

Kugelfunktionen und Analyse heterogener Schweredaten im Spektralbereich

von Diplom Ingenieur
Christian Gruber

von der Fakultät VI – Planen Bauen Umwelt
der Technischen Universität Berlin
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften
- Dr.-Ing. -

genehmigte Dissertation

Promotionsausschuss:

Vorsitzender: Prof. Dr. Ing. Lothar Gründig

Gutachter: Prof. Dr. Ing. Dieter Lelgemann

Gutachter: Prof. Dr. Phil. nat. Markus Rothacher

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 11. Mai 2007

Berlin 2007
D 83

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	5
1 Einleitung	7
2 Die trigonometrische Zerlegung der assoziierten Legendre Funktionen	11
2.1 Überblick	11
2.2 Numerische Integration	17
2.3 Die FFT–Methode angewandt auf die Legendre Funktionen	22
2.4 Die rekursive Berechnung der Fourier–Komponenten	25
2.4.1 Eine unvollständige Lösung mit einfacher Genauigkeit	29
2.5 Die umgekehrte rekursive Formulierung	31
2.6 Gegenüberstellung von Ergebnissen	32
2.7 Fazit	33
3 Die schnelle Fourier Transformation auf der Kugel	35
3.1 Vorbemerkungen	35
3.2 Effiziente Berechnung im Spektralbereich	35
3.3 Kugelfunktionen und Fourierentwicklung auf der Kugel	36
3.3.1 Die diskrete Fourier–Transformation	38
3.3.2 Die lineare Transformation der 2D Fourier–Konstanten in SH–Koeffizienten	39
3.4 Anwendungen in der Satellitengeodäsie	41
3.5 Inverse Abbildung – Signalanalyse	44
3.6 Konditionierung der Gleichungssysteme	44
3.7 Ein kombinierter Rechenansatz zur Behebung des Pol–Problems	47
3.8 Auflösbarkeit	50
3.9 Aliasing–Effekte	52
3.10 Feldfortsetzung nach unten	53
3.11 Zusammenfassung	54
3.12 Zur effektiven Berechnung der Inklinationsfunktionen	55
3.12.1 Definition der Inklinationsfunktionen	55
3.12.2 Die numerische Berechnung der Inklinationsfunktionen	56
3.12.3 Umwandlung der Legendre Funktionen zu Inklinationsfunktionen per FFT	56
3.12.4 Plausibilitätstest der Umwandlung	57
4 Die Analyse irregulär verteilter, heterogener Schweredaten im Spektralbereich	59
4.1 Überblick	59
4.2 Auswertestrategie zur direkten Inversion	60
4.2.1 Speicherverfahren der Entwicklungskoeffizienten der Kugelfunktionen	60
4.2.2 Algorithmus	65
4.2.3 Eine effiziente Speicherung der Modellbasen	68
4.2.4 Leistungstests	71
4.2.5 Gemeinsame Auswertung heterogener Komponenten aus SGG– und SST–Messungen	72
4.2.6 Vereinfachung auf der Kugel und bei nahezu kreisförmigen Satellitenbahnen	73
4.2.7 Berechnung mit einfacher Genauigkeit	74
4.2.8 Der Dekorrelationsprozess	76
4.3 Zusammenfassung	76
5 Genauigkeitsbetrachtungen globaler Erdschwerefeldmodelle	79
5.1 Fehlergradvarianzen	79
5.2 Vergleich mit GPS–Nivellementpunkten	81
5.3 Fehlerprojektion der Kovarianzmatrix in irreguläre Punkten	81
5.4 Fehlerprojektion der Kovarianzmatrix auf den radialen Orbitfehler	81

5.5 Fehlerprojektion der Kovarianzmatrix in Bahnkreuzungspunkten sowie Vergleich mit Altimeterdaten	82
5.6 Resonanzanalyse ausgewählter harmonischer Koeffizienten	84
5.7 Überlegungen bezüglich Wiederholungsbahnen	86
6 Satellitenmissionen	89
6.1 SST high–low (CHAMP)	89
6.2 SST low–low (GRACE)	91
6.3 Satellitengradiometrie SGG (GOCE)	93
7 Simulationsrechnungen	95
7.1 CHAMP–Simulation (Störpotential)	96
7.2 GRACE–Simulation (Störpotentialdifferenzen)	97
7.3 GOCE–Simulation (Gradiometrie)	99
7.4 Zusammenfassung	100
Glossar	103
Literaturverzeichnis	105
Anhang A	111
A.1 Definition des Potentials	111
A.2 Das Äquivalenzprinzip und der Energiesatz	112
A.3 Der Laplace Operator in Kugelkoordinaten	112
A.4 Die Legendre’sche Differentialgleichung und Kugelflächenfunktionen	113
A.5 Berechnungsschemen rekursiver Algorithmen	116
A.6 Funktionale des Erdschwerefeldes	117
A.7 Das Meissl–Schema	120
A.8 Variablensätze der Himmelsmechanik	121

*Good judgement comes from experience;
experience comes from bad judgement*

– Mark Twain

1 Einleitung

Die Anregung zu dieser Arbeit ergab sich aus der enormen Rechenzeit zur Auswertung satellitenbezogener Schwerefeldbeobachtungen, wie sie beim Aufbau empirischer Normalgleichungssysteme anfällt. Tatsächlich lässt sich die erforderliche Matrix zur Berechnung der Modellparameter sehr effizient anhand direkter Spaltenprodukte nach dem sogenannten Falkschen Schema, integrieren. Dabei zeigte es sich, dass es von großer Bedeutung ist, zu einem in der Praxis häufig anzutreffenden Berechnungsverfahren nicht nur rekursive, sondern vielmehr auch direkte Lösungsansätze zur Verfügung zu haben.

Die Berechnung der Fourier-Transformierten der assoziierten Legendre Funktionen als Basisfunktionen sphärischer Kugelflächenfunktionen erweist sich hierbei als unumgänglich und darüberhinaus auch äußerst nützlich für eine Reihe weiterer Anwendungsmöglichkeiten. Durch die Berechnung der empirischen und analytischen Produktsummen der Kugelflächenfunktionen anhand der assoziierten Legendre Funktionen lassen sich generell unterschiedliche Daten in den Spektralbereich transformieren und zur weiteren Modellbildung heranziehen.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Theorie sowie der praktischen Berechnung von Kugelfunktionsmodellen. Zunächst soll eine Einteilung erfolgen, die nützlich erscheint, um die Methoden von einander abzugrenzen. Im ersten Abschnitt wird dann näher auf einzelne Berechnungsverfahren eingegangen und die kritischen Aspekte werden dabei untersucht. Es dient damit als Instrumentarium zur Berechnung von Kugelfunktionsmodellen einmal im Spektralbereich im Sinne eines FFT-Verfahrens, andererseits zur effizienten Berechnung von Normalgleichungssystemen, die zur Auswertung von Schwerefelddaten in heterogener Anordnung, genutzt werden können.

Zunächst soll jedoch geklärt werden, wozu man ein Modell zur Beschreibung einer Funktion im Raum benötigt.

Da man die Beschreibung einer Funktion auch durch diskrete, idealisierte Wirkungsträger (z.B. Punktmassen) erreichen kann, liessen sich kontinuierliche Werte beispielsweise auch mittelbar durch Interpolation berechnen. Allerdings zeigt es sich, sofern man aus den Wirkungsträgern funktionale oder weitere, physikalisch messbare Größen ableiten möchte, dass diese ausgerechnet an den Stellen der Wirkungsträger (d.h. am Ort der Ladungen) singular werden. Folglich ist man gezwungen, eine Formulierung zu finden, die kontinuierliche Gültigkeit besitzt. Darüberhinaus ermöglicht ein einheitliches Modell auch die Integration unterschiedlicher, heterogener Beobachtungsdaten wie beispielsweise aus der kinetischen Energie künstlicher Erdsatelliten oder der Auswertung von Gradiometerbeobachtungen.

Es sollen daher an die Einführung eines Modelles auf der Kugel prinzipiell folgende Anforderungen gestellt werden:

1. Berechnung kontinuierlicher Funktionswerte an jedem Ort der Kugeloberfläche. Damit werden Singularitäten einer empirischen Menge von Punkten, die im Prinzip ebenfalls als funktionales Modell genutzt werden könnten, überwunden.
2. Orthogonalität der Basisfunktionen. Diese Forderung stellt eine Minimumsbedingung dar, da die beschreibenden Parameter dadurch voneinander unabhängig sind; es lassen sich lineare Gleichungssysteme durch direkte Inversion bestimmen.
3. Jeder Parameter soll zur Beschreibung der Funktion innerhalb ihres Gültigkeitsbereichs beitragen. Bei schneller Konvergenz kann dann die Zahl der benötigten Parameter je nach erforderlicher Auflösung reduziert werden. Dieser Punkt bringt aber auch einen ent-

scheidenden Nachteil mit sich: lokale Berechnungen können immer nur über sämtliche Parameter erfolgen und umgekehrt hängt die Bestimmung der Parameter grundsätzlich von allen Werten ab.

4. Die Berechnung der Koeffizienten sollte einfach und überschaubar sein.

Da es sich bei den zu untersuchenden Funktionen um harmonische Funktionen auf (oder im Falle von Satellitenbeobachtungen ausserhalb) einer Referenzkugel handelt, gilt für diese uneingeschränkt die Laplacegleichung, die zu den Legendre Funktionen, Kugelflächen- und Kugelfunktionen führt. Des weiteren ist ein spektraler Ansatz bekannt, der die Kugelfunktionen anhand von Inklinationsfunktionen parametrisiert. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von miteinander verknüpften harmonischen Funktionen.

Die Berechnung der Kugelfunktionskoeffizienten können daher sowohl im Zeit- oder Frequenzbereich als auch im Ortsbereich durchgeführt werden. Eine derartige Einteilung hat neben dem unmittelbaren Einfluss auf die numerische Handhabung der Beobachtungsdaten im Sinne von Zeitreihen und deren Umwandlung in den Frequenzbereich auch den ganz praktischen Nutzwert eines besseren Verständnisses bezüglich des Sensorsignals und seiner Trennung von eventuellen Störeinflüssen bzw. deren spektralem Wirkungsband. Weiter lassen sich bestimmte Erkenntnisse, etwa hinsichtlich der Auflösbarkeit von globalen Daten nur im Frequenzbereich erzielen. Dagegen bietet der Ansatz im Zeitbereich jedoch grössere Flexibilität etwa hinsichtlich der zeitlichen Folge der Daten oder bei vorliegen lückenhafter Beobachtungen. Berechnungen im Ortsbereich zur Lösung sogenannter Randwertprobleme können hingegen den zeitlichen Zusammenhang nicht berücksichtigen bieten aber ein wesentlich höheres lokales Auflösungsvermögen.

Ein tensorieller Ansatz unter Berücksichtigung einer Wirkungsrichtung führt dagegen auf die Multipole nach Maxwell. Da die Multipole jedoch nicht linearisiert werden können, wurden sie bislang zur Berechnung globaler Schweremodelle durch Linearisierung und Integration der Beobachtungsdaten nicht verwendet.

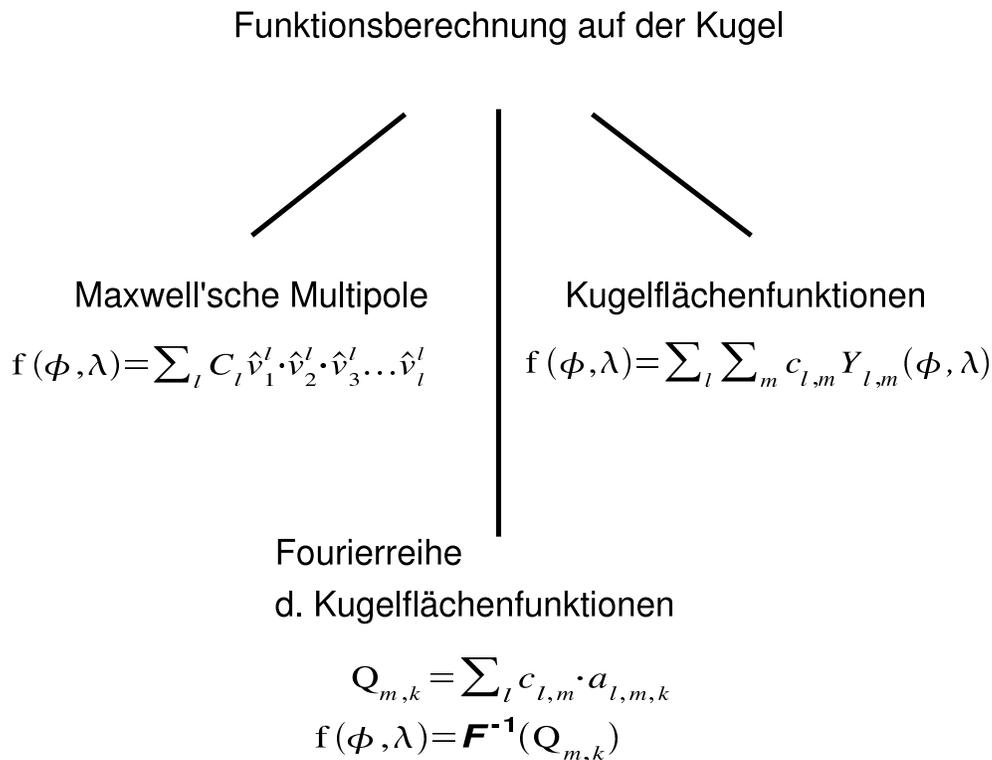


Abbildung 1. Drei grundsätzliche Ansätze, die zur Lösung der Laplacegleichung auf der Kugeloberfläche führen.

Der Berechnung der Multipole zur Behandlung von Satellitenbeobachtungsdaten soll im Rahmen dieser Arbeit daher keine weitere Bedeutung zukommen. Allerdings gibt es Anwendungen zur Evaluierung von Kugelfunktionsmodellen hinsichtlich statistischer Kenngrößen, wie z.B. der Untersuchung einzelner Korrelationen zwischen Multipolen, die auf Systematiken innerhalb empirisch berechneter Modelle hinweisen können, siehe z.B. Copi et al. (2004)[CHS04].

Die Berechnung der Fourier-Komponenten der Legendre Funktionen wird einmal in Form einer direkten Transformation, einer FFT-Methode, sowie anhand der rekursiven Lösung der Legendre Differentialgleichung mit Anfangs- und Randbedingungen diskutiert. Diese spektrale Zerlegung ermöglicht danach eine sehr effektive Auswertung von Beobachtungsdaten, sowohl bezogen auf 2D Raumgitter, 1D Satellitentrajektorien aber auch zur späteren Berechnungen im Zeitbereich bei voller Korrelation der Unbekannten.

Um letztgenannten, besonders aufwendigen Rechenschritt vornehmen zu können, werden die Beobachtungsdaten zunächst lediglich anhand der trigonometrischen Basisfunktionen der Kugelflächenfunktionen integriert. Anschliessend können die Normalgleichungseinträge zur Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten der Kugelfunktionen, anhand der Fourier-Komponenten der Legendre Funktionen in einem direkten Rechenschritt berechnet werden. Das hierbei entwickelte Verfahren eignet sich damit nicht nur zur numerischen Auswertung von Schweredaten hinsichtlich Orbitographie (d.h. der Auswertung der kinetischen Energie entlang einer Trajektorie), sondern auch und insbesondere zur Auswertung von Gradiometerdaten oder beliebiger sonstiger Erdschwerefeldfunktionale.

Unter weiterer Vereinfachung kann von einem allgemeinen Auswerteverfahren harmonischer Funktionen in heterogener Anordnung auf der Kugel gesprochen werden. Aufgrund der zunehmenden Leistungsfähigkeit gebräuchlicher standard Computer-Systeme können damit künftig Kugelfunktionsmodelle in ungeahnter Grössenordnung ausgewertet werden, da sich der Rechenaufwand vermehrt auf die Lösung des Gleichungssystems konzentriert und weniger auf die vorangehende, aufwendige Integration der Beobachtungsdaten.

Die Arbeit gliedert sich in die folgenden Themenschwerpunkte:

- Beschreibung der Funktionale zur Modellbildung
- Rechenverfahren zur Inversion der Daten
- Evaluierungsbeispiele globaler Erdschwerefeldmodelle
- Simulationsrechnungen

Die folgenden Anwendungen zur numerischen Schwerefeldberechnung werden dabei angesprochen:

- Fast Fourier Transformationen (FFT) harmonischer Funktionen auf der Kugel und entlang idealisierter Satellitenbahnen.
- Ausgleichung der Kugelfunktionskoeffizienten bei voller Korrelation von in-situ Messdaten.
- Ausgleichung der Kugelfunktionskoeffizienten bei voller Korrelation von auf eine Kugeloberfläche reduzierter Messdaten.

2 Die trigonometrische Zerlegung der assoziierten Legendre Funktionen

Die assoziierten Legendre Funktionen, kurz Legendre Funktionen genannt und deren Ableitungen sind von fundamentaler Bedeutung in verschiedenen wissenschaftlichen Disziplinen wie der Geodäsie, der Geophysik und der Astronomie aber auch der Elektrotechnik, der Mechanik und neuerdings selbst der Biochemie. Historisch waren die Formeln als geschlossene Potenzreihen gegeben, z.B. Hobson [HOB55]; Kaula [KAU66]; Heiskanen und Moritz [HM67].

Mit zunehmendem Bedarf an höheren harmonischen Entwicklungen sowie der weiten Verbreitung von Computer-Systemen wurden rekursive Algorithmen für die Berechnungen eingesetzt, mit hoher Stabilität und Effektivität. Dennoch ist für bestimmte Anwendungen die direkte Berechnung einer beliebigen Legendre Funktion wünschenswert, ohne zuvor explizit die Rekursivkette durchlaufen zu müssen. Die verfügbaren Potenzreihen können dies bei Überschreiten eines bestimmten Grades nicht leisten, aufgrund der darin auftretenden alternierenden Terme rationaler Zahlen, äusserst grosser Zähler und Nenner, die im Verlauf der Summation zu einem Verlust an numerischer Stengenauigkeit führen. Die schnelle Fourier-Zerlegung der harmonischen Funktionen liefert hingegen zuverlässige Ergebnisse und führt daneben auch zu der Möglichkeit der spektralen Zerlegung einer Funktion auf der Kugel. Damit kann der Zusammenhang zu Methoden der Satellitengeodäsie, die unabhängig davon auf einer Spektraldarstellung des harmonischen Kraftfeldes der Erde mittels Inklinationsfunktionen beruhen, hergestellt werden.

2.1 Überblick

Eine effiziente Berechnung der Legendre Funktionen wird seit Dekaden diskutiert. Eine Reihe von Standardalgorithmen kommen dabei zur Anwendung; einige gebräuchliche Rekursivsysteme sind im Anhang zusammengestellt. Holmes und Featherstone [HF02] weisen auf das Unterschreiten des 8Byte Wertebereiches¹ bei Legendre Funktionen für höhere Grade hin, besonders wenn Funktionswerte in niedrigen Breiten ($\sim 20^\circ$) berechnet werden sollen. Eine numerische Skalierung zur Kompensation wird bei Wenzel [G98] angebracht und ermöglicht damit die stabile Berechnung bis zu $\ell = 1900$ innerhalb des Bereichs ($20^\circ \leq \theta \leq 160^\circ$). Um noch höheren Auflösungen zu berechnen bedarf es der Clenshaw Methode, sowie geeigneter Skalierungen, vgl. Holmes und Featherstone [HF02].

Ein Nachteil der rekursiven Berechnungen liegt darin, dass Ableitungen der Funktionen erneut rekursiv berechnet werden müssen. Auch verwandte Funktionen wie die Inklinationsfunktionen sind durch adaptierte, rekursive Algorithmen mit neuerlichen numerischen Schwierigkeiten behaftet. Darüber hinaus sind nachgereichte Applikationen stets an die Prozessausrichtung der rekursiven Ergebnisse gebunden, da es für höhere Auflösungen unmöglich ist, die Zwischenwerte bei umfangreichen Datensätzen zu speichern. Im Falle des Aufbaus von Normalgleichungen zur Auswertung empirischer Beobachtungsdaten kann die zu invertierende Matrix demzufolge immer nur aus der Summe der Einzelzuschläge jeder Beobachtungszeile generiert werden,

1. Gegenüber den 32-bit Adressen verwendet man zur Berechnung von Gleitkommazahlen üblicherweise 64-bit innerhalb 2 voller Taktzyklen; daher spricht man von doppelter Genauigkeit. Die Zahl muss zwischen $10^{-310} < |R| < 10^{310}$ liegen, sonst folgt ein sogenannter Überlauf und die Zahl nimmt den Wert 'INF' bzw. 'NAN' an. Moderne Computersysteme verwenden bereits 64-bit Adressen, sodass hier keine Unterscheidung mehr notwendig ist. Die Zahl kann damit nativ innerhalb eines Taktzyklus berechnet werden. Der Wertebereich, der durch die binäre Stellenzahl des Exponenten gegeben ist, bleibt jedoch unverändert.

anstatt einen vollständigen Eintrag über alle Beobachtungen in einem einzelnen Rechenschritt zu erzeugen. Um somit elementweise Normalgleichungseinträge zu berechnen, bedarf es des wahlfreien Zugriffs auf einzelne Legendre Funktionen, um dabei nicht unentwegt die gesamte rekursive Berechnungskette zu durchlaufen.

Balmino [BAL78] sowie Hwang [HWA91] haben diesbezüglich Untersuchungen zur Ableitung der erforderlichen Produktsummenformel auf der Grundlage der Potenzreihen zweier Legendre Funktionen angestellt, jedoch können deren Ergebnisse nur für die niedrigsten Grade der harmonischen Entwicklung genutzt werden. Die Verwendung sog. Gaunt-Koeffizienten bei der Berechnung von Produktsummen wurde in Pail et al. [PPWD01] erwähnt, doch treten auch hier offenbar numerische Schwierigkeiten bereits in verhältnismässig niederen Graden der Entwicklung auf, vgl. auch Xu [XU96].

Dagegen zeigt sich die natürliche Zerlegung der Legendre Funktionen in ihre trigonometrische Reihe als konvergent, stabil und vielseitig einsetzbar. In Verbindung mit den Kugelflächenfunktionen ergibt sich unmittelbar die Möglichkeit der schnellen 2D Fourier Transformation auf der Kugel. Dieser spektralen Representation wiederum ist zu verdanken, dass relevante Beobachtungsdaten des Erdschwerefeldes auf dem Gebiet der dynamischen Satellitengeodäsie im Frequenzbereich ausgewertet werden können, unter Anwendung des Konzeptes linear verknüpfter harmonischer Koeffizienten (sogenannter *lumped coefficients*, LC vgl. Wagner und Klosko [WK76]), um das abstrakte Erdschwerefeldmodell auf der Grundlage der Kugelfunktionen in einen messbaren, physikalischen Kontext zu setzen. Vgl. dazu Colombo [COL81]; Rummel et al. [RVGK+93]; Cui und Lelgemann [LC99]; Sneeuw [SNE00].

Brovelli und Sansò [BS90] sowie Sneeuw und Bun [SR96] weisen darauf hin, dass die Inklinationsfunktionen mit $I = \pi/2$ das Spektrum der Fourier-Komponenten der Legendre Funktionen darstellen. Häufig werden daher zu Berechnungen der 2D Fourier-Entwicklung auf der Kugel, Algorithmen zur Berechnung der Inklinationsfunktionen verwendet.

Auf dem Gebiet numerischer Algorithmen für effektive Rechenverfahren zur Synthese und Analyse von harmonischen Funktionen auf der Kugel, oder auch sphärische FFT, wird ebenfalls der Ansatz verfolgt, den rechentechnisch aufwendigen Schritt der Integration der Daten mit den Legendre Funktionen durch spektrale Koeffizienten zu ersetzen, um dann von der einfachen Signalmultiplikation im Frequenzbereich Gebrauch machen zu können. Vgl. Mohlenkamp [MOH97]; Driscoll und Healy [DH94]; Schwartztrauber [SCH79b].

Der Aufwand zur Bestimmung der Fourier-Komponenten zu den Frequenzen der Legendre Funktionen wächst bei Anwendung eines Transformationsverfahrens aus diskreten Signalwerten jedoch sehr stark an, sodass damit im Rahmen dieser Arbeit nur bis zu moderater Auflösung ($l \leq 360$) sinnvoll gearbeitet werden soll. Für höhere ($360 < l < 1800$) bzw. ultrahohe Auflösung ($l > 1800$) sollen daneben zwei effektive Berechnungsverfahren angegeben werden, die auf direkter Rekursion der Fourier-Komponenten beruhen. Bei Einschränkung auf einfache Stelligengenaugkeit sind selbst Auflösungen von $l = 5400$ und höher damit möglich, was einem Gitterabstand von $2' \times 2'$ und somit nur wenigen Kilometern auf der Erdoberfläche entspricht.

In Tab. 1 ist zunächst eine subjektive Einteilung der Auflösung nach Grad der Entwicklung angegeben. Die Einteilung folgt dabei rechentechnischen Aspekten. So sind die niedrigen Auflösungen dadurch gekennzeichnet, dass sich zu ihrer Berechnung auch eine klassische Potenzreihenentwicklung anwenden lässt. Bis zu moderater Auflösung lassen sich die Fourier-Komponenten der Legendre Funktionen mit hoher Genauigkeit durch ein exaktes Verfahren (FFT oder numerische Integration) aus rekursiv berechneten Legendre Funktionswerten transformieren, in höherer Auflösung steigt der Umfang der Berechnungen zunehmend an. Für ultrahohe Auflösungen werden darüberhinaus Modifikationen an den Rekursionsformeln der Funktionswerte erforderlich.

Daneben lässt sich auch die eigenständige Berechnung der Fourier-Komponenten aus direkten Rekursionsformeln durchführen. Ab ca. $\ell = 2700$ treten allerdings auch hier Probleme mit dem Wertebereich der Komponenten auf. Zur Signalberechnung sind entweder Potenzreihen oder rekursive Gleichungen bzw. Transformationen des Spektrums wählbar. Die Berechnung des Spektrums kann entweder durch ein FFT Verfahren anhand der Signalwerte erfolgen oder durch direkte Rekursionen der Komponenten. Das Rekursionsverfahren *I*, Abschnitt 2.4, vermindert sich dabei auf einfache Genauigkeit bereits in moderater Auflösung, das Verfahren *II*, Abschnitt 2.5, ist bis knapp $\ell = 2700$ angewendet worden.

Auflösung	Auflösung $\lambda/2$	Attribut	Signal	Spektrum
$\ell < 30$	$6^\circ \doteq 667 \text{ km}$	niedrig	Potenzreihe ^d , rk ^d	FFT ^d rk <i>I</i> ^d / rk <i>II</i> ^d
$\ell < 360$	$0.5^\circ \quad 55 \text{ km}$	moderat	rk ^d	./ rk <i>I</i> ^s / rk <i>II</i> ^d
$\ell < 1800$	$6' \quad 11 \text{ km}$	hoch	rk ^d	./ rk <i>I</i> ^s / rk <i>II</i> ^d
$\ell < 2700$	$4' \quad 6 \text{ km}$	ultra hoch	modifizierte rk ^d	./ rk <i>I</i> ^s / rk <i>II</i> ^d
$\ell > 2700$	$< 6 \text{ km}$./		rk <i>I</i> ^s

Tabelle 1. Einteilung hinsichtlich der Auflösung der Legendre Funktionen zur Berechnung von Kugelfunktionsmodellen. Die Auflösung entspricht dabei der halben Wellenlänge an der Erdoberfläche. Doppelte Genauigkeit ist mit **d** gekennzeichnet, einfache Genauigkeit mit **s**, rk bedeutet Rekursion, siehe Text für weitere Erläuterungen.

Theoretische Überlegungen

Die unmittelbare, direkte Darstellung der Legendre Funktionen findet sich in Form einer Potenzreihe

$$P_\ell^m(x) = \sum_j^\infty a_j x^j \quad (1)$$

Dabei lässt sich zeigen, daß für besonders große j keine Kongruenz mehr eintritt, die Reihe daher endlich sein muss, vgl. A.30. Kaula [KAU66] gibt die Lösung der Legendre Differentialgleichung in der Form

$$P_\ell^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \sum_{t=0}^k T_{\ell m}^t x^{\ell-m-2t} \quad (2)$$

an, mit $x = \sin \phi$ und einer rekursiven Berechnungsmöglichkeit für die Konstante

$$T_{\ell m}^t = -\frac{(\ell-m-2t+1)(\ell-m-2t+2)}{2t(2\ell-2t+1)} T_{\ell m}^{t-1} \quad (3)$$

ausgehend von $\left(T_{\ell m}^0 = \frac{(2\ell)!}{2^\ell \ell! (\ell-m)!}\right)$. Dies ermöglicht im Prinzip vorab die direkte Berechnung einzelner Funktionskoeffizienten, und somit die Verwendung von Legendre Funktionen unabhängig von ihren rekursiven Vorgängern. Für bestimmte Anwendungen, etwa dem Aufstellen von Normalgleichungssystemen, sollte dies eindeutig von Vorteil sein. Durch das Anwachsen der Potenzen des ersten Termes in Gl. (2) wird die Operation für wachsende m jedoch zunehmend ungünstig konditioniert. Nicht von ungefähr spricht man bei den Legendre'schen Funktionen daher von speziellen Funktionen. J. Mohlenkamp [MOH97] schreibt dazu,

[engl.] Die assoziierten Legendre Funktionen sind zu anderen speziellen Funktionen im Grunde durch unzählige Formeln reliert. Diese suggerieren oft schnelle Algorithmen, werden jedoch entweder ungenau oder mit wachsender Ordnung überproportional aufwändig und mithin langsam. Philosophisch gesehen liegt dies daran, dass verschiedene spezielle Funktionen tatsächlich in einer Hinsicht speziell

sind, nämlich, daß man von einer zur anderen nur vermittelt einer instabilen Formel gelangt.

Die Koordinaten $T_{\ell m}^{\ell}$ sind dabei rationale Zahlen, die aus Gleichungen mit Fakultäten hervorgehen, bzw. nach deren Reduktion aus Produktserien. Extrem grosse, annähernd gleiche Werte mit alternierenden Vorzeichen treten dabei auf, die es unmöglich machen, bei geforderter numerischer Stellensicherheit höhere Grade mit genügender Genauigkeit zu bestimmen. Tab. 2 zeigt die ersten Terme der Legendre Funktionen als harmonische Polynome der geographischen Breite.

P_2^0	=	$3/2 \sin^2 \phi - 1/2$
P_2^1	=	$3 \cos \phi \sin \phi$
P_2^2	=	$3 \cos^2 \phi$
P_3^0	=	$5/2 \sin^3 \phi - 3/2 \sin \phi$
P_3^1	=	$15/2 \cos \phi \sin^2 \phi - 3/2 \cos \phi$
P_3^2	=	$15 \cos^2 \phi \sin \phi$
P_3^3	=	$15 \cos^3 \phi$
P_4^0	=	$\sin^4 \phi - 15/4 \sin^2 \phi + 3/8$
P_4^1	=	$35/2 \cos \phi \sin^3 \phi - 15/2 \cos \phi \sin \phi$
P_4^2	=	$105/2 \cos^2 \phi \sin^2 \phi - 15/2 \cos^2 \phi$
P_4^3	=	$105 \cos^3 \phi \sin \phi$
P_4^4	=	$105 \cos^4 \phi$

Tabelle 2. Assoziierte Legendre Funktionen

Die Potenzen können mittels trigonometrischer Theoreme zerlegt werden, gemäss Tab. 3

P_2^0	=	$1/4 - 3/4 \cos(2\phi)$
P_2^1	=	$3/2 \sin(2\phi)$
P_2^2	=	$3/2 + 3/2 \cos(2\phi)$
P_3^0	=	$3/8 \sin \phi - 5/8 \sin(3\phi)$
P_3^1	=	$3/8 \cos \phi - 15/8 \cos(3\phi)$
P_3^2	=	$15/4 \sin \phi + 15/4 \sin(3\phi)$
P_3^3	=	$45/4 \cos \phi + 15/4 \cos(3\phi)$
P_4^0	=	$9/64 - 20/64 \cos(2\phi) + 35/64 \cos(4\phi)$
P_4^1	=	$10/16 \sin(2\phi) - 35/16 \sin(4\phi)$
P_4^2	=	$45/16 - 60/16 \cos(2\phi) - 105/16 \cos(4\phi)$
P_4^3	=	$210/8 \sin(2\phi) + 105/8 \sin(4\phi)$
P_4^4	=	$315/8 + 420/8 \cos(2\phi) + 420/8 \cos(4\phi)$

Tabelle 3. Zerlegung der Ko-/sinus Potenzen in harmonische Funktionen

Man erkennt, dass der Zerlegung ein konstantes Schema zugrunde liegt, welches Frequenzen und Phasen genau festlegt. Die Phase hängt davon ab, ob es sich um gerade oder ungerade Funktionen mit gerader bzw. ungerader Ordnung handelt. Insgesamt müssen daher die vier Fälle unterschieden werden, Tab. 11

$\ell \setminus m$		gerade	ungerade	
gerade	(I)	$\begin{matrix} P_0^0 \\ P_2^0 & P_2^2 \\ P_4^0 & P_4^2 & P_4^4 \\ P_6^0 & P_6^2 & P_6^4 & P_6^6 \end{matrix}$	$\begin{matrix} P_2^1 \\ P_4^1 & P_4^3 \\ P_6^1 & P_6^3 & P_6^5 \end{matrix}$	(II)
ungerade	(III)	$\begin{matrix} P_1^0 \\ P_3^0 & P_3^2 \\ P_5^0 & P_5^2 & P_5^4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} P_1^1 \\ P_3^1 & P_3^3 \\ P_5^1 & P_5^3 & P_5^5 \end{matrix}$	(IV)

Tabelle 4. Klassifizierung der Legendre Funktionen nach Parität der Grade und Ordnungen

Insofern die Frequenzen feststehen, läßt sich eine klassische Fourier-Analyse zur Bestimmung der Konstanten, durchführen. Man betrachtet dazu die Fourier-Reihe einer integrierbaren und periodischen Funktion $f(x+p) = f(x)$,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi kx}{p}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kx}{p}\right) \right] \quad (4)$$

mit der Periode p . Die Analyse läßt sich weiter zerlegen, einmal für gerade Funktion, d.h. wenn $f(-x) = f(x)$

$$a_k = \frac{4}{p} \int_0^{p/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi kx}{p}\right) \cdot dx \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

wobei $b_k = 0$, sowie für ungerade Funktionen $f(-x) = -f(x)$

$$b_k = \frac{4}{p} \int_0^{p/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi kx}{p}\right) \cdot dx \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

wobei $a_k = 0$.

Wendet man die Gln. (5) und (6) auf die Legendre Funktionen mit Periodizität $p = \pi$ an, d.h. $f(x+\pi) = P_\ell^m(\sin \phi)$, so ergibt sich für $l=4, m=0$ und $k=0, 2, 4$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} (T_{40}^0 \sin^4 \phi + T_{40}^1 \sin^2 \phi + T_{40}^2) \cdot d\phi = \left(\frac{35}{8} \cdot \frac{3}{4} - \frac{15}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \cdot 2 \right) = 2 \cdot 9/64 \\ a_1 &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} (T_{40}^0 \sin^4 \phi + T_{40}^1 \sin^2 \phi) \cos 2\phi \cdot d\phi = \left(\frac{35}{8} - \frac{15}{4} \right) \cdot -\frac{1}{2} = -20/64 \\ a_2 &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} T_{40}^0 \sin^4 \phi \cos 4\phi \cdot d\phi = \frac{35}{8} \cdot \frac{1}{8} = 35/64 \end{aligned} \quad (7)$$

und $b_k = 0$. Für $l=4, m=1$ und $k=0, 2, 4$ erhält man

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} (T_{41}^0 \cos \phi \sin^3 \phi - T_{41}^1 \cos \phi \sin \phi) \sin 2\phi \cdot d\phi = \frac{35}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{15}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{10}{16} \\ b_2 &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} (T_{41}^0 \cos \phi \sin^3 \phi) \sin 4\phi \cdot d\phi = \frac{35}{2} \cdot -\frac{1}{8} = -\frac{35}{16} \end{aligned} \quad (8)$$

mit $b_0 = 0$ sowie $a_k = 0$. Die Komponentenindizes korrespondieren offenbar mit $k/2$.

Anmerkung 1. Im Rahmen der Zerlegung sind aufgrund der Orthogonalitätsrelationen, vgl. Gl. (15) der trigonometrischen Funktionen nur die Terme der Potenzen in Gl. (2) zu berücksichtigen, die eine vergleichbare oder höhere Ordnung haben als der Produkt-Term des Fourierintegrals; alle übrigen ergeben sich zu Null. In der letzten Gleichung bedeutet dies z.B. für das Produkt aus $T_{41}^1 \cos \phi \sin \phi$ mit $\sin 4\phi$, da $\cos \phi \sin \phi$ der Ordnung $2 < 4$ ist,

$$\int_0^{\pi/2} T_{41}^1 \cos \phi \sin \phi \cdot \sin 4\phi \cdot d\phi = 0. \quad (9)$$

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass Gl. (5) immer da angewandt werden kann, wo Grad und Ordnung der Legendre Funktionen übereinstimmen (d.h. $\ell - m$: gerade) bzw. Gl. (6) für den Fall, dass diese nicht übereinstimmen ($\ell - m$: ungerade). Sofern es sich um paritätäre Grade der Legendre Funktionen handelt, zählt der Index $k \in K_e = \{0, 2, \dots, 2 \cdot [\ell/2]\}$ für gerade m bzw. $k \in K_e \setminus \{0\}$ für ungerade m . Wenn es sich um nicht-paritätäre Grade handelt, dann zählt der Index $k \in K_o = \{1, 3, \dots, 2 \cdot [\ell/2] + 1\}$ für beide Fälle von m und es wird in umgekehrter Weise wie bei den paritätären Graden jeweils die Phase zwischen Sinus- und Kosinusfunktion gewechselt.

Der Koeffizient a_0 des konstanten Terms ist offensichtlich verdoppelt gegenüber dem Ergebnis in Tabelle. 2, was durch die Einführung komplexer Notation kompensiert wird

$$A_k = \begin{cases} \frac{a_0}{2} & k = 0 \\ \frac{1}{2}(a_k - ib_k) & k > 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}) & k < 0 \end{cases} \quad (10)$$

Das Schema der Zerlegung ist somit eindeutig definiert und man kann danach die Koeffizienten $T_{\ell m}^t$ anhand einer Tabellarisierung umwandeln. Numerisch ergibt sich daraus jedoch kein Vorteil, etwa durch den Wegfall bestimmter Terme, da man noch stets gezwungen ist vorab die alternierenden Reihen zur Bestimmung der $T_{\ell m}^t$ zu berechnen. Die üblicherweise angewandte Normierung²

$$N_{\ell m} = \sqrt{(2 - \delta_m^0)(2\ell + 1) \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}} \quad (11)$$

kann implizit in die Berechnung der Terme aufgenommen werden, wirkt dem Genauigkeitsverlust jedoch nicht entscheidend entgegen, sodass ein grundlegend anderes Vorgehen erforderlich wird.

Die Zerlegung der Legendre Funktionen in ihre Fourier-Komponenten kann prinzipiell auf verschiedene Arten erfolgen, von denen einige nachfolgend diskutiert werden sollen. Eine erste Möglichkeit wäre die Verwendung rekursiver Inklinationsfunktionen mit dem Argument $I = \pi/2$, die an dieser Stelle jedoch nicht untersucht werden soll. Stattdessen sei auf entsprechende Literatur verwiesen (Kosteletzky [KOS84]; Gooding [GOO71]; Emeljanov & Kanter [EK87]; Wnuk [WW87]).

Es bieten sich ferner an:

- a) Zerlegung durch numerische Integration der Legendre Funktionen;

2. Die Normierung folgt aus der Orthonomierung der Kugelflächenfunktionen, siehe Anhang

- b) Zerlegung anhand eines FFT–Verfahrens nach C.A. Wagner [WAG83]; C. Goad [GOA87]; Schrama [SCH89];
- c) Anwendung der direkten Rekursion auf die Komponenten der Legendre Funktionen, ausgehend von $m = 0$ nach Hofsummer und Potters [HP60], sowie Stabilisierung durch $m = l$;
- d) Anwenden der direkten Rekursion auf die Komponenten der Legendre Funktionen, ausgehend von $m = l$;

Da sich das Verfahren (a) der numerischen Integration als sehr einfach und zuverlässig erweist, soll es zunächst vorgestellt werden. Ein Verfahren basierend auf der FFT–Methode (b) zur Berechnung der Inklinationsfunktionen wird zur Berechnung der Legendre Funktionen angewandt (Abschnitt 2.3). Die Berechnung mittels rekursiver Verfahren (c) und (d), angewendet auf die Fourier Komponenten der Legendre Funktionen werden in den Abschnitten 2.4– 2.5 diskutiert.

2.2 Numerische Integration

Hierbei sollen gezielt Funktionswerte genutzt werden, anhand derer die Zerlegung in eine trigonometrische Reihe in expliziter Weise durchgeführt werden kann. Zur rekursiven Berechnung der Legendre Funktionen als integraler Bestandteil der Kugelflächenfunktionen existieren eine Reihe effektiver rekursiver Berechnungsverfahren. Die gebräuchlichsten sind dazu im Anhang gelistet.

Geht man von der Minimierung der Residuen im Sinne der $\|L\|_2$ – Norm aus zur Berechnung der Komponenten einer einzelnen, normierten Legendre Funktion $\bar{P}_\ell^m(t)$ mit $a_{\ell m}^k \in \mathbb{R}$, $t_i = \sin \phi_i$ sowie $0 \leq \phi \leq \pi/2$, so lässt sich generell schreiben

$$a_{\ell m}^k = (B^\top B)^{-1} B^\top \bar{P}_\ell^m(t_i), \quad (12)$$

mit einer Matrix B_{ik} , die konkret für den Fall (I) nach Tab. 4, z.B. für $\ell = 6$, $m = 0, 2, 4, 6$ die Gestalt annimmt

$$B_{ik} = \begin{pmatrix} \cos 6\phi & \cos 4\phi & \cos 2\phi & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (13)$$

Es gilt, die Inverse $C = (B^\top B)^{-1}$ der Matrix zu finden

$$C^{-1} = B^\top B = \begin{pmatrix} \langle \cos 6\phi, \cos 6\phi \rangle & \langle \cos 4\phi, \cos 6\phi \rangle & \langle \cos 2\phi, \cos 6\phi \rangle & \langle 1, \cos 6\phi \rangle \\ & \langle \cos 4\phi, \cos 4\phi \rangle & \langle \cos 2\phi, \cos 4\phi \rangle & \langle 1, \cos 4\phi \rangle \\ & & \langle \cos 2\phi, \cos 2\phi \rangle & \langle 1, \cos 2\phi \rangle \\ \text{symm.} & & & N \end{pmatrix} \quad (14)$$

wobei N die Anzahl gleichabständiger Funktionswerte ist. Die Matrix C wird in erster Linie, aufgrund der Orthogonalitätsrelationen der trigonometrischen Basisfunktionen diagonal besetzt sein. Diese lauten im diskreten Fall für den Bereich $(0 \leq \phi \leq 2\pi)$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N-1} \cos k\phi_i \cos h\phi_i &= \begin{cases} 0 & k \neq h \\ N/2 & k = h \neq 0 \\ N & k = h = 0 \end{cases} \\ \sum_{i=0}^{N-1} \sin k\phi_i \sin h\phi_i &= \begin{cases} 0 & k \neq h \\ N/2 & k = h \neq 0 \\ 0 & k = h = 0 \end{cases} \\ \sum_{i=0}^{N-1} \cos k\phi_i \sin h\phi_i &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Zur Verifizierung vergleiche man die analytischen Einträge der Matrix $B^T B$, die die skalaren Produkte des orthonormalen Systems nach Gl. (14) enthält. Das skalare Produkt im Sinne der Metrik $\rho: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u, v \in M$ sei gegeben mit

$$\rho(u, v) = \frac{2}{p} \int_a^b u(x) \overline{v(x)} dx, \quad p = b - a: = \pi \quad (16)$$

es ergibt im vorliegenden Fall $\rho(u, v) = \delta_u^v$ für den orthonormalen Funktionenraum. Setzt man für $x: = \phi \in [0, \pi/2]$ und bildet die Produkte nach Gl. (14), so erhält man im gegebenen Beispiel nach Gl. (16) analytisch (1), wohingegen bei gleichabständiger, diskreter Abtastung (2):

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{2} & 0 \\ \text{symm.} & & & 1 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{N+1}{2} & 0 & +1 & 0 \\ & \frac{N+1}{2} & 0 & +1 \\ & & \frac{N+1}{2} & 0 \\ \text{symm.} & & & N \end{pmatrix}. \quad (17)$$

(1)
(2)

Auf jeder geraden Nebendiagonalen sowie der Diagonalen selbst treten dabei neben der Anzahl der Abtastungen N zusätzlich Einträge (+1) auf, die daherrühren, dass die Produkte mit $k = h = \{0, 2, 4, \dots\}$ entweder

$$\cos(k \frac{\pi}{2}) \cdot \cos(h \frac{\pi}{2}) = \cos \left[(k+h) \frac{\pi}{2} \right] = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \quad (18)$$

ergeben, je nachdem ob $\frac{k+h}{2}$ ein Vielfaches von π oder 2π ergibt. Die Kombination der Basisfunktionen in Abb. 2 (a) und (b) zeigt den Verlauf zweier Produkte trigonometrischer Funktionen unterschiedlicher Ordnung entlang diskreter Stützwerte.

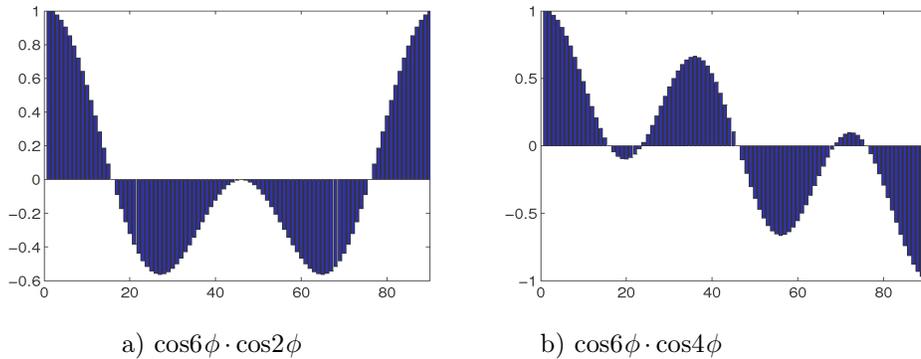


Abbildung 2. Produkte zweier harmonischer Funktionen, $\phi \in [0, 90^\circ]$

Dabei heben sich die Anfangs- und Abschlusswerte im ungeraden Fall während der Integration (Summation) entweder gegenseitig auf (2b), oder es bleibt ein Wert von (± 1) , der an dieser Stelle den Fehler gegenüber der analytischen Lösung darstellt (2a). Indem man nun einen diskreten Datenbereich ohne einen dieser beiden Werte verwendet, erhält man folglich für den geraden Verlauf eine exakte Bestimmung des Integrals. Allerdings treten Probleme beim ungeraden Fall auf, d.h. man erhält wiederum Einträge in den ungeraden Nebendiagonalen.

Eine zweite Möglichkeit ist das Halbieren der beiden Randwerte, was in beiden Fällen zum Erfolg führt. Praktisch bedeutet dies, in der Matrix B die erste und letzte Zeile durch $\sqrt{2}$ zu dividieren

$$B'_{1,k} = B_{1,k}/\sqrt{2}, \quad B'_{N,k} = B_{N,k}/\sqrt{2} \quad (19)$$

bzw. Multiplikation mit einer Diagonalmatrix durchzuführen

$$d = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$B' = d \cdot B. \quad (21)$$

Bei Verwendung eines *bestimmten* Systems, d.h. bei gleicher Anzahl von Daten wie Unbekannten, $r = N = \ell/2 + 1$ tritt der Fall ein, dass der Term mit der höchsten Frequenzzahl, $k = \ell$

$$\cos l\phi_i, \quad i = 1, \dots, N$$

jeweils nur die Extremwerte der Funktion (± 1) an den Positionen ϕ_i nachbildet. Folglich ergibt die Quadratsumme mit dem Startwert $\phi_0 = 0$ und $\Delta\phi = \frac{\pi}{\ell}$

$$\langle \cos l\phi_i, \cos l\phi_i \rangle = \sum_i^N \cos^2 l\phi_i = N, \quad \phi_i = \phi_0 + n\Delta\phi \quad (22)$$

bzw. $N - 1$, nach der Division in Gl. (19). Die Matrix C^{-1} nimmt für den Fall, dass erste und letzte Zeile entsprechend modifiziert werden diagonale Gestalt an, sodass damit auch unmittelbar ihre Inverse vorliegt

$$C^{-1} = B'^T B' = \begin{pmatrix} N-1 & & & 0 \\ & \frac{N-1}{2} & & \\ & & \frac{N-1}{2} & \\ \text{symm.} & & & N-1 \end{pmatrix} \iff C = 2/\ell \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ \text{symm.} & & & 1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

Die rechte Seite des Gleichungssystems muss ebenfalls entsprechend angepasst werden. Es lässt sich schreiben

$$a_{\ell m}^k = (BDB)^{-1} B^T D \bar{P}_\ell^m(t_i), \quad D = d^T d \quad (24)$$

Ein Satz von k Koeffizienten $a_{\ell m}^k$ nach Gl. (12) ergibt sich danach zu

$$a_{\ell m}^k = C \cdot BD \bar{P}_\ell^m(t_i), \quad k = 0, 2, 4, \dots, N. \quad (25)$$

Links- sowie rechtsseitige Multiplikation zweier Diagonalmatrizen in Gl. (25) lässt sich auch erreichen, indem

$$\begin{aligned} B'_{1,k} &= B_{1,k}/2 & B'_{N,k} &= B_{N,k}/2 \\ B''_{i,1} &= B'_{i,1}/2 & B''_{i,\ell} &= B'_{i,\ell}/2 \end{aligned} \quad (26)$$

d.h. jeweils erste und letzte Zeile, sowie erste und letzte Spalte der Matrix B sind zu halbieren. C nimmt damit den skalaren Wert $4/\ell$ an.

