ROZDZIAŁ 5

TEORIODOWODOWE KRYTERIA LOGICZNOŚCI

RACHUNEK SEKWENTÓW

W rozdziale drugim omówiona została klasyczna definicja konsekwencji logicznej Alfreda Tarskiego. Definicja ta, jak pamiętamy, odwoływała się do pojęć semantycznych takich jak reinterpretacja i prawda oraz do założonego uprzednio podziału wyrażeń na logiczne i pozalogiczne. Postulowana przez Tarskiego niezależność tematyczna relacji konsekwencji okazała się bardzo trudna do wyeksplikowania za pomocą pojęć semantycznych. Relację konsekwencji można jednak eksplikować bez odwoływania się do jakichkolwiek środków semantycznych. Postulat ten został praktycznie zrealizowany już w sylogistyce Arystotelesa, która pod wieloma względami zbudowana jest jak system dedukcji naturalnej. Logika w tym sensie jest rachunkiem z relacją konsekwencji rozumianą jako „instrukcja" przekształcania napisów. Status rachunków posiadają sformułowania logiki w postaci systemów aksjomatycznych, teorii konsekwencji zaksjomatyzowanej przez Tarskiego[1] oraz systemy rachunku sekwentów. W systemach aksjomatycznych oraz systemach dedukcji naturalnej nie daje się rozdzielić eksplikacji relacji wynikania od eksplikacji stałych logicznych. Z tego punktu widzenia szczególny status przypisuje się systemom rachunku sekwentów stworzonym przez niemieckiego logika Gentzena. W systemach tych występują bowiem **reguły strukturalne** definiujące relację wynikania oraz **reguły operacyjne** definiujące stałe logiczne[2]. Bardzo ważną cechą systemów Gentzena jest to, że relacja wynikania jest wyeksplikowana przez reguły strukturalne niezależnie od obecności znaków logicznych. A zatem eksplikacje relacji wynikania i stałych logicznych są do pewnego stopnia niezależne.

---

[1] Nie chodzi tutaj o semantyczną definicję konsekwencji logicznej, na którą powoływaliśmy się wielokrotnie, lecz o późniejszą zaksjomatyzowaną przez Tarskiego teorię konsekwencji, która stanowi podejście w pewnym sensie konkurencyjne do rachunków sekwentów Gentzena.

[2] O tym, że nie zawsze muszą to być definicje w ścisłym tego słowa znaczeniu będzie mowa na końcu rozdziału.

Sekwentem nazywa się napis $\Gamma \vdash \Delta$ rozumiany w następujący sposób: ze wszystkich formuł skończonego ciągu Γ, zwanego **antecedensem**, wynika przynajmniej jedna formuła ze skończonego ciągu Δ, zwanego **konsekwensem**[3]. Symbol $\vdash$ łączący antecedens z konsekwensem oznacza relację wynikania logicznego. Dla logiki klasycznej podaje Gentzen następujące reguły strukturalne:

1. Reguła aksjomatyczna: $A \vdash A$, która głosi, że dowolne zdanie wynika samo z siebie;
2. Reguły rozrzedzania prawostronnego i lewostronnego:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}$$

   które głoszą, że jeżeli z ciągu formuł Γ wynika przynajmniej jedna formuła z ciągu Δ, to z ciągu Γ wynika przynajmniej jedna formuła z ciągu Δ przedłużonego o formułę A oraz z ciągu Γ przedłużonego o formułę A wynika przynajmniej jedna formuła z ciągu Δ;
3. Reguła cięcia:

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \qquad \Gamma_2, A \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}$$

4. Reguła kontrakcji (skracania) pozwala opuścić jedno wystąpienie powtarzającej się kolejno formuły w antecedensie lub w konsekwensie sekwentu;
5. Reguła permutacji (przestawiania) pozwala zmieniać kolejność dwóch występujących bezpośrednio po sobie formuł w antecedensie lub w konsekwensie sekwentu.

Wymienione reguły uznać można za postulaty, za pomocą których definiuje się relację wynikania logicznego, bez odwołania do żadnych terminów semantycznych. Reguły strukturalne obowiązują zarówno dla sekwentów złożonych jedynie z formuł atomowych, jak i dla sekwentów, w których występują znaki logiczne. Znaki logiczne są wprowadzane przez reguły operacyjne, które są, wedle słów Gentzena, „jakby ich definicjami”[4]. Dla każdej stałej logicznej podaje się dwie reguły operacyjne: regułę wprowadzania stałej do

---

[3] Tak jest w oryginalnym sformułowaniu Gentzena. W przypadku sytemu Gentzena dla logiki klasycznej można zastąpić ciągi formuł przez zbiory formuł. Dla logik nieklasycznych, nawet dla intuicjonizmu, uproszczenie takie nie jest możliwe.

[4] Por. Gentzen [1934], 5.13.

poprzednika i regułę wprowadzania stałej do następnika sekwentu. Dla przykładu przytoczmy reguły operacyjne dla implikacji, pozostałe reguły zostaną podane w miarę potrzeby:

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \qquad B, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{A \Rightarrow B, \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2} \qquad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B}$$

Rozróżnienie na reguły operacyjne i strukturalne stwarza możliwość wyeksplikowania pojęcia logiczności znaków na podstawie pewnych własności reguł operacyjnych. Jedynie te znaki zasługują na miano znaków logicznych, których wprowadzenie „nie zmienia” wyeksplikowanej przez reguły strukturalne, niezależnej tematycznie relacji wynikania.

