidad localizada en $a = 0,046$ UA se traduce en un semieje $a_0 = 0,029$ UA. Ya que CoRoT-7b posee actualmente un semieje $a = 0,017$ UA, es necesario un decaimiento orbital $\sim 60\%$. Por lo tanto:

$$\frac{a(t)}{a_0} \sim 0,6 = \exp(-e_0^2) \quad (6.2)$$

Por lo tanto,

$$e_0 = \sqrt{\ln(1,666)} = 0,714 \quad (6.3)$$

Si bien este valor es demasiado alto e incluso está fuera del límite de aplicabilidad de la teoría desarrollada, este análisis muestra que en principio es posible generar una migración suficiente para explicar la posición actual del sistema CoRoT-7. Si además se tienen en cuenta los efectos de la marea estelar, este número puede bajar aún más. Otro asunto es el estudio de la estabilidad de un sistema múltiple con excentricidades tan elevadas. Además, también habría que estudiar bajo qué condiciones un disco puede

permitir dichos valores. Este sencillo análisis deja abierta una posibilidad, la cual puede ser estudiada con más detalle en el futuro.

6.5. Resumen

En este capítulo se resumieron las características más sobresalientes del sistema planetario CoRoT-7. Además, se mostraron tres modelos diferentes que permitirían explicar la posición actual del planeta CoRoT-7b en el diagrama masa-período presentado en el capítulo 4. De los tres modelos, se intentó verificar los dos primeros. Por un lado se trató de verificar si CoRoT-7b y CoRoT-7c podrían deber su ubicación actual a efectos tidales y por otro, se trató de reproducir el resultado mostrado por Morbidelli et al. (2008).

Se realizaron simulaciones hidrodinámicas de dos planetas migrando, los cuales estaban sumergidos en un disco gaseoso con una cavidad central. En ningún caso se observó una dispersión planetaria. Ya que el escaleo de estas simulaciones no es trivial como en el caso de simulaciones con un planeta aislado, se decidió utilizar simulaciones de *n* cuerpos, tal cual fue hecho en el capítulo 2. Los resultados obtenidos son muy similares a los ya obtenidos anteriormente.

Se hallaron condiciones para las cuales ocurre una dispersión planetaria, pero contrariamente al caso de Morbidelli et al. (2008), el cuerpo menor (CoRoT-7b) intercambió su lugar con CoRoT-7c. Además, se halló una solución coorbital, la cual tiene interés por sí sola. Este tipo de soluciones debe ser estudiada con más detalle.

Por último, se realizó una estimación de los elementos orbitales iniciales que debería presentar CoRoT-7b para que, a través de fuerzas de marea, ocupara la posición actual. El resultado obtenido indica que la excentricidad de CoRoT-7b debería haber sido muy alta en el pasado. Si bien esto es posible si quedara atrapado en el borde de la cavidad, el valor hallado es demasiado alto como para poder asegurar estabilidad del sistema.

7. Comentarios finales

7.1. Conclusiones

El principal objetivo de este trabajo, el cual era la introducción a los temas fundamentales de la interacción planetaria con fuentes externas fue alcanzado sin problemas. A lo largo de este trabajo presentamos las ideas fundamentales involucradas en el estudio de la formación y posterior evolución de exoplanetas. En particular, presentamos de forma sintética la teoría actual sobre formación planetaria y estudiamos los mecanismos evolutivos una vez que estos cuerpos son formados. A medida que se desarrollaron los temas se fueron planteando los problemas involucrados en cada modelo. Si bien el objetivo de este trabajo se situó mucho más abajo que tratar de resolver alguno de estos problemas fundamentales, y sólo estaba orientado a una aplicación directa de estos conocimientos, fuimos capaces de realizar una serie de contribuciones menores en algunos aspectos secundarios, como ser la descripción de la evolución un sistema de dos cuerpos resonantes en un disco gaseoso y la descripción de la evolución tidal a lo largo del tiempo. A continuación presentamos una descripción detallada de las conclusiones obtenidas en cada capítulo de este trabajo.

7.2. Capítulo 2

En este capítulo hemos estudiado principalmente cuatro temas:

- Formación del disco
- Formación planetarias
- Migración planetaria
- Formación de una cavidad.

De este estudio quedaron claros los siguientes aspectos. Sabemos que la formación de un disco a partir de una nube rotante es posible y hemos visto cómo es la evolución hacia tal disco. Si bien no hemos descrito el proceso disipativo final hacia la formación de tal disco, hemos explicado cual es el proceso involucrado, mostrando las condiciones iniciales para que tal proceso ocurra. En base a lo visto el paradigma de formación estelar a partir de un disco gaseoso es un escenario razonable.

Hemos visto además que el modelo más adecuado para la formación planetaria sería el modelo de acreción de núcleos, el cual propone que los planetas son formados a partir

7. Comentarios finales

de las colisiones constructivas de planetesimales en un disco gaseoso primordial, y luego por acreción de gas sería posible la formación de planetas gigantes.

Por otro lado, hemos visto que la migración planetaria por intercambio de momento angular entre el protoplaneta y el disco es un proceso dominante en las primeras etapas formativas. Ya que los tiempos característicos para la formación y la migración son inconsistentes según los conocimientos actuales, esto genera un problema muy importante que debe ser solucionado. Una posible solución es planteada en el capítulo 3, mediante la introducción de las trampas planetarias. Por otro lado, estas trampas son necesarias para compatibilizar el tiempo medio de vida de un disco protoplanetario con el tiempo migratorio.

Por último, en este capítulo se estudió la interacción de la magnetósfera estelar con el disco protoplanetario. Asumiendo congelamiento de la líneas de campo con el disco protoplanetario hemos deducido una expresión que da un tamaño para una cavidad central generada en un disco. Esta cavidad proviene de un balance entre el torque viscoso y magnético. Este estudio es de importancia ya que permitiría la utilización de trampas planetarias para detener la migración. En el capítulo 5 se utilizan dichas trampas para el estudio de la distribución masa-período de los exoplanetas de corto período, y entender cual es el tamaño real de tal cavidad es de importancia para justificar las conclusiones de dicho capítulo. Por esta razón es necesario realizar un estudio más sofisticado de esta interacción para obtener una estimación teórica más precisa de dicha cavidad y comparar el valor obtenido con los resultados del capítulo 5.

7.3. Capítulo 3

En este capítulo hemos estudiado principalmente dos temas:

- Evolución de dos planetas resonantes sujetos a fuerzas disipativas.
- Trampas planetarias

A partir del estudio de la evolución orbital de dos cuerpos planetarios resonantes sujetos a fuerzas disipativas hallamos cómo debe ser la perturbación de modo tal que la resonancia se mantenga. Con este resultado propusimos una evolución orbital nula, pensando en aplicar este resultado en una trampa planetaria, y hallamos una condición que debe satisfacer la perturbación para mantener la condición resonante y una migración orbital nula.

En cuanto al estudio de las trampas planetarias, vimos que bajo ciertas condiciones en el perfil de densidad puede ser generado un cero en el torque ejercido por el disco sobre el protoplaneta, y como consecuencia un frenado en la migración. En este capítulo hallamos una expresión analítica para el torque en función del perfil de densidad y de parámetros del disco. Esta expresión aplicada al resultado hallado para la evolución orbital de dos cuerpos, permite obtener una condición límite para el frenado de dos cuerpos migrantes por una trampa planetaria. Este resultado fue resumido en una expresión analítica sencilla

de manejar. Este resultado fue buscado para poder aplicarlo en el capítulo 6, el cual trata sobre la migración orbital de un sistema de dos cuerpos reales.

Además, todos los resultados hallados fueron puestos a prueba a través de simulaciones numéricas mediante el empleo de un integrador de ncuerpos con los términos disipativos del disco agregados según del modelo de Tanaka et al. (2002). Los resultado hallados concuerdan cualitativamente con los resultados observados en simulaciones hidrodinámicas realizadas en el capítulo 5 y 6.

7.4. Capítulo 4

En este capítulo hemos estudiado básicamente el tema referido a la interacción gravitatoria entre una estrella y un planeta. Aquí hemos desarrollado de forma sintética los aspectos más importantes de la teoría tidal estándar. Hemos escrito las ecuaciones tidales en la forma usual y hemos utilizado la aproximación de cuerpo de corto período. Este capítulo cuenta con contribuciones originales. Hemos realizado un estudio detallado de los tiempos involucrados en cada proceso tidal de forma independiente y hemos comparado tales tiempos. Inspirados en estos tiempos hemos realizado una serie de aproximaciones convenientes y hemos construido las soluciones temporales para el semieje y excentricidad de un planeta de corto período. Gracias a estas soluciones presentamos una descripción completa de la migración tidal cuando la inclinación es nula y la excentricidad pequeña. Estos resultados fueron empleados en los capítulos 5 y 6. De ellos se concluye principalmente el posible origen de la distribución masa-período y el orden de magnitud más probable para el parámetro tidal, en el capítulo 5, y la remota posibilidad de que la posición actual del planeta CoRoT-7b se deba a fuerzas tidales. Por otro lado, esta teoría utilizada en las observaciones exoplanetarias actuales demuestra que la caída de cuerpos planetarios hacia la estrella es algo que parece común (capítulo 5).

7.5. Capítulo 5

En este capítulo se estudia el posible origen de la distribución masa-período de los exoplanetas de corto período y se propone un posible modelo. Para realizar tal estudio se utilizan una serie de recursos:

- Observaciones de exoplanetas
- Simulaciones hidrodinámicas
- Trampas planetarias
- Teoría tidal
- Muestras sintéticas de exoplanetas

La principal conclusión de este capítulo es que la forma de tal distribución aparentemente sería el resultado indirecto de la interacción de la magnetósfera estelar con el disco

7. Comentarios finales

protoplanetario. Según la idea de las trampas planetarias, al existir un vaciamiento del disco los planetas deberían ser frenados en el borde de la cavidad generada. Mediante simulaciones hidrodinámicas demostramos que tal vaciamiento localizado de forma conveniente, reproduce de forma notable la distribución observada, siempre que la variable de comparación sea una variable normalizada, llamada a^* en el texto. A través de la teoría tidal, integrando la población de exoplanetas hacia el pasado pudimos ver cual era su posición, lo cual arroja una evidencia de la existencia de un escalón primordial en la densidad, tal cual sugiere la teoría de interacción de la magnetósfera con el disco.

Sin embargo, a pesar del acuerdo notable del modelo con las observaciones, no nos fue posible explicar la ubicación actual de dos cuerpos, CoRoT-7b y Kepler-10b (un gemelo del anterior), por lo que en el capítulo 6 decidimos estudiar por separado a tal sistema mediante el empleo de las técnicas hasta aquí utilizadas.

7.6. Capítulo 6

En este capítulo hemos estudiado el posible origen del sistema planetario CoRoT-7. Este sistema es problemático en el sentido que escapa a la propuesta que realizamos en el capítulo 5 para la justificación de la forma de la distribución masa-período para los exoplanetas de corto período.

