matematyka

materiały metodyczne

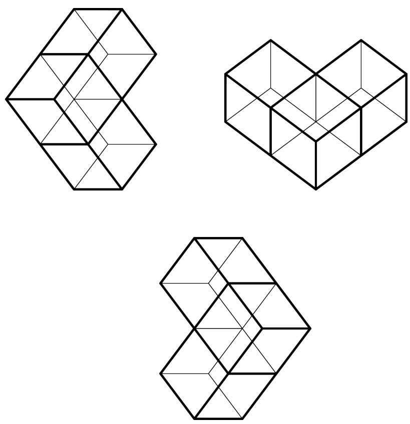
2,7182818284590452353602874713526624977572470936999595749669676277240766303535475945713821785251664274274663919320030599218174135966290435729003342952605956307381323286279434907632338298807531952510190115738341879307021540891499348841675092447614606680822648001684774118537423454424371075390777449920695517027618386062613313845830

redakcja
Ryszard J. Pawlak
Zofia Walczak

WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO

VII

Definiowanie pojęć matematycznych



Opracowanie

Monika Fabijańczyk

ROZDZIAŁ 1

Czy definicja nadmierna jest błędem dydaktycznym?

1.1. Definicja funkcji rosnącej

Jest rzeczą wiadomą, że istnieje ogromna przepaść między matematyką rozumianą jako dziedzina nauki, a matematyką nauczaną w szkole. Wysiłki podejmowane w XX wieku przez matematyków i dydaktyków matematyki w celu zmniejszenia tej różnicy nie przyniosły spodziewanych rezultatów, a jedynie zaowocowały dużym sformalizowaniem przekazywanej wiedzy.

Większość autorów podręczników skłania się do podawania definicji w wersji maksymalnie zwięzłej, zwracając szczególną uwagę na to, aby żadna jej część nie była konsekwencją pozostałych. Definicja taka jest pod względem matematycznym bardziej elegancka i wygodna dla uzasadniania istnienia obiektów spełniających tę definicję. Unika się definicji nadmiernych, które zawierają za dużo cech określanego pojęcia. Tymczasem dobór właściwej definicji pozwala często na uproszczenie rozumowań, a co za tym idzie, zwiększa przejrzystość przedstawianych treści. Definicje nadmierne nie prowadzą do błędów, a często przyczyniają się do jasności dalszych rozumowań.

Jednym z przykładów definicji podawanej w wersji minimalnej jest określenie funkcji monotonicznej. We wszystkich wiodących podręcznikach występuje ono w wersji zawierającej implikację:

Definicja. Funkcję f nazywamy rosnącą w zbiorze A zawartym w dziedzinie tej funkcji, jeżeli dla dowolnych elementów x_1, x_2 ze zbioru A zachodzi warunek: jeżeli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) < f(x_2)$.

Okazuje się, że ta forma definicji prowadzi do wielu nieporozumień. Często zdarza się, że nawet studenci matematyki rozwiązując nierówności wykładnicze nie zdają sobie sprawy z faktu równoważności przejścia typu: $5^{x+2} < 5^2 \Leftrightarrow x + 2 < 2$. Po części winę za ten brak refleksji nad definicją monotoniczności funkcji i jej wykorzystaniem do rozwiązywania nierówności ponoszą współczesne podręczniki. W klasie I ograniczają się one do podania definicji funkcji monotonicznej i jej podstawowych własności takich, jak np. różnowartościowość. Mimo, że w dalszej perspektywie własność monotoniczności funkcji jest wykorzystana do rozwiązywania pewnych nierówności, to brak jest twierdzenia:

Twierdzenie 1. *Jeżeli f jest funkcją rosnącą w zbiorze A, to dla dowolnych $x_1, x_2 \in A$ zachodzi warunek $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.*

Tymczasem równoważność ta wydaje się być istotą pojęcia monotoniczności funkcji, ponieważ pozwala rozwiązywać szeroką klasę nierówności. Dla matematyka zachodzenie implikacji odwrotnej w przypadku funkcji monotonicznej jest rzeczą bezsprzeczną, ale dla ucznia nie jest to ani oczywiste, ani banalne. Co więcej, jak wykazały badania, jest to fakt dla niego całkowicie zaskakujący. Oczywiście, podręcznik nie może zawierać wszystkich szczegółów i dobry nauczyciel powinien odpowiednio skomentować podane fragmenty tekstu nadając im odpowiednią rangę. Ale to tylko teoria, rzeczywistość okazuje się być inna!