KONSERWATYWNE ROZSZERZENIA SYSTEMU

Formułowanie kryteriów logiczności na gruncie rachunku sekwentów zainicjowane zostało polemiką między A. N. Priorem[5], a N. Belnapem[6]. Celem argumentacji Priora było wykazanie całkowitej błędności i bezużyteczności podejścia teoriodowodowego do definiowania stałych logicznych. Znaczenie[7] spójnika „i” rozumianego koniunkcyjnie jest wyrażone, jak twierdzą zwolennicy podejścia teoriodowodowego, za pomocą trzech podanych niżej reguł, które zapewniają poprawność rozumowaniom ze spójnikiem *i* pełniącym w tych rozumowaniach istotną rolę:

i) *P, Q/ P i Q* ii) *P i Q / P* iii) *P i Q / Q*

Z tego samego powodu, argumentuje Prior, podane niżej reguły dla spójnika *TONK* powinny w pełni wyrażać jego znaczenie i zapewniać poprawność rozumowaniom, w których spójnik ten pełni istotną rolę.

a) *P / P TONK Q*; b) *P TONK Q / Q*

---

[5] Por. Prior [1960].

[6] Por. Belnap [1961].

[7] Chodzi tu o znaczenie stałej logicznej w sensie opisanym przez Ajdukiewicza w [1934]. Znaczenie w tym sensie jest wyznaczone właśnie przez owe reguły zwane inferencyjnymi dyrektywami znaczeniowymi.

Reguły te pozwalają jednak wyprowadzić ze zdania prawdziwego zdanie jawnie fałszywe. Niech P będzie zdaniem 2 + 2 = 4, zaś Q zdaniem 2 + 2 = 5. Rozumowanie:

$$\frac{\dfrac{2+2=4}{2+2=4\ \mathit{TONK}\ 2+2=5}\ \text{z a)}}{2+2=5}\ \text{z b)}$$

jest jawnie niepoprawne, gdyż prowadzi od prawdy do fałszu.

Aby uniknąć takich konsekwencji należy, zdaniem Priora, sprawdzić czy występujące w sposób istotny w badanych rozumowaniach wyrażenia posiadają **znaczenia** określone niezależnie od reguł wprowadzania. Dopiero w takim przypadku reguły wprowadzania tych wyrażeń będzie można uznać za poprawne. Warunek ten spełniają wyrażenia zdefiniowane w kategoriach semantycznych, na przykład prawdziwościowe spójniki zdaniowe. W konsekwencji Prior kwestionuje możliwość definiowania znaków logicznych w kategoriach teoriodowodowych, a zarazem kwestionuje możliwość formułowania kryteriów logiczności w tych kategoriach.

Ze zdecydowaną krytyką poglądów Priora wystąpił Belnap, który podał poważne argumenty świadczące o możliwości definiowania spójników nie tylko w kategoriach semantycznych, ale również w kategoriach teoriodowodowych. Spór dotyczący dwóch sposobów definiowania stałych logicznych sprowadził Belnap do dwóch sposobów wyjaśniania pojęć, które znane są już od czasów starożytnych. Definiowanie stałych logicznych na gruncie semantycznym zaliczył do sposobu *analitycznego*, który pochodzi od Arystotelesa. Polega on na „budowaniu" znaczeń wyrażeń złożonych na podstawie znaczeń wyrażeń prostych i definiowaniu poprawności rozumowania w oparciu o znaczenia zdań, które w nim występują. Z kolei definiowanie stałych logicznych w kategoriach teoriodowodowych, tj. za pomocą reguł inferencji, zaliczył do pochodzącego od Platona sposobu *syntetycznego*. Platon wyjaśniał przypadki jednostkowe za pomocą przypadków ogólnych, na przykład prawość człowieka dobrem ogółu, nie zaś na odwrót. Syntetyczny sposób definiowania znaczenia stałych logicznych polega zatem na wyprowadzaniu ich znaczeń z funkcji jaką pełnią w schematach poprawnych rozumowań. Za prekursora tego podejścia Belnap uznał Ludwiga Wittgensteina[8].

Jednak w jaki sposób można zapobiec uznaniu *TONK* za spójnik logiczny, przy jednoczesnym uznaniu, że jest nim spójnik *i*? Można to uczynić formułując pewne ogólne założenia na temat własności relacji wynikania, które zachowywane są przez reguły dla stałych logicznych, a nie są zachowywane przez reguły dla takich wyrażeń jak *TONK*. W podejściu teoriodowodowym

[8] Chodzi tu oczywiście o poglądy Wittgensteina zawarte w *Traktacie*.

funkcję owych założeń na temat relacji wynikania pełnią reguły strukturalne rachunku sekwentów Gentzena. Aby reguły wprowadzania stałej logicznej stanowiły jej definicję, nie mogą one prowadzić do rezultatów sprzecznych z przyjętymi założeniami. Jako przykład Belnap podaje definicję operacji *?* na liczbach wymiernych:

$a / b \; ? \; c / d =_{df} a + c / b + d$

Definicja ta jest niedopuszczalna, gdyż posiada konsekwencje sprzeczne z wcześniejszymi założeniami arytmetyki, np. pozwala na wyprowadzenie „równości" 2 / 3 = 3 / 5[9].

W przypadku reguł wprowadzania stałych logicznych, warunek niesprzeczności zapewniony jest przez **konserwatywność** rozszerzenia systemu przez owe reguły. Nieformalnie rzecz biorąc konserwatywność rozszerzenia systemu przez regułę wprowadzania stałej polega na tym, że po wprowadzeniu stałej logicznej nie można wyprowadzić żadnego nowego sekwentu, który owej stałej nie zawiera. W przypadku reguł wprowadzających stałą *TONK* rozszerzenie nie jest konserwatywne, gdyż pozwala na wyprowadzenie dowolnego sekwentu postaci $A \vdash B$, na przykład $2 + 2 = 4 \vdash 2 + 2 = 5$, który nie zawiera stałej *TONK*, a jednocześnie nie jest wyprowadzalny z samych reguł strukturalnych. Podobnie jest w przypadku wprowadzonej wcześniej operacji oznaczonej symbolem „znaku zapytania".