Hemos presentado tres modelos diferentes para explicar su posición actual, y hemos desarrollado en detalle el modelo 1. Para esto hemos utilizado simulaciones hidrodinámicas, simulaciones de ncuerpos y la teoría tidal.

Concluimos de nuestro estudio que un posible scattering de CoRoT-7b hacia el interior de una cavidad en un disco gaseoso es improbable. Por otro lado, a través de la teoría tidal, mediante una sencilla estimación de sus condiciones iniciales, parecería ser improbable que deba su posición a interacciones con la estrella. Así, CoRoT-7b es un cuerpo planetario que caerá hacia su estrella aproximadamente en los próximos 8000 millones de años, pero su posición actual no puede ser debida en apariencia al modelo 1.

Los otros dos modelos presentados quedan como una propuesta interesante para ser verificada.

7.7. Comentarios finales

A través de estos estudios se han tenido una serie de logros, entre los cuales se pueden destacar:

- Cálculo del torque total actuante sobre un protoplaneta sumergido en un disco gaseoso bidimensional isoterma. Se pudo hallar una expresión analítica dependiente sólo de la densidad para el cálculo del torque actuante sobre un protoplaneta. Esta expresión es fácilmente utilizable en un código para el cálculo de las fuerzas sufridas por un cuerpo sumergido en un disco.
- Estudio de la dinámica de dos cuerpos resonantes sujetos a fuerzas disipativas, en particular torques ejercidos por un disco de gas. Mediante la aplicación de los

resultados de Gomes (1998) se halló una expresión que debe satisfacer el torque actuante sobre cada uno para mantener una configuración resonante dada.

- Caracterización de la condición límite para el frenado de dos cuerpos planetarios resonantes en un disco protoplanetario con una cavidad central. A partir de la expresión hallada mediante el trabajo de Gomes (1998) se construyó una expresión para estimar la masa crítica necesaria por un cuerpo migrante para desestabilizar el equilibrio adquirido por otro atrapado en el borde una cavidad en un disco de gas.
- Aplicación del modelo de Tanaka et al. (2002) en un código ncuerpos, el cual permite notablemente la disminución de recursos computacionales.
- Verificaciones de las condiciones críticas halladas para el frenado.
- Se hallaron soluciones analíticas aproximadas para las ecuaciones de evolución tidal. Mediante una serie de aproximaciones razonables se hallaron expresiones que describen el comportamiento del proceso tidal.
- Se estudiaron detalladamente los tiempos característicos involucrados en los procesos tidales. Además, se realizaron comparaciones entre los tiempos involucrados en cada tipo de marea diferente.
- Se aplicaron los estudios desarrollados en la descripción de la distribución masa-período de los exoplanetas de corto período, y se propuso una posible explicación para la ausencia de planetas poco masivos en regiones cercanas a la estrella.
- Se aplicaron los estudios sobre sistemas múltiples a un sistema real: CoRoT-7.

7.8. **Perspectivas futuras**

Si bien en este trabajo se estudió principalmente la dinámica de planetas aislados junto con una cavidad central en el disco, es decir, en presencia de una trampa planetaria, es interesante destacar que tales trampas pueden existir en otras regiones del disco siempre que haya algún mecanismo capaz de generar un gradiente importante en la densidad, por lo que la búsqueda de tales mecanismos puede resultar interesante.

Por otro lado, puede ser interesante también el estudio de sistemas múltiples, ya que su comportamiento sería mucho más complejo que lo hasta aquí estudiado. Este estudio puede ser realizado mediante simulaciones hidrodinámicas o bien mediante un modelo semianalítico, en la forma en que aplicamos el modelo de Tanaka et al. (2002).

Si bien obtuvimos resultados satisfactorios a través de la utilización de un integrador ncuerpos junto al modelo de Tanaka et al. (2002), no es comparable con las simulaciones hidrodinámicas. Por lo tanto, una tarea importante sería calibrarlo, tarea que puede resultar de gran complejidad. Ya que el modelo de Tanaka et al. (2002) es muy sencillo, sería necesario utilizar un modelo más realista.

7. Comentarios finales

Por otro lado, el estudio del posible origen de CoRoT-7b y Kepler-10b es muy interesante. Comprender cual es el origen de este cuerpo es muy importante si queremos entender cual es el entorno bajo el cual ciertos exoplanetas se desarrollan. Según vimos, el sistema CoRoT-7 debería tener aspectos interesantes y probablemente dramáticos en su evolución. Este estudio debería ser realizado en un futuro.

Un último aspecto que debe ser tenido en cuenta y fue ignorado a lo largo de todo el trabajo es el estudio de las fuerzas de marea cuando la inclinación planetaria es grande respecto del ecuador estelar. En la actualidad ya son conocidos exoplanetas que presentan órbitas retrógradas, y la evolución de tales sistemas aún no es entendida. El desarrollo de tal teoría involucra unas complicaciones técnicas importantes, ya que como hemos visto, la base del desarrollo tidal viene dado a través de expansiones en serie. El desarrollo de una teoría tidal general es de mucha importancia en el futuro, ya que a medida que más exoplanetas sean descubiertos, casos más extraños seguramente serán descubiertos. Por esta razón creemos que este estudio debe ser realizado.

Bibliografía

- Armitage, P. 2010, *Astrophysics of Planet Formation* (Cambridge University Press)
- Armitage, P. J. 2010, *ArXiv Astrophysics e-prints* 0701485v3
- Bate, M. R. 1998, *ApJ*, 508, L95
- Beauge, C. & Ferraz-Mello, S. 1993, *Icarus*, 103, 301
- Beaugé, C., Leiva, A. M., Haghighipour, N., & Otto, J. C. 2010, *MNRAS*, 408, 503
- Beaugé, C., Michtchenko, T. A., & Ferraz-Mello, S. 2006, *MNRAS*, 365, 1160
- Bell, K. R., Cassen, P. M., Klahr, H. H., & Henning, T. 1997, *ApJ*, 486, 372
- Benítez-Llambay, P., Masset, F., & Beaugé, C. 2011, *A&A*, 528, A2
- Beutler, G. 2005, *A&A Library*, Vol. II, *Methods of Celestial Mechanics* (Springer)
- Boss, A. P. 1997, in *Lunar and Planetary Institute Science Conference Abstracts*, Vol. 28, 137
- Efroimsky, M. & Williams, J. G. 2008, in *AAS/Division of Dynamical Astronomy Meeting*, Vol. 39, 09.02
- Efroimsky, M. & Williams, J. G. 2009, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 104, 257
- Ferraz-Mello, S., Rodríguez, A., & Hussmann, H. 2008, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 101, 171
- Ferraz-Mello, S., Tadeu dos Santos, M., Beaugé, C., & Michtchenko, T. A. 2010, in *Bulletin of the American Astronomical Society*, Vol. 42, *Bulletin of the American Astronomical Society*, 928
- Goldreich, P. & Peale, S. 1966, *AJ*, 71, 425
- Goldreich, P. & Tremaine, S. 1979, *ApJ*, 233, 857
- Goldreich, P. & Ward, W. R. 1973, *ApJ*, 183, 1051
- Gomes, R. S. 1998, *AJ*, 116, 997

Bibliografía

- Hartmann, L. 2009, *Accretion Processes in Star Formation*, 2nd edn., ed. A. King, D. Lin, S. Maran, J. Pringle, & M. Ward, Cambridge Astrophysics Series (Cambridge University Press)
- Hut, P. 1981, *A&A*, 99, 126
- Jackson, B., Barnes, R., & Greenberg, R. 2009, *ApJ*, 698, 1357
- Jackson, B., Miller, N., Barnes, R., et al. 2010, *MNRAS*, 407, 910
- Kaula, W. M. 1964, *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 2, 661
- Klahr, H. & Bodenheimer, P. 2006, *ApJ*, 639, 432
- Kuchner, M. J. & Lecar, M. 2002, *ApJ*, 574, L87
- Léger, A., Rouan, D., Schneider, J., et al. 2009, *A&A*, 506, 287
- Lissauer, J. J. 1993, *ARA&A*, 31, 129
- Lissauer, J. J. & Stevenson, D. J. 2007, *Protostars and Planets V*, 591
- MacDonald, G. J. F. 1964, *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 2, 467
- Machida, M. N., Inutsuka, S., & Matsumoto, T. 2007, *ApJ*, 670, 1198
- Machida, M. N. & Matsumoto, T. 2010, *ArXiv e-prints* 1008.0920
- Mamajek, E. E. 2009, in *American Institute of Physics Conference Series*, Vol. 1158, American Institute of Physics Conference Series, ed. T. Usuda, M. Tamura, & M. Ishii, 3–10
- Masset, F. 2007, *Planet-Disk Interactions*, <http://www.maths.wmul.ac.uk/~masset/>
- Masset, F. S. 2000, in *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, Vol. 219, *Disks, Planetesimals, and Planets*, ed. G. Garzón, C. Eiroa, D. de Winter, & T. J. Mahoney, 75
- Masset, F. S., Morbidelli, A., Crida, A., & Ferreira, J. 2006, *ApJ*, 642, 478
- Michikoshi, S., Kokubo, E., & Inutsuka, S. 2010, *ApJ*, 719, 1021
- Michtchenko, T. A., Beaugé, C., & Ferraz-Mello, S. 2006, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 94, 411
- Mignard, F. 1979, *Moon and Planets*, 20, 301
- Mignard, F. 1980, *Moon and Planets*, 23, 185
- Morbidelli, A., Crida, A., Masset, F., & Nelson, R. P. 2008, *A&A*, 478, 929

- Murray, C. & Dermott, S. 1999, *Solar System Dynamics* (Cambridge University Press)
- Nelson, R. P. 2010, Lecture 6: Disk-Magnetosphere Interaction. En línea: <http://www.maths.qmul.ac.uk/~rpn/ASTM735/index.html>
- Nelson, R. P. & Papaloizou, J. C. B. 2004, *MNRAS*, 350, 849
- Neron de Surgy, O. & Laskar, J. 1997, *A&A*, 318, 975
- Ogihara, M. & Ida, S. 2009, *ApJ*, 699, 824
- Ogihara, M., Ida, S., & Morbidelli, A. 2006, in *Bulletin of the American Astronomical Society*, Vol. 38, *Bulletin of the American Astronomical Society*, 994
- Ogilvie, G. I. & Lubow, S. H. 2003, *ApJ*, 587, 398
- Pollack, J. B., Hubickyj, O., Bodenheimer, P., et al. 1996, *Icarus*, 124, 62
- Pont, F., Aigrain, S., & Zucker, S. 2011, *MNRAS*, 411, 1953
- Queloz, D., Bouchy, F., Moutou, C., et al. 2009, *A&A*, 506, 303
- Rice, W. K. M., Armitage, P. J., & Hogg, D. F. 2008, *MNRAS*, 384, 1242
- Safronov, V. S. 1967, *Soviet Ast.*, 10, 650
- Shakura, N. I. & Sunyaev, R. A. 1973, *A&A*, 24, 337
- Tanaka, H., Takeuchi, T., & Ward, W. R. 2002, *ApJ*, 565, 1257
- Tanaka, H. & Ward, W. R. 2004, *ApJ*, 602, 388
- Touma, J. & Wisdom, J. 1994, *AJ*, 108, 1943
- Ulrich, R. K. 1976, *ApJ*, 210, 377
- Valencia, D., Ikoma, M., Guillot, T., & Nettelmann, N. 2010, *A&A*, 516, A20
- Ward, W. R. 1986, *Icarus*, 67, 164
- Ward, W. R. 1997, *Icarus*, 126, 261
- Weidenschilling, S. J. 1980, *Icarus*, 44, 172
- Yamoto, F. & Sekiya, M. 2004, *Icarus*, 170, 180

Bibliografía

PRESENTACIÓN ORAL

An Analytical approach for tidal migration of close-in planets.