Na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego zostały przeprowadzone badania, w których uczestniczyło 130 studentów pierwszego roku. Studenci ci dostali do rozwiązania test numer 1, a po jego zakończeniu test numer 2. Oto treść wspomnianych testów:

Test 1.

Zadanie 1. Proszę rozwiązać nierówność $2^{x+5} < 4$. W szczególności proszę zwróć uwagę, czy wszystkie przekształcenia prowadzą do nierówności równoważnych. Jeżeli tak, proszę uzasadnić to, na przykład, formułując odpowiednie definicje i twierdzenia. Jeżeli nie, proszę podać, jakie są konsekwencje tego faktu.

Test 2.

Definicja 1. Niech $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Funkcję f nazywamy rosnącą w zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$, gdy spełniony jest następujący warunek:

$$\forall_{a,b\in\mathbf{R}}(a < b \Rightarrow f(a) < f(b)). \tag{1.1}$$

Zadanie 2. Niech $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ będzie funkcją rosnącą w zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$. Czy istnieje możliwość znalezienia zbioru rozwiązań nierówności:

$$f(x-2) < f(2x-3)$$

bez znajomości postaci funkcji f? Jeżeli odpowiedź jest negatywna, uzasadnij ją. Gdy odpowiedź ta jest pozytywna, podaj definicje i twierdzenia, na których oparłeś swój wniosek.

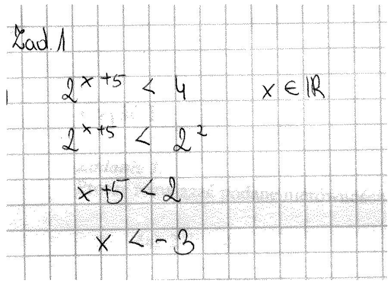
Definicja 2. Niech $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Funkcję f nazywamy rosnącą w zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$, gdy spełniony jest następujący warunek:

$$\forall_{a,b\in\mathbf{R}}(a < b \Leftrightarrow f(a) < f(b)). \tag{1.2}$$

Zadanie 3. Definicja 2 funkcji rosnącej różni się od definicji 1 warunkiem (1.2). Czy definicja 2 określa to samo pojęcie co definicja 1? Jeżeli odpowiedź jest pozytywna, uzasadnij ją. Gdy odpowiedź ta jest negatywna, podaj, która definicja opisuje szerszą klasę funkcji.

Wyniki badań

Zadanie pierwsze jest typową nierównością wykładniczą, jakich wiele rozwiązuje się w szkole. Celowo nierówność ta nie zawierała żadnych utrudnień, aby badani mogli skupić się nad przejściem $2^{x+5} < 2^2 \Leftrightarrow x + 5 < 2$. Niemal wszyscy studenci pierwszego roku studiów rozwiązali tę nierówność prawidłowo (125 osób), ale aż 63 osoby nie podały żadnych wyjaśnień. Typowe rozwiązanie zadania 1 wyglądało następująco:


Żad. 1

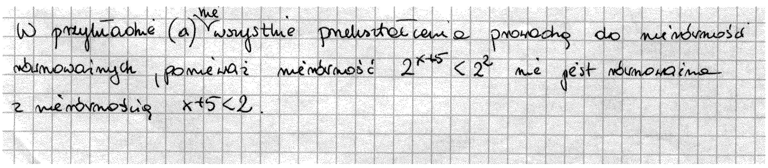
$2^{x+5} < 4$ $\quad x \in \mathbb{R}$

$2^{x+5} < 2^2$

$x+5 < 2$

$x < -3$

Zauważmy, że forma zapisu rozwiązania nierówności nie sugeruje wprost równoważności poszczególnych przejść. Część badanych studentów wręcz zaprzeczyła równoważności przejść.