Für die ungeraden Ordnungen gibt es keinen konstanten oder Null-Term. Die Matrix nimmt im Fall **(II)** mit $\ell = 6$, $m = 1, 3, 5$, wiederum bei gleichabständigen Realisierungen innerhalb der Grenzen $\phi \in [0, \pi/2]$ die Form an

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \langle \sin 6\phi, \sin 6\phi \rangle & \langle \sin 4\phi, \sin 6\phi \rangle & \langle \sin 2\phi, \sin 6\phi \rangle \\ & \langle \sin 4\phi, \sin 4\phi \rangle & \langle \sin 2\phi, \sin 4\phi \rangle \\ \text{symm.} & & \langle \sin 2\phi, \sin 2\phi \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{N}{2} & & 0 \\ & \frac{N}{2} & \\ \text{symm.} & & \frac{N}{2} \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Nutzt man erneut ein Minimum an Realisierungen $N = \ell/2$, so erhält man

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{N+1}{2} & & 0 \\ & \frac{N+1}{2} & \\ \text{symm.} & & \frac{N+1}{2} \end{pmatrix} \quad (28)$$

und kann den Faktor $C = 4/(\ell + 2)$ direkt an die Matrix B in Gl. (25) anbringen

$$a_{\ell m}^k = 4/(\ell + 2) \cdot B\bar{P}_\ell^m(t_i) \quad (29)$$

Für die unparitären Grade sowie geraden Ordnungen erhält man im Fall **(III)** mit $\ell = 7$, $m = 2, 4, 6$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \langle \sin 7\phi, \sin 7\phi \rangle & \langle \sin 5\phi, \sin 7\phi \rangle & \langle \sin 3\phi, \sin 7\phi \rangle & \langle \sin \phi, \sin 7\phi \rangle \\ & \langle \sin 5\phi, \sin 5\phi \rangle & \langle \sin 3\phi, \sin 5\phi \rangle & \langle \sin \phi, \sin 5\phi \rangle \\ & & \langle \sin 3\phi, \sin 3\phi \rangle & \langle \sin \phi, \sin 3\phi \rangle \\ \text{symm.} & & & \langle \sin \phi, \sin 1\phi \rangle \end{pmatrix} \quad (30)$$

was bei $N = (\ell + 1)/2 + 1$ zunächst auf eine schachbrettartige Verteilung in den Nebendiagonalen führt

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{N}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ & \frac{N}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & & \frac{N}{2} & -\frac{1}{2} \\ \text{symm.} & & & \frac{N}{2} \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Betrachtet man die Graphen der Produkte in Abb. 3 (a) und (b), so fällt auf, dass der Summationsfehler offensichtlich von dem letzten Wert (± 1) herrührt.

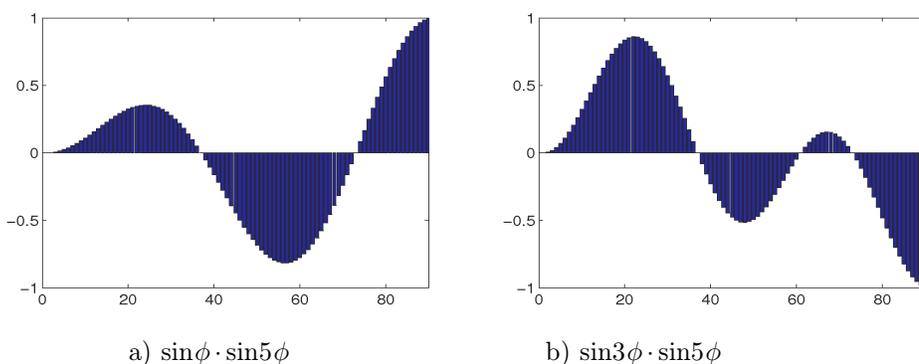


Abbildung 3. Produkte zweier harmonischer Funktionen, $\phi \in [0, 90^\circ]$

Es gilt vielmehr, den Wert ($\pm \frac{1}{2}$) dort zu erzeugen. Dies lässt sich erreichen, indem der letzte Wert der Matrix B durch $\sqrt{2}$ dividiert wird. Die Nebendiagonalelemente werden damit ausgelöscht und der konstante Faktor $C = 4/(\ell + 1)$ kann der Matrix B zugeschlagen werden. Zu beachten ist wiederum, dass auch die rechte Seite oder entsprechend die letzte Spalte von B durch $\sqrt{2}$ zu dividieren ist. Die Gleichung lautet zusammengefasst

$$a_{\ell m}^k = 4/(\ell + 1) \cdot B''(t) \bar{P}_\ell^m(t_i) \quad k = 1, 3, 5, \dots, \ell \quad (32)$$

mit

$$B'_{N,k} = B_{N,k}/\sqrt{2} \quad B''_{i,\ell} = B'_{i,\ell}/\sqrt{2}. \quad (33)$$

Der Fall **(IV)** ergibt für $\ell = 7$, $m = 1, 3, 5, 7$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} (\cos 7\phi, \cos 7\phi) & (\cos 5\phi, \cos 7\phi) & (\cos 3\phi, \cos 7\phi) & (\cos \phi, \cos 7\phi) \\ & (\cos 5\phi, \cos 5\phi) & (\cos 3\phi, \cos 5\phi) & (\cos \phi, \cos 5\phi) \\ & & (\cos 3\phi, \cos 3\phi) & (\cos \phi, \cos 3\phi) \\ \text{symm.} & & & (\cos \phi, \cos \phi) \end{pmatrix} \quad (34)$$

und damit, ähnlich wie bei (III) eine '1/2- überschüssige' Verteilung

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{N+1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & \frac{N+1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & & \frac{N+1}{2} & \frac{1}{2} \\ \text{symm.} & & & \frac{N+1}{2} \end{pmatrix} \quad (35)$$

Aus den Produkten in Abb. 4 (a) und (b) erkennt man, dass hier offensichtlich der erste Wert zu gross ist und daher der erste Wert der Matix B sowie der rechten Seite durch $\sqrt{2}$ dividiert werden müssen.

$$a_{\ell m}^k = 2/(N+1) \cdot B'' \bar{P}_\ell^m(t_i) \quad k = 1, 3, 5, \dots \ell \quad (36)$$

mit

$$B'_{1,k} = B_{1,k}/\sqrt{2} \quad B''_{i,1} = B'_{i,1}/\sqrt{2} \quad (37)$$

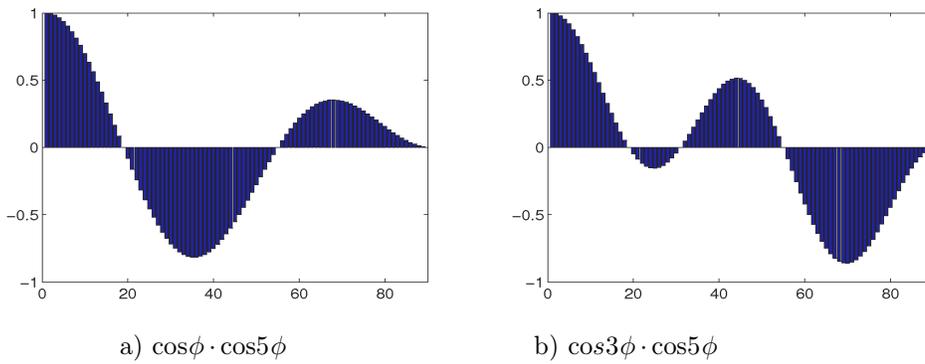


Abbildung 4. Produkte zweier harmonischer Funktionen, $\phi \in [0, 90^\circ]$

In Tab. 5 sind die korrespondierenden Schrittweiten zur Berechnung der Fälle (I-IV) zusammengestellt,

Fall	Bereich	Schrittweite	Anzahl N	Funktion
I	$0 \leq \phi \leq \pi/2$	π/ℓ	$\ell/2+1$	Kosinus
II	$0 < \phi < \pi/2$	$\pi/(\ell+2)$	$\ell/2$	Sinus
III	$0 \leq \phi \leq \pi/2$	$\pi/(\ell+1)$	$(\ell+1)/2+1$	Sinus
IV	$0 \leq \phi \leq \pi/2$	$\pi/(\ell+1)$	$(\ell+1)/2+1$	Kosinus

Tabelle 5. Definition der jeweils minimalen Schrittweiten zur Zerlegung der Legendre Funktionen

Das obige Schema eignet sich zur simultanen Berechnung aller Koeffizienten der assoziierten Ordnungen m zu einem bestimmten Grad ℓ , da sich ausser den Funktionswerten als rechte Seiten für die verschiedenen Ordnungen nichts verändert. Bezüglich der numerischen Stabilität erfolgt solange ein praktikables Resultat, als es gelingt stabile Legendre Funktionen zu berechnen. Dies ist für die gebräuchlichen Rekursionsformeln in hoher Auflösung möglich, vgl. A.5. Da für jeden Grad jeweils eine Matrix-Vektor Operationen mit $\ell^2/4$ Elementen berechnet werden muss, ergibt sich für die Bechnung der jeweiligen Fourier Komponenten zu allen Ordnungen eines Grades ℓ die Grössenordnung $\mathcal{O}(\ell^3/4)$. Geht man an dieser Stelle auf die Berechnung mit FFT über, so benötigt man lediglich $\ell \log \ell$ Operationen je Ordnung, insgesamt also $\mathcal{O}(\ell^2 \log^2 \ell)$ pro Grad. Der Faktor $\log \ell$ ist dabei gegenüber $\ell/4$ für höhere Grade beachtlich, bei maximalem Grad $L = 1080$ etwa 38.

2.3 Die FFT–Methode angewandt auf die Legendre Funktionen

Analog zu dem vorherigen Verfahren soll an dieser Stelle die Berechnung der Fourier–Komponenten der Legendre Funktionen durch ein klassisches FFT–Verfahren angegeben werden. Den Ausgangspunkt bildet das Fourier–Integral (mit $t = \sin \phi$)

$$A_{\ell m k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\phi} \bar{P}_\ell^m(t) d\phi \quad (38)$$

Da die Legendre Funktionen stets innerhalb des Intervalls $\phi \in [0, 2\pi]$ periodisch sind, ist eine effektive Zerlegung mittels der FFT–Methode durchführbar. Der diskrete Fall lautet bei gleichabständigen Realisierungen

$$A_{\ell m k} \equiv \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i2\pi kn/N} \bar{P}_\ell^m(t_n) d\phi, \quad n=0, \dots, N-1 \quad (39)$$

Bei reellwertigem Eingangssignal ist das Fourierspektrum symmetrisch (periodisch)

$$A_{-k} = A_{N-k} = A_k^*, \quad (40)$$

sodass es ausreichend ist, nur die Koeffizienten mit positiven Indizes zu speichern. Folgende Symmetrieeigenschaften können genutzt werden, um die Anzahl der erforderlichen Realisierungen der Legendre Funktionen gering zu halten:

- i. die Legendre Funktionen mit gerader Ordnung sind periodisch in $[0, \pi]$, symmetrisch zu $\pi/2$,
- ii. die ungeraden Legendre Funktionen sind periodisch in $[0, 2\pi]$, symmetrisch zu π ,
- iii. dies gilt ebenso für die Kugelfunktionen, was für die Berechnung der Inklinationsfunktionen von Bedeutung ist.

Darüberhinaus kann eine reelles Eingangssignal in ein reelles und ein imaginäres Signal aufgeteilt werden und dem FFT–Operator in halber Länge zugeführt werden. Das komplexe Ergebnis kann daran anschliessend wieder entsprechend entschlüsselt werden.

Zur effizienten Anwendung der FFT–Methode empfiehlt es sich, die Legendre Funktionen im Bereich von $t = \sin(\phi)$, $\phi = [0, \pi/2]$ äquidistant mit der Schrittweite

$$\Delta\phi = \begin{cases} \pi/L & L: \text{gerade} \\ \pi/(L+1) & L: \text{ungerade} \end{cases}$$

wobei $L = \ell_{\max}$ rekursiv in jeweils einem Schritt (gradweise Rekursion) zu berechnen. Anschliessend kann nach folgendem Schema ausgewertet werden:

1. *Zusammensetzen des Signals, mit $N = [L/2] + 1$*

$$\begin{aligned} \alpha &= (-1)^{\text{mod}(m,2)} \\ \beta &= (-1)^{\text{mod}(l,2)} \\ \gamma &= \alpha \cdot \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_j &= \bar{P}_{\ell m}(t_j), & j=0, \dots, N & \quad (1. \text{Quadrant}) \\ p_{2N-j} &= \alpha \cdot p_j, & j=1, \dots, N-1 & \quad (2. \text{Quadrant}) \\ p_{2N+j} &= \beta \cdot p_j, & j=0, \dots, N & \quad (3. \text{Quadrant}) \\ p_{4N-j} &= \gamma \cdot p_j, & j=1, \dots, N-1 & \quad (4. \text{Quadrant}) \end{aligned}$$

2. 2-Schritt-Zerlegung in

$$h_n = p_{2n} + ip_{2n+1}, \quad n = 0, \dots, 2N - 1$$

3. Umwandlung mittels FFT

$$H_n = \mathcal{F}[h_n]$$

4. Hinzufügen des letzten Wertes

$$H_{2N} = H_1$$

5. Zusammenführen reeller und komplexer Lösungen zu

$$a_{\ell m}^k = 1/2(H_n + H_{M/2-n}^*) - \frac{i}{2}(H_n - H_{M/2-n}^*)e^{i2\pi n/M}$$

wobei $M = 4 \cdot \lfloor \ell_{\max}/2 \rfloor$, $n = 0, 1, \dots, M/2$

6. Speichern der Koeffizienten $a_{\ell m}^k$, mit $k = \begin{cases} 0, 2, \dots, \ell & \ell: \text{gerade} \\ 1, 3, \dots, \ell & \ell: \text{ungerade} \end{cases}$

Eine generelle Synthese kann damit erfolgen zu

$$\bar{P}_\ell^m(t) = \operatorname{re} \left\{ \sum_k (2 - \delta_k^0) \cdot e^{ik\phi} \cdot a_{\ell m}^k \right\}, \quad k = \ell \bmod 2, \dots, \ell (2). \quad (41)$$

bzw. anhand der komplexen Koeffizienten zu

$$\bar{P}_\ell^m(t) = \sum_{p=0}^{\ell} e^{ik\phi} \cdot A_{\ell m p}, \quad k = \ell - 2p. \quad (42)$$

In Matrix-Notation lässt sich damit schreiben

$$\bar{P}_\ell^m(t) = C^k \cdot A_{\ell m}^k \quad (43)$$

mit der unitären Matrix $C^T = C^*$, in deren Spalte k die harmonischen Funktionen

$$\begin{aligned} C^k &= e^{ik\phi} \\ k &\in \{-\ell \leq k \leq \ell\} \wedge (\ell - k) \bmod 2 = 0 \\ \phi &\in \{0 \leq \phi \leq 2\pi\} \end{aligned} \quad (44)$$

stehen. Gegenüber der direkten Zerlegung durch numerische Integration muss zur effektiven Verwendung von FFT eine andere rechte Seite gebildet werden, da zum einen die Anzahl der Realisierungen als Potenz von 2 ausgedrückt werden sollte³, zum anderen die Nyquist-Frequenz hinsichtlich der Abtastrate zu beachten ist, und daher stets zumindest mit doppelter Anzahl an Datenpunkten⁴ gegenüber dem Grad der maximalen Entwicklung zu rechnen ist. Wegen der vorteilhaften Berechnung bei gradweiser Rekursion, Gl. (A.5), sollte man den Datenbereich daher von Anfang an auf $2L$ festlegen.

Man erhält folglich für die vollständige Berechnung aller Koeffizienten bis zu $L = 1080$ mit FFT $2L^3 \log 2L \simeq 1.8 \times 10^{10}$ Flops⁵ hingegen im Fall der direkten Methode

3. Im Allgemeinen sind entsprechende Programmbibliotheken frei von dieser Restriktion.

4. Diese liegen allerdings symmetrisch verteilt vor und müssen daher nur einmal berechnet werden.

$L^4/16 = 8.5 \times 10^{10}$ Flops. Beim direkten Verfahren ist die Auswertung von $L^2/4 = 2.9 \times 10^5$ Funktionswerten erforderlich, bei Verwendung der gradweisen Rekursion beim FFT-Verfahrens hingegen $L^2 = 1.2 \times 10^6$. Letztere können allerdings schneller berechnet werden.

Das Problem lässt sich folgendermassen zusammenfassen: Sofern man mit FFT arbeitet, ist man an die Kreisperiode 2π gebunden und muss diese mit Daten füllen. Man benutzt dann von Anfang an die Auflösung des gewünschten maximalen Grades und berechnet für jeden neuen Grad anhand eines schnellen Rekursionsschrittes (ℓ – Rekursion) die erforderlichen Einträge. Arbeitet man hingegen mit der direkten Zerlegung, bei der gerade und ungerade Ordnungen sowie die Parität der Grade unterschieden werden können, genügt es, jeweils nur $(\ell + 1)/2$ Realisierungen zu berechnen. Da mit steigendem Grad und daher zunehmender Verdichtung der Funktionswerte in der Regel keine Werte am selben Ort berechnet werden können, ist die ℓ –Rekursion jedoch nicht unmittelbar anwendbar. Es muss zur Berechnung der Funktionswerte zunächst mit sektorieller Rekursion an der Stelle ($\ell = m$) ein Startwert erzeugt werden, von dem aus anschliessend horizontal gerechnet werden kann. Schematisch sei dies noch einmal in Abb. 5 veranschaulicht, wobei die direkte Rekursion, auf die Komponenten angewendet, im folgenden Abschnitt diskutiert werden soll.

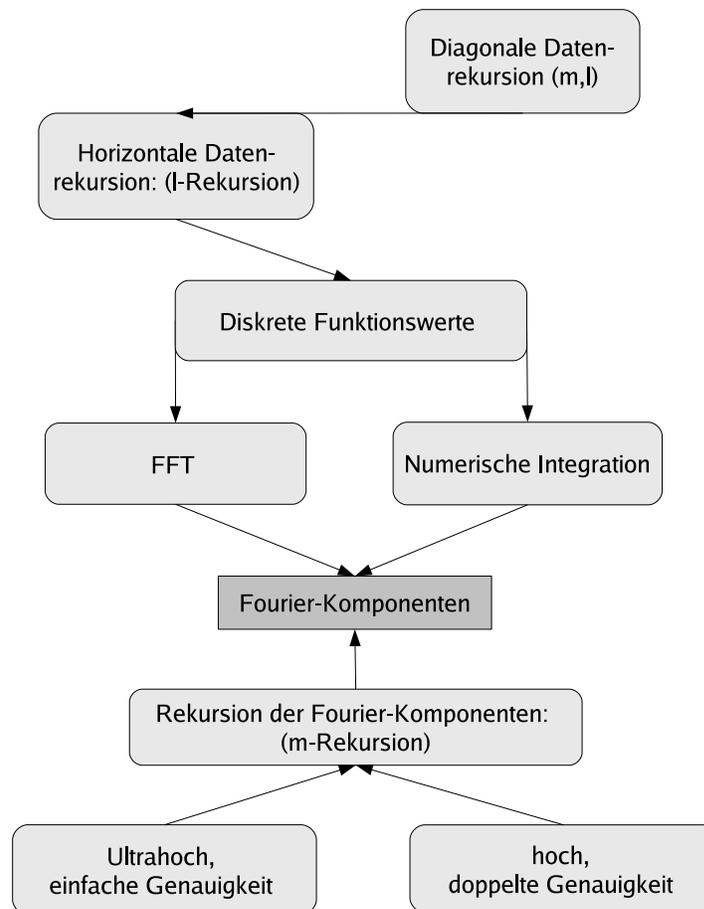


Abbildung 5. Verschiedene Verfahren zur Berechnung der Fourier-Komponenten der assoziierten Legendre Funktionen.

5. Flop: Fliesskommaberechnung; Anhand des Faktors Flops/Taktzyklus und der Prozessor – taktung lässt sich die Leistung des Computersystems abschätzen

2.4 Die rekursive Berechnung der Fourier–Komponenten

Anders als im vorausgehenden Abschnitt, in dem die Fourier–Komponenten der Legendre Funktionen durch eine Transformation konkreter Funktionswerte berechnet werden können, liegt der Schwerpunkt bei diesem Verfahren in der unmittelbaren Anwendung der Rekursionen auf die Fourier–Komponenten. Zunächst soll in diesem Abschnitt die Anwendung des Verfahrens erläutert werden und anschliessend auf Schwächen (und Möglichkeiten sie zu umgehen) eingegangen werden. So lässt sich entweder die Rekursion bereits an einem Punkt abbrechen, von dem ab keine weitere Konvergenz mehr erfolgt oder durch Hinzunahme weiterer Informationen eine numerische Stabilisierung herbeiführen. Eine Umkehrung der Rekursion zeigt sich als von vorne herein stabil bis in hohe Auflösungen und wird letztlich nur durch die stabile Berechnung der Startwerte limitiert.

Dilts [DIL85] beschreibt die rekursiven Beziehungen der Fourier–Komponenten der Legendre Funktionen bezüglich der gradweisen Rekursion (ℓ –Rekursion) und gibt einen Algorithmus in reiner Integer–Arithmetik an. Seine numerischen Berechnungen hören jedoch bei $\ell = 14$ auf und berücksichtigen keine Normierung. In Ellovitz et al. [ELO89] wurden daher entsprechende Gleichungen um die erforderliche Normierung erweitert und Tests bis $\ell = 250$ durchgeführt. Aus heutiger Sicht ist ihr Fazit, das Verfahren der Fourier–Transformation auf der Kugel sei zu rechenaufwendig verglichen mit einem Quadraturverfahren, jedoch nicht mehr zu rechtfertigen, da die SH–Koeffizienten einer globalen Potentialfunktion, einmalig in verknüpfte harmonischen Koeffizienten (*lumped coefficients*) umgewandelt, mittels FFT unerreichbar schnell auf beliebig feinmaschige Gitter abgebildet werden können, siehe dazu Abschnitt 3. Auf diese Weise ist ein synthetisches SH–Modell bis $\ell = 2160$ berechnet und mit der Berechnung eines Modells anhand der Integration der Daten mit den Legendre Funktionen verglichen worden.

Betrachtet man die ordnungsweise Rekursion (m –Rekursion),

$$-P_{\ell}^{m+1}(\sin\phi) + (\ell + m)(\ell - m + 1)P_{\ell}^{m-1}(\sin\phi) = 2\frac{\partial}{\partial\phi}P_{\ell}^m(\sin\phi), \quad (45)$$

so lassen sich anstelle der Legendre Funktionen ebenso deren Fourier–Komponenten einsetzen, da die jeweilige Anzahl bei sich ändernder Ordnung konstant bleibt und sich deren trigonometrische Basisfunktionen auf beiden Seiten kürzen lassen. Man erhält

$$-a_{\ell,m+1}^k/N_{\ell,m+1} + (\ell + m)(\ell - m + 1) \cdot a_{\ell,m-1}^k/N_{\ell,m-1} = (-1)^{\ell-m+1} \cdot 2k \cdot a_{\ell m}^k/N_{\ell m}, \quad (46)$$

wobei der Normierungsfaktor, Gl. (11) zur Berechnung normierter Komponenten eingeführt wird. Die Differentialgleichung in (45) kann im Sinne eines Anfangswertproblems (AWP) mit $m = 0$ gelöst werden. Dazu berechnet man vorab Hilfsgrößen, die sich aus der Zerlegung der Gl. (48) einschliesslich der Produktreihe $\Pi_{\ell-m+1}^{\ell+m} = \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}$ ergeben

$$\begin{aligned} j_m &= 1 + \delta_m^0 \\ d_{\ell m} &= \sqrt{(\ell + m)(\ell - m + 1)} \\ e_{\ell m} &= \sqrt{(\ell - m)(\ell + m + 1)} \end{aligned} \quad (47)$$

und mittels derer die Normierung implizit durchgeführt werden kann. Es ergibt sich damit eine rekursive Berechnungsmöglichkeit sämtlicher Komponenten (m, k) der Legendre Funktionen, die

zu einem bestimmten Grad l gehören, nach folgendem Schema

$$\begin{cases} a_{\ell, m+1}^k = \sqrt{j_m} (-1)^{\ell+1} k a_{\ell m}^k / d_{\ell 0} & m=0 \\ a_{\ell, m+1}^k = [(-1)^{\ell-m+1} k a_{\ell m}^k + \dots \\ \quad a_{\ell m-1}^k d_{\ell m}] / e_{\ell m} & m>0 \end{cases} \quad (48)$$

ausgehend von den Komponenten null-ter Ordnung $a_{\ell 0}^k$, die effektiv nach Gl. (A.34) direkt bestimmt werden können. Man berechnet dazu vorab die Werte p_j

$$p_{j+1} = (1 - 1/(2j)) \cdot p_j \quad (49)$$

und kann die Koeffizienten daraus stets herleiten mittels

$$a_{\ell 0}^k = \sqrt{2\ell + 1} \cdot p_k \cdot p_{\ell-k}. \quad (50)$$

Das rekursive Schema in Gl. (48) eignet sich bei vektorieller Programmierung insbesondere zur simultanen Berechnung aller zugehöriger Frequenzen (Komponenten k) zu einem bestimmten Grad ℓ sowie Ordnungen m . Man stellt dabei jedoch fest, daß die Fourier Komponenten der Legendre Funktionen höherer Grade ($\ell > 30$) nicht mit ausreichender Stellengenauigkeit berechnet werden können; der Prozess ist instabil.

Man betrachte dazu zunächst die Lösung des AWP für $m = 0$ und dem System, das durch Gl. (48) geben ist. Die lineare Gleichung zur Berechnung der Komponenten zum Grad $\ell = 4$ mit den Ordnungen $m = 0, \dots, \ell$ nimmt zunächst die folgende Gestalt an:

$$R_{\ell m}^k \cdot a_{\ell m}^k = 0, \quad m=0, 1, 2, \dots, \ell$$

$$\left(\begin{array}{c|cccc} \bullet & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \bullet & \bullet & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet & -1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} a_{\ell,0}^k \\ a_{\ell,1}^k \\ a_{\ell,2}^k \\ a_{\ell,3}^k \\ a_{\ell,4}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Das System hat den Rangdefekt 1; daher führt man die erste Spalte $r_{\ell,0}^k$ als Ausgangswert auf der rechten Seite ein, und bestimmt nurmehr die Ordnungen $m = 1, \dots, \ell$

$$R_{\ell m}^k \cdot a_{\ell m}^k = z_0^k = -a_{\ell,0}^k \cdot r_{\ell,0}^k \quad (52)$$

$$\left(\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & -1 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & -1 & 0 \\ 0 & \bullet & \bullet & -1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} a_{\ell,1}^k \\ a_{\ell,2}^k \\ a_{\ell,3}^k \\ a_{\ell,4}^k \end{pmatrix} = -a_{\ell,0}^k \cdot \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (53)$$

Es lässt sich daraufhin vorwärts auflösen, also im Sinne der Rekursion, aber ebenso, indem man die Inverse von R bildet. Aufgrund der einfachen Struktur der unteren Dreiecksmatrix, lässt sich die Inverse direkt anhand der Gaussmatrizen $M_m = I - t_m \cdot e_m^T / R_{mm}$ berechnen, wobei I die Einheitsmatrix, e_m^T der Einheitsvektor zu m und $t_m := R_{hm}$ die Spalte m von R , mit den Einträgen

unterhalb der Diagonalen $h = m + 1, \dots, \ell$, ist. Durch Inversion der Gaussmatrizen erhält man für obiges Beispiel die einfache verkettete Form

$$\begin{aligned} R^{-1} &= \prod_m [M_m^{-1} \cdot R], \quad m = \ell - 1, \dots, 1 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \bullet & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \bullet & 1 & 0 \\ 0 & \bullet & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & 1 & 0 & 0 \\ \bullet & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R. \end{aligned} \quad (54)$$

Die Matrix R^{-1} wächst dabei mit jeder weiteren Multiplikation mit den Gaussmatrizen über alle Grenzen, was unweigerlich zu numerischem Stellenverlust führt. Dividiert man bei jeder Multiplikation in Gl.(53) zum Zweck einer Skalierung durch den Faktor 2

$$\hat{R}^{-1} = \sum_{m=\ell-1}^1 M_m^{-1} \cdot e_m 2^{-m} e_m^T, \quad (55)$$

so bleibt die Inverse homogen skaliert und damit im Rahmen maximal erreichbarer Rechengenauigkeit, jedoch müssen später wiederum die Faktoren 2^m an die Komponenten angebracht werden

$$a_{\ell m}^k = \hat{R}^{-1} z_0^k \cdot 2^m, \quad m = 1, \dots, \ell. \quad (56)$$

Da sich die Genauigkeit von Gleitkommazahlen unmittelbar auf die (binäre) Grössenordnung des Exponenten bezieht, verringert sich die Anzahl der freien Bits innerhalb der Mantisse bei Multiplikation mit 2 um ein Bit⁶ (Linksverschiebung). Geringe Fehler werden daher im Zuge der Rekursion permanent verstärkt und die Werte letztlich unbrauchbar.

Hofsommer [HP60] schlägt daher stattdessen vor, noch einen weiteren Wert in das System einzuführen. Es wird dann allerdings die Inversion eines tridiagonalen Gleichungssystems zur Berechnung der Fourier-Komponenten der assoziierten Ordnungen erforderlich. Im Gegensatz zu einer expliziten Fourier-Zerlegung, wie sie im vorherigen Kapitel angewendet wurde, gibt es rechentechnisch keinen Vorteil. Das Gleichungssystem wird um die letzte Unbekannte reduziert, da sich diese ebenfalls direkt berechnen lässt und auf der rechten Seite eingeführt werden kann. Man erhält für das obige Beispiel

$$R_{\ell m}^k \cdot a_{\ell m}^k = z_{0,\ell}^k = -a_{\ell,0}^k \cdot r_0^k - a_{\ell,4}^k \quad (57)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \bullet & -1 & 0 \\ \bullet & \bullet & -1 \\ 0 & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{\ell,1}^k \\ a_{\ell,2}^k \\ a_{\ell,3}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{\ell,0}^k \cdot \bullet \\ -a_{\ell,0}^k \cdot \bullet \\ 0 \\ -a_{\ell,4}^k \end{pmatrix}. \quad (58)$$

und es müssen die jeweiligen Komponenten für $(m = 0 \vee m = \ell)$ als Ausgangswerte vorliegen. Für den Fall $m = \ell$ lassen sich die Koeffizienten auf folgende Weise berechnen. Aus Gl. (2) erhält man

$$\bar{P}_{\ell}^{\ell}(\sin \phi) = N_{\ell}^{\ell} \cdot T_{\ell 0}^{\ell} \cdot \cos^{\ell} \phi, \quad (59)$$

wobei sich die Konstanten $T_{\ell 0}^{\ell}$ vorab rekursiv bestimmen lassen

$$T_{\ell 0}^{\ell} = (2\ell - 1) \cdot T_{\ell-1,0}^{\ell-1}, \quad (60)$$

6. Man spricht vom positiven Abstand zur nächstgrösseren Zahl mit der selben Stellen Genauigkeit. Dieser beträgt z.B bei 1: 2^{-52} bei 2: 2^{-51} , 4: 2^{-50} , usw. Für 2^{38} beträgt die Stellen Genauigkeit nur noch etwa $6 \cdot 10^{-5}$.

mit dem initialen Wert $T_{10}^1 = 1$. Die Normierung

$$N_\ell^\ell = \sqrt{\frac{(4\ell + 2)}{\prod_{n=1}^\ell n(\ell + n)}} \quad (61)$$

bringt man im Zuge der Rekursion an, indem man

$$\begin{aligned} \bar{T}_{\ell 0}^\ell &= (2\ell - 1) \cdot \bar{T}_{\ell-1,0}^{\ell-1} \cdot \left(\frac{\prod_{n=1}^{\ell-1} n(\ell-1+n)}{\prod_{n=1}^\ell n(\ell+n)} \cdot \frac{2\ell+1}{2\ell-1} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (2\ell - 1) \cdot \bar{T}_{\ell-1,0}^{\ell-1} \cdot \left(\frac{\prod_{n=1}^{\ell-1} (\ell-1+n)/(\ell+n)}{2\ell^2} \cdot \frac{2\ell+1}{2\ell-1} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (2\ell - 1) \cdot \bar{T}_{\ell-1,0}^{\ell-1} \cdot \left(\frac{1}{2\ell(2\ell-1)} \cdot \frac{2\ell+1}{2\ell-1} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{2\ell+1}{2\ell} \right)^{\frac{1}{2}} \bar{T}_{\ell-1,0}^{\ell-1}. \end{aligned} \quad (62)$$

mit dem initialen Wert $\bar{T}_{10}^1 = \sqrt{3}$ verwendet. Die damit berechneten normierten Konstanten genügen, um mit der Potenz der Kosinus-Funktion entsprechende Funktionswerte an den Stellen $\bar{P}_\ell^\ell(\sin \phi)$ zu erzeugen. Zur Berechnung der Fourier-Komponenten benötigt man ferner noch die Zerlegung der Potenzen in eine trigonometrische Reihe, entsprechend

$$\cos^\ell y = \sum_{k=0}^{j=\ell} \bar{c}_{j,k} \cos ky = 2^{(-\ell+1)} \sum_{k=0,2}^{\ell} 1/(1+\delta_k^0) \left(\left[\frac{\ell-k}{2} \right] \right) \cos(ky), \quad (63)$$

die sich aus den Binominalkoeffizienten

$$\left(\left[\frac{\ell-k}{2} \right] \right) = \frac{\ell!}{\left(\ell - \left[\frac{\ell-k}{2} \right] \right)! \left[\frac{\ell-k}{2} \right]!} \quad (64)$$

berechnen lassen. In Tabelle 6 ist das Schema der benötigten Binominalkoeffizienten in Form eines (halben) Pascalschen Dreiecks gelistet

$j \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1		1						
2	2		1					
3		3		1				
4	6		4		1			
5		10		5		1		
6	20		15		6		1	
7		35		21		7		1

Tabelle 6. Koeffizientenschema der Zerlegung der Potenzen des Kosinus

Die Fourier Komponenten erhält man danach zu

$$A_{\ell\ell}^k = \mathcal{F}[\bar{P}_\ell^\ell] = \bar{c}_{j,k} \bar{T}_\ell^\ell, \quad k = 0, \dots, \ell \vee (\ell - k) \bmod 2 = 0. \quad (65)$$

Für hohe Auflösungen empfiehlt es sich die Binominalkoeffizienten anstatt mit der Fakultätenformel in Gl. (64) entweder rekursiv oder durch Zerlegung der Fakultäten in eine Produktreihe zu berechnen, da es sonst rasch zu numerischem Überlauf kommt.

Die rekursive Berechnung folgt dabei dem Prinzip: zunächst werden die Diagonaleinträge jeweils mit $2^{(-j)}$ multipliziert, um den binären Faktor in Gl. (63) zu berücksichtigen. Die Einträge $\bar{c}_{j,0}$ der ersten Spalte mit $k=0$ ergeben sich stets aus $2\bar{c}_{j-1,1}$. Die Einträge aller übrigen Spalten $k \geq 1$ können berechnet werden mit

$$\bar{c}_{j,k} = (\bar{c}_{j-1,k-1} + \bar{c}_{j-1,k+1})/2 \quad (66)$$

wobei die jeweils nächsthöhere Stufe j erneut halbiert wird. Damit lassen sich die erforderlichen Randwerte der Gleichungssysteme als Fourier-Komponenten der Legendre Funktionen für ($m=0 \vee m=\ell$) zügig bereitstellen. Die Lösung des überbestimmten Systems in Gl. (57) kann in Form einer Ausgleichung erfolgen

$$a_{\ell m}^k = (R^T R)^{-1} R^T \cdot z_{0,\ell}^k. \quad (67)$$

2.4.1 Eine unvollständige Lösung mit einfacher Genauigkeit

Da es sich bei der Fourierreihe um eine asymptotisch gegen Null konvergierende Reihe handelt, stellt sich die Frage, ob nicht eventuell ein Abbruchkriterium genügen würde, um weitere Komponenten, die offensichtlich fehlerhaft berechnet werden, einfach zu Null zu setzen. Nach Gl. (48) kann jeweils untersucht werden, ob der nächstberechnete Wert noch stets geringer ist als sein Vorgänger,

$$|a_{\ell, m+1}^k| \stackrel{?}{<} |a_{\ell m}^k| \quad (68)$$

Betrachtet man dazu den Signalverlauf der $a_{\ell m}^k$ für höhere Frequenzen in Abb. 6, so erkennt man, dass sie stets gleichmässig gegen Null streben. Bricht man daher den Algorithmus bei Überschreiten des Kriteriums in Gl. (68) ab, so vernachlässigt man höhere Frequenzen k ab einer bestimmten Ordnung; bei Verwendung in Kugelfunktionsmodellen sind deren spektrale Leistungsdichten allerdings bereits äusserst niedrig.

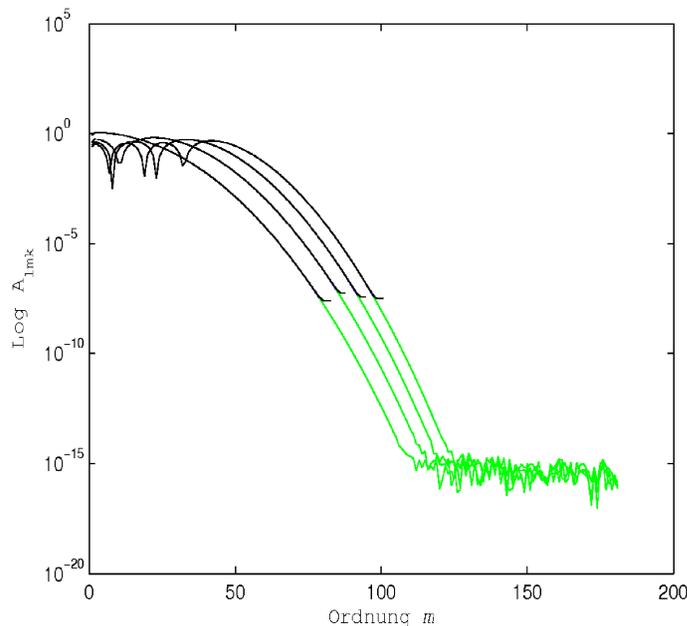


Abbildung 6. Konvergenz der Komponentenbeträge $|a_{\ell m}^k|$ gegen Null bei $l=180$ für die Frequenzen $k = \ell - 6, \ell - 4, \ell - 2$ und ℓ . Bei ca. 10^{-8} divergiert die Rekursion, jeweils erkennbar an dem kleinen Haken.

Mit wachsender Ordnung sind davon zunehmend mehr Komponenten betroffen. Das „Zu-

Null-Setzen“ der Komponenten

$$a_{\ell m}^k = \begin{cases} a_{\ell m}^k & \text{falls } |a_{\ell m}^k| > 10^{-8} \\ 0 & \text{falls } |a_{\ell m}^k| < 10^{-8} \end{cases} \quad (69)$$

entspricht an dieser Stelle eigentlich der Bestimmung dieser Komponenten mit einfacher Stellen-
genauigkeit. Bedenkt man jedoch, dass aufgrund der Konvergenz der harmonischen Reihe der
Kugelfunktionen die Entwicklungskoeffizienten ebenso stark an Leistung verlieren, siehe z.B.
Tscherning und Rapp [TR74] oder nach Kaula: $\sigma_\ell = 10^{-5}/\ell^2$ für die Leistungsdichte der Grad-
varianzen des Erdschwerefeldes, so erklärt dies, dass selbst hochauflösende Funktionen ohne nen-
nenswerten Verlust an Stellen-genauigkeit berechnet werden können. Abb. 7 zeigt den Bereich
der Komponenten die von der unvollständigen Lösung betroffen sind.

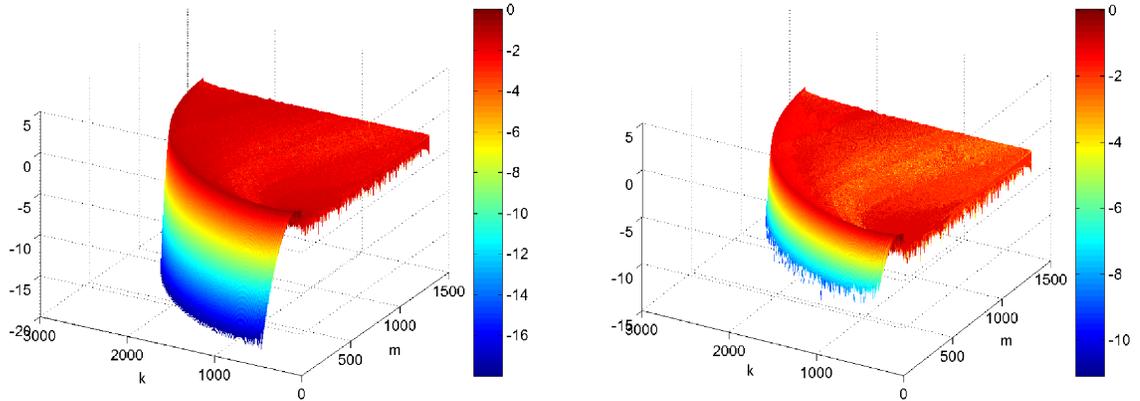


Abbildung 7. Koeffizienten-Plateau in logarithmischer Darstellung sämtlicher Komponenten $|a_{\ell,m}^k|$ zum Grad $l = 2700$ der vollständigen (links) sowie der unvollständigen Lösung (rechts). Die verbleibende Information bei Unterschreiten des Absolutbetrages von 10^{-8} geht verloren.

Der relative Fehler zwischen der korrekten Lösung und dem erzielten Ergebnis nach dem
Abbruchkriterium ist in Abb. 8 dargestellt. Es ergibt sich dabei im Wesentlichen nur ein
schmaler Grat hoher Frequenzen (zugleich der höheren Ordnungen) als *ungenau* gegenüber der
vollständigen Lösung, da der Abbruch bereits erfolgt ist, bevor die Absolutbeträge der Kompo-
nenten unterhalb der doppelten Rechengenauigkeit liegen.

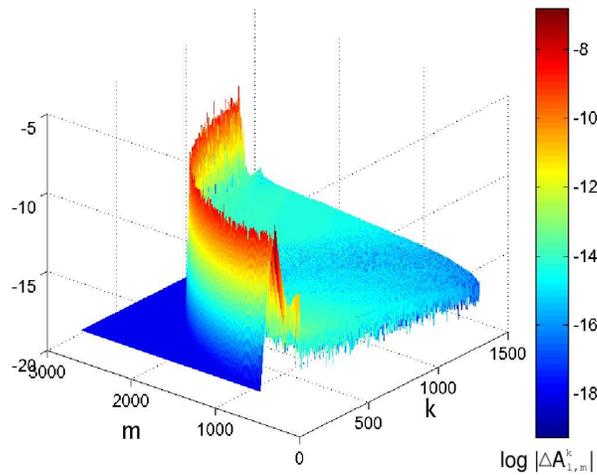


Abbildung 8. Verlauf des Fehlers der Komponenten $|a_{\ell,m}^k|$ zum Grad $l = 2700$ zwischen vollständiger und unvollständiger Rekursion.

2.5 Die umgekehrte rekursive Formulierung

Den vorab berechneten Abschlusswert der Rekursion kann man ebenso als Anfangswert verwenden, und die Gl. (48) entsprechend invertieren⁷. Man erhält dann

$$\begin{aligned}
 a_{\ell, \ell-1}^k &= -2k \cdot a_{\ell, \ell}^k / \sqrt{2\ell} \\
 a_{\ell, m-1}^k &= e_{\ell m} d_{\ell m} a_{\ell, m+1}^k / \sqrt{j_{m-1}} - \dots \\
 &\quad (-1)^{\ell-m+1} \cdot 2k \cdot a_{\ell m}^k / \sqrt{j_{m-1}} / d_{\ell m}
 \end{aligned}
 \left\{ \begin{array}{l} m = \ell \\ \\ m < \ell \end{array} \right. \quad (70)$$

Dieses Schema erweist sich zunächst als stabil bis zu einer max. Auflösung von $\ell = 1024$ bei Verwendung von Zahlen mit doppelter Rechengenauigkeit. An dieser Stelle kommt es zu einem Unterlauf der berechneten Anfangskomponenten $a_{\ell \ell}^k$. Der Grund dafür liegt in der Division durch 2^ℓ aus Gl. (63), was sich nach Tab. 6 am stärksten in den Frequenzen $k = \ell$ bemerkbar macht. Es ergeben sich für $a_{\ell \ell}^\ell \simeq \mathcal{O}(10^{-308})$ während für $a_{\ell \ell}^0 \simeq \mathcal{O}(10^0)$, daher besteht bis zum Erreichen des oberen Exponenten bei etwa 10^{308} noch erheblicher Spielraum in Richtung der niedrigen Frequenzen. Halbiert man folglich den Exponenten der Skalierung in Gl. (65), indem die Binominalkoeffizienten stattdessen mit $\sqrt{2^{-j}}$ zur Berechnung der Koeffizienten $\bar{c}_{j,k}$ multipliziert werden, was in Gl. (66) rekursiv berücksichtigt werden kann

$$\bar{c}_{j,k} = (\bar{c}_{j-1,k-1} + \bar{c}_{j-1,k+1}) / \sqrt{2}, \quad (71)$$

so balanciert sich der Rechenbereich auf $a_{\ell \ell}^\ell \simeq \mathcal{O}(10^{-154})$ sowie $a_{\ell \ell}^0 \simeq \mathcal{O}(10^{152})$. Die maximale Auflösung lässt sich daraufhin bis $\ell \simeq 2048$ erhöhen, wobei an das Ergebnis wieder jeweils der Koeffizient $\sqrt{2^{-\ell}}$ anzubringen ist. Für noch höhere Auflösungen kann eine frequenzabhängige Skalierung angebracht werden oder auf die Verwendung eines anderen Datentyps übergegangen werden. In Tab. 7 sind gebräuchliche Formate beschrieben.

Name:	Single	Double	Extnd
kind:	4	8	16
digits:	24	53	113
radix:	2	2	2
minexponent:	-125	-1021	-16381
maxexponent:	128	1024	16384
precision:	6	15	33
range:	37	307	4931

Tabelle 7. Gleitkommazahlenmodel des Intel Fortran90 Compilers, `KIND` gibt die Speicherbreite des Datentypes in Byte, `DIGITS` gibt Auskunft über die Anzahl der Bits innerhalb der Mantisse, `EXPONENT` gibt den Bereich des binären Exponenten, z.B. $2^{1023} \simeq 9 \times 10^{307}$. `PRECISION` legt damit die Anzahl signifikanter Stellen fest, `RANGE` ist das Äquivalent zu `EXPONENT` in der 10er Basis.

Mit dem 16-Byte Datentyp '`Extnd`' gelingt es stabile Startwerte bis $\ell \simeq 16000$ zu berechnen. Allerdings ist die Verwendung dieses Typs mit grösserem Rechen- und Speicheraufwand verbunden.

Durch einige einfache Skalierungen beim Berechnen der Anfangswerte gelingt es die maximale Auflösung für die Berechnungen mit doppelter Genauigkeit auf ca. $\ell \simeq 2700$ zu erhöhen.

⁷ Holmes und Featherstone bezeichnen diese Rekursion als die Vorwärtsrichtung, die von dem Ausgangswert für $m = \ell$ gerechnet wird. Diese Festlegung ist aber rein Subjektiv, daher soll hier weiterhin von einer Umkehrung der Rekursion gesprochen werden.

2.6 Gegenüberstellung von Ergebnissen

An dieser Stelle folgt eine kurze Gegenüberstellung der Ergebnisse für das FFT-Verfahren und für die vollständige und unvollständige Rekursion. Berechnet wurde jeweils die Summe der Legendrefunktionen aller Ordnungen zu einem bestimmten Grad als Synthese aus den Fourier Komponenten. Von dieser wurde darauf die aus einer Standardrekursion berechneten Legendre Funktionen jeweils entlang der Kobreite $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ in Abzug gebracht. Für niedrige Auflösungen $\ell < 30$ stimmen die Ergebnisse weitestgehend überein; vgl. Abb. 9. In höherer Auflösung $\ell > 30$ greift das Abbruchkriterium bei der unvollständigen Rekursion, was als reduzierender Faktor auf die Stellengenauigkeit wirkt, rechte Spalte. In ultrahoher Auflösung (letzte Zeile) muss für das vollständige Rekursionsverfahren auf 16-Byte Zahlen übergegangen werden, daher ist hier bereits kein Ergebnis mehr gezeigt. Für das FFT-Verfahren sind in ultrahoher Auflösung stabile Rekursionsformeln der Legendre Funktionen erforderlichlich.

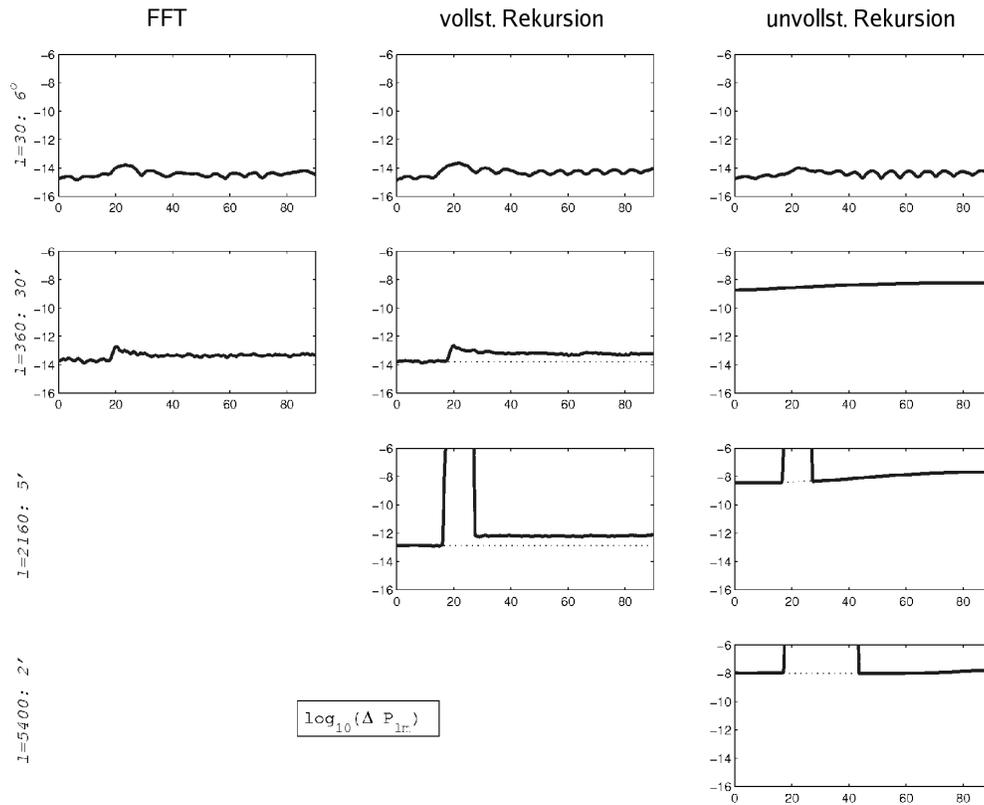


Abbildung 9. Genauigkeit berechneter Legendre Funktionen in verschiedenen Auflösungen aus einer Synthese der Fourier-Komponenten gegenüber der Referenzlösung aus einer Standard-Rekursion der Daten. Die erste Spalte zeigt das Resultat aus expliziter, numerischer Zerlegung der Legendre Funktionen, in der mittleren Spalte sind die Ergebnisse der vollständigen Komponentenrekursion und in der rechten Spalte die unvollständige Rekursion dargestellt. Siehe auch Text für Erläuterungen.