Zdefiniujmy obecnie pojęcie konserwatywności rozszerzenia systemu. Niech *S* będzie systemem formalnym w języku *L*. Wzbogacając język *L* symbolem α, zaś zbiór postulatów systemu *S* odpowiednimi postulatami zawierającymi α, otrzymujemy system S_α. System S_α jest konserwatywnym rozszerzeniem systemu *S* wtw, gdy każde twierdzenie sytemu S_α, które nie zawiera α, jest twierdzeniem systemu *S*. Ogólnie rozumiane pojęcie konserwatywności można łatwo zaadaptować do rachunku sekwentów. System S_α jest konserwatywnym rozszerzeniem *S* wtw, gdy dla dowolnych zbiorów formuł Γ i Δ nie zawierających α, jeżeli $\Gamma \vdash_{S\alpha} \Delta$, to $\Gamma \vdash_S \Delta$[10], gdzie $\Gamma \vdash_S \Delta$ jest sekwentem wyprowadzalnym w rachunku sekwentów dla systemu *S*. Wyrażenia postaci $\Gamma \vdash \Delta$ można traktować jako formuły atomowe języka rachunku sekwentów. Niech sformułowanie *Wyp*(*Seq*), gdzie *Seq* jest pewnym sekwentem, zastępuje stwierdzenie głoszące, że *Seq* jest wyprowadzalny w rachunku sekwentów. Dołączmy do rachunku sekwentów regułę R_α wprowadzania pewnej stałej α. Reguła R_α może być uważana za formułę złożoną języka rachunku sekwentów. Sformułowanie $Wyp_{R\alpha}(Seq)$ oznacza, że sekwent *Seq* jest wyprowadzalny w rachunku sekwentów wzbogaconych o regułę R_α. Konserwatywność rozszerzenia

[9] Jest tak, gdyż 1 / 2 ? 1 / 1 = 2/ 3, zaś 2 / 4 ? 1 / 1 = 3 / 5.

[10] Por. Došen i Schröder-Heister [1985], s. 166.

rachunku sekwentów sprowadza się zatem do tego, że jeżeli sekwent *Seq* nie zawiera α, to jeżeli $Wyp_{R\alpha}(Seq)$, to $Wyp(Seq)$, co pokrywa się z ze stosowanym często pojęciem nietwórczości reguły R_{α}[11].

Wymóg, aby wprowadzenie znaku prowadziło do konserwatywnego rozszerzenia systemu rachunku sekwentów, jest warunkiem koniecznym logiczności tego znaku[12]. Niekonserwatywne rozszerzenie sytemu prowadzi bowiem do możliwości dowiedzenia sekwentów, które nie zawierają nowej stałej, a mimo to są niedowodliwe na gruncie reguł strukturalnych. Czy jednak konserwatywność rozszerzenia systemu stanowi warunek wystarczający logiczności? Jeżeli system *S* uznajemy za logikę, to czy żadne konserwatywne wprowadzenie symbolu α nie wyprowadza nas poza logikę i czy α zasługuje na miano znaku logicznego? W przypadku przytoczonej wyżej definicji konserwatywności z pewnością tak nie jest. Bowiem do rachunku sekwentów klasycznego rachunku predykatów można dołączyć aksjomaty dowolnej teorii uznawanej za pozalogiczną, np. teorii monogości lub arytmetyki, aby uzyskać konserwatywne rozszerzenie systemu. Oczywiście aksjomat traktujemy jako jednoformułowy sekwent postaci $\vdash A$.

Uznanie konserwatywności rozszerzenia systemu za warunek wystarczający logiczności może zadowolić jedynie skrajnego logicystę. Dla przeciwnika logicyzmu satysfakcjonujący byłby jednak warunek, który wyklucza poza zakres terminu „znak logiczny" cały szereg wyrażeń matematycznych, które są wprowadzone za pomocą konserwatywnych rozszerzeń systemu aksjomatycznego logiki.

KRYTERIA LOGICZNOŚCI HACKINGA

Wystąpienie Belnapa sprowokowało pytanie o warunki jakie musi spełniać reguła wprowadzania stałej, aby jej dołączenie do systemu Gentzena nie wyprowadzało poza logikę. W pytaniu tym ukryte jest jednak założenie, które głosi, że reguły strukturalne definiują niezależną tematycznie relację wynikania logicznego. Na założeniu tym opiera się także kryterium logiczności Iana Hackinga sformułowane w wielowątkowym artykule *What is logic*?[13], którego celem była próba wyznaczenia granicy dzielącej logikę od teorii pozalogicznych.

Inspiracji do szukania kryteriów logiczności między własnościami reguł operacyjnych rachunku sekwentów dostarczył Hackingowi *Traktat* Wittgesteina:

[11] Por. Pogorzelski [1989], s. 104.
[12] Założenie to kwestionuje Došen, którego poglądy zostaną omówione w dalszej części rozdziału.
[13] Por. Hacking [1979].

Czy zdanie należy do logiki, da się wyliczyć obliczając logiczne własności *symbolu*. Robimy tak „dowodząc” jakiejś tezy logicznej. Nie troszcząc się bowiem ani o sens, ani o znaczenie, tworzymy z innych zdań tezę logiczną według reguł, które dotyczą tylko znaków[14].