P. Benítez-Llambay¹, C. Beaugé²

(1) *Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba.*

(2) *Observatorio Astronómico de Córdoba, Universidad Nacional de Córdoba.*

Abstract. In this paper we present an analytical solution for the tidal equations developed by Ferraz-Mello et al. (2008) when the orbital inclination is zero (ie: orbital plane coincide with both equator). In particular, we analyze the equations governing the evolution of the semimajor axis and eccentricity of a close-in planet. We characterize the timescales for each element and compare the results. Both solutions are in good agreement with numerical integrations.

Resumen. En este artículo se presenta una solución analítica de las ecuaciones tidales desarrolladas por Ferraz-Mello et al. (2008) cuando la inclinación orbital es nula. En particular, se resuelven las ecuaciones que rigen la evolución del semieje y excentricidad de un planeta de corto período. Se estudian los tiempos de decaimiento de cada elemento orbital y se realiza una comparación entre la solución numérica y analítica. Se observa un buen acuerdo entre ambas.

1. Introduction

The close-in planets constitute an important sub-set of the exoplanets' population. In fact, from the ~ 500 exoplanets discovered (<http://exoplanet.eu>) so far, $\sim 32\%$ have periods below 10 days. This value for a Solar-type star is equivalent to a semimajor axis $a \sim 0.09$ UA. Due to the close proximity to the star ($a \sim 19 R_{\odot}$), these bodies undergo strong tidal forces, which generate significative changes in their orbital elements in relatively short timescales. Ferraz-Mello et al. (2008) derivated a general tidal theory assuming small excentricities and inclinations. In particular, they found the differential equations for the orbital elements of a planet undergoing tidal forces. Assuming a linear model for the lag generated in each body deformed, and assuming that the stellar rotation is small compared with the planetary mean motion, the authors obtained a set of equations which are valid in the case of close-in planets.

The aim of this paper is to present an analytic approximate solution for these equations, which allow a general study of the influence of tidal forces exerted on exoplanets. Also, we present expresions for the timescales involved in the variation of the orbital elements. We begin with the tidal equations in the same

form as Jackson et al. (2009), which are based in Ferraz-Mello et al. (2008) work. We will consider the case with zero inclination.

2. Tidal Model and Solution

According to Jackson et al. (2009):

$$\frac{\dot{a}}{a} = - \left[\alpha e^2 + \beta \left(1 + \frac{57}{4} e^2 \right) \right] a^{-13/2} \quad (1)$$

$$\frac{\dot{e}}{e} = -\varepsilon a^{-13/2} \quad (2)$$

where $\beta = (9R_*^5 M_p / 2Q'_*) \sqrt{G/M_*}$, a is the semimajor axis of the planet and e is the eccentricity. α and β are related by:

$$\frac{\alpha}{\beta} = 7 \left(\frac{Q'_*}{Q'_p} \right) \left(\frac{M_*}{M_p} \right)^2 \left(\frac{R_p}{R_*} \right)^5, \quad \varepsilon = \frac{\alpha}{2} + \frac{225}{72} \beta \quad (3)$$

G is the gravitational constant, M the mass and R the radius. Subscripts $*$, p mean star and planet respectively. Q' is a parameter that measures the tidal efficiency.

Note that all the system physical parameters have a lower and upper bound which allow us to estimate lower bound for (3). Lower limit for α/β is:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} \right) \geq 7 \left[\left(\frac{Q'_*}{Q'_p} \right) \left(\frac{M_*}{M_p} \right)^2 \left(\frac{R_p}{R_*} \right)^5 \right]_{min} \sim 7 \left(\frac{10^6}{10^5} \right) \left(\frac{10^0}{10^{-2}} \right)^2 \left(\frac{10^5}{10^6} \right)^5 \sim 7 \quad (4)$$

In most interesting cases, $\alpha/\beta \gg 1$. If we define $\xi = \frac{13}{2} \left(\frac{\alpha/\beta + 57/4}{\alpha/\beta + 225/36} \right)$ then $\xi \sim 13/2$.

Substituting $a^{-13/2}$ from (2) into (1) we obtain an equation for $a(e)$, whose exact solution is:

$$a(e) = a_0 \left(\frac{e}{e_0} \right)^{\beta/\varepsilon} \exp \left[\frac{2}{13} \xi (e^2 - e_0^2) \right] \quad (5)$$

with $a_0 = a(e_0)$.

Introducing (5) in (2), we obtain an equation for $e(t)$. Assuming $\exp(\xi e^2) \simeq 1$ (this is true if $e \ll \sqrt{1/\xi} \sim 0.39$), integrating, and approximating $e^{13\beta/2\varepsilon} \simeq 1 + \frac{13\beta}{2\varepsilon} \ln e$, the solution can be expressed as:

$$e(t) = e_0 \exp \left[-a_0^{-13/2} \varepsilon \exp(\xi e_0^2) (t - t_0) \right] \quad (6)$$

Finally, this expression can be incorporated into (5) to give the explicit time variation of the semimajor axis:

$$\begin{aligned} a(t) &= a_0 \exp \left(-\frac{2}{13} \xi e_0^2 \right) \exp \left[\frac{2}{13} \xi e_0^2 \exp \left(-2a_0^{-13/2} \varepsilon \exp(\xi e_0^2) (t - t_0) \right) \right] \\ &\times \exp \left[-\beta a_0^{-13/2} \exp(\xi e_0^2) (t - t_0) \right] \quad \text{if } e \neq 0 \end{aligned} \quad (7)$$

When the eccentricity is zero, the differential equations (1)-(2) have a trivial solution. If we are only interested in long time migration when $e_0 \neq 0$, it is possible to set $e = 0$ and take into account the migration due to planetary tide. In other words, solve (1) and incorporate the tidal migration due to planetary tide ($e \neq 0$) through (5) taking $a(e = 0) = \bar{a}_0$. In this case, the solution is:

$$a(t) = \left[-\frac{13}{2}\beta(t - t_0) + \bar{a}_0^{13/2} \right]^{2/13}, \quad \bar{a}_0 = a_0 \exp\left(-\frac{2}{13}\xi e_0^2\right) \quad (8)$$

where e_0 is the initial eccentricity, which may be null. Note that we are implicitly assuming with the circularization is faster than migration (ie: $\bar{a}_0 \neq 0$, or $\xi e_0^2 \ll 13/2$, which was satisfied by our previous hypothesis). A more detailed analysis may be found in Rodríguez & Ferraz-Mello (2010). Expression (8) is numerically more stable than (7) for small eccentricities, small semimajor axis and long time evolution.

From (6) we obtain the characteristic timescale for the eccentricity:

$$\tau_e = a_0^{13/2} \exp(-\xi e_0^2) \varepsilon^{-1} \propto \varepsilon^{-1} \sim \alpha^{-1} \quad (9)$$

Therefore, the circularization time is strongly dependent on the planetary tide. If we consider $t \gg 1$, (7) adopts the form:

$$a(t) = a_0 \exp\left(-\frac{2}{13}\xi e_0^2\right) \exp\left[-\beta a_0^{-13/2} \exp(\xi e_0^2)(t - t_0)\right] \quad (10)$$

Note that (10) and (8) should describe similar curves, therefore the timescale for (8) is:

$$\tau_a = a_0^{13/2} \exp(-\xi e_0^2) \beta^{-1} \propto \beta^{-1} \quad (11)$$

which depends only on stellar tides.

3. Numerical vs Analytical

In figure (1) we compare the numerical solution (ie, solution obtained with a numerical integrator, in this case with a Runge-Kutta method) and analytical solution (6),(7) and (8). Physical parameters are $M_* = M_\odot$, $R_* = R_\odot$, $Q_* = 10^6$, $M_p = 1 M_J$, $R_p = R_J$ and $Q_p = 10^4$. The initial semimajor axis is $a_0 = 0.1$ AU and initial eccentricity is $e_0 = 0.1$. There is a good agreement between both solutions. Figure (2) shows the differences between numerical and analytical solutions. Differences in semimajor axis are very small even for very long timescales. The error in eccentricity is also very small. We can see that (8) reproduce correctly the behavior of the complete system although migration due to planetary tides is taken into account only through a shift on initial semimajor axis.

4. Conclusion

We presented an approximated analytical solution for the tidal differential equations (Ferraz-Mello et al. 2008, Jackson et al. 2009), which are valid in a wide

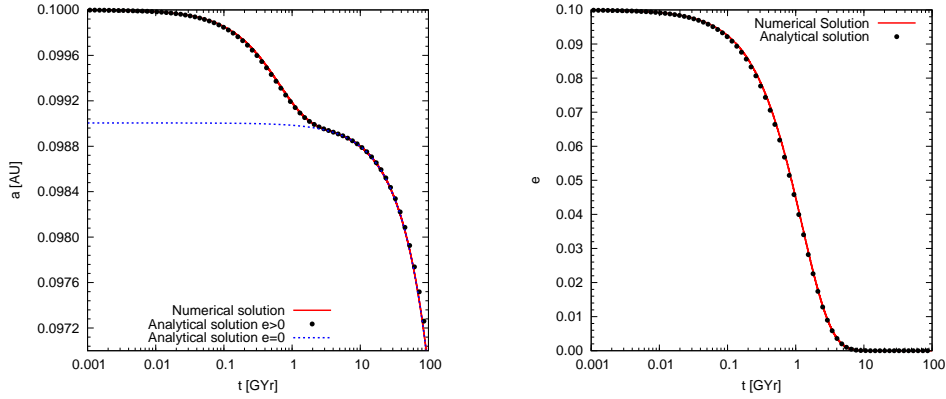


Figure 1. A plot that show numerical and analytical solutions for (1)-(2). Blue curve represent the solution (8). There is a good agreement between both solutions. Note that blue curve is a very good description for the behavior of semimajor axis for long time migration.

