

Superficies maximales con momento lineal en Schwarzschild

Ivan Gentile de Austria

Facultad de matemática, Astronomía, y Física, FaMAF,
Universidad Nacional de Córdoba,

10 de diciembre de 2010

Calsificación: 04.20.Ex

Palabras Claves: Superficies Maximales Momento Lineal

Resumen

Las superficies maximales son muy importantes a la hora de resolver las ecuaciones de vínculo de Einstein. Estas superficies facilitan la evolución de los datos iniciales mediante los métodos numéricos más utilizados. Con este tipo de superficies se puede generar un espacio-tiempo para describir una colisión entre agujeros negros.

En este trabajo se demuestra la existencia de una superficie maximal con momento lineal no nulo para el espacio-tiempo de Schwarzschild.

Capítulo 1

Introducción

Uno de los problemas actuales en relatividad general es la colisión de agujeros negros, la importancia de tal fenómeno radica en que se espera que esto produzca una emisión de radiación gravitacional medible, por lo tanto un estudio teórico de estas colisiones es fundamental para saber como detectar las ondas gravitacionales con los nuevos detectores (ver [7])

Un método para estudiar estas colisiones es con una formulación de datos iniciales: dado un conjunto apropiado de datos iniciales (Σ, h_{ab}, K_{ab}) para algún instante (por ej. $t = 0$), siendo Σ una superficie de Cauchy, h_{ab} su métrica inducida y K_{ab} la curvatura extrínseca de la misma, podemos obtener a través de la evolución de estos datos dada por la ecuación de Einstein, todo el espacio-tiempo $(M, g_{\mu\nu})$ que es único y depende de forma continua de los datos iniciales, para el cual Σ es una superficie de la variedad M , y h_{ab} su métrica inducida por la métrica $g_{\mu\nu}$.

La ecuación de Einstein en vacío $G_{\mu\nu} = 0$ es un sistema de diez ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden para las diez componentes desconocidas de la métrica. A hora bien, hay componentes de $G_{\mu\nu} = 0$ que para $t = 0$ sólo dependen del conjunto de datos iniciales (Σ, h_{ab}, K_{ab}) , entonces estas ecuaciones proveen un vínculo para los datos iniciales, se puede ver que los datos deben cumplir con las ecuaciones de vínculo en vacío

$$D_b K_a^b - D_a K = 0 \tag{1.1}$$

$$R^{(3)} + K^2 - K_{ab} K^{ab} = 0 \tag{1.2}$$

donde D_a es la derivada covariante asociada con h_{ab} y $R^{(3)}$ es el escalar de curvatura de h_{ab} y K es la curvatura media definida por $K = K_{ab} h^{ab}$.

Para estudiar el espacio-tiempo generado alrededor de una fuente de gravedad como puede ser una estrella, planeta, o agujero negro, nos basamos en la suposición de que el sistema es aislado, es decir que las fuentes de gravedad están en una región limitada del espacio y que el resto del espacio está vacío, en contraposición tenemos los modelos cosmológicos donde se supone por ejemplo que las fuentes están distribuidas de forma homogénea e isotrópica por todo el espacio, dando así la métrica de Robertson-Walker. Entonces en el modelo de sistema aislado se espera que los campos gravitatorios, electromagnéticos, etc., decaigan de modo apropiado cuando nos alejamos mucho de las fuentes, para el caso de la gravedad esto se traduce al hecho de que la métrica de un sistema aislado debe ser asintóticamente plana. Entonces para describir un sistema aislado debemos generar una métrica asintóticamente plana, para que los datos iniciales generen un espacio-tiempo asintóticamente plano ellos mismos deben serlo. Para que un dato inicial sea asintóticamente plano la métrica y la curvatura extrínseca deben tener las siguientes propiedades: las componentes de la métrica difieren de la métrica plana en términos que van como $O(\frac{1}{r})$ cuando $r \rightarrow \infty$ y sus primeras derivadas como $O(\frac{1}{r^2})$ y las componentes de la curvatura extrínseca son de orden $O(\frac{1}{r^2})$.

Podemos formalizar la anterior definición de sistema aislado y datos asintóticamente planos, del siguiente modo:[9] un dato inicial (Σ, h_{ab}, K_{ab}) , es asintóticamente plano con N infinitos, si para algún conjunto compacto Ω tenemos que $\Sigma \setminus \Omega = \sum_{k=1}^N \Sigma_k$, donde Σ_k son conjuntos abiertos tal que cada Σ_k puede mapearse con un sistema de coordenadas x^j difeomórficamente al complemento de una bola cerrada en R^3 , tal que en estas coordenadas tenemos

$$h_{ab} = (1 + \frac{2M}{r})\delta_{ab} + O(r^{-2}) \quad (1.3)$$

$$K_{ab} = O(r^{-2}) \quad (1.4)$$

cuando $r = \sqrt{\sum_{j=1}^3 (x^j)^2} \rightarrow \infty$ en cada set Σ_k , M es la masa del dato.

El Ω es el conjunto en donde se encuentran las fuentes y el $\Sigma \setminus \Omega$ es la región sin fuentes, la cual por (1.3) y (1.4) se hace menos curvada cuanto más nos alejamos de la región Ω , vemos así que la definición coincide con la descripción dada de sistema aislado y datos asintóticamente planos.

Si hay n infinitos entonces hay al menos $N - 1$ horizontes, lo que indica que hay $N - 1$ agujeros negros, por ejemplo en la extensión de Kruskal para la métrica de Schwarzschild tenemos $N = 2$.

Con datos asintóticamente planos podemos definir la energía y el momento

lineal para una superficie espacial del espacio-tiempo que ellos generan

$$E = \frac{1}{16\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\partial B_r} \left(\frac{\partial h_{ab}}{\partial x^a} - \frac{\partial h_{aa}}{\partial x^b} \right) N^b dA \quad (1.5)$$

$$p_a = \frac{1}{8\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\partial B_r} (K_{ab} N^b - K N_a) dA \quad (1.6)$$

donde N es la normal a la 2-superficie B_r que limita a Σ , y dA es su diferencial de superficie.

Un ejemplo, con dos infinitos $N = 2$, de solución de las ecuaciones de vínculo es el dato $K_{ab} = 0$ y $h_{ab} = \left(1 + \frac{M}{2r}\right)^4 \delta_{ab}$, δ_{ab} es la métrica plana, vemos que estos datos son asintóticamente planos con dos infinitos, de hecho estos datos generan la solución de Schwarzschild la cual representa un espacio-tiempo con un solo agujero negro aislado, otra solución de las ecuaciones de vínculo (más interesante para nuestro objetivo) es la de D. Brill y R. W. Lindquist [6] $K_{ab} = 0$ y $h_{ab} = \left(1 + \frac{M_1}{2r_1} + \frac{M_2}{2r_2}\right)^4 \delta_{ab}$, estos datos son asintóticamente planos con tres infinitos, los cuales generan un espacio-tiempo con dos agujeros negros de Schwarzschild. Como puede verse de la métrica inducida, esta solución es una superposición lineal de dos soluciones de Schwarzschild, donde M_1 , r_1 y M_2 , r_2 son la masa y la coordenada radial de cada uno. Si la distancia entre ellos es lo suficientemente grande, de modo tal que los datos se asemejan a dos Schwarzschild aislados entre si, tenemos lo que se conoce como condición de límite lejano [10]. Notemos que para D. Brill y R. W. Lindquist se cumple la condición de límite lejano, cuando $r_1 \rightarrow \infty$ la métrica queda con un solo agujero de masa M_2 y cuando $r_2 \rightarrow \infty$ la métrica queda con un solo agujero de masa M_1 , entonces poniendo los agujeros bien lejos uno del otro, vemos que se cumple la condición deseada, lo cual indica que inicialmente los agujeros están aislados uno del otro.

En estos dos ejemplos los datos iniciales no tienen momento lineal ($p = 0$), como puede verse de la definición del momento (ecuación (1.4)) ya que para ambos $K_{ab} = 0$, entonces la solución de Schwarzschild nos da un agujero negro que permanece en reposo, en cambio la solución de D. Brill y R. W. Lindquist nos da dos agujeros negros inicialmente en reposo, que luego se acercan el uno hacia el otro debido a su mutua atracción gravitacional hasta colisionar. Este tipo de colisión no es muy realista, ya que es de esperar que los agujeros negros no colisionen en línea recta, sino que formen un sistema de rotación alrededor de su centro de masa acercándose hasta colisionar, para modelar esto es necesario que los agujeros posean un momento lineal en el momento inicial, de este modo podemos

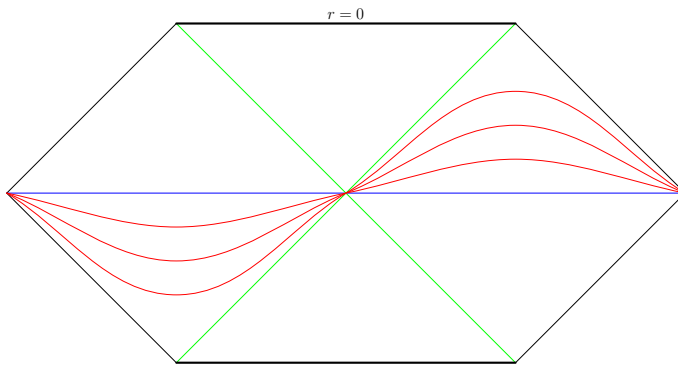


Figura 1.1: Superficies maximales en Schwarzschild, estas son las superficies a $t = ct$ las cuales pasan por la 2-esfera de bifurcación

dar un parámetro de impacto inicialmente entre ellos y así esperaríamos que el sistema evolucione del modo que queremos.

Entonces lo que se trata de hacer es superponer dos soluciones de Schwarzschild con momento lineal inicial no nulo ($p \neq 0$), pero para esto es necesario encontrar datos iniciales adecuados, que es lo que hicimos en este trabajo.

Otra propiedad que podemos ver de los ejemplos anteriores es que en ambos $K = 0$, a una superficie con esta propiedad se la llama maximal, estas superficies son importantes a la hora de resolver las ecuaciones de vínculo, ya que con $K = 0$ las ecuaciones (1.1) y (1.2) se desacoplan lo cual facilita su resolución, además, también simplifica los métodos numéricos con que se estudia la evolución de los datos iniciales, otra propiedad de estas superficies, como puede verse en [4], es que evitan la singularidad en $r = 0$, en las figuras 1 y 2 puede verse que las superficies nunca cruzan el límite $r = \frac{3M}{2}$, como se aclara en [4], esta propiedad es por lo que muchos métodos numéricos para la evolución se basan en datos iniciales sobre superficies maximales. Debido a la importancia de las superficies maximales, el problema que vamos a resolver es:

Encontrar una superficie maximal con momento lineal para Schwarzschild.

Este es el tipo de dato inicial que esperamos que pueda ser útil para la superposición de dos agujeros negros de Schwarzschild con momento lineal inicial no nulo.