Tezy logiki Hacking nazywa, za Wittgensteinem, „produktami ubocznymi faktów dotyczących użycia znaków logicznych”. Fakty te wyrażone są za pomocą reguł operacyjnych rachunku sekwentów. Reguły strukturalne wyrażają natomiast ogólne postulaty znaczeniowe dla relacji wynikania:

1. Zwrotność, opisana za pomocą reguły aksjomatycznej, wyraża oczywistą intuicję, że każde zdanie jest swoją własną konsekwencją. Reguła aksjomatyczna pełni rolę analogiczną do prostych identyczności, z których, jak postulował Leibniz, można wyprowadzić wszystkie prawdy konieczne;
2. Stabilność (klasycznej) konsekwencji ze względu na dodatkowe wnioski i przesłanki, wyrażona przez reguły rozrzedzania;
3. Przechodniość relacji konsekwencji wyrażona przez regułę cięcia.

Rozważmy język złożony jedynie z formuł atomowych. W języku tym zachodzą wszystkie reguły strukturalne, zaś reguła cięcia jest zbędna, gdyż można za jej pomocą wyprowadzić dokładnie te same sekwenty co bez niej. Jeżeli rozszerzenie języka atomowego o nowy symbol ma **zachować** logiczność relacji wynikania, to reguła wprowadzania owego znaku nie może naruszać żadnej z wymienionych własności. Aby spełnić ten warunek, Hacking żąda, aby po wprowadzeniu do języka dowolnego znaku logicznego α, wszelki dowód sekwentu, w którym ów znak występuje mógł być konstruowany jedynie:

1) za pomocą reguł wprowadzania znaku α,
2) za pomocą reguł aksjomatycznych dla formuł atomowych,
3) za pomocą reguł rozrzedzania dla formuł atomowych,
4) bez reguły cięcia.

Innymi słowy w dowodzie dowolnego sekwentu zawierającego przynajmniej jedno wystąpienie symbolu α reguła cięcia musi być eliminowalna, zaś pozostałe reguły strukturalne muszą być redukowalne do swych postaci atomowych. Ponadto eliminacja ta musi być możliwa w skończonej liczbie kroków dowodowych. Wymienione postulaty eliminowalności reguł strukturalnych stanowiły dla Hackinga warunek konieczny **zachowawczości** rozszerzeń systemu przy wprowadzaniu znaków, gwarantujący ich logiczność. Zachowawczość w sensie Hackinga odbiega od przedstawionego wcześniej, standardowego sposobu rozumienia pojęcia konserwatywności rozszerzenia systemu. Stosowanie tego kryterium prowadzi do zaliczenia do symboli pozalogicznych operatorów konieczności i możliwości wszelkich logik modalnych, a tym samym sprowadzenia owych logik do roli pozalogicznych

---

[14] Por. Traktat 6.126.

teorii tych operatorów. Stanowisko to uzasadnia Hacking na przykładzie reguł wprowadzania konieczności dla systemu *S*5:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \Box A \vdash \Delta} \qquad\qquad \frac{\Box\Gamma \vdash \Box\Delta, A}{\Box\Gamma \vdash \Box\Delta, \Box A}$$

Gdzie $\Box\Gamma$ oraz $\Box\Delta$ oznaczają ciągi formuł powstałych z ciągów formuł Γ i Δ przez poprzedzenie każdej z nich symbolem konieczności. Jeżeli chcemy użyć w dowodzie reguły wprowadzania konieczności do konsekwensu, to niekiedy nie możemy w krokach dowodowych poprzedzających użycie tej reguły, wyeliminować reguł rozrzedzania na rzecz ich postaci atomowych. Zastosujmy regułę wprowadzania konieczności do konsekwensu sekwentu $\Box B \vdash \Box B, A$, aby w rezultacie otrzymać sekwent $\Box B \vdash \Box B, \Box A$. By móc użyć tej reguły, musimy uprzednio wykonać jednak kilka kroków dowodowych:

$B \vdash B$ (reguła aksjomatyczna w postaci atomowej)
$\Box B \vdash B$ (reguła wprowadzania konieczności do antecedensu)
$\Box B \vdash \Box B$ (reguła wprowadzania konieczności do konsekwensu)
$\Box B \vdash \Box B, A$ (reguła rozrzedzania prawostronnego nieredukowalna do postaci atomowej, co świadczy o pozalogiczności $\Box$)

Zauważmy, że nie możemy zastosować reguły wprowadzania konieczności do konsekwensu ani dla sekwentu $B \vdash B$, ani $\Box B \vdash B, A$, gdyż aby zastosować tę regułę, symbol konieczności musi poprzedzać Γ i Δ. A zatem, jak twierdzi Hacking, poprawność dowodu zależy od jego historii i od formy zdań pojawiających się w poprzednich wierszach dowodowych. Wprowadzenie symbolu $\Box$ prowadzi do zamiany relacji wynikania logicznego na relację wynikania „metalogicznego”[15].

Kryterium logiczności Hackinga nie stosuje się wprost do logik nieklasycznych, alternatywnych wobec logiki klasycznej. Hacking nie podjął próby zmodyfikowania swojego kryterium, stwierdził jedynie, że ewentualne kryterium logiczności dla wyrażeń logik nieklasycznych, np. logiki intuicjonistycznej, musi odnosić się do innego „szkieletu logicznego”, czyli innych reguł strukturalnych niż dla logiki klasycznej. Zapewne trudność w rozszerzeniu kryterium Hackinga na logiki nieklasyczne brała się stąd, że dokonał on uproszczenia polegającego na zastąpieniu w sekwentach ciągów formuł zbiorami formuł. Uproszczenie to, uzasadnione w przypadku logiki klasycznej, prowadzi do pominięcia strukturalnych reguł przestawiania i kontrakcji, które również są eliminowalne w dowodach, stanowiąc przemilczaną część kryterium

[15] Kryterium logiczności Hackinga sprowokowało ożywioną polemikę Można tu wymienić dwa bezpośrednio polemiczne artykuły, por. Sundholm [1981] i Peacocke [1981] oraz szereg dygresji w Peacocke [1976], McCarthy [1989] oraz Došen [1989].