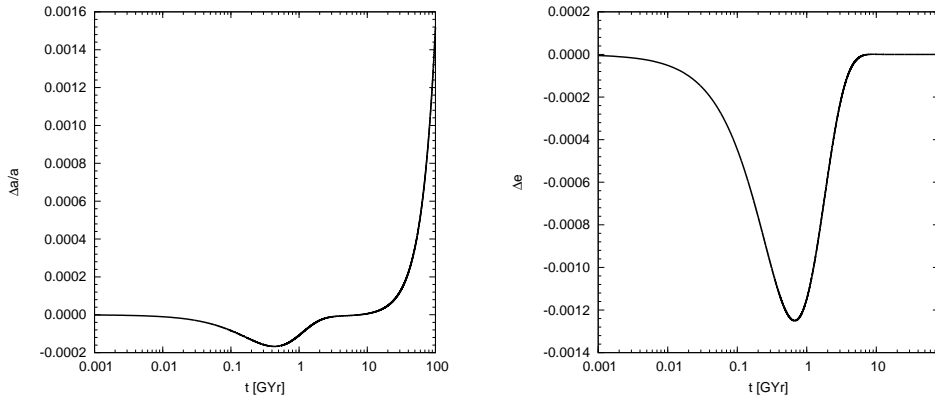


Figure 2. A plot that show difference between analytic solution and numerical solution for the semimajor axis and eccentricity. The error is very small in both elements.

range of parameters ($\alpha/\beta \gg 1$). We established in a transparent way the timescales involved in tidal theory when inclination is zero, eccentricity is small and planets are close-in. We have seen with numerical solution is very close to analytical solution. Advantages of this model are the wide range of applicability and simple expressions, which allow to show easily the timescales involved in tidal evolution.

References

- Ferraz-Mello, S., Rodríguez, A., and Hussmann, H. 2008, CMDA 101,171.
 Jackson, B., Barnes, B., Greenberg, R. 2009, ApJ, 698, 1357.
 Rodríguez A., Ferraz-Mello, S., 2010 EAS publication series 42, 411

The mass-period distribution of close-in exoplanets

P. Benítez-Llambay¹, F. Masset², and C. Beaugé¹

¹ Observatorio Astronómico, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina
e-mail: pbenitez@mail.oac.uncor.edu

² Instituto de Ciencias Físicas, Universidad Nacional Autónoma de México, Apdo Postal 48-3, 62251 Cuernavaca, Mor., México*

Received 17 September 2010 / Accepted 31 December 2010

ABSTRACT

Context. The lower limit to the distribution of orbital periods P for the current population of close-in exoplanets shows a distinctive discontinuity located at approximately one Jovian mass. Most smaller planets have orbital periods longer than $P \sim 2.5$ days, while higher masses are found down to $P \sim 1$ day.

Aims. We analyze whether this observed mass-period distribution could be explained in terms of the combined effects of stellar tides and the interactions of planets with an inner cavity in the gaseous disk.

Methods. We performed a series of hydrodynamical simulations of the evolution of single-planet systems in a gaseous disk with an inner cavity mimicking the inner boundary of the disk. The subsequent tidal evolution is analyzed assuming that orbital eccentricities are small and stellar tides are dominant.

Results. We find that most of the close-in exoplanet population is consistent with an inner edge of the protoplanetary disk being located at approximately $P \gtrsim 2$ days for solar-type stars, in addition to orbital decay having been caused by stellar tides with a specific tidal parameter on the order of $Q'_* \simeq 10^7$. The data is broadly consistent with planets more massive than one Jupiter mass undergoing type II migration, crossing the gap, and finally halting at the interior 2/1 mean-motion resonance with the disk edge. Smaller planets do not open a gap in the disk and remain trapped in the cavity edge. CoRoT-7b appears detached from the remaining exoplanet population, apparently requiring additional evolutionary effects to explain its current mass and semimajor axis.

Key words. protoplanetary disks – planet-disk interactions – planet-star interactions

1. Introduction

Close-in planets (semimajor axis $a < 0.1$ AU) constitute a special subset of the exoplanetary population. Since it is unclear whether in-situ formation occurs, the current orbital and physical characteristics of these planets provide important constraints on their past evolution and formation process. Several mechanisms have been proposed to explain the pile-up of hot planets with a three-day orbital period, including a truncation of the gaseous disk by the star (Lin et al. 1996; Kuchner & Lecar 2002), planetary scattering combined with Kozai resonance and tidal circularization (Nagasawa et al. 2008), planetary evaporation (Davis & Wheatly 2009), and tidal interactions with the parent star (Jackson et al. 2009).

In particular, Kuchner & Lecar (2002) suggested that a giant planet in circular orbit could halt its migration when its orbital period was half that of the inner edge of the disk. In this configuration, all the planet's circular Lindblad resonances would lie in the inner cavity (IC) and no further interchange of angular momentum would take place. Masset et al. (2006) performed a series of hydrodynamical simulations to follow the evolution of low-mass planets in disks including an IC. They found that all bodies migrated until reaching a point slightly exterior to the cavity edge, where they were effectively trapped in a stable configuration in almost circular orbits. Although this result appears different from that predicted by Kuchner & Lecar (2002), each is valid, as we shall see, for a different range of planetary masses.

* On leave from Service d'Astrophysique, CEA/Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette, France.

The first reference to a possible correlation between mass and orbital period for close-in planets was proposed by Mazeh et al. (2005) for only six transiting bodies. They found that both parameters seemed to follow a linear law, with more massive bodies being located at smaller semimajor axes. Southworth et al. (2007) and Davis & Wheatley (2009) extended the analysis to a larger transiting population, finding a similar result although with a much broader dispersion. They proposed that smaller planets closer to the star might have been lost because of evaporation, similar to that currently ongoing at least in HD209458b (Vidal-Madjar et al. 2003) and WASP-17 (Anderson et al. 2010).

Jackson et al. (2009) also analyzed the distribution of close-in planets, this time focusing on the correlation between the semimajor axis of the planet and the age of its star. They found that the lower limit of the semimajor axis was lower for younger stars, which implies that tidal effects could be responsible. Exoplanets with very short orbital periods in older stars would have had enough time to be tidally disrupted, thus they would only be presently observable in relatively young systems.

In this paper, we revisit the mass-period distribution, taking advantage of the recent increase in the exoplanet population. Figure 1 shows the orbital periods P , as a function of the mass m , for the known population of exoplanets with $P \leq 12$ days (137 planets). Black circles correspond to cases for which both transits and Doppler data are available; bodies without detected transits are shown in gray. Exoplanets in apparent retrograde motion with respect to stellar rotation are identified by an empty square. These are WASP-8b (Queloz et al. 2010), WASP-17b

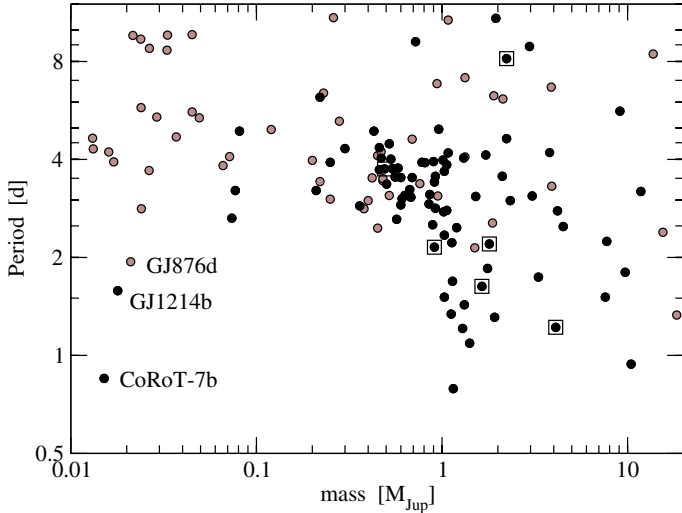


Fig. 1. Distribution of orbital periods and planetary masses for close-in exoplanets with orbital period $P < 12$ days. Data from <http://exoplanets.eu>. Black circles denote planets with both Doppler and transit data, while gray circles mark bodies without detected transits. Empty squares correspond to planets with retrograde orbits with respect to the stellar spin.

(Anderson et al. 2010), WASP-33b (Collier Cameron 2010), Hat-P-7b (Winn et al. 2009), WASP-2b (Triaud et al. 2010), and WASP-15b and WASP-17b (Triaud et al. 2010). Although it may be argued that these bodies are not consistent with planetary migration (Triaud et al. 2010), they may also point towards primordial spin-orbit misalignment and not be related to subsequent orbital evolution of the planets (Lai et al. 2011).

The distribution exhibits a noticeable “step”, exoplanets larger than one Jupiter mass (M_{Jup}) appear to have a lower inner boundary (down to ~ 1 day) while for $m < M_{\text{Jup}}$ the distribution seems restricted to larger values of P . The only exceptions are three bodies in the Super-Earth range, CoRoT-7b, GJ1214b, and GJ876d, which are all marked in the plot. Of these, the latter two planets belong to low-mass stars ($M_* = 0.17$ and $M_* = 0.32$ solar masses, respectively), thus constitute special cases. CoRoT-7b, however, belongs to a solar-type star (Rouan et al. 2009). This planet has a very short orbital period (~ 0.85 days) but also a very low mass ($m \sim 0.015 M_{\text{Jup}}$), and does not seem to comply with the rest of the exoplanet distribution. In particular, Jackson et al. (2009) pointed out that CoRoT-7b could reach the Roche radius on timescales of 10^7 – 10^9 years, depending on the value of the specific tidal parameter Q'_* .

Regardless of these isolated cases, there seems to be a very clear discontinuity (or bump) in the mass-period distribution, located at approximately $m = M_{\text{Jup}}$. Moreover, for high masses the lower limit in orbital periods appears very close to a 2/1 mean-motion resonance with the disk edge for small planetary bodies. This appears consistent with a scenario in which the planetary traps proposed by Masset et al. (2006) would dominate the low-mass region, while the mechanism of Kuchner & Lecar (2002) would be mainly responsible for the upper end of the mass spectrum.

The main objective of this study is to test whether the combined action of planetary traps in the gaseous disk plus subsequent tidal interactions with the parent star could explain the observed distribution of close-in exoplanets. Since exoplanets in retrograde orbits should have exotic disk-planet and tidal evolutions, the study of these exosystems is beyond the scope of the

present work, and we focus mainly on bodies believed to have orbital motion in the same direction as the stellar spin. Even in this case, we assume a zero inclination with respect to the stellar equator.

In Sect. 2, we present a series of hydrodynamical simulations adopting different planetary masses and analyzing the relative halting distance from the central star. Not only are we interested in seeing whether such a hybrid and mass-selective process is possible, but also whether the boundary between both mechanisms is consistent with the observed distribution of close-in planets. Section 3 is devoted to the subsequent evolution of exoplanets under the stellar tide and their effects on any initial disk-driven distribution in the mass-period diagram. In Sect. 4, we analyze the case of the CoRoT-7 planetary system and present possible explanations of the present location of CoRoT-7b. Finally, conclusions close the paper in Sect. 5.