W przykładzie (a) nie wszystkie przekształcenia prowadzą do nierówności równoważnych, ponieważ nierówność $2^{x+5} < 2^2$ nie jest równoważna z nierównością $x+5<2$.

Uderzającym jest fakt, że „świeżo upieczeni" maturzyści nie zdają sobie sprawy, że rozwiązując nierówność w sposób przez siebie przedstawiony muszą otrzymać ciąg nierówności równoważnych, aby zbiór rozwiązań ostatniej nierówności był równy zbiorowi rozwiązań nierówności wyjściowej.

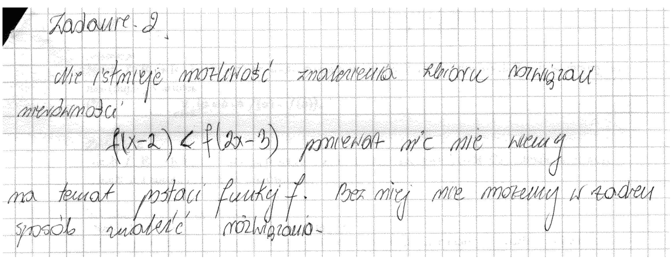
W czasie dyskusji okazało się, że brak odpowiedzi lub odpowiedzi błędne wynikały najczęściej z następujących faktów:

- brak znajomości pojęcia nierówności równoważnych i brak refleksji nad tym, dlaczego zbiór rozwiązań nierówności końcowej przyjmowany jest za zbiór rozwiązań nierówności wyjściowej;

- przekonanie, że przy kolejnych przekształceniach nierówności wystarczy wynikanie $n_1 \Rightarrow n_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow n_k$. Studenci ci ze zdziwieniem zauważali, że definicja funkcji rosnącej bezpośrednio uprawomocnia przejście $x + 2 < 2 \Rightarrow 2^{x+2} < 2^2$, a oni w swoim rozwiązaniu korzystali z implikacji odwrotnej;

- brak odpowiedzi wynikał z niewiedzy, jak uzasadnić równoważność kolejnych nierówności.

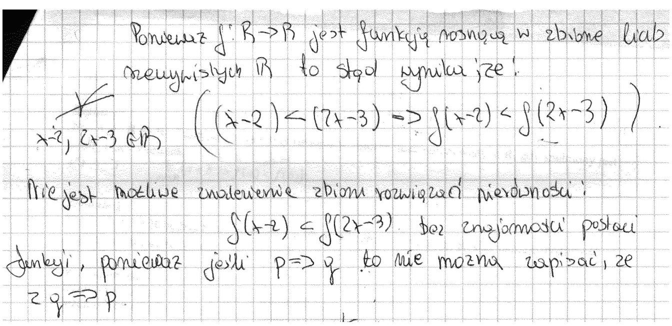
Fakt, że rozumienie pojęcia funkcji rosnącej ograniczyło się tylko do rozumienia instrumentalnego potwierdza druga część testu. Zadanie 2 zamieszczone w drugiej części testu jest uogólnieniem zadania 1 z pierwszej części testu. Konkretna funkcja wykładnicza występująca w zadaniu 1 została zastąpiona dowolną funkcją rosnącą w zbiorze liczb rzeczywistych. Tak sformułowane zadanie nie było jednak zadaniem typowym i zmuszało badanych studentów do dokładniejszej analizy definicji funkcji rosnącej. Studenci nie zauważali analogii między zadaniem 1 i 2. Traktowali zadanie 2 jako oddzielny problem. U większości z nich nie można zauważyć żadnych refleksji wynikających z rozwiązania zadania 1.



Zadanie 2.

Nie istnieje możliwość znalezienia zbioru rozwiązań nierówności

$f(x-2) < f(2x-3)$ ponieważ nic nie wiemy na temat postaci funkcji f. Bez niej nie możemy w żaden sposób znaleźć rozwiązania.



