ROZDZIAŁ 4

SEMANTYCZNE KRYTERIA LOGICZNOŚCI

KRYTERIUM LOGICZNOŚCI ZNAKÓW TARSKIEGO

Na zakończenie artykułu *O pojęciu wynikania logicznego* Alfred Tarski pisze znamienne słowa:

> Rzecz jasna, dalsze badania rzucić mogą wiele światła na zagadnienie, które nas interesuje; może uda się przy pomocy jakichś ważkich argumentów o charakterze obiektywnym uzasadnić wytkniętą przez tradycję granicę między terminami logicznymi i pozalogicznymi[1].

Zaraz potem wyraża jednak obawę, że wynik takich badań może okazać się negatywny i podstawowe pojęcia logiczne zależeć będą od „jakiegoś określonego, ale w szerszym lub węższym zakresie dowolnego podziału wyrazów języka na logiczne i pozalogiczne” [2].

Niezależnie od wyrażanych obaw Tarski podjął jednak próbę sformułowania obiektywnego kryterium logiczności wyrażeń. Uczynił to na gruncie semantycznym. W tym samym roku 1936, w którym wydany został artykuł *O pojęciu wynikania logicznego*, Tarski wspólnie z Adolfem Lindenbaumem (1904–1941) powołuje się na niezmienniczość denotacji ze względu na permutacje dziedziny interpretacji jako na cechę wyrażeń definiowalnych za pomocą środków czysto logicznych[3]. Do wyrażeń tych zaliczył zarówno wyrażenia logiczne w wąskim sensie, jak i wyrażenia matematyczne. Również po wojnie Tarski w wielu wykładach i odczytach wskazywał na niezmienniczość denotacji jako cechę logiczności wyrażeń. Wykłady te zostały wydane przez Johna Corcorana dopiero w 1986 roku pod tytułem *What are the logical notions?*[4]:

---

[1] Por. Tarski [1936], s. 201─202.
[2] *Op. cit.*, s. 202
[3] Por. Tarski i Lindenbaum [1936].
[4] Por. Tarski [1986], dokładne omówienie tego artykułu znaleźć można w Villegas i Maciaszek [1997].

W szczególnym przypadku możemy rozpatrzyć klasę wszystkich wzajemnie jednoznacznych przekształceń przestrzeni, dziedziny lub świata na siebie samego. Która nauka zajmuje się pojęciami niezmienniczymi ze względu na taką klasę przekształceń? Będziemy mieli tam do czynienia z niewielką ilością pojęć o bardzo ogólnym charakterze. Uważam, że są to pojęcia logiczne, pojęcie zaś nazywane jest „logiczne", gdy jest niezmiennicze ze względu na wszystkie możliwe wzajemnie jednoznaczne przekształcenia świata na samego siebie[5].

Ponieważ termin „pojęcie" odnosi się u Tarskiego do denotacji wyrażeń, to od tego momentu będziemy go zastępować terminem „**obiekt logiczny**", nazwy niezmienniczych obiektów logicznych zaś będziemy nazywać **wyrażeniami inwariantnymi**. Obiekty logiczne, którym Tarski przypisuje cechę ogólności, można uznać za korelaty semantyczne wyrażeń określanych jako przejrzyste. Zatem inwariantność wyrażeń będzie stanowiła eksplikację pojęcia przejrzystości, gdyż zapewnia ona ich denotacjom niezależność od przygodnych i empirycznych faktów. Aby wyjaśnić ostatnie sformułowanie, rozpatrzmy prosty przykład. Denotacja dowolnej nazwy, na przykład rzeczownika pospolitego „człowiek", nie jest niezmiennicza ze względu na permutacje dziedziny interpretacji. Jest to bowiem dowolny podzbiór zbioru wszystkich rzeczy (dziedziny interpretacji), którego obrazem po permutacji dziedziny może być dowolny, równoliczny podzbiór tej dziedziny. W szczególnym przypadku możemy jednak wyobrazić sobie sytuację, w której denotacją nazwy „człowiek" będzie zbiór pusty lub sama dziedzina interpretacji, które są obiektami logicznymi niezmienniczymi ze względu na permutacje dziedziny. Czy oznacza to, że dowolny predykat może, w zależności od przygodnych faktów, być pozalogiczny lub logiczny? Aby uniknąć tej niepożądanej konsekwencji, należy kryterium Tarskiego uzupełnić o warunek, który ogranicza klasę dopuszczalnych denotacji dla wyrażeń logicznych. Warunek ten, zwany niekiedy **warunkiem stałości**, pozwala przyporządkowywać wyrażeniom logicznym jedynie ich zamierzone denotacje będące obiektami logicznymi. Stosując terminologię teoriomnogościową powiemy, że warunek stałości ogranicza klasę dopuszczalnych **funkcji interpretacyjnych** dla wyrażeń logicznych. Nie wyklucza to sytuacji, że wyrażenia pozalogiczne mogą, dla pewnych funkcji interpretacyjnych, denotować obiekty logiczne.

Odrębną kwestią pozostaje to czy w danym języku obiekty logiczne posiadają nazwy, które oznaczają tylko te, a nie inne obiekty. W języku rachunku predykatów wyróżnia się niekiedy **predykat pełny**, który jest nazwą dziedziny interpretacji. W języku polskim brak jest słowa, które byłoby odpowiednikiem predykatu pełnego. Z pewnością nie może to być rzeczownik „rzecz". W języku angielskim w miarę odpowiednim słowem jest „thing" w wyrażeniach:

---

[5] *Op. cit.*, s. 149, tłumaczenie autora.

„everything”, „something”, „nothing”[6]. Klasa funkcji interpretacyjnych jest ograniczona, tak aby słowu „thing” przyporządkowywana była zawsze cała dziedzina interpretacji. Wyrażenie to rozumie się w języku angielskim w taki sposób, że potrafimy mu przyporządkować denotację niezależnie od przygodnych faktów. Aby jednak wyznaczyć denotację nazwy „człowiek”, należy empirycznie stwierdzić, które obiekty z dziedziny interpretacji są rzeczywiście ludźmi. Zatem dzięki warunkom stałości i niezmienniczości można podać denotacje wyrażeń logicznych, nie odwołując się do żadnych empirycznie poznawalnych cech obiektów. W tym właśnie sensie nazwy obiektów logicznych mogą być uważane za przejrzyste. Oczywiście w oryginalnym sformułowaniu Tarskiego warunek stałości jest założony *implicite*.

Czy niezmienniczość denotacji wyrażenia w pełni odpowiada naszym intuicjom związanym z jego logicznością? W ramach języka teorii typów, dla której Tarski formułował kryterium inwariantności, można definiować wiele niezmienniczych denotacji wyrażeń, które dla przeciwników logicyzmu są pozalogicznymi stałymi matematycznymi. Kryterium to nie może zatem stanowić warunku wystarczającego logiczności wyrażeń, a jedynie warunek konieczny.

KWANTYFIKATORY UOGÓLNIONE MOSTOWSKIEGO I LINDSTRÖMA

Alfred Tarski nie opublikował za życia sformułowanego przez siebie kryterium. Zostało ono spopularyzowane dopiero przez Andrzeja Mostowskiego, który w artykule *On a generalization of quantifiers*[7] zaadaptował kryterium Tarskiego do semantyki języka pierwszego rzędu, rozszerzonego o kategorię syntaktyczną kwantyfikatorów uogólnionych[8]. Do kategorii tej należą nie tylko klasyczne kwantyfikatory $\exists$ i $\forall$ oraz kwantyfikatory definiowalne za pomocą owych kwantyfikatorów i predykatu równości, ale również kwantyfikatory niedefiniowalne w logice pierwszego rzędu jak, na przykład, kwantyfikator odczytywany jako *dla przeliczalnie nieskończenie wielu*. Praca Mostowskiego zainspirowała Pera Lindströma[9], który w sposób istotny uogólnił podejście Mostowskiego do kwantyfikacji. Dlatego też najpierw przedstawiona zostanie koncepcja Lindströma, a dopiero na jej tle przypadek szczególny, jakim są kwantyfikatory uogólnione Mostowskiego.

Kwantyfikatory uogólnione Lindströma należą do nieskończonej liczby kategorii syntaktycznych. Każda kategoria kwantyfikatorowa indeksowana jest za

[6] Polskie „wszystko”, „coś” i „nic”.
[7] Por. Mostowski [1957].
[8] Artykuł Mostowskiego oraz nieco późniejszy artykuł Lindströma, zapoczątkowały rozwój nowej dyscypliny zwanej abstrakcyjną teorią modeli.
[9] Por. Lindström [1966].

pomocą skończonego ciągu liczb naturalnych (wraz z zerem), zwanego **typem** kwantyfikatora. Ilość wyrazów w typie kwantyfikatora określa ilość formuł, które mogą pojawić się w jego zasięgu. Liczba będąca i-tym wyrazem typu kwantyfikatora określa ilość zmiennych wolnych, które ten kwantyfikator może wiązać w i-tej formule występującej w jego zasięgu, tak aby cała formuła była domknięta. Na przykład kwantyfikator *Q* typu <2,1,0,3> może łączyć w zdanie cztery formuły, odpowiednio o dwóch, jednej, zero i trzech zmiennych wolnych. Przedstawiona niżej formuła, gdzie *B*, *A* i *C* są odpowiednio predykatami 1, 2 i 3-argumentowymi, a *p* symbolem zdaniowym, jest formułą domkniętą dla kwantyfikatora typu <2,1,0,3>:

$$Q(x_1\, x_2, y_1, \_, z_1\, z_2\, z_3)(A(x_1\, x_2), B(y_1), p, C(z_1\, z_2\, z_3))$$

W tak ogólnym pojęciu kwantyfikatora mieszczą się kwantyfikatory klasyczne $\forall$ i $\exists$, kwantyfikatory uogólnione Mostowskiego oraz ekstensjonalne spójniki zdaniowe. Kwantyfikatory klasyczne oraz kwantyfikatory uogólnione Mostowskiego należą do kategorii kwantyfikatorów typu <1>, gdyż w ich zasięgu wystąpić może jedna formuła, w której mogą wiązać tylko jedną zmienną. Negacja zdaniowa należy do kategorii typu <0>, spójniki 2-argumentowe zaś do kategorii typu <0,0>.