Hackinga. Przypomnijmy, że w logice intuicjonistycznej reguły te nie mogą być za każdym razem eliminowane z dowodu. Dlatego kryterium Hackinga rozumiane dosłownie nie może być rozszerzone na logiki nieklasyczne. Jednak na usprawiedliwienie Hackinga można powiedzieć, że cel, który przed sobą postawił polegał na wyznaczeniu granicy dzielącej logikę klasyczną od nadbudowanych nad nią teorii pozalogicznych, w szczególności zaś na odnalezieniu kryteriów, które pozwoliłyby na jednoznaczne zaakceptowanie lub odrzucenie poglądów logicystów, nie zaś na szukaniu kryteriów bycia „właściwą logiką" w klasie logik alternatywnych.

STRUKTURALNA FUNKCJA ZNAKÓW LOGICZNYCH U DOŠENA

Costa Došen, podobnie jak Hacking, poszukiwał kryteriów logiczności na gruncie rachunku Gentzena[16]. Przez logikę, w najogólniejszym tego słowa znaczeniu, Došen rozumie „naukę o formalnych relacjach wynikania"[17]. Liczba mnoga nie jest w tym sformułowaniu przypadkowa. Według Došena z jednym rodzajem relacji wynikania mamy do czynienia w logice klasycznej, a z innymi w alternatywnych logikach nieklasycznych. Problem ten, zauważony już przez samego Gentzena, stał się osią koncepcji Došena głoszącą, że relacje wynikania w logice klasycznej, intuicjonistycznej (system Heytinga) i relewantnej (system *R* Andersona i Belnapa) scharakteryzowane są w pełni przez właściwe dla każdej z nich reguły strukturalne. Różnice między alternatywnymi relacjami wynikania są zatem rezultatem różnic między odpowiednimi układami reguł strukturalnych. Różnice te muszą być zachowywane przez reguły wprowadzania znaków logicznych, które są zasadniczo takie same dla wszystkich logik.

W przypadku logiki klasycznej chodzi oczywiście o podany na początku rozdziału zbiór reguł strukturalnych wraz z pominiętą przez Gentzena regułą podstawiania za zmienne, w której dolny sekwent powstaje z górnego przez zastąpienie wszystkich wolnych wystąpień zmiennej x przez term t, wolny dla x w sekwencie górnym:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{S(x/t)[\Gamma \vdash \Delta]}$$

Dla logiki intuicjonistycznej, Gentzen wprowadził strukturalny wymóg, aby wszystkie sekwenty w dowodach były „jednokonkluzyjne", co oznacza, że Δ

[16] Szczególnie w Došen [1989] oraz w rozprawie doktorskiej, Došen [1980].

[17] Por. Došen [1989], s. 364.

staje się ciągiem składającym się z dokładnie jednej formuły. Prowadzi to oczywiście do ograniczenia wszystkich cytowanych reguł strukturalnych; w szczególności odrzuca się regułę prawostronnego rozrzedzania. Dla systemu logiki relewantnej *R* odrzuca się zarówno regułę rozrzedzania prawostronnego jak i lewostronnego.

Reguły strukturalne stanowią według Došena „krok zerowy" definicji indukcyjnej odpowiedniej relacji wynikania logicznego. Za krok indukcyjny uznaje wprowadzenie nowego znaku za pomocą odpowiedniej reguły operacyjnej, pod warunkiem jednak, że reguła ta nie wyprowadzi nas poza logikę, czyli nie zmieni zasadniczo relacji wynikania. Znak logiczny jest zatem w pewnym sensie zbędny i pełni podobną funkcją do **znaku przestankowego**. Za kryterium logiczności reguł operacyjnych, a zarazem wprowadzanych przez nie znaków, Došen uznał wymóg, aby wprowadzony znak był **analizowalny** w kategoriach strukturalnych lub definiowalny za pomocą wyrażeń analizowalnych w kategoriach strukturalnych. Na podstawie tego kryterium Došen stwierdził, że oprócz spójników zdaniowych klasycznych, intuicjonistycznych i relewantnych, do znaków logicznych zaliczyć można: predykat identyczności, kwantyfikatory rachunku pierwszego rzędu oraz operatory modalne *S*4 i *S*5 klasycznego i intuicjonistycznego rachunku zdań.

Zanim zostanie podane wyjaśnienie kluczowego dla koncepcji Došena terminu „analiza", przyjrzyjmy się kilku przykładom, które zilustrować mają podobieństwo między znakami logicznymi i znakami przestankowymi.

Przykład 1

Rozważmy regułę wprowadzania implikacji do konsekwensu oraz regułę odwrotną eliminacji implikacji z konsekwensu. Dolny sekwent tej reguły, wyrażający wynikanie „niestrukturalne", jest poprawny jedynie wtedy, gdy poprawny jest sekwent górny, wyrażający pewne wynikanie „strukturalne"[18].

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B}$$

(podwójna kreska: ============)

Reguła „z góry na dół" stanowi uogólnienie twierdzenia o dedukcji:

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}$$

[18] Określenie "strukturalny" oznacza tyle co "bez stałych logicznych" lub wyprowadzony jedynie dzięki regułom strukturalnym.

z reguły odwrotnej[19] można wyprowadzić regułę *Modus Ponens* (*MP*):

$$\frac{\vdash A \qquad \vdash A \Rightarrow B}{\vdash B}$$

Aby się o tym przekonać załóżmy, że Γ i Δ są ciągami pustymi. Wówczas z sekwentu $\vdash A \Rightarrow B$ otrzymujemy na mocy cytowanej reguły sekwent $A \vdash B$, zaś na podstawie reguły cięcia otrzymujemy $\vdash B$.

