

Anna Szymańska*

**WPŁYW TYPU ROZKŁADU WIELKOŚCI SZKÓD
NA WARTOŚĆ SKŁADKI NETTO W UBEZPIECZENIACH
KOMUNIKACYJNYCH OC**

1. TEORETYCZNE ZASADY KALKULACJI SKŁADKI

Ze względu na znaczący udział ubezpieczeń komunikacyjnych OC w portfelu ubezpieczeń majątkowych, ubezpieczenia te bezpośrednio wpływają na wynik finansowy w tym dziale. Odpowiednio skalkulowana składka powinna zapewniać z jednej strony równowagę finansową ubezpieczyciela, z drugiej strony pełnić rolę marketingową zachęcając klientów do kontynuowania lub wykupienia polisy ubezpieczenia komunikacyjnego OC.

Podstawą obliczenia składki w ubezpieczeniach komunikacyjnych OC jest oszacowanie na podstawie przewidywanej liczby i wielkości szkód składki netto, czyli składki przeznaczonej tylko na pokrycie roszczeń.

Niech $\Pi(X)$ oznacza wysokość składki netto za ochronę przed stratą o wielkości X oraz X będzie zmienną losową o dystrybucji F_X .

Wybrane zasady wyznaczania składki:¹

1) Zasada czystej składki (równoważności składki netto)

$$\Pi(X) = EX \quad (1)$$

2) Zasada wartości oczekiwanej

$$\Pi(X) = (1 + \alpha)EX \quad (2)$$

gdzie $\alpha \geq 0$ nazywa się współczynnikiem bezpieczeństwa.

3) Zasada wariancji

$$\Pi(X) = EX + \alpha \text{Var}X, \alpha \geq 0 \quad (3)$$

4) Zasada odchylenia standardowego

$$\Pi(X) = EX + \alpha \sqrt{\text{Var}X}, \alpha \geq 0 \quad (4)$$

* Dr, Katedra Metod Statystycznych UŁ.

¹ R. Kaas, M. Goovaerts, J. Dhaene, M. Denuit, *Modern Actuarial Risk Theory*, Kluwer, Boston 2001.

5) Zasada odchylenia absolutnego

$$\Pi(X) = EX + \alpha E|X - Me_s|, \alpha \geq 0 \quad (5)$$

6) Zasada percentylu (kwantyla rzędu ε)

$$\Pi(X) = \min\{x : F(x) \geq 1 - \varepsilon\} = F_X^{-1}(1 - \varepsilon) \quad (6)$$

7) Zasada maksymalnej straty

$$\Pi(X) = pEX + (1 - p) \max(X), p \geq 0 \quad i \quad \max(X) < \infty \quad (7)$$

8) Zasada zerowej użyteczności obejmuje grupę metod wyznaczania składki uwzględniającą preferencje ubezpieczyciela, posiadającego majątek w , wyrażone przy pomocy funkcji użyteczności $u(w) = Eu(w + \Pi(X) - X)$, $w \in (-\infty, +\infty)$. Dla $w = 0$ mamy $u(0) = Eu(\Pi(X) - X)$ i metoda wyznaczania składki nazywana jest zasadą zerowej użyteczności. Zasada zerowej użyteczności z wykładniczą funkcją użyteczności $u(w) = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha w})$, $\alpha > 0$ nazywana jest zasadą wykładniczą².

Zasada wykładnicza

$$\Pi(X) = \frac{1}{\alpha} \log(Ee^{\alpha X}), \alpha > 0, Ee^{\alpha X} < \infty \quad (8)$$

9) Zasada wiarygodności – składkę netto wyznacza się jako średnią ważoną składki kolektywnej μ i indywidualnej składki \bar{x}_i oszacowanej na podstawie historii roszczeń w przeszłości, czyli jako

$$\Pi(X_i) = Z_i \bar{x}_i + (1 - Z_i) \mu \quad (9)$$

gdzie $Z_i \in (0,1)$. Tak zdefiniowaną składkę nazywa się *składką zaufania* dla i -tego kontraktu, natomiast Z_i *współczynnikiem zaufania*³.