J. M. Bowen y J. W. York [5] dieron un dato inicial para un agujero negro con momento lineal no nulo sobre una superficie maximal, pero estos datos no evolucionan hacia Schwarzschild, ya que, como ellos mismos explican la evolución genera radiación gravitacional, lo cual no ocurre en Schwarzschild, un cálculo

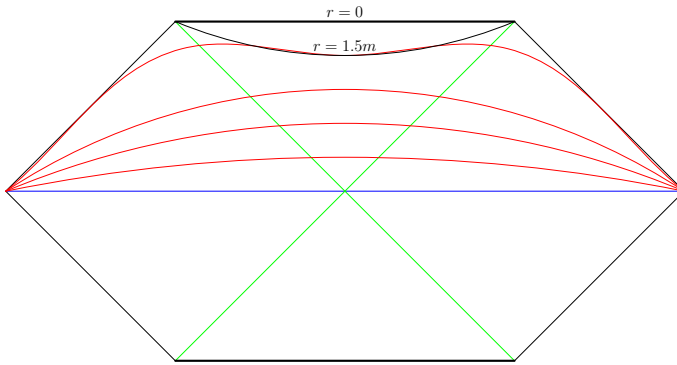


Figura 1.2: Superficies maximales en Schwarzschild, estas no son a $t = cte$ y cruzan el horizonte pero no por la 2-esfera, vemos que estas tampoco cruzan el límite $r = \frac{3M}{2}$

perturbativo de esta radiación puede verse en [13].

La forma en que resolveremos nuestro problema, no es tratar de resolver las ecuaciones de vínculo, sino en darle un momento lineal a la métrica de Schwarzschild mediante un boost y en estas nuevas coordenadas encontrar una superficie maximal, de este modo obtenemos datos iniciales (Σ, h_{ab}, K_{ab}) solución de las ecuaciones de vínculo tales que $K = 0$ y $p \neq 0$, y por supuesto su evolución nos devuelve Schwarzschild.

Para más información sobre la formulación de valores iniciales en relatividad general puede verse [21], [19]. Con respecto a las superficies maximales y sus propiedades son interesantes los artículos [15] y [2]. En los trabajos [3] y [16] se describen métodos para resolver las ecuaciones de vínculo. En el trabajo [8] se puede ver una descripción de distintas soluciones de las ecuaciones de vínculo.

Capítulo 2

Método y Resultados Principales

La métrica de Schwarzschild no posee momento lineal que es lo que nosotros queremos, para darle un momento lineal (basandonos en el trabajo [22]) hemos tomado la métrica de Schwarzschild en coordenadas isotrópicas y aplicamos un boost en la dirección z

$$t = \gamma^{-1}(\hat{t} + v\hat{z}) \quad (2.1)$$

$$z = \gamma^{-1}(v\hat{t} + \hat{z}) \quad (2.2)$$

$$x = \hat{x} \quad (2.3)$$

$$y = \hat{y} \quad (2.4)$$

donde

$$\gamma = \sqrt{1 - v^2} \quad (2.5)$$

como es de esperar una superficie espacial

$$\Phi_1(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \hat{t} = cte \quad (2.6)$$

tiene momento lineal no nulo que es lo que queremos, pero para esta superficie $K \neq 0$, es decir que $\hat{t} = cte$ no es una superficie maximal, entonces modificaremos un poco la superficie con una función σ suficientemente pequeña tal que la superficie siga siendo espacial y no modifique el momento lineal ni la energía de la superficie original, es decir que σ es considerada como una perturbación de la superficie $\hat{t} = cte$, con esta nueva función la superficie es

$$\Phi_2(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \hat{t} + \sigma(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, v) = cte \quad (2.7)$$

entonces pediremos que esta superficie tenga $K = 0$, lo cual nos da una ecuación para σ

$$\begin{aligned}
0 &= 2\nabla^a \partial_a \sigma (g^{\hat{t}\hat{t}} + \partial^b \sigma \partial_b \sigma) \\
&- \hat{\partial}^{\hat{t}} (g^{\hat{t}\hat{t}} + \partial^b \sigma \partial_b \sigma) \\
&- \partial_a \sigma \partial^a (g^{\hat{t}\hat{t}} + \partial^b \sigma \partial_b \sigma)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

que se obtiene de la ecuación para superficies maximales

$$K = \nabla^\alpha \left(\frac{\partial_\alpha \Phi_2}{\sqrt{\partial^\beta \Phi_2 \partial_\beta \Phi_2}} \right) = 0 \tag{2.9}$$

esta es una ecuación elíptica no lineal de segundo orden en derivadas parciales para $\sigma(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, v)$, visiblemente complicada.

Entonces demostrando que existe una σ solución de $K = 0$ estaríamos demostrando la existencia de una superficie maximal con momento lineal en Schwarzschild, ¿por qué no resolverla? simplemente porque no sabemos hacerlo, ya que la ecuación $K = 0$ es de segundo orden y no lineal, para la cual no conocemos un método de resolución que nos de la expresión explícita de $\sigma(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, v)$, pero si podemos demostrar que existe tal solución utilizando el teorema de la función implícita, el cual, si bien, nos asegura la existencia de una única solución, nos limita imponiendo la condición de que v debe estar en un entorno de cero lo suficientemente chico para asegurar que exista solución, cuan chico no lo sabemos ya que el teorema no lo estima, y no conocemos ningún teorema que lo haga ni tampoco conocemos otra forma de demostrar existencia de solución para la ecuación.

Además la ecuación diverge cuando $r = \frac{M}{2}$ debido a esto nos limitaremos a la región exterior de Schwarzschild, es decir $r > \frac{M}{2}$, por simplicidad primero nos limitaremos a un dominio acotado, es decir $r < \infty$, luego nos extenderemos al dominio no acotado en el cual hay que utilizar la teoría de operadores elípticos en espacios de Sobolev con peso que es más sutil que los métodos utilizados para el dominio acotado, entonces dividimos los dos casos del siguiente modo:

1. Caso 1: Dominio acotado.
2. Caso 2: Dominio no acotado.

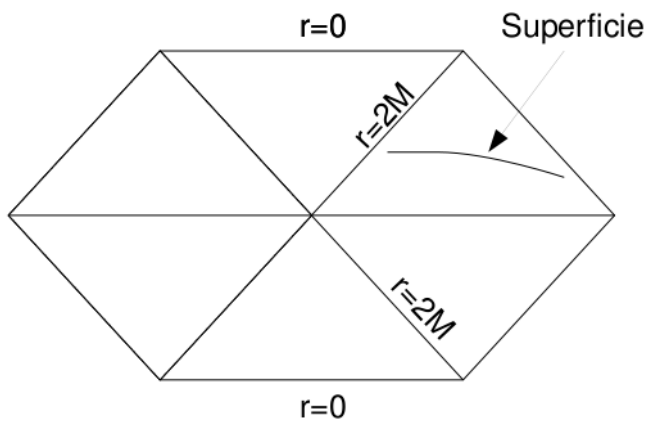


Figura 2.1: Dominio acotado: la superficie no cruza el horizonte, y vemos que tampoco se extiende hasta $r = \infty$

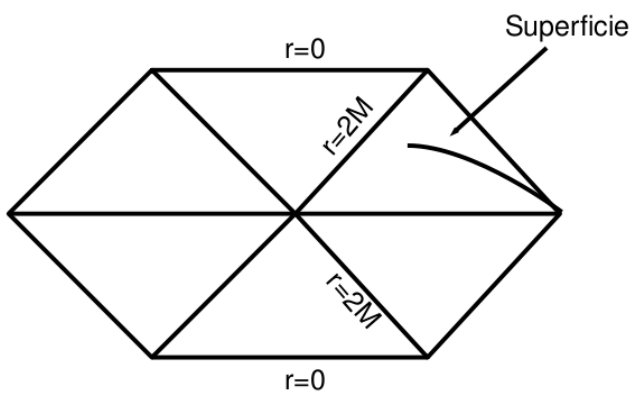


Figura 2.2: Dominio no acotado: esta superficie tampoco cruza el horizonte, pero sí se extiende hasta $r = \infty$

El resultado obtenido para el caso 1 es el siguiente

Teorema 1:

Existe una superficie espacial con $K = 0$, h_{ab} asintóticamente plana y p_μ suficientemente chico pero no nulo, en Schwarzschild, en el dominio acotado $U = (R^3 : \frac{M}{2} < R_1 < r < R_2 < \infty)$.

El resultado obtenido para el caso 2 es el siguiente

Teorema 2:

Existe una superficie espacial con $K = 0$, h_{ab} asintóticamente plana y p_μ suficientemente chico pero no nulo, en Schwarzschild, en el dominio no acotado $U = (R^3 : \frac{M}{2} < R_1 < r)$.

Entonces la prueba de estos teoremas será dada en dos partes la primera titulada "Boost, Energía, Masa y momento", que es común a ambos, en donde se obtiene una superficie con momento lineal. La segunda titulada "Haciendo maximal a la Superficie.^{en} donde se obtiene la ecuación $K = 0$ para σ a resolver, a partir de aqui el análisis se divide en dos subsecciones llamadas "dominio acotado" "dominio no acotado", en donde se demuestra la existencia de solución para la ecuación en ambos, completando así la demostración de los respectivos teoremas.

Luego en el capítulo 4 demostramos que las superficies

$$\Phi_1(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \hat{t} = cte \quad (2.10)$$

y

$$\Phi_2(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \hat{t} + \sigma(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, v) = cte \quad (2.11)$$

tienen la misma energía y momento lineal si pedimos que $\sigma(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, v) \rightarrow O(r^{-1})$ para $r \rightarrow \infty$.

Entonces a partir de la métrica de Schwarzschild, mediante la aplicación de un boost a la misma, pudimos obtener un conjunto (Φ_2, h_{ab}, K_{ab}) de datos iniciales, con las condiciones requeridas descritas en la intrducción ($p \neq 0, K = 0$) que sirven para describir un agujero negro de Schwarzschild con momento lineal. Hay que remarcar que este momento debe estar en un entorno de cero ya que, como veremos

$$p = (0, 0, vM\gamma^{-1}) \quad (2.12)$$

y el teorema de la función implícita nos dice que v debe estar en un entorno de cero, pero no nos proporciona una estimación para dicho entorno, pero aún así, por más pequeño que sea sabemos que existe el conjunto maximal y asintóticamente plano (Φ_2, h_{ab}, K_{ab}) con $p \neq 0$, cuya evolución nos da Schwarzschild.

El hecho de que no este incluido el horizonte en ninguno de los dos teoremas, es debido a que la ecuación $K = 0$ para σ , diverge en el horizonte, esta es una

dificultad que no pudimos resolver, de todos modos el horizonte no es una singularidad real es un problema de las coordenadas, podemos ver la regularidad de la métrica en el horizonte con las coordenadas de Kruskal

$$ds^2 = \frac{32M^3 e^{-\frac{r}{2M}}}{r} (-dT^2 + dR^2)^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.13)$$

siendo

$$\left(\frac{r}{2M} - 1\right)e^{\frac{r}{2M}} = R^2 - T^2 \quad (2.14)$$

$$\frac{t}{2M} = 2 \tanh^{-1}\left(\frac{T}{R}\right) \quad (2.15)$$

pero en estas coordenadas no sabemos como calcular el momento ya que para $r \rightarrow \infty$ la métrica diverge, además tampoco es trivial como encontrar coordenadas isotrópicas para definir de un modo mas fácil el boost.

Así se nos presenta una dualidad entre coordenadas regulares en el horizonte en las que no podemos calcular el momento, y coordenadas en las que podemos calcular el momento pero que no son regulares en el horizonte con lo cual no podemos resolver $K = 0$ incluyendo el horizonte.