W ujęciu Mostowskiego i Lindströma o przynależności wyrażenia do kategorii kwantyfikatorów decyduje nie tylko jego funkcja syntaktyczna, lecz również jego inwariantność. Jeżeli za model uznamy parę złożoną z dziedziny interpretacji D i indukcyjnie zdefiniowanej funkcji interpretacyjnej ***J***, to typ kwantyfikatora określa typ (semantyczny) jego możliwej denotacji. Denotację kwantyfikatora uogólnionego *Q* typu $t = \langle t_1, t_2, \ldots, t_n \rangle$ w modelu $M = \langle D, \boldsymbol{J} \rangle$ definiuje się jako strukturę relacyjną $\mathbf{Q_M}$ tego samego typu t, rozumianą jako zbiór ciągów *n*-argumentowych, których wyrazami są odpowiednio $t_1, t_2, \ldots, t_n$-argumentowe relacje w zbiorze *D*.

Dla tak ogólnego podejścia, jedynie niewielkiej części kwantyfikatorów uogólnionych odpowiadają jakieś wyrażenia języka naturalnego. Typem kwantyfikatorów najliczniej reprezentowanym w języku naturalnym jest <1,1>. Denotacją kwantyfikatora tego typu, nazywanego dalej kwantyfikatorem binarnym, jest relacja 2-argumentowa, której argumentami są podzbiory *D*, czyli relacje 1-argumentowe w *D*. Kwantyfikatorom typu <1,1> odpowiadają przedimki języka naturalnego, np. polskie *wszyscy*, *niektórzy* oraz angielskie *a*, *the*. Z kolei denotacją kwantyfikatora w sensie Mostowskiego, który u Lindströma jest kwantyfikatorem typu <1>, jest pewna klasa (relacja 1-argumentowa) podzbiorów dziedziny interpretacji *D*, czyli relacji 1-argumentowych. Kwantyfikatorom tym odpowiadają wyrażenia *wszystko*, *nic* i *coś*.

Nie wszystkie wyrażenia pełniące opisaną wyżej funkcję syntaktyczną zasługują jednak na miano kwantyfikatorów. Możliwymi denotacjami kwantyfikatorów powinny być jedynie struktury relacyjne, które odzwierciedlają pewne aspekty ilościowe, nie zaś jakościowe. Ilościowy aspekt kwantyfikacji wyraża się, w sposób naturalny, za pomocą warunku inwariantności. Ten zaś jest rozumiany jako niezmienniczość denotacji ze względu na permutacje dziedziny interpretacji lub jako niezmienniczość ze względu na bijekcje dziedzin równolicznych. Dla uproszczenia rozpatrzmy dowolny kwantyfikator uogólniony typu <1>[10]. Przyjmijmy, jak to czynił Mostowski, że formuły poprawnie zbudowane mają postać $QxF(x)$, gdzie F jest 1-argumentową funkcją zdaniową. Wówczas denotacją $\boldsymbol{Q_M}$ kwantyfikatora uogólnionego Q w modelu $M = <D, \boldsymbol{J}>$, może być dowolna funkcja charakterystyczna zbioru wszystkich denotacji 1-argumentowych funkcji zdaniowych w modelu M, która spełnia dodatkowo warunek inwariantności. Warunek ten głosi, że dla każdego wzajemnie jednoznacznego odwzorowania ϕ dziedziny D w równoliczną dziedzinę D', zachodzi warunek $\boldsymbol{Q_M}(\boldsymbol{F_M}) = \boldsymbol{Q_{M'}}(\boldsymbol{F_M}^{\phi})$, gdzie M' jest dowolnym modelem o dziedzinie D', $\boldsymbol{F}_M$ dowolną denotacją funkcji zdaniowej F w modelu M, dla której dla każdego $a \in D$ zachodzi warunek $\boldsymbol{F_M}^{\phi}(\phi(a)) = \boldsymbol{F_M}(a)$. Oczywiście nie każde wyrażenie pełniące te samą funkcję składniową co kwantyfikatory typu <1,1> i <1> jest inwariantne. Z całą pewnością inwariantne nie są dopełniacze imion własnych (typ <1,1>), np. *John's* oraz frazy nominalne (typ <1>), np. *John's car* lub *Every car*. Wyrażenia te nie posiadają oczywiście swych odpowiedników w języku Lindströma.

Tak sformułowany warunek inwariantności zawiera *implicite* warunek stałości, rozumiany jako ograniczenie narzucone na zbiór funkcji interpretacyjnych w każdym modelu. W konsekwencji zamierzone denotacje kwantyfikatorów zależą jedynie od liczności dziedziny interpretacji, a prawdziwość zdania z kwantyfikatorem zależy jedynie od tego, **ile** obiektów spełnia funkcję zdaniową stojącą za kwantyfikatorem, nie zaś od tego, **które** obiekty ją spełniają. Umożliwia to **liczbową reprezentację** kwantyfikatorów w dziedzinach o ustalonej mocy. Rozpatrzmy następujący przykład: Formuła $\exists xF(x)$ jest prawdziwa w pewnym modelu $M = <D, \boldsymbol{J}>$ o skończonej mocy n wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja zdaniowa $F(x)$ jest spełniona w tym modelu przez co najmniej jeden obiekt z D, zatem dla co najmniej jednego $a \in D$, $\boldsymbol{F_M}(a) = 1$. Jeżeli ϕ jest dowolnym odwzorowaniem M dziedziny D w równoliczną dziedzinę D', to dla co najmniej jednego $a \in D'$, $\boldsymbol{F_M}^{\phi}(a) = 1$, a zatem $\exists_{D'}(\boldsymbol{F_M}^{\phi}) = 1$. Zauważmy, że dla stwierdzenia prawdziwości formuły $\exists xF(x)$ w dziedzinie n–elementowej wystarczy wiedzieć, że ilość obiektów $a \in D$, dla których $\boldsymbol{F}(a) =$

[10] Przedstawiony tu warunek inwariantności dla kwantyfikatorów Mostowskiego został rozszerzony przez Lindströma na kwantyfikatory dowolnych typów.

1 wynosi przynajmniej 1, natomiast ilość obiektów $a \in D$, dla których $\boldsymbol{F}(a) = 0$ wynosi co najwyżej $n - 1$. Oznacza to, że w dziedzinach o mocy n, kwantyfikator $\exists$ reprezentowany jest przez następujący zbiór par liczb: $\{(1, n - 1), (2, n - 2), ...(n - 1, 1), (n, 0)\}$. Podobnie można reprezentować inne kwantyfikatory spełniające warunek inwariantności, np. kwantyfikator *dokładnie jeden* może być scharakteryzowany w dziedzinie n-elementowej za pomocą zbioru pary liczb: $\{(1, n - 1)\}$, kwantyfikator *co najwyżej jeden* za pomocą zbioru $\{(0, n), (1, n - 1)\}$, a kwantyfikator *co najmniej dwa* za pomocą $\{(2, n - 2), (3, n - 3), ..., (n - 1, 1), (n, 0)\}$.

Reprezentację liczbową kwantyfikatorów uogólnia się łatwo na dziedziny przeliczalnie nieskończone. Niech $\{(k, l)\}$ będzie zbiorem wszystkich par liczb naturalnych spełniających równość $k + l = card(D)$, gdzie D jest przeliczalną dziedziną interpretacji. Niech funkcja T będzie funkcją charakterystyczną zbioru $\{(k,l)\}$. Liczbową reprezentacją kwantyfikatora typu <1> będzie wówczas funkcja $\boldsymbol{Q_T}$, taka że $\boldsymbol{Q_T}(\boldsymbol{F}) = T(card(\boldsymbol{F}^{-1}(1)), card(\boldsymbol{F}^{-1}(0)))$. Jak pokazał Mostowski, dla każdego inwariantnego kwantyfikatora Q typu <1> i dowolnej dziedziny interpretacji D, istnieje funkcja T określona na zbiorze wszystkich par liczb naturalnych, których suma jest równa mocy zbioru D. Ponadto dla każdego D' takiego, że $card(D') = card(D)$ zachodzi $\boldsymbol{Q_{D'}} = \boldsymbol{Q_T}$.

ZASTOSOWANIA REPREZENTACJI LICZBOWEJ KWANTYFIKATORÓW

Przykładem wykorzystania aparatu teoretycznego przygotowanego przez Mostowskiego i Lindströma jest zastosowanie kwantyfikatorów uogólnionych do formułowania hipotez statystycznych, co zostało opracowane teoretycznie i wykorzystane praktycznie przez zespół czeskich matematyków, wśród których wiodącą rolę odegrali Hájek i Havránek. W swej monografii *Mechanizing Hypothesis Formation*[11] oraz w licznych artykułach opublikowanych głównie w czasopismach poświęconych problematyce sztucznej inteligencji, sformułowali oni teoretyczne podstawy indukcji statystycznej, która może być realizowana z wykorzystaniem komputerów za pomocą tzw. Metod GUHA[12]. W metodach tych istotną rolę pełnią tzw. kwantyfikatory statystyczne. Rozumowanie indukcyjne, o którym mowa, stanowi szczególny przypadek standardowego wnioskowania statystycznego, w którym wyróżnia się trzy etapy:

1) etap dedukcyjny, w którym formułuje się tzw. zdanie obserwacyjne, prawdziwe w pewnej skończonej próbce,

[11] Por. Hájek i Havránek [1977a], i [1977b].

[12] Jest to skrót od *General Unary Hypotheses Automaton*.

2) etap indukcyjny, w którym formułuje się hipotezę indukcyjną na temat całej populacji,
3) weryfikacja hipotezy indukcyjnej za pomocą odpowiedniego testu.