2. Hydrodynamical simulations

2.1. Initial conditions

Our simulations were carried out using the FARGO¹ hydrocode (Masset 2000a,b) with a central star of one solar mass. We consider two-dimensional, locally isothermal disks. The unit of length, r_0 , is arbitrary (our simulations are scale free and can be rescaled to disks of arbitrary sizes), but it can be considered, for our purpose, that $r_0 \sim 0.01$ AU. Our disks, prior to a 1D relaxation dedicated to the creation of the IC, have a uniform surface density $\Sigma = 10^{-4} M_{\odot} r_0^{-2}$, which translates, in our case, to $\Sigma \sim 900 \text{ g cm}^{-2}$. The asymptotic radius of our planets is virtually independent of this value, which essentially prescribes how long it takes for them to reach it. In a similar manner, the kinematic viscosity of our disks is uniform outside the cavity, and is set to $\nu = 10^{-5} r_0^2 \Omega_0^{-1}$, where Ω_0 is the orbital frequency at radius r_0 . Some initial test runs were performed with other values of Σ and ν with no significant change in the results, except for the migration timescale. The disk aspect ratio is set uniformly to $H/r = 0.05$, hence the value of the α parameter that characterizes turbulence (Shakura & Sunyaev 1973) just outside the IC (see below) is $\alpha \sim 3 \times 10^{-3}$.

Our disks are described on a polar grid with 384 zones in azimuth and 306 zones in radius. The inner radius of the mesh is at $0.2r_0$, while the outer radius is at $3.5r_0$. The IC was generated using an ad hoc step in kinematic viscosity around $r = 1.8r_0$, using the same recipe as described in Masset et al. (2006), adopting a value of $F = \Sigma_o/\Sigma_i = 10$ for the ratio of the surface densities outside and inside the cavity. We obtain a rather sharp IC of width $\Delta r \approx 0.5r_0$. Boundary conditions were chosen to be non-reflecting for the inner edge and such that there was a continuous outer source mass to maintain the surface density in the external regions of the disk (Masset et al. 2006, used non-reflecting boundary conditions for both edges). No planet was considered at this point.

An initial one-dimensional run was performed to allow the cavity to form and reach a steady state configuration. The resulting density profile and total torque were analogous to those shown in Masset et al. (2006), showing the existence of a stable fixed point in the torque at a distance r^* slightly larger than the nominal edge of the IC (Fig. 2). A planet located outside r^* would feel a negative torque and suffer a negative orbital decay towards the star. Conversely, a body placed at a radial distance slightly smaller than r^* would feel a positive torque and an

¹ See <http://fargo.in2p3.fr>

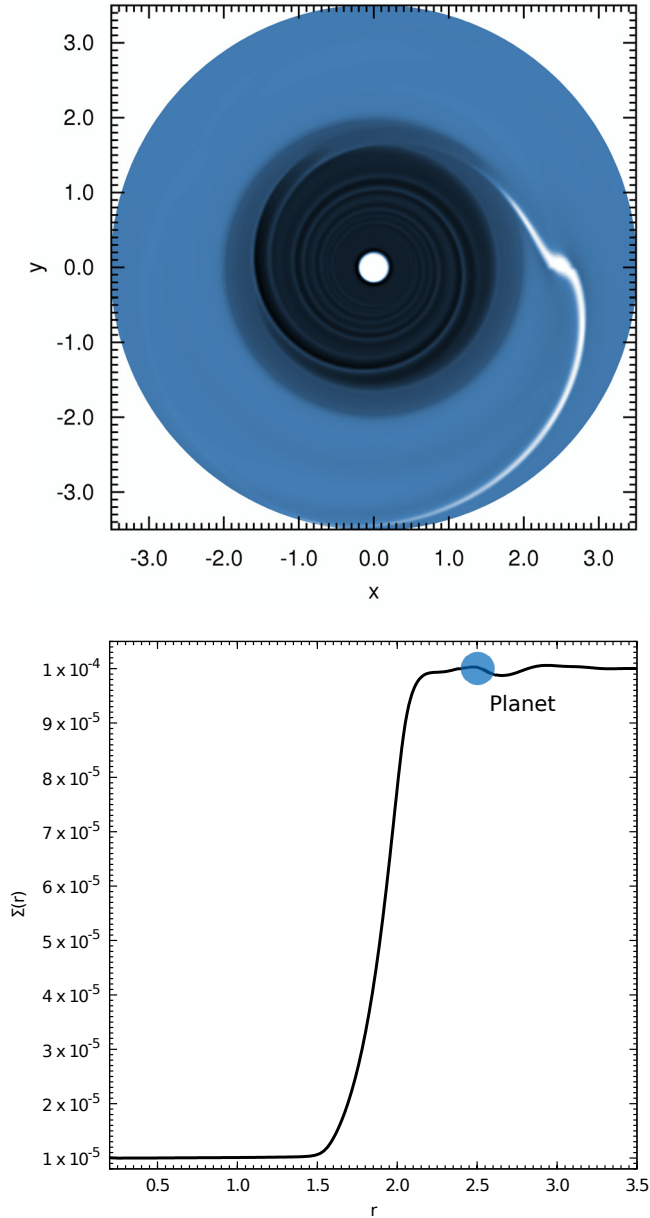


Fig. 2. Snapshot of the surface density profile of one of our simulations. The inner cavity is centered around $r = 1.8$. In the top frame, the low-density regions are shown in black, while the high-density regions are shown in white. The planet ($m = 0.1 M_{\text{Jup}}$) is located on the x -axis.

outward radial migration. Thus, the point $r = r^*$ is a stable nesting place for the planet, as long as its mass is sufficiently low to avoid disruption of the density (and torque) profile.

2.2. Test simulations of planet trapping

After the disk density profile had stabilized, we included a planet of mass m in an initially circular orbit at $r = 2.5r_0$. The system was allowed to evolve until the planet reached a stationary solution and the orbital decay effectively stopped. Figure 3 shows the results of two runs, the first with $m = 0.1 M_{\text{Jup}}$ and the second with $m = 10 M_{\text{Jup}}$. The location of the center of the IC is marked by the top horizontal dashed line, while the lower corresponds to the interior 2/1 mean-motion resonance (MMR) with the center of the IC.

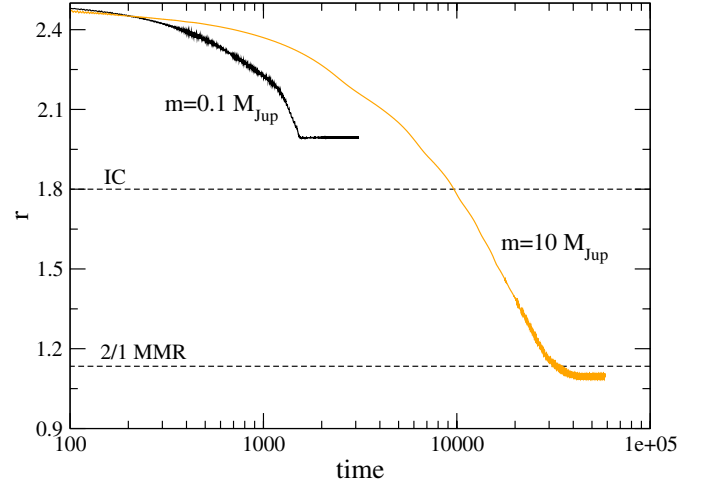


Fig. 3. Evolution of semimajor axis of two one-planet systems migrating and halting near the disk inner cavity edge (IC). Black curve corresponds to $m = 0.1 M_{\text{Jup}}$ and gray to $m = 10 M_{\text{Jup}}$. The IC is centered at $r_{\text{IC}} = 1.8$, while its interior 2/1 mean-motion resonance (MMR) is located at $r \approx 1.13$. Time is in orbital periods.

The smaller planet suffers an almost constant orbital decay until it is halted at a location slightly outside the cavity, in accordance with the findings of Masset et al. (2006). The more massive planet, however, suffers a type II migration that opens a gap in its co-orbital region and completely disrupts the density profile of the disk in its vicinity. The cavity edge is therefore incapable of generating a strong corotation torque and fails to trap the planet, which continues its orbital decay inside the cavity. The migration is finally stopped very close to the location of the 2/1 MMR with the IC where the differential Lindblad torque reduces to zero, as predicted by Kuchner & Lecar (2002).

In all cases, the eccentricities were damped, and the final orbits were observed to be quasi-circular with $e \sim 10^{-3}$. This final eccentricity is different from the results presented by Rice et al. (2008), where a significant eccentricity excitation is observed for type II migration inside the inner disk edge. From what we have been able to see, the discrepancy arises from the different numerical setup. Rice et al. (2008) truncate the disk at the mesh's inner edge, and the planets that they consider essentially orbit in a vacuum. This is in contrast to our situation in which some residual material surrounds the orbit. This material, by the action of co-orbital Lindblad resonances, is a powerful source of eccentricity damping.

2.3. Scaling and comparison with observations

We repeated the simulations for a total of 18 runs, with planetary masses ranging from 0.01 to 20 Jupiter masses, all starting from initial circular orbits at $r = 2.5r_0$. The orange curve in the top plot of Fig. 4 presents the final orbital period as function of the planetary mass. For comparison, the observational data are again drawn in circles.

Since the location of our IC was in arbitrary units, we have a degree of freedom in the sense that we may shift the orange curve arbitrarily in the y -axis to fit the observed exoplanets. We find that the best fit gives an inner cavity edge located at approximately $a \sim 0.03$ AU corresponding to an orbital period of ~ 2 days. This value is comparable with the inferred inner gas radii of T Tauri star disks from CO spectroscopy (Najita et al. 2007; Carr 2007) which seems to be located around

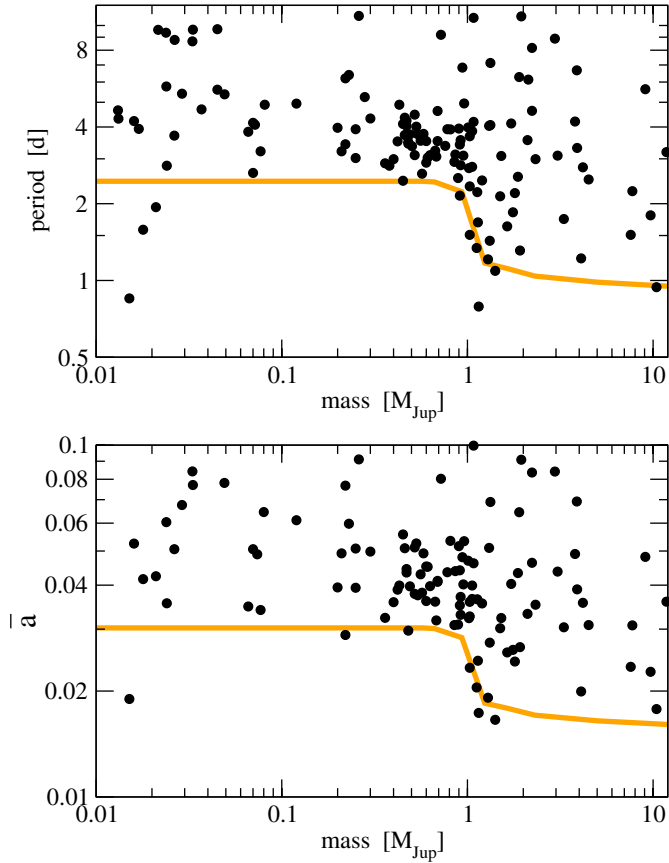


Fig. 4. Black circles reproduce the mass-period distribution of known close-in exoplanets. The broad orange band represents the final semimajor obtained from the runs, scaled along the y -axis to fit the observational data. In the lower frame, \bar{a} denotes the normalized semimajor axis defined in Eq. (5).