2. PRZYKŁADY EMPIRYCZNE

Niech zmienna losowa X będzie zmienną losową opisującą wielkość szkód w portfelu. W ubezpieczeniach komunikacyjnych najczęściej zmienna losowa wielkości szkód jest modelowana rozkładem Pareto, logarytmiczno-normalnym lub gamma⁴. Funkcje gęstości rozkładu Pareto, logarytmiczno-normalnego oraz gamma mają odpowiednio postać:

² C. D. Daykin, T. Pentikäinen, M. Pesonen, *Practical Risk Theory for Actuaries*, Chapman & Hall, London 1994.

³ H. Jasiulewicz, *Teoria zaufania. Modele aktuarialne*, Wydawnictwo AE we Wrocławiu, Wrocław 2005.

⁴ J. Lemaire, *Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance*, Kluwer Nijhoff, Boston 1995.

$$f(x) = \frac{\alpha\beta^\alpha}{(\beta+x)^{\alpha+1}}, \quad x > 0, \alpha > 0, \beta > 0 \quad (10)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}x} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x > 0, \mu \in R, \sigma > 0 \quad (11)$$

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \exp(-\lambda x), \quad x > 0, \alpha > 0, \lambda > 0. \quad (12)$$

W przeprowadzonym eksperymencie rozważano szacowanie składek netto dla portfela o łącznej wielkości szkód typu Pareto, logarytmiczno-normalnego i gamma. Oceniono jak zmienia się wysokość składki netto w zależności od typu rozkładu, parametrów rozkładu oraz metody szacowania składki. Wartość oczekiwana i wariancja w badanych populacjach są zbliżone do średniej i wariancji wielkości szkód w ubezpieczeniach komunikacyjnych OC publikowanych przez PIU.

Wygenerowano trzy warianty pseudopopulacji o rozkładzie Pareto, trzy warianty pseudopopulacji o rozkładzie logarytmiczno-normalnym oraz trzy warianty pseudopopulacji o rozkładzie gamma o różnych parametrach, każda o liczebności 10 000. W kolejnych wariantach (B, C, D) dla danego typu rozkładu wartości oczekiwane są prawie równe, a wariancje rosną. Rośnie również asymetria rozkładów. W dalszej części pracy pseudopopulacje będą nazywane populacjami.

Warianty dla rozkładu Pareto:

PB:

$\alpha = 2,23; \beta = 2,76; EX = 5,0038; DX = 5,8188; x_{0,5} = 3,7490; N = 10000$

PC:

$\alpha = 2,18; \beta = 2,71; EX = 5,0067; DX = 6,2284; x_{0,5} = 3,7071; N = 10000$

PD:

$\alpha = 2,14; \beta = 2,66; EX = 4,9936; DX = 6,5760; x_{0,5} = 3,6600; N = 10000$

Warianty dla rozkładu logarytmiczno-normalnego:

LnB:

$\mu = 1,18; \sigma = 0,92; EX = 5,0076; DX = 5,9380; x_{0,5} = 3,2343; N = 10000$

LnC:

$\mu = 1,14; \sigma = 0,97; EX = 5,0489; DX = 6,5047; x_{0,5} = 3,1064; N = 10000$

LnD:

$\mu = 1,12; \sigma = 1; EX = 5,1005; DX = 6,9039; x_{0,5} = 3,0443; N = 10000$

Warianty dla rozkładu gamma:

GB:

$\alpha = 0,74; \lambda = 0,15; EX = 4,9670; DX = 5,8545; x_{0,5} = 2,9481; N = 10000$

GC:

$\alpha = 0,65; \lambda = 0,13; EX = 5,0034; DX = 6,2537; x_{0,5} = 2,7191; N = 10000$

GD:

$\alpha = 0,58; \lambda = 0,12; EX = 5,0664; DX = 6,6725; x_{0,5} = 2,5976; N = 10000$

gdzie:

- α, β – parametry rozkładu Pareto,
- μ, σ – parametry rozkładu logarymiczno-normalnego,
- α, λ – parametry rozkładu gamma,
- EX – wartość oczekiwana w populacji,
- DX – odchylenie standardowe w populacji,
- $x_{0,5}$ – kwantyl rzędu 0,5 w populacji.