Deutlich zu erkennen ist für bestimmte Breiten ($\theta \simeq 20^\circ$), dass die Funktionswerte dort nicht mehr durch rekursive Gleichungen berechnet werden können, vgl. auch Holmes und Featherstone [HF02]. Die Fourier-Transformierte aus den Komponenten bleibt jedoch stets homogen über den gesamten Definitionsbereich, Abb. 10

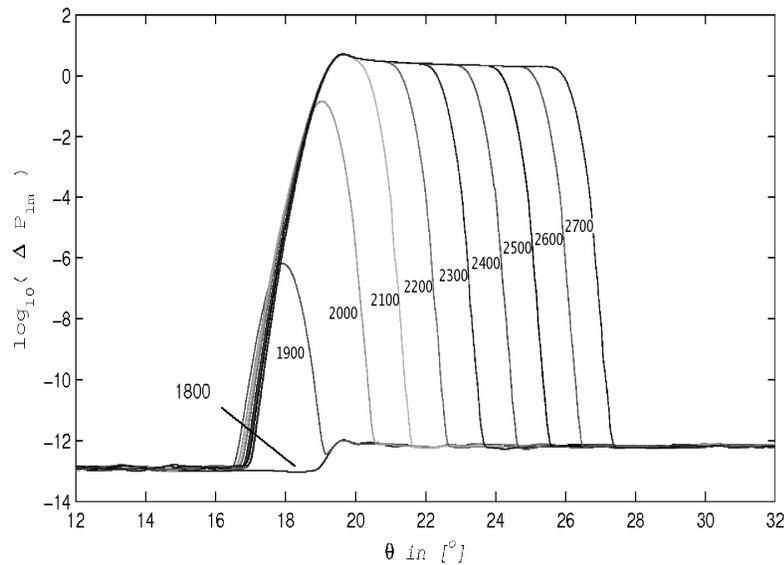


Abbildung 10. Vergleich in ultrahoher Auflösung zwischen der Standard-Rekursion der Legendre Funktionswerte sowie deren Synthese aus Fourierkomponenten, jeweils zu den Graden $\ell = \{1800, \dots, 2700\}$ bei jeweiligen Ordnungen $m = \ell/3$. Der Fehler der direkten Berechnung weitet sich zunehmend aus.

2.7 Fazit

Innerhalb dieses Abschnittes wurden vier grundsätzliche Verfahren zur Berechnung der Fourier Komponenten der Legendre Funktionen diskutiert. Zu unterscheiden ist zwischen der Transformation diskreter Funktionswerte mittels numerischer Integration einerseits oder FFT andererseits, sowie der direkten Rekursion anhand der Fourier Komponenten in unvollständiger oder vollständiger Manier. Erstgenanntes Verfahren bietet eine effektive und einfache Möglichkeit zur Berechnung der Komponentenwerte und ist für Anwendungen in moderater Auflösung völlig hinreichend. Bei dem rekursiven Verfahren kann unterteilt werden in doppelte und einfache Stellen Genauigkeit für die Komponenten, je nachdem welcher Ausgangswert für die Rekursion gewählt wird. Benötigt man hohe Genauigkeiten in ultrahoher Auflösung, so kann man längere Datentypen für die Berechnungen verwenden und damit den Über-/Unterlauf der Exponenten für die Startwerte deutlich hinauszögern. Die Koeffizienten selber lassen sich (z.B. aus Speichergründen) wiederum in doppelter Genauigkeit weiterverarbeiten. Legt man hingegen besonderen Wert auf die Geschwindigkeit der Berechnungen, so bietet die unvollständige Rekursion eine Alternative und ist zudem keiner Entwicklungsbeschränkung nach oben ausgesetzt. Allerdings wird man dort die unteren Grade zunächst vollständig berechnen und erst ab z.B. $\ell = 1000$ auf die unvollständige Form übergehen.

Folgende Punkte seien abschliessend hinsichtlich der Verwendung von Fourier Komponenten der Legendre Funktion gegenüber der direkten, rekursiven Berechnung festgehalten (teilweise nachfolgenden Abschnitte vorweggenommen):

- i. Homogenität der inversen Transformation der Fourier-Komponenten über die gesamte Datendomäne, selbst in ultrahoher Auflösung
- ii. Einfache Berechnung beliebiger Ableitungen durch Filteroperationen
- iii. Effiziente Umwandlung in Inklinationsfunktionen möglich (siehe dazu Abschnitt 3.6)
- iv. Schnelle Berechnung von Funktionswerten entlang von Gitterpunkten (oder Trajektorien) durch Transformation mittels FFT

- v. Stabile Berechnung von Produktsummen, etwa zum Erstellen von empirischen und analytischen Normalgleichungssystemen (siehe Abschnitt 4) möglich
- vi. Sehr geringer Rechenaufwand für die rekursive Berechnung der Fourier-Komponenten; zur Umwandlung in die Funktionswerte muss jedoch von einer inversen Fourier Transformation Gebrauch gemacht werden. Dies ist nur dann mit vertretbarem Aufwand durchführbar, wenn die Daten in regulärer Anordnung vorliegen.
- vii. Bei Verwenden von 16-Byte Datentypen können alle Komponenten (m, k) bis hin zu extrem hohen Graden ($l = 16.000$) berechnet werden.
- viii. bei Verwenden von 8-Byte Datentypen lässt sich eine vergleichbare Obergrenze der Entwicklung wie für die rekursive Berechnung der Funktionswerte unter Einbeziehung bestimmter Skalierungen erreichen.
- ix. Durch Vernachlässigen höherer Frequenzen mit sehr kleinen Amplituden erhält man ein effizientes Verfahren zur Datensynthese mit praktisch keiner Auflösungsbeschränkung.

3 Die schnelle Fourier Transformation auf der Kugel

3.1 Vorbemerkungen

Gegeben sei eine reguläre Funktion auf der Kugel, die in eine harmonische Reihe mittels Kugelfunktionen entwickelt werden soll. Dieser Fall ist äquivalent zu einer einfachen Fourierreihe mittels trigonometrischer Funktionen auf dem Kreis. Es bestehen bereits eine Reihe von Algorithmen zu dieser Umsetzung, vgl. Driscoll und Healy [DH94]; Mohlenkamp [MOH97]; Wic-zorek [WIE]; Schwartztrauber [SCH79b], aber oftmals fehlt die Transparenz bei der Umwandlung der Kugelfunktionsentwicklung in eine direkte 2D Fourierreihe. Durch die Berechnung der Fourier-Komponenten der assoziierten Legendre Funktionen im vorigen Kapitel besteht eine sehr einfache Möglichkeit einer solchen Realisierung. In diesem Kapitel wird die Berechnung der sphärisch-harmonischen Entwicklungskoeffizienten anhand des diskreten 2D Fourier-Algorithmus diskutiert.

3.2 Effiziente Berechnung im Spektralbereich

Die harmonische Entwicklung einer Funktion auf der Kugel an den Positionen (ϕ, λ) , ist gegeben durch Funktionen $\{\bar{P}_\ell^m(\sin\phi)e^{im\lambda}\}$ wobei $\ell \geq |m|$. \bar{P}_ℓ^m sind die assoziierten Legendre Funktionen (vgl. Hobson 1931[HOB55]) und m, ℓ sind ganze Zahlen. Die Transformation $N \times N$ globaler, gleichabständiger Daten in (ϕ, λ) führt zu insgesamt $(N/2)^2$ Koeffizienten. Dies impliziert ebenfalls, dass die Spektralanalyse auf der Kugel generell ein überbestimmtes Problem darstellt, vgl. Schwartztrauber (1979)[SCH79b]. Kombiniert man im Rahmen einer Synthese N^2 Daten mit den Entwicklungskoeffizienten, so benötigt man zumindest $N^4/4$ Berechnungen bei Anwendung der oben genannten Basisfunktionen. Die schnelle 2D Fourier-Entwicklung hingegen erlaubt es mit bereits $(N \log N)^2$ Operationen, also in der Größenordnung $\mathcal{O}(\log^2 N/N^2)$ schneller, eine Lösung zu berechnen, was zu einem beachtlichen Vorteil bei der Berechnung enger Datengitter in hoher spektraler Auflösung führt. Darüberhinaus ermöglicht ein spektraler Ansatz auch unmittelbar die Anwendung von Filteroperationen im Frequenzbereich im Gegensatz zur rechenintensiven Integration im Ortsbereich.

Die Kugelflächenfunktionen stellen eine orthonormale Basis auf der Kugel dar. Zu allen nichtnegativen, ganzen Zahlen ℓ, m mit $|m| \leq \ell$ stellt die Kugelflächenfunktion ein homogenes⁸ Polynom vom Grad l dar. Sie spannt dabei einen Unterraum der Dimension $2\ell + 1$ auf, der invariant unter Drehung der Kugel bleibt.

Die Fourierreihenentwicklung einer Funktion anhand der normierten Kugelflächenfunktionen sei gegeben durch

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{\ell \geq 0} \sum_{|m| \leq \ell} F(\ell, m) \cdot \hat{Y}_\ell^m(\theta, \lambda) \quad (72)$$

wobei $F(\ell, m)$ die Fourier-Koeffizienten, in diesem Fall Kugelfunktionskoeffizienten, entsprechend $\langle f, \hat{Y}_\ell^m \rangle$ sind. Die Kugelfunktionen haben die Faktorisierung, vgl. (A.40)

$$\hat{Y}_\ell^m(\theta, \lambda) = k_{\ell, m} e^{im\lambda} \bar{P}_\ell^m(\cos\theta) \quad (73)$$

8. Dies bedeutet, dass die Laplace-Gleichung erfüllt ist.

mit den normierten, assoziierten Legendre Funktionen $\bar{P}_\ell^m(\cos \theta)$ vom Grad ℓ und der Ordnung m sowie einer Normierungskonstanten $k_{\ell,m}$. Die Berechnung der Fourier Transformaten gliedert sich damit zunächst in eine reguläre Fourier Analyse bezüglich der Längenkoordinate λ und anschliessend einer Integration mit den Legendre Funktionen

$$F(\ell, m) = \left\langle f, \hat{Y}_\ell^m \right\rangle = k_{\ell,m} \int_0^\pi \bar{P}_\ell^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta \left\{ \int_0^{2\pi} e^{im\lambda} f(\theta, \lambda) d\lambda \right\} \quad (74)$$

Allen Verfahren zur diskreten Fourier-Analyse auf der Kugel gemeinsam ist die möglichst effiziente Umgangsweise mit der diskreten Legendre-Transformation. Ausgangspunkt ist dabei Gl (74), in der die Integration über die Längenkoordinate per FFT erfolgen kann und eine anschliessende Projektion des Ergebnisses f auf die Legendre Funktionen folgt, vgl. Driscoll und Healy [DH94]

$$\sum_{k=0}^{2B-1} [f]_k P_\ell^m(\cos \theta_k) = \langle f, P_\ell^m \rangle, \quad \ell = \{|m|, |m+1|, \dots, B-1\}. \quad (75)$$

mit B als spektraler Bandbreite der Funktion f . Danach wird eine schnelle diskrete Cosinus-Transformation angewandt, um das innere Produkt im Frequenzbereich durchzuführen

$$(C_N)_{j,k} = b(j) \cos(j\theta_k), \quad 0 \leq j, k \leq N-1 \quad (76)$$

mit $\theta_k = \pi(2k+1)/(2N)$ und den Normalisierungsfaktoren $b(0) = \sqrt{1/N}$ sowie $b(j) = \sqrt{2/N}$, $j = 1, \dots, N$. Das skalare Produkt lässt sich dann umschreiben, in

$$\langle f, P_\ell^m \rangle = \langle C_N \cdot f, C_N \cdot P_\ell^m \rangle. \quad (77)$$

Der Übergang in den Spektralbereich impliziert, dass nur Terme bis zum Grad ℓ der harmonischen Entwicklung vorhanden sind; somit verringert sich die Anzahl der Multiplikationen des inneren Produktes von dem Bereich der Daten auf die Folge des Spektrums.

3.3 Kugelfunktionen und Fourierreentwicklung auf der Kugel

Die Expansion einer Funktion des Erdschwerepotentials an einem Ort ausserhalb oder unmittelbar an den anziehenden Massen entsprechend der Laplace-Gleichung $\Delta V = 0$ lautet

$$V(\phi, \lambda, r) = \frac{GM}{R} \sum_{\ell} \left(\frac{R}{r} \right)^{\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} c_{\ell m} \cdot \hat{Y}_\ell^m(\phi, \lambda) \quad (78)$$

mit

- R – Radius der Referenzkugel
- GM – Gravitationskonstante der Erde
- $c_{\ell m}$ – komplexe Entwicklungskoeffizienten
- \hat{Y}_ℓ^m – normierte Kugelflächenfunktionen

Die normierten Kugelflächenfunktionen seien gegeben mit

$$\hat{Y}_\ell^m(\phi, \lambda) = \sqrt{(2 - \delta_m^0)(2\ell + 1) \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}} e^{im\lambda} \bar{P}_\ell^m(\sin \phi). \quad (79)$$

Die Koeffizienten erhält man durch globale Integration der Potentialfunktion anhand der Kugelfunktionen

$$c_{\ell m} = \left\langle \frac{V \cdot R^\ell}{GM}, \frac{\hat{Y}_{\ell m}^*(\phi, \lambda)}{r^{\ell+1}} \right\rangle \quad (80)$$

wobei $\hat{Y}_{\ell m}^* = (-1)^m \cdot \hat{Y}_{\ell, -m}$. Durch Spektralanalyse der normierten Legendre Funktion kann jede harmonische Funktion auf der Kugel in eine unendliche Fourierreihe zerlegt werden. Eine kompakte Darstellung erfolgt mittels

$$V(\phi, \lambda, r) = \frac{\text{GM}}{R} \sum_{\ell}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \sum_{k=-\ell}^{\ell} \left(\frac{R}{r}\right)^{\ell+1} e^{i(k\phi+m\lambda)} \cdot Q_{\ell m}^k \quad (81)$$

und den Grössen

$$Q_{\ell m}^k = A_{\ell m}^k \cdot c_{\ell m}, \quad k = -\ell, \dots, \ell. \quad (82)$$

Die einzelnen Legendre Transformationen

$$c_{\ell m} = \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi, m) \cdot \bar{P}_{\ell}^m(\sin \phi) \cos \phi \cdot d\phi \quad (83)$$

als Integrale im Ortsbereich in Gl. (80) werden in der Gl. (82) durch eine direkte Multiplikation der korrespondierenden Spektren ersetzt.

Dies erklärt die Effizienz des Algorithmus, da weiterhin mit 2D FFT expandiert werden kann. Die zunächst noch erforderlichen Modifikationen lauten in einem ersten Schritt, bei dem die unendliche Reihe bis zu einem maximalen Grad L entwickelt wird, sowie der Verwendung ausschliesslich positiver Ordnungen ($0 \leq m \leq \ell$),

$$V(\phi, \lambda, r) = \frac{\text{GM}}{R} \sum_{\ell}^L \sum_{m=0}^L \sum_{k=-\ell}^{\ell} \left(\frac{R}{r}\right)^{\ell+1} q_{\ell m k}^{\text{re}} \cos(k\phi + m\lambda) - q_{\ell m k}^{\text{im}} \sin(k\phi + m\lambda) \quad (84)$$

wobei $q_{\ell m k}^{\text{re}}$ und $q_{\ell m k}^{\text{im}}$ reelle und imaginäre Komponenten gemäss der Zusammenlegung auf positive Ordnungen $m \geq 0$ sind, mit

$$\left. \begin{matrix} q_{\ell m k}^{\text{re}} \\ q_{\ell m k}^{\text{im}} \end{matrix} \right\} = (2 - \delta_m^0) \cdot Q_{\ell m}^k \quad \forall m \geq 0. \quad (85)$$

Die Vereinfachung in Gl. (84) ist hier zulässig, da es sich bei den Funktionswerten V um reelle Grössen handelt. In einem zweiten Schritt wird der Übergang der zweiten Summation in positive Indizes vollzogen. Dazu setzt man

$$V(\phi, \lambda, \bar{r}) = \sum_{m=0}^L \sum_{k=0}^L \text{re} \left\{ Q_{m, +k} \cdot e^{i(k\phi+m\lambda)} + Q_{m, -k} \cdot e^{-i(k\phi-m\lambda)} \right\} \quad (86)$$

mit den pro-/retrograden Koeffizienten $Q_{m, \pm k}$, die sämtliche Grade der Kugelfunktionsentwicklung, die zu einer bestimmten Ordnung m gehören, konzentrieren. Gemeinsam mit einem konstanten Radius \bar{r} erhält man damit für die Koeffizienten

$$Q_{m, \pm k} = \frac{\text{GM}}{R} \sum_{\ell}^L \left(\frac{R}{\bar{r}}\right)^{\ell+1} (2 - \delta_m^0) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\delta_k^0\right) \cdot Q_{\ell m}^k \quad \forall m \geq 0 \quad (87)$$

Die Koeffizienten $Q_{m, \pm k}$ werden auch als verknüpfte Harmonische oder *'lumped coefficients'* bezeichnet, da sie entsprechende Amplituden gleicher Ordnungen linear miteinander verbinden.

Bei Anwendungen in der dynamischen Satellitengeodäsie tritt noch ein weiterer Index aufgrund der Abweichung von einer kreisförmigen Bahn auf, vgl. Kaula [KAU66]. Die Bahnexzentrizität lässt sich auch in eine weitere Fourier-Reihe entwickeln, mit der die hier definierten Koeffizienten überlagert werden können, Lelgemann und Cui [LC99], Mai [MAI04]. Eine weitere Zerlegung der Gl. (85) anhand goniometrischer Gleichungen führt dann zu, z.B. Karrer [KAR00]

$$\begin{aligned} V(\phi, \lambda, \bar{r}) = & \sum_{m=0}^L \sum_{k=0}^L c c(m, k) \cdot \cos k\phi \cdot \cos m\lambda + \\ & s s(m, k) \cdot \sin k\phi \cdot \sin m\lambda + \\ & s c(m, k) \cdot \sin k\phi \cdot \cos m\lambda + \\ & c s(m, k) \cdot \cos k\phi \cdot \sin m\lambda. \end{aligned} \quad (88)$$

mit dem Koeffizientenschema

$$\begin{aligned}
cc(m, k) &= +q_{m,+k}^{\text{re}} + q_{m,-k}^{\text{re}} \\
ss(m, k) &= -q_{m,+k}^{\text{re}} + q_{m,-k}^{\text{re}} \\
sc(m, k) &= -q_{m,+k}^{\text{im}} + q_{m,-k}^{\text{im}} \\
cs(m, k) &= -q_{m,+k}^{\text{im}} - q_{m,-k}^{\text{im}},
\end{aligned} \tag{89}$$

das zum Zweck der Daten-Synthese mittels FFT unmittelbar genutzt werden kann. Darüberhinaus ist deren Bestimmung aber auch durch eine Ausgleichung durchführbar, da die einzelnen Parametergruppen in regulärer Annordnung unkorreliert sind. Siehe dazu auch Kap. 3.7, in dem Schweredaten entlang Satellitenbahnen mit Rasterdaten auf der Erde (z.B. über den Polargebieten) verknüpft werden. Die Kombination von jeweils regulär angeordneten Daten stellt für eine Auswertung im Spektralbereich anhand der LC keine Schwierigkeit dar.

3.3.1 Die diskrete Fourier-Transformation

Jedes globale, gleichabständig⁹-diskrete Datenfeld einer harmonischen Funktion auf der Kugel kann über eine planare 2D Fourier-Zerlegung in Kugelfunktionskoeffizienten umgewandelt werden. Dabei wird die $(N \times N)$ -Domäne der Datenpunkte einem $(m \times k)$ -Bereich der Koeffizienten zugeordnet bzw. umgekehrt.

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^{N \times N} &\longrightarrow \mathbb{R}^{m \times k} \\
f(\phi, \lambda) &\longmapsto F(k, m)
\end{aligned}$$

Die Fourier-Transformation findet dabei sukzessive entlang Breiten- sowie Längenkreisen statt, dem topologischen Produkt zweier (Voll-)Kreise. Der Ortsbereich der 2D Fourier-Transformation entspricht daher der Fläche eines Torus, vgl. Hoffmann-Wellenhof (1986)[HWM86]; Sneeuw [SNE00]. In diskreter Form erhält man die entsprechende Referenzfläche durch eine Verebnung der Kugel auf ein Rechteck, Spiegelung an den Polen¹⁰ sowie der Verschiebung um 180°, sodass jeweils gegenüberliegende Kugelhälften aneinander gefügt würden. Die verebnete Form entspricht damit im Grunde einem Zylinder, dessen beide Enden ($\lambda \in [0^\circ, 360^\circ]$) sich nahtlos aneinanderfügen.

Die diskrete Fourier-Transformation $\mathcal{F}[f]$ ist gegeben durch

$$F(m, k) = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^N f(\phi, \lambda) \cdot e^{-i2\pi(\frac{vm}{N} + \frac{uk}{N})} \quad \begin{array}{l} v = 0, 1, \dots, N-1 \\ u = 0, 1, \dots, N-1 \end{array} \tag{90}$$

mit

$$\begin{aligned}
\phi &= \phi_0 + u \cdot \Delta\phi \\
\lambda &= \lambda_0 + v \cdot \Delta\lambda;
\end{aligned} \tag{91}$$

N definiert die Anzahl der Gitterpunkte in λ - bzw. ϕ - Richtung. Der Divisor N wird wahlweise auch erst im Zuge der Synthese \mathcal{F}^{-1} angebracht. Zunächst sei der FFT-Operator mit $0 \leq \lambda < 2\pi$ vorgenommen, indem entlang jeder Breite

$$f(\phi, m) = \mathcal{F}[f(\phi, \lambda)] \cdot N^{-1} \tag{92}$$

berechnet wird, sowie jeweils die Zusammenlegung auf prograde Ergebnisse mit $0 \leq m \leq N/2$ und Trennung der realen sowie imaginären Anteile

$$\begin{aligned}
C(\phi, m) &= (2 - \delta_m^0) \cdot f^{\text{re}}(\phi, m) \\
S(\phi, m) &= -2 \cdot f^{\text{im}}(\phi, m).
\end{aligned} \tag{93}$$

Erneute Anwendung des FFT-Operators über den Bereich $-\pi < \phi \leq \pi$ führt dann zu

$$\begin{aligned}
CC(k, m) &= \mathcal{F}[C(\phi, m)] \cdot N^{-1} \\
SS(k, m) &= \mathcal{F}[S(\phi, m)] \cdot N^{-1}.
\end{aligned} \tag{94}$$

9. An dieser Stelle ist von „gleichabständig“ im Sinne von Winkeleinheiten gesprochen.

10. Die Pole sind hier als konstante Breiten von 0° oder 180° sowie variabler Länge $[0^\circ - 360^\circ]$ aufzufassen.

Nach einer neuerlichen Zusammenlegung auf $0 \leq k \leq N/2$ und Aufspalten in reelle und imaginäre Grössen erhält man schliesslich

$$\begin{aligned} cc &= (2 - \delta_k^0)CC^{\text{re}} \\ cs &= -2CC^{\text{im}} \\ sc &= (2 - \delta_k^0)SS^{\text{re}} \\ ss &= -2SS^{\text{im}} \end{aligned} \quad (95)$$

und kann damit die Koeffizienten der Gl. (90), sofern den Daten dasselbe Modell zugrunde liegt, wiederherstellen.

Anmerkung 2. Es können auch beliebig versetzte Gitterpunkte aus den Konstanten berechnet werden, indem die Phase des Spektrums zeitverschoben wird. Unter Berücksichtigung von Gl. (87) bezüglich der Kombination der LC erhält man

$$\begin{aligned} F(k, \lambda) &= \text{re } \mathcal{F}^{-1}[cc - i \cdot cs] - i \text{re } \mathcal{F}^{-1}[sc - i \cdot ss] \\ \tilde{F}(k, \lambda) &= e^{i2\pi k/N \cdot a} F(k, \lambda), \\ f(\phi, \lambda) &= \text{re } \mathcal{F}^{-1}[\tilde{F}(k, \lambda)] \end{aligned} \quad (96)$$

mit a als dem Parameter der Versetzung in Gittereinheiten, sowie in analoger Weise für λ .

Anmerkung 3. Im Falle der Transformation bei ungeradem maximalen Grad L entsteht, bedingt durch die Referenzfläche, stets ein Gitter ohne die Punkte $\phi = \pi/2$. Um diese dennoch berechnen zu können, ist von der Phasenverschiebung des Spektrums mit $a = -1/2$ Gebrauch zu machen, um entsprechende Werte zu erzeugen bzw. vor der Umwandlung in SH-Koeffizienten umgekehrt anzubringen.

Anmerkung 4. Da der FFT-Operator stets eine 1:1-Relation zwischen Eingangs- und Ausgangssignal herstellt, sind zur Berechnung besonders engmaschiger Datengitter höhere Frequenzen mit Null anzusetzen und jeweils mit zu transformieren (*zero-padding*).

Anmerkung 5. Wegen des symmetrischen Ausgangssignals bei realen Eingangsdaten verringert sich die maximale Auflösung bei paritärem maximalen Grad L um eine imaginäre Komponente. Daher können in Gl. (93) keine Koeffizienten $ss(k, m)$, $k = L$ bestimmt werden. Dies bedeutet, dass sich die entsprechenden SH-Koeffizienten $C_{\ell m}$, $S_{\ell m}$ mit $\ell = L$ sowie gerader Ordnung zu Null ergeben und daher in den Testrechnungen nicht mit angesetzt werden können.

3.3.2 Die lineare Transformation der 2D Fourier-Konstanten in SH-Koeffizienten

Die Abbildung der verknüpften Harmonischen oder 2D Fourier-Konstanten auf die Kugelfunktionskoeffizienten ist ein überbestimmtes System. Eine lineare Inversion kann dazu angewendet werden, um die zugrundeliegenden SH-Koeffizienten zu bestimmen. Es ergibt sich ein blockweise diagonales System. Konkret bedeutet dies, dass bei Umwandlung der Fourier-Konstanten in die Entwicklungskoeffizienten der Kugelfunktionen keinerlei Korrelationen hinsichtlich verschiedener Ordnungen m bestehen. Ausgehend von den pro-/retrograden Konstanten $Q_{m, \pm k}$, die sich aus

$$Q_{m, \pm k} = \frac{cc \mp ss}{2} + i \frac{sc \pm cs}{2} \quad (97)$$

ergeben, lässt sich für jede Ordnung m ein System der linear miteinander kombinierten Grade auflösen. Der Zusammenhang sei folgendermassen gegeben

$$\left. \begin{matrix} q_{m, \pm k}^{\text{re}} \\ q_{m, \pm k}^{\text{im}} \end{matrix} \right\} = \sum_{l_{\text{min}}}^L \left(\lambda^{\ell} \frac{\text{GM}}{R^a} \left(\frac{R}{\bar{r}} \right)^{\ell+a} (2 - \delta_m^0) \right) A_{\ell m}^k \left\{ \begin{matrix} C_{\ell m} \\ S_{\ell m} \end{matrix} \right\}, \quad a = 1, 2, 3 \quad (98)$$

Für die rechte Seite setzt man nun jeweils die Sequenz $z_m^k = \{Q_{m,-k}, Q_{m,+k}\}$ an, wobei ($k | 0 \leq k \leq L$). Die lineare Matrix zu einer bestimmten Ordnung m besteht aus den Spektralkoeffizienten der Legendre Funktionen $A_{\ell,m}^k$ bzw., bei Verwendung eines inklinierten Systems, den Inklinationsfunktion $F_{\ell,m}^k$ mit $m \leq \ell \leq L$ und nimmt damit eine trapezoide Form an. Die Koeffizienten kann man durch eine vermittelnde Ausgleichung zurückschätzen, vlg. auch Colombo [COL81]; Wagner [WAG83]; Koop [KOO93]; Sneeuw [SNE00].

$$r_{\ell m} = (A_{\ell m}^k P A_{\ell m}^k)^{-1} A_{\ell m}^k P z_m^k \quad \text{wobei } m \leq \ell \leq L \quad (99)$$

mit einer a priori Kofaktorenmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \sigma_{m,-L}^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_{m,+L}^2 \end{pmatrix}. \quad (100)$$

Abschliessende Division der $r_{\ell m}$ durch die entsprechenden Sensitivitätskoeffizienten aus Gl. (98) vervollständigt die Wiederherstellung der SH-Koeffizienten

$$c_{\ell m} = r_{\ell m} \cdot \left(\lambda \frac{\text{GM}}{R^a} \left(\frac{R}{\bar{r}} \right)^{\ell+a} (2 - \delta_m^0) \right)^{-1}, \quad a = 1, 2, 3. \quad (101)$$

Neben der Absenz jeglicher Korrelation zwischen unterschiedlichen Ordnungen sind nur Koeffizienten mit Gradn gleicher Parität untereinander korreliert und ebenso besteht kein Zusammenhang zwischen realen und imaginären Grössen, vgl. Lelgemann und Cui [LC99], sodass sich die zu lösenden Gleichungssysteme vor diesem Hintergrund zerfallen. Für zeitgemässe Computersysteme sind die Berechnungen bezüglich des Umfangs problemlos durchführbar.

Anhand simulierter Erdschwerefeldparameter wurde ein globales Datengitter von $5' \times 5'$ Schwereanomalien mittels der FFT – Methode bis $L=2160$ generiert und mit dem Resultat nach Anwendung der Standardrekursionen verglichen; siehe Abb. 11. Der Fehler in den Breiten von $\simeq 20^\circ - 30^\circ$ fällt durch die Abnahme der Leistungsdichte der Erdschwerefeldparameter kaum auf, nimmt aber in Summe bereits Werte bis zu 1 mgal an. Für ultrahoch auflösende Schwerefelder ist daher die Anwendung der FFT-Methode sinnvoll; Alternativ kann auch auf die stabile Berechnung der Legendre Funktion nach Holmes & Featherstone [HF02] bis ca. $\ell = 2800$ übergegangen werden.

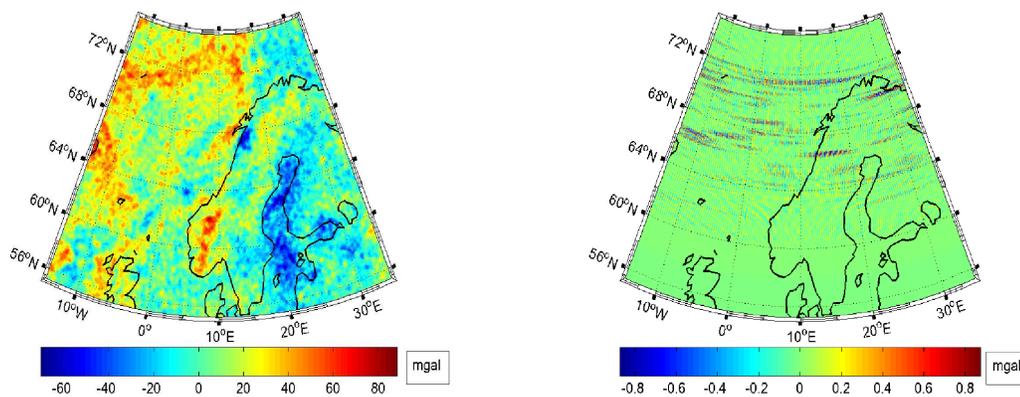


Abbildung 11. Schwereanomalien aus einem synthetischen Modell (Novák et al. 2001[NOV01]), berechnet bis $L = 2160$ (links), sowie Differenz gegenüber der Berechnung mit Legendrefunktionen aus Standardrekursionen, (Shbundle, Tsoulis und Sneeuw [TS98])

3.4 Anwendungen in der Satellitengeodäsie

In der Satellitengeodäsie wird das Verfahren der linearen Verknüpfung der Entwicklungskoeffizienten der Kugelfunktionen zur Auswertung im Spektralbereich bereits seit längerer Zeit angewendet. Im Folgenden soll untersucht werden, inwiefern ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen der globalen Datenverteilung auf einem geographischen Raster und der zustandekommenden Überdeckung einer in sich geschlossenen, gegenüber dem Äquator geneigten Bahnspur besteht.

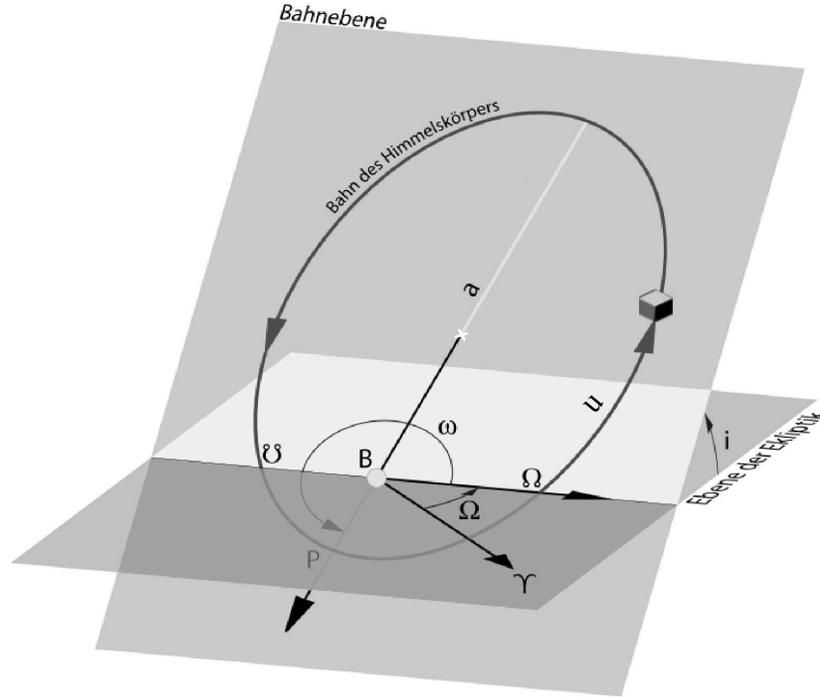


Abbildung 12. Skizze der Bahnelemente, mit Argument des Perigäums ω , Frühlingspunkt γ , aufsteigendem Knoten Ω , Inklination i , argument der Breite u und grosser Halbachse a .

Das Erdschwerefeldpotential, dargestellt in Bahnelementen, sei gegeben mit

$$V = \frac{GM}{R} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{\ell+1} F_{\ell m p}(I) \begin{bmatrix} C_{\ell m} \\ -S_{\ell m} \end{bmatrix}_{\ell-m \text{ ungerade}}^{\ell-m \text{ gerade}} \cos \psi_{km} + \begin{bmatrix} S_{\ell m} \\ C_{\ell m} \end{bmatrix}_{\ell-m \text{ ungerade}}^{\ell-m \text{ gerade}} \sin \psi_{km} \quad (102)$$

mit den Inklinationsfunktionen $F_{\ell m p}(I)$, den Entwicklungskoeffizienten des Erdschwerefeldes $C_{\ell m}$, $S_{\ell m}$, dem Masstab GM/R sowie der Reduktion hinsichtlich der Bahnhöhe $(R/r)^{\ell+1}$ gegenüber der Referenzkugel mit Radius R . Die Phasen lauten

$$\psi_{km} = ku + m(\Omega - \theta_g) \quad (103)$$

mit dem aufsteigenden Bahnknoten Ω , dem Argument der Breite u und dem Stundenwinkel von Greenwich θ_g . Vor allem im Zusammenhang mit der Satellitenmission GOCE machen die dabei angewandten, iterativen Lösungsverfahren im Frequenzbereich von einer Vereinfachung auf eine radiale Kreisbahn Gebrauch. Dabei geht die Reduktion der Bahnhöhe in eine Konstante über und die Summationen lassen sich vertauschen. Wegen der Annahme eines nahezu kreisförmigen Nominalorbites¹¹ wird der Einfluss der Bahnexzentrizität e der Ordnung $\mathcal{O}(e^q)$, mit $q = \pm 1, 2, \dots$

vernachlässigt; dieser kann jedoch in Form einer Linearisierung im Zuge der Datenauswertung iterativ korrigiert werden. Weitaus schwieriger wiegt hingegen bei dem Verfahren im Frequenzbereich die Notwendigkeit, dass die Daten gleichabständig erfasst werden müssen; Datenlücken müssen asymptotisch approximiert werden und durch einen möglichst plausiblen Wert iterativ ersetzt werden, da die Zeitreihe zur Transformation jeweils lückenlos vorliegen muss. Bei Anwendung der FFT stimmen überdies die Analyse-Frequenzen mit dem tatsächlichen physikalischen Signal nicht unbedingt direkt überein, da sie willkürlich von der Länge der Zeitreihe bzw. der gewählten Wiederholungsperiode der Referenzbahn abhängen. Denkbar wäre daher die Verwendung eines Optimierungsverfahrens zur Bestimmung der Frequenzen nach Mautz [MAU00]. Die Bestimmung der *lumped coefficients* (LCs) aus Satellitendaten anhand der Fourierkoeffizienten einer Zeitreihe ist daher stets ein approximatives Verfahren, das durch iterative Methoden verbessert werden kann, verschiedene Autoren sprechen auch von einem semi-analytischen Verfahren, Sneeuw [SNE00].

Entsprechende Lösungsschemata gehen zurück auf Colombo [COL81]; Wagner [WAG83]; Schrama [SCH89]; Rummel [RVGK+93] und in jüngerer Zeit Sneeuw [SNE00]; Preimesberger et al. [PRE03]; Ditmar und Klees [DK02]. In Cui und Lelgemann [CL03] werden die Verknüpfungskoeffizienten nicht auf der Grundlage einer FFT bestimmt, sondern durch analytische Umformungen.

Zur Transformation ist das Spektrum entlang der Bahn in ähnlicher Weise wie in Gl. (88) auf die Koeffizienten abzubilden. Die geographischen Koordinaten (ϕ, λ, r) werden dabei in Bahnelemente überführt, die auch dynamische Aspekte der Bewegung berücksichtigen. Dies kann zweckmässig über kartesische Koordinaten und deren zeitliche Änderungen erfolgen, $X \in \mathbb{R}^4; Y, Z \in \mathbb{R}^6$

$$\begin{array}{ccc} X \longrightarrow & Y \longrightarrow & Z \\ (\phi, \lambda, r, t) \longmapsto & (x^1, x^2, x^3, \dot{x}^1, \dot{x}^2, \dot{x}^3) \longmapsto & (\dot{r}, G, H; R, u, \Omega) \end{array} \quad (104)$$

Die vereinfachte Gleichung bezüglich der Bestimmung der Potentialfunktion aus radialen Orbitdaten lautet in Analogie zu Gl. (88)

$$\begin{aligned} V(u, \Lambda, \bar{r}) = \sum_{m=0}^L \sum_{k=0}^L & cc(m, k) \cdot \cos ku \cdot \cos m\Lambda + \\ & ss(m, k) \cdot \sin ku \cdot \sin m\Lambda + \\ & sc(m, k) \cdot \sin ku \cdot \cos m\Lambda + \\ & cs(m, k) \cdot \cos ku \cdot \sin m\Lambda. \end{aligned} \quad (105)$$

wobei $u =$ Argument der Breite und $\Lambda = \Omega - \theta_g$, die Länge des aufsteigenden Bahnknotens gegenüber Greenwich bezeichnen. Die Fourier-Komponenten der Legendre Funktionen müssen dabei in das System der Kugelfunktionen überführt werden, was zu Inklinationsfunktionen führt

$$A_{\ell m}^k \mapsto F_{\ell m}^k(I), \quad (106)$$

sodass die Koeffizienten $q_{\ell m}^k$ berechnet werden anhand

$$q_{\ell m}^k = F_{\ell m}^k(I) \cdot c_{\ell m}. \quad (107)$$

Um die Daten ferner in Form einer Zeitreihe des Arguments

$$\psi = \psi^0 + t \cdot \dot{\psi} \quad \text{mit} \quad t = j\Delta t, \quad (108)$$

auswerten zu können, entsprechend

$$V(u, \Lambda, \bar{r}) = \sum_{m=0}^L \sum_{k=-L}^L \text{re} \{ Q_{m,k}(I) \cdot e^{i\psi} \}, \quad (109)$$

11. Unter Nominalorbit lässt sich eine Bewegung um eine idealisierte, zentrale Masse verstehen, die damit von einer kreisförmigen Bahn bis hin zu einer rotierenden Keplerellipse definiert ist.

ist das Verhältnis der beiden Kreisfrequenzen, ω_o des Satelliten gegenüber ω_e , also der Rotation der Erde, zu erwägen. Ausgehend von dem Argument in Gl. (103)

$$\psi = ku + m\Lambda \quad (110)$$

sowie den zeitlichen Änderungen

$$u = u^0 + t \cdot \omega_o \quad \text{sowie} \quad \Lambda = \Lambda^0 + t \cdot \omega_e \quad (111)$$

ergibt sich für die Frequenz

$$\dot{\psi} = k \cdot \omega_o + m \cdot \omega_e. \quad (112)$$

Die folgende Diskussion findet sich bei Schrama [SCH89]; Rummel et al. [RVGK+93]; Sneeuw [SNE00] und erläutert den gegebenen Zusammenhang. Mit $\omega = \frac{2\pi}{p}$, wobei p die Periodendauer für eine Umrundung angibt, folgt bezogen auf die Missionsdauer für die sich die Bahnspur wiederholt, d.h. $T = N \cdot p$, für die entsprechenden Kreisfrequenzen

$$\begin{aligned} \omega_e &= -N_e \frac{2\pi}{T} \\ \omega_o &= N_o \frac{2\pi}{T} \end{aligned} \quad (113)$$

wobei N jeweils die Anzahl der Vollkreise einmal der Erde (N_e) und im anderen Fall des Orbits (N_o) angibt. Es folgt aus Gl. (112) sowie mit $N = T/\Delta t$ für das Argument der Zeitreihe

$$\begin{aligned} \psi &= \psi^0 + (kN_o - mN_e) \frac{2\pi}{T} \cdot j \Delta t \\ &= \psi^0 + n \frac{2\pi N_o}{N} \left(k - m \frac{N_e}{N_o} \right), \quad n = 1, \dots, N \\ &= \psi^0 + n \Delta u \cdot r \end{aligned} \quad (114)$$

mit ψ^0 als beliebiger Anfangsphase, sowie

$$\Delta u = \frac{2\pi N_o}{N} \quad (115)$$

$$r = k - m \frac{N_e}{N_o} \quad (116)$$

als der Schrittweite Δu entlang der Umlaufbahn sowie der Frequenzzahl r . Letztere kann bei entsprechender Wahl der Wiederholungsperiode und der maximalen Auflösung der Kugelfunktionsterme sowie der Anzahl der Datenpunkte wiederum so gewählt werden, dass sie stets ganzzahlige Werte annimmt. Damit lässt sich die Gl. (109) umformulieren in

$$V(u, \Lambda, \bar{r}) = \sum_{k=0}^L Q_{mk} e^{i2\pi n(kN_o - mN_e)} + Q_{m,-k} e^{-i2\pi n(kN_o + mN_e)} \quad (117)$$

sowie aufgrund der Zyklizität des Spektrums

$$\begin{aligned} 0 < r < r_c &\leftrightarrow 1 \leq n \leq N/2 - 1 \\ -r_c < r < 0 &\leftrightarrow N/2 + 1 \leq n \leq N - 1 \\ r_c = -r_c &\leftrightarrow n = N/2 \end{aligned} \quad (118)$$

mit $r_c = L(N_o - N_e)$ als der maximalen Frequenz, auf eine einfache Fourierreihe zurückführen

$$V(u, \Lambda, \bar{r}) = \sum_{r=0}^{N-1} \text{re} \left\{ Q_r \cdot e^{i2\pi nr/N} \right\}. \quad (119)$$

Folglich lässt sich auch das Signal wiederum im Rahmen einer Analyse in seine Fourier-Koeffizienten zerlegen. Häufig findet man diesbezüglich auch die Darstellung,

$$g = \sum_{\dot{\psi}(m,k)} C_{\dot{\psi}} \cos \dot{\psi}t + S_{\dot{\psi}} \sin \dot{\psi}t \quad (120)$$

mit den Verknüpfungen

$$(C_{\psi}, S_{\psi}) = \sum_{l=l_{min}}^{l_{max},k} H_{\ell m}^k \left[\begin{array}{c} \left(-C_{lm}, -S_{lm} \right) \sin \psi + \left(S_{lm}, -C_{lm} \right) \cos \psi \\ \ell - m \text{ gerade} \\ \ell - m \text{ ungerade} \end{array} \right] \quad (121)$$

sowie den Sensivitätskoeffizienten $H_{\ell m}^k$. Die Grösse g kann dabei eine beliebige Funktion der harmonischen Erdschwerefeldkoeffizienten sein, bzw. auch Grössen, die zu diesen in linearem Zusammenhang stehen, wie GRACE SST- ll Daten, vgl. Wagner [WAG87] für eine Theorie erster Ordnung, bzw. Cui und Lelgemann [CL03].

3.5 Inverse Abbildung – Signalanalyse

Damit die Abbildung bijektiv und damit umkehrbar wird, gilt es jeweils nur einen der Verknüpfungskoeffizienten der Kugelfunktionen auf die Koeffizienten der einfachen Fourierreihe abzubilden, mit $Q_{m,\pm k} \in X_{2D}$, $Q_r \in X_{1D}$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{N \times N} &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ X_{2D} &\longrightarrow X_{1D} \\ Q_{m,\pm k} &\longmapsto Q_r \text{ (injektiv)} \end{aligned} \quad (122)$$

sowie weiterhin, dass umgekehrt auch sämtliche Koeffizienten der einfachen Fourierreihe wiederum in das Spektrum der Verknüpfungskoeffizienten gelangen,

$$X_{1D} \longrightarrow X_{2D} \quad (\text{surjektiv}). \quad (123)$$

Dies bedeutet, dass bei Auswertung einer langen Datenreihe zwangsläufig hochfrequentes Signalspektrum in die hohen Auflösungen der linearen 2D Verknüpfungskoeffizienten abgebildet wird. Da hinsichtlich des SNR-Verhaltens realer Messungen ein maximaler Entwicklungsgrad für das Ergebnisspektrum festgelegt werden muss, geht somit zum Teil vorhandenes Signal verloren; man spricht von einer Unterparametrisierung¹² des Modells.

Von verschiedenen Autoren wird das maximale Auflösungsvermögen hinsichtlich Datenanzahl und Wiederholungsraten angegeben. Im Zuge dieser Arbeit ergab sich, dass zwar alle Koeffizienten zu einem maximalen Grad $L < N_o$ rechentechnisch bestimmt werden können, sofern die Länge der Datensequenz zumindest $N > L \cdot (2N_o + N_e)$ beträgt, es kommt allerdings zu einer Überlagerung der Frequenzen $\ell < \frac{1}{2} N_o$ mit denen höherer Grade, $\ell > \frac{1}{2} N_o$, siehe dazu Aliasing-Effekte, Abschnitt ?.

Für eine weitere Diskussion hinsichtlich der Transformation der beiden Spektren siehe Schrama [SCH89]; Sneeuw [SNE00] sowie für die Behandlung von Datenlücken nebst der Auswertung partieller Datensätzen, z.B. Pail et al. [PPWD01].

Unter Festlegung der Wiederholungsperiode und der Bahninklination können Zeitreihen etwa zur Missionsplanung erzeugt und anschliessend zurückgeschätzt werden. Es treten allerdings für höhere Auflösungen ($L > 200$) vermehrt Instabilitäten aufgrund des Pol-Lochs auf, d.h. wenn $I \neq \pi/2$.

3.6 Konditionierung der Gleichungssysteme

Eine schwache Konditionierung der blockweisen Gleichungssysteme im vorherigen Abschnitt kann für niedrige Ordnungen beobachtet werden. Diese betrifft (je nach Grad der maximalen Auflösung) vor allem die Ordnungen $m < 20$ und folglich insbesondere auch die Lösungen der

12. Diese Unterparametrisierung wird gelegentlich auch als 'spectral leakage' bezeichnet; eine Art Überlagerung hochfrequenten Signalanteils in niederen Frequenzen, da das Modell diese nicht berücksichtigt. Umgekehrt sei ebenfalls angemerkt, dass es im Grunde bei einer Fourier-Analyse zu keiner Überparametrisierung kommen kann: Einerseits besagt die Bessel'sche Ungleichung, dass die Signalamplituden mit zunehmender Frequenz stets abnehmen müssen, zum anderen handelt es sich bei der Fourier-Analyse immer um eine asymptotisch konvergente Reihe im Unendlichen.

