V Seminario Docencia, Investigación y Transferencia en las Cátedras Matemática para Economistas
Instituto de Investigaciones en Administración, Contabilidad y Matemática (IADCOM)
Centro en Investigación en Métodos Cuantitativos aplicados a la Economía y a la Gestión (CMA)
Departamento Pedagógico de Matemática
Facultad de Ciencias Económicas-Universidad de Buenos Aires (UBA)
23/04/2015, Ciudad Autónoma de Buenos Aires-República Argentina

OPTIMIZACIÓN CON RESTRICCIONES DE IGUALDAD. EL CASO DE UNA EMPRESA HILANDERA MARPLATENSE DURANTE LA DÉCADA DEL ´90

BEATRIZ LUPÍN[1], AGUSTINA ALZOLA[2] & LUCÍA KEOGAN[3]
FCEyS-UNMdP, Deán Funes 3.250-Mar del Plata

Resumen

En este Trabajo, se desarrolla un problema de extremos condicionados, aplicando el **Método Multiplicadores de Lagrange**. Dicha temática, es uno de

[1] Docente e investigadora. Licenciada en Economía. A cargo del dictado de las clases teóricas y de la coordinación de la Asignatura "Matemática para Economistas II". FCEyS-UNMdP. beatrizlupin@gmail.com

[2] Estudiante avanzada de la Carrera Licenciatura en Economía. Ex Becaria -Beca de Estímulo de Actividades de Transferencia (UNMdP)-. FCEyS-UNMdP. agusalzola@hotmail.com

[3] Estudiante avanzada de la Carrera Licenciatura en Economía. Ayudante Alumno de la Asignatura "Introducción a la Economía". FCEyS-UNMdP. keoganlucia@gmail.com

los puntos del programa de la Asignatura “Matemática para Economistas II” que se dicta en la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales de la Universidad Nacional de Mar del Plata.

Tomando datos mensuales, que cubren el período agosto 1992/enero 1996, proporcionados por una importante empresa hilandera local, se estimó econométricamente, mediante el Procedimiento de Mínimos Cuadrados Ordinarios, una función de producción Cobb-Douglas, con rendimientos crecientes a escala. Esta función, junto con los costos de los factores productivos intervinientes, conforman la función lagrangeana en cuestión.

El Sector Textil es una de las bases de la economía marplatense, posicionando a la Ciudad como referente nacional de los tejidos de punto, los que se diferencian por su calidad y diseño.

Durante los años ´90, debido a la apertura económica, la misma debió enfrentar la avalancha de artículos importados que afectó tanto la oferta de prendas tejidas como la de hilados. Este escenario obligó a las empresas integrantes a ajustar sus niveles de producción, evitando una excesiva y costosa acumulación de existencias.

La estrategia pedagógica central de esta propuesta consiste en presentar a los estudiantes un caso real, a ser analizado empleando instrumentos matemáticos específicos, vinculando determinados conceptos microeconómicos y considerando el contexto macroeconómico del país. Adicionalmente, introducirlos en el manejo del *software* matemático Máxima®.

Palabras clave: optimización restringida, Multiplicadores de Lagrange, Hessiano Orlado, Función de Producción Cobb-Douglas, Sector Textil

Áreas temáticas:

Docencia: propuesta didáctica para el entendimiento de modelos económicos o actuariales.

Investigación: desarrollo de modelos económicos o actuariales.

Abstract

In this paper, a problem of conditioned extremes is developed by applying the **Method of Lagrange Multipliers**. This topic is one of the items on the syllabus of the subject “Mathematical Economics II” which is held in the Faculty of Economics and Social Sciences of the National University of Mar del Plata.

Taking monthly data covering the period from August 1992 to January 1996 provided by an important local spinner company, it was estimated econometrically through the Ordinary Least Squares Procedure a Cobb-Douglas production function with increasing returns in scale. This feature, together with the costs of both labor and capital inputs, forms the Lagrangian function at issue.

The Textile Sector is one of the bases of Mar del Plata economy, positioning the city as a national benchmark of knitted fabrics, which are differentiated by their quality and design.

Due to economic liberalization, during the '90s the industry faced the onslaught of imported items that affected both the supply of woven garments and yarn. This scenario forced the companies to adjust their production levels, avoiding excessive and costly accumulation.

The central pedagogic strategy of this proposal consists in introducing students into a real case to be analyzed using specific mathematical tools, linking certain microeconomic concepts and considering the macroeconomic situation of the country; additionally, introducing them in the management of the mathematical software Maxima®.

Key words: restricted optimization, Lagrange Multipliers, Hessiano Orlado, Cobb-Douglas production function, Textile Sector

Introducción

El objetivo del presente Trabajo es maximizar la función de producción de hilados, de una empresa perteneciente a la industria textil primaria de la Ciudad de Mar del Plata, sujeta a la limitación de los costos. Dicha función de producción, fue estimada con datos del período agosto 1992/enero 1996.

Para el desarrollo de la optimización restringida, se aplicó el Método Multiplicadores de Lagrange, que es uno de los puntos del programa de la Asignatura “Matemática para Economistas II" que se dicta en la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales de la Universidad Nacional de Mar del Plata.

En la década del ´90, debido a la recesión por la que atravesaba nuestro país, las empresas locales, al igual que las nacionales, se enfrentaban a una demanda contraída que las obligaba a elevar sus esfuerzos, a fin de no poner en peligro su permanencia en la actividad correspondiente.

El Sector Hilandero se encontraba adaptándose a las exigencias del mercado, mejorando su competitividad y tratando de sobrellevar la fuerte avalancha de artículos importados que afectó tanto a la oferta de hilados como también al rubro de los tejidos de punto.

Con un contexto macroeconómico como el descripto, las unidades productoras necesitan contar con instrumentos analíticos que le permitan mejorar su toma de decisiones, de modo de poder asignar eficientemente los recursos y de ajustar en forma conveniente los niveles de producción a las ventas, evitando una excesiva y costosa acumulación de existencias.

Campo de aplicación

En Mar del Plata, el Sector Textil, se inició durante los años '50, con fábricas de tejido de punto, instaladas por inmigrantes italianos, quienes aportaron el oficio y supieron aprovechar el advenimiento del turismo masivo. Con el correr del tiempo, la Ciudad se convirtió en "la capital nacional del pulóver", posicionándose como referente de los tejidos de punto (Cámara Textil de Mar del Plata). Asimismo, los paseos por la Av. Juan B. Justo son un clásico de los visitantes dado que la misma concentra tejedurías y locales de venta, con diversidad de calidad, diseño y texturas y de precios. (Figura 1)

Figura 1: Comercios textiles sobre la
Av. Juan B. Justo-Mar del Plata

Fuente: Map Data©2015 Google Inav/Geosistemas SRL

Registro fotográfico original de Beatriz Lupín
-abril 2015-

La actividad textil puede ser calificada como una industria tradicional, caracterizada por una cierta estabilidad y por cambios tecnológicos poco frecuentes, que fabrica un producto maduro y participa de mercados altamente competitivos. Aunque hay empresas que tienden a especializarse en las últimas etapas de la cadena productiva debido a que allí se genera el mayor valor agregado, actuando sobre los gustos de los consumidores, elevando las barreras de entrada y mejorando el margen de ganancia. (Mauro, Graña, Liseras *et al.,* 2012, pág. 1)

Conforme a información, con año base 2004, de Atucha, Errazti, Lacaze *et al.* (2012), el Sector

Textil, en su conjunto[4], dentro de la Industria Manufacturera, representa el 3% del Producto Bruto Interno (PBI) del país, ascendiendo al 9% en el caso del Producto Bruto Geográfico (PBG) del Partido de General Pueyrredon.