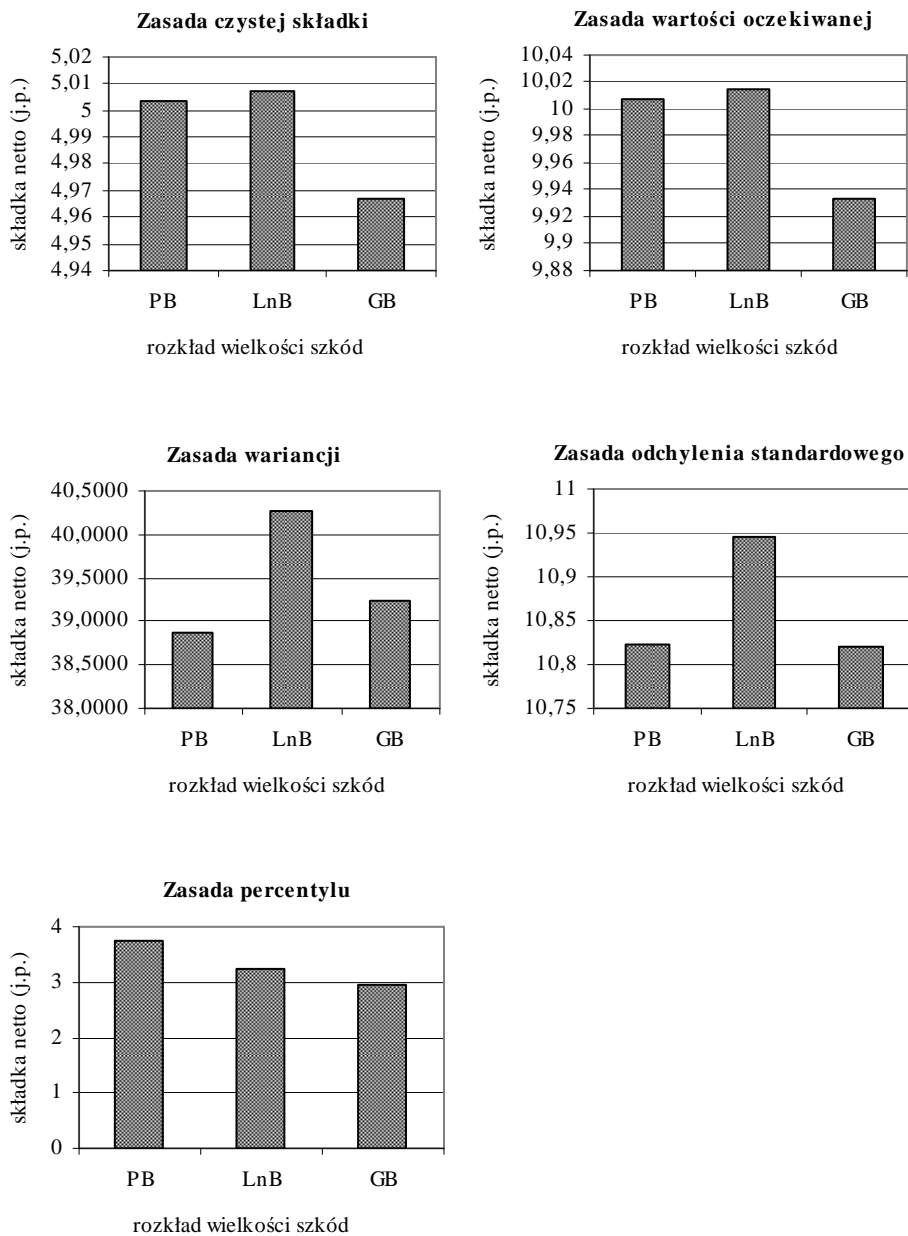
Dla każdego wariantu populacji wyznaczono składki netto za pomocą wybranych metod wyznaczania składek (wyniki prezentuje tab. 1).