Zdania obserwacyjne oraz hipotezy indukcyjne najczęściej budowane są za pomocą kwantyfikatorów, które wyrażają zależności między zmiennymi w skali nominalnej. Pierwszą czynnością etapu dedukcyjnego jest uporządkowanie danych empirycznych, jak w niżej przedstawionej tabeli, która stanowi tzw. model empiryczny:

	P_1	P_2	P_3 ...	P_n
O_1	1	0	1	... 1
O_2	0	0	1	... 0
....				
O_m	1	1	0	... 1

Zdania **obserwacyjne** mają postać $(Qx)(\phi(x),\psi(x))$, gdzie formuły $\phi(x)$ i $\psi(x)$ z jedną zmienną wolną x są formułami złożonymi z formuł atomowych postaci $P_i(x)$, połączonych za pomocą spójników $\neg$ $\wedge$ i $\vee$, Q zaś jest kwantyfikatorem binarnym. Aby sformułować zdanie obserwacyjne prawdziwe w danej próbce, komputer zlicza ilości obiektów, które posiadają cechy P_i oraz obiektów, które owych cech nie posiadają. Dobór kwantyfikatora potrzebnego do sformułowania zdania obserwacyjnego możliwy jest dzięki reprezentacji liczbowej kwantyfikatorów. Dla kwantyfikatorów typu <1,1> reprezentacją liczbową jest relacja 4-argumentowa R_q, taka że:

$(\|\phi(x)\|_M,\|\psi(x)\|_M) \in \|Q\|_M$ wtw, gdy $(a,b,c,d) \in R_Q$, gdzie:
$a = card(\{o_i\colon o_i \in \phi \text{ i } o_i \notin \psi\})$
$b = card(\{o_i\colon o_i \in \phi \text{ i } o_i \in \psi\})$
$c = card(\{o_i\colon o_i \notin \phi \text{ i } o_i \in \psi\})$
$d = card(\{o_i\colon o_i \notin \phi \text{ i } o_i \notin \psi\})$
$a + b + c + d = m$, gdzie m jest licznością próbki.

Procedura formułowania hipotezy indukcyjnej dla badanej próbki polega na tym, że komputer wylicza wartości a, b, c i d, a następnie sprawdza czy tak obliczona czwórka liczb należy do reprezentacji któregoś ze „znanych" mu kwantyfikatorów. Prześledźmy procedurę formułowania zdania obserwacyjnego zwykłej indukcji enumeracyjnej. Zdanie obserwacyjne postaci *Każde*(P_1, P_2) jest prawdziwe w każdym modelu empirycznym dla dwóch zmiennych, w którym nie występuje para <1, 0>. Zgodnie z przyjętymi oznaczeniami $a = 0$, a zatem reprezentacją liczbową kwantyfikatora *każdy* jest relacja $R_\forall$, taka że $\langle a, b, c, d\rangle \in R_\forall$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$. Za pomocą reprezentacji liczbowej można zdefiniować wiele inwariantnych kwantyfikatorów binarnych wykorzystywanych w indukcji statystycznej.

Przytoczmy kilka przykładów kwantyfikatorów statystycznych definiowanych za pomocą reprezentacji liczbowej:

1) Kwantyfikator większości W, którego reprezentacją liczbową jest relacja R_W taka, że: $<a, b, c, d> \in R_W$ wtw, gdy $a > b$.
2) Kwantyfikator prostej korelacji $\approx$: $<a, b, c, d> \in R_{\approx}$ wtw, gdy $bd > ac$
3) Kwantyfikator statystycznej korelacji Fishera $\sim\alpha$ na poziomie istotności $\alpha \in (0, 0{,}5)$: $<a, b, c, d> \in R_{\sim\alpha}$ wtw, gdy $bd > ac$ oraz $\sum_{i=b} \sigma(i,r,k,m) \geq \alpha$, gdzie a, b, c, d oraz m są takie jak dotychczas, natomiast $r = a + b$, $s = c + d$, $k = b + c$, $l = a + d$ oraz:

$$\sigma(i,r,k,m) = \frac{r!s!k!l!}{m!i!a!c!d!}$$

INWARIANTNOŚĆ ZNAKÓW LOGICZNYCH W JĘZYKU PIERWSZEGO RZĘDU

Inwariantność może być definiowana nie tylko dla kwantyfikatorów, ale również dla innych wyrażeń w języku pierwszego rzędu. Po raz pierwszy obiekty logiczne będące niezmienniczymi denotacjami wyrażeń języka teorii typów zostały scharakteryzowane przez Tarskiego. Rezultaty Tarskiego można odnieść bezpośrednio do języka pierwszego rzędu, gdyż stanowi on szczególny przypadek języka teorii typów. Zanim ukazała się publikacja Tarskiego, inwariantność wyrażeń języka pierwszego rzędu została zdefiniowana przez Timothy McCarthy'ego w artykule *The Idea of a Logical Constant*[13].

McCarthy traktuje inwariantność jako kryterium logiczności wyrażeń języka pierwszego rzędu odwołując się do **teorii prawdy**[14]. Celem teorii prawdy, wedle McCarthy'ego, jest „zdefiniowanie pojęcia prawdy logicznej oraz konsekwencji logicznej w kategoriach semantycznych", przy założeniu, że prawdziwość lub fałszywość dowolnego zdania zdeterminowana jest przez jego budowę oraz przez denotacje wyrażeń prostych, wśród których szczególną rolę pełnią denotacje znaków logicznych. Aby wyjaśnić pojęcie prawdy i konsekwencji logicznej, nie wystarczy, zdaniem McCarthy'ego, samo podanie zamierzonych denotacji znaków logicznych. Konieczna jest również ich charakterystyka oparta na wiązanych z nimi intuicjach[15], wyrażona w „jasnym i adekwatnym semantycznym kryterium" ich logiczności. McCarthy buduje swą teorię prawdy za pomocą pojęcia spełniania, które może być formułowane bądź dla języka ekstensjonalnego, mamy wówczas do czynienia z ekstensjonalną teorią spełniania

[13] Por. McCarthy [1981], pozostałe koncepcje McCarthy zawarł w [1987] i [1989].
[14] Pojęcie „teorii prawdy" pochodzi od Donalda Davidsona.
[15] McCarthy używa terminu „niezależność tematyczna" zamiast terminu „przejrzystość".

ETS (*Extensional Theory of Satisfaction*), bądź dla języka intensjonalnego, mamy wówczas do czynienia z intensjonalną teorią spełniania *ITS* (*Intensional Theory of Satisfaction*).

Rozważmy język pierwszego rzędu, w którym obowiązują standardowe reguły składni i którego słownik składa się ze znaków języka rachunku predykatów i logik modalnych. Dopuszczamy również możliwość dodatkowego wprowadzenia do języka L odpowiedników pewnych wyrażeń języka potocznego. *ETS* języka L składa się z **modelu** $M = <D, \boldsymbol{J}>$, gdzie D jest dziedziną interpretacji, a $\boldsymbol{J}$ funkcją interpretacyjną przyporządkowującą wyrażeniom prostym ich **ekstensje** w modelu M oraz ze zdefiniowanej indukcyjnie ekstensji wyrażeń złożonych[16]:

1. Ekstensją formuły ϕ w M jest pewien zbiór ciągów $S \subseteq D^{\omega}$ lub jego funkcja charakterystyczna. Jeżeli ciąg s spełnia ϕ w M, to $s \in \boldsymbol{J}(\phi)$ lub $\boldsymbol{J}(\phi)(s) = 1$;
2. Ekstensją termu t w M jest funkcja ze zbioru ciągów D^{ω} w dziedzinę D. Jeżeli a będzie tym obiektem D, który jest przyporządkowany termowi t przez ciąg s w M, to $\boldsymbol{J}(t)(s) = a$;
3. Ekstensją funktora bądź operatora α typu $\tau/\sigma_1...\sigma_n$ w M jest funkcja $\boldsymbol{J}(\alpha)$ przyporządkowująca każdemu ciągowi $A_1,..., A_n$ możliwych ekstensji w M wyrażeń typu $\sigma_1...\sigma_n$ możliwą ekstensję B wyrażenia typu τ w M.

Dla dowolnego **symbolu zdaniowego** p wprowadza się dodatkowy wymóg, aby $\boldsymbol{J}(p) = D^{\omega}$ albo $\boldsymbol{J}(p) = \varnothing$. Podobne ograniczenia narzuca się na ekstensje pewnych klas termów. Na przykład ekstensją i-tej **zmiennej** indywiduowej jest funkcja przyporządkowująca ciągom ich i-te wyrazy. Ekstensją **stałej** indywiduowej jest funkcja przyporządkowująca wszystkim ciągom z D^{ω} pewien element dziedziny D, ten sam dla wszystkich ciągów.

W oparciu o tak zdefiniowane pojęcia można zdefiniować inwariantność dla wyrażenia dowolnej kategorii syntaktycznej. Niech $M_1 = <D_1, \boldsymbol{J}_1>$ i $M_2 = <D_2, \boldsymbol{J}_2>$ będą modelami o dziedzinach równolicznych. Niech f będzie dowolnym wzajemnie jednoznacznym przekształceniem D_1 na D_2. Funkcję f można w naturalny sposób rozszerzyć na ciągi dziedziny interpretacji oraz możliwe ekstensje dowolnych wyrażeń w taki sposób, że:

1. Obrazem dowolnego ciągu $s \in D_1^{\omega}$□ jest ciąg $f(s) \in D_1^{\omega}$□, taki że $[f(s)]_i = f(s_i)$ dla każdego $i \in \omega$, gdzie s_i jest i-tym wyrazem ciągu s, a $[f(s)]_i$ jest i-tym wyrazem ciągu $f(s)$;
2. Obrazem funkcji n-argumentowej F jest funkcja $f(F)$, której argumentami są obrazy argumentów funkcji F, wartościami zaś obrazy wartości funkcji F, tak że $F(A_1,..., A_n) = B$ wtw, gdy $f(F)(f(A_1),..., f(A_n)) = f(B)$.

---

[16] Lektura artykułów McCarthy'ego jest dość trudna, gdyż autor posługuje się własną terminologią i notacja, odbiegającą zdecydowanie od powszechnie używanej. Przedstawiona tu notacja odbiega niekiedy dość wyraźnie od oryginalnych sformułowań McCarthy'ego.

