ACTA UNIVERSITATIS LODZIENSIS
FOLIA MATHEMATICA 4, 1991

Jarosław Cel

ÜBER EINE EIGENSCHAFT KONVEXER MENGEN UND IHRE ANWENDUNG

Man beweist, daß jede abgeschlossene konvexe und nichtkompakte Untermenge des n-dimensionalen euklidischen Raumes mindestens eine abgeschlossene Halbgerade enthalten muß und mit Hilfe von dieser Behauptung untersucht man die Beschränktheit des Lösungsgebiets linearer Ungleichungssystemen.

Der Zweck vorliegender Note ist auf eine einfache Eigenschaft konvexer Mengen hinzuweisen und ein Beispiel möglicher Anwendungen vorzustellen.

Im folgenden bezeichne R^n der n-dimensionale euklidische Raum. Das erwähnte Ergebnis kann folgendermaßen formuliert werden (vgl. [1] § 4, Übung 4 oder § 11).

EIGENSCHAFT. **Eine abgeschlossene konvexe Untermenge $\mathcal{K}$ des R^n ist nichtkompakt genau dann, wenn $\mathcal{K}$ mindestens eine abgeschlossene Halbgerade enthält.**

B e w e i s. Die angegebene Bedingung ist natürlich hinreichend. Es sei p ein beliebig gewählter Punkt von $\mathcal{K}$. Wir betrachten in R^n eine Folge der (n - 1)-dimensionalen Sphären $\{S_k\}$ (k = 1, 2, ...) mit den Zentren in p und natürlichen Radien 1, 2, ... (d.h., $S_k = S_k^{n-1}(p, k)$) und definieren die Folge $\{Q_k\}$ (k = 1, 2, ...) der Untermengen von S_1 folgenderweise:

$$Q_1 = S_1 \cap \mathcal{K}, \quad Q_k = S_1 \cap \{\overline{pq}: q \in S_k \cap \mathcal{K}\} \quad \text{für } k = 2, 3, \ldots$$

Wegen Unbeschränktheit, Abgeschlossenheit und Konvexität von $\mathcal{K}$ ist jede Menge Q_k nichtleer, kompakt und dazu $Q_1 \supset Q_2 \supset Q_3, \ldots$ Auf-

grund des Cantorschen Satzes (siehe [2], Korollar 2.36) ist dann der Durchschnitt aller Mengen Q_k ($k = 1, 2, \ldots$) nichtleer. Aber wenn $t \in \bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$, dann sofort $\overline{pt} \subset \mathcal{K}$, was zu zeigen war.

FOLGERUNG. Eine abgeschlossene konvexe Untermenge $\mathcal{K}$ des R^n ist nichtkompakt genau dann, wenn jeder Punkt von $\mathcal{K}$ der Anfang einer in $\mathcal{K}$ liegenden abgeschlossenen Halbgerade ist.

Als Anwendung dient der folgende Satz über ein System linearer Ungleichungen. $\mathcal{A}$ bezeichnet hier eine Indexmenge.

SATZ. Gegeben seien eine Familie auf R^n definierter Linearformen $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ eine Menge reeller Zahlen $\{b_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ und ein beliebig gewählter, fester Punkt x_o des R^n. Die nichtleere Untermenge

$$H = \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} \{x \in R^n : f_\alpha(x) \leq b_\alpha\}$$

des R^n ist genau dann beschränkt, wenn

$$H_o = \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} \{x \in R^n : f_\alpha(x - x_o) \leq 0\} = \{x_o\}$$

Die Voraussetzung, daß H nichtleer ist, ist nicht entbehrlich.

B e w e i s. Zunächst nehmen wir an, daß H nichtleer und beschränkt ist und gleichzeitig sei $H_o \neq \{x_o\}$. Da $x_o \in H_o$, muß also H_o einen von x_o verschiedenen Punkt y enthalten, d.h., $f_\alpha(z_o) \leq$ $\leq b_\alpha$ und $f_\alpha(y - x_o) \leq \theta$ für alle $\alpha \in \mathcal{A}$ und gewisses z_o. Aber dann enthielte H die Halbgerade $x = z_o + t(y - x_o)$ $(t \geq 0)$ so daß unbeschränkt wäre.

Wäre H unbeschränkt, so existierte eine in H liegende Halbgerade $x = z_o + t\zeta$ $(t \geq 0)$ mit $\zeta \neq 0$. Die Ungleichung $f_\beta(\zeta) > 0$ ist unmöglich, weil dann $f_\beta(z_o + t\zeta) = f_\beta(z_o) + tf_\beta(\zeta) > b_\beta$ für hinreichend großes t gilt. Somit $f_\alpha(\zeta) \leq 0$ für jedes α und x_o, $x_o + \zeta \in H_o$, so daß $H_o \neq \{x_o\}$.

Dadurch ist der Satz völlstandig bewiesen.

FOLGERUNG. Es sei A eine $m \times n$-Matrix und b sei ein m-Vektor. Das Lösungsgebiet des lösbaren Ungleichungssystems $Ax \leq b$ ist beschränkt genau dann, wenn das System $Ax \leq 0$ nur die Nulllösung hat (vgl. [3], § 2, Übung 37).

Diese Folgerung war nützlich in der Arbeit [4], wo die Beschränktheit gewisser Untermengen des R^n, die eine Lösung nichtlineares Gleichungssystems enthalten, nachgewiesen wurde.

BEMERKUNG. Wenn man die leeren Mengen H zuläßt, wird die Behauptung falsch; nämlich, die Menge H mit $f_1 \equiv x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, $f_2 \equiv -x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, $f_3 \equiv -x_1 - x_2 - \ldots - x_n$, $f_m \equiv 0$ für $m \geq 4$ und $b_1 = b_2 = 1$, $b_m = 0$ für $m \geq 3$ ist leer und deshalb beschränkt, obwohl die "homogene" Menge H_o einen von $x_o = (x_1^o, x_2^o, \ldots x_n^o)$ verschiedenen Punkt $x_o' = (x_1^o + 1, \ldots, x_{n-1}^o + 1$ $x_n^o + 1 - n)$ enthält.

Zuletzt bemerken wir, daß der obengenannte Satz in folgender rein geometrischer Weise ausgedrückt werder könnte: "Der nichtleere Durchschnitt einer Familie $\{H_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ abgeschlossener Halbräume des R^n ist beschränkt genau dann, wenn solche Familie $\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ der Translationen existiert, daß der Durchschnitt von $\{\tau_\alpha(H_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ ein einziger Punkt darstellt".

LITERATURVERZEICHNIS

[1] K. Leichtweiß, Konvexe Mengen, VEB, Berlin 1980.

[2] W. Rudin, Principles of mathematical analysis, McGraw-Hill, 1976.

[3] D. Gale, The theory of linear economic models, McGraw-Hill, 1960.

[4] J. Cel, Bounds on solutions of nonlinear resistive networks, Int. J. Cir. Theor. Appl. (im Druck).

Institut für Mathematik
Universität Łódź

Jarosław Cel

O PEWNEJ WŁASNOŚCI ZBIORÓW WYPUKŁYCH I JEJ ZASTOSOWANIU

W artykule dowodzi się, że każdy domknięty, wypukły i niezwarty podzbiór przestrzeni euklidesowej zawiera domkniętą półprostą i za pomocą tego prostego faktu bada się ograniczoność obszaru rozwiązań układów nierówności liniowych.