Tabela 1

Wartości składki netto (j.p.) szacowanej różnymi metodami dla rozkładów wielkości szkód o różnych parametrach

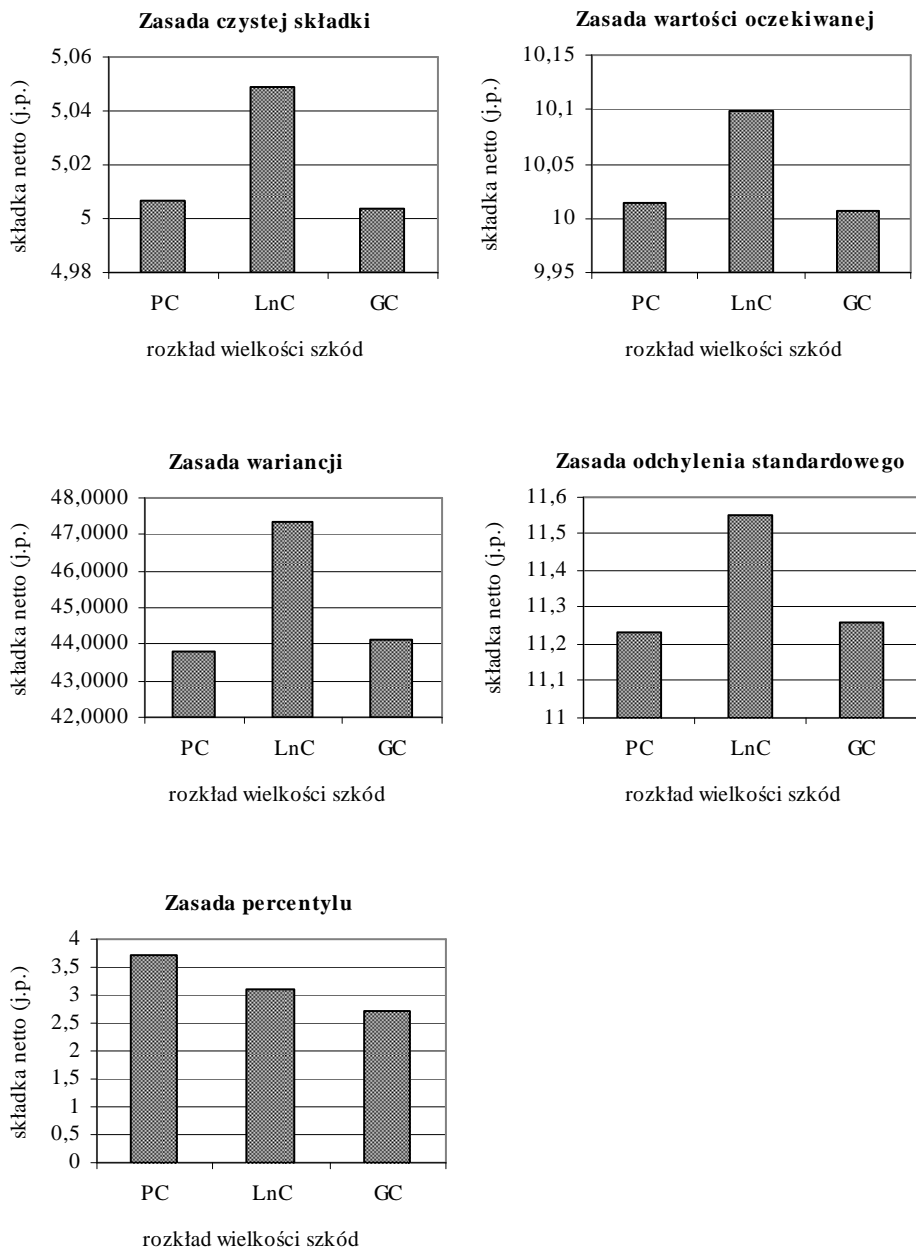
Wariant populacji	Metoda wyznaczania składki netto				
	czystej składki	wartości oczekiwanej $\alpha = 1$	wariancji $\alpha = 1$	odchylenia standardowego $\alpha = 1$	kwantyla rzędu 0,5
PB	5,0038	10,0076	38,8622	10,8226	3,749
PC	5,0067	10,0134	43,7997	11,2351	3,7071
PD	4,9936	9,9872	48,2374	11,5696	3,66
LnB	5,0076	10,0152	40,2674	10,9456	3,2343
LnC	5,0489	10,0978	47,3600	11,5536	3,1064
LnD	5,1005	10,2010	52,7643	12,0044	3,0443
GB	4,9670	9,9340	39,2422	10,8215	2,9481
GC	5,0034	10,0068	44,1122	11,2571	2,7191
GD	5,0664	10,1328	49,5887	11,7389	2,5976