0.03–0.04 AU. Although our best-fit distance is slightly lower, any difference could be due to stellar parameters and the maximum CO velocity (Carr 2007).

Exoplanets with masses below one Jovian mass seem to have a lower-limit orbital period of about 2–3 days, consistent with the position of the equilibrium point being slightly beyond the IC (Masset et al. 2006). On the other hand, the orbital periods of more massive planets have a lower limit, this time in accordance with the location of the 2/1 mean-motion resonance with the IC, as predicted by Kuchner & Lecar (2002).

3. Tidal evolution of close-in exoplanets

Although the results presented in the top graph of Fig. 4 appear to be encouraging, there are two important approximations that must be examined. First, the exoplanets orbit stars with different radii and masses, and we have assumed that the scaling in the y -axis is the same. Although we have not assumed any origin for the inner cavity (MRI, stellar wind, etc.), it is almost certain that the location of the IC should be a function of the stellar mass. If we assume a very simple model in which r_{IC} scales with R_* , then the position of both GJ1214b and GJ876d would be displaced above the broad orange curve, thus eliminating their incongruity with respect to the simulations. However, CoRoT-7 has a stellar mass of $0.93 M_\odot$ and its location in the diagram would still be conflicting.

A second approximation is that we have neglected the later evolution of the planetary periods caused by stellar tides. Assuming almost circular planar orbits for the close-in planets, we can neglect the planetary tides and approximate the differential equation for orbital decay as

$$\frac{da}{dt} = - \left[\frac{9}{2} \left(\frac{G}{M_*} \right)^{1/2} \frac{R_*^5 M_p}{Q'_*} \right] a^{-11/2} \quad (1)$$

(see Ferraz-Mello et al. 2008; Jackson et al. 2009). This expression can be easily integrated to yield

$$a(t)^{13/2} = \left[\frac{117}{4} \left(\frac{G}{M_*} \right)^{1/2} \frac{R_*^5 M_p}{Q'_*} \right] t + a_0^{13/2}, \quad (2)$$

where $a_0 = a(t = 0)$ is the initial value of the semimajor axis. After some simple algebraic manipulations, we can express this solution as

$$\bar{a}(t)^{13/2} = \bar{a}_0^{13/2} - \beta t, \quad (3)$$

where

$$\beta = \frac{117}{4} \left(\frac{G}{M_\odot} \right)^{1/2} R_\odot^5 \frac{M_p}{Q'_*} \quad (4)$$

and

$$\bar{a} = a \left(\frac{M_*}{M_\odot} \right)^{1/13} \left(\frac{R_\odot}{R_*} \right)^{10/13}. \quad (5)$$

Equation (3) is then independent of the stellar parameters, whose values are incorporated into the “normalized” semimajor axis \bar{a} . We note that the rate of orbital decay is given by β , which is linearly proportional to the planetary mass and inversely proportional to the stellar dissipation parameter Q'_* . Is it of course probable that the tidal parameter itself depends on the stellar parameters (see Barker & Ogilvie 2009), but there has so far been no clear indication of how it may vary nor by what magnitude.

The lower plot in Fig. 4 shows the distribution of \bar{a} as a function of m for the close-in exoplanet population. The orange curve marks the position of the simulated lower limit to the semimajor axis. As expected, both GJ876d and GJ1214b are now above the lower limit, although CoRoT-7b still remains detached. We note that the bump in the distribution is still clearly visible.

We can now use Eq. (3) to check whether the present-day distribution could originate solely from tidal evolution. To test this idea, we generated a synthetic population of 10^4 fictitious exoplanets distributed randomly in planetary mass across the interval $m \in [0.01, 12] M_{Jup}$ and with random stellar ages T between one and eight Gyr. The normalized semimajor axis \bar{a} of each planet was then evolved tidally for the age of the system using a stellar tidal parameter $Q'_* = 10^6$.

Figure 5 shows results considering three different initial distributions, chosen to be uniform in orbital period P and $\log(m)$. In all cases, the lowest mass was equal to $m = 0.01 M_{Jup}$, and the largest to twelve Jovian masses. Since this preliminary analysis is only intended to be illustrative, we assumed solar-type stars for all bodies; consequently, the normalized semimajor axis \bar{a} is equal to the nominal semimajor axis a .

For the top plots, we assumed fictitious planets with orbital periods that have no lower limit. The initial data set is shown in the left plot, while the right-hand plot presents the final distribution after evolution through stellar tides for $T = 8$ Gyr. Since the decay rate β is proportional to the planetary mass, more massive planets fall more rapidly towards the star, leading to a final population that has a lack of large bodies with small orbital periods.

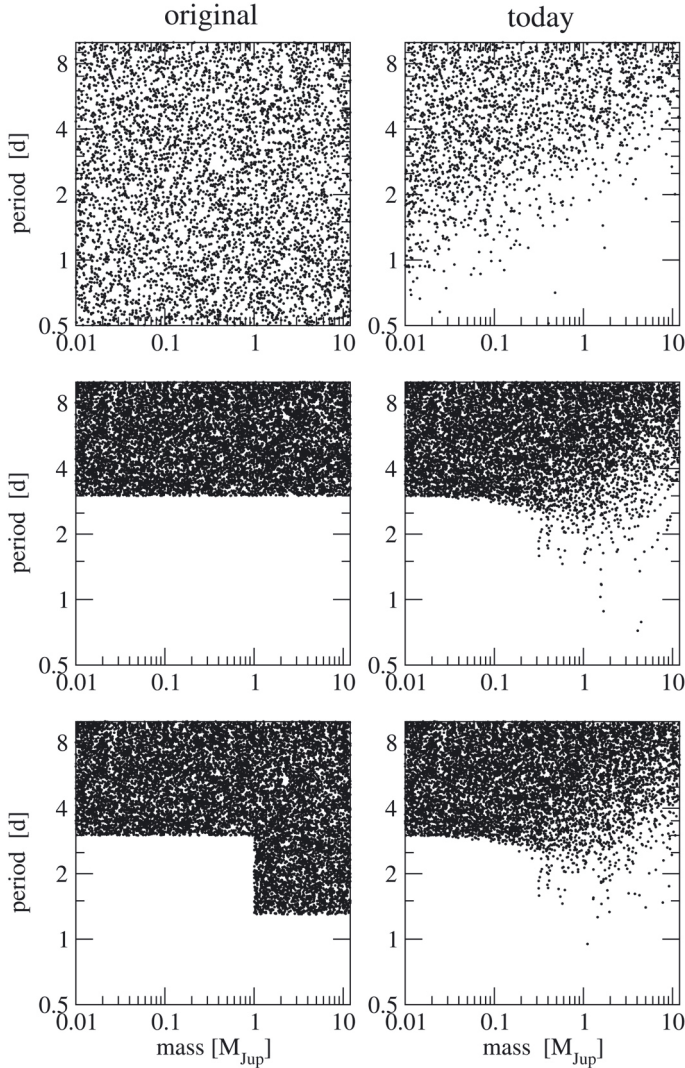


Fig. 5. Tidal evolution of fictitious planets (stellar tides alone) with $Q_* = 10^6$. Initial distributions are shown on the left, while the evolved distributions are shown on the right. Stellar ages were chosen uniformly between one and eight Gyr.

This distribution shows little relation to the real distribution of planets.

For the middle plots, we considered a lower limit to the orbital periods equal to 3 days. This value is sufficiently large for terrestrial-type bodies to be virtually unaffected, although giant planets still suffer significant orbital decay. Depending on their initial semimajor axis and stellar age, many massive planets reach the Roche radius and are engulfed by the star, but a portion of the population remains. We note the final step-like distribution, which is reminiscent of the real population. However, the bump is now located at $\sim 0.3 M_{\text{Jup}}$, thus at a lower mass than for the real exoplanets.

Finally, in the lower plots of Fig. 5 we considered an initial population with a step in the orbital period, similar to that resulting from the hydrodynamical simulations. Even though the initial conditions are different from those depicted in the middle plots, there is no significant difference in the final distribution. This seems to indicate that any evidence of an initial disk-related structure would be smeared by the later tidal evolution. Thus, a bump in the present real population is not necessarily indicative of a dynamical structure prior to the dissipation of the gaseous disk.

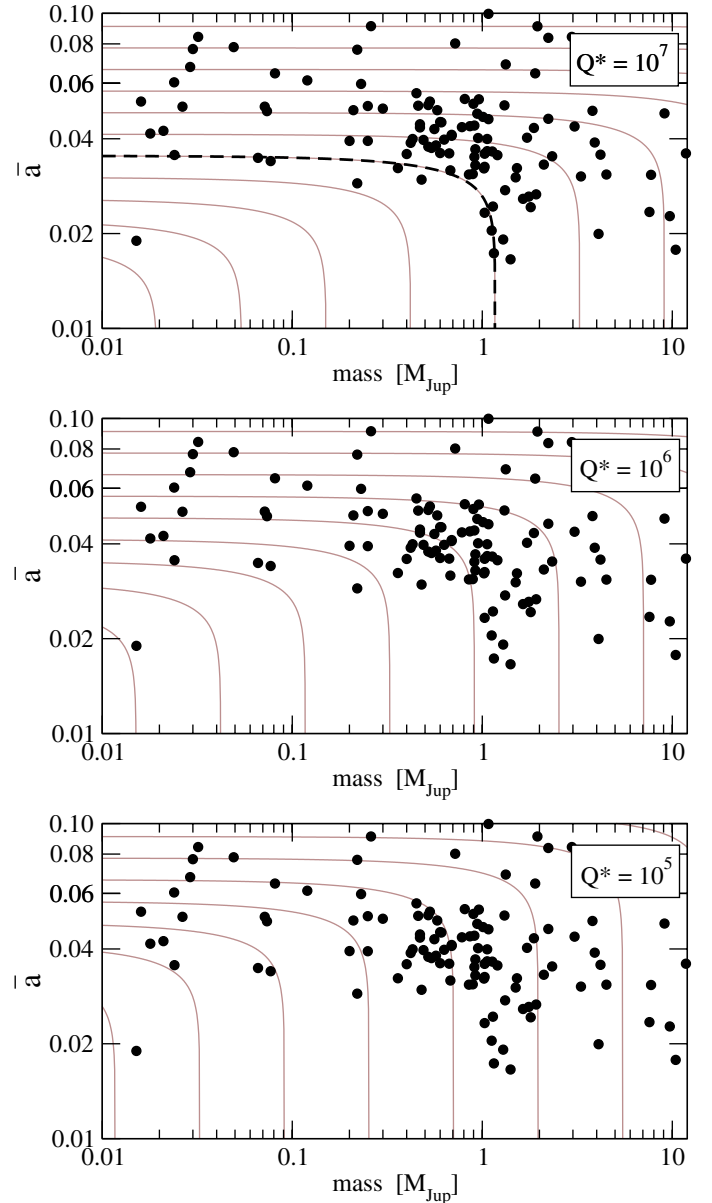


Fig. 6. Distribution of close-in exoplanets in the $\bar{a} - m$ diagram. Gray curves show the end evolution due to stellar tides (at $T = 8$ Gyr) of initial constant values of \bar{a}_0 . Each curve corresponds to a different \bar{a}_0 . Stellar tidal parameters are given in the top right-hand side of each graph. The broad dashed curve in the top panel, corresponding to $\bar{a}_0 = 0.035$, gives the best fit to the lower limit of the current exoplanet population.