Parameter der niederen Grade $\ell < 20$ (vgl. Koop [KOO93]; Bouman [BOU98]; Kusche [KUS02]; Sneeuw und Van Gelderen [SVG97]). So können die Systeme etwa dadurch stabilisiert werden, dass a priori Erwartungswerte für die Unbekannten, gemeinsam mit ihren Kovarianzen eingeführt werden. Das erweiterte Gleichungssystem nimmt danach die Gestalt an

$$\begin{aligned} x &= N^{-1}(A^T P l + Q x') \\ N &= A^T P A + Q \end{aligned} \quad (124)$$

wobei x' die ursprünglichen Parameter sind und Q die zugehörigen Kovarianzen enthält. Man spricht in diesem Zusammenhang von Regularisierung, da neben der Minimierung der Quadratsumme der Residuen nunmehr auch die Quadratsumme der Unbekannten minimiert wird

$$(Ax - l)P(Ax - l) + x^T Q x \longrightarrow \min. \quad (125)$$

Dabei können die ursprünglichen Parameter auch zu Null gesetzt werden und die Kovarianzmatrix beispielsweise aus Gradvarianzen eines Modells abgeleitet werden, z.B. nach dem Kaula- oder Tscherning/Rapp Modell. Gleichzeitig ist es aber sinnvoll den Einfluss der Regularisierung auf die Erwartungswerte abzuschätzen. Die Größenordnung dieses Einflusses ergibt sich nach Xu [XU]

$$Bia(x_b) = -N^{-1} Q x \quad (126)$$

wobei die Genauigkeit der a posteriori Fehlerschätzung um den Einflusstern erweitert werden muss. Auf diese Art erhält man den mittleren quadratischen Fehler (MSE) für die Parameter

$$MSE(x_b) = N^{-1} - N^{-1} Q N^{-1} + Bia(x_b) Bia(x_b)^T \quad (127)$$

der nach Untersuchungen durch Koop [KOO93] allerdings ein sehr konservatives Bild von der Genauigkeit der Fehlerabschätzung zeichnet.

Eine weitere Möglichkeit, die stärker auf die Ursache der Instabilität abzielt, ist die Reduktion der Parameter. Betrachtet man dazu den Datenbereich, der durch eine 2D Fourier-Transformation auf ein gleichabständiges Gitter entsteht, jedoch nach Inklination der Basisfunktionen, d.h. $A_{\ell m}^k \mapsto F_{\ell m}^k$ so ergibt sich eine (Torus-)Fläche ohne den Informationsgehalt der Polregionen. Dies erklärt die Ursache der Instabilität aus dem physikalischen Sachverhalt. Daher ist es im Grunde auch nicht möglich, das fehlende Spektrum kompromislos wiederherzustellen: es kommt zu der schlechten Konditionierung der Gleichungssysteme.

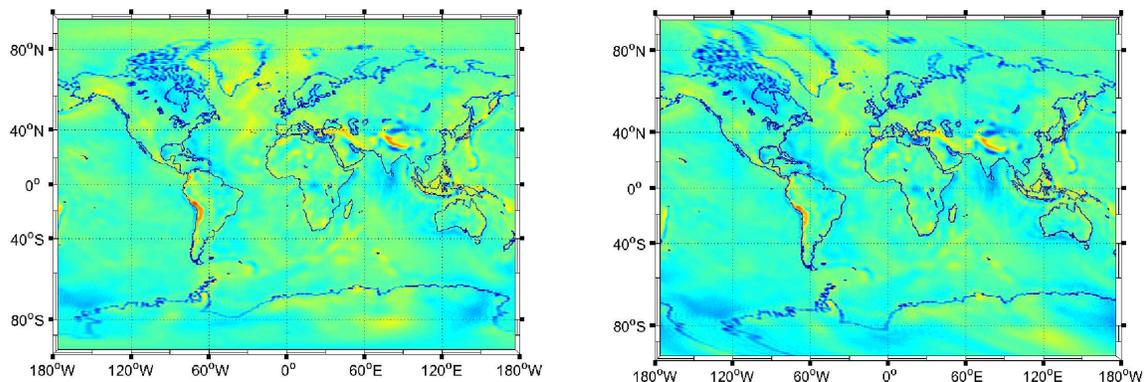


Abbildung 13. Vertikale Gradiometerdaten auf Satellitenhöhe (250 km), links mit $I = 90^\circ$, rechts $I = 96.5^\circ$. Die Polkappen als Streifen von 6.5° in nördlicher bzw. südlicher Ausdehnung fehlen vollständig.

Metzler und Pail [MP05] erzeugen daher eine Regularisierungsmatrix aus analytischen Produkten der Kugelflächenfunktionen, reduziert auf die beiden Polflächen, siehe dazu auch Hwang [HWA91].

Durch die hohe räumliche Verdichtung weniger tesseraler sowie der sektoriellen Kugelflächenfunktionen innerhalb der Polgebiete, konzentriert sich der fehlende Informationsgehalt am stärksten in den zonalen bzw. nahe zonalen Termen. Diese sind damit am stärksten bei der Parameterschätzung betroffen und destabilisieren überdies die Schätzung aller übrigen Grade zu einer bestimmten Ordnung. Verwendet man an dieser Stelle eine empirische Kovarianzfunktion zur Regularisierung, so werden dadurch zunehmend höhere Grade beeinträchtigt, der Schätzwert ist überdies immer auch verzerrt (*biased*), vgl. Kusche und Klees [KK02]. Durch Elimination der unteren Grade aus dem Ausgleichungsmodell bzw. der Einführung von Bedingungsgleichungen lässt sich eine deutliche Stabilisierung herbeiführen. Dies bedeutet, externe Schwerfeldparameter zur Reduktion mit anzusetzen oder als Pseudobeobachtungen einzuführen. In Abb. 14 wird die Abhängigkeit der Konditionierung vom maximalen Grad der Auflösung untersucht. Mit steigender Auflösung nimmt die Instabilität der untersten Ordnungen deutlich zu, Tab. 8. Die Werte gelten für eine Simulation frei von Rauschen oder Unterparametrisierung.

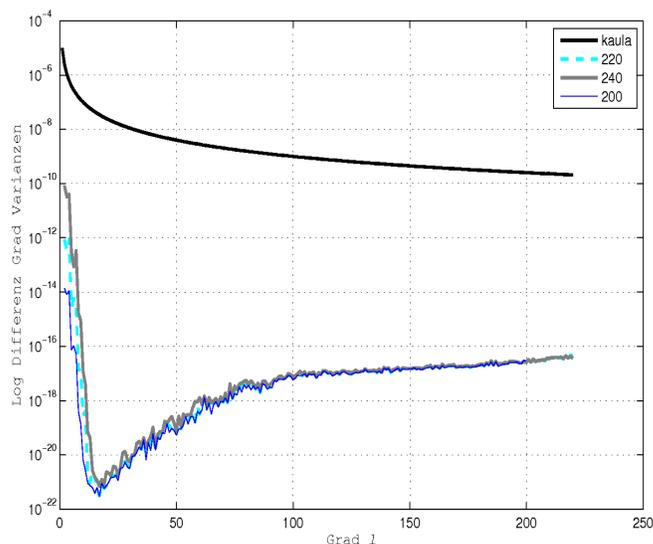


Abbildung 14. Differenzen der Grad-Varianzen nach erfolgter Parameterbestimmung der vertikalen Gradiometerkomponenten gegenüber dem Ausgangsmodell (467/29 Simulation auf 245 km Bahnhöhe). Der Fehler in den untersten Graden als globaler Geoidhöhenfehler steigt mit wachsender max. Auflösung über $l=200$ stark an.

Singuläre Ordnungen m	max. Grad	$\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$	max. Differenz	globales rms N_{Geoid}
0	200	$3 \cdot 10^{15}$	10^{-14}	1.5 mm
0/1	220	$4 \cdot 10^{17}$	10^{-12}	0.15 m
0/1/2/3	240	$4 \cdot 10^{17}$	10^{-10}	0.83 m

Tabelle 8. Singuläre oder nahezu singuläre Ordnungen bei der Bestimmung der SH-Koeffizienten aus den Fourier Koeffizienten, $I = 96.5^\circ$.

Ebenso können die Polregionen auch aus den Daten heraus extrapoliert werden, indem der unvollständige Datenbereich von $\phi \in \{\phi \mid -\pi \leq \phi \leq \pi\} \setminus 2I$ auf die Kugelfläche einschliesslich der Polkappen abgebildet wird. Die Auswertung erfolgt dann im Frequenzbereich auf einem gleich-

abständigen Raster mittels 2D FFT. Eine Auswertung auf der Torusfläche in den Koordinaten (u, Λ) wird in Sneeuw [SNE00] diskutiert. Ein möglicher Vorteil dieser Methode, nebst der Behebung des Polproblems, besteht darin, dass die Daten nun nicht mehr in einer equidistanten Zeitreihe (Datenlücken), noch auf einer sich wiederholenden Bahnspur liegen müssen. Problematisch ist allerdings die Qualität der Extrapolation auf das Raster, die somit eine zusätzliche, limitierende Grösse bei der Parameterbestimmung darstellt. Darüberhinaus kann das Fehlerverhalten des Messensors nicht mehr mit berücksichtigt werden. Im folgenden Abschnitt wird daher ein neuartiger Ansatz diskutiert.

3.7 Ein kombinierter Rechenansatz zur Behebung des Pol-Problems

Dieser Ansatz meidet ebenfalls die Verwendung von empirischer Regularisierung und ermöglicht darüberhinaus auch weitere Daten in Gitteranordnung zum Zwecke der Stabilisierung oder gemeinsamer Auswertung, mit einzubeziehen.

Die erforderlichen LCs zur Bestimmung der SH-Koeffizienten sollen dabei in Form einer Ausgleichung bestimmt werden, da es sich primär um getrennt auswertbare, einzelne Blöcke handelt. Der wesentliche Vorteil ihrer Berechnung in Form einer Ausgleichung liegt darin, dass vorhandene weitere Daten, die in Gitteranordnung vorliegen mit angefügt werden können, aber ebenso hypothetische Daten z.B. aus einem gegebenen Erdschwerermodell. Denkbar wäre auch eine iterative Lösung etwa durch die Verwendung von extrapolierten Daten des Vorgängermodells. Um dabei im Ergebnis keine Beeinträchtigung durch Vorinformation zu verursachen, kann diesen Daten gleichzeitig ein geringeres Gewicht zugeteilt werden. Der Ansatz kann auch als kombinierte Lösung bezeichnet werden, da zwar die Effizienz des Spektralverfahrens anhand der LCs genutzt wird, gleichzeitig jedoch numerische Flexibilität durch eine gewichtete Ausgleichungen erzielt wird.

Um z.B. reale, reguläre Daten, die nicht in der inklinierten Formation der Satellitenbahnen vorliegen (z.B. die Polgebiete), integrieren zu können, soll die Bestimmung der LCs in dem (ϕ, λ) -System der Kugelkoordinaten erfolgen. Um Korrelationen zwischen den Ordnungen zu vermeiden, müssen bestimmte Restriktionen, wie konstante Inklination, geschlossene Bahnspur, usw. jedoch dennoch aufrechterhalten werden. Ebenso müssen anistrophe Messdaten des Satellitensystems in das (ϕ, λ) -System durch orthonormale Rotation transformiert werden, was unter Umständen zu einer Beeinträchtigung der Qualität der Daten führen kann, sofern deren Orientierung nicht exakt bestimmt werden kann oder aber das Sensorsystem mit unterschiedlicher Genauigkeit in verschiedenen Orientierungen arbeitet, wie dies z.B. bei Gravimeterbeobachtungen der Fall sein kann. Anhand der Fourier-Komponenten der Legendre-Funktionen aus Kap. 2 können dann wiederum die SH-Koeffizienten bestimmt werden, man benötigt keine Inklinationsfunktionen mehr.

Zur blockweise Auswertung der einzelnen Systeme in dem (ϕ, λ) -System, muss zunächst gewährleistet sein, dass keine zusätzlichen Korrelationen zwischen einzelnen Parametergruppen auftreten. Im Gegensatz zu dem (u, Λ) -System, in dem für beliebig abständige, diskrete Abtastung bei geschlossener Bahnspur generell vollständig von Korrelationsfreiheit ausgegangen werden kann¹³, ist dies hier im Speziellen nur dann der Fall, wenn die Anzahl der Rasterpunkte der in sich geschlossenen Bahnspur mit beliebiger, konstanter Inklination den Wert

$$N = c \cdot N_o^2, \quad \text{mit } c = 1, 2, \dots \quad (128)$$

13. Sofern die Umlaufzahl innerhalb eines Wiederholungszyklus zumindest doppelt so gross ist wie die max. Auflösung des zu berechnenden Schwerfeldmodells.

annimmt, wobei N_o die Anzahl der Umläufe innerhalb des Wiederholungszyklus ist. Der Grund hierfür liegt in der Erfüllung des Orthogonalitätskriteriums der Basisfunktionen. Die Aufteilung in N_o^2 führt dabei stets zu einer vollständig symmetrischen Verteilung gegenüber dem Äquator, was hierfür Grundvoraussetzung ist. Überdies muss auch der Bahnknoten mit dem Nullmeridian aligniert werden, was sich durch eine entsprechende Drehung um $\Delta\lambda$ erreichen lässt. Die daraus berechneten LCs können anschliessend vor Umwandlung in SH-Koeffizienten durch Filterung nach Gl. (96) zurücktransformiert werden. Der Faktor c ergibt sich aus der max. gewählten Auflösung und der daraus hervorgehenden Anzahl an LCs. Diese lässt sich mit $(L + 1)^2 + L^2$ angeben und ist damit insgesamt doppelt so gross wie die Anzahl der harmonischen Koeffizienten.

Fügt man nun weitere Daten, die auf einem (ϕ, λ) -Raster liegen hinzu, z.B. über den Polregionen, so entstehen wechselweise positive und negative Korrelationen zwischen Parametern, allerdings nur jeweils zwischen geraden oder ungeraden Ordnungen. Man kann die betreffenden Koeffizienten folglich dennoch durch eine vollständige Ausgleichung ermitteln, da deren Grössenordnung stets in einem noch vertretbaren Umfang liegt (1/4 der Anzahl der Erdschwerefeldparameter). Effektiv ist damit eine Verdoppelung der Auflösung gegenüber einer Parameterbestimmung aus irregulären Daten anhand vollständiger Inversion möglich. Der Ablauf einer solchen kombinierten Auswertung kann folgendermassen durchgeführt werden:

- i. *Resampling* der Daten auf $c \cdot N_o^2$ Abtastungen innerhalb der gewählten Wiederholungsperiode (Einführung von Normalpunkten von denen einer auf dem Äquator liegen muss). Dies dient zur Behebung unerwünschter Korrelationen beim Übergang in das (ϕ, λ) -System der Kugelkoordinaten
- ii. Hinzunahme von hypothetischen oder realen, symmetrisch verteilten Daten einschliesslich deren Gewichtung. Hier können z.B. Poldaten oder bestimmte globale Breitenbereiche aber auch Daten aus anderen Satellitenmissionen, herangezogen werden, sofern mit Ihnen analog zu Punkt i) verfahren wird.
- iii. Integration der Basisfunktionen und blockweise Inversion zur Bestimmung der LCs bzw. gemeinsame Inversion sofern Korrelationen aufgrund der weiteren regulären Daten entstehen.
- iv. Abschliessende blockweise Ausgleichung zur Bestimmung der SH Koeffizienten anhand der Fourier Komponenten der Legendre Funktionen.

Anmerkung 6. Das vorgeschlagene *Resampling* der Datenanzahl auf $c \cdot N_o^2$ wirft generell die Frage nach der wirksamen Redundanz bei der Bestimmung von Erdschwerefeldparametern aus Satellitenbeobachtungen auf. Diese steigt bei polnahen Bahnen hinsichtlich der geographischen Länge und zunehmender Datenverdichtung in Nord-Süd-Richtung im Prinzip nicht global an. Eine Lösung aus Beobachtungen in Sekundenfolge verbessert daher lediglich die statistische Varianz, bleibt aber bezüglich der Korrelationen der Parameter invariant. Der Parameter c muss dabei mindestens so gewählt werden, dass mehr Datenpunkte vorhanden sind als LCs bestimmt werden müssen.

In Abb. 15 ist die Auswirkung des Pol-Loches auf die Koeffizienten im Rahmen einer Simulation bis SH=200 verglichen: zum einen ohne Regularisierung in dem inklinierten Bahnsystem und zum anderen durch gemeinsame Auswertung der Satellitendaten mit fiktiven Daten innerhalb der Polkappen.

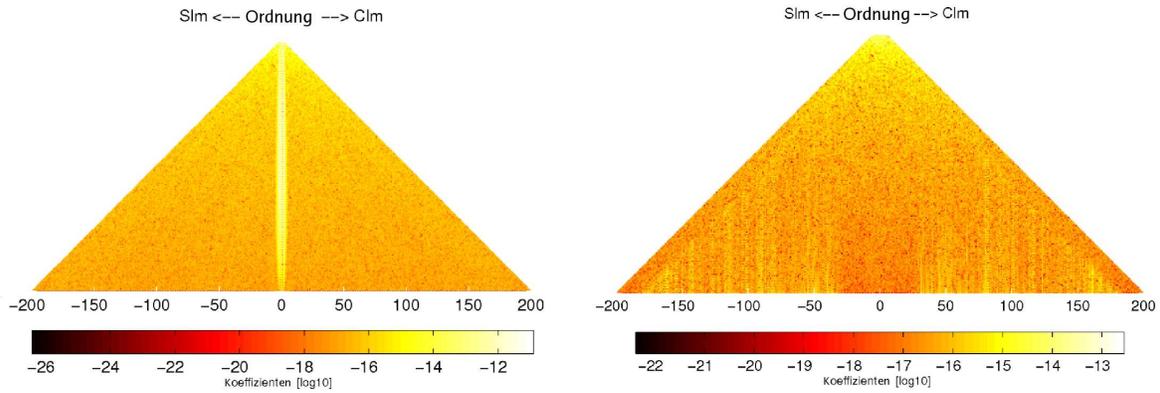


Abbildung 15. Erdschwerefeldkoeffizienten aus inklinierter Satellitenbahn ($I = 96.5^\circ$, $h = 250$ km) gegenüber dem Ausgangsmodell. Links: Lösung ohne Regularisierung, Bestimmung der LC mittels FFT im Orbitalsystem. Rechts: Bestimmung der LC durch Ausgleichung im (ϕ, λ) -System und Hinzunahme von Gitterdaten über den Polargebieten.

Der Zugewinn durch die Poldaten wird besonders deutlich beim Vergleich der Grad-Varianzen in Abb. 16. Eine hochauflösende Schwerefeldlösung aus Satellitenbahndaten mittels Verwendung der LC ist daher ohne Regularisierung oder Hinzunahme hypothetischer Daten in den Polgebieten kaum möglich. Weitere Anwendungsmöglichkeit wäre u.U die kombinierte Auswertung mit Altimeterbeobachtungen in Bahnkreuzungspunkten, da diese über Ozeangebieten ebenfalls in globaler, symmetrischer Verteilung zum Äquator vorliegen.

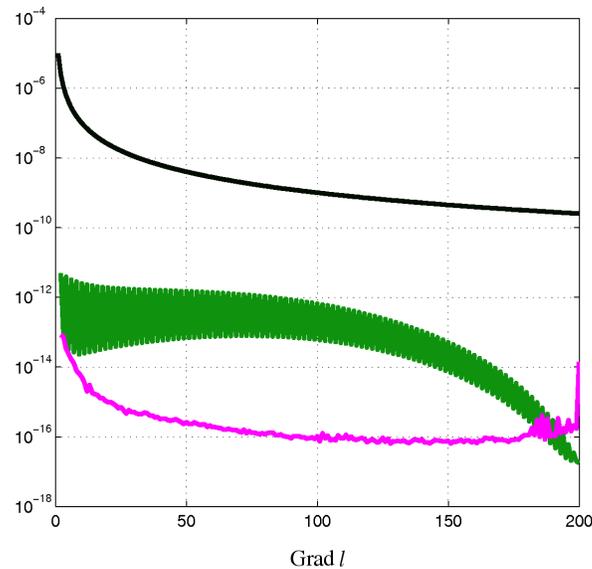


Abbildung 16. Vergleich der Grad-Varianzen gegenüber der Ausgangslösung, die für die Daten im Satellitensystem verwendet wurde; einmal ohne Regularisierung (mittlere Kurve), sowie kombiniert mit fiktiven Poldaten (untere Kurve). Die Signalstärke der Lösung ist durch die Kaula-Regel angedeutet (obere Kurve).

Für die praktische Auswertung der LC anhand einer Ausgleichung im (ϕ, λ) -System bildet die Gl. (88) den Ausgangspunkt. Dabei sind 6 Fälle, je nach Parität der Indices zu unter-

scheiden, mit jeweils $m, k \in [0: L]$:

1. Produkte $N(k, m) = \langle \cos(k\varphi)\cos(m\lambda), \cos(k'\varphi)\cos(m'\lambda) \rangle$.
 - a) m, k : jeweils gerade; Durch Hinzunahme regulärer Daten kommt es neben Korrelationen zwischen unterschiedlichen k auch zu positiven und negativen Korrelationen jeweils zwischen Ordnungen. Eine volle Matrix Inversion muss daher gebildet werden. Der maximale Umfang beträgt allerdings nur 1/4 gegenüber der direkten Lösung nach Erdschwerefeldkoeffizienten. Die zusätzlichen Einträge nehmen durchwegs die Werte $\pm 2 \cdot \sigma^2$ an, wobei σ^2 die Varianzen (Gewichtsfaktoren) der zusätzlichen (Pol-)daten angeben.
 - b) m, k : jeweils ungerade; die Produkte bleiben vollständig korrelationsfrei bezüglich der Ordnungen m und können daher unmittelbar blockweise berechnet werden.
2. Produkte $N(k, m) = \langle \cos(k\varphi)\sin(m\lambda), \cos(k'\varphi)\sin(m'\lambda) \rangle$. m, k bilden jeweils entweder gerade oder ungerade Blöcke; blockweise Auswertung der Ordnungen ist möglich. Für den Fall das m ungerade ist, entspricht $N(k, m)$ dem Resultat von 1b), wenn m hingegen gerade dem von 1a) ohne den zusätzlichen Korrelationen.
3. Produkte $N(k, m) = \langle \sin(k\varphi)\cos(m\lambda), \sin(k'\varphi)\cos(m'\lambda) \rangle$.
 - a) k : ungerade, m : gerade; auch hier treten nach Hinzunahme regulärer Daten Korrelationen zwischen Ordnungen entsprechend bei 1a) auf, eine volle Matrix muss invertiert werden. Die zusätzlichen Einträge nehmen wiederum durchwegs die Werte $\pm 2 \cdot \sigma^2$
 - b) k : gerade, m : ungerade; entspricht 1b).
4. Produkte $N(k, m) = \langle \sin(k\varphi)\sin(m\lambda), \sin(k'\varphi)\sin(m'\lambda) \rangle$. m, k bilden jeweils wechselweise gerade oder ungerade Blöcke, wobei $k \neq 0$. Sofern m ungerade ist, entsprechen die Produkte denen bei 3b).

3.8 Auflösbarkeit

Durch die Berchnung der LCs im Sinne einer Ausgleichung lässt sich das Auflösungskriterium $2L < N_o$, das für die Korrelationsfreiheit einzelner Ordnungen und der Anwendung eines FFT Operators erforderlich ist, überwinden. Dazu müssen allerdings die korrelierenden Ordnungen in 'super-Blöcke' zusammengefasst werden, da eine vollständige Inversion zur Bestimmung der LC noch aufwendiger wäre als die unmittelbare Berechnung der Kugelfunktionskoeffizienten. Die maximale Auflösbarkeit ist allerdings auch danach noch beschränkt auf $L < N_o$ und gilt sowohl für die Berechnung der LCs wie auch der SH-Koeffizienten durch eine direkte Ausgleichung. Die korrelierenden Ordnungen lassen sich sonst nicht mehr invertieren, da sich nicht mehr durchwegs positiv definite Normalgleichungssysteme ausbilden. In Fig. 17 sind die Einträge hervorgehoben, wie sie bei Bestimmung der LCs auf einer idealisierten Wiederholungsbahn¹⁴ der GRACE Mission entstehen.

Die Annordnung innerhalb des Gleichungssystems zur simultanen Bestimmung der LCs ist nach Gruppen aufgeteilt, entsprechend den Produkten 1.-4. des vorangehenden Abschnitts. Darüberhinaus sind jeweils gerade und ungerade Ordnungen voneinander getrennt. In Abb. 17 lassen sich daher insgesamt 8 Gruppen entlang der Diagonalen erkennen. Der maximale Grad L der simulierten Daten beträgt 50, jedoch wiederholt sich die Bahn bereits nach $N_o = 46$ Umläufen. Es kommt demzufolge zu einer spärlichen Überdeckung hinsichtlich der geographischen Länge; Die Amplituden des zugehörigen Signalspektrums in Breiten- / wie Längenrichtung lassen sich daraus nicht mehr vollständig auflösen, die jeweiligen Gleichungssysteme erleiden

¹⁴. Das Zentrum des Messsystems wurde entsprechend den Anmerkungen unter 3.7 beim Knotendurchgang in den Nullmeridian gelegt. Unerwünschte Korrelationen aufgrund der Differenzbildung zur Bestimmung der LC werden dadurch minimiert.

einen Rangdefekt.

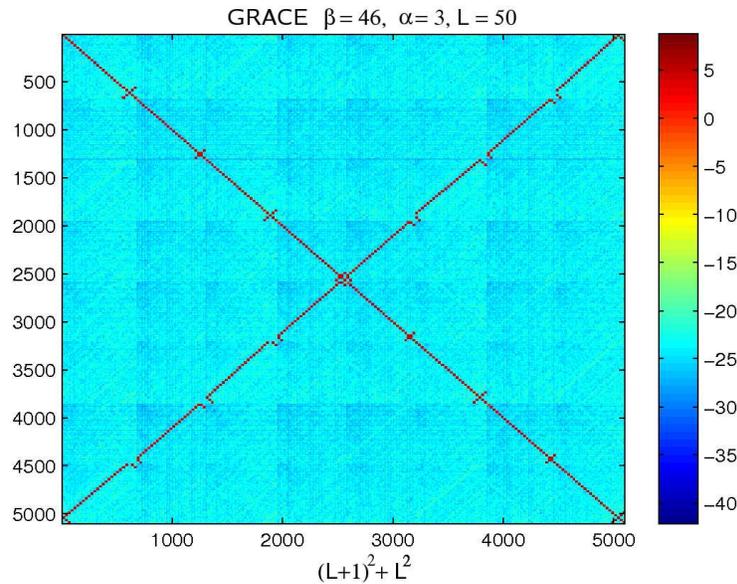


Abbildung 17. Korrelationen ordnungsweiser Blöcke zur gemeinsamen Bestimmung der LC im Falle einer idealisierten GRACE Mission. Der maximale Grad L sei dabei höher als die Umlaufzahl N_o gewählt. Zu erkennen sind diagonale Blöcke, die jeweils korreliert sind über die Co-Diagonale, die entsteht durch Überschreiten der Auflösung L über $N_o/2$. Dies bedeutet, dass jeweils hohe Ordnungen einer Produktgruppe mit niederen der anderen gemeinsam bestimmt werden müssen. Bei Überschreiten der Auflösung über N_o bilden sich des weiteren Korrelationen heraus, die erstmals auch innerhalb der jeweiligen Produktgruppen auftreten und diese damit unlösbar machen.

Aufgrund der resultierenden, ungünstigen Konditionierung einzelner Ordnungen für den Fall $L > N_o$ ist es nicht mehr möglich die zugehörigen LCs zu bestimmen und folglich können auch die betroffenen SH-Koeffizienten daraus nicht mehr hervorgehen. Die übrigen Koeffizienten bleiben allerdings je nach Grösse der Überparametrisierung davon unbeeinträchtigt, Fig. 18.

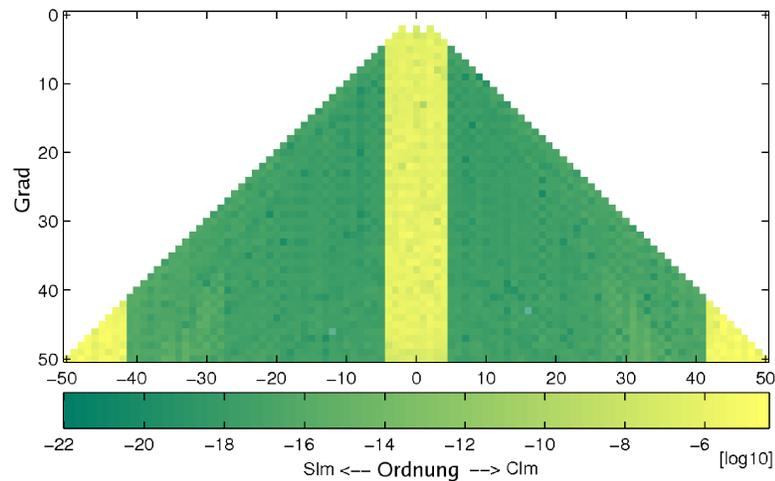


Abbildung 18. SH Gradvarianzen der Abweichungen zum Ausgangsmodell, das zur Datenerzeugung verwendet wurde. Durch Überschreiten der Auflösung ($L=50$) bezüglich der Anzahl der Umläufe ($N_o = 46$) innerhalb des Wiederholungszyklus ($N_e = 3$ Tage) sind sowohl höhere Ordnungen mit $m = \{2N_o - L, \dots, L\}$ wie auch niedrige Ordnungen, $m = \{0, \dots, L - N_o\}$ nicht mehr auswertbar.

Eine solchermassen scharfe Abgrenzung ist bei der Bestimmung der SH-Koeffizienten anhand von direkter Inversion nicht möglich; Daher ist eine gesicherte Aussage zur Auflösbarkeit von globalen Kugelfunktionsmodellen immer nur aus Überlegungen im Spektralbereich zu treffen. Bezüglich der Auswertung der CHAMP und GRACE Daten lässt sich anmerken, dass durch Kontraktion der grossen Halbachse nacheinander verschiedene Wiederholungsbahnen durchlaufen werden, die damit unter Umständen zu einer erheblichen Verminderung der Auflösbarkeit führen. Daher sind einzelne Monatslösungen im Grunde immer in ihrer maximalen Auflösung anzupassen. Die Berechnung von statischen Lösungen über längere Zeiträume wirft somit unmittelbar die Frage der Kombinierbarkeit diverser Datenabschnitte auf. Sofern man das Modell den Gegebenheiten der Bahnkonfiguration anpasst, verhindert man zwar Überparametrisierung, auf der anderen Seite ist man aber gezwungen die hohen Frequenzen aus den sensiblen Eingangsdaten im Falle von GRACE zu eliminieren. Dies kann im Grunde wiederum nur durch ein hochgenaues Hintergrundmodell erfolgen.

Im Rahmen von Simulationsstudien können die entsprechenden 'super-Blöcke' jeweils identifiziert werden und einzeln ausgewertet werden. Die Korrelationen sind dabei abhängig von der Anzahl der Daten innerhalb eines Wiederholungszyklus, sowie der Parität der Umlaufzahlen N_o und N_e . Zur Auswertung im Spektralbereich lässt sich stets ein reguläres Schema bilden anhand dessen Daten in sämtlichen Wiederholungsbahn-Konfigurationen ausgewertet werden können. Im Falle der GRACE-Daten muss dazu das Beobachtungszentrum einer beliebigen Anfangsepoche in den Schnittpunkt von Nullmeridian und Äquator transformiert werden. Die Korrelationen der gemischten Produktterme zwischen den beiden Position der Satelliten heben sich daraufhin auf. Aufgrund der permanenten Kontraktion der grossen Halbachse, der Exzentrizität der Bahn sowie der grösseren Flexibilität zur Handhabung nicht modellierter Effekte werden in der Praxis jedoch in der Regel Lösungen durch direkte Inversion zur Bestimmung der SH-Koeffizienten angewendet.

3.9 Aliasing-Effekte

Auf der Grundlage der FFT-Transformation lassen sich Erkenntnisse hinsichtlich der Datendichte und spektralen Auflösung gewinnen. Daher ist die Simulation im Sinne des Spektralansatzes von grundlegender Relevanz für Missionsplanung und Spezifikation. An einem einfachen Beispiel sollen hierzu die Probleme des Aliasing angesprochen werden.

Beispiel 7. Schnelle Fourier-Transformation entlang einer nominalen Satellitenbahn

Gegeben sei eine *kreisförmige* Satellitenbahn

$$\begin{aligned} R &= 6650 \text{ km } (h = 272 \text{ km}) \\ \text{SH} &= 15 \\ \frac{N_o}{N_e} &= 16/1 \\ I &= 96.5^\circ \end{aligned}$$

in retrograder Inklination. Nach Gl. (117) ergeben sich damit folgende Spektrallinien zu den möglichen Frequenzen

$$\mathcal{F}[V] = \{q_{0,0}, q_{1,15}, q_{1,14}, \dots, q_{15,0}, q_{-14,15}, \dots, q_{0,1}\} \quad (129)$$

bei einer Missionsdauer von $T = 1$ Tag. Die Gesamtzahl der Frequenzen $-L_{15} \leq k \leq L_{15}$, jeweils zu jeder Ordnung $0 \leq m \leq L_{15}$, beträgt 496 und entspricht nach Gl. (114) einer Abtastrate von $\Delta u = 2\pi/31$. Die Bahnspur ergibt sich mit den Anfangswerten $u^0 = 0^\circ$ sowie $\Omega^0 = \theta_g$, gemäss Abb. 19

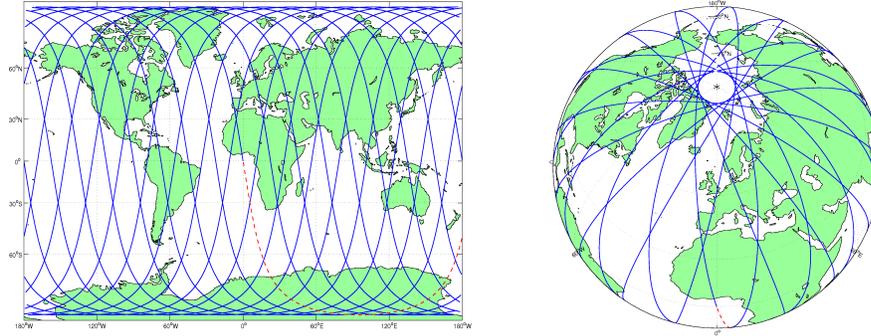


Abbildung 19. Geschlossene Bahnspur mit $N_e = 1$, $N_o = 16$, $I = 96.5^\circ$

Die realen Funktionswerte können im Rahmen einer 1:1 Abbildung des Spektrums generiert werden, da die Frequenzen nach Gl. (115) stets ganzzahlige Werte annehmen. Die Umkehrung dessen ist jedoch nicht der Fall; um die Matrizen $Q_{m,\pm k}$ wiederherzustellen, ist die Nyquist-Frequenz bezüglich der Abtastrate zu beachten. Es müssen daher zumindest doppelt so viele Abtastpunkte vorhanden sein, um alle Frequenzen auflösen zu können. Eine Verdoppelung der Abtastrate reicht in diesem Fall jedoch nicht aus, da dadurch keine weiteren Frequenzen erfasst würden, es muss vielmehr die Signalperiode auf $32/2$ verdoppelt werden.

Falls dennoch weitere Frequenzen in den Funktionswerten enthalten sind, können diese nicht eindeutig in die Sequenz in Gl. (129) zurück transformiert werden, da sich deren Amplituden überlagern. Im Falle realer Messdaten hochsensibler Schwerefeldsensoren muss daher entsprechend hoch parametrisiert werden, was im Gegenzug Probleme durch zunehmend schlecht konditionierte Gleichungssysteme mit sich bringt.

3.10 Feldfortsetzung nach unten

Die Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten der Kugelfunktionen ausserhalb der Referenzkugel ist ein schlecht konditioniertes Problem, Schwarz [SCH79a]; Kusche [KUS02]. Aufgrund der starken physikalischen Dämpfung des Signals, ausgedrückt durch den radialen Aufwärtsterm $(R/r)^{\ell+1}$, nimmt die Leistungsdichte in den höheren Frequenzen stärker ab als in niederen; durch einen kompakten inversen Operator kann das daraufhin band-limitierte Signal nicht mehr in eine unendliche Reihe zurücktransformiert werden. Dies wird auch deutlich, sofern man Schweredaten, z.B. in Form von Störpotentialwerten, in verschiedenen Höhen aus einem Modell erzeugt. Abb. 20 zeigt zu unterschiedlichen Bahnhöhen über Grund die jeweiligen Leistungsdichten einzelner Schwerefeldfunktionale. Dabei zeigt sich im Fall von CHAMP, bei Anwendung des Äquivalenzprinzips der kinetischen Energie bezüglich des Störpotentials der Erde T , dass auf einer Flughöhe von 450 km über Grund bereits innerhalb der untersten Entwicklungsgrade der harmonischen Koeffizienten ein deutlicher Rückgang bezüglich der Leistungsdichte und somit dem Auflösungsvermögen einer dezidierten Satellitenmission eintritt. Frequenzen, die jenseits von $l = 100$ liegen sind kaum noch im Messband des Signals repräsentiert. Etwas günstiger verhält es sich für die Schwerestörung T_z , mit der bereits Signal bis ca. $L = 150$ vorhanden ist. Mit einer durchgängig hohen Präsenz, selbst für Frequenzen über $l = 300$ hinaus, zeigt sich die zweite radiale Ableitung des Erdschwerefeldpotentials als Messgrösse der GOCE-Mission, auf einer Höhe über Grund von 250 km . Diese starke Präsenz birgt aber auch eine grosse Schwierigkeit mit sich; denn um Überlagerungseffekte (*aliasing*) höherer Frequenzen zu vermeiden, muss das Auswertemodell entsprechend hoch parametrisiert werden. Im Falle der direkten Inversion bringt

dies Probleme bezüglich der Rechnerkapazitäten und im Falle einer FFT auf der Kugel Stabilitätsprobleme bei der Umwandlung in die SH-Koeffizienten mit sich.

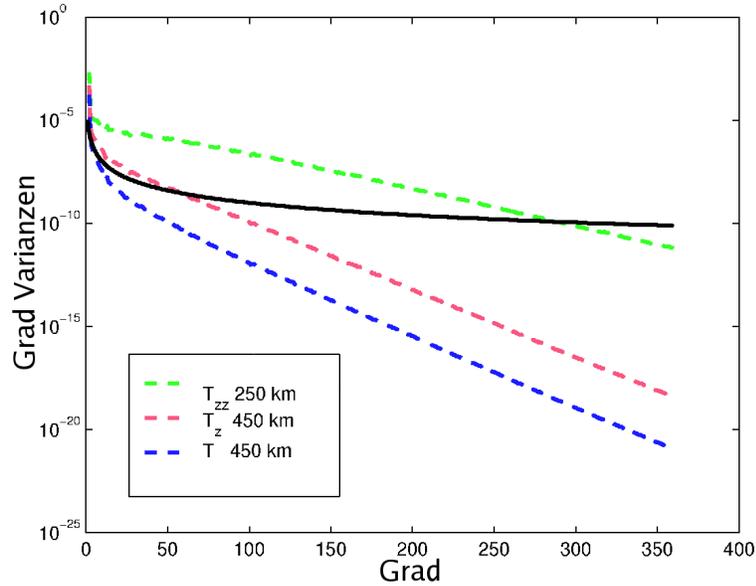


Abbildung 20. Spektrale Leistungsdichten (Signal Grad Varianzen) einzelner Beobachtungsgrößen aufgrund radialer Dämpfung in unterschiedlichen Flughöhen in Anlehnung an Rummel et al. [RVGK+93], verglichen mit dem Grad-Varianz-Modell von Kaula mit $\sigma_\ell = 10^{-5}\ell^{-2}$.

Abb. 21 zeigt die Synthese der drei Hauptkomponenten des Gradiometrie-Tensors über dem Gebiet Europas aus dem Erdschwerefeldmodell EGM96. Einzelne Strukturen sind auch noch auf Satellitenniveau deutlich zu erkennen.

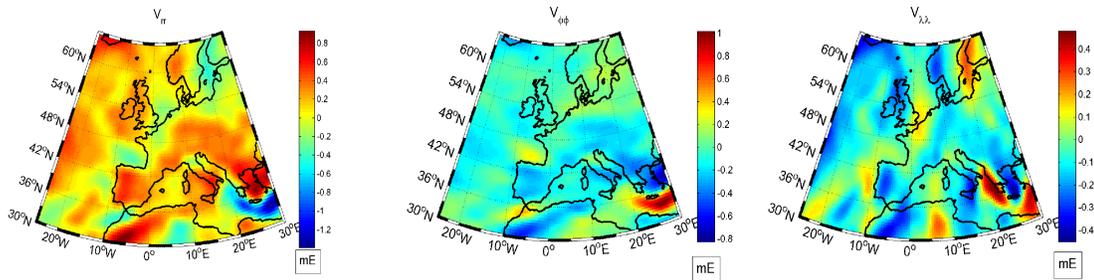


Abbildung 21. Radiale-, breiten- und längenabhängige Komponenten der Diagonalkomponenten des Gradiometer-Tensors über Europa auf 250km Bahnhöhe.

3.11 Zusammenfassung

Der Fast Fourier Ansatz zur Analyse und Synthese bietet Vorteile bezüglich der Berechnung von Schwerefeldfunktionalen auf gleichabständigen Datenrastern sowie simulierten Satellitenbahnen. Einige Vorzüge sind:

- überschaubarer Formelapparat, insbesondere bei der Berechnung von Funktionalen wie Gradiometerkomponenten, da von einfachen Filteroperation Gebrauch gemacht werden kann.
- geringere Recherauslastung; bei Ausgleichung der LC in kombinierter Anordnung nur 1/4 der Systemgröße einer vollständigen Inversion der Erdschwerefeldparameter.

- bestens geeignet für Filteroperationen der Beobachtungsdaten, da direkt im Frequenzbereich gegeben.
- detaillierte Einsicht bezüglich der numerischen Lösbarkeit, erforderlicher minimaler Datenabtastung und primären Korrelationen zwischen den Parametern.
- Kombination regulärer Daten durch Auflösen der LC anhand der geographischen Koordinaten.
- iteratives Überwinden von Bahnexzentrizität und Kontraktion der Bahnhöhe

Als nachteilig einzustufen sind:

- beschränkte Anwendbarkeit bei realen Daten, da geschlossene Bodenspur oder gleichabständige, symmetrisch–globale Datenraaster Voraussetzung sind.
- sensibel gegenüber nicht polaren Bahnen; durch Hinzunahme von Poldaten kann Abhilfe geschaffen werden
- unvollständige Kovarianzfortpflanzung bei Fehlerabschätzung aufgrund der Annahme der Korrelationsfreiheit zwischen verschiedenen Ordnungen, insbesondere bei Anwenden eines iterativen Verfahrens zum Überwinden der Bahnexzentrizität.
- auftreten weiterer Korrelationen zwischen Parameterblöcken im Falle des GRACE– Experiments, da hier Differenzen von Funktionalen des Erdschwerepotentials gebildet werden.

3.12 Zur effektiven Berechnung der Inklinationsfunktionen

3.12.1 Definition der Inklinationsfunktionen

Die Inklinationsfunktionen in der Satellitengeodäsie dienen der Expansion des harmonischen Erdschwerefeldes hinsichtlich der Bahnneigung eines Satelliten. Die Transformation der rekursiven Gleichungen der Legendre Funktionen in Inklinationsfunktionen findet man bei Kaula [KAU66] aber auch z.B. Rummel et al. [RVGK+93]. Sie führt dabei zu mehr oder weniger stabilen bzw. praktikablen rekursiven Lösungen. Zu nennen sind Algorithmen nach Allan [ALL67]; Gooding [GOO71]; Wnuk [WW87]; Kostelecký [KKK86]. Ein spektraler Ansatz wurde von Wagner [WAG83] sowie von Clyde Goad [GOA87] diskutiert. Schrama [SCH89] beschreibt ebenfalls diesen Ansatz. Der folgende Abschnitt ist diesem Thema gewidmet, allerdings von einem etwas anderen Ausgangspunkt.

Ziel sei an dieser Stelle, die Inklinationsfunktionen durch ein direktes Verfahren aus den Fourier– Komponenten der Legendre Funktionen zu berechnen.

Die normierten Inklinationsfunktionen seien gegeben

$$\bar{F}_{\ell m p}(I) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m\Lambda + ku)} \bar{P}_{\ell}^m(\sin\varphi) du \quad (130)$$

bzw.

$$e^{im\Lambda} \bar{P}_{\ell}^m(\sin\varphi) = \sum_{p=0}^{\ell} e^{iku} \bar{F}_{\ell m}^k(I) \quad (131)$$

mit $u = \omega + f$, $\Lambda = \Omega - \theta_g$, $k = (\ell - 2p)$. Eine entsprechende Lineardarstellung lautet dazu

$$\bar{F}_{\ell m}^k(I) = U^{*k} \cdot \hat{Y}_{\ell}^m(\phi, \lambda), \quad (132)$$

wobei Λ zu Null gesetzt wird, indem der aufsteigende Knoten der Bahnellipse in die Länge von Greenwich gelegt wird. Die Inklinationsfunktionen definieren das Spektrum der Kugelflächenfunktionen bezüglich einer bestimmten Richtung, die durch die Inklination I der Bahnebene gegenüber dem sphärischen Koordinatensystem festgelegt ist. Die unitäre, komplex konjugierte Matrix U^{*k} sei gegeben durch

$$U^{*k} = e^{-iku}, \quad (133)$$

in deren Spalten k die komplexen Basisfunktionen in gleichförmiger Abtastung entlang des Argumentes der Breite vorliegen. Die Dichte der Abtastung richtet sich nach der Nyquist-Frequenz, sodass doppelt so viele Datenpunkte wie zu bestimmende Spektrallinien, in diesem Fall Komponenten der Inklinationsfunktionen, erforderlich sind. Die normierten Kugelflächenfunktionen $\hat{Y}_{\ell m}(\phi, \lambda)$ sind gegeben durch

$$\hat{Y}_{\ell}^m(\phi, \lambda) = e^{im\lambda} \bar{P}_{\ell}^m(\sin \phi) \quad (134)$$

bzw. in Matrix-Notation und mit Gl. (42)

$$\hat{Y}_{\ell}^m(\phi, \lambda) = L^m \cdot C^k \cdot A_{\ell m}^k \quad (135)$$

sowie der Diagonalmatrix

$$L^m = \begin{pmatrix} e^{i\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\lambda_n} \end{pmatrix}^m \quad (136)$$

Der Zusammenhang zwischen Inklination sowie geographischer Länge und Breite ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \sin \phi &= \sin I \sin u \\ \cos \lambda &= \frac{\cos u}{\cos \phi} \end{aligned} \quad (137)$$

3.12.2 Die numerische Berechnung der Inklinationsfunktionen

Der FFT-Algorithmus liefert zu einem reellwertigen Eingangssignal ein komplexes, symmetrisches Ausgangssignal. Führt man umgekehrt ein komplexwertiges, symmetrisches Signal ein, so erhält man wiederum ein reales Ausgangssignal. Im Falle der Inklinations-Funktionen sind zu jedem Grad und Ordnung $(l + 1)$ reale Koeffizienten zu berechnen. Diese sind entgegen den Legendre Funktionen nicht symmetrisch, sodass man anders als bei der FFT Berechnung der Legendre Funktionen Beginn und Ende des Ergebnisspektrums heranziehen muss. Setzt man Gl. (132) und Gl. (135) zusammen, so ergibt sich

$$\bar{F}_{\ell m}^k(I) = \frac{1}{N} \cdot \{U^{*k} \cdot L^m \cdot C^k\} A_{\ell m}^k. \quad (138)$$

Dabei erkennt man unmittelbar, dass es offensichtlich auch einen direkten Übergang der einen in die anderen Komponenten geben muss. Als Eingangssignal sind somit immer bereits die komplexen, symmetrischen Koeffizienten der Legendre Funktionen der Anzahl $\ell + 1$ ausreichend.

3.12.3 Umwandlung der Legendre Funktionen zu Inklinationsfunktionen per FFT

Da sich die Fourier-Komponenten der Legendre Funktionen äusserst effektiv im Zuge eines rekursiven Schemas nach Abschnitt 2.5 berechnen lassen, ist es unter Umständen vorteilhaft, auch eine direkte Umwandlung in die Inklinationsfunktionen zur Verfügung zu haben. Die erforderlichen Schritte hierzu gestalten sich einfach und sollen kurz erläutert werden. Ausgehend von Gl. (138) mit $k = \ell - 2p$ und $p = 0, 1, \dots, \ell$. berechnet man zunächst die Stützpunkte entlang einer fiktiven Bahn

$$\begin{aligned} \phi_p(I) &= \sin^{-1}(\sin(I) \sin(p \cdot \pi / (\ell + 1))) \\ \lambda_p(I) &= \text{sign}(\pi/2 - I) \cdot \cos^{-1}(\cos(p \cdot \pi / (\ell + 1)) / \cos(\phi_p)) \end{aligned} \quad (139)$$

und erhält damit die normierte Kugelfunktion

$$\hat{Y}_{\ell}^m(\phi_p, \lambda_p) = A_{\ell k}^m \cdot e^{i(k\phi_p + m\lambda_p)}, \quad \begin{array}{l} k = -\ell, \dots, \ell, \\ \ell - k \neq \text{ungerade.} \end{array} \quad (140)$$

Anhand der komplexen Nummer

$$W^p = \begin{cases} e^{i2p\pi/N} & \ell - \text{ungerade} \\ e^{ip\pi/N} & \ell - \text{gerade} \end{cases}, \quad N = \ell + 1 \quad (141)$$

verschiebt man je nach gradem oder ungeradem ℓ das Spektrum der Kugelfunktion

$$\tilde{Y}_\ell^m(\phi_p, \lambda_p) = W^p \cdot \hat{Y}_\ell^m(\phi_p, \lambda_p), \quad (142)$$

sodass die Anwendung des FFT-Operators

$$f_p = \mathcal{F}\{\tilde{Y}_{\ell m}(\phi_p, \lambda_p)\}/N \quad (143)$$

ein permutiertes Signal ergibt. Anschliessend lässt sich durch die Permutationsvorschrift

$$P(a, b) = 1, \quad a = N - \ell, \{N, N - 1, N - 2, \dots, 2\} \\ b = 1, 2, \dots, N$$

sonst

$$P(x, y) = 0, \quad x \neq a, y \neq b$$

reorganisieren zu

$$\bar{F}_{\ell m p} = f_p P^\mu, \quad \mu = \begin{cases} (\ell + 1)/2 - 1 & \ell - \text{ungerade} \\ \ell/2 - 1 & \ell - \text{gerade} \end{cases} \quad (144)$$

Anmerkung 8. Da die Rechenoperationen für alle assoziierten Ordnungen gleich sind, lassen sich stets ganze Grade effektiv im Sinne vektorieller Programmierung auswerten.