Dichos autores, marcan una pérdida de participación del Sector Textil local dentro de la Industria Manufacturera del Partido, desde el año 1993 -en el que era del 21%-, coincidiendo con las medidas económicas tomadas por el gobierno central de entonces.

Efectivamente, durante los dos mandatos del Presidente Carlos Menem (1989-1999), se realizaron ajustes estructurales y una profunda reforma del Estado, que incluyó la desregulación estatal, la convertibilidad de la moneda nacional al dólar estadounidense y la liberación comercial vía la disminución de las tasas a las importaciones.

---

[4]Incluye: fabricación de productos textiles, confecciones de prendas y cuero.

Así, se eliminó el Régimen Textil, que había generado un marco de protección para la producción lanera y algodonera. Lo anterior, sumado a la apertura económica, tornó prácticamente imposible la exportación de textiles nacionales. Frente a esta realidad, se dispusieron derechos específicos, certificados de origen y regímenes de licencias automáticas y de etiquetado para todo textil proveniente del exterior. Pero los derechos específicos no fueron consolidados por la Ronda de Uruguay del Acuerdo General sobre Aranceles Aduaneros y Comercio (GATT) (1986-1993), el que dispensaba un tratamiento normativo especial para estos artículos. Las estrategias de ajuste del Sector impulsaron la reducción y la racionalización de la capacidad instalada, el desplazamiento hacia gamas productivas con condiciones y precios más remunerativos, la diversificación de la oferta y el mejoramiento de la calidad. Aunque, también, se fue acentuando la precariedad y la informalidad laboral, previsional y fiscal. Recién a partir del año 2002, luego de finalizado el Plan de Convertibilidad, el Sector se vio favorecido por un cambio positivo en los precios relativos de los bienes comercializados internacionalmente y por la disminución del costo de la mano de obra y de las tarifas de los servicios públicos. (Dirección de Oferta Exportable, 2010)

El presente Trabajo, se centra en la **actividad productora de hilados**. A partir de la fibra textil, por medio de un proceso de estirado, torsión y plegado, se obtienen hilados continuos y uniformes. Entre las fibras empleadas en el tejido de punto, se encuentran: lana ovina, angora *mohair* y algodón -naturales-, viscosa -regenerada- y poliamida y poliacrilo -sintéticas-.

Tomando a la lana ovina como fibra representativa, es posible indicar que nuestro país es uno de los principales productores del mundo, con preeminencia de la raza merino. Según la Federación Lanera Argentina, durante la zafra 2013/2014, la producción de lana -base sucia[5]- ascendió a 44.000 tn., destacándose las Provincias de Chubut, Santa Cruz y Buenos Aires. Por su parte, las exportaciones de lana -base limpia-, para el período junio 2013/julio 2014, sumaron 24.621 tn y u$s 184.306.426,5; los principales destinos fueron China, Alemania e Italia. (Figura 2)

Figura 2: Producción de lana ovina

Registro fotográfico original de Beatriz Lupín
-Patagonia Argentina, enero 2010-

[5]El peso de la lana puede ser considerado sucio o limpio. Si la lana se exporta sucia, el peso efectivo coincidirá con el peso base sucia. No obstante, al aplicar el rinde declarado para ese lote -lo que rendirá la lana sucia una vez sometida a procesos industriales de lavado y peinado- se obtendrá su peso base limpia.

La "hilatura" es la parte de la cadena textil en la que se realiza el procesamiento de fibras, cardado, ovillado, peinado y bobinado. Luego, sigue la etapa "tejidos" donde se desarrolla la preparación de hilados, tejeduría plana y en punto, tintorería, estampado y acabado. (Dirección de Oferta Exportable, *op. cit.*)

Según una encuesta realizada por la Fundación Pro Tejer para el bienio 2012/2013, el rubro "Hilatura" tiene una importancia relativa del 8% dentro del Sector Textil[6]. Otros estudios de la misma institución, con fuente en el Instituto Nacional de Estadística y Censos (INDEC), indican que, para el período enero/agosto 2014, la exportación de hilados participó con el 17% -en tn- y con el 16% -en u$s- del total de las exportaciones del Sector, siendo los principales compradores

---

[6]Este Sector se encuentra compuesto por Tejeduría (35%), Confecciones (20%), Acabados (19%), Marcas de Indumentaria (11%), Hilatura (8%) y Otros (6%).

Brasil y China. Por su parte, la importación de hilados representó el 28% -en tn- y el 17% -en u$s- del total de importaciones del Sector, procedente, fundamentalmente, de China, Brasil, Ansean[7] e India.

Marco conceptual

Esta subsección, se basa en Azofeifa & Villanueva (1996), Chiang (1967), Chiang & Wainwright (2008), Kafka (1981) Pindyck & Rubinfedl (1998), Porto (2005) y Varian (1994).

La Teoría de la Producción y de los Costos es vital para la gestión económica de una empresa. La relación técnica entre los factores productivos y la producción se expresa mediante una formulación que indica el máximo nivel de producción (**Q**) que se obtiene con cada combinación específica de factores. Si se supone que una empresa emplea

---

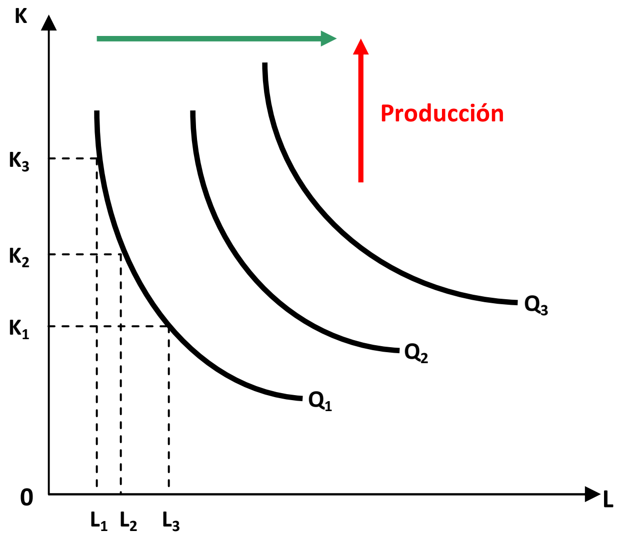
[7]Comprende: Myanmar, Camboya, Filipinas, Indonesia, Laos, Malasia, Singapur, Tailandia, Vietnam y Brunei.

sólo dos factores -trabajo (**L**) y capital (**K**)-, con una tecnología dada y con eficiencia técnica, es posible plantear la siguiente función general:

$$\mathbf{Q\ (L, K) = f\ (L, K)} \tag{1}$$

Cuando ambos factores son variables, la relación anterior se plasma gráficamente en una curva de nivel, llamada **isocuanta**. La misma representa combinaciones de los factores que permiten alcanzar igual nivel de Q. De esta manera, se evidencia cierta flexibilidad que tienen las empresas para tomar sus decisiones de producción. A continuación, se presenta un mapa de isocuantas:

Figura 3: Producción con dos factores variables



Fuente: elaboración propia.