En el futuro esperamos encontrar un sistema de coordenadas que resuelva estos dos problemas a la vez, o encontrar algún modo de estudiar la divergencia de $K = 0$ en el horizonte y encontrar una solución.

En los libros [18] [20] [12] [11] se describe la matemática utilizada para el caso 1. En los artículos [1] [14] [17] se dan los conceptos matemáticos necesarios para el caso 2.

Capítulo 3

Prueba de los Teoremas 1 y 2

3.1. Boost, Energía, Masa y Momento

Aquí veremos como encontrar una superficie con momento lineal no nulo, entonces tomamos la métrica de Schwarzschild en coordenadas isotrópicas.

$$ds^2 = -N_0^2 dt^2 + \psi^4(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (3.1)$$

donde

$$N_0 = \frac{1 - \frac{M}{2r}}{1 + \frac{M}{2r}}; \psi = 1 + \frac{M}{2r} \quad (3.2)$$

siendo

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (3.3)$$

que se obtiene de la métrica de Schwarzschild en coordenadas esféricas

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{\bar{r}}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{\bar{r}}\right)^{-1} d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2 \quad (3.4)$$

mediante la transformación de coordenadas

$$\bar{r} = r\left(1 + \frac{M}{2r}\right)^2 \quad (3.5)$$

Si tomamos una superficie a $t = cte$, tal superficie tiene momento lineal nulo, entonces inspirados en el boost de Lorentz, realizamos la transformación de coordenadas.

$$t = \gamma^{-1}(\hat{t} + v\hat{z}) \quad (3.6)$$

$$z = \gamma^{-1}(vt + \hat{z}) \quad (3.7)$$

$$x = \hat{x} \quad (3.8)$$

$$y = \hat{y} \quad (3.9)$$

donde

$$\gamma = \sqrt{1 - v^2} \quad (3.10)$$

la transformación inversa es

$$\hat{t} = \gamma^{-1}(t - vz) \quad (3.11)$$

$$\hat{z} = \gamma^{-1}(-vt + z) \quad (3.12)$$

$$\hat{x} = x \quad (3.13)$$

$$\hat{y} = y \quad (3.14)$$

Y ahora veremos que la superficie

$$\Phi_1(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \hat{t} = cte \quad (3.15)$$

tiene momento lineal en la dirección \hat{z} , para simplificar cuentas tomamos $\hat{t} = 0$. Entonces la métrica en estas coordenadas es

$$\begin{aligned} ds^2 &= (v^2\psi^4 - N_0^2)\gamma^{-2}(d\hat{t})^2 + 2v\gamma^{-2}(\psi^4 - N_0^2)d\hat{t}d\hat{z} \\ &+ \psi^4((d\hat{x})^2 + (d\hat{y})^2) + \gamma^{-2}(-N_0^2v^2 + \psi^4)(d\hat{z})^2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Para $\hat{t} = cte$ la métrica inducida es

$$dh^2 = \psi^4((d\hat{x})^2 + (d\hat{y})^2) + \gamma^{-2}(-N_0^2v^2 + \psi^4)(d\hat{z})^2 \quad (3.17)$$

Para poder calcular el momento lineal necesitamos que esta métrica sea asintóticamente plana en estas coordenadas, y así es

Como

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(\hat{x})^2 + (\hat{y})^2 + \gamma^{-2}(vt + \hat{z})^2} \quad (3.18)$$

Y además

$$\hat{x} = \hat{r} \sin \theta \cos \phi \quad (3.19)$$

$$\hat{y} = \hat{r} \sin \theta \sin \phi \quad (3.20)$$

$$\hat{z} = \hat{r} \cos \theta \quad (3.21)$$

Vemos que cuando \hat{r} tiende a infinito r también, y para r que tiende a infinito tenemos los desarrollos asintóticos.

$$\psi^4 = 1 + \frac{2M}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) + \dots \quad (3.22)$$

$$N_0^2 = 1 - \frac{2M}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) + \dots \quad (3.23)$$

Remplazando en dh^2 obtenemos.

$$\begin{aligned} dh^2 &= (d\hat{x})^2 + (d\hat{y})^2 + (d\hat{z})^2 \\ &+ \frac{2M}{r} ((d\hat{x})^2 + (d\hat{y})^2 + \gamma^{-2}(v^2 + 1)(d\hat{z})^2) \\ &+ O\left(\frac{1}{r^2}\right) + \dots \end{aligned} \quad (3.24)$$

Por lo tanto es claro que la métrica tiene el desarrollo asintótico deseado.

El momento de Φ_1 se calcula con

$$p_a = \frac{1}{8\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int (K_{ab}N^b - KN_a) dA \quad (3.25)$$

donde

$$N_r = \sqrt{\frac{\psi^4 \gamma^{-2} (-N_0^2 v^2 + \psi^4)}{\psi^4 \cos^2 \theta + \gamma^{-2} (-N_0^2 v^2 + \psi^4) \sin^2 \theta}} \quad (3.26)$$

$$N_\theta = 0 \quad (3.27)$$

$$N_\phi = 0 \quad (3.28)$$

$$dA = \hat{r}^2 \psi^2 \sin \theta \sqrt{\psi^4 \cos^2 \theta + \gamma^{-2} (-N_0^2 v^2 + \psi^4) \sin^2 \theta} d\theta d\phi \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} p_{\hat{x}} &= \frac{1}{8\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int [(K_{\hat{x}\hat{x}}N^{\hat{x}} + K_{\hat{x}\hat{y}}N^{\hat{y}} + K_{\hat{x}\hat{z}}N^{\hat{z}}) - KN_{\hat{x}}] \\ &\times \hat{r}^2 \psi^2 \sin \theta \sqrt{\psi^4 \cos^2 \theta + \gamma^{-2} (-N_0^2 v^2 + \psi^4) \sin^2 \theta} d\theta d\phi \end{aligned} \quad (3.30)$$

donde

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \gamma^{-2} \hat{z}^2} = \hat{r} \sqrt{\sin^2 \theta + \gamma^{-2} \cos^2 \theta} \quad (3.31)$$

$$N_{\hat{x}} = N_r \sin \theta \cos \phi; N_{\hat{y}} = N_r \sin \theta \sin \phi; N_{\hat{z}} = N_r \cos \theta \quad (3.32)$$

$$N^{\hat{x}} = \psi^{-4} N_{\hat{x}}; N^{\hat{y}} = \psi^{-4} N_{\hat{y}}; N^{\hat{z}} = \gamma^2 (-N_0^2 v^2 + \psi^4)^{-1} N_{\hat{z}} \quad (3.33)$$

Reemplazando en p, y como sabemos que

$$\int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi = 0 \quad (3.34)$$

tenemos que $p_{\hat{x}} = 0$, del mismo modo se ve que $p_{\hat{y}} = 0$, solo queda $p_{\hat{z}}$, el cual luego de tomar el límite queda

$$p_{\hat{z}} = \frac{v\gamma^{-2}M}{2} \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{(\sin^2 \theta + \gamma^{-2} \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.35)$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{(\sin^2 \theta + \gamma^{-2} \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} = 2\gamma \quad (3.36)$$

obtenemos finalmente

$$p_{\hat{z}} = vM\gamma^{-1} \quad (3.37)$$

el cálculo de la energía es similar

$$E = \frac{1}{16\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int \left(\frac{\partial h_{ab}}{\partial x^a} - \frac{\partial h_{aa}}{\partial x^b} \right) N^b dA \quad (3.38)$$

desarrollando esta expresión queda

$$E = \frac{1}{16\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int \left[\left(-\frac{\partial h_{\hat{y}\hat{y}}}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial h_{\hat{z}\hat{z}}}{\partial \hat{x}} \right) N^{\hat{x}} + \left(-\frac{\partial h_{\hat{x}\hat{x}}}{\partial \hat{y}} - \frac{\partial h_{\hat{z}\hat{z}}}{\partial \hat{y}} \right) N^{\hat{y}} + \left(-\frac{\partial h_{\hat{x}\hat{x}}}{\partial \hat{z}} - \frac{\partial h_{\hat{y}\hat{y}}}{\partial \hat{z}} \right) N^{\hat{z}} \right] dA \quad (3.39)$$

luego de tomar el límite e integrar en ϕ se obtiene

$$E = \frac{M}{2\gamma^2} \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{(1 - (\gamma^2 - 1) \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.40)$$

finalmente

$$E = M\gamma^{-1} \quad (3.41)$$

En el apéndice A se muestran las componentes del tensor de curvatura extrínseca (K_{ab}).

Y observamos que del momento y la energía, la masa total, resulta igual a la constante M de Schwarzschild.

Por lo tanto obtuvimos una superficie con momento lineal no nulo, pero como puede verse en el apéndice A su curvatura media K no es nula.

$$\begin{aligned}
K &= \frac{M\hat{z}v}{2Nr\gamma^2} \left\{ \frac{(2r+M)^7}{32r^9} [\psi^4 - N_0^2 v^2]^{-1} [\psi^4 - N_0^2] \right. \\
&+ \gamma^{-2} [\psi^4 - N_0^2 v^2] \left\{ 2 \left[\frac{(2r+M)^3}{4r^5} + \frac{8(2r-M)}{(2r+M)^3} \right] \right. \\
&- \left. \left[\frac{(2r+M)^3}{4r^5} - \frac{8(2r-M)v^2}{(2r+M)^3} \right] \right. \\
&\times \left. \left. \left(1 + [\psi^4 - N_0^2 v^2]^{-1} [\psi^4 - N_0^2] \right) \right\} \right\} \quad (3.42)
\end{aligned}$$

3.2. Haciendo Maximal a la Superficie

Ahora veremos como hacer que la curvatura sea nula, para esto modificamos la Φ_1 , con una función σ , para obtener la nueva superficie

$$\Phi_2(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \hat{t} + \sigma(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, v) = cte \quad (3.43)$$

entonces la ecuación de superficie maximal es

$$K = \nabla^\alpha \left(\frac{\partial_\alpha \Phi_2}{\sqrt{\partial^\beta \Phi_2 \partial_\beta \Phi_2}} \right) = 0 \quad (3.44)$$

donde $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$. Reemplazando (3.43) en (3.44) obtenemos la ecuación para σ

$$\begin{aligned}
K &= 2\nabla^a \partial_a \sigma (g^{\hat{t}\hat{t}} + \partial^b \sigma \partial_b \sigma) \\
&- \partial^{\hat{t}} (g^{\hat{t}\hat{t}} + \partial^b \sigma \partial_b \sigma) \\
&- \partial_a \sigma \partial^a (g^{\hat{t}\hat{t}} + \partial^b \sigma \partial_b \sigma) \\
&= 0 \quad (3.45)
\end{aligned}$$

veremos que existe solución probando que se cumplen las hipótesis del teorema de la función implícita

Teorema de la función implícita:[20]

Sea X, Y y Z espacios de Banach, y sea U, V entornos alrededor del origen en X y Y , respectivamente. Sea F una función $F(U, V) \rightarrow Z$, y se cumplen las siguientes hipótesis

1. $F(0, 0) = 0$
2. F es C^1
3. $D_y F|_{(0,0)}$ es un isomorfismo de Y a Z

Entonces existe un entorno W del origen de X y una función C^1 de W a Y tal que $F(x, f(x)) = 0$. Aun más, para x e y en esos entornos, $f(x)$ es la única solución de $F(x, y) = 0$.