Wyrażenie α języka L jest **inwariantne** wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych modeli równolicznych $M_1 = \langle D_1, \boldsymbol{J}_1\rangle$ i $M_2 = \langle D_2, \boldsymbol{J}_2\rangle$ i dla dowolnego, wzajemnie jednoznacznego odwzorowania f dziedziny D_1 na D_2, $f(\boldsymbol{J}_1(\alpha)) = \boldsymbol{J}_2(\alpha)$. Dla wyrażeń poszczególnych kategorii syntaktycznych warunek inwariantności przybiera następującą postać:

1. Jeżeli ϕ jest formułą, to dla każdego $s \in D^\omega$, $s \in \boldsymbol{J}_1(\phi)$ wtw, gdy $f(s) \in \boldsymbol{J}_2(\phi)$[17];
2. Jeżeli t jest termem, to dla każdego $s \in D^\omega$ i dla każdego $a \in D$, $\boldsymbol{J}_1(t)(s) = a$ wtw, gdy $\boldsymbol{J}_2(t)(f(s)) = f(a)$;
3. Jeżeli α jest funktorem kategorii $\tau/\sigma_1...\sigma_n$, to dla dowolnego ciągu ekstensji $\boldsymbol{J}_1(\beta_1),..., \boldsymbol{J}_1(\beta_n)$ wyrażeń $\beta_1...\beta_n$ kategorii $\sigma_1...\sigma_n$, $\boldsymbol{J}_1(\alpha)(\boldsymbol{J}_1(\beta_1),..., \boldsymbol{J}_1(\beta_n)) = \mathbf{J}_1(\alpha(\beta_1...\beta_n))$ wtw, gdy $\boldsymbol{J}_2(\alpha)(f(\boldsymbol{J}_1(\beta_1)),..., f(\boldsymbol{J}_1(\beta_n)) = f(\boldsymbol{J}_1(\alpha(\beta_1...\beta_n)))$[18].

Przyjrzyjmy się zatem, które spośród wyrażeń poszczególnych kategorii syntaktycznych języka L są inwariantne:

1. W zbiorze termów prostych inwariantne są jedynie zmienne indywiduowe;
2. W zbiorze formuł inwariantne są jedynie formuły tautologiczne i kontrtautologiczne. Zatem wśród formuł prostych inwariantne są jedynie, wprowadzane niekiedy do języka pierwszego rzędu, „stałe zdaniowe” **1** i **0**;
3. Ekstensją negacji jest funkcja przyporządkowująca podzbiorom D^ω, czyli ekstensjom formuł, ich dopełnienia. Ekstensją koniunkcji jest funkcja przyporządkowująca parom podzbiorów D^ω ich części wspólne, ekstensją alternatywy zaś funkcja przyporządkowująca parom podzbiorów D^ω ich sumy. Ponieważ dopełnienie, suma i część wspólna zbiorów pozostają dopełnieniem, sumą i częścią wspólną obrazów tych zbiorów w dowolnym odwzorowaniu wzajemnie jednoznacznym, to klasyczne spójniki prawdziwościowe są inwariantne;
4. Ekstensją 2-argumentowego predykatu identyczności ID jest funkcja, której argumentami są dwie funkcje T_1 i T_2 (możliwe ekstensje termów), wartością zaś zbiór S ciągów (ekstensja formuły), taki że dla dowolnego $s \in D^\omega$, $s \in S$ wtw, gdy $T_1(s) = T_2(s)$. Predykat identyczności jest inwariantny, gdyż dla dowolnych modeli równolicznych $M_1 = \langle D_1, \boldsymbol{J}_1\rangle$ i $M_2 = \langle D_2, \boldsymbol{J}_2\rangle$ oraz dla dowolnego wzajemnie jednoznacznego odwzorowania f dziedziny D_1 na D_2: $f(s) \in f(S)$ wtw, gdy $f(t_1)(f(s)) = f(t_2)(f(s))$. A zatem $f(\boldsymbol{J}_1(ID)) = \boldsymbol{J}_2(ID)$;
5. Warunek inwariantności spełniają także 1-argumentowe predykaty wyrażające **cechę uniwersalną** i **cechę pustą** oraz 2-argumentowe predykaty odpowiadające relacji **różności**, relacji **pełnej** i relacji **pustej**;
6. Ekstensjami kwantyfikatorów są funkcje przyporządkowujące parom złożonym z ekstensji zmiennych i ekstensji formuł, ekstensje formuł, czyli

---

[17] Bądź alternatywnie: $\boldsymbol{J}_1(\phi)(s) = \boldsymbol{J}_2(\phi)(f(s))$.

[18] Inwariantność w sensie McCarthy’ego, pokrywa się, w przypadku kwantyfikatorów, z inwariantnością zdefiniowaną przez Mostowskiego.

zbiory ciągów. Dodatkowo dla kwantyfikatora $\forall$ ($\exists$) wprowadza się warunek, że s spełnia $\forall(\exists)x_i\phi$ wtw, gdy dla każdego (pewnego) ciągu s^* powstałego z s przez zastąpienie jego i-tego wyrazu dowolnym elementem D, s^* spełnia ϕ. Jak łatwo pokazać kwantyfikatory $\forall$ i $\exists$ są inwariantne;

7. Również inwariantne są **kwantyfikatory numeryczne**, definiowalne za pomocą inwariantnych kwantyfikatorów $\forall$ i $\exists$ oraz predykatu równości *ID*;

Kryterium inwariantności może być w naturalny sposób rozszerzone na wyrażenia języka intensjonalnego. **Model intensjonalny** jest to trójka $M = \langle D, F, \boldsymbol{J}\rangle$, gdzie $F = \langle I, R\rangle$ jest strukturą modalną złożoną ze zbioru indeksów I (możliwych światów, momentów czasu, itp.) i relacji binarnej $R \subseteq I \times I$ (relacji dostępności lub następstwa czasowego), $\boldsymbol{J}$ zaś funkcją interpretacyjną, przyporządkowującą każdemu wyrażeniu α funkcję będącą jego intensją, która jest funkcją przyporządkowującą każdemu indeksowi i ekstensję α. W szczególności:

1. Intensją $\boldsymbol{I}$ formuły ϕ w M jest funkcja, która indeksowi i przyporządkowuje ekstensję tej formuły w i, czyli pewien zbiór ciągów S_i;
2. Intensją $\boldsymbol{I}$ termu t w M jest funkcja, która każdemu indeksowi i przyporządkowuje ekstensję tego termu w i, czyli pewną funkcję T_i z D^ω w D;
3. intensją funktora (operatora) α typu $\tau/\sigma_1...\sigma_n$, w M jest funkcja, która każdemu ciągowi $A_1,..., A_n$ możliwych intensji w M wyrażeń typu $\sigma_1...\sigma_n$ przyporządkowuje możliwą intensję B wyrażenia typu τ w M.

Rozpatrzmy dwa modele równoliczne $M_1 = \langle D_1, \langle I_1, R_1\rangle, \boldsymbol{I}_1\rangle$ oraz $M_2 = \langle D_2 \langle I_2, R_2\rangle, \boldsymbol{I}_2\rangle$. Struktury modalne $\langle I_1, R_1\rangle$ i $\langle I_2, R_2\rangle$ są **izomorficzne** wtw, gdy dla pewnego wzajemnie jednoznacznego odwzorowania g zbioru I_1 na I_2, $g(R_1) = R_2$. A zatem dla dowolnych indeksów $i, j \in I_1$, $\langle i, j\rangle \in R_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle g(i), g(j)\rangle \in R_2$. Modele o izomorficznych strukturach modalnych i równolicznych dziedzinach będą nazywane **modelami izomorficznymi**. Niech f będzie dowolnym wzajemnie jednoznacznym odwzorowaniem D_1 na D_2. Funkcję f rozszerzamy na ciągi, zbiory ciągów i możliwe ekstensje dowolnych wyrażeń. Niech g będzie dowolnym, wzajemnie jednoznacznym odwzorowaniem I_1 na I_2 takim, że $g(R_1) = R_2$. Funkcję g rozszerza się na intensje dowolnych wyrażeń przez indukcję. Niech $i \in I_1$ będzie dowolnym indeksem, wówczas:

1. Jeżeli $\boldsymbol{I}$ jest intensją formuły, to $g(\boldsymbol{I})(g(i)) = g(\boldsymbol{I}(i))$;
2. Jeżeli $\boldsymbol{T}$ jest intensją termu, to $g(\boldsymbol{T})(g(i)) = g(\boldsymbol{T}(i))$;
3. Jeżeli $\boldsymbol{F}$ jest intensją funktora, to dla dowolnych intensji $A_1,..., A_n$ argumentów tego funktora oraz przyporządkowanej im intensji B wyrażenia złożonego $g(\boldsymbol{F})(g(A_1),..., g(A_n)) = g(B)$ wtw, gdy $\boldsymbol{F}(A_1,..., A_n) = B$.

Złożenie odwzorowań f i g określa się sposób analogiczny:

1. Jeżeli $\boldsymbol{I}$ jest intensją formuły, to $f[g(\boldsymbol{I})(g(i))] = f[\boldsymbol{I}(i)]$;
2. Jeżeli $\boldsymbol{T}$ jest intensją termu, to $f[g(\boldsymbol{T})(g(i))] = f[T(i)]$;

3. Jeżeli $\boldsymbol{F}$ jest intensją funktora, to dla dowolnych intensji $A_1,\ldots, A_n$ argumentów oraz przyporządkowanej im intensji B wyrażenia złożonego, $f[g(\boldsymbol{F})](f[g(A_1)]\ldots f[g(A_n)]) = f[g(B)]$.

Pozwala to rozszerzyć kryterium inwariantności na wyrażenia intensjonalne: Wyrażenie intensjonalne α języka L jest **inwariantne** wtw, gdy dla dowolnych modeli izomorficznych $M = \langle D_1, I_1, R_1, \boldsymbol{I}_1\rangle$ i $M = \langle D_2, I_2, R_2, \boldsymbol{I}_2\rangle$ oraz dowolnych wzajemnie jednoznacznych odwzorowań f: D_1 na D_2 oraz g: I_1 na I_2, $f[g(\boldsymbol{I}_1(\alpha))] = \boldsymbol{I}_2(\alpha)$.