Económicamente, la pendiente de la isocuanta indica la **Relación Marginal de Sustitución Técnica** (RMST) -o Tasa Marginal de Sustitución Técnica (TMST)-. En el tramo significativo de una isocuanta típica, la pendiente es negativa y, en términos absolutos, es decreciente. Matemáticamente, implica que la curva es convexa respecto al origen de coordenadas -función de producción cuasi- cóncava-.

Asì, la RMST de "K" por "L" ($RMST_{KL}$) señala cuántas unidades de K se deben sacrificar a fin de utilizar 1 unidad adicional de L, manteniendo el nivel de Q. Cuánto más K se sustituye por L, el primero se torna más productivo -aumenta su producción marginal (PMg_K)-; por el contrario, el segundo se torna menos productivo -disminuye su producción marginal (PMg_L)-. Por ende, se necesita renunciar a menos K para mantener constante el nivel de Q; la isocuanta se aplana. Un análisis similar debe realizarse si se sustituye L por K. Lo anterior, denota que la productividad de cualquier factor es limitada. Analíticamente, la RMST se obtiene diferenciando Q. Como a esta última se la está manteniendo constante al desplazarse a lo largo de la isocuanta, su diferencial total es nulo:

$$dQ\ (L, K) = PMg_L \times dL + PMg_K \times dK = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow PMg_L / PMg_K = - dK / dL = RMST_{KL} \quad \textbf{(2)}$$

Porto (*op. cit.*), citando a Brown (1966)[8], destaca cuatro características de Q:

1) Referidas a la relación entre la cantidad de factores y la cantidad máxima de producto:

1.1) Eficiencia de la tecnología. Es más eficiente aquella tecnología que, con la misma cuantía de factores, permite obtener la mayor cantidad de Q.

1.2) Rendimientos a escala.

2) Referidas a la relación entre factores para un nivel dado de producto:

2.1) Intensidad en el uso de factores. Vinculada a la relación K/L empleada en el proceso productivo.

2.2) Elasticidad de sustitución.

---

[8]Brown, M. (1966). *On the Theory and Measurement of Technological Change*. Cambridge University Press.

Seguidamente, se profundizará acerca de las segundas características de cada grupo.

Un concepto fundamental en el análisis de largo plazo son los **rendimientos a escala**. Los mismos constituyen una medida de la expansión de Q cuando todos los factores se incrementan en un mismo porcentaje. Estos rendimientos pueden ser:

➔Crecientes -economías de escala-: al aumentar los factores en una determinada proporción, Q aumenta más que proporcionalmente. Entre las causas que los generan, es posible mencionar: la especialización debida a la división de tareas[9], la utilización de equipos más grandes y complejos, la automatización; etc.

➔Constantes: al aumentar los factores en una determinada proporción, Q aumenta en dicha

---

[9]Remitirse al famoso caso de la fabricación de alfileres planteada por Adam Smith en "La Riqueza de las Naciones" (1776) -Libro 1, Capítulo 1-.

proporción. La escala de operaciones no afecta la productividad de los factores.

➔Decrecientes -deseconomías de escala-: al aumentar los factores en una determinada proporción, Q aumenta menos que proporcionalmente. Generalmente, se encuentran asociados a problemas de gestión dada la complejidad de la organización: dificultades en la comunicación entre los distintos niveles de la empresa, falta de control y supervisión, incapacidad de demostrar habilidades empresariales en una operación a gran escala, exceso de papeleo y burocracia, entre otros motivos.

Es posible que una misma función de producción tenga distintos rendimientos a escala.

Por su parte, la idea de **Elasticidad de Sustitución** (σ), tal como lo indica Porto (*op. cit.*)

fue introducida por Hicks (1964)[10]. Permite analizar la facilidad -o la dificultad- con la que un factor se puede sustituir por otro. Es un coeficiente numérico que indica la variación porcentual de la relación K/L ante la variación porcentual de la $RMST_{KL}$, a lo largo de una isocuanta. Puede tomar valores entre 0 e ∞:

$$\sigma = \frac{\Delta\%K/L}{\Delta\%RMST_{KL}} = \left[\frac{d(K/L)}{(K/L)}\right]\left[\frac{PMg_L/PMg_K}{d(PMg_L/PMg_K)}\right] =$$

$$= \frac{d\ln(K/L)}{d\ln(PMg_L/PMg_K)}$$

(3)

Un problema fundamental de cualquier empresa es cómo elegir la combinación de factores que le permita obtener un determinado nivel de Q al menor costo posible. Siguiendo con la asunción de dos factores variables (L y K), a continuación se

---

[10]Hicks, J. R. (1964). *The Theory of wages*. 2nd. ed., New York: Macmillan.

incorpora el supuesto de que los mismos se adquieren en un mercado perfectamente competitivo, a los precio w y r, respectivamente. De esta manera, es posible plantear la ecuación de costo total (CT):

$$\mathbf{CT = w\ L + r\ K} \tag{4}$$

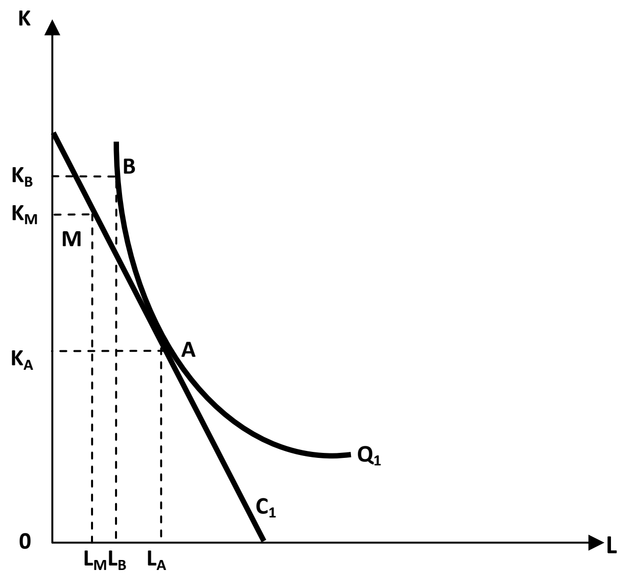
Despejando K de esta última, se deduce la recta **isocosto** -o isogasto- que comprende todas las combinaciones de factores que pueden adquirirse con un CT dado. Su pendiente (w/r) es negativa; vale decir, la isocosto es decreciente en toda su extensión:

$$\mathbf{K = CT / r - (w/r)\ L} \tag{5}$$

Si la empresa renunciara a 1 unidad de L y recuperara su costo para comprar unidades de K a $ r cada una, su CT seguiría siendo el mismo.