Entonces identificamos $F(X, Y)$ con $K(v, \sigma)$.

La primera hipótesis es trivial $K(0, 0) = 0$, que puede verse reemplazando $v = 0$ y $\sigma = 0$ en la ecuación (3.45).

Para la tercera hipótesis necesitamos la linealización de la ecuación, es decir el operador $D_\sigma K|_{(0,0)}$, el cual da

$$D_\sigma K|_{(0,0)} = 2g^{tt}\nabla^a\partial_a\sigma - \partial_a\sigma\partial^a g^{tt} \quad (3.46)$$

Para la segunda y tercera hipótesis debemos separar el análisis en los dos casos descritos en el capítulo 2.

3.2.1. Dominio acotado

Entonces fijaremos nuestra atención en el dominio $U = (R^3 : \frac{M}{2} < R_1 < r < R_2 < \infty)$.

Para ver que $K(v, \sigma)$ es $C^1(U)$ utilizamos el siguiente

Lema 1:[20]

Sea Ω un dominio cerrado de R^n con frontera suave. Además sea f una función C^{m+1} de R^k a R con $m < \frac{n}{2}$. Entonces f , induce un mapa C^1 de $(H^m(\Omega))^k$ a $H^m(\Omega)$.

Si en la ecuación (3.45) reemplazamos las derivadas parciales de σ por variables reales x, y, z tenemos $K(v, \sigma) = K(v, x, y, z)$, y vemos que esta función es $C^{m+1}(U)$ ya que es una función regular en el dominio U . Entonces por el lema 1 tenemos que $K(v, \sigma) : R \times H^m \rightarrow H^m$ es $C^1(U)$.

Para ver que $D_\sigma K|_{(0,0)}$ es un isomorfismo vamos a demostrar que existe solución de la ecuación

$$2g^{\hat{t}\hat{t}}\nabla^a\partial_a\sigma - \partial_a\sigma\partial^a g^{\hat{t}\hat{t}} = f(x, y, z) \quad (3.47)$$

Para toda $f \in L^2(U)$.

Esta es una ecuación lineal y elíptica para σ .

Tomemos primero $f(x, y, z) = 0$ y veamos cual es la solución de la ecuación homogénea en U y $\sigma = 0$ en ∂U . Con el principio del máximo

Principio del máximo:[11]

Sea $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ y $c \equiv 0$ en U conexo, abierto y acotado.

1. (i) si $Lu \leq 0$ en U y u alcanza su máximo en un punto interior de \bar{U} , entonces u es constante en U .
2. (ii) si $Lu \geq 0$ en U y u alcanza su mínimo en un punto interior de \bar{U} , entonces u es constante en U .

concluimos que σ debe ser constante en U , además $\sigma \in C(\bar{U})$ y $\sigma = 0$ en ∂U , entonces $\sigma = 0$ en U . Por lo tanto la ecuación homogénea solo tiene solución trivial, y de la alternativa de Fredholm

Teorema:(Alternativa de Fredholm)[11]

Una de las siguientes afirmaciones es cierta:

1. (i) Para cada $f \in L^2(U)$ existe una única solución débil $u \in H_0^1(u)$ al problema $Lu = f$ en U y $u = 0$ en ∂U .
2. (ii) Existe una solución débil $u \neq 0$ del problema homogéneo $Lu = 0$ en U y $u = 0$ en ∂U .

obtenemos que existe una única solución $\sigma \in H_0^1(U)$ de la ecuación (3.45) en U con condición de Dirichlet.

Nota: vale lo mismo con condición de Newmann en la frontera, en general es suficiente con una condición de borde que garantice que el operador sea un isomorfismo.

Aun más, podemos ver que $\sigma \in H^{m+2}(U)$ y también que $\sigma \in C^\infty(\bar{U})$, con los teoremas

Teorema 3:[11]

Sea $a^{i,j}$; b^i ; $f \in C^\infty(\bar{U})$ y $u \in H_0^1(U)$ solución de $Lu = f$ en U con $u = 0$ en ∂U siendo $\partial U \in C^\infty$, entonces $u \in C^\infty(\bar{U})$.

Teorema 4:[11]

Sea m un entero no negativo, y $a^{i,j}$; b^i ; $c \in C^{m+1}(U)$; $f \in H^m(U)$, suponga que $u \in H_0^1(U)$ es una solución en sentido débil del problema $Lu = f$ en U con $u = 0$ en ∂U siendo $\partial U \in C^{m+2}$, entonces $u \in H^{m+2}(U)$.

Los $a^{i,j}$, b^i y c son los coeficientes de el operador lineal elíptico

$$L = a^{i,j} \partial_i \partial_j + b_i \partial_i + c \quad (3.48)$$

en nuestro caso tenemos la identidades

$$L = D_\sigma K|_{(0,0)} \quad (3.49)$$

Por lo tanto hemos probado que $D_\sigma K|_{(0,0)}$ es un isomorfismo de $H^{m+2}(U)$ a $H^m(U)$, y también de $C^\infty(\bar{U})$ a $C^\infty(\bar{U})$. Entonces el teorema de la función implícita nos asegura que existe $\sigma(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, v)$, tal que $K(v, \sigma) = 0$.

De este modo queda demostrado el Teorema 1.

3.2.2. Dominio no acotado

Fijaremos nuestra atención en el dominio $U = (R^3 : \frac{M}{2} < R_1 < r)$, aqui solo veremos los puntos diferentes con el caso anterior.

Para ver que $K(v, \sigma)$ es C^1 utilizamos una variante del lema 1 para el caso de espacios de Sobolev con peso.

Lema 2:

Sea Ω un dominio no acotado de R^n . Sea $f : R^k \rightarrow R$ una función de clase C^{m+1} , con $m > \frac{n}{2}$. Entonces f induce un mapa $(H_\delta^m(\Omega))^k \rightarrow H_\delta^m(\Omega)$ de clase C^1 .

Prueba:

Por el teorema de inmersión de Sobolev con peso (ver [1]), tenemos que $H_\delta^m(\Omega) \subset C(\Omega)$. Por lo tanto $f(u) \in C(\Omega) \subset L_\delta^2(\Omega)$, para toda $u \in (H_\delta^m(\Omega))^k$. Sea $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$ una sucesión tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$, en la topología de $(H_\delta^m(\Omega))^k$. Entonces para toda $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ tenemos

$$\begin{aligned} \int (u) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int f(u_n) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \int \nabla f(u_n) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \phi \\ &= - \int \nabla f(u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \phi \end{aligned} \quad (3.50)$$

Del mismo modo se pueden obtener las derivadas de órdenes superiores. Ahora bien, todas las derivadas de $f(u)$ tienen la forma de un producto que involucra una derivada de f y derivadas de u . El primer factor está en $C(\Omega)$, mientras que cualquier l -ésima derivada de u está en $H_\delta^{m-l}(\Omega)$, el cual está inmerso en $L^{\frac{2n}{n-2(m-l)}}(\Omega)$ si $m-l < \frac{n}{2}$. Podemos usar este hecho y la desigualdad de Hölder para espacios de Lebesgue con peso, para ver que todas las derivadas de $f(u)$ hasta orden m están en $L_\delta^2(\Omega)$. Por lo tanto es claro que $f : (H_\delta^m(\Omega))^k \rightarrow H^m(\Omega)$ es continua. Para ver que f es diferenciable tomemos el límite incremental

$$\begin{aligned}
\lim_{u \rightarrow v} \frac{f(u) - f(v)}{u - v} &= \lim_{u \rightarrow v} \frac{\int_0^1 \frac{d}{d\theta} f(v + \theta(u - v)) d\theta}{u - v} \\
&= \lim_{u \rightarrow v} \frac{\int_0^1 \nabla f(v + \theta(u - v))(u - v) d\theta}{u - v} \\
&= \lim_{u \rightarrow v} \int_0^1 \nabla f(v + \theta(u - v)) d\theta \\
&= \nabla f(v)
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Como f es C^{m+1} sabemos que ∇f existe y del mismo modo que para f podemos ver que $\nabla f : (H_\delta^m(\Omega))^k \rightarrow H^m(\Omega)$ también es continuo. Esto concluye la prueba del lema 2.

Luego reemplazando las derivadas parciales de σ por variables reales vemos por el lema 2 que $K(v, \sigma)$ es $C^1(U)$.

Para ver que $D_\sigma K|_{(0,0)}$ es un isomorfismo aplicaremos la proposición 2.2 del artículo de Robert Bartnik [1], en una versión adaptada a nuestras necesidades, la validéz de esta es directa de la demostración que da Bartnik a su proposición.

Teorema 5:

Sea M una variedad R^n con métrica g asintóticamente plana, sea L un operador lineal elíptico asintótico al laplaciano, entonces $L : W_\delta^{2,p}(U) \rightarrow W_{\delta-2}^{0,p}(U)$ es un isomorfismo si y solo si $2 - n < \delta < 0$.

Nuestro operador L es el $D_\sigma K|_{(0,0)}$, que es asintótico al laplaciano, ya que como demostramos en la sección 3.1 la métrica es asintóticamente plana, entonces el teorema 5 implica que $D_\sigma K(0, 0)$ es un isomorfismo, por lo tanto el teorema de la función implícita asegura que existe $\sigma(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, v)$, tal que $K(v, \sigma) = 0$, en un dominio no acotado.

De este modo queda demostrado el Teorema 2.

Nota: En teorema 5 solo vale con condición de Neumann en el borde interno.

Capítulo 4

El momento no cambia

Para completar las pruebas de ambos teoremas nos resta por ver que la inclusión de $\sigma(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, v)$ no modifica la energía ni el momento

$$E = \gamma^{-1}M \quad (4.1)$$

$$p = (0, 0, \gamma^{-1}vM) \quad (4.2)$$

calculados para la superficie $\Phi_1 = \hat{t} = cte$, es decir que debemos ver que el momento y la energía para $\Phi_2 = \hat{t} + \sigma(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, v) = cte$ son los mismos. Para poder calcular esto tenemos el problema de que las coordenadas $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ no son intrínsecas a la superficie Φ_2 , para encontrar tales coordenadas vamos a transformar la $\sigma(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, v)$, que es una perturbación de la superficie Φ_1 , en una $\sigma(x', y', z', v)$ que es una perturbación para el boost del siguiente modo

$$t = \gamma^{-1}(t' + vz') + \sigma(x', y', z', v) \quad (4.3)$$

$$z = \gamma^{-1}(z' + vt') \quad (4.4)$$

$$x = x' \quad (4.5)$$

$$y = y' \quad (4.6)$$

Teniendo la relación

$$\sigma(x', y', z', v) = -\gamma^{-1}\sigma(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, v) \quad (4.7)$$

entonces la superficie es

$$\Phi_2 = \hat{t} + \sigma(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, v) = t' = cte \quad (4.8)$$

vemos ahora que las coordenadas x', y', z' son intrínsecas a la superficie.

La métrica en estas nuevas coordenadas es.