These results indicate the clear possibility that the observed bump in the exoplanet $\bar{a} - m$ distribution could be mainly due to stellar tidal effects. To test this proposal in more detail, we calculated how a lower bound in the values of \bar{a} would be modified, for different values of Q_* , after a timescale of $T = 8$ Gyr. Results are shown in Fig. 6 for three values of the stellar tidal parameter. Each gray curve shows the function

$$\bar{a} = \left(\bar{a}_0^{13/2} - \beta T \right)^{2/13} \quad \text{with } T = 8 \text{ Gyr} \quad (6)$$

for different values of \bar{a}_0 . For comparison, each plot also reproduces the present distribution of close-in exoplanets.

The present-day lower limit to the normalized semimajor axis shows a very good agreement assuming $\bar{a}_0 \approx 0.035$ and

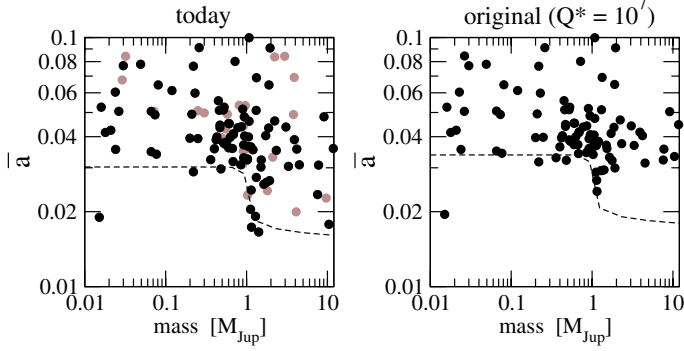


Fig. 7. *Left:* current-day distribution of exoplanets in the $\bar{a} - m$ diagram. Black circles show planets for which values of M_* , R_* and stellar ages T_* are available. Gray circles show those bodies for which stellar data is missing. *Right:* reconstructed original distribution assuming backward orbital evolution from stellar tides for the age of each parent star. In both plots, the dashed curves show the lower limit to normalized semimajor axis, as a function of the planetary mass, obtained from the hydrodynamical simulations and scaled along the y -axis to fit the exoplanets.

a tidal evolution with $Q'_* = 10^7$, represented by a bold dashed curve in the top graph. This value of the normalized semimajor axis corresponds to original orbital periods of $P \sim 2.5$ days for solar-type stars. We note that the other plots, corresponding to smaller values of Q'_* do not show good correspondence for any adopted value of \bar{a}_0 . This result appears to indicate that smaller values of Q'_* and consequently faster orbital decays due to stellar tides, are inconsistent with the current population of close-in exoplanets.

Although the timescale ($T = 8$ Gyr) chosen for Fig. 6 may seem arbitrary, Eqs. (4) and (5) show that the most relevant parameter for the orbital evolution is actually the ratio T/Q'_* . Since the uncertainty in the tidal parameter is much larger than in the age of the system, it seems justified to use a single fixed value of T and to assume that no qualitative differences would be observed for other stellar ages.

As a final test, we can attempt to reconstruct the original mass/semimajor-axis distribution of the exoplanet population, integrating each current value of \bar{a} backwards in time using Eq. (6), adopting in this case the value of T equal to the age of each parent star T_* . To perform this calculation, we require in addition to the stellar mass M_* and radius R_* , estimates of each stellar age T_* . However, this information is not available for all planetary systems. Out of the 133 original planets from our data set in direct orbits (i.e. eliminating the bodies believed to be in retrograde motion), we were only able to obtain a full set of stellar parameters for 94 exoplanets. Stellar data were obtained from the Simbad database for stellar properties and from Jackson et al. (2009).

The present-day $\bar{a} - m$ distribution for this reduced population is shown as black circles in the left-hand plot of Fig. 7. For comparison, gray circles show those planets for which complete stellar data is currently unavailable. The location of the lower bound to the semimajor axis deduced from the hydrosimulations is shown as a bold dashed curve. Unfortunately, many systems with giant planets with $\bar{a} < 0.025$ do not have complete stellar properties, and the bump in the distribution is not clearly visible for the smaller population.

The right-hand side plot of Fig. 7 shows the “original” location of the smaller population after the backwards integration for each stellar age. For comparison, the inner-cavity-induced lower limit is again shown as a bold dashed curve, although the scaling

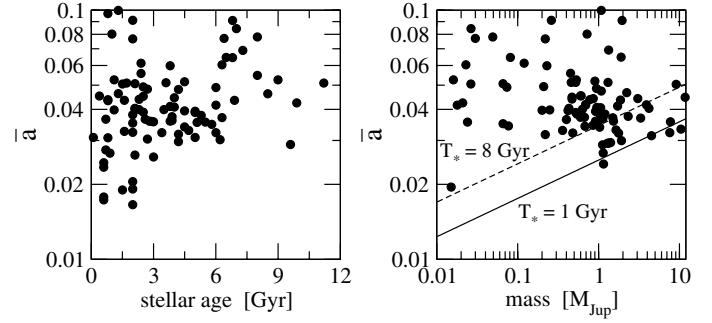


Fig. 8. *Left:* current values of the normalized semimajor axis \bar{a} for close-in exoplanets as a function of the stellar age T_* . Notice that bodies with $\bar{a} < 0.03$ are limited to young systems ($T_* < 3$ Gyr), while larger semimajor axes are found for all stellar ages. *Right:* original distribution in the $m - \bar{a}$ diagram. Diagonal curves give limits to the orbital decay leading to disruption for two stellar ages: the continuous line show results for $T_* = 1$ Gyr, while the dashed line corresponds to $T_* = 8$ Gyr.

in the y -axis has been modified to fit the new values of semimajor axis. Although the distribution still shows a good agreement for planetary masses up to $m \sim 1 M_{\text{Jup}}$, most of the higher masses have increased their semimajor axis beyond $\bar{a} \sim 0.03$, and little evidence remains of the bump.

A possible explanation could be that most giant planets with small values of \bar{a} were subsequently lost due to tidal disruption. To check this hypothesis, the left plot of Fig. 8 shows the relation between the current values of the normalized semimajor axis as a function of the stellar age. Although planets with relatively large semimajor axes exist for all values of T_* , it seems very clear that giant planets with $\bar{a} < 0.025$, which are primarily responsible for the bump in the distribution, belong to young systems with a maximum stellar age of $T_* \approx 3$ Gyr.

From Eq. (3), it is possible to estimate, for each planetary mass, the critical value of the normalized semimajor axis (i.e. \bar{a}_0^*) that falls towards the star of a given stellar age T_* . This is given approximately by

$$\bar{a}_0^* = (\beta T_*)^{2/13}, \quad (7)$$

which is simply obtained by setting the final semimajor axis to be equal to zero. Although the planet is believed to disrupt upon reaching the Roche radius and, thus, before impacting the star itself, as shown by Jackson et al. (2009) the orbital decay at such small semimajor axes is so swift that the timescales for both scenarios are practically equal.

The right-hand plot of Fig. 8 once again reproduces the “original” distribution of exoplanets in the $m - \bar{a}$ diagram shown before in Fig. 7. The diagonal lines show the values of \bar{a}_0^* , as a function of the planetary mass, for two stellar ages: $T_* = 1$ Gyr (continuous line) and $T_* = 8$ Gyr (dashed line). It is clear that even if giant planets were deposited by a hypothetical disk inner cavity at small values of the semimajor axis ($\bar{a} < 0.025$), they would be rapidly absorbed by the parent star because of tidal effects, even for planetary systems as young as 1 Gyr. Thus, it is not unexpected that if any original bump in the distribution were created by disk-planet interactions, subsequent tidal effects would have eliminated most traces.

4. CoRoT-7b

CoRoT-7 appears to be a special case. As seen from the lower plot of Fig. 4, its low mass and short orbital period mean that it is well separated from the $m - \bar{a}$ distribution observed for other

close-in exoplanets. We recall that this planet orbits a solar-type star of mass $M_* \simeq 0.93 M_\odot$.

Jackson et al. (2009) proposed that these planetary bodies should be undergoing significant tidal evolution and orbital decay. Most bodies in this mass range would then be absorbed by the star on timescales shorter than the age of the star. According to this idea, CoRoT-7b owes its present existence solely to its star being relatively young (~ 1.5 Gyr).

However, numerical simulations of the tidal evolution of the CoRoT-7 planetary system (Ferraz-Mello et al. 2010) indicate that the current eccentricities should be extremely low ($e \ll 10^{-3}$), and that any primordial departure from circular motion would have been rapidly damped before any significant orbital decay occurred. Thus, tidal evolution would have been given primarily by stellar tides alone. In this case, the original location of CoRoT-7b in the primordial $m - \bar{a}$ distribution should be given by the right-hand plots of Figs. 7 and 8; once again this planet appears to be detached from the remaining close-in planetary population.

Since CoRoT7 harbors at least one additional planet, it is possible that mutual dynamical interactions might also explain this planet's proximity to the star. In multiple-planet systems, scattering is believed to have played an important role in sculpting the general exoplanet distribution, and the same phenomena may have occurred in this system. According to this idea, CoRoT7-b could have had a close encounter with CoRoT7-c (or with an additional ejected planet) and suffered a significant reduction in its semimajor axis. Subsequent tidal interactions would have circularized its orbit to its present state. However, CoRoT7 is not the only multiple-planet system in this region. Both the Gl581 and HD40307 planetary systems have two known super-Earths with short orbital periods that nevertheless lie above the expected lower limit. Hence once again CoRoT7 seems to be different.