Źródło: obliczenia własne.



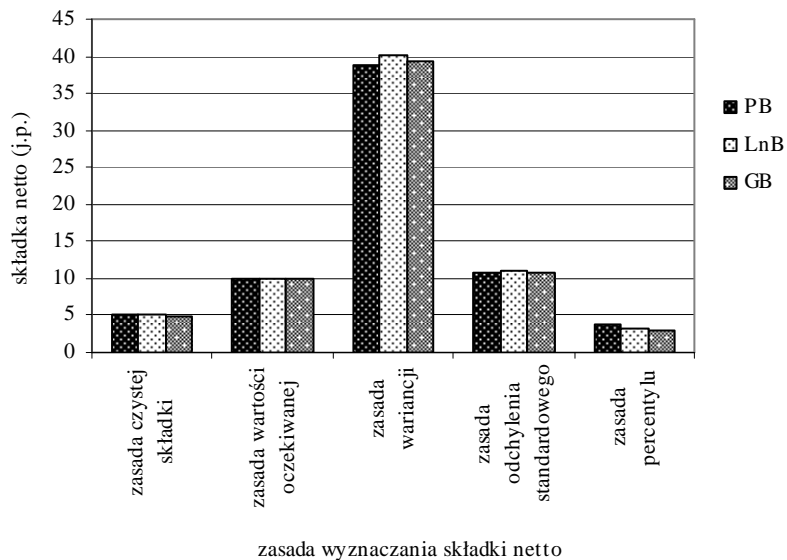
Rys. 1. Wartości składki netto szacowanej różnymi metodami dla rozkładów wielkości szkód Pareto, logarytmiczno-normalnego i gamma dla wariantów B

Źródło: obliczenia własne.



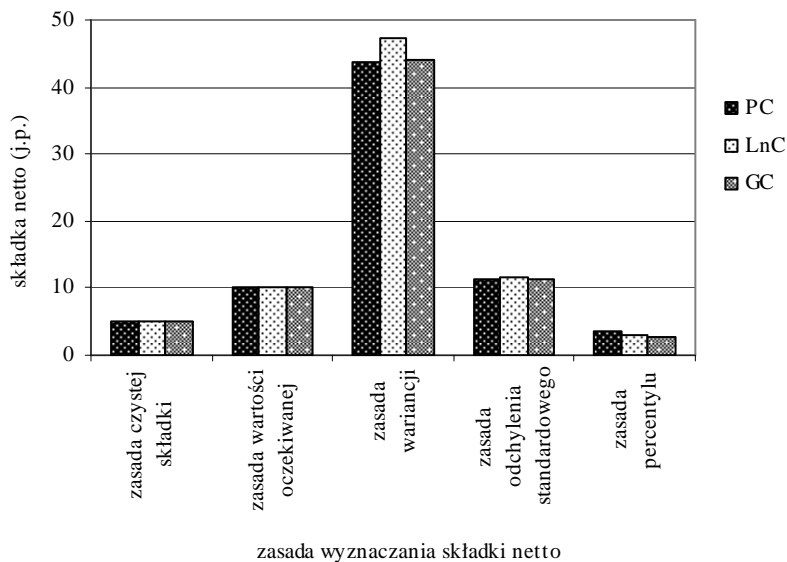
Rys. 2. Wartości składki netto szacowanej różnymi metodami dla rozkładów wielkości szkód Pareto, logarytmiczno-normalnego i gamma dla wariantów C

Źródło: jak do rys. 1.