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \gamma^{-2}(\psi^4 v^2 - N_0^2)(dt')^2 - 2N_0^2 \gamma^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x'} dt' dx' \\
&- 2N_0^2 \gamma^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial y'} dt' dy' + 2\gamma^{-1} \left[\gamma^{-1} v \psi^4 - N_0^2 \left(\gamma^{-1} v + \frac{\partial \sigma}{\partial z'} \right) \right] dt' dz' \\
&+ \left[\gamma^{-2} \psi^4 - N_0^2 \left(\gamma^{-1} v + \frac{\partial \sigma}{\partial z'} \right)^2 \right] (dz')^2 - 2N_0^2 \left[\gamma^{-1} v + \frac{\partial \sigma}{\partial z'} \right] \frac{\partial \sigma}{\partial x'} dz' dx' \\
&- 2N_0^2 \left[\gamma^{-1} v + \frac{\partial \sigma}{\partial z'} \right] \frac{\partial \sigma}{\partial y'} dz' dy' + \left[\psi^4 - N_0^2 \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x'} \right)^2 \right] (dx')^2 \\
&- 2N_0^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x'} \frac{\partial \sigma}{\partial y'} dx' dy' + \left[\psi^4 - N_0^2 \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y'} \right)^2 \right] (dy')^2
\end{aligned} \tag{4.9}$$

A $t' = cte$ la métrica inducida es.

$$\begin{aligned}
dh^2 &= \left[\gamma^{-2} \psi^4 - N_0^2 \left(\gamma^{-1} v + \frac{\partial \sigma}{\partial z'} \right)^2 \right] (dz')^2 - 2N_0^2 \left[\gamma^{-1} v + \frac{\partial \sigma}{\partial z'} \right] \frac{\partial \sigma}{\partial x'} dz' dx' \\
&- 2N_0^2 \left[\gamma^{-1} v + \frac{\partial \sigma}{\partial z'} \right] \frac{\partial \sigma}{\partial y'} dz' dy' + \left[\psi^4 - N_0^2 \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x'} \right)^2 \right] (dx')^2 \\
&+ \left[\psi^4 - N_0^2 \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y'} \right)^2 \right] (dy')^2 - 2N_0^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x'} \frac{\partial \sigma}{\partial y'} dx' dy'
\end{aligned} \tag{4.10}$$

De estas expresiones vemos que es suficiente pedir que $\sigma(x', y', z', v) \rightarrow 0$ para $r \rightarrow \infty$, de este modo es claro que la métrica se reduce a la métrica en coordenadas hat, y por lo tanto el momento lineal sera el mismo.

Pero es importante ver como debe tender σ en función de r .

Como en la definición de la energía aparecen las derivadas de la métrica inducida, y en la métrica inducida depende de las derivadas parciales de la función $\sigma(x', y', z', v)$ en términos de primer orden y de segundo, entonces la energía depende de términos de segundo orden y tercero de las derivadas de $\sigma(x', y', z', v)$, como en la energía solo contribuyen términos de $O(r^{-2})$, es suficiente pedir que para $r \rightarrow \infty$

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_i'^2} \rightarrow r^{-3} \tag{4.11}$$

entonces debemos tener que

$$\sigma(x', y', z', v) \rightarrow r^{-1} \tag{4.12}$$

veamos solo por comprobar si esta dependencia de $\sigma(x', y', z', v)$ en $r \rightarrow \infty$ es suficiente para asegurar que el momento tampoco cambie. Para el momento necesitamos el tensor de curvatura extrínseca

$$K_{\alpha\beta} = \nabla_{(\alpha} n_{\beta)} \quad (4.13)$$

n es la normal de $\Phi_2 = t' = cte$

$$n_{t'} = \frac{N_0 \psi^2 \left(\gamma - v \frac{\partial \sigma}{\partial z'} \right)}{\sqrt{\psi^4 - N_0^2 \left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y'} \right)^2 + \left(v + \gamma \frac{\partial \sigma}{\partial z'} \right)^2 \right]}} \quad (4.14)$$

entonces el $K_{\alpha\beta}$ solo depende de los $\Gamma_{x'_i x'_j}^{t'}$ y de n , y los Γ (que se dan en el apéndice B) dependen cuadráticamente de las derivadas parciales de $\sigma(x', y', z', v)$ y de órdenes superiores, por lo tanto con la condición (4.12) es suficiente para que el momento no se modifique. De este modo concluimos las demostraciones de los teoremas 1 y 2, diciendo que la superficie maximal Φ_2 tiene la misma energía y momento

$$E = \gamma^{-1} M \quad (4.15)$$

$$p = (0, 0, \gamma^{-1} v M) \quad (4.16)$$

que el de la superficie no maximal Φ_1 .

También puede verse que Φ_2 es maximal con las coordenadas primadas, aunque es más complicado, ver apéndice B

Capítulo 5

Conclusiones

Con los teoremas 1 y 2, hemos demostrado la existencia de una superficie maximal con momento lineal para Schwarzschild, entonces esta superficie nos provee de un conjunto de datos iniciales (Φ_2, h_{ab}, K_{ab}) tal que $K = 0$ y $p = (0, 0, Mv\gamma^{-1})$ que su evolución nos genera un espacio-tiempo de Schwarzschild con boost, como se mencionó en la introducción, superponiendo de estos datos iniciales, se espera que podamos generar una solución de las ecuaciones de Einstein que describan una colisión entre agujeros negros previamente en rotación. La aplicación de nuestro dato inicial a este problema tiene limitaciones.

Para la evolución de los datos generalmente se utilizan métodos numéricos, los cuales necesitan expresiones explícitas de h_{ab} y K_{ab} , nosotros no obtuvimos tales expresiones explícitas ya que estos dos tensores están dados en función de $\sigma(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ para la que no conocemos explícitamente su dependencia en función de las coordenadas.

$$h_{ab} = g_{ab} + n_a n_b \quad (5.1)$$

$$K_{ab} = \nabla_{(a} n_{b)} \quad (5.2)$$

n_a es la normal a la superficie $\Phi_2 = \hat{t} + \sigma(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$

$$n_a = \frac{\partial_a \Phi_2}{\sqrt{\partial^a \Phi_2 \partial_a \Phi_2}} \quad (5.3)$$

Nuestro dato inicial no genera todo Schwarzschild, está limitado a la región $r > 2M$, es decir no incluye el horizonte ni su interior, solo genera la parte exterior. Esta limitación es debida, por supuesto, a la divergencia de la ecuación

de superficie maximal

$$K = \nabla^\alpha \left(\frac{\partial_\alpha \Phi_2}{\sqrt{\partial^\beta \Phi_2 \partial_\beta \Phi_2}} \right) = 0 \quad (5.4)$$

en el horizonte, los términos que divergen son $g^{\hat{t}\hat{t}}$, $g^{\hat{t}\hat{z}}$, $g^{\hat{z}\hat{z}}$.

Esta divergencia también está presente en la ecuación linealizada

$$2g^{tt}\nabla^a\partial_a\sigma - \partial_a\sigma\partial^a g^{tt} = f \quad (5.5)$$

aunque en este caso todas las coordenadas se reducen a las isotrópicas, ya que esta ecuación esta evaluada en $v = 0$ y $\sigma = 0$, el término divergente es solo el g^{tt} .

No pudimos resolver este problema de la divergencia, debido a que la complejidad de la ecuación hace imposible tratar de regularizar la misma en el horizonte imponiendo una condición para σ o su derivada a través del mismo, por ejemplo

$$\sigma|_{horizonte} = (r - r_{horizonte})^n \sigma' \quad (5.6)$$

con σ' regular en el horizonte.

Otra forma en la que hemos intentado resolver este problema, es generando una sucesión de soluciones σ_ϵ con $r = r_{horizonte} + \epsilon$, entonces si se puede regularizar la ecuación en el horizonte, tendríamos que ver que la ecuación se mantiene acotada para el límite $\epsilon \rightarrow 0$, de vuelta nos vemos frustrados ante la complejidad de la ecuación.

El método seguramente más probable de resolver el problema, es simplemente, utilizar coordenadas que sean regulares en el horizonte, de este modo la ecuación no tendrá ningún problema en el horizonte y la superficie Φ_2 cubrirá todo Schwarzschild. Como se dijo en el capítulo 2 las coordenadas que cubren todo Schwarzschild son las de Kruskal

$$ds^2 = \frac{32M^3 e^{-\frac{r}{2M}}}{r} (-dT^2 + dR^2) + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (5.7)$$

siendo

$$\left(\frac{r}{2M} - 1\right)e^{\frac{r}{2M}} = R^2 - T^2 \quad (5.8)$$

$$\frac{t}{2M} = 2 \tanh^{-1}\left(\frac{T}{R}\right) \quad (5.9)$$

entonces la primer idea que tuvimos fué reescribir la ecuación en estas coordenadas, para eso primero debemos reescribir la Φ_2 en función de las de Kruskal

$$\Phi_2(T, R, \theta, \phi) = 4\gamma^{-1}M \tanh^{-1}\left(\frac{T}{R}\right) - v\gamma^{-1}r(T, R) \cos\theta + \sigma(T, R, \theta, \phi) \quad (5.10)$$

de por vemos una complicación, ahora σ depende de la coordenada temporal T .

Si reemplazamos (5.10) en la ecuación (5.4), esperaríamos obtener una ecuación regular en el horizonte ya que la métrica lo es, sin embargo no es así, ya que en los términos $\partial_T\Phi$ y $\partial_R\Phi$, aparecen las derivadas de t

$$\partial_T t = \frac{4MR}{R^2 - T^2} \quad (5.11)$$

y

$$\partial_R t = -\frac{4MT}{R^2 - T^2} \quad (5.12)$$

y de la ecuación (5.8) vemos que estos divergen para $r = 2M$.

Otra vez frustrados, intentamos lo más lógico, en vez de realizar el boost en las coordenadas isotrópicas de Schwarzschild, la idea es realizarlo en las de Kruskal directamente. La primera dificultad que se presenta es que las coordenadas de Kruskal no son isotrópicas y no encontré ningún modo hacerlas isotrópicas, la razón de utilizar coordenadas isotrópicas es que hacen más sencilla la expresión de la métrica luego de aplicar el boost. De todos modos podemos asociar coordenadas cartesianas a las de Kruskal directamente, y aplicar un boost a estas. Entonces ahora definimos la superficie

$$\Phi = \hat{T} = cte \quad (5.13)$$

y esta sería la superficie con momento lineal no nulo, que luego modificaríamos con σ para hacerla maximal, y ahora sí, la ecuación (5.4) es regular en el horizonte. Pero el problema es que no podemos calcular el momento (ni la energía), porque las coordenadas de Kruskal no son asintóticamente planas como se requiere para calcular el momento (1.6) y la energía (1.5) (para $r \rightarrow \infty$ el primer término de (5.7) se anula). En conclusión no pudimos resolver el problema de divergencia en el horizonte.

También podemos notar que el momento (4.2) y la energía (4.1) obtenidos cooresponden a los de una partícula puntual de masa M que se mueve con velocidad constante v en la dirección z . Lo cual es de esperar ya que el agujero negro (que sería la partícula puntual) está aislado (es decir no hay ningún otro cuerpo), y además este es un agujero de Schwarzschild el cual no emite radiación gravitacional (ni de ningún otro tipo), por lo tanto es lógico que la velocidad sea constante en módulo y dirección.