Anmerkung 9. Wegen der sehr schnellen Berechnung der Fourier-Komponenten der Legendre Funktionen kann man die Umwandlung in die Inklinationsfunktionen praktisch ohne Rechenzeit in einem zweiten Schritt vornehmen, ohne dabei berechnete Zwischenwerte speichern zu müssen. Dies kann insbesondere für höhere Grade von Bedeutung sein, da die Anzahl der Koeffizienten zu einem bestimmten Grad l mit $l^2/4$ steigt.

3.12.4 Plausibilitätstest der Umwandlung

Zur Evaluation des vorgestellten Verfahrens folgen zwei Plausibilitätstests. Als Testgrösse dient in Abb. 22 die Quadratsumme der Koeffizienten zu einem bestimmten Grad ℓ , jeweils normiert mit der Anzahl der Ordnungen

$$\sum_{m,k} \frac{\bar{F}_{\ell m k}^2}{2\ell + 1} = 1. \quad (145)$$

Daneben wurde eine Potentialfunktion entlang simulierter Bahnen jeweils unterschiedlicher Inklination mit einem fiktiven Kugelfunktionsmodell („eins“-Modell) bis $L = 360$ berechnet und mit dem Ergebnis der Berechnung der Funktion anhand von Legendre Funktionen verglichen.

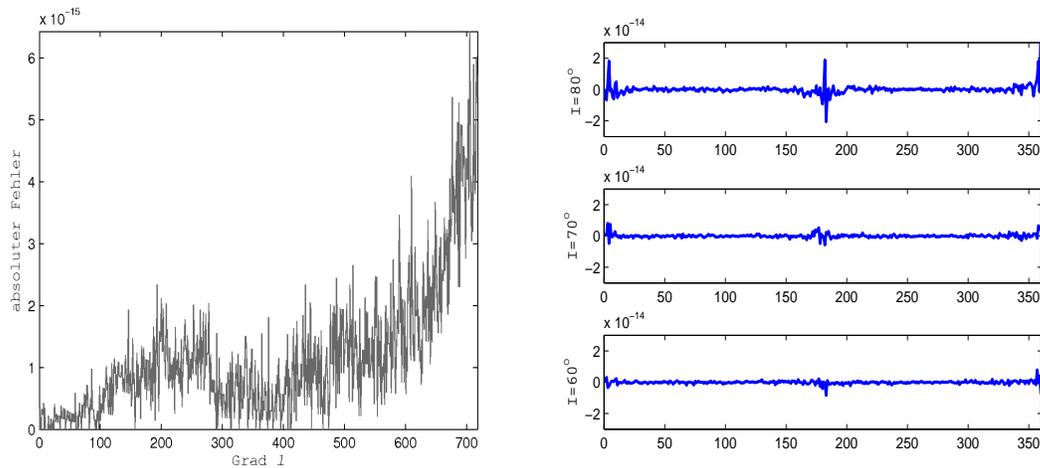


Abbildung 22. Links: gradweiser Fehlertest für die berechneten Inklinationsfunktionen. Rechts: Vergleich der Potentialfunktion eines fiktiven Erdschwerefeldes entlang dreier Vollkreise mit jeweils unterschiedlicher Inklination, beginnend jeweils bei $\phi = 0$. Der Äquatordurchgang zeigt die stärksten Unsicherheiten.

4 Die Analyse irregulär verteilter, heterogener Schweredaten im Spektralbereich

4.1 Überblick

Während zur effektiven Auswertung von regulär verteilten Schweredaten die schnelle Fourier-Transformation angewendet werden kann, dient das folgende Verfahren zur rigorosen Auswertung irregulär verteilter Daten wie z.B. terrestrischer Schweredaten in Form von Lotabweichungen, Schwereanomalien (bzw. bei ellipsoidischen Höhen Schwerestörungen), Geoidhöhenresiduen aus Altimeterdaten, Fluggravimetriedaten sowie Gradiometrie- und Orbitographiedaten.

Insbesondere die letztgenannten Beobachtungen, die frei von störenden Fremdeinflüssen, wie z.B. Terraineffekten oder lokalen hydrologischen Bedingungen sind, bieten durch ihre grosse Anzahl bei gleichzeitig hohem Überdeckungsgrad sowie aufgrund der Feldfortsetzung noch stets verhältnismässig hoher spektraler Auflösung die Gelegenheit dazu, erstmals ein qualitativ besonders hochwertiges statisches Erdschwerefeldmodell daraus abzuleiten, ESA [ESA99].

Zur Auswertung der Gradiometriedaten aus Satellitenmissionen wurden daher zahlreiche Verfahren vorgeschlagen, vgl. Rummel et al. [RVGK+93]; Schrama [SCH89]; Klees et al. [KKVvdI00]; Pail und Plank [PP04].

In Rummel et al. finden sich einerseits Integralverfahren zur Lösung von Randwertproblemen, andererseits Quadraturverfahren zur Auswertung zentraler Werte auf regulären Gittern. Zur globalen Lösung ist bei beiden Verfahren zunächst eine Datenreduktion auf eine Kugelfläche anzubringen. Es wird jedoch gezeigt, dass dieser Reduktionsschritt unter Voraussetzung von Umlaufbahnen mit geringer Exzentrizität ein Fehlerverhalten unterhalb des Messfehlers des Sensors für den Fall der Gradiometermessung ergibt. Problematisch ist hingegen die Umwandlung beliebiger Messpositionen auf zentrale Gitterwerte; sie kann nur unter bestimmten statistischen Annahmen erfolgen (z.B. *Least-Squares Collocation* [HM67]). Darüberhinaus ist fraglich, wie das zeitabhängige Fehlerverhalten des Sensors zu modellieren ist, nachdem die räumlichen Daten keine zeitliche Korrelation mehr aufweisen. Eine anschliessende Berechnung regional hochauflösender Schwerefeldmodelle durch die Kombination terrestrischer Daten mit Gradiometerbeobachtungen wird in Holota [HOL05] diskutiert.

Dagegen ist die Auswertung globaler Erdschwerefeldmodelle im Zeit-/Frequenzbereich entsprechend flexibel hinsichtlich der Datenbehandlung sowie der Korrelation. Zu nennen sind hier die vollständige Inversion der Erdschwerefeldkoeffizienten einerseits sowie die Auswertung mittels harmonischer Verknüpfungskoeffizienten (*lumped coefficients*) andererseits.

Das letztgenannte Verfahren bedarf streng genommen einer umfangreichen analytischen Theorie, kann jedoch unter bestimmten Voraussetzungen (sich wiederholende Bahnspur, annähernd kreisförmige Satellitenbahn sowie Datenreduktion der Störkräfte) entscheidend vereinfacht werden. Durch die gleichabständige Anordnung entlang der Satellitenbahn zerfällt das Normalgleichungssystem bei entsprechender Anordnung der Unbekannten in eine ordnungsweise Diagonalstruktur, die getrennt ausgewertet werden kann, vgl. Colombo [COL81], Schuh [SCH96], Ditmar und Klees [DK02].

Was spricht aber dennoch für eine vollständige Inversion der Erdschwerefeldkoeffizienten zur Auswertung von Satellitendaten?

1. Orbitmanöver
2. keine geschlossene Bahnspur

3. Datenlücken und Ausreisser
4. 'Freifall'-Satellitensysteme in Passage von Resonanzen
5. vollständige Kovarianzen der Parameter, die zur Evaluierungen der Modelle verwendet werden können
6. Instabilität bei Umwandlung der *lumped coefficients* in die Entwicklungskoeffizienten der Kugelfunktionen
7. gemeinsame Auswertung heterogener Daten

Historisch gesehen lagen Schwerebeobachtungen aus dem Weltall früher nur in begrenzter Anzahl sowie mässiger Qualität vor. Aufgrund der Satellitenmissionen zur Erdschwerefeldbestimmung innerhalb der ersten Dekade dieses Jahrhunderts liegen jedoch zunehmend mehr Daten von hoher Genauigkeit vor, sodass es vermehrt zu einer Trendwende weg von der dynamischen Formulierung und Auswertung des Problems hin zu statistischen Methoden gegeben hat. Bis vor einem Jahrzehnt war die Strategie der direkten Inversion der Daten noch weitestgehend undenkbar bzw. nur auf „Supercomputern“ zu bewältigen. Heute ist diese Herangehensweise aufgrund der Rechnerkapazitäten sowie der Qualität der vorhandenen Daten zu einem Standardverfahren avanciert. Spektrale Verfahren bieten dagegen aufgrund ihrer effektiven Berechnungsmöglichkeit die Gelegenheit zu Studien hinsichtlich der Missionsplanung und des Fehlerverhaltens der Sensoren unter idealisierten Bedingungen. Im folgenden Abschnitt ist der direkten Inversion durch Verwenden eines effizienten Berechnungsverfahrens besondere Aufmerksamkeit gewidmet.

4.2 Auswertestrategie zur direkten Inversion

Zur Berechnung der rigorosen Dateninversion ist die Produktsomme der Basisfunktionen erforderlich, um die Parameterbestimmung nach der Gauss'schen Methode der kleinsten Quadrate der Residuen durchzuführen. Aus der empirischen Bestimmung der quadratischen Form der zugehörigen Basisfunktionen lassen sich Erwartungswerte für den linearen Zusammenhang, d.h. für die Korrelationen der Unbekannten (Zufallsvariablen) bestimmen. Treten dabei hohe positive bzw. negative Werte auf, spricht man von gleichsinnigem bzw. gegensinnigem Zusammenhang. Hohe Werte der einen Variablen gehen dann mit niedrigen der anderen einher, bzw. umgekehrt. Ist der Wert annähernd 0, so sind die Variablen (annähernd) unkorreliert, d.h. es kann keine Aussage mehr darüber getroffen werden, welche Größenordnung die entsprechenden Werte relativ zueinander annehmen werden.

In der Regel läßt sich davon ausgehen, daß positive Korrelation zur Stabilisierung der Lösung beitragen, da die Leistungsdichte der Beobachtung (und deren Beobachtungsfehler) gleichmäßig auf die Unbekannten verteilt wird, hingegen negative Korrelation zu einer ungleichmäßigen, d.h. verzerrenden Verteilung führt.

4.2.1 Speicherverfahren der Entwicklungskoeffizienten der Kugelfunktionen

Bei der Bestimmung der Erdschwerefeldkoeffizienten durch die Berechnung direkter Produktsommen der Kugelfunktionen kommt es aufgrund der realen Bahngeometrie (keine sich wiederholende Bahnspur) erdnahe Satelliten zur vollständigen Korrelation zwischen allen Koeffizienten; es resultieren daher im Grunde vollbesetzte Normalgleichungssysteme. Allerdings gibt es stärker und schwächer korrelierende Gruppen, die man innerhalb der Normalgleichungen zusammenfassen kann, um damit Korrelationen der Größe nach auf die Matrix-Diagonale hin zu konzentrieren. Der Vorteil dieser Anordnung nahe der Matrix-Diagonalen liegt in der Tatsache, dass im Zuge einer Faktorisierung zur Berechnung der Inversen nur Einträge innerhalb der Umhüllenden stattfinden. Daher lässt sich dieser Rechenschritt *in-place*, d.h. innerhalb der

Umhüllenden des Normalgleichungssystems ausführen, die Nulleinträge ausserhalb der Hülle brauchen nicht gespeichert zu werden. Bei Unkenntnis der optimalen Anordnung, bei der die Umhüllende minimal wird, gibt es Algorithmen, die durch Umsortieren der Unbekannten zu einer Reduktion der Umhüllenden und damit dem Rechenaufwand führen, vgl. Cuthill–McKee [CM69].

Im Falle der Erdschwerefeldkoeffizienten gelingt diese Anordnung stets durch das sogenannte *descending Kite*-Schema eines umgedrehten Drachen, mittels dem gerade und ungerade Ordnungen sowie die Sinus- und Kosinusterme der Kugelfunktionen getrennt werden; darüberhinaus wird zwischen hohen und niedrigen Ordnungen sowie hohen und niedrigen Graden innerhalb von Blöcken unterschieden. Wichtige Sortierschemen bezüglich der linearen Anordnungen der Unbekannten sind in Tabelle 9 gelistet.

Gradweise	$\mathcal{NUM}\{\ell m(C + S)\} \Rightarrow \sum_{\ell=2}^{\ell_{\max}} \left(C_{\ell} + \sum_{m=1}^{\ell} (C_{\ell m} + S_{\ell m}) \right)$ $C_{20}, C_{21}, S_{21}, C_{22}, S_{22}$ $C_{30}, C_{31}, S_{31}, C_{32}, S_{32}, C_{33}, S_{33}$ \vdots
Ordnungsweise	$\mathcal{NUM}\{m(\ell C + \ell S)\} \Rightarrow \sum_{\ell=2}^{\ell_{\max}} C_{\ell} + \sum_{m=1}^{\ell_{\max}} \left(\sum_{\ell=\max(2,m)}^{\ell_{\max}} C_{\ell m} + \sum_{\ell=\max(2,m)}^{\ell_{\max}} S_{\ell m} \right)$ $C_{20}, C_{30}, C_{40}, C_{50}, \dots, C_{\ell_{\max},0}$ $C_{21}, C_{31}, C_{41}, C_{51}, \dots, C_{\ell_{\max},1}$ $S_{21}, S_{31}, S_{41}, S_{51}, \dots, S_{\ell_{\max},1}$ \vdots
Getrennt	$\mathcal{NUM}\{m(\ell_e C + \ell_o C + \ell_e S + \ell_o S)\} \Rightarrow \sum_{\ell=1}^{\lfloor \ell_{\max}/2 \rfloor} C_{2\ell} + \sum_{\ell=1}^{\lfloor \ell_{\max}/2 \rfloor} C_{2\ell+1} +$ $\sum_{m=1}^{\ell_{\max}} \left(\sum_{\ell=m}^{\lfloor \ell_{\max}/2 \rfloor} C_{2\ell,m} + \sum_{\ell=m}^{\lfloor \ell_{\max}/2 \rfloor} C_{2\ell+1,m} + \sum_{\ell=m}^{\lfloor \ell_{\max}/2 \rfloor} S_{2\ell,m} + \sum_{\ell=m}^{\lfloor \ell_{\max}/2 \rfloor} S_{2\ell+1,m} \right)$ $C_{20}, C_{40}, C_{60}, C_{80}, \dots, C_{\ell_{\max},0}$ $C_{30}, C_{50}, C_{70}, C_{90}, \dots, C_{\ell_{\max}-1,0}$ $C_{21}, C_{41}, C_{61}, C_{81}, \dots, C_{\ell_{\max},1}$ $C_{31}, C_{51}, C_{71}, C_{91}, \dots, C_{\ell_{\max}-1,1}$ $S_{21}, S_{41}, S_{61}, S_{81}, \dots, S_{\ell_{\max},1}$ \vdots
'Kite' Blöcke	Trennung der Koeffizienten nach 1) niedrigem Grad, niedriger Ordnung 2) hohem Grad, niedriger Ordnung 3) hohem Grad, hoher Ordnung

Tabelle 9. Nützliche Anordnungen der harmonischen Koeffizienten, nach Schuh [SCH96].

Die Anzahl signifikanter Einträge einer auf die Matrixdiagonale konzentrierten, vollbesetzten Anordnung läßt sich durch Schwellenwerte reduzieren und zur Beschleunigung der Konvergenz beim konjugierten Gradientenverfahren nach Heestens und Stiefel [HS52], zur Vorkonditionierung heranziehen (PCG). Dabei ist die erforderliche Konditionsmatrix zur Beschleunigung der Konvergenz des Gradientenverfahrens aus der Missionsgeometrie sowie einem a priori Schwerefeld abzuleiten. Verschiedene Studien zur Lösung der übergrossen Gleichungssysteme dokumentieren die Schwierigkeiten, insbesondere bezüglich der Speicher- und Rechnerauslastung mit wachsender Anzahl der zu bestimmenden Parameter, z.B. PCG-Verfahren, Plank [PLA02]. Weitere Diskussion in Hinblick auf parallele Rechnerarchitekturen zu diesem Thema findet sich auch bei Xie [XIE05] zur monatlichen Auswertung von GRACE-Daten.

Den Verfahren zur direkten Inversion ist gemeinsam, dass die Normalgleichungsmatrix der linearisierten Beobachtungsgleichungen anhand der Modellmatrix zur Bestimmung der Parameter in einem additiven Verfahren berechnet werden muss. Dies rührt einerseits daher, dass die Modellmatrix nicht vollständig im Speicher gehalten werden kann, andererseits die einzelnen Beobachtungszeilen jeweils rekursiv aus einem Ausgangswert berechnet werden müssen. Ausgehend von der Potentialdarstellung der Kugelfunktionen

$$f(r, \phi, \lambda) = \sum_{n \geq 2, m \leq n} f_{\ell m}$$

$$f_{\ell m} = \sum \frac{\text{GM}}{R^\alpha} \lambda_\ell \left(\frac{R}{r}\right)^{\ell+\alpha} \bar{P}_{\ell m}(\cos \phi) \cdot \begin{cases} \bar{C}_{\ell m} \cos m\lambda \\ \bar{S}_{\ell m} \sin m\lambda \end{cases} \quad (146)$$

mit den vollständig normierten, reellen¹⁵ Entwicklungskoeffizienten $\bar{C}_{\ell m}$, $\bar{S}_{\ell m}$, den assoziierten Legendre Funktionen $\bar{P}_{\ell m}$, einem Referenzradius R (Konvergenzradius der anziehenden Massen) sowie einem Masstab GM, der sich aus dem Produkt der Gesamtmasse des Körpers mit der Newton'schen Gravitationskonstante ergibt. Die sphärischen Koordinaten (r, ϕ, λ) beziehen sich auf einen Ort ausserhalb oder direkt an der Oberfläche der anziehenden Massen und λ_ℓ beschreibt den Eigenwert nach dem Meissl-Schema, vgl. A7.

Linearisierung des Modells ergibt jeweils zwei Einträge, sofern $m > 0$ sonst, wegen des Rangdefektes des \sin -Terms, nur einen:

$$\frac{\partial f_{\ell m}}{\partial \bar{C}_{\ell m}} = \frac{\text{GM}}{R^\alpha} \lambda_\ell \left(\frac{R}{r}\right)^{\ell+\alpha} \bar{P}_{\ell m}(\cos \phi) \cos m\lambda$$

$$\frac{\partial f_{\ell m}}{\partial \bar{S}_{\ell m}} = \frac{\text{GM}}{R^\alpha} \lambda_\ell \left(\frac{R}{r}\right)^{\ell+\alpha} \bar{P}_{\ell m}(\cos \phi) \sin m\lambda, \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (147)$$

Eine einzelne Beobachtungsgleichung aus den partiellen Ableitungen des Modells nach den Parametern, ausgedrückt durch den funktionalen Zusammenhang $\ell + v = f(r, \phi, \lambda)$, kann in diesem Sinne z.B. in gradweiser Anordnung der Entwicklungskoeffizienten erstellt werden durch

$$a_i \equiv \ell_i + v_i = \left\{ \frac{\partial f_{20}}{\partial \bar{C}_{20}}, \frac{\partial f_{21}}{\partial \bar{C}_{21}}, \frac{\partial f_{21}}{\partial \bar{S}_{21}}, \frac{\partial f_{22}}{\partial \bar{C}_{22}}, \frac{\partial f_{22}}{\partial \bar{S}_{22}}, \frac{\partial f_{30}}{\partial \bar{C}_{30}}, \dots, \frac{\partial f_{nm}}{\partial \bar{C}_{nm}}, \frac{\partial f_{nm}}{\partial \bar{S}_{nm}} \right\}_i \quad (148)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial \bar{c}_{\ell m}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{c}_j}, \quad j = 1, \dots, (\ell + 1)^2 - 4$$

wobei

$$\bar{c}_j = \bar{c}_{\ell m} = \begin{cases} \bar{C}_{\ell m}, \bar{S}_{\ell m} & \text{falls } m \neq 0 \\ \bar{C}_{\ell m} & \text{sonst} \end{cases}, \quad j = \ell^2 - 3 + \begin{bmatrix} 2m - 1 \\ 2m \end{bmatrix}_{S_{\ell m}} \quad (149)$$

Sie lässt sich unter Vernachlässigung der Kofaktoren¹⁶ der Beobachtungen auch durch die Summe der tensoriellen Produkte als individuellen Zuschlag jeder einzelnen Beobachtungszeile zu den Normalgleichungen beschreiben, mit $a_i \in \mathbb{R}^j$, $A \in \mathbb{R}^i \times \mathbb{R}^j$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$

$$A^T \Sigma^{-1} A = \sum_i \sigma_i^{-2} a_{ij} \otimes a_{ij}, \quad (150)$$

wobei σ_i^2 die Varianz der Beobachtung ist. Die rechte Seite erhält man aus

$$z_j = A^T \Sigma^{-1} l_i = \sum_i \sigma_i^{-2} a_{ij} l_i. \quad (151)$$

15. die realen Koeffizienten gehen durch Multiplikation mit $(2 - \delta_{m,0})$ aus den komplexen Koeffizienten hervor.

16. es können allerdings zeitliche Korrelationen zwischen den Unbekannten durch entsprechende Filterfunktionen angebracht werden.

Die gradweise Anordnung bietet sich im Zuge eines rekursiven Schemas zur Berechnung der Legendre Funktionen an, es können aber durch Umsortieren beliebige Anordnungen, die beispielsweise die Korrelationen der Parameter untereinander stärker berücksichtigen, gewählt werden. Die Lösung erfolgt zweckmässig, aufgrund der positiven Definitheit der Normalgleichungen, mittels Dreiecksfaktorisierung nach Cholesky

$$U \cdot U^T = L^T L = A^T \Sigma^{-1} A \quad (152)$$

sowie den beiden Gleichungen,

$$\begin{aligned} U^T y &= z \\ Ux &= y, \end{aligned} \quad (153)$$

die aufgrund ihrer Struktur vorwärts bzw. rückwärts aufgelöst werden können. Im Prinzip ist daher keine Matrixinversion erforderlich. Dennoch lässt sich auch die Inverse aus diesem Schema heraus bilden. Da die rechte Seite durch Gl. (153) auf die Parameter abgebildet wird,

$$\begin{aligned} V: \mathbb{R}^j &\longrightarrow \mathbb{R}^j \\ A^T \Sigma^{-1} \ell &\longmapsto x, \end{aligned} \quad (154)$$

lässt sich jede Zeile oder Spalte der Einheitsmatrix in analoger Weise auf die entsprechenden Einträge der Kovarianzmatrix abbilden,

$$E \longmapsto \Sigma_{xx}; \quad (155)$$

denn es gilt

$$\begin{aligned} A^T \Sigma^{-1} A x &= A^T \Sigma^{-1} \ell \\ A^T \Sigma^{-1} A \Sigma_{xx} &= E. \end{aligned} \quad (156)$$

Das Verfahren zur Parameterschätzung der Kugelfunktionskoeffizienten sowie deren Kovarianzen stellt sich zusammenfassend folgendermassen dar

1. Aufbau der Normalgleichungen durch Überlagerung der einzelnen Beobachtungszuschläge und speichern, in eine Dreiecksmatrix sowie einem Vektor der rechten Seite
2. Faktorisieren in derselben Dreiecksform
3. Auflösen nach Parametern oder Kovarianzen durch vorwärts/rückwärts einsetzen.

Die Rechenzeit summiert sich dabei über die oben genannten Arbeitsschritte. Während die letzten beiden Punkte jedoch nur von der Anzahl der Parameter abhängen, akkumuliert die Anzahl der Beobachtungsdaten im ersten Punkt zusätzlich mit der Systemgrösse. Daher laufen die letzten beiden Schritte vergleichsweise schnell ab, wenn man die hohe Redundanz berücksichtigt, d.h. die Anzahl der Beobachtungsdaten mehrere 100-fach höher ist als die Anzahl der Parameter. Da die Beobachtungsdaten von Satellitenmissionen durchwegs untereinander stark korreliert sind, ist die statistische Aussage der Ergebnisse (Ko-/varianzen der Parameter) mit entsprechendem Vorbehalt zu betrachten, da i.a.R. zunächst keine Kofaktoren der Daten durch diesen Ansatz in das Rechenmodell eingeführt wurden; allerdings können auf dem Wege diskreter Filteroperationen bestimmte Charakteristiken des Messsignals hervorgehoben, bzw. unterdrückt werden; siehe auch Abschnitt 4.2.6. Die Rechenzeit zur Einführung der Beobachtungsdaten in das Normalgleichungssystem nimmt selbst bei paralleler Programmverarbeitung auf einem Computer-Verband ein enormes Ausmass an. So dauert die Auswertung einer geplanten GOCE-Messphase¹⁷ unter Auslastung von 64 Prozessoren insgesamt 1 Monat, siehe dazu Pail und Plank [PP04].

¹⁷. Geplant sind 6 Monate bei 1 Hz Datenaufzeichnungsrate, 467/29 Wiederholungsbahn.

Damit die Berechnung der Inversen effektiv durchgeführt werden kann, ist es unbedingt erforderlich, das Normalgleichungssystem während dem Aufbau sowie der Faktorisierung vollständig im Arbeitsspeicher zu halten. Dies stellt mit zunehmender Anzahl der Parameter eine limitierende Hürde dar, da eine Verdopplung der Auflösung ($L = 50 \rightarrow L = 100$) mit dem Faktor 4 bezüglich der Systemgrösse einhergeht. Selbst die schnell wachsende technische Entwicklung der Rechnersysteme stösst unweigerlich stets an ihre Grenzen, sodass die Gesamtlast derzeit auf dezentrale Recheneinheiten bzw. Speicherverwaltungen verteilt wird.

Für dieses Vorgehen spricht dabei, dass man die klassischen Berechnungskonzepte nicht zu verändern braucht, dagegen allerdings, dass man relativ einfache Rechenprogramme austauschen muss gegen multiprozessorfähige Algorithmen, was mit einem zusätzlichen, erheblichen Verwaltungsaufwand bezüglich der Datenverarbeitung verbunden ist. Darüberhinaus entstehen durch Parallelarchitekturen erhebliche Anschaffungs-, Betriebs- und Entwicklungskosten, die damit zwangsläufig zu Lasten von Personalinvestitionen gehen. Folgt man der empirischen „1.5 \times Jahr“-Regel, derzufolge sich die Anzahl der Transistoren auf einem Prozessor und damit die Leistungsfähigkeit bestehender Computersysteme alle 18 Monaten verdoppelt, so lösen sich manche Probleme mit der Zeit hingegen völlig von selbst.

Es drängt sich dagegen die Frage auf, wie man die bestehende Rechnerarchitektur möglichst effektiv einsetzen kann, um im Falle eines technischen Innovationsschubes ohne Veränderung weder des Konzeptes noch der erstellten Programme davon weitestgehend profitieren zu können.

Folgende Überlegungen seien hierzu angeführt:

1. Durch die Berechnung des tensoriellen Produkts jeder Beobachtungszeile muss jeweils der gesamte Arbeitsspeicher des Rechners adressiert werden. Durch Zusammenführen von Beobachtungsgruppen, also der Berechnung des Produktes zweier Matrizen, kann dies zwar effizienter geschehen; insgesamt stellen jedoch die wiederholten Lese-/und Schreibeanweisungen gegenüber der rein numerischen Berechnung der entsprechenden Zuschläge einen unnötigen Aufwand dar, zumal sich die Beobachtungsgruppen nicht beliebig vergrössern lassen.
2. Es ist nicht möglich das tensorielle Produkt mittels standardisierten Bibliotheken nur für den Dreiecksanteil auszuführen; so werden in der Praxis daher oftmals volle Systeme generiert.
3. 32-bit Computer-Systeme können nur bis maximal 4GB Speicher adressieren, was somit die natürliche Obergrenze der Gleichungen darstellt. Eine Kugelfunktionsentwicklung bis SH=160 (25.917 Parameter \sim 2.5GB) lässt sich bei Dreiecksspeicherung der Normalgleichungen damit noch bewerkstelligen, bei höherem Speicherbedarf treten allerdings bereits Allokationsprobleme auf. Moderne, 64-bit Adressen verarbeitende Computersysteme überwinden diese Hürde. Darüberhinaus können Fließkommazahlen (*double-precision*), die standardisiert mit 64-bit gespeichert werden, nunmehr nativ behandelt, d.h. innerhalb eines Taktzyklus' und damit schneller ausgeführt werden.
4. Teilt man die Parameter z.B. aufgrund ihrer Leistungsdichte in Haupt- und Nebenanteil, wobei von dem Nebenanteil unter Vernachlässigung von Korrelationen nur noch diagonale Blöcke ausgewertet werden, die sich dadurch unabhängig lösen lassen, so lässt sich der max. Entwicklungsgrad u.U. noch einmal wesentlich steigern.

Die ersten beiden Punkte sind durch den Stand der Technik weitgehend vorgegeben und können während der Auswertung nur in Nuancen beeinflusst werden, etwa durch plattformoptimierte Bibliotheken¹⁸ für Matrix-/Vektoroperationen. Hingegen lassen sie sich jedoch alternativ umgehen, indem grundsätzlich von der tensoriellen Produktbildung Abstand genommen wird.

18. Atlas, mkl, blas, lapack – Bibliotheken

Ein Eintrag in die quadratische Form kann auch in einem direkten Schritt durch Skalarprodukte nach dem Falkschen Schema berechnet werden. Dies bedeutet die Verwendung der Spaltenprodukte der Modellmatrix und impliziert damit einen nicht rekursiven Algorithmus für die Berechnung der Basisfunktionen, da sonst permanent redundante Berechnung durchgeführt werden müssten. Durch die Fourier-Zerlegung der Legendre Funktionen ist dies generell möglich, da sich über deren Komponentenmatrix im Prinzip eine wahlfreie, direkte Berechnungsmöglichkeit ergibt. Im Folgenden soll diese rechentechnische Vorgehensweise diskutiert werden.

Anmerkung 10. Mit dem Ausdruck nicht rekursiv sei gemeint, dass die partiellen Ableitungen der Kugelfunktionen nicht rekursiv in der Datendomäne berechnet werden. Zwar können auch die Fourier-Komponenten der Legendre Funktionen nach Kap. 2.4 rekursiv berechnet werden, jedoch unabhängig von den übrigen Beobachtungsspalten.

Anmerkung 11. Eine übereinstimmende Methode zur Studie des Fehlerverhaltens von Gradiometerdaten ist als Colombo's Methode der Fehleranalyse bekannt, Colombo [COL87]. In Koop [KOO93] findet sich eine Diskussion, die auf einer analytischen Berechnung der Normalgleichungsmatrix für den Fall der Satellitenbewegung entlang eines kreisförmigen Orbits beruht. Allerdings lässt sich diese Methode wiederum nur auf diesen Sonderfall anwenden. Darüberhinaus werden nur die Einträge der Blockdiagonalstruktur berechnet, da sich die restlichen aufgrund der Annahme einer Wiederholungsbahn zu Null ergeben.

4.2.2 Algorithmus

Die folgende Herleitung beschreibt den Fall, für den sich die Daten in dem sphärischen System der Kugelkoordinaten befinden. Die Methode ist uneingeschränkt übertragbar in die Bahnelemente unter Verwendung der Inklinationsfunktionen. Da jedoch der Vorteil der direkten Inversion gegenüber der Auswertung im Spektralbereich in der äusserst flexiblen Handhabung inhomogener Daten liegt (im Gegensatz zu denen entlang einer nominalen Bahn), würde dieser unter Einführung einer konstanten Inklination verloren gehen.

Die Einträge der Normalgleichungsmatrix zur Analyse einer harmonischen Funktion anhand von Kugelfunktionen, folgen in komplexer Schreibweise den vektoriellen Produkten

$$N_{\ell f}^{mn} = \left\langle \left(\frac{R}{r_i} \right)^{\ell+f+2\alpha} \hat{Y}_{\ell}^m, \hat{Y}_f^n \right\rangle, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (157)$$

wobei $\alpha - 1$ den Grad der Ableitung der skalaren Potentialfunktion nach den Beobachtungsdaten angibt. Ausgehend von den Legendre Funktionen nach Kap. 1

$$P_{\ell}^m := P_{\ell}^m(t_i) = \operatorname{re} \sum_k [(2 - \delta_k^0) A_k e^{jk\phi_i}], \quad k = \begin{cases} 0, 2, \dots, \ell/2 \\ 1, 3, \dots, [\ell/2] \end{cases} \quad (158)$$

mit der komplexen Rechengröße

$$A_k = i^{(\ell-m) \bmod 2} \cdot a_{\ell m}^k \quad (159)$$

bestehend aus den normierten, symmetrischen Fourier-Komponenten $a_{\ell m}^k$ lassen sich die erforderlichen reellen Produkt-Summen in einfacher Form, d.h. ohne Massstabsfaktor bzw. Eigenwerte, zur Berechnung der Einträge der Normalgleichungen auf folgende Weise definieren:

$$\begin{aligned} CC_{\ell f}^{mn} &= \langle u_t \cdot P_{\ell}^m \cdot \cos m\lambda_i, P_f^n \cdot \cos n\lambda_i \rangle \\ CS_{\ell f}^{mn} &= \langle u_t \cdot P_{\ell}^m \cdot \cos m\lambda_i, P_f^n \cdot \sin n\lambda_i \rangle \\ SC_{\ell f}^{mn} &= \langle u_t \cdot P_{\ell}^m \cdot \sin m\lambda_i, P_f^n \cdot \cos n\lambda_i \rangle \\ SS_{\ell f}^{mn} &= \langle u_t \cdot P_{\ell}^m \cdot \sin m\lambda_i, P_f^n \cdot \sin n\lambda_i \rangle \end{aligned} \quad (160)$$

mit der Feldfortsetzung

$$u_t = \left(\frac{R}{r_i} \right)^t \quad (161)$$

$$t = \ell + f + 2\alpha \quad \ell, f = \{2, \dots, L\} \quad (162)$$

und maximaler Auflösung L . Zunächst ist eine alternative Darstellung der Legendre Funktionen in Form ihrer Fourier-Reihe von Vorteil. Zusammen mit einem Vorzeichenparameter β

$$\beta_{lm} = (-1)^{\ell-m} \quad (163)$$

$$\beta_{lm}^{-1} = 0 - \beta \quad (164)$$

lässt sich auch schreiben

$$P_\ell^m = \sum_k (2 - \delta_k^0) a_{\ell m}^k \cdot \frac{1}{2} [e^{jk \cdot \phi_i} + \beta_{lm} \cdot e^{-jk \cdot \phi_i}]. \quad (165)$$

Dies bedeutet, dass die Basisfunktionen nun entweder die Werte $\cos k\phi_i$ oder $i \sin k\phi_i$ annehmen, je nachdem, um welche Phasenlage es sich bei der entsprechenden Legendre Funktion handelt. Die ersten und zweiten Ableitungen ergeben sich mit

$$dP_\ell^m = \sum_k (2 - \delta_k^0) a_{\ell m}^k \cdot \frac{jk}{2} [e^{jk\phi_i} \cdot \beta_{\ell m}^{-1} e^{-jk\phi_i}] \quad (166)$$

$$d(dP_\ell^m) = \sum_k (2 - \delta_k^0) a_{\ell m}^k \cdot -\frac{k^2}{2} [e^{jk\phi_i} \cdot \beta_{\ell m} \cdot e^{-jk\phi_i}] \quad (167)$$

und die Basisfunktionen in Gl. (166) nehmen entweder den Wert $ik \cos k\phi_i$ oder $-k \sin k\phi_i$ an. Anstelle der komplexen Berechnung in Gl. (158) sind die Basisfunktion nun entsprechend adaptiert und der real-Operator kann vermieden werden. Der Vorteil liegt darin, daß die Produkt-Summe der Kugelflächenfunktionen nun stets konsistent als inneres Produkt von Exponentialfunktionen formuliert werden kann. Man erhält z.B. für die Kombination der jeweils kongruenten Terme ($\cos m\lambda, \cos n\lambda$) den Ausdruck

$$\begin{aligned} CC_{lf}^{mn} &= \langle u_t \cdot P_\ell^m \cos m\lambda_i, P_f^n \cos n\lambda_i \rangle \\ &= (2 - \delta_k^0) a_{\ell m}^k \left\langle u_t \frac{1}{4} [e^{jk\phi_i} + \beta_{lm} e^{-jk\phi_i}] \cos m\lambda_i, \right. \\ &\quad \left. [e^{jh\phi_i} + \beta_{ln} e^{-jh\phi_i}] \cos n\lambda_i \right\rangle a_{fn}^h (2 - \delta_h^0) \\ &= (2 - \delta_k^0) a_{\ell m}^k \cdot T_{kht} \cdot a_{fn}^h (2 - \delta_h^0) \end{aligned} \quad (168)$$

wobei Summation entsprechend der Indizes vorrausgesetzt wird. Die jeweilige Matrix

$$T_{kht} = \frac{1}{4} \langle u_t [e^{jk\phi} + \beta_{lm} \cdot e^{-jk\phi_i}] \cos m\lambda_i, [e^{jh\phi_i} + \beta_{ln} \cdot e^{-jh\phi_i}] \cos n\lambda_i \rangle, \quad (169)$$

$$k, h \in \{0, 2, \dots, 2l_{\max}\}$$

stellt zunächst die Abbildung der Beobachtungspositionen auf vorläufige Konstanten dar und damit anschliessend die volle Information zur Berechnung der Normalgleichungsmatrix zur Verfügung. Dazu wird der Vektorraum $V \in \mathbb{C}^n$ der Basis der Beobachtungspositionen in Form des skalaren Produktes abgebildet

$$\begin{aligned} f: V \times V &\longrightarrow \mathbb{C}^{k \times h} \\ (\phi, \lambda, r) &\longmapsto T_{kht}. \end{aligned} \quad (170)$$

Den Konstanten T_{kht} kommt im Folgenden eine grundlegende Bedeutung zu, da sie bereits sämtlich vorab berechnet werden können. Die Elemente der Normalgleichungen können im Anschluss daran durch eine zweifache Linearkombination mit den Fourier-Komponenten der Legendre Funktionen expandiert werden, bzw. im Bedarfsfall, z.B. zum Zeitpunkt einer Faktorisierung, angefordert werden. Dies bedeutet im Grunde, daß zur Berechnung der Ko-/varianzmatrix kein Normalgleichungssystem mehr explizit aufgestellt werden muß, sondern das es rein speichertechnisch hinreichend ist, die inneren Produkte der exponentiellen Basen zu berechnen. Für die konkrete Berechnung wird man allerdings aus Gründen der Rechenzeit zunächst stets eine dreiecksgespeicherte Normalgleichungsmatrix zusammenstellen und diese anschliessend invertieren.

Die erforderlichen trigonometrischen Funktionen können bis zu einem maximalen Grad $2L$ ebenfalls vorab berechnet werden. Man erhält mit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $f: \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} g: \phi_i &\mapsto e^{j\phi_i} \\ f: x &\mapsto x^k \\ q_k: (g \circ f)(\phi_i) &\mapsto e^{jk\phi_i}, \quad 0 \leq k \leq 2L \\ w_m: (g \circ f)(\lambda_i) &\mapsto e^{jm\lambda_i}, \quad 0 \leq m \leq 2L \end{aligned} \quad (171)$$

wobei $q, w \in V$ jeweils Vektoren des Vektorraumes V sind. Integration der längenabhängigen Komponenten des Vektors w_m in Gl. (168) sowie komplex konjugierter Notation q^* , führt zu

$$T_{kht}^+ = \frac{1}{4} \langle u_t [q_k + \beta \cdot q_k^*] w_{m+n}, [q_h + \beta \cdot q_h^*] \rangle. \quad (172)$$

Neben der prograden Lösung mit w_{m+n} benötigt man ferner zur Berechnung der übrigen Varianten mit den $\sin\lambda$ -Termen zusätzlich wiederum eine retrograde Lösung, bei der die Indizes m und n voneinander subtrahiert werden

$$T_{kht}^- = \frac{1}{4} \langle u_t [q_k + \beta \cdot q_k^*] w_{m-n}, [q_h + \beta \cdot q_h^*] \rangle. \quad (173)$$

Die Berechnung der Normalgleichungseinträge kann nun unter Berücksichtigung der Additionstheoreme sowie den weiteren Abkürzungen, $a_k \in \mathbb{R}^k, b_h \in \mathbb{R}^h, 0 \leq k, h \leq 2L$

$$\begin{aligned} a_k &= (2 - \delta_k^0) a_{\ell m}^k \\ b_h &= (2 - \delta_h^0) a_{fn}^h \end{aligned}$$

erfolgen, zu

$$\begin{aligned} CC_{lf}^{mn} &= \operatorname{re} \left\{ a_k \cdot \zeta \cdot \frac{1}{2} [T_{kht}^+ + T_{kht}^-] \cdot b_h^T \right\} \\ CS_{lf}^{mn} &= \operatorname{im} \left\{ a_k \cdot \zeta \cdot \frac{1}{2} [T_{kht}^+ - T_{kht}^-] \cdot b_h^T \right\} \\ SC_{lf}^{mn} &= \operatorname{im} \left\{ a_k \cdot \zeta \cdot \frac{1}{2} [T_{kht}^+ + T_{kht}^-] \cdot b_h^T \right\} \\ SS_{lf}^{mn} &= \operatorname{re} \left\{ a_k \cdot \zeta \cdot \frac{1}{2} [T_{kht}^- - T_{kht}^+] \cdot b_h^T \right\} \end{aligned} \quad (174)$$

mit einem gemeinsamen Modifikator

$$\zeta = j^{(\ell-m) \bmod 2} \cdot (-j)^{(f-n) \bmod 2}, \quad (175)$$

der die Transformation aus Gl. (159) einschliesslich der Konjugation (Transposition) des zweiten Vektors b_h , berücksichtigt. Es ergeben sich insgesamt die Fälle,

$$\zeta = \begin{Bmatrix} j \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -j \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \ell - m: \text{ ungerade} \cap f - n: \text{ ungerade} \\ 1 & \text{falls } \ell - m: \text{ gerade} \cap f - n: \text{ gerade} \\ j & \text{falls } \ell - m: \text{ ungerade} \cap f - n: \text{ gerade} \\ -j & \text{falls } \ell - m: \text{ gerade} \cap f - n: \text{ ungerade} \end{cases} \quad (176)$$

was im weiteren Verlauf darauf verweist, dass die letzten beiden Fälle in Kombination mit den $j \sin \phi$ Termen stehen werden, wogegen die ersten beiden mit den $\cos \phi$ Termen.

4.2.3 Eine effiziente Speicherung der Modellbasen

Eine einfache Form der Speicherung der benötigten Produktkoeffizienten T^\pm kann realisiert werden, indem zunächst die erforderlichen Basisfunktionen berechnet werden

$$q_k^+ = \frac{1}{2} [e^{jk\phi_i} + e^{-jk\phi_i}] = \cos(k\phi_i) \quad (177)$$

$$q_k^- = \frac{1}{2} [e^{jk\phi_i} - e^{-jk\phi_i}] = j \sin(k\phi_i). \quad (178)$$

Anschliessend werden zwei Felder in drei Dimensionen aufgebaut, denen jede Dimension gemäß der Potentialentwicklung, ein Index der Separationsvariablen (ϕ , λ , r) zugeordnet wird. Man erhält

$$H^+(k, m, t) = \langle q_k^+(\phi), w_m(\lambda) \cdot u_t(r) \rangle \quad (179)$$

$$H^-(k, m, t) = \langle q_k^-(\phi), w_m(\lambda) \cdot u_t(r) \rangle. \quad (180)$$

Die Koeffizienten seien dabei definiert innerhalb der Grenzen $0 \leq k, m, t \leq 2L$ und insgesamt müssen zwei Felder angelegt werden, die die Koeffizienten zur Bestimmung der pro-/retrograden Werte in den Gln. (172–173) aufnehmen können. Dies läßt sich jedoch noch deutlich reduzieren und vereinfachen.

Da die Potentialentwicklung üblicherweise erst bei Grad 2 anfängt, $2 \leq \ell, f \leq L$, kann der Definitionsbereich der Koordinate der Feldfortsetzung (u_t) auf $4 \leq t \leq 2L$ reduziert werden.

Bei der Berechnung der inneren Produkte der Legendre Funktionen, mit Dimensionen k, h fällt zudem auf, dass sie ebenso wie die Ordnungen m maximal den Wert der jeweiligen Summe der Grade ($\ell + f$) annehmen können, d.h. $0 \leq k, m \leq (\ell + f)$ und somit keine Produkte in Gln. (179–180) mehr für die Koordinate t berechnet werden müssen, sobald $k, m > (\ell + f)$.

Da sich darüberhinaus die Koordinate k jeweils nur entweder gerade oder ungerade Werte annimmt, können H^+ sowie H^- in ein gemeinsames Feld zusammengelegt werden. Dies kann in Form eines Gartenzaunes überlegt werden: sofern sich an den Stellen $k^+ = \{0, 2, 4, \dots, t\}$ nach Gl. (177) reale Einträge mit $\cos k^+\phi$, befinden, werden die komplexen mit $j \sin k^-\phi$ an den Stellen $k^- = \{1, 3, 5, \dots, t\}$ angelegt und umgekehrt. Darüberhinaus gilt für die komplexen Terme mit $k = 0$, dass dieser Wert stets Null ist und somit der erste Eintrag fortgelassen werden kann. Wenn umgekehrt reale Einträge mit $k^+ = \{1, 3, 5, \dots, t\}$ erfolgen, so gelangen nunmehr die komplexen Werte an die Stellen $k^- = \{2, 4, 6, \dots, t\}$ wobei der Wert $k^- = 0$ gestrichen werden kann. Damit lässt sich die Gl. (179–180) neu formulieren zu einem gemeinsamen Feld

$$\left. \begin{array}{l} H(k^+, m, t-4) \\ H(k^-, m, t-4) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \langle q^+(k^+), w(m) \cdot u(t) \rangle \\ \langle q^-(k^+), w(m) \cdot u(t) \rangle \end{array} \right\}. \quad (181)$$

Die Koeffizienten k^\pm nehmen infolge der Zusammenlegung (=Versetzung) die folgenden Werte an

$$\begin{array}{lll} k^+ = 2h, & 0 \leq h \leq t/2 & t \text{ gerade} \\ k^+ = 2h - 1, & 1 \leq h \leq (t+1)/2 & t \text{ ungerade} \\ k^- = 2h, & 1 \leq h \leq t/2 & t \text{ gerade} \\ k^- = 2h, & 0 \leq h \leq t/2 & t \text{ ungerade} \end{array}$$

Anhand zweier konkreter Beispiele soll dies noch einmal deutlich gemacht werden:

Beispiel 12. Für $t = 7$, ausgehend von $\ell = 2$, $f = 3$, werden die Koordinaten $k = \{0, 2\}$ sowie $h = \{1, 3\}$ benötigt. Deren Kombination folgt damit einem ungeraden 2-Schritt-Muster

$$k \oplus h = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad (182)$$

das je nach Ordnungen m, n den Zugriff auf entweder $\cos k\phi \cdot \cos h\phi$, $\sin k\phi \cdot \sin h\phi$ oder $\sin k\phi \cdot \cos h\phi$ und $\cos k\phi \cdot \sin h\phi$ ermöglichen muss. Im Falle der kongruenten Produkte ($\cos - \cos$ oder $\sin - \sin$) können diese aus den reellen Basen q^+ durch die Überlagerung von $k \oplus h$ mit $k \ominus h$ berechnet werden, wohingegen die gemischten Produkte aus den imaginären Basen q^- hervorgehen.

Demzufolge ist $k^+ = \{1, 3, 5\}$ und die realen Produkte nach Gl. (181) werden an die entsprechenden Stellen in H geschrieben. Die zugehörigen imaginären Terme q^- werden nun an die freien Stellen $k^- = \{0, 2, 4\}$ in versetzter Manier geschrieben.

Beispiel 13. Mit $t = 8$ nehmen die benötigten Indizes $k \oplus h$ nur gerade Werte an; daher wird $k^+ = \{0, 2, 4, 6\}$ und die entsprechenden Terme für q^+ werden in Gl. (181) eingesetzt. Die Indizes für die imaginären Terme q^- bleiben genauso, allerdings wird für $q^-(0) = 0$ kein Eintrag benötigt und die übrigen Werte können an die freien Stellen $k^- = \{1, 3, 5\}$ geschrieben werden.

Die Normalgleichungseinträge können aus den gespeicherten Koeffizienten in H anschliessend effizient berechnet werden. Zunächst werden die entsprechenden Einträge in zwei Hilfsfelder extrahiert. Durch jeweils Summation und Differenzbildung erhält man,

falls $(\ell + f - m - n)$ gerade

$$\begin{aligned} 2T_{kh}^+ &= \beta_{lm} \cdot H(k+h, m+n, t) + H(|k-h|, m+n, t) \\ 2T_{kh}^- &= \beta_{lm} \cdot H(k+h, |m-n|, t) + H(|k-h|, |m-n|, t) \end{aligned} \quad (183)$$

falls $(\ell + f - m - n)$ ungerade

$$\begin{aligned} 2T_{kh}^+ &= \beta_{fn} \cdot H(k+h-1, m+n, t) \\ &\quad - \text{sign}(k-h) \cdot H(|k-h|-1, m+n, t) \\ 2T_{kh}^- &= \beta_{fn} \cdot H(k+h-1, |m-n|, t) \\ &\quad - \text{sign}(k-h) \cdot H(|k-h|-1, |m-n|, t). \end{aligned} \quad (184)$$

Für den Fall, dass $(n > m)$, müssen die Variablen T_{kh}^- zusätzlich konjugiert werden. Man erkennt, dass die Variationen $(k+h)$ und $(k-h)$ zur Extraktion der korrekten Produktsommen der Legendre Funktionen dienen sowie die Variationen von $(m+n)$ mit $(m-n)$ schliesslich zu den entsprechenden Einträgen CC, CS, SC, SS der Normalgleichungen führen.