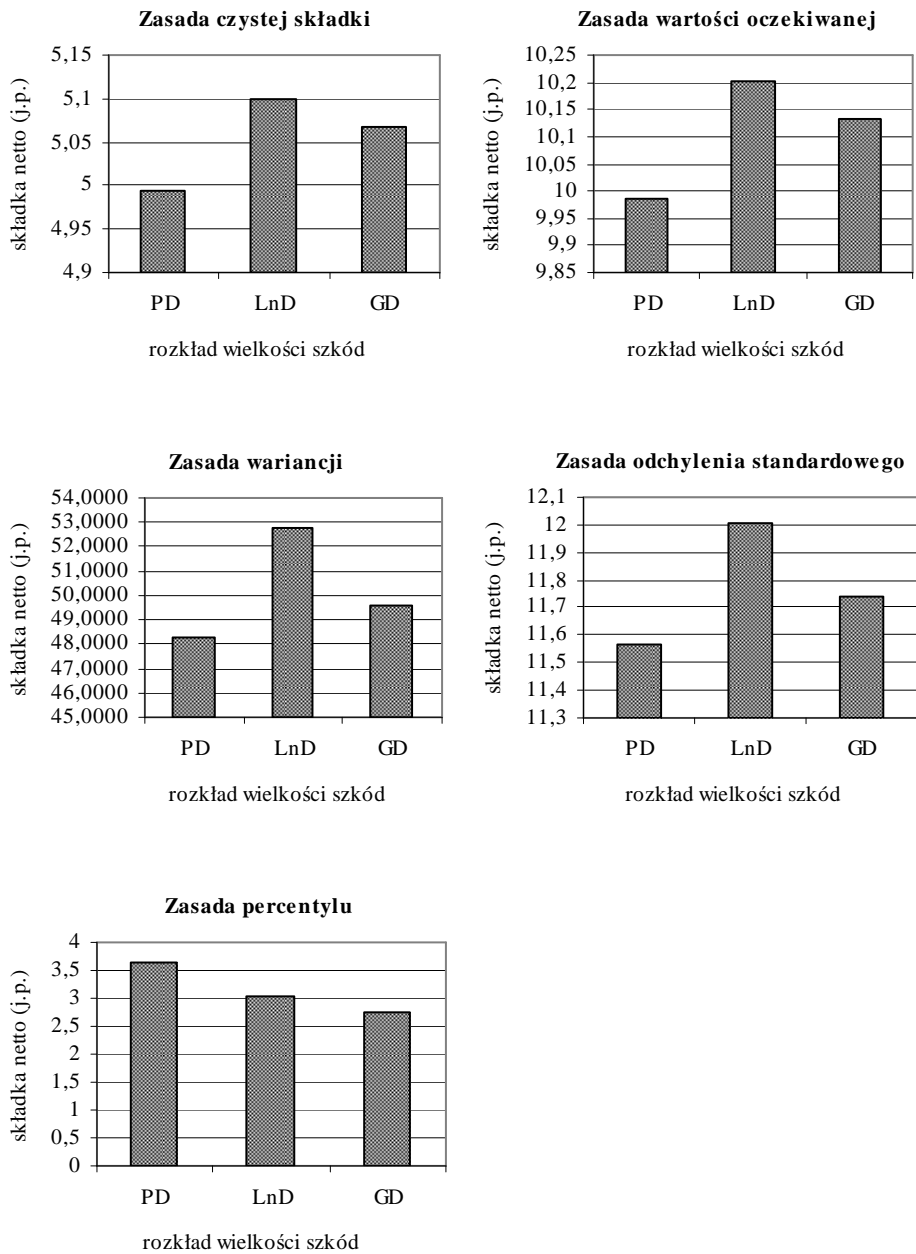
Rys. 3. Wartości składki netto szacowanej różnymi metodami dla rozkładów wielkości szkód o różnych parametrach dla wariantów B

Źródło: jak do rys. 1.