Capítulo 6

Apéndices

6.1. Apéndice A

(todas las coordenadas son hatiadadas)

las componentes de la inversa de la métrica son

$$g^{tt} = \frac{N_0^2(v)^2 - \psi^4}{N_0^2\psi^4\gamma^2} \quad (6.1)$$

$$g^{tx} = 0 \quad (6.2)$$

$$g^{ty} = 0 \quad (6.3)$$

$$g^{tz} = \frac{\psi^4v - N_0^2v}{N_0^2\psi^4\gamma^2} \quad (6.4)$$

$$g^{xx} = \psi^{-4} \quad (6.5)$$

$$g^{xy} = 0 \quad (6.6)$$

$$g^{xz} = 0 \quad (6.7)$$

$$g^{yy} = \psi^{-4} \quad (6.8)$$

$$g^{yz} = 0 \quad (6.9)$$

$$g^{zz} = \frac{-v^2\psi^4 + N_0^2}{N_0^2\psi^4\gamma^2} \quad (6.10)$$

las componentes de la inversa de la métrica inducida son

$$h^{xx} = \frac{\psi^4 - N_0^2v^2}{\psi^4(\psi^4 - N_0^2 + v^2)} \quad (6.11)$$

$$h^{xy} = 0 \quad (6.12)$$

$$h^{xz} = 0 \quad (6.13)$$

$$h^{yy} = \frac{\psi^4 - N_0^2 v^2}{\psi^4 (\psi^4 - N_0^2 v^2)} \quad (6.14)$$

$$h^{yz} = 0 \quad (6.15)$$

$$h^{zz} = \frac{\gamma \psi^4}{\psi^4 (\psi^4 - N_0^2 v^2)} \quad (6.16)$$

Componentes del tensor de curvatura extrínseca (todas las coordenadas son hatiadadas)

$$K_{xx} = K_{yy} = \frac{1}{2N} \left\{ -\frac{M\gamma^{-2}vz(2r+M)^3}{4r^6} + \frac{Mzv\gamma^{-2}(2r+M)^3}{4r^6} [\psi^4 - N_0^2 v^2]^{-1} [\psi^4 - N_0^2] \right\} \quad (6.17)$$

$$K_{zz} = \frac{1}{2N} \left\{ -\frac{\gamma^{-4}vzM}{r} \left[\frac{(2r+M)^3}{4r^5} + \frac{8(2r-M)v^2}{(2r+M)^3} \right] - 2 \left(-\frac{\gamma^{-4}vzM}{r} \left[\frac{(2r+M)^3}{4r^5} + \frac{8(2r-M)v^2}{(2r+M)^3} \right] + \frac{Mzv\gamma^{-4}}{2r} [\psi^4 - N_0^2 v^2]^{-1} \left[\frac{(2r+M)^3}{4r^5} + \frac{8(2r-M)v^2}{(2r+M)^3} \right] [\psi^4 - N_0^2] \right\} \quad (6.18)$$

$$K_{xy} = K_{yx} = 0 \quad (6.19)$$

$$K_{xz} = K_{zx} = -\frac{1}{2N} \left\{ -\frac{vxM\gamma^{-2}}{r} \left[\frac{(2r+M)^3}{4r^5} + \frac{8(2r-M)v^2}{(2r+M)^3} \right] + \frac{Mxv\gamma^{-2}}{r} [\psi^4 - N_0^2 v^2]^{-1} \left[\frac{(2r+M)^3}{4r^5} + \frac{8(2r-M)v^2}{(2r+M)^3} \right] [\psi^4 - N_0^2] \right\} \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned}
K_{yz} = K_{zy} &= -\frac{1}{2N} \left\{ -\frac{vyM\gamma^{-2}}{r} \left[\frac{(2r+M)^3}{4r^5} + \frac{8(2r-M)}{(2r+M)^3} \right] \right. \\
&+ \frac{Myv\gamma^{-2}}{r} [\psi^4 - N_0^2 v^2]^{-1} \left[\frac{(2r+M)^3}{4r^5} \right. \\
&\left. \left. + \frac{8(2r-M)v^2}{(2r+M)^3} \right] [\psi^4 - N_0^2] \right\} \quad (6.21)
\end{aligned}$$

Como \hat{x}_i es proporcional a r , de los desarrollos asintóticos para $r \rightarrow \infty$ de

$$\frac{(2r-M)}{(2r+M)^3} = \frac{1}{2r^2} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) + \dots \quad (6.22)$$

$$\frac{(2r+M)^3}{4r^5} = \frac{2}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) + \dots \quad (6.23)$$

Vemos que $K_{i,j}$ es de $O\left(\frac{1}{r^2}\right)$, para $r \rightarrow \infty$.

La curvatura media es

$$\begin{aligned}
K &= \frac{M\hat{z}v}{2Nr\gamma^2} \left\{ \frac{(2r+M)^7}{32r^9} [\psi^4 - N_0^2 v^2]^{-1} [\psi^4 - N_0^2] \right. \\
&+ \gamma^{-2} [\psi^4 - N_0^2 v^2] \left\{ 2 \left[\frac{(2r+M)^3}{4r^5} + \frac{8(2r-M)}{(2r+M)^3} \right] \right. \\
&- \left. \left[\frac{(2r+M)^3}{4r^5} - \frac{8(2r-M)v^2}{(2r+M)^3} \right] \right\} \\
&\times \left. \left(1 + [\psi^4 - N_0^2 v^2]^{-1} [\psi^4 - N_0^2] \right) \right\} \quad (6.24)
\end{aligned}$$

Por las mismas razones de antes tenemos que K es de $O\left(\frac{1}{r^2}\right)$, y también vemos claramente que $K = 0$ cuando $v = 0$.

6.2. Apéndice B

(todas las coordenadas son primadas)

las componentes de la inversa de la métrica son

$$g^{tt} = \frac{N_0^2 \left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)^2 + \left(v + \gamma \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2 \right] - \psi^4}{N_0^2 \psi^4 \left(\gamma - v \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2} \quad (6.25)$$

$$g^{tx} = -\frac{\frac{\partial \sigma}{\partial x}}{\psi^4 \left(\gamma - v \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)} \quad (6.26)$$

$$g^{ty} = -\frac{\frac{\partial\sigma}{\partial y}}{\psi^4(\gamma - v\frac{\partial\sigma}{\partial z})} \quad (6.27)$$

$$g^{tz} = \frac{\psi^4 v - N_0^2[(\frac{\partial\sigma}{\partial x})^2 v + (\frac{\partial\sigma}{\partial y})^2 v + (v + \gamma\frac{\partial\sigma}{\partial z})]}{N_0^2 \psi^4 (\gamma - v\frac{\partial\sigma}{\partial z})^2} \quad (6.28)$$

$$g^{xx} = \psi^{-4} \quad (6.29)$$

$$g^{xy} = 0 \quad (6.30)$$

$$g^{xz} = \frac{v\frac{\partial\sigma}{\partial x}}{\psi^4(\gamma - v\frac{\partial\sigma}{\partial z})} \quad (6.31)$$

$$g^{yy} = \psi^{-4} \quad (6.32)$$

$$g^{yz} = \frac{v\frac{\partial\sigma}{\partial y}}{\psi^4(\gamma - v\frac{\partial\sigma}{\partial z})} \quad (6.33)$$

$$g^{zz} = \frac{-v^2\psi^4 + N_0^2[v^2(\frac{\partial\sigma}{\partial x})^2 + v^2(\frac{\partial\sigma}{\partial y})^2 + 1]}{N_0^2 \psi^4 (\gamma - v\frac{\partial\sigma}{\partial z})^2} \quad (6.34)$$

las componentes de la inversa de la métrica inducida son

$$h^{xx} = \frac{\psi^4 - N_0^2[(\frac{\partial\sigma}{\partial y})^2 + (v + \gamma\frac{\partial\sigma}{\partial z})^2]}{\psi^4(\psi^4 - N_0^2[(\frac{\partial\sigma}{\partial x})^2 + (\frac{\partial\sigma}{\partial y})^2 + (v + \gamma\frac{\partial\sigma}{\partial z})^2])} \quad (6.35)$$

$$h^{xy} = \frac{N_0^2 \frac{\partial\sigma}{\partial x} \frac{\partial\sigma}{\partial y}}{\psi^4(\psi^4 - N_0^2[(\frac{\partial\sigma}{\partial x})^2 + (\frac{\partial\sigma}{\partial y})^2 + (v + \gamma\frac{\partial\sigma}{\partial z})^2])} \quad (6.36)$$

$$h^{xz} = \frac{\gamma N_0^2 \frac{\partial\sigma}{\partial x} (v + \gamma\frac{\partial\sigma}{\partial z})}{\psi^4(\psi^4 - N_0^2[(\frac{\partial\sigma}{\partial x})^2 + (\frac{\partial\sigma}{\partial y})^2 + (v + \gamma\frac{\partial\sigma}{\partial z})^2])} \quad (6.37)$$

$$h^{yy} = \frac{\psi^4 - N_0^2[(\frac{\partial\sigma}{\partial x})^2 + (v + \gamma\frac{\partial\sigma}{\partial z})^2]}{\psi^4(\psi^4 - N_0^2[(\frac{\partial\sigma}{\partial x})^2 + (\frac{\partial\sigma}{\partial y})^2 + (v + \gamma\frac{\partial\sigma}{\partial z})^2])} \quad (6.38)$$

$$h^{yz} = \frac{\gamma N_0^2 \frac{\partial\sigma}{\partial y} (v + \gamma\frac{\partial\sigma}{\partial z})}{\psi^4(\psi^4 - N_0^2[(\frac{\partial\sigma}{\partial x})^2 + (\frac{\partial\sigma}{\partial y})^2 + (v + \gamma\frac{\partial\sigma}{\partial z})^2])} \quad (6.39)$$

$$h^{zz} = \frac{\gamma(\psi^4 - N_0^2[(\frac{\partial\sigma}{\partial x})^2 + (\frac{\partial\sigma}{\partial y})^2])}{\psi^4(\psi^4 - N_0^2[(\frac{\partial\sigma}{\partial x})^2 + (\frac{\partial\sigma}{\partial y})^2 + (v + \gamma\frac{\partial\sigma}{\partial z})^2])} \quad (6.40)$$