Ponieważ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją rosnącą w zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ to stąd wynika, że:

$x-2,\ 2x-3 \in \mathbb{R}$ $\big((x-2) < (2x-3) \Rightarrow f(x-2) < f(2x-3)\big)$.

Nie jest możliwe znalezienie zbioru rozwiązań nierówności:

$f(x-2) < f(2x-3)$ bez znajomości postaci funkcji, ponieważ jeśli $p \Rightarrow q$ to nie można zapisać, że z $q \Rightarrow p$.

Zad 2.
Nie możemy znaleźć zbioru rozwiązań nierówności, ponieważ w df. 1) ~~jest~~ mamy implikację $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$, zatem musimy założyć $a < b$, a my tego szukamy. Implikacja w drugą stronę nie zachodzi.

Kluczowym pytaniem w teście 2 było pytanie z zadania 3. Podane zostały dwie wersje definicji funkcji rosnącej, jedna minimalna i druga nadmierna. Pytaliśmy się, czy obie definicje określają to samo pojęcie. Na to pytanie odpowiedzieli prawie wszyscy badani (114 osób) i wszyscy oni stwierdzili, że podane definicje określają różne klasy funkcji. Zaskakującym jest fakt, że aż w 45 przypadkach wskazano na definicję 1, jako na tę, która określa szerszą klasę funkcji.

3). Definicja nie ~~jest~~ określa tego samego. ~~ponieważ~~ Szerszą klasę funkcji opisuje def 2. ponieważ trzeba udowodnić 2 implikacje: „$\Rightarrow$” i „$\Leftarrow$”

Z powyższych badań wynika, że większość studentów unika głębszej analizy rozpatrywanych problemów i ogranicza się do wyciągania wniosków bardzo powierzchownych, nasuwających się w pierwszej chwili. Strategia taka jest skuteczna w przypadku zadań standardowych, ale zawodzi, gdy pojawiają się problemy nietypowe. Brak wcześniejszych doświadczeń dotyczących takich przypadków czyni niezbędnym zastosowanie podejścia bardziej twórczego. Należy podkreślić, że badane osoby zdecydowały się na podjęcie studiów na Wydziale Matematyki i Informatyki UŁ. Możemy przypuszczać, że jako uczniowie nie napotykały one na większe trudności w uczeniu się matematyki i dlatego z punktu widzenia jej znajomości, zarówno na podstawie własnej oceny, jak i oceny nauczycieli, mogą się one uważać za osoby ponadprzeciętne.

W świetle wypowiedzi badanych studentów dotyczących intuicyjnego rozumienia pojęcia funkcji rosnącej wydaje się, że pewnym ułatwieniem w operowaniu tym pojęciem jest wprowadzenie definicji nadmiernej (z warunkiem równoważności). Sprawa wyboru definicji jest szczególnie ważna, gdyż w programie podstawowym matematyki szkoły średniej występuje pojęcie funkcji monotonicznej, a nie ma nierówności wykładniczych i logarytmicznych. Tymczasem, aby sprowokować ucznia do zainteresowania się danym pojęciem, musi ono okazać się ważnym narzędziem do rozwiązywania pewnych problemów praktycznych. Jeżeli pojęcie to nie jest wykorzystywane w dalszej nauce, wydaje się być zbytecznym i nie wartym zapamiętania. Dobra praktyka nauczycielska zaleca stwarzać sytuacje, które nie dadzą się rozwiązać przy pomocy wiedzy już posiadanej przez ucznia, lecz do rozwiązania których trzeba rozwinąć nowe środki stanowiące punkt oparcia dla nowych pojęć.

Wśród zagadnień rozważanych w pierwszej klasie liceum mogących uzasadnić przydatność wyróżnienia klasy funkcji monotonicznych jest rozwiązywanie nierówności pierwiastkowych.