La combinación óptima de factores -por ejemplo, punto A- viene dada por el cumplimiento de la condición de que la pendiente de la isocuanta sea igual a la pendiente de la isocosto -isocuanta tg a la isocosto-:

Figura 4: Combinación óptima de factores



Fuente: elaboración propia.

Es posible demostrar que otra combinación de factores permitiría obtener Q_1 pero a un mayor costo -por ejemplo, punto B- o bien gastar C_1 pero generando un menor nivel de Q -por ejemplo, punto M-.

Una de las funciones de producción más populares, por su simplicidad y facilidad de aplicación, es la desarrollada por Charles E. Cobb -matemático y economista norteamericano, (1875-1949)- y Paul Douglas -economista y político estadounidense, (1892-1976)-, en el año 1928[11]. Estos autores consideraron datos agregados anualizados de la industria manufacturera de los Estados Unidos durante el período 1899-1922 y del censo norteamericano del año 1919. Toda la información se encontraba en forma de índice, con base: 1889=100.

De esta manera, realizaron estudios paralelos temporales y transversales y estimaron Q en base sólo a dos factores -L y K- aunque no reportaron los valores de los errores estándar (ee) ni el valor

[11]Douglas, P. H. (1948). Are there laws of productions?. *American Economic Review*, 38(1), pp. 1-41.

del Coeficiente de Determinación (R^2) (Hu, 1979; p. 133).

Una versión generalizada de la **Función de Producción Cobb-Douglas** (C-D) está dada por:

$$\mathbf{Q\ (L, K) = A\ L^{\alpha}\ K^{\beta}} \tag{8}$$

Donde: •A = constante positiva que denota un parámetro de eficiencia tecnológica y •α y β = coeficientes que miden la participación relativa de los factores L y K en Q, respectivamente.

Alguna de las principales propiedades de esta función son:

➔Es una función homogénea de grado ($\alpha+\beta$).

➔La suma de α y β determina el tipo de rendimiento a escala que presenta. Así:

- $\alpha+\beta > 1 \Rightarrow$ rendimientos crecientes a escala.
- $\alpha+\beta = 1 \Rightarrow$ rendimientos constantes a escala.
- $\alpha+\beta < 1 \Rightarrow$ rendimientos decrecientes a escala.

➔Cuando tiene rendimientos constantes a escala, cumple con estas dos características:

- La función es linealmente homogénea.
- Conforme el Teorema formulado por Leonhard Euler -matemático y físico suizo, (1707-1783)-:

$$\mathbf{Q = PMg_L\,(L) + PMg_K\,(K)} \tag{9}$$

Económicamente, significa que si a cada factor se le retribuye por el valor de su producto marginal, Q se distribuirá exactamente entre todos los factores en función a su participación.

➔Sus isocuantas tienen siempre pendiente negativa y son estrictamente convexas para valores positivos de L y de K. Gráficamente, se representan mediante hipérbolas rectangulares.

➔Es estrictamente cuasi-cóncava para L y K positivos.

➔Se trata de un tipo especial de la Función de

Producción de Elasticidad Constante (ESC)[12] ya que la C-D tiene σ constante e igual a la unidad.

En este Trabajo, se estima una Función de Producción C-D en base a datos de los años ´90, de una empresa hilandera de la Ciudad de Mar del Plata. Luego, se maximiza la misma sujeta a la restricción de los precios de los factores, aplicando Multiplicadores de Lagrange y Hessiano Orlado.

Metodología

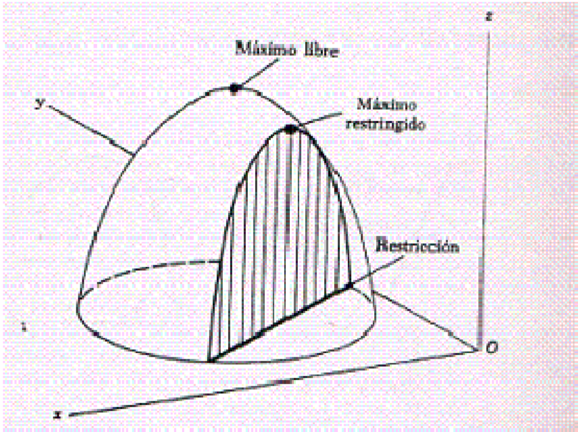
Esta subsección, se basa en Abril (2010); Agopian (2010); Budnick (1990); Canós Darós, Ivorra Castillo & Liern Carrión (s.f.); Chiang (1967); Haeussler Jr., Paul & Wood (2008); Oviedo (s.f.) y Varian (1994).

Para estudiar diversos fenómenos económicos, es necesario optimizar una

[12] Arrow, J. B.; Chenery, H. B.; Minhas, B. S. & Solow, R. M. (1961). Capital-Labor. Substitution and Economic Efficiency. *The Review of Economics and Statistic,* 43, August 1961, pp. 225-250.

determinada función de variables reales -**función objetivo u original-**, sujeta a ciertos limitantes -**restricciones-** de igualdad. Dichas limitaciones, pueden influir en el grado en que se optimizan las funciones y significar escasez de recursos, poca demanda de productos, restricción presupuestaria; etc. Es lo que se conoce como "optimización restringida" -o ligada o condicionada-. El efecto de una restricción puede considerarse desde dos perspectivas: matemáticamente, estrecha el dominio y, por ende, el rango de la función objetivo y, económicamente, marca la importancia de ciertos factores limitadores. La Figura 5 ilustra acerca de la diferencia entre extremos libres y condicionados para el caso general de la maximización de una función z = f (x, y).

Figura 5: Extremos libres y condicionados



Fuente: Chiang (*op. cit.*)

Un método para resolver un problema de tal naturaleza es el de los **Multiplicadores de Lagrange**, llamado así en honor de Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), matemático, físico y astrónomo italiano.

Este Método se inicia construyendo una función lagrangeana (**ℓ**), compuesta por la función objetivo y un múltiplo lineal de la restricción correspondiente. De esta manera, se transforma un caso de restricción en uno no restringido, que puede analizarse por procedimientos similares a los aplicados en situaciones de extremos libres.

Para el caso de “n” variables de elección -o decisión-, maximizar o minimizar: $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, condicionado a una sola restricción: $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k$, implica especificar la función:

$$\boldsymbol{\ell(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) +}$$
$$\boldsymbol{+ \lambda\, [g(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) - k]}$$

$$f, g : D \subset \Re^n \rightarrow \Re; \;\; k, \lambda \in \Re \qquad \textbf{(10)}$$

Donde f y g son funciones escalares diferenciables y k es una constante. Por su parte, λ es el “Mutiplicador de Lagrange”, que puede tomar cualquier valor. El último término del lado derecho de la igualdad de ℓ será igual a 0 si $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ satisfacen la restricción, coincidiendo el valor de ℓ con el de f. Una vez eliminada la restricción, es posible buscar el óptimo libre de ℓ en lugar del óptimo restringido de f.