Los símbolos de Christoffel son

$$\begin{aligned}
\Gamma_{xx}^t &= \frac{N_0 \left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)^2 + \left(v + \gamma \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2 \right] - \psi^4}{2N_0^2 \psi^4 \left(\gamma - v \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2} \\
&\times \left[-4\gamma^{-1} N_0 \frac{\partial N_0}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial x} - 2\gamma^{-1} N_0^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} - 4\psi^3 \frac{\partial \psi}{\partial t} + 2N_0 \frac{\partial N_0}{\partial t} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2 \right] \\
&- \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial x}}{2\psi^4 \left(\gamma - v \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)} \\
&\times \left[4\psi^3 \frac{\partial \psi}{\partial x} - 2N_0 \frac{\partial N_0}{\partial x} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2 - 2N_0^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} \right] \\
&- \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial y}}{2\psi^4 \left(\gamma - v \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)} \\
&\times \left[-4N_0 \frac{\partial N_0}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial y} - 2N_0^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} \frac{\partial \sigma}{\partial y} - 4\psi^3 \frac{\partial \psi}{\partial y} + 2N_0 \frac{\partial N_0}{\partial y} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2 \right] \\
&+ \frac{v\psi^4 - N_0 \left[v \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2 + v \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)^2 + \left(v + \gamma \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2 \right]}{2N_0^2 \psi^4 \left(\gamma - v \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2} \\
&\times \left[-2N_0 \frac{\partial N_0}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \left(\gamma^{-1} v + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right) - 2N_0^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} \left(\gamma^{-1} v + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right) - 4\psi^3 \frac{\partial \psi}{\partial z} \right. \\
&+ \left. 2N_0 \frac{\partial N_0}{\partial z} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2 \right] \tag{6.41}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{xy}^t &= \frac{N_0 \left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)^2 + \left(v + \gamma \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2 \right] - \psi^4}{2N_0^2 \psi^4 \left(\gamma - v \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2} \\
&\times \left[-2\gamma^{-1} N_0 \frac{\partial N_0}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial y} - 2\gamma^{-1} N_0^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y} - 2\gamma^{-1} N_0 \frac{\partial N_0}{\partial y} \frac{\partial \sigma}{\partial y} + 2N_0 \frac{\partial N_0}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right] \\
&- \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial x}}{2\psi^4 \left(\gamma - v \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)} \\
&\times \left[4\psi^3 \frac{\partial \psi}{\partial y} - 2N_0 \frac{\partial N_0}{\partial y} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2 - 2N_0^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y} \right] \\
&- \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial y}}{2\psi^4 \left(\gamma - v \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)} \\
&\times \left[4\psi^4 \frac{\partial \psi}{\partial x} - 2N_0 \frac{\partial N_0}{\partial x} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)^2 - 2N_0^2 \frac{\partial \sigma}{\partial y} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y} \right] \\
&+ \frac{v\psi^4 - N_0 \left[v \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2 + v \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)^2 + \left(v + \gamma \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2 \right]}{2N_0^2 \psi^4 \left(\gamma - v \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2} \\
&\times \left[-2N_0 \frac{\partial N_0}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial y} \left(\gamma^{-1} v + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right) - 2N_0^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial z} \frac{\partial \sigma}{\partial y} - 2N_0^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y} \left(\gamma^{-1} v + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right) \right. \\
&\left. - 2N_0 \frac{\partial N_0}{\partial y} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \left(\gamma^{-1} v + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right) + 2N_0 \frac{\partial N_0}{\partial z} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right] \tag{6.42}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{xz}^t &= \frac{N_0 \left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)^2 + \left(v + \gamma \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2 \right] - \psi^4}{2N_0^2 \psi^4 \left(\gamma - v \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2} \\
&\times \left[4\gamma^{-2} v \psi^3 \frac{\partial \psi}{\partial x} - 2\gamma^{-1} N_0 \frac{\partial N_0}{\partial x} \left(\gamma^{-1} v + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right) - \gamma^{-1} N_0^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial z} - 2\gamma^{-1} N_0 \frac{\partial N_0}{\partial z} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right. \\
&- \left. \gamma^{-1} N_0^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x} + 2N_0 \frac{\partial N_0}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \left(\gamma^{-1} v + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right) \right] \\
&- \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial x}}{2\psi^4 \left(\gamma - v \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)} \\
&\times \left[4\psi^3 \frac{\partial \psi}{\partial z} - 2N_0 \frac{\partial N_0}{\partial z} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2 - 2N_0^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial z} \right] \\
&- \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial y}}{2\psi^4 \left(\gamma - v \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)} \\
&\times \left[-2N_0 \frac{\partial N_0}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial y} \left(\gamma^{-1} v + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right) - 2N_0^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial z} \right. \\
&- \left. 2N_0 \frac{\partial N_0}{\partial z} \frac{\partial \sigma}{\partial z} \frac{\partial \sigma}{\partial y} + 2N_0 \frac{\partial N_0}{\partial y} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \left(\gamma^{-1} v + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right) \right] \\
&+ \frac{v\psi^4 - N_0 \left[v \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2 + v \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)^2 + \left(v + \gamma \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2 \right]}{2N_0^2 \psi^4 \left(\gamma - v \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2} \\
&\times \left[4\gamma^{-2} \psi^3 \frac{\partial \psi}{\partial x} - 2N_0 \frac{\partial N_0}{\partial x} \left(\gamma^{-1} v + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2 - 2N_0^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial z} \left(\gamma^{-1} v + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right) \right] \quad (6.43)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{yy}^t &= \frac{N_0 \left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)^2 + \left(v + \gamma \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2 \right] - \psi^4}{2N_0^2 \psi^4 \left(\gamma - v \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2} \\
&\times \left[-4\gamma^{-1} N_0 \frac{\partial N_0}{\partial y} \frac{\partial \sigma}{\partial y} - 2\gamma^{-1} N_0^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} - 4\psi^3 \frac{\partial \psi}{\partial t} + 2N_0 \frac{\partial N_0}{\partial t} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)^2 \right] \\
&- \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial x}}{2\psi^4 \left(\gamma - v \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)} \\
&\times \left[-4N_0 \frac{\partial N_0}{\partial y} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial y} - 2N_0^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y} \frac{\partial \sigma}{\partial y} - 2N_0^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} - 4\psi^3 \frac{\partial \psi}{\partial x} + 2N_0 \frac{\partial N_0}{\partial x} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)^2 \right] \\
&- \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial y}}{2\psi^4 \left(\gamma - v \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)} \\
&\times \left[4\psi^3 \frac{\partial \psi}{\partial y} - 2N_0 \frac{\partial N_0}{\partial y} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)^2 - 2N_0 \frac{\partial \sigma}{\partial y} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} \right] \\
&+ \frac{v\psi^4 - N_0 \left[v \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2 + v \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)^2 + \left(v + \gamma \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2 \right]}{2N_0^2 \psi^4 \left(\gamma - v \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2} \\
&\times \left[-4N_0 \frac{\partial N_0}{\partial y} \frac{\partial \sigma}{\partial y} \left(\gamma^{-1} v + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right) - 2N_0^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} \left(\gamma^{-1} v + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right) - 4\psi^3 \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] \\
&+ 2N_0 \frac{\partial N_0}{\partial z} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)^2 \tag{6.44}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{yz}^t &= \frac{N_0 \left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)^2 + \left(v + \gamma \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2 \right] - \psi^4}{2N_0^2 \psi^4 \left(\gamma - v \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2} \\
&\times \left[4\gamma^{-2} v \psi^3 \frac{\partial \psi}{\partial y} - 2\gamma^{-1} N_0 \frac{\partial N_0}{\partial y} \left(\gamma^{-1} v + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right) - 2\gamma^{-1} N_0^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y \partial z} - 2\gamma^{-1} N_0 \frac{\partial N_0}{\partial z} \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right. \\
&+ \left. 2N_0 \frac{\partial N_0}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial y} \left(\gamma^{-1} v + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right) \right] \\
&- \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial x}}{2\psi^4 \left(\gamma - v \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)} \\
&\times \left[-2N_0 \frac{\partial N_0}{\partial y} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \left(\gamma^{-1} v + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right) - 2N_0^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y \partial z} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right. \\
&- \left. 2N_0 \frac{\partial N_0}{\partial z} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial y} + 2N_0 \frac{\partial N_0}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial y} \left(\gamma^{-1} v + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right) \right] \\
&- \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial y}}{2\psi^4 \left(\gamma - v \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)} \\
&\times \left[3\psi^3 \frac{\partial \psi}{\partial z} - 2N_0 \frac{\partial N_0}{\partial z} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)^2 - 2N_0^2 \frac{\partial \sigma}{\partial y} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y \partial z} \right] \\
&+ \frac{v\psi^4 - N_0 \left[v \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2 + v \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)^2 + \left(v + \gamma \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2 \right]}{2N_0^2 \psi^4 \left(\gamma - v \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2} \\
&\times \left[4\gamma^{-2} \psi^3 \frac{\partial \psi}{\partial y} - 2N_0 \frac{\partial N_0}{\partial y} \left(\gamma^{-1} v + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2 - 2N_0^2 \left(\gamma^{-1} v + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right) \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y \partial z} \right] \tag{6.45}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{zz}^t &= \frac{N_0 \left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)^2 + \left(v + \gamma \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2 \right] - \psi^4}{2N_0^2 \psi^4 \left(\gamma - v \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2} \\
&\times \left[8\gamma^{-2} v \psi^3 \frac{\partial \psi}{\partial z} - 4N_0 \gamma^{-1} \frac{\partial N_0}{\partial z} \left(\gamma^{-1} v + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right) - 2\gamma^{-1} N_0^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} - 4\gamma^{-2} \psi^3 \frac{\partial \psi}{\partial t} \right. \\
&+ \left. 2N_0 \frac{\partial N_0}{\partial t} \left(\gamma^{-1} v + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2 \right] \\
&- \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial x}}{2\psi^4 \left(\gamma - v \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)} \\
&\times \left[-4N_0 \frac{\partial N_0}{\partial z} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \left(\gamma^{-1} v + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right) - 2N_0 \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} - 4\gamma^{-1} \psi^3 \frac{\partial \psi}{\partial x} + 2N_0 \frac{\partial N_0}{\partial x} \left(\gamma^{-1} v + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2 \right] \\
&- \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial y}}{2\psi^4 \left(\gamma - v \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)} \\
&\times \left[-4N_0 \frac{\partial N_0}{\partial z} \frac{\partial \sigma}{\partial y} \left(\gamma^{-1} v + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right) - 2N_0 \frac{\partial \sigma}{\partial y} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} - 4\gamma^{-1} \psi^3 \frac{\partial \psi}{\partial y} + 2N_0 \frac{\partial N_0}{\partial y} \left(\gamma^{-1} v + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2 \right] \\
&+ \frac{v\psi^4 - N_0 \left[v \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2 + v \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)^2 + \left(v + \gamma \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2 \right]}{2N_0^2 \psi^4 \left(\gamma - v \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2} \\
&\times \left[4\gamma^{-2} \psi^3 \frac{\partial \psi}{\partial z} - 2N_0 \frac{\partial N_0}{\partial z} \left(\gamma^{-1} v + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2 - 2N_0^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} \left(\gamma^{-1} v + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right) \right] \tag{6.46}
\end{aligned}$$

Vector normal n_t

$$n_t = \frac{N_0 \psi^2 \left(\gamma - v \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)}{\sqrt{\psi^4 - N_0^2 \left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)^2 + \left(v + \gamma \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2 \right}}} \tag{6.47}$$

podemos expresar la ecuación de superficie maximal como

$$K = n_t \left[h^{xx} \Gamma_{xx}^t + 2h^{xy} \Gamma_{xy}^t + 2h^{xz} \Gamma_{xz}^t + h^{yy} \Gamma_{yy}^t + 2h^{yz} \Gamma_{yz}^t + h^{zz} \Gamma_{zz}^t \right] \tag{6.48}$$

Para $v = 0$ estos términos se reducen del siguiente modo

$$h^{i,j} = \frac{1}{\psi^4} \tag{6.49}$$

$$h^{i,i} = 0 \tag{6.50}$$

$$n_t = N_0 \quad (6.51)$$

$$\Gamma_{i,j}^t = 0 \quad (6.52)$$

Entonces tenemos $K(0, 0) = 0$.