Dla wyrażeń poszczególnych kategorii inwariantność rozumie się w następujący sposób:

1. Jeżeli ϕ jest formułą, to dla każdego ciągu $s \in D_1^{\omega}$ oraz $i \in I_1$, $s \in \boldsymbol{I}_1(\phi)(i)$ wtw, gdy $f(s) \in \boldsymbol{I}_2(\phi)(g(i))$;
2. Jeżeli t jest termem, to dla każdego $s \in D_1^{\omega}$, $a \in D$ oraz $i \in \mathrm{I}_1$, $\boldsymbol{I}_1(t)(i)(s) = a$ wtw, gdy $\boldsymbol{I}_2(t)(g(i))(f(s)) = f(a)$;
3. Jeżeli α jest funktorem kategorii $\tau/\sigma_1\ldots\sigma_n$, to dla dowolnego ciągu intensji $\boldsymbol{I}_1(\beta_1),\ldots, \boldsymbol{I}_2(\beta_n)$ wyrażeń $\beta_1\ldots\beta_n$ kategorii $\sigma_1\ldots\sigma_n$, $\boldsymbol{I}_1(\alpha)(\boldsymbol{I}_1(\beta_1),\ldots, \boldsymbol{I}_1(\beta_n)) = \boldsymbol{I}_2(\alpha(\beta_1\ldots\beta_n))$ wtw, gdy $\boldsymbol{I}_2(\alpha)(\mathrm{f}[\mathrm{g}(\boldsymbol{I}_1(\beta_1))],\ldots, \mathrm{f}[\mathrm{g}(\boldsymbol{I}_1(\beta_n))]) = \mathrm{f}[\mathrm{g}(\boldsymbol{I}_1(\alpha(\beta_1\ldots\beta_n)))]$.

Rozpatrzmy przykład intensjonalnego wyrażenia, które spełnia warunek inwariantności. Operator $\Box$ jest operatorem konieczności w logice modalnej K wtw, gdy jego intensją w każdym modelu $M_1 = \langle D_1, \langle W_1, R_1\rangle, \boldsymbol{J}_1\rangle$ jest funkcja przyporządkowująca każdej możliwej intensji $\boldsymbol{I}$ dowolnej formuły φ, intensję $\boldsymbol{I}^*$ formuły $\Box\varphi$ taką, że dla każdego $s \in D_1^{\omega}$ i każdego $w \in W_1$, $s \in \boldsymbol{I}^*(w)$ wtw, gdy dla każdego $w' \in W_1$, takiego że wRw', $s \in \boldsymbol{I}^*(w')$. Pokażmy, że operator $\Box$ jest inwariantny. Niech f będzie wzajemnie jednoznacznym odwzorowaniem D_1 na D_2, g zaś wzajemnie jednoznacznym odwzorowaniem I_1 na I_2 takim, że $g(R_1) = R_2$. Niech ϕ będzie dowolną formułą, wówczas $\boldsymbol{J}_1(\Box)(\boldsymbol{J}_1(\phi)) = \boldsymbol{J}_1(\Box\phi)$, tak że dla dowolnego $s \in D_1^{\omega}$ i dowolnego $w \in W_1$, $s \in \boldsymbol{J}_1(\Box\phi)(w)$ wtw, gdy dla każdego $w' \in W_1$, takiego że wR_1w' zachodzi $s \in \boldsymbol{J}_1(\phi)(w)$. Niech $f(g(\boldsymbol{J}_1(\phi))$ i $f(g(\boldsymbol{J}_1(\Box\phi))$ będą obrazami intensji $\boldsymbol{J}_1(\phi)$ i $\boldsymbol{J}_1(\Box\phi)$ w odwzorowaniach f i g. Ponieważ dla każdego w i w', takich że wR_1w' zachodzi $g(w)R_2g(w')$, to $f(s) \in f[g(\boldsymbol{J}_1(\Box\phi))\, g(w)]$ wtw, gdy dla każdego $g(w')$ takiego, że $g(w)R_2g(w')$, $f(s) \in f[g(\boldsymbol{J}_1(\phi))g(w')]$. A zatem $\Box$ spełnia uogólniony warunek inwariantności: $\mathbf{J}_2(\Box)(\mathrm{f}(\mathrm{g}(\mathbf{J}_1(\phi))) = f(g(\boldsymbol{J}_1(\Box\phi))$. Analogiczny rezultat otrzymuje się dla operatorów podstawowych logik modalnych T, $S4$ i $S5$.

Jako przykład wyrażenia, które nie jest inwariantne rozpatrzmy złożony funktor *Jan szuka*, w którym występuje intensjonalny czasownik przechodni *szuka*. Intensją tego funktora w modelu $M = \langle D_1, \langle W_1, R_1\rangle, \boldsymbol{J}_1\rangle$ jest funkcja przyporządkowująca możliwym intensjom termów intensje formuł, co pozwala wyznaczyć wartość formuły *Jan szuka*(t) w dowolnym świecie $w \in W$, dla dowolnego ciągu $s \in D^{\omega}$. Formuła *Jan szuka*(t) jest prawdziwa w świecie w, gdy Jan rzeczywiście szuka obiektu $a \in D$ przyporządkowanego ekstensji termu t

przez ciąg s w świecie w. Wartościami $f[g(t)]$ i $f[g(Jan\ szuka(t))]$ w $f[g(s)]$ i $g(w)$ są odpowiednio $f(a)$ oraz wartość logiczna 1. Jednak $\boldsymbol{J}_2(Jan\ szuka)$ może być funkcją taką, że wartością $\boldsymbol{J}_2(Jan\ szuka)(f[g(t)])$ w świecie $g(w)$ i dla ciągu $f[g(s)]$ jest 0. Jest tak, gdy w świecie $g(w)$ Jan nie szuka obiektu $f[g(a)]$. A zatem funktor *Jan szuka* i czasownik *szuka* nie są inwariantne.

Zauważmy, że w kryterium inwariantności McCarthy'ego występuje *implicite* warunek stałości, który pozwala na takie ograniczenie zbioru dopuszczalnych funkcji interpretacyjnych w każdym modelu, aby wyrażeniom logicznym przyporządkowywane były jedynie ich zamierzone denotacje będące, przypomnijmy, niezmienniczymi obiektami logicznymi[19].

TEORIOMODELOWA SEMANTYKA JĘZYKA NATURALNEGO I GRAMATYKI MONTAGUE

W poprzednich paragrafach omawialiśmy inwariantność wyrażeń języka sformalizowanego. Obecnie zastosujemy to kryterium do odpowiedników znaków logicznych w języku naturalnym. Najczęściej będziemy się odwoływać do semantyki teoriomodelowej, która rozwinęła się w dużej mierze pod wpływem badań nad kwantyfikatoromi uogólnionymi. Uznanie kwantyfikatorów za wyrażenia kategorematyczne pozwoliło na formalizację znacznie większych fragmentów języka naturalnego, głównie dzięki wprowadzeniu kwantyfikatorów typu $<1, 1>$. Możliwymi denotacjami kwantyfikatorów binarnych oraz, będących ich odpowiednikami w języku naturalnym, przedimków są relacje 2-argumentowe w rodzinie podzbiorów dziedziny interpretacji. Rozpatrzmy dla przykładu zdanie ogólnotwierdzące *Każde S jest P*. Przekładając to zdanie na język klasycznego rachunku predykatów otrzymujemy formułę $\forall x(S(x) \Rightarrow P(x))$, w której pojawia się, nieobecna w zdaniu wyjściowym, implikacja. Przekład na język kwantyfikatorów uogólnionych Lindströma pozwala uzyskać równoważną, lecz bliższą formie zdania wyjściowego, formułę $\boldsymbol{Każdy}(x,x)(S(x),P(x))$. Funkcja składniowa kwantyfikatora ***Każdy*** typu $<1,1>$ jest o wiele bliższa funkcji składniowej przedimka *Każdy*, niż funkcja składniowa klasycznego kwantyfikatora $\forall$. Formułę $\boldsymbol{Każdy}(x,x)(S(x),P(x))$ można bowiem na mocy

[19] Warunek inwariantności nie jest jedynym kryterium logiczności sformułowanym przez McCarthy'ego w [1981]. Inne podane przez niego kryterium odwołuje się do pojęcia zasobu informacji użytkownika języka i stwierdza, że użycie funktorów logicznych wymaga minimalnej ilości informacji potrzebnych do wyznaczenia korelatu semantycznego wyrażenia złożonego. W [1989] McCarthy formułuje empiryczny warunek bycia znakiem logicznym, odwołujący się do stanów przekonań wyidealizowanego użytkownika języka. Warunek ten sytuuje się na pograniczu logiki i psycholigwistyki i usiłuje wyjaśnić pewne psychologiczne aspekty wyróżnienia tych, a nie innych funkcji jako korelatów semantycznych wyrażeń uznawanych za logiczne.

umowy zapisywać w postaci ***Każdy***(S,P). Korelatem semantycznym kwantyfikatora ***Każdy*** i przedimka *Każdy*, dla dowolnej dziedziny interpretacji D, jest relacja binarna składająca się ze wszystkich par $<A, B>$, takich że $A, B \in 2^D$ i $A \subseteq B$. Pozwala to traktować przedimek *Każdy* jako nazwę relacji inkluzji zbiorów.

Drugim źródłem inspiracji do powstania semantyki teoriomodelowej były prace Chomskiego oraz innych językoznawców, które przełamały głęboko zakorzenione przekonanie, że języki naturalne są nielogiczne i poza wąskimi fragmentami nie mogą być przedmiotem badań prowadzonych metodami logiki formalnej. Coraz większe uznanie zaczął zdobywać pogląd, że języki naturalne posiadają bardzo złożoną i subtelną strukturę logiczną, niewyrażalną, poza bardzo ograniczonymi fragmentami języka, za pomocą języka logiki pierwszego rzędu. W teoriomodelowych badaniach języka naturalnego wykorzystuje się często pojęcia wprowadzone przez Chomsky'ego, w szczególności zaś gramatyki generatywne. Na gramatyki generatywne składają się reguły, które pozwalają budować znaczniki frazowe, będące graficzną reprezentacją struktur zdaniowych. Pozwala to na likwidację niejednoznaczności gramatycznych, które stanowią przeszkodę w formułowaniu warunków prawdziwości zdań. Przedmiotem interpretacji semantycznej nie są zatem bezpośrednio zdania, lecz odpowiadające im znaczniki frazowe.