Przytoczona obustronna reguła operacyjna dla implikacji charakteryzuje różne jej rodzaje: klasyczną, intuicjonistyczną i relewantną. Jedyna różnica polega na zmianie wymienionych wcześniej założeń strukturalnych. Nie ma zatem sensu mówić o różnych spójnikach implikacji dla różnych logik, lecz o jednej implikacji, która jest tą samą implikacją w logice klasycznej, intuicjonistycznej i relewantnej. Prowadzi to Došena do tezy głoszącej, że w logice klasycznej, intuicjonistycznej i relewantnej mamy do czynienia z tymi samymi spójnikami, lecz wprowadzonymi w innym „kontekście strukturalnym". W ujęciu Došena „znaczenie" spójnika wyznaczone jest całkowicie przez odpowiednie dla niego reguły operacyjne, nie można zatem mówić o różnych implikacjach, koniunkcjach czy negacjach. Przytoczone reguły dla implikacji świadczą o tym, że forma logiczna formuły $A \Rightarrow B$ wyraża w języku przedmiotowym strukturalne cechy metajęzykowej relacji wynikania, co wyraża intuicyjny w języku naturalnym związek między metajęzykowym „wynika*"* *z* a „jeżeli..., to...*"* z poziomu przedmiotowego. W tym właśnie sensie implikacja pełni funkcję znaku przestankowego w języku przedmiotowym.

Przykład 2
W sposób nieco mniej oczywisty funkcję znaków przestankowych pełnią kwantyfikatory wprowadzane za pomocą następującej pary obustronnych reguł:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x A} \qquad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x A \vdash \Delta}$$

gdzie zmienna x nie może być wolna odpowiednio w Γ i Δ.
Przestankową funkcję kwantyfikatorów Došen tłumaczy poprzez odwołanie się do cytowanej wcześniej strukturalnej reguły podstawiania dla zmiennych. Reguła ta pozwala odczytywać wolne wystąpienia zmiennej jako „dowolne". Reguły dla kwantyfikatorów informują zatem o miejscu w schemacie wynikania

[19] Reguły operacyjne w rachunku sekwentów są odwracalne, tj. nie tylko wprowadzają znak logiczny do dowodu, ale pozwalają go również z dowodu wyeliminować.

tego co jest „dowolne”. Gdy „dowolne” występuje w antecedensie sekwentu, staje się „pewnym”; gdy występuje w konsekwensie sekwentu, staje się „każdym”. Zatem logiczna forma wyrażeń $\forall xA$ i $\exists xA$ odzwierciedla na poziomie języka przedmiotowego pewne „strukturalny” cechy wnioskowania dedukcyjnego.

Przykład 3
Odpowiednie reguły operacyjne pozwalają potraktować koniunkcję i alternatywę jako środki „oszczędnościowe”, dzięki którym zamiast dwóch sekwentów otrzymujemy jeden:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}$$

Warto zauważyć, że koniunkcja pełni podobną funkcję w języku naturalnym, gdzie ze względów stylistycznych bywa zastępowana przecinkiem, stanowiąc odpowiednik tego znaku przestankowego. Zarówno wersja „koniunkcyjna” jak i wersja „przecinkowa” stanowią zarazem przedmiotową wersję metajęzykowej wypowiedzi głoszącej jednoczesne zachodzenie faktów opisanych przez przytoczone zdania proste. Podobnie rzecz się ma z alternatywą, która stanowi przedmiotowy odpowiednik metajęzykowej wypowiedzi głoszącej zachodzenie przynajmniej jednego z dwóch zdań:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$$

Przykład 4
Operatory modalne pełnią również funkcje strukturalne w języku przedmiotowym. Na przykład strukturalna funkcja operatora konieczności polega na tym, że symbol ten poprzedzając formułę wskazuje, że formułę tę można traktować jako twierdzenie. Nie będziemy jednak przytaczać w tym miejscu skomplikowanych reguł strukturalnych podawanych przez Došena, który był twórcą oryginalnej formalizacji rachunków modalnych za pomocą sekwentów wyższego rzędu, tj. sekwentów ciągów sekwentów[20].

Istota „przestankowości” polega na pełnieniu przez znak pewnej „funkcji strukturalnej”, wyrażalnej w metajęzyku bez konieczności wprowadzania tego znaku. Metajęzykiem jest tutaj język rachunku sekwentów. Idea głosząca, że znaki logiczne pełnią funkcję podobną do znaków przestankowych występuje, o

[20] Por. Došen [1985] i Wansing [1992].

czym już była mowa, w *Traktacie* Wittgesteina, który twierdził, że „znaki operacji logicznych są interpunkcjami”[21]. Można ją również odnaleźć w koncepcji wyrażeń ekspresywnych Hansa Reichenbacha, gdzie znaki ekspresywne w języku pierwszego rzędu pełniły funkcję analogiczną do znaków przestankowych, zastępując swe denotatywne odpowiedniki w języku wyższego rzędu.

KRYTERIUM LOGICZNOŚCI DOŠENA

Znaki logiczne pełnią funkcję strukturalną, w czym wyraża się ich przestankowy charakter. W odpowiedzi na pytanie, które znaki mogą pełnić ową funkcję strukturalną, kluczową rolę odgrywa pojęcie **analizy**, sformułowane po raz pierwszy przez angielskiego filozofa analitycznego Georga Edwarda Moore’a (1873–1950). Analiza w kategoriach strukturalnych u Došena odbiega jednak znacznie od oryginalnego sformułowania Moore’a.