Si en los $h^{i,j}$ y los $\Gamma_{i,j}^t$ como así también en el n_t , reemplazamos las $\frac{\partial \sigma}{\partial x_i}$ por variables reales vemos que son funciones racionales regulares en U , vemos que $K(v, x, y, z) \in C^{m+1}(U)$ y por el lema 1 $K(v, \sigma) : R \times H^m \rightarrow H^m$ es $C^1(U)$

Cálculo de $D_\sigma K(0, 0)$

$$K = n_t[h^{xx}\Gamma_{xx}^t + 2h^{xy}\Gamma_{xy}^t + 2h^{xz}\Gamma_{xz}^t + h^{yy}\Gamma_{yy}^t + 2h^{yz}\Gamma_{yz}^t + h^{zz}\Gamma_{zz}^t] \quad (6.53)$$

definimos

$$A = h^{xx}\Gamma_{xx}^t + 2h^{xy}\Gamma_{xy}^t + 2h^{xz}\Gamma_{xz}^t + h^{yy}\Gamma_{yy}^t + 2h^{yz}\Gamma_{yz}^t + h^{zz}\Gamma_{zz}^t \quad (6.54)$$

$$D_\sigma F(0, 0)(\sigma) = [D_\sigma n_t(0, 0)A(0, 0) + n_t(0, 0)D_\sigma A(0, 0)](\sigma) \quad (6.55)$$

$$D_\sigma n_t(0, 0) = 0; \quad n_t(0, 0) = N_0 \quad (6.56)$$

$$D_\sigma h^{ij}(0, 0) = 0 \quad (6.57)$$

$$\begin{aligned} D_\sigma \Gamma_{xx}^t(0, 0) &= N_0^{-2} \left\{ 2N_0 \frac{\partial N_0}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + N_0^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} \right\} \\ &- 2\psi^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + 2\psi^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \sigma}{\partial y} \\ &+ 2\psi^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \sigma}{\partial z} \end{aligned} \quad (6.58)$$

$$\begin{aligned} D_y \Gamma_{yy}^t(0, 0) &= N_0^{-2} \left\{ 2N_0 \frac{\partial N_0}{\partial y} \frac{\partial \sigma}{\partial y} + N_0^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} \right\} \\ &+ 2\psi^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial x} - 2\psi^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \sigma}{\partial y} \\ &+ 2\psi^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \sigma}{\partial z} \end{aligned} \quad (6.59)$$

$$\begin{aligned} D_y \Gamma_{zz}^t(0, 0) &= -N_0^{-2} \left\{ 4\psi^3 \frac{\partial \psi}{\partial z} - 2N_0 \frac{\partial N_0}{\partial z} \left(1 + \frac{\partial \sigma}{\partial z}\right) - N_0^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} \right\} \\ &+ 2\psi^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + 2\psi^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \sigma}{\partial y} \\ &- 2\psi^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \sigma}{\partial z} \end{aligned} \quad (6.60)$$

el resto son cero.

Reemplazando obtenemos

$$\begin{aligned}
D_\sigma F(0,0)(\sigma) &= \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} \\
&+ 2 \frac{\partial \sigma}{\partial x} \left(N_0^{-1} \frac{\partial N_0}{\partial x} + \psi^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \\
&+ 2 \frac{\partial \sigma}{\partial y} \left(N_0^{-1} \frac{\partial N_0}{\partial y} + \psi^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\
&+ 2 \frac{\partial \sigma}{\partial z} \left(N_0^{-1} \frac{\partial N_0}{\partial z} + \psi^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \\
&+ 2 N_0^{-1} \frac{\partial N_0}{\partial z} - 4 \frac{\psi^3}{N_0^2} \frac{\partial \psi}{\partial z}
\end{aligned} \tag{6.61}$$

Propiedades de los coeficientes de la ecuación

$$f(x) = \frac{\gamma^{-2} M (2r + M) (vt + z)}{(2r - M)r} \left[\frac{(2r + M)^4}{4(2r - M)r^6} + \frac{8}{(2r + M)^2} \right] \tag{6.62}$$

$$b_x = \frac{Mx}{(2r + M)r} \left[\frac{8(2r - M)}{(2r + M)^2} + \frac{2}{r^2} \right] \tag{6.63}$$

$$b_y = \frac{My}{(2r + M)r} \left[\frac{8(2r - M)}{(2r + M)^2} + \frac{2}{r^2} \right] \tag{6.64}$$

$$b_z = \frac{M\gamma^{-2}(vt + z)}{(2r + M)r} \left[\frac{8(2r - M)}{(2r + M)^2} + \frac{2}{r^2} \right] \tag{6.65}$$

Es claro que f no tiene ningún polo en U , además f es continuamente derivable y acotada, por lo tanto $f \in L^2(U)$ y también sus derivadas, entonces $f \in H^m(U)$. También es fácil ver que b_i y f tienden a cero para $r \rightarrow \infty$, por lo tanto $D_\sigma K(0,0) = \Delta \sigma$ para $r \rightarrow \infty$, y además ambas son $C^\infty(U)$. Entonces vemos que vale todo el análisis de las secciones 3.2.1 y 3.2.2.

Así vemos que la superficie $t' = cte$ es maximal haciendo el análisis en la coordenadas primadas.

6.3. Apéndice C

Teorema y Lemas

Teorema de la función implícita:[20]

Sea X, Y y Z espacios de Banach, y sea U, V entornos alrededor del origen en X y Y , respectivamente. Sea F una función $F(U, V) \rightarrow Z$, y se cumplen las siguientes hipótesis

1. $F(0, 0) = 0$
2. F es C^1
3. $D_y F|_{(0,0)}$ es un isomorfismo de Y a Z

Entonces existe un entorno W del origen de X y una función C^1 de W a Y tal que $F(x, f(x)) = 0$. Aun más, para x e y en esos entornos, $f(x)$ es la única solución de $F(x, y) = 0$.

Lema 1:[20]

Sea Ω un dominio cerrado de R^n con frontera suave. Además sea f una función C^{m+1} de R^k a R con $m < \frac{n}{2}$. Entonces f , induce un mapa C^1 de $(H^m(\Omega))^k$ a $H^m(\Omega)$.

Principio del máximo:[11]

Sea $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ y $c \equiv 0$ en U conexo, abierto y acotado.

1. (i) si $Lu \leq 0$ en U y u alcanza su máximo en un punto interior de \bar{U} , entonces u es constante en U .
2. (ii) si $Lu \geq 0$ en U y u alcanza su mínimo en un punto interior de \bar{U} , entonces u es constante en U .

Teorema:(Alternativa de Fredholm)[11]

Una de las siguientes afirmaciones es cierta:

1. (i) Para cada $f \in L^2(U)$ existe una única solución débil $u \in H_0^1(u)$ al problema $Lu = f$ en U y $u = 0$ en ∂U .
2. (ii) Existe una solución débil $u \neq 0$ del problema homogéneo $Lu = 0$ en U y $u = 0$ en ∂U .

Teorema 3:[11]

Sea $a^{i,j}$; b^i ; $f \in C^\infty(\bar{U})$ y $u \in H_0^1(U)$ solución de $Lu = f$ en U con $u = 0$ en ∂U siendo $\partial U \in C^\infty$, entonces $u \in C^\infty(\bar{U})$.

Teorema 4:[11]

Sea m un entero no negativo, y $a^{i,j}$; b^i ; $c \in C^{m+1}(U)$; $f \in H^m(U)$, suponga que $u \in H_0^1(U)$ es una solución en sentido débil del problema $Lu = f$ en U con $u = 0$ en ∂U siendo $\partial U \in C^{m+2}$, entonces $u \in H^{m+2}(U)$.

Bibliografía

- [1] R. Bartnik. The mass of an asymptotically flat manifold. *Comm. Pure App. Math.*, 39(5):661–693, 1986.
- [2] Robert Bartnik. Existence of maximal surfaces in asymptotically flat spacetimes. *Commun. Math. Phys.*, 94(2):155–175, 1984.
- [3] Robert Bartnik and Jim Isenberg. The constraint equations. In Piotr T. Chruściel and Helmut Friedrich, editors, *The Einstein equations and large scale behavior of gravitational fields*, pages 1–38. Birkhäuser Verlag, Basel Boston Berlin, 2004.
- [4] R. Beig and N. Ó Murchadha. Late time behavior of the maximal slicing of the Schwarzschild black hole. *Phys. Rev. D*, 57(8):4728–4737, 1998.
- [5] Jeffrey M. Bowen and James W. York, Jr. Time-asymmetric initial data for black holes and black-hole collisions. *Phys. Rev. D*, 21(8):2047–2055, 1980.
- [6] D. R. Brill and R. W. Lindquist. Interaction energy in geometrostatics. *Phys. Rev.*, 131:471–476, 1963.
- [7] Bernard F. Schutz B.S. Sathyaprakash. Physics, astrophysics and cosmology with gravitational waves. *Living Reviews in Relativity*, 12(2), 2009.
- [8] Gregory B. Cook. Initial data for numerical Relativity. *Living Rev. Relativity*, 3(5):2000–5, 53 pp. (electronic), 2001. <http://www.livingreviews.org/Articles/Volume3/2000-5cook/>.
- [9] Sergio Dain. Asymptotically flat and regular Cauchy data. In J. Frauendiener and H. Friedrich, editors, *The Conformal Structure of Spacetimes: Geometry, Analysis, Numerics*, volume 604 of *Lecture Notes in Physics*. Springer, 2002.

- [10] Sergio Dain. Initial data for black hole collisions. In Alberto Lobo, Francisco Fayos, Jaume Garriga, Enrique Gaztañaga, and Enric Verdaguer, editors, *Proceedings of the Spanish Relativity Meeting Gravitation and Cosmology ERE - 2002*, pages 183–187. Universitat de Barcelona, 2003.
- [11] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [12] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.
- [13] Reinaldo J. Gleiser, Gaurav Khanna, and Jorge Pullin. Perturbative evolution of conformally flat initial data for a single boosted black hole. *Phys. Rev. D*, 66(2):024035, Jul 2002.
- [14] Robert B. Lockhart. Fredholm properties of a class of elliptic operators on noncompact manifolds. *Duke Math. J.*, 48(1):289–312, 1981.
- [15] Jerrold E. Marsden and Frank J. Tipler. Maximal hypersurfaces and foliations of constant mean curvature in general relativity. *Physics Reports*, 66(3):111–139, 1980.
- [16] David Maxwell. Solutions of the Einstein constraint equations with apparent horizon boundaries. *Commun. Math. Phys.*, 253(3):561–583, 2005.
- [17] Robert C. McOwen. The behavior of the Laplacian on weighted Sobolev spaces. *Comm. Pure Appl. Math.*, 32(6):783–795, 1979.
- [18] Robert C. McOwen. *Partial Differential Equation*. Prentice Hall, New Jersey, 1996.
- [19] E. Poisson. *A Relativist's Toolkit*. Cambridge University Press, 2004.
- [20] Michael Renardy and Robert C. Rogers. *An introduction to partial differential equations*, volume 13 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 2004.
- [21] Robert M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, Chicago, 1984.

- [22] J. W. York. Energy and momentum of the gravitational field. In *Essays in General Relativity*. Academic Press, 1980.