Aby wprowadzić pojęcie funkcji rosnącej (I klasa liceum), najpierw poprosiłam moich uczniów o próbę rozwiązania dwóch nierówności:
(1) $\sqrt{x+2} > 4$ i (2) $\sqrt{x+2} > x$.
Ponieważ uczniowie ci nie mieli odpowiedniej wrażliwości matematycznej, podnosili obie strony badanych nierówności do kwadratu. Ich rozwiązania wyglądały następująco:

(1) Zastrzeżenie: $x \geqslant -2$;

$x + 2 > 16$

$x > 14$

(2) Zastrzeżenie: $x \geqslant -2$;

$x + 2 > x^2$

$x^2 - x - 2 < 0$

$x^2 + x - 2x - 2 < 0$

$(x + 1)(x - 2) < 0$

$$\begin{cases} x+1>0 \\ x-2<0 \end{cases} \vee \begin{cases} x+1<0 \\ x-2>0 \end{cases}$$

$-1 < x < 2$

Łatwo stwierdzało się, że rozwiązanie nierówności (2) jest błędne, ponieważ liczba spełniała tę nierówność, a nie należała do otrzymanego zbioru rozwiązań. Rozwiązanie nierówności (1) wydawało się być poprawnym. Bardzo przekonywującą weryfikacją poprawności lub niepoprawności przedstawionego rozwiązania było rozwiązanie tych nierówności w programie `Derive` zainstalowanym na komputerze szkolnym.

Powstał więc problem, kiedy daną nierówność można podnosić stronami do kwadratu, a ogólniej, kiedy do obu stron nierówności możemy „przyłożyć" funkcję i otrzymać nierówność równoważną. Prowadzi to do pytania o prawdziwość równoważności $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Obserwując wykres funkcji $f(x) = x^2$ w zbiorze liczb rzeczywistych oraz tej funkcji obciętej do przedziału $[0, \infty)$ można było uzyskać odpowiedź na pytanie, dlaczego możliwe jest podnoszenie stronami do kwadratu nierówności (1), a nierówności (2) – nie.

Rozważania te uzasadniały konieczność wyróżnienia klasy funkcji, dla których warunek $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ jest spełniony dla dowolnych x_1 i x_2 z dziedziny funkcji. Widać jednak, że w ten sposób dochodzimy do nadmiernej definicji funkcji rosnącej. Definicja ta jest bardzo wygodna przy rozwiązywaniu nierówności wykładniczych, logarytmicznych i pierwiastkowych. Warto tu nadmienić, że próby zastąpienia definicji nadmiernej definicją minimalną zawsze wydawały się moim uczniom niepotrzebnym komplikowaniem sprawy. Argument, że definicja minimalna pozwala w prostszy sposób wykazać monotoniczność funkcji okazywał się nietrafiony. W typowych zadaniach szkolnych na dowodzenie monotoniczności funkcji otrzymywany ciąg nierówności w oczywisty sposób był ciągiem nierówności równoważnych, a więc zastąpienie w definicji funkcji monotonicznej równoważności implikacją nie ułatwiało rozwiązania problemu.

Podsumowanie

O rozumieniu pojęć matematycznych należy myśleć jako o procesie stopniowym. Początkowo posiadamy bardzo ogólną ideę poznawanego pojęcia. W miarę koncentracji uwagi na danym pojęciu, a w szczególności w wyniku działania praktycznego idea ta staje się coraz bardziej spójna i klarowna. Trudno ocenić, w którym momencie następuje pełne zrozumienie, ponieważ zawsze występuje poczucie niedosytu, czy dana interpretacja jest już ostateczna. Dlatego też w początkowym okresie kształtowania pojęcia matematycznego nie należy utrudniać zrozumienia głębokich idei tego pojęcia przez nadmierne formalizowanie tekstu definicji. Na to przyjdzie czas w późniejszym okresie posługiwania się danym pojęciem.