A possible explanation may lie elsewhere. Valencia et al. (2010) and Jackson et al. (2010) proposed that CoRoT-7b could be the solid core of a primordial giant planet whose gaseous envelope was lost due to evaporation. A recent re-evaluation of the radial velocity data by several authors indicate that the mass of CoRoT-7b could be as high as $9 M_\oplus$ (Ferraz-Mello et al. 2010) or as low as $2 M_\oplus$ (Pont et al. 2011). Although a high current mass appears indicative of a rocky/iron composition and that the original mass was at most twice the present value (Valencia et al. 2010), a lower mass is consistent with a lighter composition and an envelope-depleted gas giant.

If CoRoT-7b were indeed the solid core of a primordial gas giant, then its location in the $m - \bar{a}$ diagram (right-hand plot of Fig. 7) would be located close to the dashed curve and, thus, consistent with the rest of the planetary population. We still need of course to explain how this planet suffered an evaporation of its gaseous envelope on timescales shorter than one Gyr, and why it appears to be the only example of this effect.

5. Conclusions

We have attempted to understand the dynamical origin and evolution of the mass-period distribution of close-in exoplanets. The present-day population shows a distinctive discontinuity located at approximately one Jovian mass. Smaller planets have orbital periods longer than $P \sim 2.5$ days, while higher masses are found to have periods as short as $P \sim 1$ day.

We have found that the combined effects of tidal evolution and disk-planet interactions with an inner cavity (IC) in the gaseous disk can explain most of the observed characteristics.

The current distribution appears to be compatible with an inner disk edge located approximately at distances of $\bar{a} \simeq 0.035$, which for solar-type stars corresponds roughly to orbital periods of $P \simeq 2.5$ days. This value is consistent with the inner gas radii for T Tauri stars as estimated from CO spectroscopy (Najita et al. 2007; Carr 2007).

Planets below a certain critical mass $m_c \sim M_{\text{Jup}}$ are trapped just outside the IC as found by Masset et al. (2006). The location of the stationary solution with respect to the IC is practically mass-independent. In contrast, bodies with $m > m_c$ enter a regime characterized by a type II migration that causes significant perturbations to the density profile of the disk; consequently the IC edge cannot generate a significant positive corotational torque and does not stop the orbital decay. As predicted by Kuchner & Lecar (2002), migration only brakes inside the inner edge at a 2/1 mean-motion resonance with the cavity edge.

For reasonable values of the disk viscosity, we expect a gap opening to occur when the height of the disk is approximately equal to the Hill radius of the planet. For a scale height equal to $H/r \simeq 0.05$, this implies a minimum mass of $m \simeq 0.4 M_{\text{Jup}}$, a value similar to our critical mass m_c . Adopting a value of one Jovian mass for the critical mass leads to a slightly larger value of $H/r \simeq 0.07$. However, given the uncertainties involved in both the gap opening criteria and its dependence on the viscosity, the values may be considered to be virtually equivalent. Thus, the location of the bump in the observed distribution of close-in planets appears to be consistent with a mass threshold for gap opening (Crida et al. 2006, and references therein). Although the present data are sparse and plagued by the additional effects described in this work, we may expect that the aforementioned results will be confirmed by further detections. In contrast, when the statistics become sufficiently robust, the location of this bump may be used to place constraints on the physical properties of the inner disk, in terms of both temperature and effective viscosity, as these quantities feature in the gap opening criterion.

Since the edge of the IC created in our simulations is placed at an arbitrary distance from the star, we have a certain degree of freedom when fitting the numerical mass-period distribution to the real planets (as seen in Fig. 4). We have adopted a vertical displacement that minimizes the number of exoplanet inside the cavity edge, but this is not the only option. It may be argued that it would be better to fit the synthetic curve with the location of sub-giants (i.e. $m \sim 0.5 M_{\text{Jup}}$) in the $m - P$ diagram. We note that these bodies exhibit a smaller dispersion in orbital period than observed for any other mass range, and can be seen as a compact group in both plots of Fig. 4. However, this displacement would lead to our accepting a larger number of small planets inside the cavity edge, bodies whose subsequent tidal evolution should have been very small.

Whatever the choice, the qualitative results are not affected. Moreover, the ratio of the stopping values of P (for small and large bodies) is scale-independent, and found to be slightly larger than 2. This is because although higher masses are stopped in a 2/1 MMR with the IC, the small bodies are trapped outside the disk edge. Once again, the distribution of real planets seems to yield a similar ratio.

The subsequent tidal evolution of the close-in planets is consistent with a stellar tidal parameter of $Q'_* = 10^7$, a value similar to that predicted by Schlafman et al. (2010) from synthetic population models. Smaller parameters, leading to higher rates of orbital decay, do not lead to distributions similar to the observed population. This is also consistent with the analysis of Ogilvie & Lin (2007). A consequence of the tidal evolution is

the removal of most of the original gas giants with short orbital periods and their substitution by exoplanets that were originally farther away. Thus, we expect that many of the primordial planets with $P < 2$ days and $m > 1 M_{\text{Jup}}$ might have been tidally disrupted and absorbed by their parent stars.

Although this scenario is consistent with the properties of most of the exoplanetary population, it appears difficult to explain the present-day mass and orbit of CoRoT-7b. A possible explanation is to assume that the planet started its life as a gas giant whose gas envelope was completely evaporated (Valencia et al. 2010; Jackson et al. 2010).

Last of all, in the present scenario we have neglected the role of the orbital inclinations; however, the same results should be expected as long as the inclinations are not very large. Three-dimensional studies of disk-planet interactions in the linear approximation (e.g. Tanaka & Ward 2004), as well as numerical simulations (e.g. Cresswell et al. 2007), show little effect on a finite inclination on the migration timescale. Similar results are also found for orbital evolution due to tidal effects (e.g. Ferraz-Mello et al. 2008; Barker & Ogilvie 2009). For planets in retrograde orbits results are, however, more difficult to evaluate. It is unclear whether gas disks in retrograde motion (with respect to the stellar spin) would have inner cavities or how such a structure would interact with planets in its vicinity. Similarly, the tidal evolution of bodies in retrograde motion is poorly understood, thus it is impossible at present to ascertain how the results of this work could be extended to these systems.

Acknowledgements. This work has been partially supported by the Argentinian Research Council -CONICET-. F.M. and C.B. would like to acknowledge the invitation to participate in the XII Brazilian Colloquium of Orbital Dynamics, where the original idea for this work was discussed. A substantial part of the work was developed during the program “Dynamics of Disks and Planets”, held from August 15 to December 12, 2009 at the Newton’s Institute of Mathematical Science at the University of Cambridge (UK). C.B. would like to thank the organizers of the program and to fruitful discussions with all the participating researchers. Most of the numerical simulations performed in this work have been run on a 140 core cluster funded by the program *Origine des Planètes et de la Vie (OPV)* of the French *Institut National des Sciences de l’Univers (INSU)*.

References

- Anderson, D. R., Hellier, C., Gillon, M., et al. 2010, *ApJ*, 709, 159
 Barker, A. J., & Ogilvie, G. I. 2009, *MNRAS*, 395, 2268
 Cameron Collier, A., Guenther, E., Smalley, et al. 2010, *MNRAS*, 407, 507
 Carr, J. S. 2007, in *Star-Disk Interactions in Young Stars*, ed. J. Bouwier, & I. Appenzeller, *IAU Symp.*, 243
 Cresswell, P., Dirksen, G., Kley, W., et al. 2007, *A&A*, 473, 329
 Crida, A., Morbidelli, A., & Masset, F. 2006, *Icarus*, 181, 587
 Davis, T. A., & Wheatly, P. J. 2009, *MNRAS*, 396, 1012
 Ferraz-Mello, S., Rodriguez, A., & Hussmann, H. 2008, *CeMDA*, 101, 171
 Ferraz-Mello, S., Tadeu dos Santos, M., Beaugé, C., et al. 2010, *A&A*, submitted
 Jackson, B., Barnes, B., & Greenberg, R. 2009, *ApJ*, 698, 1357
 Jackson, B., Miller, N., Barnes, R., et al. 2010, *MNRAS*, 407, 910
 Kuchner, M. J., & Lecar, M. 2002, *ApJ*, 574, L87
 Lai, D., Foucart, F., & Lin, D. N. C. 2011, *MNRAS*, submitted
 Lin, D. N. C., Bodenheimer, P., & Richardson, D. C. 1996, *Nature*, 380, 606
 Masset, F. S. 2000a, *A&ASS*, 141, 165
 Masset, F. S. 2000b, in *Disks, Planetesimals, and Planets*, ed. G. Garzón, C. Eiroa, D. de Winter, & T. J. Mahoney, *ASP Conf. Ser.*, 219, 75
 Masset, F. S., Morbidelli, A., Crida, A., et al. 2006, *MNRAS*, 642, 478
 Mazeh, T., Zuckel, S., & Pont, F. 2005, *MNRAS*, 356, 955
 Nagasawa, M., Ida, S., & Bessho, T. 2008, *ApJ*, 678, 498
 Najita, J. R., Carr, J. S., Glassgold, A. E., et al. 2007, in *Protostars and Planets V*, ed. B. Reipurth, D. Jewitt, & K. Keil (Tucson: University of Arizona), 507
 Ogilvie, G. I., & Lin, D. N. C. 2007, *ApJ*, 661, 1180
 Queloz, D., Bouchy, F., Moutou, et al. 2009, *A&A*, 506, 303
 Queloz, D., Anderson, D., Collier Cameron, A., et al. 2010, *A&A*, 517, L1
 Pont, F., Aigrain, S., & Zucker, S. 2011, *MNRAS*, submitted
 Rice, W. K. M., Armitage, P. J., & Hogg, D. F. 2008, *MNRAS*, 384, 1242
 Rouan, D., Leger A., & Schneider J. 2009, In: *CoRoT International Symposium I*
 Schlaufman, K. C., Lin, D. N. C., & Ida, S. 2010, *ApJ*, 724, L53
 Shakura, N. I., & Sunyaev, R. A. 1973, *A&A*, 24, 337
 Shu, F. H., Najita, J. R., Shang, H., et al. 2000, in *Protostars and Planets IV*, ed. V. Mannings, A. P. Boss, & S. S. Russell (Tucson: Univ. Arizona Press), 789
 Southworth, J., Wheatly, P. J., & Sams, G. 2007, *MNRAS*, 379, L11
 Starczewski, S., Gawryszczak, A. J., Wunsch, R., et al. 2007, *Acta Astron.*, 57, 123
 Tanaka, H., & Ward, W.R. 2004, *ApJ*, 602, 388
 Triaud, A. H. M. J., Collier Cameron, A., Queloz, D., et al. 2010, *A&A*, 524, A25
 Valencia, D., Ikoma, M., Guillot, T., et al. 2010, *A&A*, 516, A20
 Vidal-Madjar, A., Lecavelier des Etangs, A., Désert, J.-M., et al. 2003, *Nature*, 422, 143
 Winn, J. N., Johnson, J. A., Albrecht, S., et al. 2009, *ApJ*, 703, L99