Si un punto (a_1, a_2, a_3, … ,a_n) es crítico de f condicionado a una restricción, existirá un valor de λ, por ejemplo λ_0, tal que (a_1, a_2, a_3, … ,a_n, λ_0) es un punto crítico de ℓ. La inversa, también, es válida.

La variable λ es mucho más que un simple artificio matemático, un factor auxiliar o adicional. Por el contrario, tiene una interpretación económica de gran utilidad ya que señala cuánto se modificará f óptima -**función valor**- por unidad de variación de k en la restricción:

$$\boldsymbol{\lambda} = \ell_{\mathbf{k}} = \frac{\partial\ell(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}, \ldots, \mathbf{x_n}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial\mathbf{k}} \tag{11}$$

Es la valoración que hace f en términos del cambio de su valor óptimo ante una variación de k en 1 unidad; es por ello que el valor de λ recibe el nombre de “precio sombra”. Así, por ejemplo, si hay capacidad para proporcionar recursos adicionales, el valor de λ ofrece una guía para su asignación.

Luego, a fin de determinar los puntos críticos, se plantea la condición necesaria -o de 1$^{er.}$ orden-, la que establece un sistema de "n" ecuaciones y una restricción, o sea, (n+1) ecuaciones simultáneas con (n+1) incógnitas, conformado por las derivadas parciales de ℓ respecto a todas las variables de que depende, igualadas a 0. El sistema resultante puede expresarse así:

$$\begin{cases} \ell_{x1} = \partial \ell\,(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \lambda) / \partial x_1 = 0 \\ \ell_{x2} = \partial \ell\,(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \lambda) / \partial x_2 = 0 \\ \ell_{x3} = \partial \ell\,(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \lambda) / \partial x_3 = 0 \\ . \\ . \\ . \\ \ell_{xn} = \partial \ell\,(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \lambda) / \partial x_n = 0 \\ \ell_{\lambda} = \partial \ell\,(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \lambda) / \partial \lambda = 0 \end{cases}$$

Donde (ℓ_{x1}, ℓ_{x2}, ℓ_{x3}, ... , ℓ_{xn}, ℓ_{λ}) existen todos.

A partir del sistema anterior, aplicando los métodos usuales de resolución, se obtienen "n+1" puntos candidatos a ser máximos o mínimos -puntos críticos-, según corresponda.

Entre las principales ventajas del sistema es posible mencionar: es de simple especificación, compatible determinado y la última ecuación coincide con la restricción.

Dos maneras alternativas de formularlo es en términos matriciales:

$$\mathbf{A\,X = B \Rightarrow X = A^{-1}\,B} \tag{12}$$

Donde:
A = matriz de coeficientes -coeficientes de las derivadas primeras de "ℓ" respecto a las variables intervinientes-, de dimensión (n+1) x (n+1).
X = vector columna de incógnitas (x_1, x_2, x_3, ... ,x_n, λ), de dimensión (n+1) x 1.
B = vector columna de términos independientes (0, 0, 0, ... ,0), de dimensión [(n+1) x 1].

Y en notación vectorial, definiendo el vector gradiente[13] del lagrangiano e igualando al vector nulo:

[13]Es el vector formado por derivadas parciales.

$$\nabla\boldsymbol{\ell}\ (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \lambda) = (\boldsymbol{\ell}_{x1}, \boldsymbol{\ell}_{x2}, \boldsymbol{\ell}_{x3}, \ldots, \boldsymbol{\ell}_{xn}, \boldsymbol{\ell}_{\lambda}) = \bar{0} \qquad \textbf{(13)}$$

Seguidamente, mediante la condición suficiente -o de $2^{do.}$ orden-, se evalúa si los puntos críticos constituyen un máximo o un mínimo. A tal fin, se analiza la matriz hessiana orlada -o ampliada o aumentada o delimitada- que es una variante de la matriz hessiana debida al matemático alemán Ludwig Otto Hesse (1811-1874).

La misma es una matriz cuadrada, simétrica y definida, de dimensión (n+1), de derivadas segundas y con dos orlas, una en la primera fila y la otra en la primera columna. Las orlas están compuestas por las derivadas segundas de ℓ_{λ} respecto a $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ -las que coinciden con las primeras derivadas de la restricción y con los coeficientes de la misma[14]- más un 0 en la diagonal principal:

$$\underset{(n+1)x(n+1)}{H} = \begin{pmatrix} 0 & \ell_{\lambda x1} & \ell_{\lambda x2} & \ell_{\lambda x3} & \cdots & \ell_{\lambda xn} \\ \ell_{x1\lambda} & \ell_{x1x1} & \ell_{x1x2} & \ell_{x1x3} & \cdots & \ell_{x1xn} \\ \ell_{x2\lambda} & \ell_{x2x1} & \ell_{x2x2} & \ell_{x2x3} & \cdots & \ell_{x2xn} \\ \ell_{x3\lambda} & \ell_{x3x1} & \ell_{x3x2} & \ell_{x3x3} & \cdots & \ell_{x3xn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \ell_{xn\lambda} & \ell_{xnx1} & \ell_{xnx2} & \ell_{xnx3} & \cdots & \ell_{xnxn} \end{pmatrix}$$

Tomando dicho hessiano, es posible definir varios subdeterminantes, los menores principales acotados:

$$\underset{(3x3)}{\left|H_{02}\right|} = \left|\bar{H}_2\right| = \begin{vmatrix} 0 & \ell_{\lambda x1} & \ell_{\lambda x2} \\ \ell_{x1\lambda} & \ell_{x1x1} & \ell_{x1x2} \\ \ell_{x2\lambda} & \ell_{x2x1} & \ell_{x2x2} \end{vmatrix}$$

[14]Algunos autores formulan **ℓ** anteponiendo un signo negativo al último término del lado derecho de la igualdad, en cuyo caso las orlas estarán compuestas por los opuestos de los coeficientes de la restricción, debiendo multiplicar la primera fila y la primera columna por (-1) para seguir operando.

$$|H_{03}| = |\bar{H}_3| = \begin{vmatrix} 0 & \ell_{\lambda x1} & \ell_{\lambda x2} & \ell_{\lambda x3} \\ \ell_{x1\lambda} & \ell_{x1x1} & \ell_{x1x2} & \ell_{x1x3} \\ \ell_{x2\lambda} & \ell_{x2x1} & \ell_{x2x2} & \ell_{x2x3} \\ \ell_{x3\lambda} & \ell_{x3x1} & \ell_{x3x2} & \ell_{x3x3} \end{vmatrix}$$
$$(4x4)$$

.