Aby podać **analizę** wyrażenia α z języka L za pomocą języka M, do którego α nie należy, trzeba utworzyć w M jego analityczny ekwiwalent α, zwany *analizansem*. Podobnie jak definicja równościowa, analiza przybiera formę równoważności $\phi \equiv \psi$, gdzie ϕ jest zdaniem języka M, wzbogaconego o występujący dokładnie jeden raz *analizans* α, zaś ψ jest pewnym zdaniem języka M. Aby przytoczona równoważność zasługiwała na miano analizy, musi dodatkowo spełniać warunki **adekwatności** i **jednoznaczności.** Formuła postaci $\phi \equiv \psi$ jest **adekwatna** wtedy i tylko wtedy, gdy dołączona do M oraz $L - \{\alpha\}$ pozwala wyprowadzić wszystkie zdania analitycznie prawdziwe w L[22] i jest **jednoznaczna** wtedy i tylko wtedy, gdy jest identyczna dla wszystkich wyrażeń równoznacznych z α[23].

Forma analizy jest identyczna z formą definicji równościowej, analiza różni się jednak od definicji tym, że nie musi spełniać warunku konserwatywności ani warunku eliminowalności z wszystkich kontekstów[24]. Warunki dla analizy uzupełnia Došen mniej formalnym wymogiem, w myśl którego język M powinien być bardziej podstawowy niż język L, gdzie słowo „podstawowy” oznacza, że rozumienie L zakłada wcześniejsze rozumienie M, nie zaś na odwrót.

Aby prześledzić sposób zastosowania pojęcia analizy dla reguł operacyjnych rachunku sekwentów, rozpatrzmy przytoczoną już wcześniej regułę wprowadzania implikacji do następnika. Niech L będzie językiem części

[21] Por. Wittgenstein, *Traktat* 5.4611.

[22] Termin „analitycznie prawdziwy” znaczy tu tyle, co „prawdziwy na podstawie znaczenia”.

[23] W sprawie dokładnego sformułowania definicji jednoznaczności, por. Došen i Schröder-Heister [1985], gdzie o jednoznaczności i konserwatywności dowodzi się, że są w pewnym sensie dualne.

[24] Eliminowalność bywa określana także mianem przekładalności.

zdaniowej dowolnej z logik: klasycznej, intuicjonistycznej lub relewantnej. Niech dla ustalonej logiki, M będzie językiem sekwentów strukturalnych. Zatem górny sekwent w regule wprowadzania znaku logicznego implikacji sformułowany jest w języku *M*. *Analisansem* spójnika implikacji w języku *M*, będzie symbol $\Rightarrow$, oznaczany tak samo jak w języku *L*. Język $M \cup \{\Rightarrow\}$ jest zatem językiem, w którym sformułowany jest sekwent dolny reguły. Oznaczmy górny sekwent reguły symbolem ψ, dolny zaś symbolem ϕ. Ze względu na odwracalność, reguła wprowadzania implikacji będzie miała postać $\phi \equiv \psi$, gdzie ϕ sformułowana jest w języku $M \cup \{\Rightarrow\}$, zaś ψ w języku *M*. Reguła ta, jak pokazuje Došen, stanowi analizę wyrażenia $\Rightarrow$ dla reguł strukturalnych logiki klasycznej, intuicjonistycznej i relewantnej. Adekwatność rozumie się tu w taki sposób, że z omawianej reguły, z odpowiednich reguł strukturalnych oraz z twierdzeń języka *L* bez implikacji, można wyprowadzić wszystkie twierdzenia logiki. Obustronna reguła wprowadzania implikacji, chociaż spełnia warunki nałożone przez Došena na analizę, nie musi spełniać wszystkich warunków stawianych przed definicją. Nie zawsze jest spełniony warunek eliminowalności, np. w logice intuicjonistycznej nie można wyeliminować implikacji z sekwentu $A \Rightarrow B \vdash C$, gdyż prowadziłoby to na mocy (odwracalnej) reguły:

$$\begin{array}{c} \Gamma \vdash \Delta, A \qquad\qquad \Gamma, B \vdash \Delta \\ \hline\hline A \Rightarrow B, \Gamma \vdash \Delta \end{array}$$

do „zakazanego” dla intuicjonizmu sekwentu $\vdash C, A$.