Der nächste Schritt ist die Verknüpfung der skalaren Produkte der trigonometrischen Basen der Kugelfunktionen mit den Fourier-Komponenten der Legendre Funktionen. Aus den extrahierten Einträgen der Hilfsmatrix erhält man durch Linearkombination mit den Fourier-Komponenten entsprechend Gl. (174) die beiden komplexen Skalare

$$\begin{aligned} c &= \zeta \cdot A_k \cdot T_{kh}^+ \cdot B_h^T \\ d &= \zeta \cdot A_k \cdot T_{kh}^- \cdot B_h^T \end{aligned} \quad (185)$$

mit den Kombinationsfaktoren nach Gl. (176). Für die Berechnung der Normalgleichungseinträge einer einzelnen Messgrösse ist jeweils noch der spezifische Eigenwert der Beobachtung mit anzusetzen,

$$\begin{aligned} c &= \zeta \cdot A_k \lambda(l) T_{kh}^+ B_h^T \lambda(f) \\ d &= \zeta \cdot A_k \lambda(l) T_{kh}^- B_h^T \lambda(f). \end{aligned} \quad (186)$$

Die Normalgleichungseinträge ergeben sich abschliessend zu

$$\begin{aligned}
 CC_{\ell f}^{mn} &= \operatorname{re} \frac{c+d}{4} \\
 CS_{\ell f}^{mn} &= \operatorname{im} \frac{c-d}{4} \\
 SS_{\ell f}^{mn} &= \operatorname{re} \frac{d-c}{4} \\
 SC_{\ell f}^{mn} &= \operatorname{im} \frac{c+d}{4}
 \end{aligned} \tag{187}$$

Die dabei benötigten Rechenoperationen für beide Gleichungen in (185) belaufen sich auf $lf/2$. Zur Berechnung sämtlicher Dreieckseinträge der Normalgleichungsmatrix aus den vorher bestimmten Hilfsgrössen werden bei Durchlaufen der Kaskade zum Belegen der Dreiecksmatrix der Normalgleichungen,

$$N_L = \sum_{\ell=2}^L \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{f=\ell}^L \sum_{n=0}^f, \tag{188}$$

insgesamt

$$N_L = \sum_{\ell=2}^L (\ell+1) \cdot (\ell+L+2) \cdot \left(\frac{L-\ell+1}{2} \right) \cdot \ell(L-\ell+1) \tag{189}$$

Rechenoperationen zur Extraktion der Daten ausgeführt; bei $L = 100$ ergibt dies ca. $N_L = 3 \times 10^{10}$, was damit etwa dem Aufwand einer Faktorisierung $\mathcal{O}(\frac{1}{3}L^6)$ entspricht.

Ein Gleichungssystem von $\text{SH} = 180$ nimmt für die Hilfswerte insgesamt den Speicher von

$$(2 \times 180 + 1)^2 (2 \times 181 - 5) \times 16 \text{Byte} \simeq 710 \text{MB}$$

ein, im Gegensatz zu 4GB für die resultierende Normalgleichungsmatrix, kompakt gespeichert in Dreiecksform. Das Feld der Hilfswerte ist jedoch in hohem Masse unvollständig besetzt, sodass man dessen Speicherbedarf noch einmal drastisch verringert kann. Während der Umwandlung in die Normalgleichungseinträge lassen sich gerades und ungerades t getrennt auswerten, Abb. 23. Daher können die Berechnungen auch zunächst nur für gerades und anschliessend ungerades t durchgeführt werden, was einer Halbierung in drei Dimensionen gleich kommt.

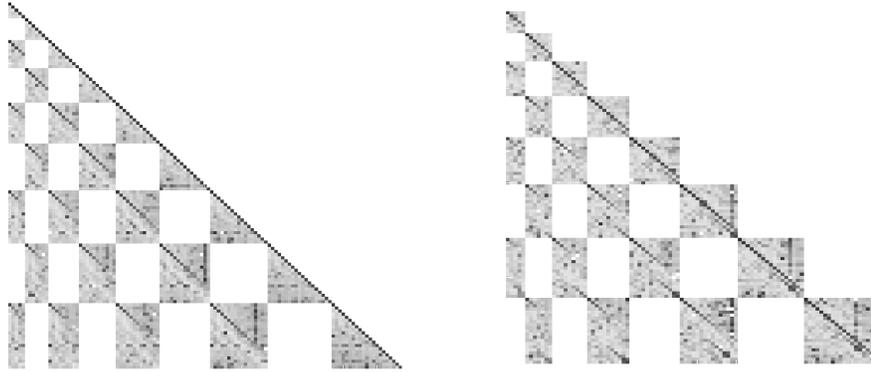


Abbildung 23. Belegung der Normalgleichungsmatrix für $2 \leq l, f \leq 10$, anhand von zwei sukzessiven Rechenschritten, links für $(l+f)$ gerade und rechts falls $(l+f)$ ungerade.

Die effektive Feldgrösse der Hilfswerte sinkt dadurch jeweils um den Faktor 2^3 und ist somit problemlos zu handhaben. Man erkennt daran ebenfalls die starke Reduktion der Rechenoperationen; die Anzahl der zu berechnenden empirischen Skalarprodukte der trigonometrischen Basen der Kugelfunktionen ergibt z.B. für $L = 180$

$$N_t = \sum_{t=4}^{2L} (t+1)^2 = 15747151. \tag{190}$$

Gegenüber der Anzahl an Skalarprodukten, die nötig sind zur Berechnung der Dreiecksmatrix des entsprechenden Normalgleichungssystems lässt sich daraus ein linearen Faktor bestimmen, in Abhängigkeit von dem jeweils maximalen Grad der Auflösung

$$\tau = \frac{[(L+1)^2 - 4][(L+1)^2 - 3]/2}{N_t} \approx 0.19L \quad (191)$$

Bei einer Auflösung von $L = 250$, wird $\tau = 47$. Bei Vorliegen mehrerer Messdaten in der selben Beobachtungsposition, wie z.B. der Tensordiagonalen der Gradiometermessungen sowie der Störpotentialkomponente aus der präzisen Bahnbestimmung, lassen sich die Normalgleichungseinträge durch Kombination der Eigenwerte aus der selben intermediären Matrix heraus ableiten; vgl. auch Abschnitt 1.2.5. Es kommt somit zu einer Vervielfachung von τ , was die Berechnungen in Abhängigkeit zur Datenanzahl drastisch beschleunigt.

Anmerkung 14. Die Umwandlung in die Normalgleichungsmatrix in Gl. (185) kann aufgrund der besonderen Struktur der überlagerten Indizes k und h statt durch zwei aufeinanderfolgende Vektor-/Matrixprodukte auch durch die Realisierung einer Faltung durchgeführt und damit die Zahl der notwendigen Operationen nochmals verringert werden.

4.2.4 Leistungstests

Die folgende Zeitabschätzung beruht auf der simulierten Berechnung verschiedener Ausgleichungen mit einem Umfang von 250.000 Beobachtungen, Abb 24. Der Hauptprozess berechnet das intermediäre Feld H . Die Umwandlung H/N erzeugt daraus die Normalgleichungsmatrix. Die Inversion berechnet anschliessend die Lösung durch eine Faktorisierung nach Cholesky.

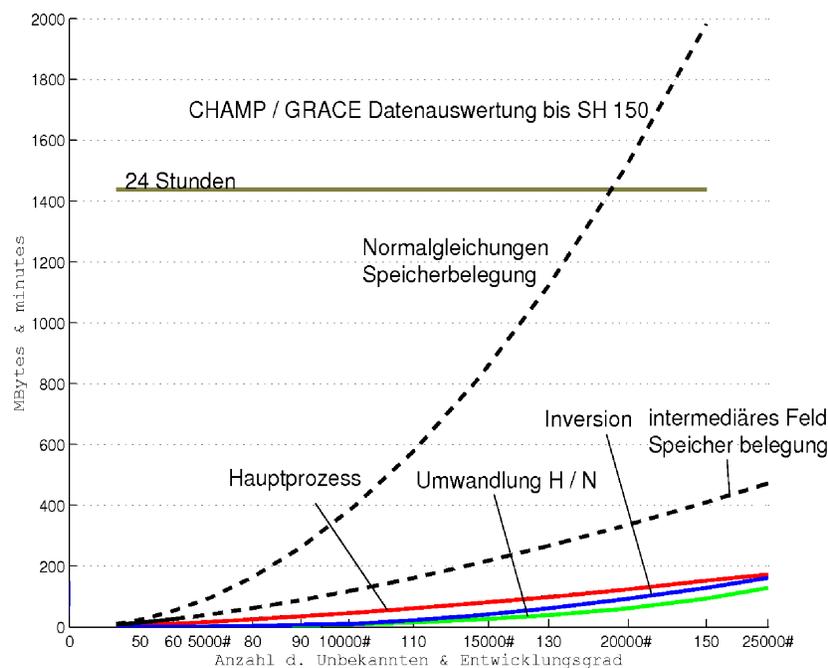


Abbildung 24. Zeit-/Speicherbedarf gegenüber Anzahl der Modellparametern.

In Abb. 25 sind die Gesamtrechenzeit zur Lösung der Entwicklungskoeffizienten umgerechnet auf eine einzelne Beobachtung aus Simulationen bis SH 200 angegeben. Es ergibt sich daraus, dass geschätzt etwa $3500 \cdot L$ Beobachtungsdaten zu Parität zwischen Datenintegration und Lösen der Unbekannten führt.

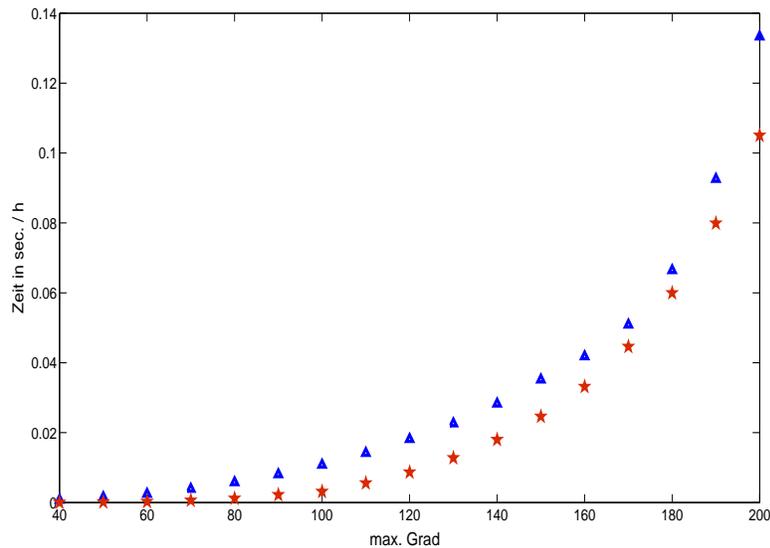


Abbildung 25. Rechenzeit in Sekunden zur Integration einer einzelnen Beobachtung in das intermediäre Gleichungssystem (Δ) sowie zur Umwandlung und Berechnung der Unbekannten ($*$) in Stunden, jeweils in Abhängigkeit vom Entwicklungsgrad.

4.2.5 Gemeinsame Auswertung heterogener Komponenten aus SGG- und SST-Messungen

Aufgrund der übereinstimmenden Messposition sowohl der Gradiometerdaten als auch der Bahndaten genügt es, die intermediäre Matrix einmalig zu berechnen, da in ihr lediglich die Positionen der Messungen kompiliert werden. Es lassen sich dann die einzelnen Normalgleichungen unter Berücksichtigung der jeweiligen spezifischen Eigenwerte daraus ableiten. Diese lauten für die diagonalen Tensorkomponenten sowie dem xz -Nebendiagonalelement, sowie für die kinetische Energie aus der präzisen Bahnbestimmung

anistrop

$$\lambda_{xx} = -(k^2 + \ell + 1)$$

$$\lambda_{yy} = k^2 - (\ell + 1)^2$$

$$\lambda_{xz} = (\ell + 2)ik$$

isotrop

$$\lambda_{zz} = (\ell + 1)(\ell + 2)$$

$$\lambda_T = 1.$$

(192)

Die Eigenwerte des Gradiometertensors können jedoch, wegen der Frequenzabhängigkeit nicht durch k aufaddiert werden, sondern müssen im Sinne ihrer Produkte $\lambda(\ell)^T \lambda(f)$ miteinander kombiniert werden. Man erhält für die gleichzeitige Auswertung der drei Tensorkomponenten die Kombination

$$\lambda_3(\ell) = \frac{2k^2 - (\ell + \ell^2)}{\sqrt{2}}, \quad (193)$$

die die beiden anisotropen Komponenten verbindet, und kann mit

$$c = \zeta \cdot (A_k \lambda_3(\ell) T_{kh}^+ \lambda_3(f) B_h^T + A_k T_{kh}^+ B_h^T \cdot K_{\ell f}), \quad (194)$$

sowie analog für d , die Normalgleichungseinträge auflösen. Der 2. Term bindet dabei die isotropen Daten ein und ein gemeinsamer Faktor skaliert das Ergebnis zusammengefasst für alle drei (vier) Komponenten

$$K_{\ell f} = 1.5\ell^2 f^2 + 3(\ell^2 + f^2) + 4.5(\ell f^2 + f\ell^2) + 13.5\ell f + 9(\ell + f) + 6(7) \quad (195)$$

wobei die Zahl (7) gilt, sofern die SST-Komponente hinzugefügt wird.

Anmerkung 15. Aufgrund der quadratischen Form ist die Laplace-Bedingung hier nicht mehr erfüllt, sonst wäre eine gemeinsame Auswertung der Tensordiagonalen gar nicht möglich. Bei der Auswertung im Frequenzbereich ist eine Überlagerung der Messdaten in dieser Form nicht möglich, da das Messsignal Null ergibt.

$$\lambda_{r;r}^2 + \lambda_{\theta;\theta}^2 + \lambda_{\lambda;\lambda}^2 \neq 0 \quad (196)$$

Ein vollständiger GOCE-Monat lässt sich unter diesen Umständen noch stets in einem vertretbaren Rahmen berechnen. Dennoch ist der Aufwand verhältnismässig hoch. Daher soll im Folgenden untersucht werden, ob nicht die Reduktion auf eine Kugel, wie sie bei geringen Exzentrizitäten durchgeführt werden kann, zu einer entscheidenden Verkürzung der Rechenzeit führt.

4.2.6 Vereinfachung auf der Kugel und bei nahezu kreisförmigen Satellitenbahnen

Sofern die Daten in einem konstanten Abstand \bar{r} von der Referenzkugel gegeben sind, bzw. dorthin reduziert werden können, genügt es, die intermediäre Matrix lediglich für zwei primäre Fälle, ohne den Höherenterm u_t anzulegen, einmal für ($t=\ell+f$) gerade bzw. ungerade im anderen Fall. Während der Umwandlung in die Normalgleichungsmatrix kann dann jeweils die konstante Höhe

$$\bar{u}_t = (R/\bar{r})^t, \quad \bar{r} = \text{const.} \quad (197)$$

als skalarer Faktor hinzugefügt werden. Dadurch lässt sich der Aufwand zur Berechnung des Hilfsfeldes um den Faktor L verringern und es verbleiben nurmehr die beiden konstanten Prozesse bezüglich der Datenanzahl, d.h. Umwandeln und Lösen des Gleichungssystems.

Annähernd kreisförmige Bahnen tieffliegender Satelliten (LEO) von geringer Bahnexzentrizität können durch Berücksichtigen zusätzlicher Terme behandelt werden. Da LEO im Wesentlichen durch Erdabplattung ($f \approx 1:300$) beeinflusst sind, führt dies zu Exzentrizitäten von $e \approx 0,0017$. Es können aber theoretisch auch global verteilte, terrestrische Daten mittels einer Taylorentwicklung an beliebigen Höhen in das Modell integriert werden.

Dazu kann der radiale Abstand in eine Taylorreihe gegenüber der mittleren Höhe entwickelt werden, mit $\Delta r = r - \bar{r}$

$$\left(\frac{R}{r}\right)^t = \left(\frac{R}{\bar{r}}\right)^t \left[1 - t \frac{\Delta r}{\bar{r}} + \frac{1}{2}(t^2 + t) \left(\frac{\Delta r}{\bar{r}}\right)^2 - \frac{1}{6}(t^3 + 3t^2 + 2t) \left(\frac{\Delta r}{\bar{r}}\right)^3 + \dots \right]. \quad (198)$$

In Gl. (181) werden anstatt der radialen Terme u_t nunmehr die Felder H_{kma} mit $u_a = \left(\frac{\Delta r}{\bar{r}}\right)^a$ belegt, wobei $a = 0, 1, 2, 3, \dots, n$, mit n der Anzahl der Taylorglieder. Während der Umwandlung in die Normalgleichungsmatrix können diese dann jeweils in Form von Korrekturen angebracht werden

$$\begin{aligned} H_{kmt} = & \bar{u}_t \left(H_{kma} - \bar{u}_t t H_{km1} + \frac{1}{2} \bar{u}_t (t^2 + t) H_{km2} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{6} \bar{u}_t (t^3 + 3t^2 + 2t) H_{km3} + \dots \right). \end{aligned} \quad (199)$$

Die Reihe konvergiert nicht besonders schnell, sodass in Abhängigkeit von der Grösse der Bahnexzentrizität eine Anzahl von $n \geq 12$ Terme berücksichtigt werden muss. Denkbar sind auch andere Approximationen, die mittels geeigneter Bahnvariablen spezifisch auf die Geometrie des Satellitenproblems eingehen, z.B. nach D'Alambert. In Abb. 26 ist die Konvergenz der Taylorreihe für verschiedene Hilfsgrössen H_{kmt} dargestellt mit verschiedenen Graden ($\ell + f$) in Form von relativen Differenzen $(H_{kmt} - H_{kmt}^{\text{ref}})/H_{kmt}^{\text{ref}}$, zu der exakten Lösung H_{kmt}^{ref} , die mit dem korrekten Höhenterm berechnet wurde. Für geringe Exzentrizitäten ($e < 0.002$) genügen bereits 12 Terme.

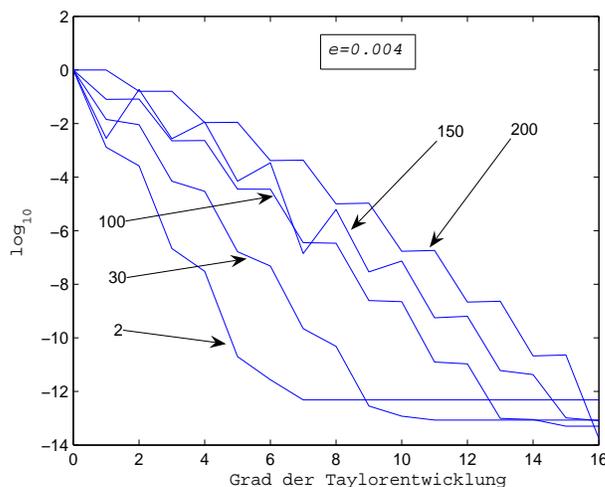


Abbildung 26. Konvergenz der Taylorentwicklung in den Produktsummen der trigonometrischen Basisfunktionen gegenüber der Referenzlösung, jeweils für unterschiedliche Grade der Produktsummen ($\ell + f$).

In Tab. 10 werden die erforderlichen Rechenzeiten für den vollbesetzten, wie für den Fall der vereinfachten Berechnung auf der Kugel gegenübergestellt. Für die gemeinsame Auswertung aller Messdaten (3 Tensorkomponenten, 1 kin. Energie) erhöhen sich die Werte der vorletzten Spalte geringfügig, wegen der Überlagerung der Messdaten nach Gl. (193). Die Rechenzeit für eine Taylorentwicklung bei nahezu kreisförmigen Bahnen wurde an dieser Stelle nicht untersucht; jedoch lässt sich davon ausgehen, dass sich die Dauer zum Berechnen der Hilfsgrössen entsprechend der Anzahl der Korrekturterme gegenüber der Rechenzeit auf der Kugel erhöht, sowie geringfügig bei der Umwandlung in die Normalgleichungseinträge.

L	Hilfsgrössen(vollbes.)	Hilfsgrössen(Kugel)	$H \Rightarrow N$	Auflösen d. Unbek.
100	466	10	8	10
120	786	14	24	38
140	1225	18	60	91
160	1811	23	143	175
180	2879	33	289	358

Tabelle 10. Rechenzeiten in *Minuten* für einen GOCE Monat ($\simeq 2.6$ Mio Beobachtungen bei 1Hz Aufzeichnungsrate) jeweils zum maximalen Entwicklungsgrad L .

4.2.7 Berechnung mit einfacher Genauigkeit

Da die Normalgleichungsmatrix in einem unabhängigen Schritt aus vorab berechneten, empirischen Hilfsgrössen gebildet wird, stellt sich abschliessend noch die Frage, ob die Inversion des Systems nicht auch mit einfacher Rechengenauigkeit durchgeführt werden kann. Dazu sei zunächst der Zahlenbereich der Erdschwerefeldkoeffizienten nach Reduktion um den Normalpotentialanteil näher betrachtet. Dabei zeigt es sich, dass ein Exponent von 10^{-6} aus den Unbe-

kannten gezogen werden kann. Die danach verbleibenden Störpotentialkoeffizienten liegen fast ausschliesslich innerhalb der 10^{-8} Grenze und können damit im Prinzip einheitlich mit einfacher Genauigkeit dargestellt werden, Abb.

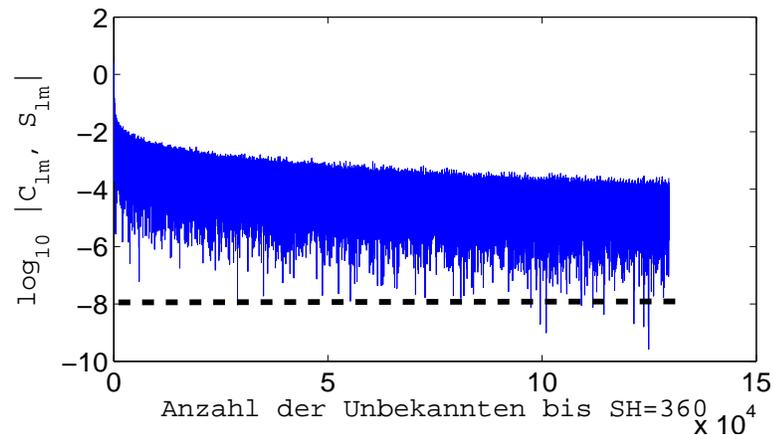


Abbildung 27. Dimensionslose Störpotentialkoeffizienten nach Anbringen eines Faktors von 10^{-6} .

Ein Experiment mit radialen Gradiometerdaten auf einer simulierten Wiederholungsbahn ergab nach Inversion des Systems mit einfacher Rechengenauigkeit bis $SH=190$ folgendes Ergebnis, Abb. 28

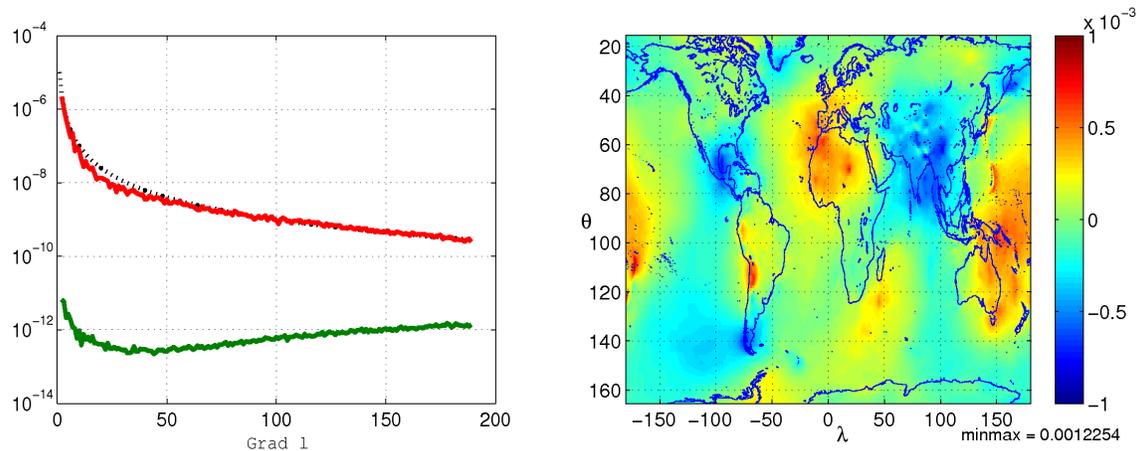


Abbildung 28. Gradvarianzen aus Koeffizienten die aus Inversion in einfacher Stellengenauigkeit berechnet wurden, gegenüber der Ausgangslösung (links). Die daraus hervorgehenden, globalen Unterschiede auf Bahnhöhe liegen im Bereich von $10^{-3}m$ Geoidhöhenäquivalent (rechts).

Hinsichtlich der Inversion des Systems mit einfacher Rechengenauigkeit lässt sich festhalten, dass auf Satellitenniveau von hinreichenden Ergebnissen ausgegangen werden kann. Allerdings trifft dies nicht mehr zu wenn aus dem erhaltenen Modell die gesuchten Werte auf Geoidhöhe mit den Ausgangsdaten verglichen werden. Fehler im Millimeter Bereich verstärken sich allmählich zu Zentimeterfehlern auf Geoidniveau. Die Speicherreduktion ist damit eventuell nur dann sinnvoll, wenn auch tatsächlich globale Daten auf Geoidniveau ausgewertet werden. Der erzielte Vorteil aus der Speicherreduktion wiegt jedoch gewaltig. Bei gleichem Speicheraufwand kann das auszuwertende System verdoppelt und damit die maximale Auflösung einer globalen Erdschwerefeldlösung deutlich gesteigert werden. Unter Einbeziehung weiterer, global verteilter Daten (z.B. aus Fluggravimetrie) ist dieser Vorteil aufgrund der Aquisition der Daten im Prinzip auf Geoidniveau, womöglich überaus erfolgreich anwendbar.

4.2.8 Der Dekorrelationsprozess

Durch den elementweisen Aufbau der Normalgleichungen in einem direkten Rechenschritt stellt sich die Frage, inwiefern Kovarianzinformationen während des Aufbaus mit berücksichtigt werden können. Dadurch kann z.B das Fehlerverhalten von Messensoren wie eines Akzelerometers oder Gradiometers berücksichtigt werden, aber auch empirische Korrelationen aus der genauen Positionsbestimmung mittels GPS. Man spricht in diesem Zusammenhang von einem Dekorrelationsprozess, durch den sowohl die Daten als auch die Modellmatrix modifiziert werden. Ziel ist dabei, neben dem deterministischen Modell der Parameter darüberhinaus auch stochastische Annahmen in das Modell einzuführen. Eine ausführliche Studie zu diesem Thema findet sich bei Schuh [SCH02], wobei insbesondere auf die Verwendung von verschiebungsinvarianten Filtern beim Aufbau der Normalgleichungssysteme eingegangen wird. Diese können schrittweise, d.h. auf jede Beobachtungzeile beim Bilden des dydischen Produktes, angewendet werden, aber ebenso spaltenweise. Nachdem die Hilfsmatrix in Gl. (181) die empirischen Spaltenprodukte zweier Basisfunktionen der Kugelfunktionen beinhaltet, kann die zeitliche Korrelation der Daten in Form eines diskreten Filters während der Berechnung der inneren Produkte angebracht werden, so als würden bereits die Produkte der Kugelfunktionen gebildet. Mit der faktorisierten Kovarianzmatrix

$$\begin{aligned}\Sigma &= R^T R \\ F &= (R^{-1})^T\end{aligned}\tag{200}$$

ergibt sich das dekorrelierte System daraus zu

$$\bar{N}_{\ell f}^{mn} = \langle u_t \cdot a_{\ell m}^k \cdot F \cdot e^{jk\phi_i + m\lambda_i}, a_{f n}^h \cdot F \cdot e^{jh\phi_i + n\lambda_i} \rangle\tag{201}$$

wobei die dekorrelierten Funktionen nun lauten

$$\bar{e}^{jk\phi_i + m\lambda} = F \cdot e^{jk\phi_i + m\lambda_i},\tag{202}$$

sowie die zugehörigen Beobachtungen

$$\bar{\ell} = F\ell.\tag{203}$$

Wegen der Grösse des Systems und da sich die Korrelationen vor allem nur über beschränkte zeitliche Ausdehnung erstrecken, kann der Prozess durch diskrete zeitinvariante ARMA Filter beschrieben werden. Bei der Auswertung im Frequenzbereich können hingegen diskrete Bandpassfilter unmittelbar im Spektralbereich auf die Daten angewendet werden.

4.3 Zusammenfassung

In diesem Abschnitt konnte gezeigt werden, dass eine alternative Herangehensweise an die Berechnung von Normalgleichungssystemen zur Auswertung globaler Erdschwerefelddaten durchführbar ist. Die erforderlichen Produkte der Basisfunktionen lassen sich dazu in zwei unabhängigen Rechenschritten bereitstellen ohne dass numerische Diskrepanzen zu der konventionellen Methode auftreten. Durch das diskutierte Verfahren werden redundante Rechengänge deutlich vermindert.

Es ergibt sich daraus ein flexibles Berechnungsverfahren zur Auswertung irregulärer Schweredaten. Mit ihm können sämtliche Beobachtungsdaten, d.h. auch diejenigen der Satellitensysteme unter Reibungsverlusten und somit keiner Wiederholungsbahncharakteristik, effektiv miteinander kombiniert werden. Zur Berechnung der Entwicklungskoeffizienten kommt ein Inversionsverfahren zur Anwendung, das in einem Zwischenschritt die empirischen Produktsummen der harmonischen Basisfunktion der Kugelfunktionen bestimmt. Gegenüber der Berechnung aussch-

liesslich im Frequenzbereich durch lineare Verknüpfung der Entwicklungskoeffizienten sind folgende Vorteile zu nennen:

- a) Aufgrund der realen Messanordnung sind die Unbekannten zumeist vollständig korreliert; daher ist das Verfahren der Matrixinversion konzeptuell richtig, solange auch Kovarianzen der Beobachtungen Berücksichtigung finden. Dies kann in Form von verschiebungsinvarianten Filtern erfolgen, die zeitliche Korrelationen sowie das spezifische Messband des Sensors mit berücksichtigen.
- b) Durch Annahme einer annähernd kreisförmigen, in sich geschlossenen Bahnspur zerfällt das Gleichungssystem in eine block–diagonale Struktur, sodass die Berechnungen wesentlich reduziert werden können. Sofern kombinierte Lösungen mit anderen Satellitenmissionen berechnet werden sollen, bei denen vorgenannte geometrische Annahmen nicht zutreffen, kann es jedoch von Vorteil sein, vollständige Systeme zu erstellen.
- c) Der maximale Auflösungsgrad einer Kugelfunktionsentwicklung ist im Wesentlichen von der Speicherkapazität des Rechensystems zur Inversion der Daten vorbestimmt. Die Integration der Daten durch die zu bildenden skalaren Produkte, reduziert sich dagegen von $L^4/2$ beim Berechnen der klassischen Dreiecksmatrix auf $n \cdot 4L^2$ in Form der intermediären Matrix, wobei n der Grad einer Taylorentwicklung ist. Rechentechnisch sind damit Potentialentwicklungen in Grössenordnungen von $L > 500$ bei vorliegen entsprechend hochauflösender Beobachtungsdaten ohne Schwierigkeiten realisierbar.
- d) Da die Satellitenbewegung stets auch annähernd eine Wiederholungsbahncharakteristik annimmt, lassen sich Erdschwerefeldmodelle bis zu $L \leq N_o$ berechnen, wobei N_o die Anzahl der Umläufe innerhalb der Wiederholungsperiode bezeichnet. Das Nyquist–Kriterium $L < \beta/2$ bei Anwenden des FFT–Operators kann aufgrund der Berücksichtigung von Korrelationen zwischen den Ordnungen überwunden werden.
- e) Die Normalgleichungen können unter bestimmten Voraussetzungen mit nur einfacher Genauigkeit invertiert werden. Während der Umwandlung der Hilfsmatrix in die Normalgleichungsmatrix lässt sich eine Speicherhalbierung für die Zahlenwerte durchführen. Es kann dadurch die Systemgrösse noch einmal verdoppelt werden.
- f) Das Verfahren eignet sich immer auch für den Einsatz auf multiprozessorfähigen Computersystemen, da sich Teilbereiche völlig unabhängig bearbeiten lassen. Moderne Multi–kern–Architekturen machen eine Lastenteilung sehr einfach, da stets auf den gemeinsamen Speicher zugegriffen werden kann.

5 Genauigkeitsbetrachtungen globaler Erdschwerfeldmodelle

Die Fehlerschätzung der Parameterbestimmung von Erdschwerfeldmodellen weist unter Umständen Defizite hinsichtlich der tatsächlichen Genauigkeit des Modells auf. Dies kann folgende Ursachen haben

- es werden keine a priori Kovarianzen berücksichtigt, d.h. die Beobachtungen werden gleichgewichtig angenommen
- grob fehlerhafte oder teilweise systematisch fehlerhaftete Daten sind nur schwer aus den Eingangsdaten zu eliminieren
- es werden iterative Lösungsstrategien verwendet, bei denen die Kovarianzen jeweils nicht fortgeführt werden
- bestimmte Annahmen mit Auswirkung auf die Korrelationen zwischen den Unbekannten sind nicht zutreffend, wie z.B. in sich geschlossene Bahn
- die zeitliche Korrelation der Daten bleibt unberücksichtigt
- Die räumlichen Verteilung der Daten lässt keine Auswertung für höhere Grade der Kugelfunktionsentwicklung zu. Durch numerische Lösungsverfahren werden aber dennoch Lösungen erzwungen (Regularisierung).

Zu einer objektiven Beurteilung der Ergebnisse kann es daher von grosser Bedeutung sein, externe Vergleiche heranzuziehen. In diesem Abschnitt sollen einige Standardverfahren, die zur globalen Evaluierung von Erdschwerfeldparametern dienen können, kurz angesprochen werden. Die folgenden Punkte werden diskutiert:

1. Kumulativer-/ Abbruchfehler
2. Vergleich mit GPS- Nivellementpunkten
3. Fehlerprojektion der Kovarianzmatrix auf die Beobachtungen
4. Fehlerprojektion auf den radialen Orbitfehler
5. Fehlerprojektion der Kovarianzinformation auf die Bahnkreuzungspunkte und Vergleich zu Altimeterdaten
6. Resonanzanalyse bestimmter harmonischer Koeffizienten

5.1 Fehlergradvarianzen

Die Fehlergradvarianzen eines globalen Erdschwerfeldmodells können dazu genutzt werden, den isotropen Fehler einer gegebenen Modellexpansion aufgrund der Summe der einzelnen Varianzen je Grad der Entwicklung zu ermitteln

$$\sigma_\ell = \sqrt{\sum_{m=0}^{\ell} (\sigma_{C_{\ell m}}^2 + \sigma_{S_{\ell m}}^2)}, \quad (204)$$

sowie dem erwarteten Fehler für den einzelnen Koeffizienten

$$\sigma_{\ell m} = \frac{\sigma_\ell}{\sqrt{2\ell + 1}}. \quad (205)$$

Als Transferkoeffizient, z.B. für das Äquivalent in Geoidhöhen¹⁹ (N) ergibt sich unter Anwendung der Bruns' schen Formel $\zeta = \frac{T}{\gamma}$

$$\lambda_\ell(N) = \frac{GM}{R\gamma} = R \quad (206)$$

mit der Normalschwere γ und dem Radius der Referenzkugel R . Man erhält daraus den kumulativen Fehler einer Potentialfunktion zu einem maximalen Grad L , berechnet aus den Fehlergradvarianzen

$$\sigma_{\lambda,L} = \sqrt{\sum_{\ell=2}^L \lambda_\ell^2 \sigma_\ell^2} \quad (207)$$

Komplementär dazu verhält sich der Abbruchfehler, der daherrührt, dass das Signal immer nur näherungsweise von dem Modell erfasst werden kann, da die inverse Abstandsfunktion erst im Unendlichen konvergiert. Der Abbruchfehler ergibt sich theoretisch aus der Summe aller vernachlässigter Terme oberhalb eines Abbruchgrades.

$$\sigma_{\lambda,\infty} = \sqrt{\sum_{L+1}^{\infty} c_\ell^2} \quad (208)$$

wobei als Schätzwert c_ℓ durch ein Grad-Varianz-Modell approximiert werden kann, z.B. nach Kaula oder Tscherning/Rapp.

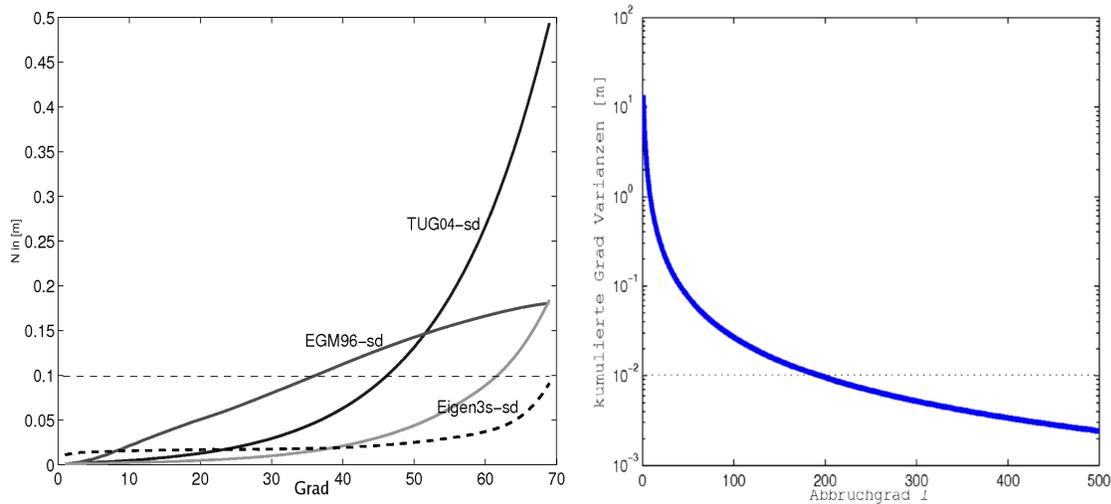


Abbildung 29. Links: Kumulativer Fehler ausgedrückt in Geoidhöhen aus Fehlergradvarianzen verschiedener Potentialmodelle. Dargestellt wurden TUG04, Badura et al. (2005), EGM96 Lemoine et al. (1997) sowie Eigen3s, Reigber et al. (2003), dazu gradabhängige Skalierung gestrichelt. Rechts: Fehler aufgrund der Vernachlässigung höherer Entwicklungsgrade in logarithmischer Darstellung. Die cm - Schwelle liegt bei $l=200$.

Der gesamte Modellfehler berechnet sich damit aus der Superposition der beiden vorgeannten Größen

$$\sigma_\lambda = \sqrt{\sigma_{\lambda,L}^2 + \sigma_{\lambda,\infty}^2} \quad (209)$$

19. Zur exakten Berechnung der Geoidhöhe sind noch weitere Terme mit entsprechenden Fehlerquellen zu berücksichtigen, vgl. z.B. Fenoglio-Marc [FM96]. Da an dieser Stelle jedoch nur der Anteil, hervorgerufen durch die Potentialkoeffizienten von Interesse ist, lässt sich die Gleichung auf die vorliegende Form reduzieren.

5.2 Vergleich mit GPS–Nivellementpunkten

Dieses Verfahren bietet die Gelegenheit in-situ Geoidanomalien, gebildet aus der Differenz zwischen orthometrisch bestimmten Höhenpunkten zu den korrespondierenden ellipsoidischen Höhen aus GPS–Bestimmungen mit Geoidhöhen, die aus einem Modell berechnet wurden, zu vergleichen. Gegenüber lokalen Vergleichen, wie etwa mit Schwereanomalien der Landesvermessung, bietet sich dieses Verfahren aufgrund der relativen hohen globalen Verteilung als eine mögliche Kontrolle an. Die Vergleichbarkeit mit terrestrischen Daten ist jedoch generell äusserst schwierig wegen der unterschiedlicher Auflösung, Einflüssen aufgrund angrenzender Topographie sowie zeitlich variablen Effekten wie hydrologischen Gegebenheiten. Weiter ist dabei zu berücksichtigen, dass in den Vergleichswerten sämtliche Fehler der Landesvermessung in die jeweiligen Nivellementnetze Eingang gefunden haben, was bei Kontinenten wie Nordamerika oder Australien zu erheblichen Fehlern im Landesinneren führt. Darüberhinaus ist die Höhenkomponente der GPS–Beobachtung erfahrungsgemäss die am schlechtesten bestimmbare Grösse, sodass in Summe Fehler im dm -Bereich zu erwarten sind. Für ein hochgenaues Erdschwerefeldmodell ist damit kaum noch eine Kontrolle möglich.

5.3 Fehlerprojektion der Kovarianzmatrix in irreguläre Punkten

Durch eine Varianz-/Kovarianzfortpflanzung können zu beliebigen Orten Genauigkeitsabschätzungen berechnet werden. Die Fehlergleichungen lauten

$$\Sigma_{FF} = F \Sigma_{xx} F^T \quad (210)$$

mit der Varianz-/Kovarianzmatrix $\Sigma_{xx} = E\{(x - y)^T(x - y)\}$, die den statistischen Erwartungswert der Korrelationen zweier Unbekannten angibt, sowie dem funktionalen Zusammenhang der Parameter hinsichtlich einer Berechnungsgrösse, F . Dies können z.B. Geoidhöhen oder Schwereanomalien sein, die mit statistischen Werten in betreffenden Regionen verglichen werden können. Idealerweise erhält man eine homogene Verteilung der projizierten Fehlerwerte über den gesamten Globus. Wegen des grösseren Abstands der Satellitenbahnen mit hoher Inklination am Äquator, sowie der Absenz von Schwerewerten in den Polregionen steigen die Fehlerwerte für diese Bereichen jedoch stark an. Der grosse Rechenaufwand bei vollbesetzten Kovarianzmatrizen reduziert sich erheblich, wenn nur die Parametervarianzen herangezogen werden. Aufgrund der starken Korrelation einzelner Parametergruppen untereinander (siehe Abschnitt 4) ist der damit ermittelte Schätzwert jedoch wenig aussagekräftig. Man versucht daher häufig, einen Gradabhängigen Faktor zur Skalierung der Parametervarianzen einzuführen, z.B. bei Geoidmodell Eigen 3p/s [RJW+05].

5.4 Fehlerprojektion der Kovarianzmatrix auf den radialen Orbitfehler

Dieses Verfahren der Projektion der Kovarianzmatrix auf den radialen Orbitfehler folgt der Fehlerprojektion der Kovarianzmatrix; allerdings können dabei ausgewählte Bahninklinationen miteinander verglichen werden. Die Transformation der radialen Perturbationen aufgrund der Genauigkeit der Erdschwerefeldparameter, in orbitale Elemente geht zurück auf Rosborough [ROS86]. Dort werden diverse Beispiel mit TOPEX und dem Modell GEM-L2 angegeben. In Klokočník et al. [KKK94], finden sich weitere Beispiele zu GEOSAT/SEASAT mit dem Modell PTGF-4A.

Der Vergleich der Projektion auf verschiedene Inklinationen zeigt die Inhomogenität der Kovarianzmatrix sehr deutlich, die offenbar die günstigste Fehlerschätzung gerade für die Inklination der verwendeten Bahn zur Bestimmung der Modellparameter prädiziert. Man spricht daher von „massgeschneiderten“ Lösungen, die nur eingeschränkt verwendbar sind, da kein homogenes Fehlerverhalten bei davon abweichender Datenverteilung mehr vorliegt.

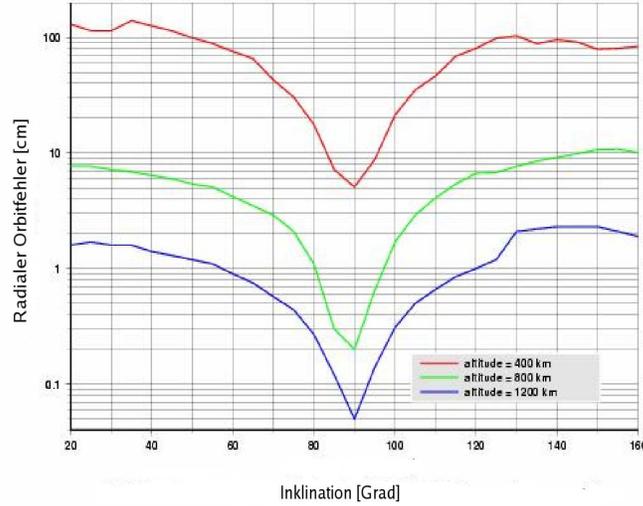


Abbildung 30. Radialer Bahnfehler gemäss Fehlerprojektion der Kovarianzmatrix des Satellitenmodells EIGEN2, Reigber et al. [RSN+03]. Die scheinbare Fehlerabnahme mit zunehmender Bahnhöhe ergibt sich aufgrund der Dämpfung des höheren Frequenzanteils.

5.5 Fehlerprojektion der Kovarianzmatrix in Bahnkreuzungspunkten sowie Vergleich mit Altimeterdaten

Hierbei handelt es sich um ein weiteres Evaluierungskonzept, das von unabhängigen Satellitenbeobachtungen der Altimetermissionen ERS1, TOPEX/POSEIDON u. a. Gebrauch machen kann. Dazu werden langfristig gemittelte und um eine Reihe von Korrekturen reduzierte Differenzen in Bahnkreuzungspunkten ausgehend von Altimeterbeobachtungen der Meeresoberfläche in Kombination mit dem zu untersuchenden Schwerefeldmodell genutzt, um eine Übereinstimmung mit der Fehlerschätzung entsprechend der Modellkovarianzmatrix zu bestätigen oder zu verwerfen. Eine ordnungsweise Kalibration der Varianzen der Erdschwerefeldparameter kann damit festgelegt werden. Die Residuen der Kreuzungspunktdifferenzen werden in breitenabhängige Spektralkoeffizienten transformiert (*latitude lumped Coefficients, LLC*) und der Projektion der Kovarianzmatrix ordnungsweise gegenübergestellt. Diverse ältere wie neuere Geoidmodelle wurden damit getestet, siehe z.B. Klokočník et al. [KKW+], Wagner et al. [WCK97]. Das Prinzip zur Berechnung der LLC sei nachfolgend kurz beschrieben.

Ausgehend von der Altimeterbeobachtung der Meeresoberfläche, z.B. Fenoglio–Marc [FM96], die gemeinsam mit aus einem Modell berechneten Geoidhöhen Differenzen in Bahnkreuzungen ΔX ergeben, lassen sich aus den Residuen $\delta\Delta X$ der Kreuzungspunktausgleichung zur Reduktion der Differenzen residuale LLC's durch eine Spektralanalyse ermitteln, vgl. Klokočník et al. [KKW92], mittels

$$\delta\Delta X(\phi, \lambda) = \sum_{m=0}^{m_{\max}} \delta C_m \sin m\lambda + \delta S_m \cos m\lambda, \quad (211)$$

innerhalb der Breiten ($-30^\circ \leq \phi \leq -60^\circ$) mit überwiegender Ozeanüberdeckung. Die damit erhaltenen Koeffizienten können dann als „tatsächliche“ Fehler der LLC der verwendeten Modellkoeffizienten betrachtet werden,

$$C_m = \sum_{\ell=m}^{\ell_{\max}} 2Q_{\ell m}^s C_{\ell m}, \quad S_m = - \sum_{\ell=m}^{\ell_{\max}} 2Q_{\ell m}^s S_{\ell m}. \quad (212)$$

Die Funktionen $Q_{\ell m}^s$ sind Rosborough–Funktionen [ROS86], und $C_{\ell m}$, $S_{\ell m}$ die Koeffizienten des zu testenden Modells. Durch die Projektion der Kovarianzen des verwendeten Modells auf die LLC erhält man dazu die korrespondierende Fehlerschätzung

$$\begin{aligned}\sigma^2 C_m &= 4 \sum_{\ell_1=m}^{\ell_{m \text{ ax}}} \sum_{\ell_2=m}^{\ell_{m \text{ ax}}} Q_{\ell_1 m}^s Q_{\ell_2 m}^s \text{COV}\{C_{\ell_1 m}, C_{\ell_2 m}\} \\ \sigma^2 S_m &= 4 \sum_{\ell_1=m}^{\ell_{m \text{ ax}}} \sum_{\ell_2=m}^{\ell_{m \text{ ax}}} Q_{\ell_1 m}^s Q_{\ell_2 m}^s \text{COV}\{S_{\ell_1 m}, S_{\ell_2 m}\}\end{aligned}\quad (213)$$

und kann die statistischen Fehler mit den 'wahren' Fehlern vergleichen. Die Berechnung der Rosborough Funktionen zur Abbildung erfolgt unter Annahme einer nominalen Bahn mit konstanter Inklination I

$$Q_{\ell m} = \sum_k F_{\ell m k}(I) \Phi_{m k}(\phi, I), \quad (214)$$

mit komplexen Koeffizienten $\Phi_{m k}(\phi, I)$, die die sphärischen Koordinaten entlang der Bahnebene in Argumente von (ϕ, I) abbilden, vgl. z.B. Sneeuw [SNE03].

Der Vergleich verschiedener harmonischen Ordnungen zeigt dabei deutliche Diskrepanzen zwischen den ermittelten Restfehlern aus den Bahnkreuzungspunkten gegenüber den prädierten Fehlern aus der zugehörigen Kovarianzmatrix (vgl. Abb. 32) und kann erst nach einer deutlichen Skalierung der Kovarianzmatrix in Übereinstimmung gebracht werden.

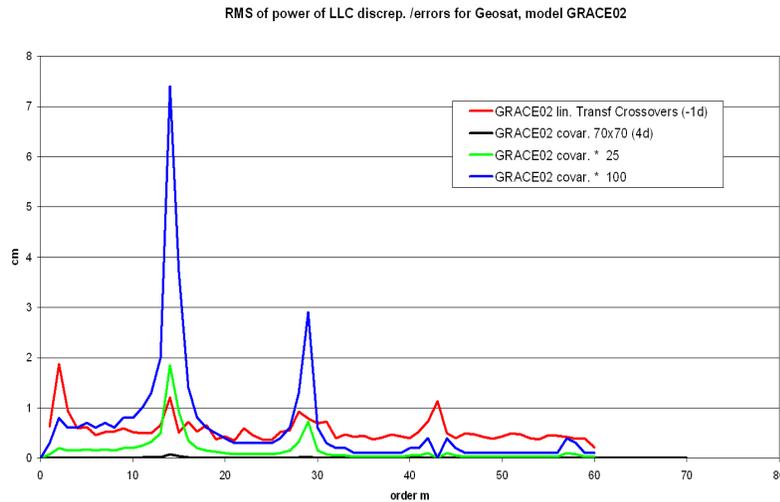


Abbildung 31. GRACE 02 (Tapley et al. 2004) Fehlerprädiktion aus Kovarianzmatrix gegenüber Restfehlern der Kreuzungspunktanalyse von Geosat, nach Klokočník et al. (2006)[KKWG05]

Auffällig ist auch die zu beobachtende Abnahme der Genauigkeit in bestimmten Ordnungen. Sie entsteht aufgrund der Nähe der tatsächlichen Satellitenumlaufbahn zu bestimmten Wiederholungsbahnen. Das sind Bahnen mit einem ganzzahligen Verhältnis zwischen Umlaufperiode und Erddrehung. Innerhalb einer idealen Wiederholungsbahn wiederholt sich annähernd die vollständige geopotentielle Information innerhalb eines Wiederholungszyklus', ausser den Frequenzen für $m = N_o \wedge k = N_e$, sowie für $m = k = 0$ wobei N_o die Umlaufzahl und N_e die Anzahl der Erddrehungen sind. Diese von der grossen Halbachse abhängigen, resonanten Ordnungen hinterlassen daher stets deutliche Spuren in der Kovarianzmatrix.