.

.

$$|H_{0n}| = |\bar{H}n| = \begin{vmatrix} 0 & \ell_{\lambda x1} & \ell_{\lambda x2} & \ell_{\lambda x3} & \cdots & \ell_{\lambda xn} \\ \ell_{x1\lambda} & \ell_{x1x1} & \ell_{x1x2} & \ell_{x1x3} & \cdots & \ell_{x1xn} \\ \ell_{x2\lambda} & \ell_{x2x1} & \ell_{x2x2} & \ell_{x2x3} & \cdots & \ell_{x2xn} \\ \ell_{x3\lambda} & \ell_{x3x1} & \ell_{x3x2} & \ell_{x3x3} & \cdots & \ell_{x3xn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \ell_{xn\lambda} & \ell_{xnx1} & \ell_{xnx2} & \ell_{xnx3} & \cdots & \ell_{xnxn} \end{vmatrix}$$
$$(n+1)x(n+1)$$

El número de menores principales a plantear se calcula restando al número de variables de f, el número de restricciones; para este caso, (n–1).

Se calculan todos los subdeterminantes, de manera tal que:

•Existe un máximo en los puntos clave, si los valores de los subdeterminantes presentan alternancia de signo, comenzando con uno positivo:

$$|H_{02}| = |\bar{H}_2| > 0,\ \ |H_{03}| = |\bar{H}_3| < 0, \ldots,\ |H_{0n}| = |\bar{H}_n| > 0$$

$|H_{0n}| = |\bar{H}_n|$ es definida negativa

•Existe un mínimo en los puntos clave, si los valores de los subdeterminantes son negativos en todos los casos :

$$|H_{02}| = |\bar{H}_2| < 0,\ |H_{03}| = |\bar{H}_3| < 0, \ldots,\ |H_{0n}| = |\bar{H}_n| < 0$$

$|H_{0n}| = |\bar{H}_n|$ es definida positiva

Por último, se sustituyen los puntos en cuestión en ℓ, obteniéndose la optimización de la función.

En la siguiente Tabla, se resume el criterio desarrollado para determinar si un punto crítico es un máximo o un mínimo restringido:

Tabla 1: Condiciones para un extremo restringido

Condición	Máximo	Mínimo
Necesaria -1er. orden-	$\ell_{x1} = \ell_{x2} = \ell_{x3} =, \ldots, = \ell_{xn}, = \ell_{\lambda} = 0$	$\ell_{x1} = \ell_{x2} = \ell_{x3} =, \ldots, = \ell_{xn}, = \ell_{\lambda} = 0$
Suficiente -2do. orden-	$\lvert H_{02} \rvert = \lvert \bar{H}_2 \rvert > 0$, $\lvert H_{03} \rvert = \lvert \bar{H}_3 \rvert < 0, \ldots,$ $\lvert H_{0n} \rvert = \lvert \bar{H}_n \rvert > 0$	$\lvert H_{02} \rvert = \lvert \bar{H}_2 \rvert < 0$, $\lvert H_{03} \rvert = \lvert \bar{H}_3 \rvert < 0, \ldots,$ $\lvert H_{0n} \rvert = \lvert \bar{H}_n \rvert < 0$

Fuente: Chiang (*op. cit.*)

El Método de los Multiplicadores de Lagrange es particularmente útil cuando la limitación, en sí misma, es una función compleja o cuando la función objetivo se encuentra sometida a restricciones múltiples o a restricciones de igualdad y de desigualdad conjuntamente, por lo que la técnicas frecuentes para resolver sistemas de ecuaciones se tornan inapropiadas por las dificultades prácticas que conllevan. Es posible aclarar que, en la Figura 5, si se agregara otra restricción que cortara a la primera en el plano 0xy, ambas limitarían el dominio al punto de intersección, reduciendo automáticamente el rango de la función objetivo z a ese punto. Pero, en la mayoría de las situaciones, el número y la naturaleza de las restricciones disminuirá pero no eliminará la posibilidad de elección.

Finalmente, cabe citar algunos ejemplos clásicos en los que se aplica el Método de los Multiplicadores de Lagrange: maximización de los beneficios de una empresa que fabrica más de un bien pero debe respetar una cuota de producción; maximización de la utilidad de un consumidor sujeta a su restricción presupuestaria a fin de fijar la canasta óptima de bienes; combinación de mínimo costo de los insumos. Precisamente, este último problema es el que estudiaremos en la próxima sección.

Desarrollo de la propuesta

Estimación de la Función de Producción C-D

En base a 42 observaciones mensuales, que cubren el período agosto 1992/enero 1996, se estimó la Función de Producción C-D de una empresa hilandera de la Ciudad de Mar del Plata.

Se relevaron Q -kg de hilado, crudo y teñido-, L -hs trabajadas, con exclusión de las hs extras- y K -Kwh de energía activa empleada-.

Tomando todo el lapso temporal considerado es posible señalar que, en promedio, se produjeron 36.052 kg de hilo, con 9.622,5 hs de empleo y 78.677 Kwh. Ahora bien, centrándose en los años con datos para los 12 meses -1993, 1994 y 1995-, en términos medios, se observa que Q y L presentan una caída hacia en el bienio 1993/1994, recuperándose en el año 1995; en cambio, los Kwh crecieron de un año a otro, reduciéndose, incluso, su variabilidad. (Tabla 2)

Tabla 2-A: Estadísticos descriptivos

-variables originales, muestra total-

Medida resumen	Q -kg-	L -hs-	K -Kwh-
Media	36.052	9.622,5	78.677
Coeficiente de Variación	22%	13%	16%

Tabla 2-B: Estadísticos descriptivos

-variables originales, años 1993, 1994 y 1995-

Q -kg- **Año** / **Medida resumen**	**1993**	**1994**	**1995**
Media	35.942	31.708	**37.058**
Coeficiente de Variación	17%	18%	**26%**

L -hs- **Año** / **Medida resumen**	**1993**	**1994**	**1995**
Media	**9.886,5**	8.595	9.726
Coeficiente de Variación	**14,5%**	6%	9,5%

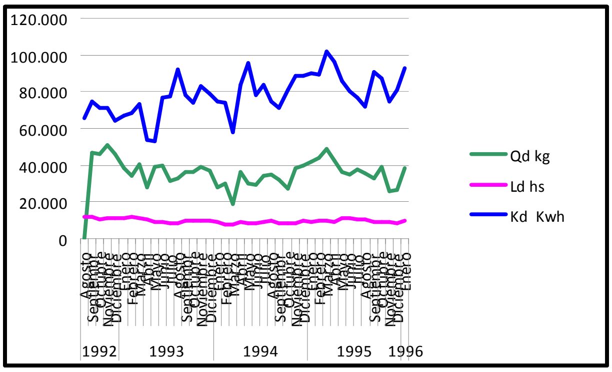
K -Kwh- **Año** / **Medida resumen**	**1993**	**1994**	**1995**
Media	72.930	79.231	**85.420**
Coeficiente de Variación	**21%**	14%	11,5%

Fuente: elaboración propia.