Jednym ze sposobów rozumienia niejasnego pojęcia uniwersalności logiki jest tak zwana bezzałożeniowość. Z punktu widzenia koncepcji Došena takie rozumienie uniwersalności musi być traktowane dosyć ostrożnie, gdyż logika nie może być niezależna przynajmniej od swych własnych podstawowych założeń. Logika rozumiana jako „teoria” relacji wynikania zależy niewątpliwie od sposobu wyeksplikowania owej relacji za pomocą reguł strukturalnych. Jeżeli przez wynikanie logiczne rozumie się relację zachowywania prawdy, to prowadzi to do zdefiniowania relacji wynikania w języku sekwentów opisanym przez klasyczne reguły strukturalne. Jeżeli zdania są uznawane jedynie wtedy, gdy posiadają konstruktywny dowód, to prowadzi to do rewizji klasycznych reguł strukturalnych poprzez odrzucenie sekwentów tzw. wielokonkluzyjnych, tj. z więcej niż jedną formułą w konsekwensie. W rezultacie uzyskamy relację wynikania intuicjonistycznego bez prawostronnej reguły rozrzedzania. Podobnie, jeżeli jednym z kryteriów zachodzenia relacji wynikania jest zachodzenie pewnego związku treściowego między przesłankami a wnioskiem, to wykluczyć należy obie reguły rozrzedzania, jako wprowadzające do antecedensu i konsekwensu zdania nie pozostające w związku treściowym ze zdaniami, które już występowały w sekwencie. Ograniczenie to prowadzi do relacji wynikania relewantnego. Odmienne kryteria uznawania wniosku na podstawie przesłanek prowadzą zatem do różnych ograniczeń reguł strukturalnych rachunku sekwentów. Logika nie jest więc całkowicie bezzałożeniowa, przynajmniej w tym sensie, że aby móc ją stosować, należy przyjąć pewne najogólniejsze założenia na temat tego, w jaki sposób powinna być wyeksplikowana relacja wynikania. Uniwersalności logiki nie należy zatem utożsamiać z bezałożeniowością. Z kolei niezależność tematyczna relacji wynikania przejawia się w tym, że język systemu logiki stanowi metajęzyk dla wnioskowań, w których wykorzystuje się zasady przez ów system formułowane. W rezultacie w języku dowolnego systemu logicznego wszystkie wyrażenia pozalogiczne są schematyczne, tj. wyrażane za pomocą metazmiennych. Widać to wyraźnie na przykładzie języka sekwentów, stanowiącego dedukcyjny metajęzyk dla systemów logiki. Przytoczone przykłady **analizowalnych** znaków logicznych wskazują na to, że jedynie znaki logiczne są tymi wyrażeniami języka niższego rzędu, które posiadają „rację bytu" w metajęzyku i są tam oznaczane zwyczajowo za pomocą tych samych symboli. Dzieje się tak, dlatego że pozwalają one, jak twierdzi Došen, redukować „strukturalne prawdy metajęzyka do prawd języka przedmiotowego". Innymi słowy, sprowadzają prawdy języka reguł strukturalnych do prawd języka przedmiotowego logiki, gdzie pełnią funkcję znaków przestankowych wyrażających strukturalne własności dedukcji. Prawdami języka reguł strukturalnych są, na przykład dedukowalność identyczności ($A \vdash A$) oraz „stabilność wynikania ze względu na dodatkową przesłankę": jeżeli $A \vdash A$, to $A, B \vdash A$. Zastosowanie reguły wprowadzania implikacji oraz reguły wprowadzania koniunkcji:

$$\frac{A, B, \Delta \vdash \Gamma}{A \wedge B, \Delta \vdash \Gamma}$$

pozwala zredukować te „meta-prawdy" do stwierdzenia głoszącego, że $(A \wedge B) \Rightarrow A$ jest prawdą języka klasycznego rachunku zdań.

WZGLĘDNOŚĆ KRYTERIÓW LOGICZNOŚCI W RACHUNKACH SEKWENTÓW

Tym co łączy poglądy Belnapa, Hackinga i Došena jest przekonanie, że reguły strukturalne w pełni opisują relację lub relacje wynikania logicznego, czyli *explicatum* lub *explicata* potocznej relacji wynikania. Kryteria logiczności znaków wyznaczone są przez pewne warunki, które powinny spełniać reguły wprowadzania owych znaków, aby nie zmieniać relacji wynikania opisanej przez reguły strukturalne. Dla logiki klasycznej oraz logiki intuicjonistycznej i relewantnej reguły strukturalne są nieliczne i charakteryzują się prostotą oraz elegancją. W ostatnich latach nastąpił jednak znaczny postęp w teoriodowodowych badaniach nad logikami nieklasycznymi, zarówno będącymi rozszerzeniami logiki klasycznej, jak i logikami alternatywnymi. Okazuje się jednak, że niekwestionowane osiągnięcia w zakresie „gentzenizacji" logik nieklasycznych stawiają pod znakiem zapytania sensowność przedstawionego w tym rozdziale programu poszukiwania kryteriów logiczności. Ceną, którą trzeba bowiem płacić za „gentzenizację" kolejnych logik jest konieczność daleko idącej modyfikacji i komplikowania reguł strukturalnych. Na przykład dla pewnych logik modalnych i temporalnych formułuje się kilkudziesiąt reguł strukturalnych[25], w których występują **stałe strukturalne** nieobecne w oryginalnym sformułowaniu Gentzena. Wobec tego zasadne jest pytanie czy nie należy sformułować kryteriów logiczności dla reguł strukturalnych. Došen, doszukując się w regułach strukturalnych podstawowych założeń dotyczących uniwersalności logiki i niezależności tematycznej relacji wynikania logicznego, rozpatruje jedynie znane i filozoficznie ugruntowane systemy, które posiadają łatwe do sformułowania i intuicyjnie akceptowalne „założenia logiczne". Jednak wiele współcześnie badanych systemów logiki nie posiada dających się wyartykułować założeń, poza pewnymi własnościami natury formalnej.

Czy systemy charakteryzujące się zbyt daleko idącym odejściem od prostych intuicji, wyrażającym się nadmiernym skomplikowaniem reguł strukturalnych, zasługują na miano logiki? Odpowiedź na to pytanie prowadziłaby do konieczności podania takich kryteriów, które powinny spełniać reguły strukturalne, aby można je było uznać za charakteryzujące relację wynikania logicznego. Być może wobec skomplikowania i wielości reguł strukturalnych dla niektórych systemów, nie da się utrzymać pozornie oczywistego i *implicite* przyjmowanego założenia, które głosi, że reguły strukturalne rachunku Gentzena stanowią oczywisty rezultat eksplikacji niezależnej tematycznie relacji wynikania. Teoriodowodowe kryteria logiczności, zarówno w wersji Hackinga jak i Došena, zależą więc w istocie od dwóch założeń:

1. Reguły strukturalne stanowią rezultat eksplikacji niezależnej tematycznie relacji wynikania;
2. Zachowawczość lub analiza stanowią rezultat eksplikacji pojęcia zachowywania niezależności tematycznej reguł strukturalnych.

Dokładna struktura tych kryteriów i ich związki z innymi kryteriami logiczności zostaną podane w następnym rozdziale.

---

[25] Por. Wansing [1988].