Pionierem badań języka naturalnego za pomocą metod teorii modeli był Richard Montague. Semantyki obszernych fragmentów języka angielskiego, zwane gramatykami Montague[20], budowane były w kilku etapach:

1. Generowanie znaczników frazowych zdań fragmentu języka angielskiego. Pozwalało to na eliminację niejednoznaczności gramatycznych zdań[21];
2. Tłumaczenie znaczników frazowych na język modalnej i temporalnej logiki nieskończonego rzędu, za pomocą odpowiednich reguł przekładu[22];
3. Interpretacja semantyczna tak otrzymanych formuł za pomocą metod teorii modeli[23].

Bardzo ważną część gramatyk Montague stanowi semantyka przedimków[24], które traktowane są w sposób zbliżony do kwantyfikatorów typu <1,1> u Lindströma.

---

[20] Do najważniejszych artykułów Montague należą: *Universal Grammar* (Montague [1970]) oraz *The Proper Treatment of Quantification in Ordinary English* (Montague [1973]). Wśród publikacji poświęconych popularyzacji jego idei wymienić można monografię Dowty'ego, Wallsa i Petersa *Introduction to Montague Semantics* (Dowty *et. al.* [1981]) oraz przeglądowy artykuł Halvorsena i Ladusawa *Montague's 'Universal Grammar': an Introduction for the Linguist* (Halvorsen i Ladusaw [1979]).

[21] Tak otrzymany język strutur frazowych nazywał Montague językiem ujednoznacznionym.

[22] Por. Halvorsen i Ladusaw [1979].

[23] Montague zakładał zachodzenie tzw. **zasady składalności**, która polega na tym, że denotacja wyrażenia złożonego, na przykład wartość logiczna zdania, jest jednoznacznie wyznaczona przez denotacje występujących w nim wyrażeń prostych.

Między obu podejściami istnieje jednak wyraźna różnica. Kwantyfikatory typu <1,1> są funktorami zdaniotwórczymi rozszerzonego języka pierwszego rzędu, których argumentami są dwie formuły z jedną zmienną wolną. Montague zdecydowanie odróżnia kwantyfikatory od przedimków pełniących inną funkcję syntaktyczną. W rezultacie przedimki traktowane były jako wyrażenia języka drugiego rzędu, które można jednak definiować za pomocą kwantyfikatorów klasycznych i operatora abstrakcji λ:

Każdy $=_{df} \lambda X[\lambda Y \forall x[X(x) \Rightarrow Y(x)]]$, gdzie X i Y są zmiennymi predykatywnymi 1-argumentowymi.

Podobnie zdefiniowany jest przedimek określony *the*, który można w przybliżeniu sparafrazować jako *dokładnie jeden*:

the $=_{df} \lambda X[\lambda Y \exists y[\forall x[X(x) \Leftrightarrow x = y] \wedge Y(y)]]$

oraz przedimek nieokreślony *a*, który może być rozumiany jako *jeden z wielu* lub *co najmniej jeden*:

a $=_{df} \lambda X[\lambda Y \exists x[X(x) \wedge Y(x)]]$

Wszystkie powyższe definicje podpadają pod wspólny schemat:

Det $=_{df} \lambda X[\lambda Y \phi]$

Schemat ten pozwala odtworzyć możliwą denotację przedimka[25] jako funkcji ze zbioru możliwych denotacji zmiennej predykatywnej X, w zbiór funkcji ze zbioru możliwych denotacji zmiennej Y, w zbiór $\{0,1\}$.

Możliwość stosowania gramatyk Montague do języka naturalnego jest poważnie ograniczona z powodu niedefiniowalności pewnych przedimków za pomocą kwantyfikatorów $\forall$ i $\exists$. Do przedimków takich należą, na przykład *mało*, *wiele* czy *większość*. Ponieważ kwantyfikatory $\forall$ i $\exists$ są tradycyjnie uważane za stałe logiczne, to problem logiczności przedimków u Montague został rozwiązany w sposób arbitralny – wszystkie rozpatrywane przez niego przedimki z założenia były logiczne. W kolejnych teoriach inspirowanych pracami Montague próbowano przekroczyć to ograniczenie.

KWANTYFIKATORY I PRZEDIMKI U BARWISE'A I COOPERA

---

[24] Por. Montague [1973].

[25] W literaturze angielskiej *determiner* – stąd symbol *Det* w schemacie.

Intensywne badania nad przedimkami języka angielskiego zapoczątkowane zostały w przełomowym artykule Barwise'a i Coopera *Generalized Quantifiers and Natural Language*[26]. Sformułowano w nim również *explicite* tezę, że języki sformalizowane stosowane dotychczas do kodowania formy logicznej języków naturalnych, w szczególności zaś język pierwszego rzędu, nie są efektywnymi narzędziami analizy języka naturalnego. Język pierwszego rzędu okazuje się szczególnie nieefektywny w przypadku reprezentowania struktury logicznej zdań z przedimkami. Warto w tym miejscu nadmienić, że językoznawcy nie są zgodni co do definicji przedimka[27]. Tradycyjnie terminu tego używa się w odniesieniu do rodzajników, zaimków przymiotnych wskazujących, zaimków liczebnych oraz szeregu innych wyrażeń pełniących podobne funkcje w zdaniu.

Barwise i Cooper traktują przedimki w sposób analogiczny do kwantyfikatorów typu <1,1>. Terminu „kwantyfikator" używają w sposób niestandardowy, rezerwując go dla fraz nominalnych będących, przypomnijmy, nazwami własnymi lub połączeniami przedimka z rzeczownikiem pospolitym. Na gruncie języka angielskiego użycie terminu „kwantyfikator" w odniesieniu do fraz nominalnych nie brzmi tak sztucznie jak w języku polskim. Kwantyfikatory klasyczne $\exists$ i $\forall$ są bowiem odpowiednikami fraz nominalnych złożonych z przedimków *every* i *some* oraz tzw. predykatu pełnego, denotującego całą dziedzinę interpretacji, któremu w języku angielskim odpowiada rzeczownik *thing*. Odpowiednikiem kwantyfikatora $\forall$ jest zatem fraza nominalna (*Every*)(*thing*), polskie *wszystko*, kwantyfikatora $\exists$ zaś fraza (*Some*)(*thing*), polskie *coś*.

Językiem kodującym strukturę logiczną języka angielskiego jest tzw. logika z kwantyfikatorami uogólnionymi *L*(*GQ*)[28]. Słownik *L*(*GQ*) składa się zarówno z symboli logicznych jak i pozalogicznych. Do symboli logicznych zaliczane są spójniki, zmienne indywiduowe, rzeczownik *thing*, symbol abstrakcji, symbol równości oraz przedimki logiczne: *some*, *every*, *no*, *both*, *neither*, 1, 2, 3,..., *!*1, *!*2, *!*3,... oraz *the*1, *the*2, *the*3,...[29]. Do symboli pozalogicznych należą stałe indywiduowe, predykaty *n*-argumentowe oraz niektóre przedimki, np. *most*, *many*, *few*, *a few*.

Semantyka *L*(*GQ*) oparta jest na pojęciu modelu składającego się z dziedziny interpretacji *D* oraz z funkcji interpretacyjnej ***J***, przyporządkowującej znakom językowym ich denotacje w taki sposób, że wyrażeniom pozalogicznym przyporządkowuje się możliwe denotacje właściwego dla nich typu, natomiast wyrażeniom logicznym ustalone obiekty właściwego dla nich typu, na przykład:

---

[26] Por. Barwise i Cooper [1981].

[27] Por. Lyons [1977], s.77 i 78 wydania polskiego.

[28] Skrót od *Logic with Generalized Quantifiers*.

[29] Rozumiane kolejno jako *co najmniej* 1, *co najmniej* 2 i *co najmniej* 3, *co najwyżej* 1, *co najwyżej* 2 i *co najwyżej* 3 oraz *dokładnie* 1, *dokładnie* 2 i *dokładnie* 3.

$\boldsymbol{J}(thing) = D$
$\boldsymbol{J}(every) = \boldsymbol{J}(all) = \{<X,Y>: X,Y \in D \text{ i } X \cap Y = Y\}$
$\boldsymbol{J}(some) = \boldsymbol{J}(a) = \{<X,Y>: X,Y \in D \text{ i } X \cap Y \neq \varnothing\}$

Aby podać teoriomodelową interpretację fragmentów języka naturalnego, Barwise i Cooper formułują reguły pozwalające tłumaczyć zdania języka naturalnego na $L(GQ)$. Starają się przy tym, aby składnia $L(GQ)$ nie odbiegała zasadniczo od składni tłumaczonego fragmentu. W podejściu tym zawarta jest *implicite* dyrektywa, aby formę logiczną zdania wyrażać w sposób możliwie najbardziej zbliżony do jego realizacji powierzchniowej. Pozwala to między innymi na różnicowanie form zdań, którym w tradycyjnym ujęciu przypisywano tę sama formę logiczną. Całkowicie zrezygnowali z tłumaczenia przedimków za pomocą formuł drugiego rzędu, przypisując im w $(L)GQ$ ich własną kategorię syntaktyczą. Zabieg ten nie powiódł się jednak z pewnych względów w przypadku imion własnych, które należą do kategorii fraz nominalnych, czyli kwantyfikatorów w terminologii Barwise'a i Coopera. Denotacjami kwantyfikatorów są rodziny podzbiorów dziedziny interpretacji lub, wyrażając się mniej precyzyjnie, pewne zbiory cech. Próba zdefiniowania denotacji imienia *Jan* jako zbioru cech przysługujących Janowi prowadzi w konsekwencji do wprowadzania nieleksykalizowanego w języku naturalnym obiektu $\boldsymbol{j}$: $\boldsymbol{J}(Jan) = \{X \subseteq D: \boldsymbol{j} \in X\}$. W rezultacie Barwise i Cooper zdecydowali się na wprowadzenie do języka $L(GQ)$ pozalogicznej stałej j, będącej nazwą tego obiektu. Odpowiednikiem frazy nominalnej *Jan* będzie zatem kwantyfikator $the1(\lambda x(x = j)$, jego zaś denotacją w modelu $M = <D, \boldsymbol{J}>$ będzie rodzina zbiorów $\{X \subseteq D: \boldsymbol{J}(j) \in X\}$, którą można rozumieć jako zbiór wszystkich cech przysługujących *Janowi*.