Las variables originales fueron desestacionalizadas a través del Método de las Medias Móviles con un Proceso Aditivo -Q_d, L_d y K_d-. La práctica de esta técnica se justifica por la presencia de patrones estacionales que afectan la producción textil local. (Figura 6)

Figura 6: Comportamiento de las variables desestacionalizadas

-agosto 1992/enero 1996-



<u>Fuente</u>: elaboración propia.

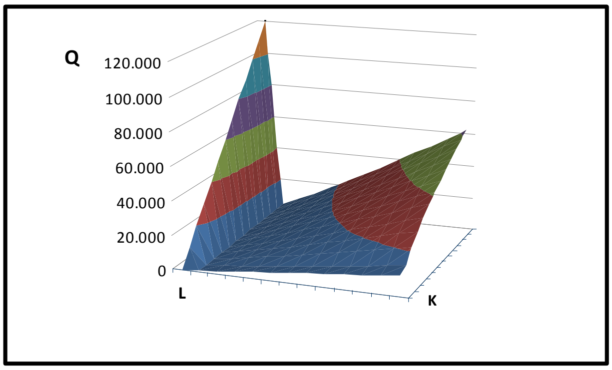
Luego de transformar la ecuación **8** en lineal, aplicando logaritmo natural miembro a miembro, se llevó a cabo la estimación econométrica correspondiente mediante el Procedimiento de

Mínimos Cuadrados Ordinarios. El *software* empleado fue InfoStat Profesional 2015®[15].

A continuación, se presentan los resultados obtenidos y la gráfica de la función estimada:

$$\hat{Q} = 0{,}0014\ L^{1,14}\, K^{0,59} \tag{14}$$

Figura 7: Función de Producción C-D estimada
-agosto 1992/enero 1996-



Fuente: elaboración propia.

[15]Di Rienzo, J. A.; Casanoves, F.; Balzarini, M. G.; Gonzalez, L.; Tablada, M. & Robledo, C. W. (2015). InfoStat, versión 2015. Grupo InfoStat, Facultad de Ciencias Agrarias-Universidad Nacional de Córdoba, República Argentina. Licencia: Beatriz Lupín.

Conforme la evaluación del modelo anterior, la cual fue realizada con las pruebas informales y formales tradicionales, es posible concluir que el mismo es satisfactorio pues es globalmente significativo; los coeficientes estimados presentan los signos correctos y son estadísticamente significativos -Valores "p" < 5%-; el Coeficiente de Determinación Ajustado (R^2_{aj}) es igual a 0,49[16] -el 49% de las variaciones de Q se explican por los dos factores considerados-; la multicolinealidad no constituye un problema serio -los ee de los estimadores no son grandes- y no exhibe autocorrelación ni heteroscedasticidad -los estimadores cumplen con las propiedades

---

[16]Si bien este valor no es muy elevado, se debe considerar que se está tratando de explicar la Q promedio total de hilo solamente con dos variables cuando en el proceso productivo también resultan importantes otros insumos y materias primas.

deseadas y las pruebas “t” y “F” pueden aplicarse legítimamente-.[17]

Finalmente, cabe destacar la presencia de rendimientos crecientes a escala[18]. Generalmente, rendimientos como los verificados en este Trabajo, ocurren para un determinado intervalo de la producción (Varian, *op. cit.*; p. 323).

Maximización restringida de la Función de Producción C-D estimada

A la función de producción estimada previamente, se la maximizó considerando un gasto de \$ C_0. Para ello, se aplicaron Multiplicadores de Lagrange y Hessiano Orlado, mediante el *software* Máxima®.

---

[17]Para ampliar al respecto, consultar Lupín (1999).
[18]Las estimaciones realizadas por Cobb y Douglas se acercaban a la condición de rendimientos constantes a escala.

$$\ell\,(L, K, \lambda) = \underbrace{0{,}0014\, L^{1,14} K^{0,59}}_{\text{Función objetivo}} + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Multiplicador de Lagrange}}}{\lambda} \underbrace{(w\, L + r\, K - C_0)}_{\text{Restricción}} \tag{15}$$

Condición necesaria -1[er.] orden-

$$\begin{cases} \ell_L = 0{,}001596\, L^{0,14} K^{0,59} + \lambda\, w = 0 \\ \ell_K = 0{,}000826\, L^{1,14} K^{-0,41} + \lambda\, r = 0 \\ \ell_\lambda = w\, L + r\, K - C_0 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior y haciendo manipulaciones algebraicas, se obtuvieron los siguientes puntos críticos:

$L^* = C_0 / 1{,}52\, w$

$K^* = (0{,}52\, L\, w) / r$

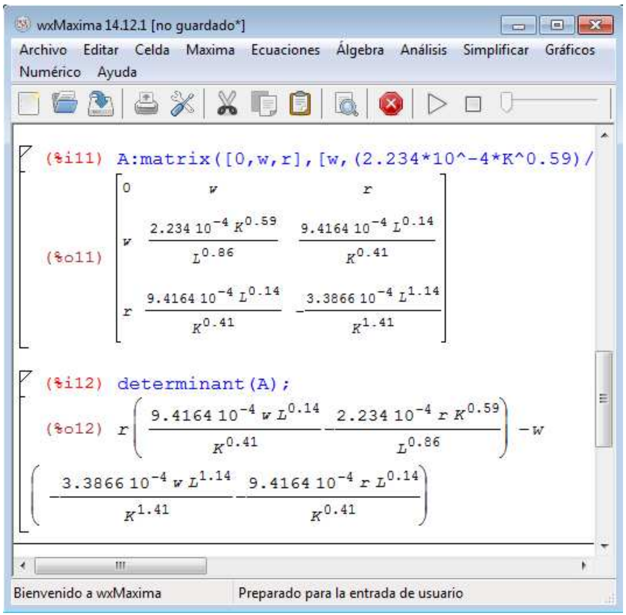
$\lambda^* = (-0{,}001596\, L^{0,14} K^{0,49}) / w =$

$= (-0{,}000826\, L^{1,14} K^{-0,41}) / r$

Adicionalmente, de las dos primeras ecuaciones del sistema se pueden deducir las productividades marginales de ambos factores ponderadas por sus precios, despejando λ.

Condición suficiente -2do. orden-

A fin de verificar que los puntos obtenidos en el paso anterior, son maximizadores de la función objetivo, se desarrolló el Hessiano Orlado, de dimensión 3x3:



Es posible observar, en las orlas, 0 en la diagonal principal y el precio de ambos factores -w y r-.