Coraz częściej w podręcznikach szkolnych pojawia się definicja nadmierna funkcji okresowej i nie budzi to sprzeciwu. Wydaje się, że zastąpienie dotychczasowej minimalnej definicji funkcji monotonicznej definicją nadmierną doprowadziłoby do uproszczenia rozumowań i wyeksponowania istoty funkcji monotonicznej. Subtelne rozumowania dotyczące minimalizacji tej definicji można zostawić dla uczniów szczególnie zainteresowanych matematyką. Na koniec przytoczmy zapomnianą już trochę definicję funkcji rosnącej:

Definicja 3. Funkcję f nazywamy rosnącą w zbiorze A zawartym w dziedzinie tej funkcji, jeżeli dla dowolnych, różnych między sobą elementów x_1, x_2 ze zbioru A zachodzi warunek:

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

Definicja ta nie tylko podkreśla fakt, że kierunek zmian argumentów funkcji rosnącej jest zawsze taki sam jak kierunek zmian wartości tej funkcji, ale jest także wygodna przy badaniu warunku koniecznego monotoniczności funkcji różniczkowalnej.

1.2. Definicja funkcji okresowej

Często się zdarza, że pracownicy wyższych uczelni prowadzący zajęcia z matematyki skarżą się na instrumentalne zrozumienie pojęć matematycznych przez absolwentów szkół średnich. Studenci ci potrafią stosować pojęcia te tylko w sytuacjach wcześniej poznanych, natomiast brak „idei głębokiej” danego pojęcia uniemożliwia im rozwiązywanie problemów nietypowych. Przyczyną tego może być zbyt zaawansowane ujęcie materiału, które u niektórych uczniów blokuje głębokie zrozumienie pojęcia. Formalistyczne podejście do matematyki zakłada, że definicje powinny być „minimalne”, tzn.

nie powinny zawierać żadnych warunków, które mogą być wydedukowane z pozostałych części definicji. Przyjrzyjmy się trzem definicjom funkcji okresowej, które występują w podręcznikach szkoły średniej.

Definicja 4. Funkcję liczbową f nazywamy okresową wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba T różna od zera, że dla każdej liczby x należącej do D_f, liczby $x+T$ i $x-T$ należą do D_f i zachodzi równość $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$.

Definicja 5. Funkcję f nazywamy okresową, jeśli istnieje taka liczba $r{>}0$, że dla każdego argumentu x liczba $x{+}kt$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą, też należy do dziedziny funkcji oraz $f(x) = f(x+kt)$.

Definicja 6. Funkcję liczbową f nazywamy okresową, jeżeli istnieje taka liczba $T > 0$, że:

1. $\forall_{x\in R}(x \in D_f \Leftrightarrow x+T \in D_f)$,
2. $\forall_{x\in D_f}(f(x+t) = f(x))$.

W niektórych podręcznikach warunek 1 jest zastąpiony równoważnym:

$$\forall_{x\in R}(x \in D_f \Rightarrow x+T \in D_f \wedge x-T \in D_f).$$

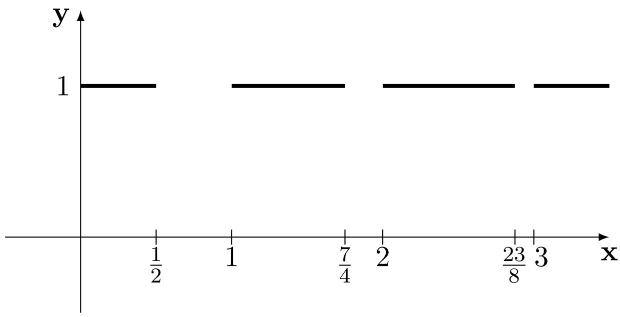
Definicje 4 i 5 są definicjami nadmiernymi, ale są o wiele bardziej zrozumiałe dla ucznia szkoły średniej, niż definicja 6.