Barwise i Cooper zauważyli również, że o prawdziwości zdania języka naturalnego w postaci $(Det(A))(B)$ decyduje jedynie ta część denotacji B, która jest podzbiorem denotacji A, czyli $\boldsymbol{J}(B) \in \boldsymbol{J}(DetA)$ wtw, gdy $\boldsymbol{J}(B) \cap \boldsymbol{J}(A) \in \boldsymbol{J}(DetA)$. Warunek ten, zwany w literaturze zazwyczaj *Warunkiem Frazy Nominalnej*, dalej *WFN*[30], pozwala podzielić kwantyfikatory typu <1,1> na lingwistyczne (przedimki) i pozalingwistyczne. Pozalingwistyczne kwantyfikatory typu <1,1> są nieleksykalizowane w języku naturalnym. Można jednak definiować ich denotacje lub, o ile są one inwariantnymi obiektami logicznymi, ich reprezentacje liczbowe. Przykładami takich kwantyfikatorów są przedstawione wcześniej kwantyfikatory statystyczne. Spełnianie *WFN* przez wszystkie przedimki języka naturalnego, zarówno logiczne jak i pozalogiczne,

[30] W oryginale *NP-condition*.

Barwise i Cooper uznali za uniwersale językowe[31]. Inne uniwersalia sformułowane przez Barwise'a i Coopera, dotyczyły występowania w języku naturalnym przedimków spełniających różnego rodzaju ograniczenia narzucone na ich denotacje. Badania tej potencjalnie najliczniejszej w języku naturalnym kategorii wyrażeń o niezmienniczych denotacjach, zainspirowały cały szereg prac między innymi van Benthema, Westerstahla, Keenana, Falza i Staviego[32]. Oczywiście w językach etnicznych realizowana jest jedynie niewielka część semantycznych możliwości przewidzianych przez semantykę teoriomodelową.

KRYTERIA LOGICZNOŚCI WYRAŻEŃ JĘZYKA NATURALNEGO U WESTERSTÅHLA

Barwise i Cooper nie podali *explicite* warunku inwariantności. Nie ulega jednak wątpliwości, że wyrażenia zaliczone przez nich do logicznych denotowane są przez niezmiennicze obiekty logiczne. Systematyczne badania niezmienniczych wyrażeń w języku naturalnym zapoczątkował Dag Westerståhl w artykule *Logical Constants in Quantifier Languages*[33]. Semantyczne kryteria logiczności Westerståhla nie odbiegają od propozycji Tarskiego i McCarthyego, formułowane są jednak dla innego języka. Ekstensjonalny język „kwantyfikatorowy", na który Westerståhl tłumaczy fragment języka angielskiego, posiada pięć kategorii syntaktycznych obejmujących zmienne indywiduowe, stałe indywiduowe, predykaty *n*-argumentowe, spójniki zdaniowe n-argumentowe oraz przedimki, zwane przez niego po prostu kwantyfikatorami, które odpowiadają kwantyfikatorom typu <1,1>. Zmienne indywiduowe nie odpowiadają bezpośrednio żadnym wyrażeniom języka naturalnego i występują jedynie w zasięgu operatora abstrakcji, który jest jedynym wyrażeniem synkategorematycznym w języku Westerståhla. Wyrażeniom każdej kategorii syntaktycznej przyporządkowuje się zbiór możliwych denotacji w dziedzinie D:

1. Dla stałych indywiduowych, będących odpowiednikami imion własnych, możliwymi denotacjami są elementy D;
2. Dla predykatów *n*-argumentowych – relacje *n*-argumentowe na D;
3. Dla spójników *n*-argumentowych – funkcje przyporządkowujące wartości logiczne *n*-elementowym ciągom wartości logicznych;
4. Dla przedimków – zbiory par podzbiorów D, a zatem dla dowolnego przedimka d, $\boldsymbol{J}(d) \subseteq 2^D \times 2^D$.

---

[31] Program szukania uniwersaliów językowych nawiązuje do poglądów Chomsky'ego, który chciał w ten sposób odtworzyć najgłębsza warstwę wspólną dla wszystkich języków naturalnych.

[32] Por. van Benthem [1983], [1984] i [1985], Westerstähl [1984], [1985] i [1989] oraz Keenan i Stavi [1986].

[33] Por. Westerståhl [1985].

Między możliwymi denotacjami wyrażeń danej kategorii występują denotacje szczególne, przypisywane znakom logicznym. Denotacje znaków logicznych muszą spełniać warunki **stałości**, **inwariantności** oraz, w przypadku przedimków, dodatkowo warunku **frazy nominalnej**.

Wyrażenie α jest **stałe** w sensie **mocnym** wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych niepustych modeli $M = <D, \boldsymbol{J}>$ i $M' = <D', \boldsymbol{J}'>$, takich że $D \subseteq D'$, zachodzi $\boldsymbol{J}(\alpha) = \boldsymbol{J}'(\alpha)|_D$, gdzie $\boldsymbol{J}'(\alpha)|_D$ oznacza tę część denotacji $\mathbf{J}'(\alpha)$, która należy do zbioru możliwych denotacji α w D. Warunek ten głosi, że denotacja wyrażenia logicznego jest w danym modelu niezależna od funkcji interpretacyjnej i zależy jedynie od dziedziny interpretacji. Oznacza to ograniczenie nałożone na klasę funkcji interpretacyjnych. Ponadto denotacja wyrażenia logicznego w modelu „szerszym" musi dać się „obciąć" do jego denotacji w modelu „węższym", co pozwala wykluczyć ze zbioru znaków logicznych niezmiennicze przedimki o „nieciągłej" denotacji, np.: $\boldsymbol{J}(d) = \{<X, Y>: X, Y \subseteq D \ i \ X \cap Y = Y\}$, gdy $card(D) \geq 10$ i $\boldsymbol{J}(d) = \{<X, Y>: X, Y \subseteq D \ i \ X \cap Y = \varnothing\}$, gdy $card(D) < 10$.

Wyrażenie α jest **inwariantne** w sensie **mocnym** wtw, gdy dla dowolnych modeli $M = <D, \boldsymbol{J}>$ i $M' =<D', \boldsymbol{J}'>$ o niepustych dziedzinach równolicznych oraz dla dowolnej bijekcji f dziedziny D na D': $f(\boldsymbol{J}(\alpha)) = \boldsymbol{J}'(\alpha)$. Inwariantność w sensie słabym oznacza niezmienniczość ze względu na permutacje tej samej dziedziny[34].

Przedimek d spełnia warunek **frazy nominalnej**[35] wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego modelu $M = <D, \boldsymbol{J}>$, $D \neq \varnothing$ i dowolnych $A, B \subseteq D$ zachodzi $(A, B) \in \boldsymbol{J}(d)$ wtw, gdy $(A, A \cap B) \in \boldsymbol{J}(d)$.

Wszystkie wymienione warunki wyrażają pewien aspekt przejrzystości przedimków logicznych. Dla wyznaczenia wartości logicznej formuły *detAB* z przedimkiem spełniającym te warunki, wystarczy znajomość liczności denotacji A i $A \cap B$ i nie wymagana jest żadna dodatkowa wiedza na temat liczności dziedziny interpretacji. Warto zauważyć, że przedstawione nieco wcześniej kwantyfikatory statystyczne spełniają warunki inwariantności, lecz nie zawsze spełniają *WFN* i warunek stałości w sensie mocnym. Zachodzenie przytoczonych warunków stanowi jednocześnie podstawę do sformułowania reprezentacji liczbowej przedimków logicznych. Reprezentacja liczbowa ułatwia badanie relacyjnych własności przedimków, zwłaszcza tych, które posiadają „skomplikowaną" denotację, trudną do opisania w kategoriach teoriomnogościowych[36]. Przypomnijmy, że reprezentacją liczbową $R(q)$ dowolnego kwantyfikatora q typu <1,1> spełniającego warunek inwariantności w

---

[34] W oryginale warunek ten nosi nazwę *PERM*.

[35] W oryginale *conservativity*.

[36] Por. van Benthem [1984], [1985] i [1986] oraz Westerstĺhl [1984], gdzie wprowadzono cały szereg pojęć dotyczących między innymi różnych rodzajów monotoniczności przedimków.

sensie mocnym[37] jest zbiór wszystkich czwórek liczb naturalnych $<a, b, c, d>$, takich że $a = card(A - B)$, $b = card(A \cap B)$, $c = card(B - A)$, $d = card(D - (A \cup B))$, dla dowolnych $A, B \subseteq D$, takich że $<A, B> \in \boldsymbol{J}(q)$. Jeżeli q spełnia *WFN*, to jego reprezentacja redukuje się do zbioru trójek $<a, b, d>$, gdyż jego denotacja nie zależy od zbioru $(B - A)$. Jeżeli kwantyfikator spełnia ponadto warunek stałości, to jego reprezentacją jest zbiór par liczb naturalnych $<a, b>$, gdyż jego denotacja nie zależy od zbioru $(D - (A \cup B))$.

Warunki inwariantności i stałości mogą być łatwo zaadaptowane dla wyrażeń innych kategorii syntaktycznych. Westerståhl, podobnie jak wcześniej Tarski i McCarthy, konstruował niezmiennicze denotacje wyrażeń różnych kategorii i badał ilości takich obiektów logicznych w dziedzinach o różnej mocy.

KRYTERIA LOGICZNOŚCI WYRAŻEŃ W BOOLE'OWSKIEJ SEMANTYCE JĘZYKA NATURALNEGO

Tradycyjna semantyka, w której występuje dziedzina interpretacji złożona z indywiduów, nie jest jedyną teoriomodelową semantyką języka naturalnego. Jedna z konkurencyjnych semantyk oparta jest na **algebrach Boole'a**.