Anhand der Resonanzanalyse von Bahnparametern im folgenden Abschnitt lässt sich eine weitere unabhängige Evaluierung für die vornehmlich davon betroffenen Entwicklungskoeffizienten von Erdschwerfeldmodellen vornehmen.

5.6 Resonanzanalyse ausgewählter harmonischer Koeffizienten

Weil ein erdnaheer Satellit im freien Fall Reibungsverlusten in der Erdatmosphäre sowie variablem Sonnenstrahlungsdruck ausgesetzt ist, verliert er beständig an Bahnhöhe; man spricht von einer Kontraktion der Bahn. Durch die Änderung der grossen Halbachse passiert der Satellit infolge verschiedene Resonanzen in Form von physikalischen Effekten zwischen der Anzahl der Erdumläufe des Satelliten und der Rotation der Erde. Für CHAMP und GRACE lassen sich bestimmte *lumped coefficients* aus der Änderung der Inklination²⁰ bestimmen und mit linear verknüpften harmonischen Koeffizienten von Erdschwerefeldern vergleichen. Das Verfahren geht zurück auf Allan [ALL67] und wurde für eine Reihe von Satelliten angewendet, vgl. King–Hele [KH92]. Einige jüngere Ergebnisse basierend auf CHAMP und GRACE Daten finden sich bei Gooding et. al [GWK+06] und belegen die hohe Genauigkeit der Modelle sowie des Verfahrens der Resonanzanalyse.

Das Gravitationspotential der Erde sei dazu in Keplerelementen dargestellt, Kaula [KAU66]

$$V = \frac{GM}{R} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left(\frac{R}{a}\right)^{\ell+1} F_{\ell m p}(I) G_{\ell p q}(e) S_{\ell m p q}(\psi) \quad (215)$$

mit

$$S_{\ell m p q}(\psi) = \begin{bmatrix} C_{\ell m} \\ -S_{\ell m} \end{bmatrix}_{\ell-m:\text{gerade}}^{\ell-m:\text{gerade}} \cos \psi_{\ell m p q} + \begin{bmatrix} S_{\ell m} \\ C_{\ell m} \end{bmatrix}_{\ell-m:\text{ungerade}}^{\ell-m:\text{gerade}} \sin \psi_{\ell m p q} \quad (216)$$

sowie dem Phasenwinkel

$$\psi_{k m q} = -k\omega + (k+q)M + m(\Omega - \theta_g), \quad k = \ell - 2p \quad (217)$$

Die zeitliche Ableitung der Phasen führt unmittelbar zu den Frequenzen

$$\dot{\psi}_{k m q} = k\dot{\omega} + (k+q)\dot{M} + m(\dot{\Omega} - \dot{\theta}_g), \quad (218)$$

die sich gemäß Klokočnik et al. (1994) klassifizieren lassen nach der Art der Perturbation, denen ein Satellit während seiner Umlaufbahn ausgesetzt ist, Tab. 4

m	$k\dot{\omega}$	$(k+q)\dot{M}$	Bahnstörung	Kugelfunktionen welche die Störung herbeiführen
0	$\neq 0$	$\neq 0$	(gemischte) kurz-periodisch	zonal
	$\neq 0$	$= 0$	(rein) lang-periodisch	ungerade zonal
	$= 0$	$\neq 0$	(rein) kurz-periodisch	zonal
	$= 0$	$= 0$	sekulär	gerade zonal
$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	(gemischt) kurz-periodisch	tesseral
	$\neq 0$	$= 0$	(gemischt) m – täglich	tesseral
	$= 0$	$\neq 0$	(gemischt) kurz-periodisch	tesseral
	$= 0$	$= 0$	(rein) m – täglich	tesseral
$\neq 0$	$k\dot{\omega} + (k+q)\dot{M}$	$= m(\dot{\Omega} - \dot{\theta}_g)$	schwache oder tiefe Resonanz	tesseral

Tabelle 11. Klassifikation der Frequenzen nach Klokočnik et al. [KKK94]

Die Terme, in denen die mittlere Anomalie eine Rolle spielt, rufen generell kurz-periodische Störungen hervor mit maximal bis zu $1cpr$ dauer. Die Terme mit Apsidenrotation $\dot{\omega}$ sind lang-periodisch (Wochen bis zu Jahren). Die m – Terme dauern genau 1 Tag für $m = 1$.

20. Es lassen sich auch andere Bahnelemente zur Resonanzanalyse heranziehen, allerdings unterliegen diese meist stärker schlecht modellierbaren Fremdeinflüssen. Eine umfangreiche Darstellung findet man bei Allen (1970). Eine Ausführung in Hill-Variablen und Untersuchungen an GPS-ähnlichen Orbits findet man bei Mai (2004)[MAI04]

Resonanz tritt ein, wenn die zeitliche Ableitung der Phase

$$\dot{\psi}_{kmq} = 0 \quad (219)$$

wird. Die Bewegung des Satelliten steht in Beziehung zur Erdrotation ($m \neq 0$), man spricht von einem Orbit in Resonanz. Es folgt für Gl. (218)

$$k\dot{\omega} + (k+q)(\dot{M}_0 + n) = m(\dot{\Omega} - \dot{\theta}_g) \quad (220)$$

und da $\dot{\omega}$, \dot{M}_0 , $\dot{\Omega} \ll n$, $\dot{\theta}_g$ sind, k und m ganze Zahlen sowie q üblicherweise nur $0, \pm 1$ annimmt, lässt sich damit setzen

$$\frac{N_o}{N_e} = \frac{n}{\dot{\theta}_g} \quad (221)$$

Der Satellit vollzieht danach N_o Erdumrundungen während N_e (Knoten-) Tagen; N_e und N_o jeweils ganze Zahlen und Gl. (221) ist nicht reduzierbar. Für bestimmte Ordnungen (15, 16, 31, 32, 46, 47, usw.) der Kugelfunktionsentwicklung lassen sich damit Analysen anhand der linearen Verknüpfung der harmonischen Koeffizienten mit den Sensitivitätskoeffizienten für die Änderung der Inklination berechnen, vgl. Allan [ALL73]. Diese lauten z.B. für die paritären Grade der Resonanz 31/2 mit $I = 87,276^\circ$, nach Gooding et al. [GWKK04]

$$C_{31}, S_{31} = (\bar{C}_{32,31}, \bar{S}_{32,31} + 0,9096(\bar{C}_{34,31}, \bar{S}_{34,31}) + 0,7405(\bar{C}_{36,31}, \bar{S}_{36,31}) + \dots \quad (222)$$

In Abb. 31 ist der dreifache Durchgang von CHAMP durch die Resonanz 31/2 dargestellt. Die täglichen Mittelwerte für die Inklination wurden durch eine Kurve entsprechend der harmonischen Koeffizienten mit 4 Paaren der Ordnung $m = 31$ sowie jeweils einem Paar für 62 und 93 sowie weiteren Koeffizienten für nichtreduzierte Effekte approximiert.

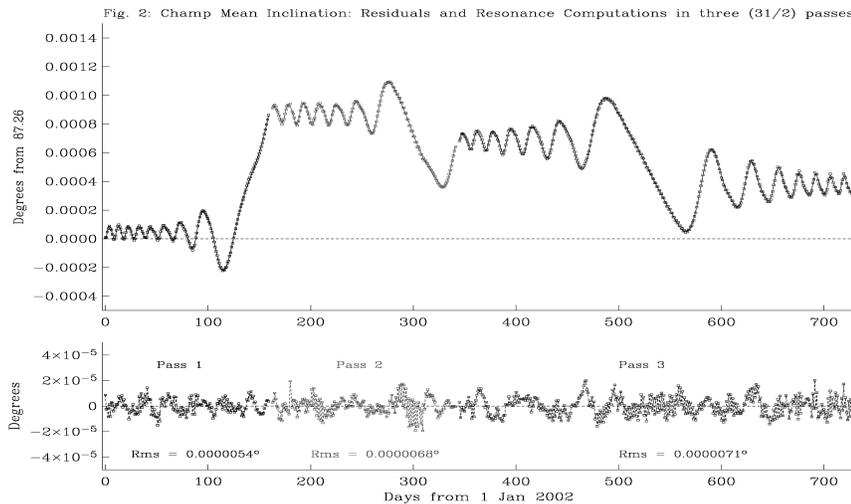


Abbildung 32. Inklinationsänderung während dreifachem Durchgang aufgrund von Orbitmanövern durch die Resonanz $N_o = 31$, $N_e = 2$, sowie den Residuen nach Anpassen der harmonischen Koeffizienten, entnommen aus Gooding et al. [GWK+06]

Für die jeweils involvierten harmonischen Koeffizienten lässt sich anhand des Verlaufes der Inklination infolge einer bestimmten Resonanz eine lineare Parameterschätzung durchführen und diese neben ihren statistischen Kenngrößen bestimmen. Eine Gegenüberstellung zu entsprechenden Modellparametern liefert dann eine unabhängige Aussage bezüglich der Ergebnisse. In Tab. 12 sind Ergebnisse der Resonanzanalyse anhand der CHAMP-Inklination während der Passage durch eine Wiederholungsbahn aufgelistet.

C_{31}, S_{31}	σ	S_{62}, C_{62}	σ	C_{93}, S_{93}	σ	Model
-16.70, -9.19	0.14, 0.15	3.01, 0.68	0.03, 0.03	-4.62, 2.79	0.83, 0.75	RESONANZ
-16.72, -9.21	0.01, 0.01	3.17, 0.67	0.01, 0.01	-4.14, 1.96	0.27, 0.27	EIGEN-GRACE02s
-17.14, -8.61	0.41, 0.41	3.24, 0.68	0.31, 0.31	-6.3, 2.33	2.62, 2.62	EIGEN-3p
-17.14, -8.61	0.76, 0.76	3.41, 1.28	0.55, 0.55	-5.15, 3.01	0.81, 0.81	EGM96
-16.40, -7.28	1.49, 1.50	4.53, 1.30	1.08, 1.08	-4.50, 2.16	1.22, 1.22	GRIM5c1

Tabelle 12. Gegenüberstellung von Ergebnissen der Resonanzanalyse $N_e/N_o = 31/2$ mit verknüpften Schwerefeldparametern nach Gooding [GWK+06]. Nach absteigender Übereinstimmung gelistet.

Die Methode liefert dabei weitgehend übereinstimmende Ergebnisse zu jüngeren Erdschwerefeldmodellen (insbesondere mit GRACE-Daten) und bestätigt gleichermassen die hohe Genauigkeit der Methode, wie auch die Qualität der neueren Modelle.

5.7 Überlegungen bezüglich Wiederholungsbahnen

In Abb. 33 ist die Wahl einer Referenzbahn für unterschiedliche Flughöhen bei vorgegebener Inklination für die GOCE Mission berechnet. Die grosse Halbachse der Referenzbahn lässt sich auf verschiedene Arten definieren; für eine ausführliche Diskussion siehe z.B. Klokočník et al. (2003). Ausgangspunkt ist die analytische Lösung erster Ordnung unter Berücksichtigung der Erdabplattung $J_2 = 1082.267 \times 10^{-6}$. Die Lagrangegleichungen in Kepler Elementen lauten

$$\begin{aligned}
\dot{\Omega} &= -\frac{3}{2}nJ_2\left(\frac{R}{a}\right)^2 \cos I(1-e^2)^{-2} \\
\dot{\omega} &= \frac{3}{4}nJ_2\left(\frac{R}{a}\right)^2 (5\cos^2 I - 1)(1-e^2)^{-2} \\
\dot{\sigma} &= \frac{3}{4}nJ_2\left(\frac{R}{a}\right)^2 (3\cos^2 I - 1)(1-e^2)^{-3/2}
\end{aligned} \tag{223}$$

Der Resonanzwinkel sei definiert, z.B. Gooding und King-Hele (1989), zu

$$\phi_{\beta/\alpha} = N_e(\omega + M) + N_o(\Omega - \theta_g) \tag{224}$$

mit dem Argument des Perigäums ω , der mittleren Anomalie M , dem aufsteigenden Bahnknoten Ω und dem Stundenwinkel von Greenwich θ_g gegenüber dem Frühlingspunkt. Wenn die zeitliche Ableitung $\dot{\phi}_{\beta/\alpha} = 0$ wird, steht die Bewegung des Satelliten in einem ganzzahligen Verhältnis zur Rotation der Erde

$$\begin{aligned}
\dot{M} &= n + \dot{\sigma} \\
\dot{\theta}_g &= \omega_e.
\end{aligned} \tag{225}$$

Die mittlere Bewegung ergibt sich zu

$$n = \frac{N_o}{N_e}(\omega_e - \dot{\Omega}) - \dot{\omega} - \dot{\sigma} \tag{226}$$

in die man die Gl. (223) einsetzen kann. Kozai [KOZ59] gibt die mittlere Bewegung an mit

$$n_K = \frac{N_e}{N_o}\omega_e \left\{ 1 - \frac{3}{4}J_2\left(\frac{R}{a}\right)^2 \left[5\cos^2 I - 2\frac{N_e}{N_o}\cos I - 1 \right] \right\} \tag{227}$$

wobei $\omega_e = 7.292115$ [rad/s] und berechnet daraus eine Korrektur des dritten Kepler-Gesetzes hervorgerufen durch den Abplattungsterm $J_2 = 1082.267 \times 10^{-6}$,

$$n_K^2 a_K^3 = GM(1 - J_2 F) \tag{228}$$

aus den mittleren Bahnelementen a, e, I , sowie der Korrektur

$$F = \frac{3}{4}\left(\frac{R}{a}\right)^2 (1-e^2)^{-3/2}(2 - 3\sin^2 I) \tag{229}$$

In Abb. 33 ist die jeweilig Bahnhöhe ausgehend von der grossen Halbachse nach Kozai zu ausgewählten Wiederholungsbahnen berechnet. Für eine Erdschwerfeldmission ist von Bedeutung, eine möglichst homogene Überdeckung der Erde zu erzielen, d.h. eine möglichst grosse Anzahl von Umläufen innerhalb der Wiederholungsperiode. Dafür ist eine genaue Auswahl sowie die Konservierung der Bahnhöhe erforderlich.

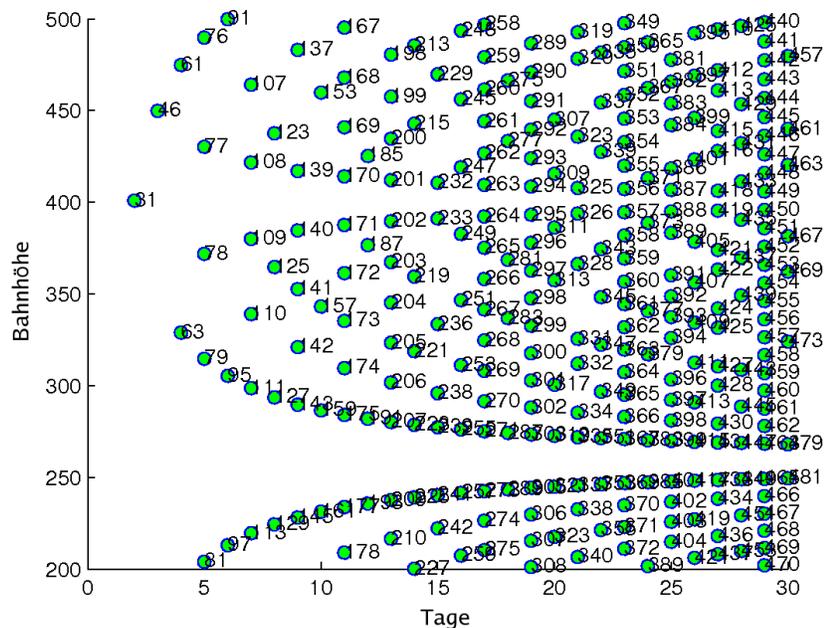


Abbildung 33. Ganzzahliges Verhältnis der Umläufe des Satelliten zur Anzahl der Knotendurchgänge der Erde gegenüber der Bahnhöhe (grosse HA) bei gewählter GRACE- Inklination von 89° . Darstellung in Anlehnung an [KKG03]

Anmerkung 16. Neben der grossen Halbachse nach Kozai gibt es eine weitere klassische Definition, die von Brouwer (1959). Sie unterscheidet sich von der Kozai-Halbachse um einige Kilometer, was z.B. bei der Prediktion von exakter Resonanz bzw. Festlegung einer Referenzbahn von Bedeutung sein kann. Die sogenannten *two-line elements* (TLE) der NASA beziehen sich auf die mittlere Bewegung nach Kozai, woraus sich die grosse Halbachse nach Gl. (228) berechnen lässt, hingegen verwendet die NOAA Elemente der Definition nach Brouwer. Das NGS stellt für die Bahnen der GPS-Satelliten Positions- und Geschwindigkeitsvektor zur Verfügung ebenso wie die ESA für den Satelliten GOCE, ausschliesslich den jeweiligen Zustandsvektor (*state vector*) in kartesischen Koordinaten angibt.

6 Satellitenmissionen

Die Bedeutung der Satellitenmissionen zur Bestimmung globaler Potentialkoeffizienten liegt für geodätische Anwendungen insbesondere darin, ein hochwertiges Reduktionsmodell zur Verfügung zu haben, um geodätische Randwertaufgaben von lokaler Ausdehnung in vergleichsweise guter Qualität durchführen zu können wodurch ellipsoidische Höhen und Höhen über Normal-Null miteinander verknüpft werden. Daneben trägt die genauere Kenntnis des Erdschwerefeldes auch zur Verbesserung von Modellen bezüglich der Massenumverteilung im Erdinnern, den Ozeanen und der Atmosphäre bei. Zu nennen sind hier neben kontinentaler Wasserspeicherung die Kryosphäre, post-glaziale Hebung, Ozeanzirkulation sowie Klima- und Troposphärenmodelle.

6.1 SST high-low (CHAMP)

Diese Beobachtungsgrösse dient zur kinematischen Positionsbestimmung des Satelliten aus GPS-Abstandsmessungen. Die Positionen werden dabei neben den Phasenambiguitäten relativ zu dem GPS-Raumsegment sowie der Uhrenkorrektur des Empfängers bogenweise durch eine vermittelnde Ausgleichung ohne Differenzbildung (*Zero-Differences*) bestimmt, siehe z.B. Svehla und Rothacher (2004)[ŠR05]. Wegen der im Vergleich zu statischen Beobachtungen geringen Redundanz hinsichtlich der einzelnen Satellitenposition zu der Zahl von Beobachtungen pro Epoche kommt es dabei zu Ausreissern, die durch den Vergleich etwa mit dynamischen Bahnen grösstenteils eliminiert werden können. Die mittlere Genauigkeit der Positionsbestimmung liegt im Bereich weniger *cm*, vgl. Svehla und Rothacher [ŠR05].

Infolge des Einflusses des Erdgravitationsfeldes unterliegen die Satellitenbahnen periodischen Effekten, den sog. „Bahnstörungen“. Die Beobachtungsgleichungen zur Anwendung eines direkten Inversionsverfahrens beruhen auf dem Erhaltungsprinzip in einem konservativen System, siehe Äquivalenzprinzip und Energiesatz Anhang A

$$V + H = T \quad (230)$$

mit der kinetischen Energie T aufgrund der Bahngeschwindigkeit des Erdsatelliten gegenüber dem skalaren Feld V des Erdschwerepotentials. Die Gesamtenergie wird durch die Hamiltonfunktion H beschrieben. Es lässt sich unmittelbar schreiben, z.B. Badura et al. [BSGK06]

$$T = \frac{1}{2}\dot{\vec{x}}^2 + V_R + E_{\text{ges}} + \int \vec{F}(\vec{x}, t) \cdot \left(\frac{d\vec{x}}{dt} + (0, 0, \omega_e) \times d\vec{x} \right) dt \quad (231)$$

mit einer Korrektur für die Impulsrotation, die ein Potential aufgrund der Beschleunigung in einem Gravitationsfeld erzeugt²¹

$$V_R = \omega_e H \quad (232)$$

21. Die Bewegung eines rotierenden Systems in einem statischen Gravitationsfeld ruft demzufolge ebenso ein Potential hervor wie ein starres (rotierendes) System in einem sich bewegenden Gravitationsfeld.

wobei ω_e die Rotationsgeschwindigkeit der Erde ist und H die vertikale Komponente des Drehimpulsvektors. E_{ges} ist die Gesamtenergie bzw. Hamiltonfunktion des Systems.

Der Kraftvektor $\vec{F}(\vec{x}, t)$ vereint dabei sämtliche auftretenden Störkräfte ausgehend von direkten und indirekten Gezeiteneffekten hervorgerufen von Drittkörpern, zeitlich veränderlichen Ozean- und Troposphären-Auflasteffekten sowie Reibungskräften in der oberen Atmosphäre bzw. Störungen durch direkten Sonnenstrahlungsdruck. Die Darstellungsform in Gl. (231) weicht von der bei Jekeli [JEK99] sowie Han [HAN04] insofern ab, als dass der Rotationsterm aufgrund der Drehung der Erde mit $(0, 0, \omega_e)^T$ im Störkraftintegral dort vernachlässigt wurde.

Die Transformation der erdfesten (GPS-) Koordinaten des Satelliten in ein weitestgehend unbeschleunigtes System erfolgt über eine Transformationsmatrix, die insbesondere die momentanen Koordinaten der Rotationsachse gegenüber dem Himmelspol (x_p, y_p) sowie die wahre Sternzeit von Greenwich berücksichtigt (θ_g), siehe z.B. Montenbruck und Gill [MG00]. Präzessions- und Nutationsbewegungen der Drehimpulsachse der Erde spielen aufgrund ihres sekulären Charakters hinsichtlich der Missionsdauer bei der Erdschwerefeldbestimmung weitestgehend keine Rolle.

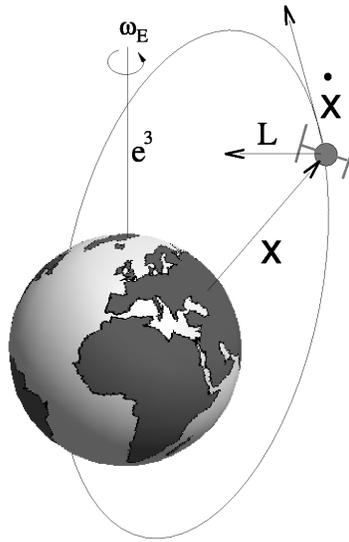


Abbildung 34. SST-*hl* Konfiguration mit Geschwindigkeits-, Positions- und Drehimpulsvektor.

Die Normalgleichungen ergeben sich aus den partiellen Ableitungen der Störpotentialfunktion nach den harmonischen Koeffizienten. Das Gleichungssystem entspricht damit einer linearen, funktionalen Beziehung zwischen Modellparametern und vermittelnden Beobachtungen

$$A_{ij}x_j = \ell_i + v_i, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times r}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, r \quad (233)$$

Da keinerlei weiteren Restriktionen für die Designmatrix A_{ij} gelten, können damit direkt oskulierende Positionen²² berücksichtigt, sowie Satellitenmanöver oder Datenlücken behandelt

²² Gemeint sind reale Bahnen, die von einem nominalen Orbit etwa zur Vereinfachung des Rechenmodells abweichen.

werden. Die Lösung des Systems erfolgt im Sinne der Minimierung der Fehlerquadratsumme

$$v_i \Sigma^{-1} v_i \rightarrow \min \quad (234)$$

mit der a priori Kofaktorenmatrix der Beobachtungen Σ . Es ergibt sich damit für jede Beobachtungsgleichung, ausgehend von $l \in \{2, 3, \dots, L-1, L\}$, $L = l_{\max}$, sowie jeweils $m \in \{0, \dots, l\}$ die Sequenz

$$a_{ij} x_j = \left\{ u_l \bar{Y}_\ell^0(\phi_i, \lambda_i) \bar{c}_{\ell 0}, u_l \bar{Y}_\ell^1(\phi_i, \lambda_i) \bar{c}_{\ell 1}, \dots, u_l \bar{Y}_\ell^L(\phi_i, \lambda_i) \bar{c}_{\ell L} \right\} \text{GM}/R = T_i + v_i \quad (235)$$

mit den unbekanntem (reellen) Entwicklungskoeffizienten

$$x_j = \bar{c}_{\ell m} = \begin{cases} \bar{C}_{\ell m} \\ \bar{S}_{\ell m} \end{cases}, \quad j \in \{1, \dots, (l_{\max} + 1)^2 - 4\}. \quad (236)$$

6.2 SST low–low (GRACE)

Während bei SST – hl aufgrund der Kenntnis des GPS–Raumsegments eine absolute Bahnbestimmung erfolgt, handelt es sich bei dem Messkonzept SST – ll um die relative Bewegungsänderung zweier Satellitensysteme in freiem Fall. Vor allem die dazu korrespondierenden periodischen Effekte in den zeitvariablen Entfernungen zwischen den Satellitenschwerpunkten geben dann Informationen über die auf die Satelliten einwirkenden Kräfte, also auch über das Erdgravitationsfeld.

Die Konfiguration besteht aus einem Tandem zweier Satelliten in annähernd gleicher Bahn im freien Fall. Der Abstand ist dabei so gewählt, dass sowohl von annähernd gleichen Bedingungen bezüglich nicht–gravitativer Effekte ausgegangen werden kann um den relativen Fehleranteil aus der Bestimmung der jeweiligen Akzelerometer–Störkräfte so gering wie möglich zu halten, als auch eine angestrebte maximale Auflösung zu gewährleisten ist, da sonst die Abtastrate nicht ausreicht, um bestimmte Strukturen noch eindeutig zu detektieren.

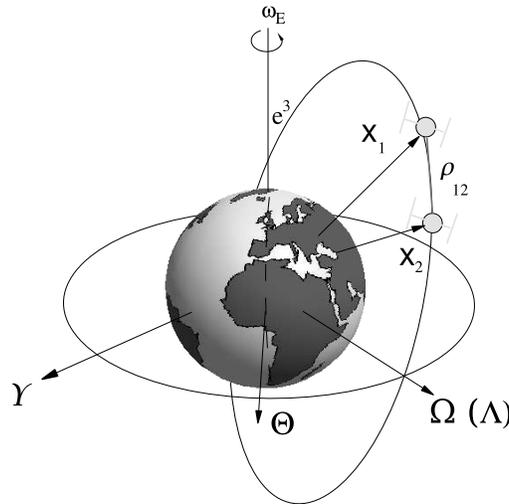


Abbildung 35. SST- ll Konstellation mit Abstandsmessung ρ_{12}

Erste Studien zu diesem Messkonzept gehen zurück auf Wolf [WOL], ferner wurden in Wagner [WAG83];[WAG87] sowie Colombo [COL84] analytische Verfahren zur Auswertung von SST-Daten und deren Auswertung im Frequenzbereich gegeben. Cui und Lelgemann [CL03] verfolgen ebenso einen Ansatz zur Auswertung der Daten im Spektralbereich. Keller und Hess [KH98] diskutieren einen Ansatz beruhend auf Intersatelliten-Gradiometrie. Mayer-Gürr et al. [MGIFE] benutzen ein numerisches Integrationsverfahren entlang kurzer Bahnsegmente.

Die grundlegenden Gleichungen zur Anwendung eines direkten Inversionsverfahrens bezüglich von Potentialdifferenzen sind in Jekeli [JEK99] sowie Han [HAN04] gegeben und sollen an dieser Stelle ohne Herleitung übernommen werden. Den Ausgangspunkt bilden die SST- ll Beobachtungen, d.h. die hochgenauen Abstandsbeobachtung zwischen Satellit A und B

$$\rho_{12} = \Delta \vec{x} \cdot \vec{e}^{12} \quad (237)$$

mit $\Delta \vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ und \vec{e}^{12} , der Richtung zwischen beiden Satelliten. Die relative Abstandsgeschwindigkeit (*range-rate*) entlang der Verbindungslinie ergibt sich zu

$$\dot{\rho}_{12} = \Delta \dot{\vec{x}} \cdot \vec{e}^{12}. \quad (238)$$

Mikrowellen in zwei Frequenzen²³ werden dazu benutzt, hochpräzise Messungen zu erhalten, die mit einer Genauigkeit von 0.1–0.2 μms^{-1} Relativgeschwindigkeiten liefern. Jekeli erweitert die Hamilton-Jakobi-Theorie um, ausgehend von einem Nominalorbit, *in-situ* Potentialdifferenzen durch Abstandsmessungen zu beschreiben. Es lässt sich schreiben

$$\delta T_{12} = \left| \dot{x}_1^0 \right| \delta \dot{\rho}_{12} + r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + \delta V_{R12} - \int (F_2 \dot{x}_2 - F_1 \dot{x}_1) dt - \delta V_T - \delta E_{\text{ges}}, \quad (239)$$

wobei der Index $[\cdot]^0$ die berechneten Werte entlang des Nominalorbits bezeichnet und von diesem abweichende Werte im Sinne von Residuen mit δ gekennzeichnet sind. Die (Stör-) Potentialdifferenz δT_{12} , als innovative Messgrösse, geht somit hauptsächlich aus dem Residuum der Relativgeschwindigkeit hervor. Durch die Verwendung der Nominalgeschwindigkeit in diesem zentralen Term wird verhindert, dass GPS-Tracking Daten das Ergebnis zu stark beeinflussen, da sie gegenüber den Relativmessungen von einer wesentlich geringeren Genauigkeit sind. Mit V_{R12} wird die Differenz der Impulsrotationen beider Satelliten

$$V_{R12} = \omega_e (H_2 - H_1) \quad (240)$$

bezeichnet, wobei ω_e die Rotationsgeschwindigkeit der Erde ist und H die Hillvariable des Drehimpulsvektors. Der Integralterm gibt die Differenz der Energiedissipation aufgrund von nicht-konservativen Kräften an; die letzten beiden Terme bezeichnen zum einen gegenüber dem Nominalorbit nichtmodellerte zeitliche Änderungen sowie die Abweichung der totalen Energie δE_{ges} . Die weiteren Hilfsgrössen lauten

$$\begin{aligned} r_1 &= \left(\vec{x}_2^0 - \left| \vec{x}_1^0 \right| \vec{e}^{12} \right) \cdot \delta \vec{x}_{12} \\ r_2 &= \left(\delta \vec{x}_1 - \left| \vec{x}_1 \right| \delta \vec{e}^{12} \right) \cdot \vec{x}_{12} \\ r_3 &= \delta \vec{x}_1 \cdot \delta \vec{x}_{12} \\ r_4 &= \frac{1}{2} \left| \delta \vec{x}_{12} \right|^2 \end{aligned} \quad (241)$$

23. K (24.5GHz) und Ka (32.7GHz)

wobei hier die GPS-Beobachtungen Berücksichtigung finden, allerdings in linearisierter Form gegenüber der nominalen Bahn. Durch die Differenzbildung (2 – 1) in der Modellmatrix kann aufgrund positiver Korrelation der GPS Positionsdaten von einer höheren relativen Genauigkeit ausgegangen werden, als dies für die absolute Lage gilt. Die zugehörigen Beobachtungsgleichungen bestehen aus folgender Sequenz, wiederum über alle Grade und Ordnungen

$$a_{ij} x_j = \left\{ \left[\left(\frac{R}{r_{i1}} \right)^{\ell+1} \bar{Y}_{\ell}^0(\phi_{i1}, \lambda_{i1}) - \left(\frac{R}{r_{i2}} \right)^{\ell+1} \bar{Y}_{\ell}^0(\phi_{i2}, \lambda_{i2}) \right] \bar{c}_{\ell 0_j}, \dots \right. \\ \left. \dots, \left[\left(\frac{R}{r_{i1}} \right)^{L+1} \bar{Y}_L^L(\phi_{i1}, \lambda_{i1}) - \left(\frac{R}{r_{i2}} \right)^{L+1} \bar{Y}_L^L(\phi_{i2}, \lambda_{i2}) \right] \bar{c}_{LL_j} \right\} \text{GM}/R = T_{12,i} + \varepsilon_i \quad (242)$$

Abb. 40 zeigt die Differenz zweier Geoidmodelle über Westeuropa, die aus GRACE Daten berechnet wurden. Es handelt sich dabei um eine Lösung am Center for Space Research (CSR) der Universität Texas in Zusammenarbeit mit der NASA sowie einer Lösung des GFZ-Potsdam. Die Abweichungen liegen bei *cm* bis *dm* Geoidhöhen.

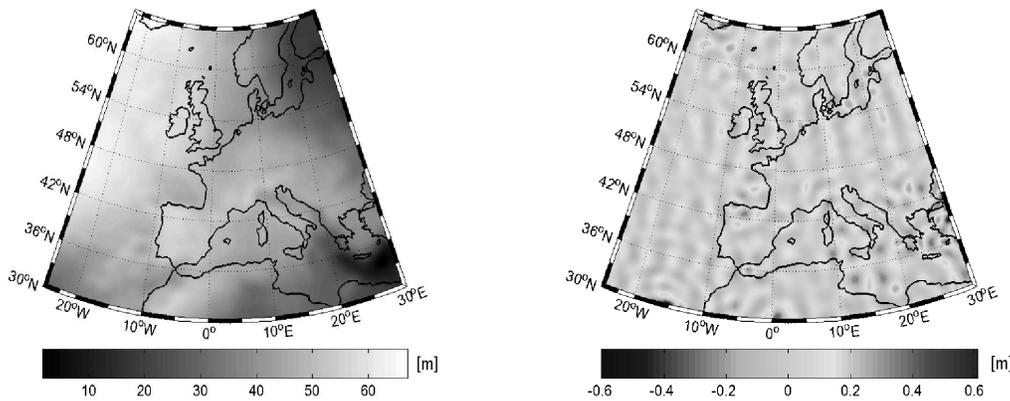


Abbildung 36. GRACE satellitenbasiertes Geoidmodell GGM02, Tapley et al (2005)[TRB+] über Europa (links) sowie Differenzen zu EIGEN-GL04S1 berechnet am GFZ-Potsdam, Ch. Förste et al. (2006), rechts.

6.3 Satellitengradiometrie SGG (GOCE)

Diese Satellitenmission ist so antizipiert, dass der Satellit keine gedämpfte Freifallbewegung ausführt, sondern durch Kompensation der nicht-gravitativen Einwirkung auf einer nominalen, möglichst kreisförmigen Bahn stabilisiert wird. Dadurch ist es einerseits möglich, eine bei weitem niedrigere Bahn zu wählen als dies für die reinen SST-Missionen der Fall ist. Ferner kann annähernd eine sich selbst wiederholende Bahnspur erzeugt werden. Dazu muss die Gesamtenergie des Satelliten jedoch stabilisiert werden, wozu erhebliche Ressourcen erforderlich sind. Der Satellit wird aus diesem Grund in einen sonnensynchronen Orbit initiiert. Dies bedeutet, dass sich der aufsteigende Bahnknoten Ω mit annähernd derselben Winkelgeschwindigkeit, wie die Erde um die Sonne bewegt, die Satellitenbahn somit keine starre Bewegung mehr im Raum vollzieht. Mehrere orthonormale Koordinatensysteme sind zur Beschreibung und Transformation der Messdaten erforderlich, vgl. ESA[GOC]. Die Orientierung gegenüber dem Fixsternhimmel ist aligniert mit dem lokalen Satellitensystem, LORF (*local orbital reference frame*). Da die Sei-

tenfläche des Satelliten aufgrund des Windes, unter Annahme einer rotierenden Erdatmosphäre während einer Umrundung Änderungen in Form einer Sinuskurve vollführt, müssen die Messdaten zur Auswertung in ein radiales Nadirsystem RERF (*radial earthpointing reference frame*) transformiert werden. Der Gravitationstensor wird zuvor aus den differentiellen Beschleunigungsmessungen durch Trennung des symmetrischen und antisymmetrischen Teils von der Winkelgeschwindigkeit separiert. Der durch den Widerstand der Atmosphäre hervorgerufenen Rotation um die Gierachse²⁴ des Satelliten sollte zwar ursprünglich ebenfalls entgegengewirkt werden, um Orientierungskorrekturen des Messsystems in das Bewegungssystem so gering wie möglich zu halten, jedoch konnte diese Stabilisierung letztlich nicht realisiert werden. Die Rotation des Gradiometertensors erfolgt stets durch zweifache Anwendung der orthonormalen Rotation

$$T_R = R T R^T \quad (243)$$

Wegen der unterschiedlichen Genauigkeit der Tensorelemente hat die Rotation in jedem Fall auch einen Einfluss auf die Genauigkeit der Diagonalelemente. Dies liegt insbesondere an dem Umstand, dass die Nebendiagonalelemente mit einer niedrigeren Genauigkeit bestimmt werden können als die Diagonalelemente, Alenia [ALE01]. Die Orientierungsfehler können teilweise stochastisch berücksichtigt werden, Koop et al. [KPR00]. Die Auswirkung von Fehlern durch Misorientierung auf die Komponenten des Gradiometrietensors ist in verschiedenen Studien untersucht worden, z.B. Stummer [STU06] und führt insgesamt zu einem verminderten maximalen Auflösungsvermögen der Satellitenmission. Aufgrund der Laplacebedingung der harmonischen Potentialfunktion sind die Diagonalelemente überbestimmt was sich gemeinsam mit weiteren Tensor-Invarianten zu Kalibrationszwecken nutzen lässt.

24. Vertikale Achse durch den Schwerpunkt

7 Simulationsrechnungen

Die nachfolgenden Berechnungen dienen in erster Linie zur numerischen Evaluierung der beiden Auswertekonzepte. Zum einen im Frequenzbereich unter Auflösung der *lumped coefficients*, zum anderen dem stufenweisen Berechnen der Normalgleichungsmatrix aus einer intermediären Koeffizientenmatrix. Die getroffenen Annahmen bzw. Vereinfachungen entsprechen dabei nur näherungsweise realen Daten aus den jeweiligen Satellitenmissionen, können aber zur Evaluierung der Rechenprogramme genutzt werden.

Zur Auswertung von Schweredaten kann ein iteratives Verfahren angewendet werden, bei dem das Normalgleichungssystem nicht unmittelbar aus den Daten abgeleitet wird, sondern ein linearer Zusammenhang zwischen dem tatsächlichen Gleichungssystem $Nx = z$ und einer approximativ berechneten Matrix M angenommen wird, vgl. auch Klees et al. [KKVvdI00]. Die Abweichung kann etwa dadurch zustandekommen, dass rechentechnisch von einer nominalen, in sich geschlossenen Umlaufbahn ausgegangen wird. Das Verfahren eignet sich demzufolge zur iterativen Annäherung der Lösung insbesondere bei Verwenden des FFT-Verfahrens und soll im Folgenden aufgezeigt werden. Das Verfahren konvergiert, solange

$$(x - x')_k < (x - x')_{k-1}$$

wobei x' die jeweils vorrausgehende Lösung darstellt. Die Grundannahme lautet

$$M(x - x') = N(x - x'), \quad M \approx N. \quad (244)$$

Es lässt sich dann unmittelbar setzen

$$Mx = z - (N - M)x' \quad (245)$$

und schrittweise lösen

$$\begin{aligned} z &= A^T \Sigma y, \\ N &= A^T \Sigma A \\ x_j &= x_{j-1} + M^{-1} A^T \Sigma (y - Ax_{j-1}) \end{aligned} \quad (246)$$

Das praktische Rechenschema ergibt sich damit folgendermassen: Synthese des zu verbessernden Modells – Berechnen der Residuen zu den Messdaten – Ausgleichung der Residuen – Aufdatieren der Unbekannten

- a) $f(V)_{j-1} = Ax_{j-1}$
- b) $\delta_j = y - f(V)_{j-1}$
- c) $\delta x_j = M^{-1} A^T \Sigma \delta_j$
- d) $x_j = x_{j-1} + \delta x_j$

e) wiederholen von a) – d)

mit der initialen Lösung $f(V)_0 = M^{-1}z$, wobei zur Berechnung der rechten Seiten ebenfalls eine approximative Lösung angewendet werden kann,

$$z_j = \tilde{A}^T \Sigma y, \quad \tilde{A}_{ij} \approx A_{ij} \quad (247)$$

Die nachfolgenden Abbildungen zeigen das Fehlerverhalten im Rahmen von einfachen Simulationsrechnungen gegenüber den Ausgangsdaten. Die relativen Signalvarianzen zwischen dem geschätzten (*EST*) und ursprünglichem Modell (*EGM*) ergeben sich dabei als

$$\sigma_l = \sqrt{\frac{1}{2l+1} \sum_m (C_{\ell m}^{\text{EST}} - C_{\ell m}^{\text{EGM}})^2 + (S_{\ell m}^{\text{EST}} - S_{\ell m}^{\text{EGM}})^2}. \quad (248)$$

Aufgrund der Instabilität zonaler sowie nahe zonaler Koeffizienten durch das Pol-Loch wird häufig anstatt des mittleren Fehlers auch der Medianwert herangezogen

$$\sigma_l = \text{MED}_m \sqrt{(C_{\ell m}^{\text{EST}} - C_{\ell m}^{\text{EGM}})^2 + (S_{\ell m}^{\text{EST}} - S_{\ell m}^{\text{EGM}})^2}.$$

7.1 CHAMP-Simulation (Störpotential)

Es handelt sich um einen annähernd radialen Orbit von geringer Exzentrizität; Dämpfung aufgrund von Reibungsverlusten wurde nicht berücksichtigt. Gezeigt ist jeweils das Konvergenzverhalten für das FFT-Verfahren, bei dem die Residuen erneut geschätzt werden, sowie die Lösung aus direkter Inversion. Dieselbe Anordnung, mit einer Signalauflösung, die jedoch deutlich höher ist als die Parametrisierung die dem Modell zugrunde liegt, zeigt in Abb. 37b, wie die Parameter mit zunehmenden Grad durch den Abbruchfehler beeinträchtigt werden. Das Fehlerverhalten zeigt, dass die unteren Grade relativ robust gegen Störeinflüsse sind und ist daher ideal geeignet zur Kombination mit einem Gradiometer, bei dem die höheren Frequenzen wesentlich besser aufgelöst werden können, siehe GOCE-Simulation. Um die Stärke der direkten Inversion hinsichtlich von Datenlücken zu testen, wurden zufällig 15% der Beobachtungen aus dem Ausgleichungsmodell gestrichen. Das simulierte Signal wurde einmal bis SH=70 und einmal bis SH=200 generiert um den störenden Einfluss von zu niedriger Parametrisierung des Modells zu veranschaulichen.

$a = 6792 (413) km$
$e = 0.0017$
$I = 87.4^\circ$
$N_o/N_e = 448/29$
$N = 501120 (6 \text{ Monate})$
$P = 70$
$S = 70, S = 200$

Tabelle 13. CHAMP-Simulation, Grosse Halbachse a (Bahnhöhe), Exzentrizität e , Inklination I , Datenanzahl N , Parametrisierung P , simuliertes Signal S , Wiederholungsperioden N_o/N_e .

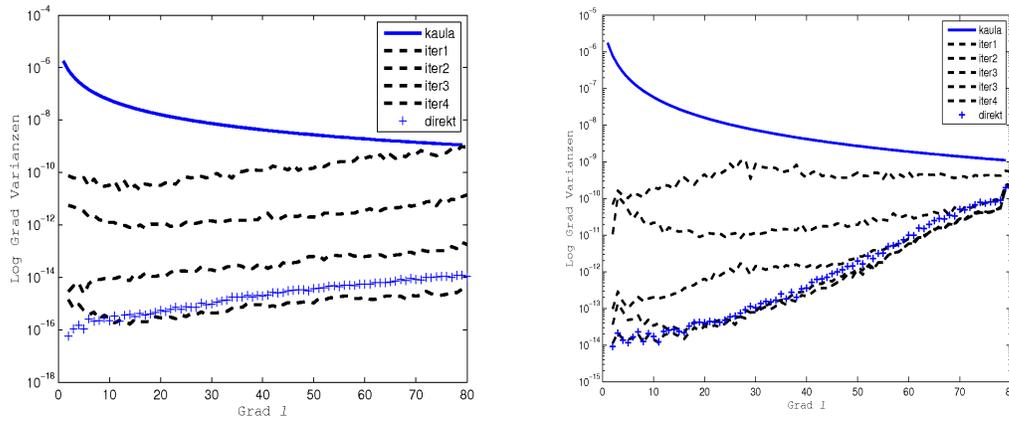


Abbildung 37. Simuliertes CHAMP Fehlerspektrum aus Daten bis SH = 70 links, sowie bei unterparametrisiertem Modell mit SH = 200, rechts.

Abb. 38 zeigt den Einfluss stochastischer Positionsfehler mit einem mittleren Fehler von $\sigma(r) = 2\text{ cm}$. Bei Grad/Ordnung 60 tritt bereits annähernd Parität zwischen Signaldifferenz und Signal selbst ein. Die Genauigkeit der Positionsbestimmung ist daher grundsätzlich der limitierende Faktor für die Genauigkeit der bestimmten Koeffizienten bei CHAMP.

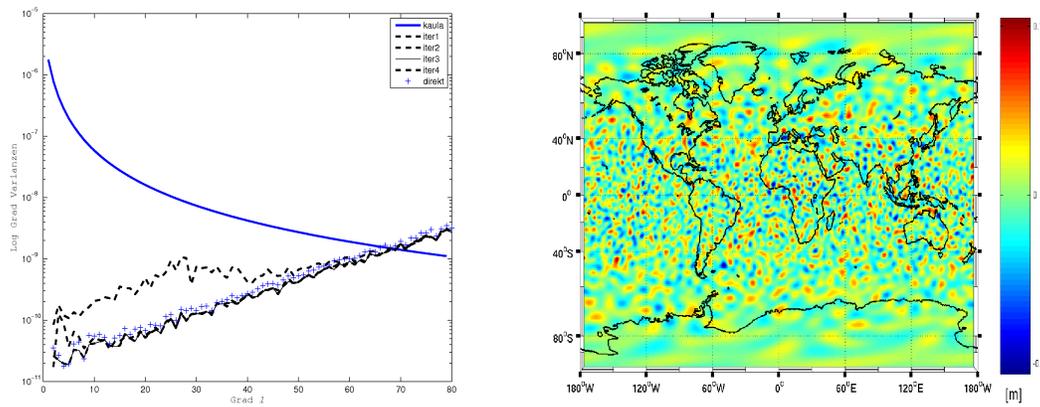


Abbildung 38. Konvergenz der simulierten CHAMP-Daten mit stochastischem Rauschen. Rechts: global verteilte Geoidhöhenfehler hervorgerufen durch das simulierte Rauschen.

7.2 GRACE-Simulation (Störpotentialdifferenzen)

Die Satelliten befinden sich auf einer nominalen Bahn von geringer Exzentrizität, räumlich um ca. 240 km versetzt. Aufgrund der Erdrotation handelt es sich jedoch streng genommen nicht um dieselbe Bodenspur. Entlang von simulierten Bahnen werden jeweils Potentialwerte berechnet und die Differenz zwischen GRACE 1 und 2 gebildet. Diese Größen gehen als Beobachtungen in das Modell ein. Die Auswertung erfolgt iterativ mittels Fourieranalyse. Da zur Erzeugung der GRACE 2 Daten prinzipiell auch ein Filter auf die *lumped coefficients* in GRACE 1 angewendet werden kann, bleiben die entsprechenden Konstanten Q_r nach Gl. (118) zu den

Frequenzen $k = 0$ in GRACE 2 davon weitestgehend unberührt. Dies bedeutet, dass nach Differenzbildung der beiden Spektren kein konstantes Signal mehr in den Beobachtungen enthalten ist. Eine absolute Auswertung des Erdschwerefeldes aus GRACE Abstandsbeobachtungen alleine ist daher kaum möglich. Es müssen Positionsdaten des Satelliten bzw. Orbitalelemente hinzugezogen werden. Darauf aufbauend können relative, z.B. monatliche Lösungen berechnet und voneinander in Abzug gebracht werden, etwa zur Studie zeitabhängiger Veränderungen des Erdschwerefeldes. Zunächst wird eine initiale Lösung berechnet:

1. Berechnen von 'beobachteten' Störpotentialdifferenzen $T_{12} = T_2 - T_1$ sowie deren Reduktion $\bar{T}_{12} = T_{12} - dT_{12}^h$ auf eine mittlere Höhe anhand einer Reihenentwicklung
2. Spektral-Analyse des Signals \bar{T}_{12} durch Ausgleichung nach LC's sowie Sortieren der Koeffizienten entsprechend der Kreisfrequenzen $r = kN_o - mN_e$.
3. Ausgleichen der verknüpften Harmonischen (*lumped coefficients*) in Kugelfunktionskoeffizienten

Ausgehend von dem Initialmodell werden iterativ jeweils die Residuen zu den Störpotentialdifferenzen δT_{12} gebildet und einer neuerlichen Analyse nach (2.) unterzogen. Die daraus hervorgehenden Werte können anschliessend nach (3.) in Zuschläge zu Kugelfunktionskoeffizienten umgewandelt werden.

$a = 6794 (416) km$
$e = 0.002$
$I = 89.0^\circ$
$N_o/N_e = 448/29$
$N = 250560(1 \text{ Monat})$
$P = 130$
$S = 130, S = 220$

Tabelle 14. GRACE-Simulation, Grosse Halbachse a (Bahnhöhe), Exzentrizität e , Inklination I , Wiederholungsperioden N_o/N_e , Datenanzahl N , Parametrisierung P , Signal S , Standardabweichungen Eingangsdaten.