Definicja 4 w sposób bardzo czytelny oddaje główną ideę funkcji okresowej. Jest ona opisem geometrycznej intuicji tej funkcji. Warunek pierwszy pozwala przesuwać się po osi argumentów z dowolnego punktu dziedziny funkcji w prawo i w lewo o T jednostek, a warunek drugi gwarantuje „powtarzalność" wykresu funkcji przy takich przesunięciach. Nadmierność tej definicji polega na zamieszczeniu warunku $f(x{-}T) = f(x)$, ponieważ wynika on z warunków poprzednich. Jednakże wydaje się, że pominięcie tego warunku w definicji może powodować błędne ukształtowanie się pojęcia funkcji okresowej u słabszych uczniów. Zauważmy, że definicja 6, która jest definicją minimalną, wprowadziła w błąd nie tylko uczniów, ale także niektórych autorów podręczników. W jednym z podręczników znajduje się następująca definicja funkcji okresowej:

Definicja. Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy okresową w zbiorze X, jeśli istnieje liczba t różna od zera taka, że dla każdego x ze zbioru X, $x + t \in X$ i $f(x + t) = f(x)$.

Definicja ta różni się od definicji 6 tylko zastąpieniem w warunku pierwszym równoważności implikacją. Dla niedojrzałego matematycznie ucznia, u którego nie jest jeszcze ukształtowana poprawnie idea funkcji okresowej, jest to subtelność trudna do zauważenia. Konsekwencje jednak tej zamiany są bardzo poważne.

Rozważmy funkcję $f(x) = 1$ określoną na zbiorze $\bigcup_{n=0}^{\infty} \langle n, n+1-\frac{1}{2^{n+1}}\rangle$. Jest to funkcja stała obcięta do sumy przedziałów, których każdy następny jest trochę dłuższy od poprzedniego.



Oczywiście dla $T = 1$ mamy:

1. $x \in D \Rightarrow x + T \in D_f$,
2. $x \in D_f \Rightarrow f(x + T) = f(x)$.

Niewątpliwie jednak, podana funkcja nie jest funkcją okresowa w ogólnie rozumianym sensie.

Definicja 5 jest także definicją nadmierną. Zamiast zakładać, że k jest liczbą całkowitą wystarczy w warunku pierwszym założyć, że $k \in \{-1, 1\}$, a w warunku drugim $k = 1$. Jakże to jednak zuboży wymowę tej definicji. Autorzy podręcznika wyszli ze słusznego moim zdaniem wniosku, że dążenie do doskonałości nie zawsze popłaca. W moim odczuciu definicja 5 jest trochę trudniejsza od definicji 4, ponieważ wymaga od ucznia zauważenia, że założenie *k jest dowolną liczbą całkowitą* pozwala na poruszanie się po osi argumentów w obie strony. Nie zmniejsza to jednak w istotny sposób czytelności tej definicji.

Konkluzja z powyższych rozważań jest następująca:

> Używanie definicji nadmiernych w nauczaniu szkolnym nie jest błędem, a często jest uzasadnione dydaktycznie. Jeżeli chodzi o definicję funkcji okresowej wydaje się sensownym użycie definicji 4 w klasach słabszych, definicji 5 w klasach lepszych, a doprowadzenie tych definicji do postaci definicji minimalnych zostawiłabym dla najlepszych uczniów, którzy czują potrzebę formalizowania matematyki.

Bibliografia

[1] M. Antek, K. Belka, P. Grabowski, *Prosto do matury*, Nowa Era, 2012.

[2] M. Bryński, N. Dróbka, K. Szymański, *Matematyka*, WSiP, 2002.

[3] M. Karpiński, M. Dobrowolska, M. Braun, J. Lech, *Matematyka z Plusem*, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, 2012.

[4] M. Kuczab, E. Kuczab, E. Świda, *Matematyka*, Oficyna Edukacyjna Pazdro, 2012.

[5] R. Pawlak, M. Fabiańczyk, H. Pawlak, Alicja Rychlewicz, Andrzej Rychlewicz, K. Żylak, *Matematyka krok po kroku*, Respolona, 2009.

[6] H. Pawłowski, *Matematyka*, Operon, 2002.

NOWOCZESNY
NAUCZYCIEL
MATEMATYKI

publikacja bezpłatna

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

ISBN 978-83-7969-490-7

WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO

www.wydawnictwo.uni.lodz.pl
e-mail: ksiegarnia@uni.lodz.pl
tel. (42) 665 58 63, faks (42) 665 58 62