W algebraicznym podejściu do logiki spójniki *koniunkcji*, *alternatywy* i *negacji* interpretowane jako operacje w minimalnej algebrze Boole'a $<\{1,0\}, \wedge, \vee, \neg>$, gdzie zbiór $\{1,0\}$, zwany **nośnikiem**, jest zamknięty ze względu na operacje $\wedge$, $\vee$ i $\neg$. Ponadto zdania języka naturalnego, w których spójniki *i*, *lub* łączą wyrażenia innych części mowy, traktowane są jako skróty odpowiednich zdań złożonych. Na przykład zdanie *Jaś i Małgosia poszli do domu* można traktować jako skrót koniunkcji *Jaś poszedł do domu i Małgosia poszła do domu*[38].

Badania nad boole'owską interpretacją języka naturalnego zapoczątkowane zostały artykułem Keenana *A Boolean Approach to Semantics*[39], a następnie rozwinięte w monografii Keenana i Falza *Boolean Semantics of Natural Languages*[40]. Przedstawiona tam koncepcja opiera się na spostrzeżeniu, że spójniki *i*, *lub* oraz partykuła *nie* zachowują się jak operatory boole'wskie we wszystkich niemal swych wystąpieniach, tj. wszędzie tam, gdzie łączą rzeczowniki, czasowniki, frazy nominalne, przymiotniki czy przysłówki. Prowadzi to do uznania zbiorów możliwych denotacji wyrażeń niemal wszystkich

---

[37] Oczywiście, jeżeli zachodzi inwariantność w sensie mocnym, to zachodzi również inwariantność w sensie słabym Jak pokazał WesterstÍhl, inwariantność w sensie słabym i warunek stałości implikują łącznie inwariantność w sensie mocnym.

[38] Przy pewnej interpretacji zdania te nie są jednak synonimami. Jest tak gdy pierwsze zdanie sugeruje, że Jaś i Małgosia poszli do domu razem, czego nie sugeruje drugie zdanie.

[39] Por. Keenan [1981].

[40] Por. Keenan i Falz [1985].

kategorii syntaktycznych języka naturalnego za nośniki algebry Boole'a, łączących je zaś spójników *i, lub* oraz *nie*, za operatory boole'owskie.

Semantyka boole'owska oparta jest na zupełnie innej ontologii niż tradycyjne semantyki teoriomodelowe. Zamiast obiektów i wartości logicznych przyjmuje się bowiem istnienie cech i wartości logicznych, z których konstruuje się szereg bytów pochodnych. O takim wyborze bytów podstawowych decyduje to, że elementy dziedziny interpretacji nie są w rzeczywistości denotacjami żadnych wyrażeń języka naturalnego. Imiona własne i nazwy własne, których denotacje uważane są zazwyczaj za elementy dziedziny interpretacji, należą do tej samej kategorii syntaktycznej co pełne frazy nominalne, denotowane z kolei jako klasy zbiorów. Stanowisko to można również poprzeć argumentem, że nazwy własne można łączyć ze sobą oraz z innymi frazami nominalnymi za pomocą operatorów boole'owskich *i, lub* oraz *nie*, tak jak w wyrażeniu *Jan lub Maria* czy *Jan i wszyscy studenci*. Gdyby denotacjami imion własnych były obiekty dziedziny interpretacji, to wyrażenia takie, wbrew oczywistej intuicji językowej, byłyby bezsensowne.

Cechy, których zbiór stanowi nośnik zupełnej i atomicznej algebry Boole'a $T_N = <P, \wedge, \vee, \neg >$, są zamierzonymi denotacjami rzeczowników pospolitych, symbole operacji zaś są interpretacjami spójników logicznych tam gdzie łączą rzeczowniki pospolite. Element maksymalny algebry, czyli cecha uniwersalna, jest denotacją rzeczownika *thing*, atomy tej algebry zaś, zwane cechami atomicznymi, denotują wyrażenia złożone oznaczające cechy przysługujące tylko „jednemu obiektowi"[41], np. *bycie Janem* czy *bycie najwyższym studentem.* Atomy algebry cech są zamierzonymi denotacjami rzeczowników występujących w deskrypcjach określonych. Same deskrypcje określone denotowane są jako atomy algebry Boole'a fraz nominalnych, definiowanej jako algebra potęgowa algebry cech.

Zbiory możliwych denotacji wyrażeń pozostałych kategorii wyznaczane są na podstawie pełnionych funkcji syntaktycznych. Może się to odbywać albo poprzez utożsamienie ich ze zbiorami potęgowymi zbiorów możliwych denotacji wyrażeń innych kategorii, albo poprzez utożsamienie ich ze zbiorami wszystkich funkcji ze zbioru możliwych denotacji wyrażeń pewnej kategorii, w zbiory możliwych denotacji wyrażeń innych kategorii. O tak skonstruowanych zbiorach dowodzi się następnie, że są nośnikami atomicznych i zupełnych algebr Boole'a, których operacje są oznaczane przez spójniki łączące wyrażenia odpowiednich kategorii. Rozpatrzmy kilka przykładów:

1. Zbiorem możliwych denotacji wyrażeń należących do kategorii fraz nominalnych *NP* jest zbiór potęgowy 2^P, gdzie P jest zbiorem cech.

[41] Wyjaśnienie to jest czysto intuicyjne, gdyż na gruncie semantyki Keenana i Falza nie występują obiekty w sensie tradycyjnym.

Szczególnymi elementami 2^P są element maksymalny denotujący wyrażenie *wszystko* (ang. *everything*) oraz element minimalny denotujący wyrażenie *nic* (ang. *nothing*). Atomy tej algebry denotują imiona własne oraz deskrypcje określone;

2. Zbiorem możliwych denotacji czasowników nieprzechodnich jest zbiór $\{0,1\}^{2^\wedge P}$, gdyż argumentem czasownika nieprzechodniego jest fraza nominalna, a utworzone wyrażenie złożone jest zdaniem;
3. Zbiorem możliwych denotacji kategorii przysłówków jest zbiór wszystkich funkcji ze zbioru $\{0,1\}^{2^\wedge P}$ w $\{0,1\}^{2^\wedge P}$;
4. Przysłówki stanowią szczególny przypadek wyrażeń zwanych modyfikatorami, których możliwymi denotacjami są funkcje z pewnego zbioru w ten sam zbiór. Do kategorii modyfikatorowych zalicza się również kategorię przymiotników, denotowanych za pomocą funkcji ze zbioru cech w zbiór cech;
5. Zbiorem możliwych denotacji przedimków jest zbiór *DET* wszystkich funkcji ze zbioru P w zbiór 2^P, które spełniają warunek *WFN* formułowany w następujący sposób: Niech f będzie dowolną funkcją ze zbioru P w zbiór 2^P, niech p i q będą dowolnymi cechami ze zbioru P. Funkcja f spełnia *WFN*, gdy zachodzi: $p \in f(q)$ wtw, gdy $(p \wedge q) \in f(q)$[42].

Keenan i Falz dzielą wyrażenia języka naturalnego na logiczne i pozalogiczne, nie podając jednego, lecz trzy niezależne kryteria logiczności wyrażeń:

1. Wyrażeniami logicznymi są operatory boole'owskie. Odpowiadają one znakom ekspresywnym o charakterze semantycznym u Reichenbacha;
2. Niekiedy algebry Boole'a odpowiadające różnym kategoriom syntaktycznym bywają izomorficzne. Izomorfizmy tych algebr są wyrażane w języku przez pewne końcówki, które przekształcają wyrażenia jednej kategorii na wyrażenia innej kategorii. Końcówki takie traktowane są również jako znaki logiczne. Odpowiadają one znakom ekspresywnym o charakterze syntaktycznym u Reichenbacha, gdyż funkcja ich polega jedynie na „wskazywaniu" zmiany kategorii wyrażenia, np:
   a) końcówka (*e*)*r*, pozwalająca na utworzenie w języku angielskim rzeczownika odczasownikowego, np. *worker* od *work,*
   b) końcówka *ly*, tworząca z przymiotników przysłówki, np. *fast – fastly,*
   c) końcówka *ący* oraz jej „odwrotność" spójka *jest,* np. *idzie – jest idący;*
3. Ostatnie kryterium logiczności oparte jest na zmodyfikowanym warunku inwariantności ze względu na izomorfizmy algebr Boole'a dla tych samych kategorii syntaktycznych. Niech algebry cech T_N' i T_N posiadają równoliczne nośniki; są zatem izomorficzne. Pojęcie izomorfizmu algebr T_N' i T_N rozszerza się w sposób naturalny, na algebry wyrażeń innych kategorii. Określmy

[42] *WFN* nazywany jest przez Keenana i Falza warunkiem zachowawczości.

model jako trójkę $M = <T_N, \mathbf{2}, I>$, gdzie **2** jest minimalną algebrą Boole'a, *I* funkcją interpretacyjną przyporządkowującą rzeczownikom pospolitym cechy, formułom wartości logiczne, a spójnikom odpowiednie operacje boole'owskie. Dla wyrażeń pozostałych kategorii oraz łączących je spójników, funkcję *I* definiuje się indukcyjnie. Wyrażenie α należące do dowolnej kategorii boole'owskiej spełnia kryterium inwariantności wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych modeli $M' = <T_N', \mathbf{2}, I'>$ i $<T_N'', \mathbf{2}, I''>$ o izomorficznych T_N' i T_N'' oraz dla dowolnego izomorfizmu *Izom* tych algebr: $Izom(I'(\alpha)) = I''(\alpha)$. Zauważmy, że tak sformułowane kryterium inwariantności zakłada *implicite* warunek stałości.

We wszystkich przedstawionych w tym rozdziale formalizacjach naturalnego próbuje się reprezentować w sposób sformalizowany **strukturę logiczną** języka naturalnego. Sformułowanie kryteriów logiczności zależy od przyjętego sposobu formalizacji. Westerståhl, który posługiwał się **językiem kategorialnym**[43] sformułował tylko jedno kryterium wyrażone koniunkcją warunków inwariantności i stałości. Keenan i Falz, którzy nie stosują języka kategorialnego, dopuszczają wyrażenia synkategorematyczne, do których warunek inwariantności bezpośrednio się nie stosuje.

[43] Język kategorialny jest to język, w którym wszystkie wyrażenia należą do właściwych im kategorii syntaktycznych. Dokładne omówienie problemów związanych z budowaniem języków kategorialnych można znaleźć w Nowaczyk [1999].