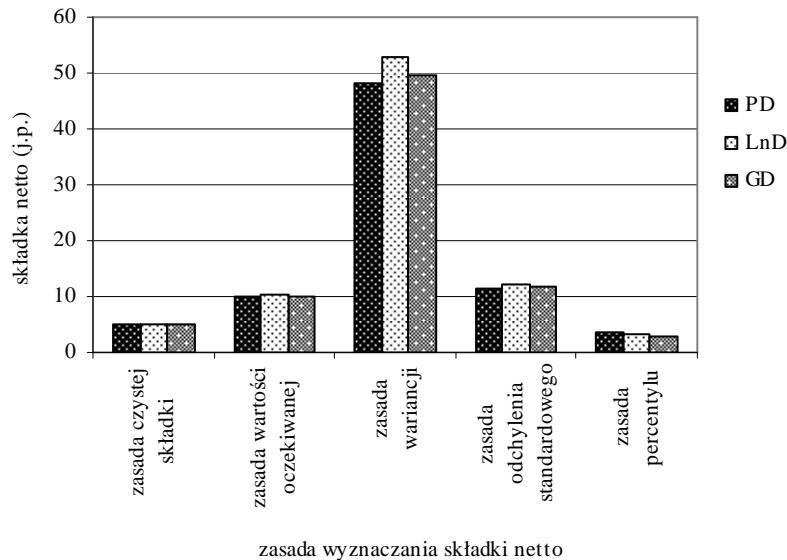
Rys. 4. Wartości składki netto szacowanej różnymi metodami dla rozkładów wielkości szkód o różnych parametrach dla wariantów C

Źródło: jak do rys. 1.



Rys. 5. Wartości składki netto szacowanej różnymi metodami dla rozkładów wielkości szkód Pareto, logarytmiczno-normalnego i gamma dla wariantów D

Źródło: jak do rys. 1.



Rys. 6. Wartości składki netto szacowanej różnymi metodami dla rozkładów wielkości szkód o różnych parametrach dla wariantów D

Źródło: jak do rys. 1.

Wysokość składki netto jest bardzo wyraźnie uzależniona od metody jej wyznaczania. Zasada wykorzystująca medianę daje najniższe wartości składki netto, zasada wariancji najwyższe. Z tego powodu towarzystwa ubezpieczeniowe najchętniej stosują zasadę wariancji. Oczywiście jest, że parametry populacji wpływają na wysokości składek – nawet niewielkie zmiany ich wartości powodują zmiany w wartościach składek. Największy wpływ parametrów rozkładu wielkości szkód na wysokość szacowanych składek można zauważyć w przypadku metody wariancji. Najwyraźniejsze różnice w wysokościach składek dla różnych rozkładów z tego samego wariantu są w przypadku zasady wariancji i kwantyla rzędu 0,5. Ze względu na asymetrię badanych rozkładów występują również duże różnice w składkach wyznaczanych metodą wartości oczekiwanej i percentylu dla tego samego rozkładu wielkości szkód.

BIBLIOGRAFIA

- 1) Daykin C. D., Pentikäinen T., Pesonen M., *Practical Risk Theory for Actuaries*, Chapman & Hall, London 1994.
- 2) Jasiulewicz H., *Teoria zaufania. Modele aktuarialne*, Wydawnictwo AE we Wrocławiu, Wrocław 2005.

- 3) Kaas R., Goovaerts M., Dhaene J., Denuit M., *Modern Actuarial Risk Theory*, Kluwer, Boston 2001.
- 4) Lemaire J., *Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance*, Kluwer Nijhoff, Boston 1995.

Anna Szymańska

**THE INFLUENCE OF THE DAMAGE SIZE DISTRIBUTION ON THE NET PREMIUM
IN CAR LIABILITY INSURANCE CR**

The condition of functioning of the insurance company on the market is a proper calculation of net premiums. It concerns a single insured as well as a whole portfolio. In the paper selected theoretical rules of setting net premiums in automobile insurance are presented. It has been evaluated what influence the distribution of the size of damage form and parameters have on the net premium size. Three damage size distributions have been considered: Pareto distribution, logarithmic-normal distribution and gamma distribution.

Key words: net premium, car liability insurance CR, damage size distribution.