Dado que intervienen dos variables -L y K- y una restricción, el número de menores principales orlados asciende a uno. Por lo tanto, el mismo debe ser mayor que 0:

$$\left|H_0\right| = \left|\bar{H}\right| = \frac{0,00188\, w\, r\, L^{0,14}}{K^{0,41}} - \frac{r^2\, 0,00022\, K^{0,59}}{L^{0,86}} + \frac{w^2\, 0,000338\, L^{1,14}}{K^{1,41}} > 0 \Rightarrow$$

$$\frac{0,00188\, w\, r\, L^{0,14}}{K^{0,41}} + \frac{w^2\, 0,000338\, L^{1,14}}{K^{1,41}} > \frac{r^2\, 0,00022\, K^{0,59}}{L^{0,86}}$$

Si se cumple la desigualdad anterior, la función de producción en cuestión alcanza un máximo con la combinación óptima (L*, K*):

$$\mathbf{Q^* (L^*, K^*) = 0,0014\, L^{*1,14}\, K^{*0,59}} \qquad \mathbf{(16)}$$

La decisión de la empresa en cuanto a los factores puede ser analizada desde dos perspectivas -problema dual-. Así, es posible estudiar la elección de la curva isocuanta más alta tangente a una determinada recta isocosto o bien la elección de la recta isocosto más baja tangente a una curva isocuanta (Pindyck & Rubinfeld, *op. cit.*).

Procediendo de forma similar a la descripta para la maximización de la producción, la minimización de la función de costos bajo la restricción de mantener un determinado nivel de producción de hilo permitirá arribar a la combinación óptima (L*, K*).

Consideraciones finales

Desde una perspectiva pedagógica, el valor del ejercicio propuesto radica en aplicar, empíricamente, conceptos matemáticos y económicos.

Se estima una de las funciones de producción más conocidas y empleadas, por su simpleza y deseables propiedades analíticas. Asimismo, se desarrolla un método de optimización bajo restricciones de igualdad, ampliamente difundido dado que permite solucionar, de forma relativamente sencilla, inconvenientes provenientes tanto de restricciones simples como de restricciones más complejas o múltiples.

La elección del sector objetivo del estudio se fundamenta en su tradición como actividad económica del Partido de General Pueyrredon, marcando tendencia en cuanto a los tejidos de punto a nivel nacional.

Referencias bibliográficas

Abril, J. C. (2010). *Matemáticas Avanzadas para la Estadística y la Economía*. Tucumán: Ediciones Cooperativas.

Agopian, E. (2010). Teoría de selección de la cartera de valores. En: A. Bernardello & J. García Fronti (Ed.), *Aplicaciones económicas y financieras de Matemática Superior* (pp. 18-36), Buenos Aires: Facultad de Ciencias Económicas-Universidad de Buenos Aires. Recuperado de:

http://www.econ.uba.ar/www/departamentos/matematica/plan97/meconomistas/bernardello/web/Aplicaciones_economicas_%20y_financieras_de_matematica_superior.pdf

Atucha, A. J.; Errazti, E.; Lacaze, M. V.; Labrunée, M. E.; López, M. T. & Volpato, G. (2012). La estructura productiva del Partido de General Pueyrredon*.* *FACES,* Facultad de Ciencias Económicas y Sociales-Universidad Nacional de Mar del Plata, Año 18, Nº 38-39, pp. 57-81.

Azofeifa V., A. G. & Villanueva S., M. (1996). *Estimación de una función de producción: caso de Costa Rica*. San José, CR: Banco Central de Costa Rica, División Económica, Departamento de Investigaciones Económicas, pp. 1-101.

Budnick, F. S. (1990). *Matemáticas aplicadas para Administración, Economía y Ciencias Sociales*. 3era. ed., México: McGraw-Hill.

Cámara Textil de Mar del Plata. http://www.camaratextil.com

Canós Darós, M. J.; Ivorra Castillo, C. & Liern Carrión, V. (s. f.). *Matemática para la Economía y la Empresa*. España: Departamento de Economía Financiera y Matemática, Universitat de Valencia. Recuperado de: http://www.uv.es/vbolos/docencia/mi/matematicas_para_la_economia_y_la_empresa.pdf

Chiang, A. C. (1967). *Métodos fundamentales de Economía Matemática*. Buenos Aires: Amorrortu Editores.

Chiang, A. C. & Wainwright, K. (2008). *Métodos fundamentales de la Economía Matemática*. México: Mc Graw Hill.

Dirección de Oferta Exportable, Dirección General de Estrategias de Comercio Exterior, Subsecretaría de Comercio Internacional (2010). *Informe Sector Textil. Hilados y telas*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires-RA: Ministerio de Relaciones Exteriores, Comercio Internacional y Culto de la Nación. Recuperado de http://www.argentinatradenet.gov.ar/sitio/estrategias/Hilados%20y%20Telas1.pdf

Federación Lanera Argentina (2014). *Estadísticas laneras argentinas*. Recuperado de http://www.flasite.com/ftp/anual.pdf

Fundación Pro Tejer (2014). *Boletín Económico. Evolución de la cadena de valor textil y confecciones*. Recuperado de http://www.fundacionprotejer.com/boletines/2014/img/informes/boletin-enero-agosto-2014.pdf

---(2013). *Evolución y perspectivas de la cadena de valor agro textil y confecciones de Argentina*. Recuperado de http://www.fundacionprotejer.com/encuesta/2013/img/informes/encuesta-anual-2013---parte-1.pdf

Haeussler Jr., E. F.; Paul, R. S. & Wood, R. J. (2008). *Matemáticas para Administración y Economía*. 12da. ed., México: Pearson Prentice.

Hu, T. W. (1979). *Econometría. Un análisis introductorio*. México: Fondo de Cultura Económica.

Kafka, F. (1981). *Teoría Económica*. Lima: Centro de Investigación-Universidad del Pacífico, Lima.

Lupín, B. (1999). Comportamiento de la producción de una empresa hilandera de Mar del Plata. En H. Fuster, F. Graña & N. Liseras (Ed.), *Diagnóstico de competitividad y otros estudios* (pp. 101-110), Mar del Plata: Facultad de Ciencias Económicas y Sociales-Universidad Nacional de Mar del Plata.

Mauro, L.; Graña, F.; Liseras, N.; Barberis, F. & Gennero, A. (2012). *El Sector Textil-Confecciones en la Región de Mar del Plata*. Comunicación presentada en el Encuentro Nacional de la Red de Economías Regionales en el Marco del Plan Fénix, 13, Buenos Aires, octubre 2012.

Oviedo, J. M. (s. f.). *Interpretación económica de los Multiplicadores de Lagrange*. Documento de Trabajo Nº 4, Departamento de Estadística y Matemática, Facultad de Ciencias Económicas-Universidad Nacional de Córdoba, pp. 1-9.

Pindyck, R. S. & Rubinfeld, D. L. (1998). *Microeconomía*. 4ta. ed., España: Prentice Hall Inc.

Porto, A. (2005). *Notas de Clase. Microeconomía II*. Trabajo docente Nº 9. Departamento de Economía, Facultad de Ciencias Económicas-Universidad Nacional de La Plata, pp. 1-97.

Varian, H. R. (1994). *Microeonomía Intermedia*. *Un Enfoque Moderno*. 3era. ed., Barcelona: Antoni Bosch Editor.