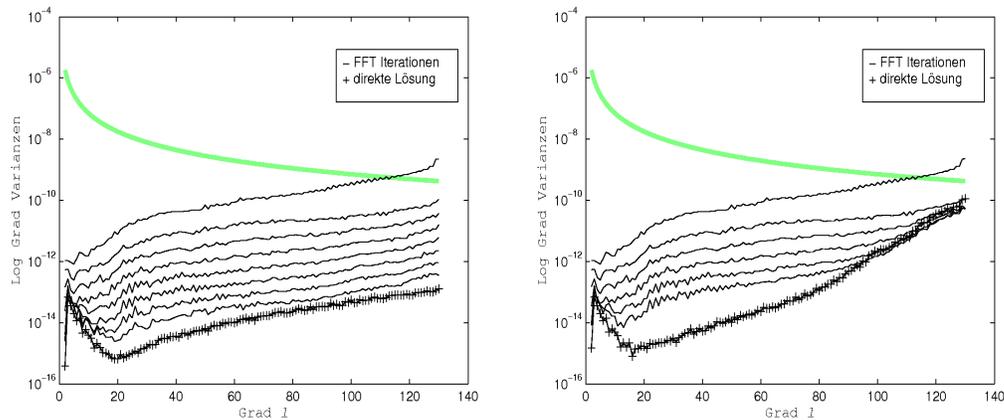


Abbildung 39. Konvergenz der simulierten GRACE-Daten. Die ausgeglichenen Daten beim direkten Verfahren stimmen nicht exakt mit den Eingangsdaten überein aufgrund der Reduktion der Bahnexzentrizität (links). Mit der gewählten Unterparametrisierung (rechts) tritt eine erhebliche Beeinträchtigung auf; um hochgenau auflösen zu können, ist das Modell entsprechend hoch zu entwickeln.

Abb. 36 zeigt nachfolgend die Simulation mit den folgenden Störeinflüssen

$\sigma(r) = 2\text{ cm}$
$\sigma(\dot{\rho}) = 0.002\ \mu\text{ms}^{-1}$
$\sigma(T_{12}) = v \cdot \sigma(\dot{\rho}) = 0,0013\text{ m}^2\text{ s}^{-2}, v = 7500\ \text{kms}^{-1},$
$\sigma(T_2) = v \cdot \sqrt{2} \sigma(r)/dt = 3\text{ m}^2\text{ s}^{-2}, dt = 10\text{ s}$

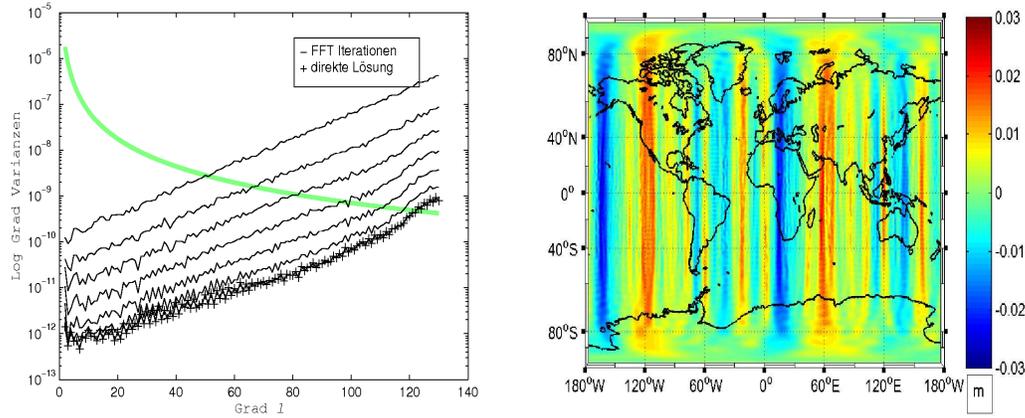


Abbildung 40. Konvergenzverhalten bei stochastischem Rauschen der Störpotentialdifferenzen sowie Fehlern der Absolutgeschwindigkeit. Die globalen Fehler liegen im cm -Bereich, jedoch bilden sich bestimmte Strukturen heraus. Dies liegt vor allem daran, dass die niedrigen Frequenzen ($k = 0$) in dem differentiellen Signal der Störpotentiale nur sehr schwach repräsentiert sind, daher konvergieren zwar die höheren Grade schrittweise zu der Originallösung, die niederen bleiben jedoch konsequent fehlerbehaftet.

Die direkte Berechnung durch Inversion nach Kap. 4 folgt an dieser Stelle nicht dem Ansatz nach Han [HAN04], bei dem die beiden Satellitenpositionen zur Bildung der Modellmatrix A voneinander nach Gl. (241) in Abzug gebracht werden. Dies liegt an dem Auftreten von gemischten Produkttermen zwischen den beiden Satellitenpositionen, die sich nicht ohne weiteres aus dem diskutierten schnellen Ansatz heraus berechnen lassen. Eine Linearisierung im gemeinsamen Satellitenschwerpunkt zur Bestimmung der gemischten Normalgleichungskomponenten bringt hier eine Lösung, dies wurde im Rahmen der Arbeit jedoch nicht mehr untersucht. Stattdessen wurde die Normalgleichungsmatrix in GRACE 1 einmalig berechnet und mit den Störpotentialwerten aus $T_1 = T_2 \pm \sigma(T_2) - (T_{12} \pm \sigma(T_{12}))$ aufgelöst. Um die Stärke der direkten Inversion gegenüber dem Verfahren im Frequenzbereich zu testen wurden dabei wiederum 15% der Daten als Lücken bzw. Ausreisser aus dem Modell entfernt.

7.3 GOCE-Simulation (Gradiometrie)

In diesem Abschnitt werden die Diagonalelemente des Gradiometertensors zunächst entlang einer simulierten Bahn von geringer Exzentrizität generiert und anschliessend iterativ im Frequenzbereich, sowie in einem rigorosen Lösungsschritt berechnet und gegenübergestellt. Die verwendete Rechnerarchitektur umfasst einen Standard-PC. Die maximale Auflösung des Erdschwerefeldmodells ist mit $L = 170$ zwar noch deutlich unter den Anforderungen an eine GOCE-Datenauswertung, jedoch kann der erforderliche Arbeitsspeicher erweitert und damit Modelle bis $L = 210$ (8GB Speicherbedarf) berechnet werden. Berücksichtigt man weiter, dass die Inversion auch mit einfacher Rechengenauigkeit durchgeführt werden kann (siehe Abschnitt 4.2.7), so lässt sich damit im Prinzip bis $L = 250$ auflösen.

$a = 6622 (243) km$
$e = 0.002$
$I = 96.5^\circ$
$N_o/N_e = 467/29$
$N = 2505600(1 \text{ Monat})$
$P = 170$
$S = 170^a, S = 360^b$

Tabelle 15. GOCE Simulation, Grosse Halbachse a (Bahnhöhe), Exzentrizität e , Inklination I , Wiederholungsperioden N_o/N_e , Datenanzahl N , Parametrisierung P , Signal S , Standardabweichungen Eingangsdaten.

Für die gemeinsame Ausgleichung aller drei Tensor-Komponenten stellt sich bei Berechnung des vollständigen Normalgleichungssystems sehr gute Übereinstimmung mit dem Ausgangsmodell ein, vgl. Abb. 41,

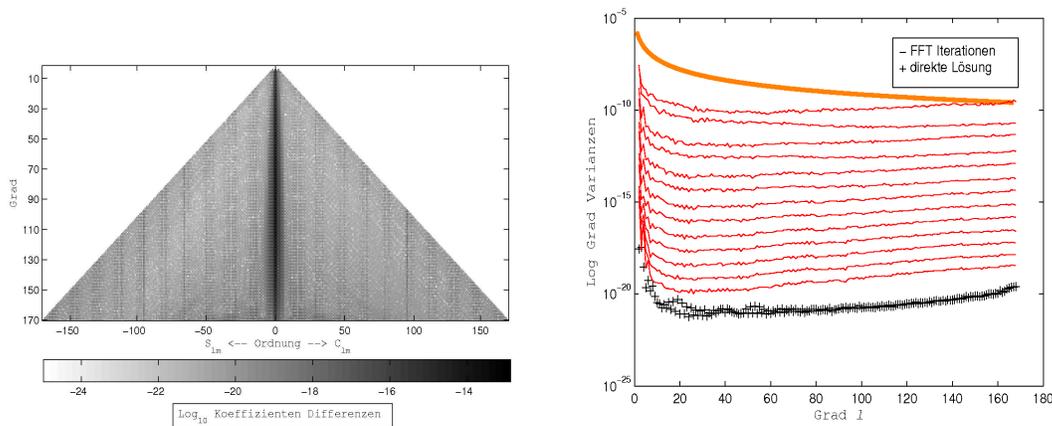


Abbildung 41. Koeffizientenresiduen nach direkter Inversion der Diagonalkomponenten des Gradiomentensors bis $L = 170$, sowie Konvergenz der radialen Komponente anhand des FFT-Verfahrens (rechts).

7.4 Zusammenfassung

Zwei unterschiedliche Berechnungsverfahren wurden in Simulationen getestet und Ergebnisse gegenübergestellt. Die Methodik im Spektralbereich eignet sich besonders für den Sonderfall regulärer Datendistributionen, wie dies für Satellitenmissionen eingeschränkt, insbesondere für GOCE jedoch angenommen werden kann. Das direkte Inversionsverfahren anhand der Berechnung einer intermediären Matrix, aus der die Normalgleichungen in einem zweiten Schritt erzeugt werden können, kann prinzipiell für alle Missionsszenarien angewandt werden. Dabei spielen Orbitkontraktion und Bahnexzentrizität keine Rolle, weshalb der Methodik eine grosse Flexibilität zugeschrieben werden kann. Darüberhinaus können auch irregulär angeordnete, heterogene Daten in ein gemeinsames System integriert werden. Durch die effiziente Berechnung der empirischen Produkte der trigonometrischen Basisfunktionen der Kugelfunktionen eignet es sich besonders bei der Verarbeitung besonders grosser Datenmengen, wie diese im Zuge von Satellitenmissionen in annähernd lückenloser, globaler Verteilung anfallen. Zur effektiven Bildung von Potentialdifferenzen, wie sie von Jekeli [JEK99] vorgeschlagen werden, sind jedoch noch Detailfragen bezüglich der Bestimmung der gemischten Produkte ($A^T B$) zu klären.

Die Simulationsrechnung deuten ebenso auf Schwierigkeiten bei der Bestimmung der Kugelfunktionskoeffizienten hin. Unter Annahme sehr einfacher Rauschszzenarien degradieren die Lösungen bereits erheblich. Insbesondere bei GRACE Beobachtungen differentieller Schwerefunktionale kommt es aufgrund der Bodenüberdeckung entlang polarer Bahn zu schlecht konditionierten Systemen mit eingeschränkter Auflösbarkeit. Daher können vermutlich nur sehr kurze Abschnitte während der andauernden Kontraktion der Bahn und damit einhergehenden Wiederholungszyklen, mit vergleichsweise hoher Auflösung bestimmt werden. Bezüglich der GOCE Mission bedeutet dies, dass insbesondere der Kompensation nicht gravitativer Einflüsse wie der Oberflächenkräfte, auf der ohnehin sehr niedrigen Flugbahn höchste Bedeutung zukommt. Nur wenn eine entsprechend gleichförmige, hohe Überdeckung über Grund gewährleistet ist kann das hohe Auflösungsvermögen der Gradiometer voll ausgeschöpft werden.

Glossar

LC	Lumped Coefficients	12
FFT	Fast Fourier Transform	21
SH	Sphärisch– Harmonische Entwicklung	40
CHAMP	Challenging Mini–Satellite Payload	53
GOCE	Gravity and Ocean Circulation Explorer	53
PCG	Preconditioned Conjugate Gradients	61
LEO	Low Earth Orbiter	73
ARMA	Autoregressive Moving Average	76
LLC	Latitude Lumped Coefficients	82
TLE	Two-Line Elements	87
NASA	National Aeronautic and Space Administration	87
NOAA	National Oceanic and Atmospheric Administration	87
NGS	National Geodetic Survey	87
ESA	European Space Agency	87
SST– <i>hl</i>	Satellite–to–Satellite Tracking, high–low	91
SST–11	Satellite-to-Satellite Tracking, low-low	91
GRACE	Gravity and Climate Experiment	93

Literaturverzeichnis

- [ALE01] ALENIA. *Performance requirements and budgets for the gradiometric mission*. Technical Note G0-TN-AI-0027, Turin, Italy, 2001.
- [ALL67] RR ALLAN. Resonance effects due to the longitude dependence of the gravitational field of a rotating primary. *Planetary Space Science*, 15:53–76, 1967.
- [ALL73] RR ALLAN. Satellite resonance with longitude-dependent gravity-iii. inclination changes for close satellites. *Planetary Space Science*, 21:205–225, 1973.
- [BAL78] G. BALMINO. On the product of legendre functions as encountered in geodynamics. *Studia Geophysica et Geodetica*, 22:107–117, 1978.
- [BKK93] MILAN BURŠA, GEORGIJ KARSKÝ, and JAN KOSTELECKÝ. *Dynamika umělých družic v tíhovém poli Země*. ACADEMIA, PRAHA, 1993.
- [BOU98] J BOUMAN. 1998.
- [BS90] M BROVELLI and F SANSÓ. Gradiometry: The study of the V_{yy} component in the BVP approach. *manuscripta geodaetica*, 15:240–248, 1990.
- [BSGK06] T BADURA, C SAKULIN, C GRUBER, and R KLOSTIUS. Derivation of the champ only global gravity field model tug-champ04 applying the energy integral approach. *Studia Geophysica et Geodetica*, pages 59–74, 2006.
- [CHS04] C J COPI, D HUTERER, and G D STARKMAN. Multipole Vectors- a new representation of the CMB sky and evidence for statistical anisotropy or non-Gaussianity at $2 < \ell < 8$. *Physical Review D*, 70:043515, 2004.
- [CL03] CHUNFANG CUI and DIETER LELGEMANN. Die Reduktion von GRACE-SST Daten zwecks Aufbereitung zu einer Spektralanalyse. *Zeitschrift für Vermessungswesen, Wissner-Verlag*, pages 1, 40–46, 2003.
- [CM69] E CUTHILL and J McKEE. Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices. *In Proc. 24th Nat. Conf. ACM*, pages 157–172, 1969.
- [COL81] OL COLOMBO. *Numerical methods for harmonic analysis on the sphere*. Technical Report, No. 310, Ohio State University, 1981.
- [COL84] OL COLOMBO. *The global mapping of Gravity with two satellites*. Netherlands Geodetic Commission New Series Number 3, Delft, The Netherlands, 1984.
- [COL87] O L COLOMBO. *The global mapping of the Gravity Field with an Orbiting Full-Tensor Gradiometer: an Error Analysis*. presented at XIX Assembly of the IUGG, Vancouver, Canada, 1987.
- [DH94] J.R. DRISROLL and D.M. HEALY. *Computing Fourier transforms and convolutions on the 2-sphere*. *ADV APPL MATH* 15:202-250, 1994.
- [DIL85] GARY DILTS. Computation of Spherical Harmonic Expansion Coefficients via FFT's. *Journal of Computational Physics*, pages 57, 439–453, 1985.
- [DK02] P. DITMAR and R KLEES. *A Method to Compute the Earth's Gravity Field from SGG/SST Data to be Acquired by the GOCE Satellite*. DUP, Delft University of Technology, 2002.
- [EK87] NV EMELJANOV and KK KANTER. A method to compute inclination functions and their derivatives. *Manuscripta Geodaetica*, 14(1989):77–83, 1987.
- [ELO89] MARK ELOVITZ. A Test of a Modified Algorithm for Computing Spherical Harmonic Coefficients Using an FFT. *Journal of Computational Physics*, pages 80, 506–511, 1989.
- [ESA99] ESA. *Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Mission. Reports for Mission selection, The four candidate Earth explorer core missions, SP-1233(1)*. European Space Agency, Noordwijk, NL, 1999.
- [FM96] LUCIANA FENOGLIO-MARC. *Sea Surface Determination with Respect to European Vertical Datums*. DEUTSCHE GEODÄTISCHE KOMMISSION, Reihe C, Bay. Akademie d. Wissenschaften, 1996.
- [G98] WENZEL G. Ultra high degree geopotential models gpm98a, b and c to degree 1800. *Joint Meeting of the International Gravity Commission and International Geoid Commission, 7-12 September, Trieste. Bolletino di Geofisica teorica ed applicata.*, 1998.

- [GOA87] C.C. GOAD. An efficient algorithm for evaluation of inclination and eccentricity functions. *Manuscripta Geodaetica*, 12, 1987.
- [GOC] GOCE. *GOCE L1b Products User Handbook, issue 1 rev 1 02/10/06, Technical Note*. European Space Agency, GOCE PDGS Team.
- [GOO71] RH GOODING. A recurrence relation for inclination functions. *Celestial Mechanics*, 4:91–98, 1971.
- [GWK+06] RH GOODING, CA WAGNER, J KLOKOČNÍK, J KOSTELECKÝ, and CH. GRUBER. CHAMP and GRACE Resonances, and the Gravity Field of the Earth. *COSPAR Meeting 2006-A-01261, Peking - Proc. In: Advances of Space Research*, 2006.
- [GWWK04] RH GOODING, CA WAGNER, J KLOKOČNÍK, and J KOSTELECKÝ. *CHAMP and Resonances*, In: Reigber, Ch.; Lühr, H.; Schwintzer, P.; Wickert, J. (eds.) *Earth Observation with CHAMP Results from Three Years in Orbit*. Springer Verlag, Heidelberg, Berlin, New York, 2004.
- [HAN04] S.C. HAN. Efficient Determination of the Global Gravity Field from Satellite-to-Satellite Tracking Mission. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, pages 88, 69–102, 2004.
- [HF02] S.A. HOLMES and W.E. FEATHERSTONE. A unified approach to the clenshaw summation and the recursive computation of very high degree and order normalised associated legendre functions. *Journal of Geodesy*, pages 76: 279–299, 2002.
- [HM67] HEISKANEN and MORITZ. *Physical & Geodesy*. W.H. Freeman Company, SAN FRANCISCO, 1967.
- [HOB55] W.E. HOBSON. *The Theory of Spherical and Ellipsoidal harmonics*. CHELSEA PUBLISHING COMPANY, NEW YORK, 1955.
- [HOL05] P HOLOTA. On the Combination of Terrestrial Gravity Data with Satellite Gradiometry and Airborne Gravimetry Treated in Terms of Boundary-Value Problems. In *A joint meeting of the IAG, IAPSO and IABO - Dynamic Planet 2005*, Intl. Association of Geodesy Symposia, August 22-26, 2005. Springer, Berlin - Heidelberg - New York. Session G2: Gravity field determination from a synthesis of terrestrial, satellite, airborne and altimetry measurement; accepted.
- [HP60] D.J. HOF SOMMER and M. L. POTTERS. Table of Fourier Coefficients of Associated Legendre Functions, Report R 478. *KNAW, Computational Department of the Mathematical Centre, Amsterdam*, 1960.
- [HS52] MR HEESTENS and E STIEFEL. *Journal Research National Bureau of Standards*, 49:409–436, 1952.
- [HW92] HELLWIG and WEGNER. *Mathematik und Theoretische Physik I*. Walter de Gruyter, BERLIN-NEW YORK, 1992.
- [HWA91] C. HWANG. *Orthogonal Functions over the Oceans and Applications to the Determination of Orbit Error, Geoid and Sea Surface Topography from Satellite Altimetry*. Rep. 414, Dep. of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Columbus, Ohio, 1991.
- [HWM86] B. HOFMANN-WELLENHOF and H. MORITZ. Introduction to spectral analysis, in: Sünkel, H. (ed.), *Lecture Notes in Earth Sciences. Mathematical and Numerical Techniques in Physical Geodesy*, Springer-Verlag, Berlin, Vol 7, 1986.
- [JEK99] CHRISTOPHER JEKELI. The Determination of gravitational potential differences from Satellite-to-Satellite Tracking. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, pages 75, 85–101, 1999.
- [KAR00] MARIA KARRER. *Schwerefeldbestimmung aus Satellitengradiometrie*. Diplomarbeit, Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie, Technische Universität München, 2000.
- [KAU66] WM KAULA. *Theory of Satellite Geodesy*. BLAISDELL PUB. CO., Waltham, MASSACHUSETTS, 1966.
- [KH92] D KING-HELE. *A tapestry of orbits*. University Press, Cambridge, 1992.
- [KH98] W KELLER and D HESS. Gradiometrie mit GRACE. *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 124:137–144, 1998.
- [KK02] J KUSCHE and R KLEES. Regularization of gravity field estimation from satellite gravity gradients. *Journal of Geodesy*, 76:359–368, 2002.
- [KKG03] J KLOKOČNÍK, J KOSTELECKÝ, and RH GOODING. On fine orbit selection for particular geodetic and oceanographic missions involving passage through resonances. *Journal of Geodesy*, pages 77:30–40, 2003.
- [KKK86] J KOSTELECKÝ, J KLOKOČNÍK, and Z KALINA. Computations of normalized inclination function to high degree for satellites in resonances. *Manuscripta Geodaetica, Springer Verlag*, pages 11:293–304, 1986.
- [KKK94] J KLOKOČNÍK, J KOSTELECKÝ, and KARASOVÁ. *Satellite Altimetry and its use in geoscience*. Research Institute of Geodesy, Topography and Cartography, Zdiby, Czech Republik., 1994.

- [**KKVvdI00**] R. KLEES, R KOOP, P VISSER, and J van den IJSSEL. Efficient gravity field recovery from goce gravity gradient observations. *Journal of Geodesy*, pages 74:561–571, 2000.
- [**KKW+**] J KLOKOČNÍK, J KOSTELECKÝ, CA WAGNER, P SCHWINTZER, CH FÖRSTE, and R SCHAROO. Evaluation of the accuracy of the EIGEN-1S and -2 CHAMP-derived gravity field models by satellite crossover altimetry. *Journal of Geodesy*, 78:405–417.
- [**KKW92**] J KLOKOČNÍK, F KOBRLE, and C.A. WAGNER. A test of GEM T2 from Geosat crossover using latitude lumped coefficients. *Geodesy and Physics of the Earth, Symposium Potsdam, October 5-10, 1992*, pages 112: 79–82, 1992.
- [**KKWG05**] J KLOKOČNÍK, J KOSTELECKÝ, CA WAGNER, and CH GRUBER. Review of the use of satellite crossover altimetry to test the accuracy of earth gravity field models. *15 Years of progress in Radar altimetry Symposium, Venice 13-18 March 2005*, 2005.
- [**KOO93**] RADBOUD KOOP. *Global Gravity Field Modelling using Satellite Gravity Gradiometry*. Netherlands Geodetic Commission New Series Number 38, Delft, The Netherlands, 1993.
- [**KOS84**] J KOSTELECKÝ. Recurrence relations for the normalized inclination function. *Bull. Astron. Inst. Czechosl.*, 36(1985):242–246, 1984.
- [**KOZ59**] Y KOZAI. The motion of a close earth satellite. *Astronomical Journal* 64,367, 1959.
- [**KPR00**] R. KOOP, VISSER P., and KLEES R. Detailed scientific data processing approach, final report IN(Hrsg.) H.SÜNKEL, From Eötvös to Milligal. *European Space Agency*, 2000.
- [**KUS02**] J KUSCHE. *Inverse Probleme bei der Gravitationsfeldbestimmung mittels SST- und SGG-Satellitenmissionen*. Habilitationsschrift, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, No. 548, Bayerische Akademie der Wissenschaften, 2002.
- [**KvDL03**] J KOPÁČEK, J ČERYCH, P DOKTOR, and J LANGER. *Příklady z Matematiky pro fyziky IV*. matfyzpress, PRAHA, 2003.
- [**LC99**] D LELGEMANN and CH CUI. Bemerkungen über die Gravitationsfeldbestimmung mittels Satelliten-Satellite Tracking-Daten. *Zeitschrift für Vermessungswesen*, pages 9: 289–295, 1999.
- [**MAI04**] ENRICO MAI. *Spektrale Untersuchungen GPS-ähnlicher Orbits unter Anwendung einer Analytischen Bahntheorie 2.Ordnung*. Dissertation, Technische Universität Berlin, Berlin, Strasse des 17. Juni, 2004.
- [**MAU00**] R MAUTZ. *Zur Lösung nichtlinearer Ausgleichungsprobleme bei der Bestimmung von Frequenzen in Zeitreihen*. Dissertation am Fachbereich Bauingenieurwesen und Angewandte Geowissenschaften, Technische Universität Berlin, 2000.
- [**MEI**] P. MEISSL. A study of covariance functions related to the earth's disturbing potential. *Tech. Rep. No. 151, Ohio State University, Department of Geodetic Science and Surveying*.
- [**MG00**] P MONTENBRUCK and E GILL. *Satellite Orbits*. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 2000.
- [**MGIFE**] T MAYER-GUERR, KH ILK, M FEUCHTWANGER, and A EICKER. In *Proceedings Joind CHAMP/GRACE Science Team Meeting 2004 (2007) 0000:0001-5*. GFZ-Potsdam.
- [**MOH97**] MARTIN JAMES MOHLENKAMP. *A fast transform for spherical harmonics*. Dissertation, submitted to Yale University, New Haven, Connecticut, 1997.
- [**MP05**] B. METZLER and R. PAIL. Gocce data processing: The spherical cap regularization approach. *Studia Geophysica et Geodaetica*, pages 49:441–462, 2005.
- [**NOV01**] PAVEL NOVAK. On the accuracy of modified stokes's integration in high-frequency gravimetric geoid determination. *Journal of Geodesy*, pages 74:644–654, 2001.
- [**PLA02**] GERNOT PLANK. *Implementation of the pcgma-package on massive parallel systems, IN: H. Sünkel (Hrsg.) From Eötvös To Milligal+, Final Report*. ESA/ESTEC, Contract No. 14287/00/NL/DC, 2002.
- [**PP04**] R. PAIL and G. PLANK. Gocce gravity field processing strategie. *Studia Geophysica et geodaetica*, pages 48:289–309, 2004.
- [**PPWD01**] R PAIL, G PLANK, and SCHUH W-D. Spatially restricted data distributions on the sphere: the method of orthonormalized functions and applications. *Journal of Geodesy*, pages 75:44–56, 2001.
- [**PRE03**] PREIMESBERGER, T and PAIL, R. GOCE quick-look gravity solution: application of the semi-analytic approach in the case of data gaps and non-repeat orbits. *Studia geoph. et geod.*, 47:435–453, 2003.
- [**RJW+05**] CH REIGBER, H JOCHMANN, J WÜNSCH, S PETROVIC, P SCHWINTZER, F BARTHELMES, K H NEUMAYER, R KÖNIG, CH FÖRSTE, G BALMINO, R BIANCALE, J-M LEMOINE, S LOYER, and F PEROSANZ. Eigen-3p, champ-only earth gravity field model derived from three years of champ data. IN: REIGBER, CH and LÜHR, H and SCHWINTZER, P and WICKERT, J (eds.), *Earth Observation with CHAMP - Results from Three Years in Orbit*, pages 25–30, 2005.

- [**ROS86**] G.W. ROSBOROUGH. Satellite orbit perturbations due to the geopotential. *Center for Space Res., Texas Univ., Rep. CSR-86-1, Austin Texas.*, 1986.
- [**RSN+03**] CH REIGBER, P SCHWINTZER, K H NEUMAYR, F BARTHELMES, R König, CH FÖRSTE, G BALMINO, R BIANCALE, J M LEMOINE, S LOYER, S BRUINSMA, F PEROSANZ, and T FAYARD. The champ-only earth gravity field model eigen-2. *Advances in Space Research*, 31(8):1883–1888, 2003.
- [**RVGK+93**] R. RUMMEL, M. VAN GELDEREN, R. KOOP, F. SANSO, M. BROVELLI, F. MIGGIACIO, and F. SACERDOTE. *Spherical harmonical analysis of satellite Gradiometry*. Netherlands Geodetic Commission, New Series Number 39, Thijsseweg 11, 2629 JA Delft, The Netherlands, 1993.
- [**SAN59**] G. SANSONE. *Orthogonal Functions*. Pure and Applied Mathematics, Vol. IX, Interscience Publisher, Inc., New York, 1959.
- [**SCH79a**] KP SCHWARTZ. Geodetic improperly posed problems and their regularization. *Bolletino di geodesia e scienze affini*, 38:389–416, 1979.
- [**SCH79b**] P.N. SCHWARZTRAUER. On the spectral approximation of discrete scalar and vector functions on the sphere. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, pages 934–949, 1979.
- [**SCH89**] EJO SCHRAMA. *The role of orbit errors in processing of satellite altimeter data*. Netherlands Geodetic Commission New Series Number 38, Delft, The Netherlands, 1989.
- [**SCH96**] W.D. SCHUH. *Tailored numerical solution strategies for the global determination of the Earth's gravity field*. Mitteilungen des Geodätischen Institutes der Techn. Univ. Graz, No. 81, Graz, Austria, 1996.
- [**SCH02**] W-D SCHUH. WP: Improved modeling of SGG-data sets by advanced filter strategies, IN: H. Sünkel (Hrsg.) From Eötvös To Milligal+, Final Report. 2002.
- [**SCH03**] FLORIAN SCHECK. *Theoretische Physik 1, Mechanik*. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 2003.
- [**SNE00**] N. SNEEUW. *A semi-analytic approach to gravity field analysis from satellite Observations*. Deutsche Geoätische Kommission, Reihe C 527, Bay. Akademie d. Wissenschaften, 2000.
- [**SNE03**] NICO SNEEUW. *Space-Wise, Time-Wise, Torus and Rosborough Representations in Gravity Field Modelling*. Space Science Reviews 108:37-46, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 2003.
- [**SR96**] N. SNEEUW and BUN R. Global spherical harmonic computation by two-dimensional fourier methods. *Journal of Geodesy*, pages 70:224–232, 1996.
- [**ŠR05**] D ŠVEHLA and M ROTHACHER. Kinematic precise orbit determination for gravity field determination. IN: Sanso F(ed), *A Window on the future of geodesy*, Springer Verlag, Heidel - Berlin, pages 181–188, 2005.
- [**STU06**] CLAUDIA STUMMER. *Analyse der Gradiometergleichungen der GOCE Satellitenmission zur Schwerefeldbestimmung*. IAPG / FESG No. 25, Technische Universität München, 2006.
- [**SVG97**] N SNEEUW and M VAN GELDEREN. *The polar gap*. IN: Sansò F, Rummel R(eds) *Geodetic boundary value problems in view of the one centimeter geoid*, volume 65. Lecture Notes in Earth Sciences, Springer, Berlin - Heidelberg, New York, 1997.
- [**TR74**] CC TSCHERNING and RH RAPP. Closed covariance expressions for gravity anomalies, geoidal undulations, and deflections of the vertical implied by anomaly degree variance models. *Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University*, Report 208, 1974.
- [**TRB+**] BD TAPLEY, J RIES, S BETTADPUR, D CHAMBERS, M CHENG, F CONDI, B GUNTER, Z KANG, P NAGEL, R PASTOR, T PEKKER, S POOLE, and F WANG. GGM02-an improved Earth gravity field model from GRACE. *Journal of Geodesy*, 79:467–478.
- [**TS98**] D TSOULIS and N SNEEUW. *A MATLAB software for global spherical harmonic analysis*. Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie, Technische Universität München, 1998.
- [**WAG83**] CARL A WAGNER. Direct Determination of Gravitational Harmonics From Low-Low GRAVSAT Data. *Journal of Geophysical Research*, Vol. 88, NO. B12, pages 10,309–321, 1983.
- [**WAG87**] CARL A WAGNER. Improved gravitational recovery from a geopotential research mission satellite pair flying on echelon. *Journal of Geophysical Research*, Vol. 92, NO. B8, pages 8147–8155, 1987.
- [**WCK97**] J WAGNER CA, KLOKOČNÍK and J KOSTELECKÝ. Dual-satellite crossover latitude lumped coefficients: their use in geodesy and oceanography. *Journal of Geodesy*, 71:603–616, 1997.
- [**WIE**] M WIECZOREK. *SHTOOLS*. <http://www.ipgp.jussieu.fr/wieczor/SHTOOLS/SHTOOLS.html>.
- [**WK76**] CA WAGNER and SM KLOSKO. Gravitational Harmonics from shallow resonant orbits. *Celestial Mechanics*, 16:143–163, 1976.
- [**WOL**] M WOLF. Direct measurements of the earth's gravitational potential using a satellite pair. *Journal of Geophysical Research*, 74 (22):5295–5300.

- [**WW87**] E. WNUK and I. WYTRZYSZCZAK. The inclination function in terms of nonsingular elements. *Celestial Mechanics*, 42:251–261, 1987.
- [**XIE05**] JING XIE. *Implementation of Parallel Least-Squares Algorithms for Gravity Field Estimation, Report No. 474*. Geodetic and Geoinformation Science, Department of Civil and Environmental Engineering and Geodetic Science, The Ohio State University, 2005.
- [**XU**] PL XU. The value of minimum norm estimation of geopotential fields. *Geophysical Journal International*, 111:170–178.
- [**XU96**] YU-LIN XU. Fast evaluation of the gaunt coefficients. *Mathematics of Computation*, Vol. 65, pages 1601–1612, 1996.

Anhang A

A.1 Definition des Potentials

Ausgehend von der Definition des Potentials als eine skalare Ortsfunktion

$$U(\vec{r}) - U(\vec{r}_0) = - \int_{r_0}^r f(\vec{r}) d\vec{r} \quad (\text{A.1})$$

findet man den Gradienten zu

$$\nabla U(\vec{r}) = \frac{dU(\vec{r})}{dr} \nabla r = - f(\vec{r}) \nabla \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = - f(\vec{r}) \hat{r}. \quad (\text{A.2})$$

Somit ist $F(\vec{r}) = - \nabla U(\vec{r})$.

Ein konservatives Kraftfeld kann durch den Gradienten einer Potentialfunktion dargestellt werden, z.B. [HW92]

$$\vec{F}(\vec{r}) = - \nabla \cdot V(\vec{r}) \quad (\text{A.3})$$

wobei $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ den Nabla Operator bezeichnet. Das innere Produkt des Nabla Operators mit der Potentialfunktion führt damit zu einem Vektorfeld. Dieser Umstand verbindet letztlich ein physikalisch messbares Signal mit einem mathematischen Model. Wegen (1) gilt aber zudem

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = 0, \quad (\text{A.4})$$

denn $(\nabla \times \nabla)V = 0$, sofern V zweimal stetig differenzierbar ist. Die Rotationsfreiheit eines konservativen Kraftfeldes führt weiter unmittelbar zu der Wegunabhängigkeit des Arbeitsintegrals. Nach dem STOKES'SCHEN Integralsatz ist der Fluss der Rotation eines Vektorfeldes gleich der Zirkulation des Feldes um den Rand des Flächenstücks. Es gilt

$$\int_{\Sigma} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d^2\sigma = \int_{\partial\Sigma} \vec{F} \cdot d\mathbf{x} \quad (\text{A.5})$$

wobei Σ das glatte, mit $\partial\Sigma$ berandete Flächenstück und $d^2\sigma$ das orientierte Flächenelement bezeichnen. Die Wegunabhängigkeit des Arbeitsintegrals ist demnach offensichtlich gleichbedeutend mit dem Verschwinden der Zirkulation längs jeden geschlossenen Weges. Noch spektakulärer ist die Divergenz eines Vektorfeldes. Der Satz von GAUSS verbindet Volumen und Oberfläche eines Bereichs und bekräftigt dabei das physikalische Grundprinzip, daß in Absenz der Erzeugung oder Zerstörung von Materie, die Dichtefunktion eines Bereichs nur so viel Veränderung erfahren kann, wie der Fluß durch die sie umspannende Oberfläche. Mit anderen Worten, die Annahme der Divergenzfreiheit eines Vektorfeld zur Beschreibung eines statischen Potentials ist Grundvoraussetzung für ein konservatives Kraftfeld, wie wir es bei der Beschreibung des Erdschwerfeldes voraussetzen und führt im Folgenden unmittelbar auf den Laplace-Operator, der damit einen mathematischen Modelansatz ermöglicht.

A.2 Das Äquivalenzprinzip und der Energiesatz

Die Beobachtungsgleichungen beruhen auf dem Äquivalenzprinzip^{A.1}, dass schwere und träge Masse einander (zumindest mit sehr grosser Genauigkeit) proportional sind. Die Wirkung von Schwerfeldern ist damit äquivalent einer Beschleunigung des Bezugssystems. Die Bewegung im Bezugssystem sei durch den Impuls beschrieben

$$\vec{p}(t) := m\vec{r}'(t) \quad (\text{A.6})$$

Damit folgt für die Bewegungsänderung

$$\frac{d}{dt}\vec{p}(t) = m\vec{r}''(t) = F(\vec{r}). \quad (\text{A.7})$$

mit $F(\vec{r}) = f(\vec{r})\hat{r}$, wobei $f(\vec{r})$ eine skalare Funktion ist. Gl. (A.7) wird auch als Bewegungsgleichung bezeichnet. Multipliziert man nun Gl. (A.7) mit \vec{r}'

$$\vec{r}' \cdot \vec{r}''(t) = -\vec{r}' \cdot \nabla U(\vec{r}) \quad (\text{A.8})$$

so lässt aufgrund der Kettenregel für die zeitliche Ableitung auch schreiben

$$\frac{d(\vec{r}'^2/2)}{dt} = -\frac{dU(\vec{r})}{dt}. \quad (\text{A.9})$$

Daher ist

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}\vec{r}'^2 + U(\vec{r}) \right] = 0 \quad (\text{A.10})$$

und somit ergibt sich der Energiesatz

$$\frac{1}{2}\vec{r}'^2 + U(\vec{r}) = \text{const.} \quad (\text{A.11})$$

A.3 Der Laplace Operator in Kugelkoordinaten

Ausgehend von den Kugelkoordinaten $\{(r, \theta, \lambda): r \in \mathbf{R}_+, \lambda \in [0, 2\pi), \theta \in [0, \pi]\}$

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r \vec{e}_r \\ x &= r \sin\theta \cos\lambda \\ y &= r \sin\theta \sin\lambda \\ z &= r \cos\theta, \\ r &= (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

mit den orthonormierten Basisfunktionen,

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}, \vec{e}_\theta = \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta}, \vec{e}_\lambda = \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \lambda} \quad (\text{A.13})$$

lässt sich der Gradient einer Funktion $f(\vec{r})$ bestimmen zu,

$$\nabla f(\vec{r}) = \vec{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \vec{e}_\lambda \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial f}{\partial \lambda}. \quad (\text{A.14})$$

Geht man ferner von dem vektoriellen Feld

$$\mathbf{A}(\vec{r}) = \vec{e}_r A_r + \vec{e}_\theta A_\theta + \vec{e}_\lambda A_\lambda \quad (\text{A.15})$$

A.1. Das Äquivalenzprinzip geht auf die heuristische Grundidee Einsteins zurück, im Rahmen der Relativitätstheorie zu erklären, dass all Körper gleich schnell im Schwerfeld fallen.

aus, so ergibt sich dessen Divergenz zu

$$\begin{aligned}\nabla \cdot A(\vec{r}) &= \frac{\partial(\vec{e}_r A_r)}{\partial r} \\ &= \frac{\partial A_r}{\partial r} \frac{1}{r} + \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r} A_r \right) \\ \nabla \cdot A(\vec{r}) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \cdot A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta \cdot A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\lambda}{\partial \lambda}\end{aligned}\quad (\text{A.16})$$

Anwenden beider Operatoren auf eine Funktion $f(\vec{r})$, ergibt den Laplace-Operator

$$\Delta \cdot f(\vec{r}) \equiv \nabla \cdot \nabla f(\vec{r}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} \quad (\text{A.17})$$

bzw.

$$\Delta \cdot f(\vec{r}) = \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2}. \quad (\text{A.18})$$

A.4 Die Legendre'sche Differentialgleichung und Kugel­flächen­funktionen

Zur Lösung der Laplacegleichung, d.h. bei vorliegen einer harmonischen Funktion in (A.17),

$$\nabla^2 \cdot f(\vec{r}) = 0 \quad (\text{A.19})$$

bildet man gewöhnlich den Separationsansatz, um die einzelnen Terme voneinander zu trennen

$$f(\vec{r}) = \frac{U(\vec{r})}{r} \cdot P(\theta) \cdot Q(\lambda). \quad (\text{A.20})$$

Multiplikation der Gleichung (A.17) von links mit $\frac{r^2 \sin^2 \theta}{UPQ}$ führt dann zu

$$r^2 \sin^2 \theta \left[\frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta \cdot P} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) \right] + \frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\lambda^2} = 0. \quad (\text{A.21})$$

Wegen der geforderten Unabhängigkeit der Terme in (A.20), müssen die einzelnen Summanden nun jeweils konstant sein, z.B.

$$\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\lambda^2} = \text{const}, \quad (\text{A.22})$$

woraus Q als einfache Kreisfunktion hervorgeht

$$\frac{d^2 Q}{d\lambda^2} = -m^2 Q \Rightarrow Q = \exp^{im\lambda}. \quad (\text{A.23})$$

Ferner muss m ganzzahlig sein, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, um Periodizität der Potentialfunktion zu gewährleisten, $\phi(r, \theta, \lambda) = \phi(r, \theta, \lambda + 2\pi)$. Setzt man ferner für den radialen Term in (A.21)

$$\frac{r^2}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} = \text{const} = l(l+1), \quad (\text{A.24})$$

erhält man die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\Rightarrow \frac{d^2 U}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} U = 0. \quad (\text{A.25})$$

Einsetzen von (A.22) und (A.24) in (A.21) ergibt dann

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + P \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] = 0 \quad (\text{A.26})$$

mit den beiden Separationskonstanten m und l . Für $x = \cos \theta$ und $m = 0$ erhält man daraus die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + l(l+1)P = 0, \quad (\text{A.27})$$

deren Lösung die Legendre Polynome oder Legendre Funktionen 1. Art sind. Es lässt sich zeigen, dass eine Potenzreihe

$$P_\ell^m(x) = \sum_j^\infty a_j x^j \quad (\text{A.28})$$

endlich in j sein muss. Dazu setzt man Gl. (A.28) in Gl. (A.27)

$$\sum_j^\infty [j(j-1)a_j x^{j-2} - j(j+1)a_j x^j + l(l+1)a_j x^j] = 0 \quad (\text{A.29})$$

wonach für jede Potenz gelten muss

$$(j+2)(j+1)a_{j+2} x^j = j(j+1)a_j x^j - l(l+1)a_j x^j \quad (\text{A.30})$$

Für grosse j nähern sich die Koeffizienten jedoch asymptotisch an

$$a_{j+2} \approx a_j, \quad (\text{A.31})$$

was im Widerspruch zur Konvergenz der Reihe steht. Die Reihe muss daher endlich sein mit $\{j, j=0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Die Legendre Funktionen definieren ein vollständiges System auf der Kugel mit $t = \sin \phi$, z.B. Burša et al. (1993)[BKK93]

$$\int_{-1}^{+1} P_\ell^m(t) P_n^m(t) dt = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ln} \quad (\text{A.32})$$

Folgende wichtigen rekursiven Beziehungen werden häufig im Zusammenhang mit ihrer Berechnung angegeben, z.B. Kopáček et al. [KvDL03]

$$\begin{aligned} P'_{l+1} - P'_{l-1} &= (2l+1)P_l, \\ (2l+1)xP_l(x) &= (l+1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x), \\ lP_l(x) &= xP'_l(x) - P'_{l-1}(x), \\ (l-x^2)P'_l(x) &= lP_{l-1}(x) - lP_l(x). \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Eine nützliche **direkte** Entwicklung sei angegeben [HP60]

$$P_l(\sin \phi) = \sum_{k=0}^n p_k \cdot p_{n-k} \cos(n-2k)\theta \quad (\text{A.34})$$

worin $p_j = 4^{-j} \binom{2j}{j}$ sowie $\theta = \pi/2 - \phi$. Wegen der auftretenden Fakultäten empfiehlt es sich die erforderlichen Koeffizienten vorab rekursiv zu bestimmen, indem

$$p_j = \left(1 - \frac{1}{2j}\right) \cdot p_{j-1} \quad (\text{A.35})$$

gesetzt wird, mit dem initialen Wert $p_0 = 1$.

Für $m \neq 0$ erhält man für die Funktion P

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P = 0, \quad (\text{A.36})$$

deren Lösung die FERRER Funktionen ergibt, welche als **assoziert** zu den Legendre Funktionen bezeichnet werden,

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x). \quad (\text{A.37})$$

Die zu (A.32) entsprechende Rekursion lautet

$$(l-m+1)P_{\ell+1}^m(x) - (2l+1)xP_\ell^m(x) + (l+m)P_{\ell-1}^m(x) = 0 \quad (\text{A.38})$$

mit $P_0(x) = 1$ und $P_{-1}(x) = 0$ und wird auch als charakteristische **3-Term Rekursion** bezeichnet, cf. [DH94]. Darüberhinaus gibt es auch eine wichtige Rekursion der Ordnung m , z.B. [HP60]

$$P_l^{m+1}(x) + (n+m)(n-m+1)P_l^{m-1}(x) = 2m \tan \varphi P_l^m(x). \quad (\text{A.39})$$

Kombiniert man in Gl. (A.12) $P(\theta)$ mit $Q(\lambda)$, so erhält man die *normierten* Kugelflächenfunktionen zu

$$\bar{Y}_{lm}(\theta, \lambda) = k_{lm} P_l^m(x) \cdot \exp^{im\lambda} \quad (\text{A.40})$$

mit dem Normierungsfaktor [BKK93]

$$k_{lm} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \quad (\text{A.41})$$

der so gewählt ist, dass die Kugelflächenfunktionen ein vollständiges, orthonormales System über der Oberfläche der Einheitskugel bilden mit der L^2 -norm

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\lambda \bar{Y}_{lm}^*(\theta, \lambda) \bar{Y}_{l'm'}(\theta, \lambda) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (\text{A.42})$$

Die konjugierten Kugelflächenfunktionen seien definiert als

$$\bar{Y}_{lm}^*(\theta, \lambda) = (-)^m \bar{Y}_{l, -m}(\theta, \lambda) \quad (\text{A.43})$$

Wegen der Periodizitätseigenschaften bezeichnet man sie auch als rotationsinvariant. Jede normierbare Funktion $f(\theta, \lambda)$ auf der Kugel kann mittels der Kugelflächenfunktionen entwickelt werden

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \hat{C}_{lm} \cdot \bar{Y}_{lm}(\theta, \lambda) \quad (\text{A.44})$$

wobei die komplexen Entwicklungskoeffizienten gegeben sind zu

$$\hat{C}_{lm} = \langle \bar{Y}_{lm}^*, f(\theta, \lambda) \rangle. \quad (\text{A.45})$$

Da $f(\theta, \lambda)$ üblicherweise eine reelle Funktion ist, gilt für die Koeffizienten der Zusammenhang aus Gl. (A.43)

$$\hat{C}_{lm}^* = (-)^m \hat{C}_{l, -m}. \quad (\text{A.46})$$

Oftmals werden lediglich die realen Koeffizienten $c_{lm} = (\hat{C}_{lm} + \hat{C}_{lm}^*)/2$ und $s_{lm} = (\hat{C}_{lm} - \hat{C}_{lm}^*)/2i$ angegeben und bei der Entwicklung entsprechend nur die positiven Kugelfunktionen evaluiert.

Als besonders nützlich erweist sich die Verwendung der Kugelflächenfunktionen hinsichtlich der entwicklung der inversen Abstandsfunktion in Legendre Polynome, z.B. [SAN59]. Diese lassen sich mit Hilfe des Additionstheorems der normierten Kugelflächenfunktionen ersetzen durch, z.B. [SCH03]

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} \sum_{m=-l}^l \bar{Y}_{lm}^*(\theta_x, \lambda_x) \cdot \bar{Y}_{lm}(\theta_y, \lambda_y) \quad (\text{A.47})$$

wobei $r_{<} \equiv |\mathbf{x}|$, $r_{>} \equiv |\mathbf{y}|$, falls $|\mathbf{y}| > |\mathbf{x}|$ ist, bzw. entsprechend vertauscht im anderen Falle. Der Lösungsraum der Kugelflächenfunktionen stellt daher, in Form einer Fourierreihenentwicklung auf der Kugel, die natürlichen Basisfunktionen für eine Potentialentwicklung dar, die in ähnlicher Weise, wie der komplexe Zahlenraum $\{(x+iy)^n, (x-iy)^n\}$ auf dem Kreis als Lösung der Laplace-Gleichung im \mathbb{R}^2 durch $\{e^{in\theta}, e^{-in\theta}\}$ dargestellt wird.

Für die Potentialentwicklung gilt damit

$$\Phi(\mathbf{y}) = \int \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3x \quad (\text{A.48})$$

$$= \sum_{nm} \frac{4\pi}{2n+1} \left[\int d^3x r_{<}^n \bar{Y}_{nm}^*(\theta_x, \lambda_x) \rho(\mathbf{x}) \right] \frac{\bar{Y}_{nm}(\theta_y, \lambda_y)}{r_{>}^{n+1}} \quad (\text{A.49})$$

mit der lokalen Dichtefunktion $\rho(\mathbf{x}) = \frac{dm}{d^3x}$. In Scheck [SAN59] wird der Ausdruck in Klammern [...] auch als Multipolmoment der Dichte bezeichnet; in anderer Literatur findet man zumeist die Summe der FERRER-Funktion als das Multipolmoment zu einem bestimmten Grad der Kugelfunktionsentwicklung (siehe auch Maxwell) Sie entsprechen damit den Entwicklungskoeffizienten^{A.2} der Kugelfunktionen, die sich ausserhalb der Massen aus dem *Quotienten* der Kugelflächenfunktionen mit $r_{>}^{n+1}$ ergeben.

Als Lösungsraum des Laplace-Operators kommt aber ebenso das *Produkt* der Kugelflächenfunktion mit $r_{<}^n$ in Frage, wie in dem Integral von Gl. (A.49). Durch die Kelvin-Transformation, d.h. der Spiegelung an der Einheitskugel, korrespondieren zu jeder Kugelflächenfunktion jeweils zwei Kugelfunktionen, $r^n Y_{nm}(\theta, \lambda)$ sowie $r^{-n-1} Y_{nm}(\theta, \lambda)$, die durch Multiplikation mit $r^{\pm(2n+1)}$ direkt ineinander überführbar sind. Heiskanen und Moritz (1967) [HM67] schreiben dazu: [...] *the coefficient, multiplied by 2n+1, of the solid harmonic $\frac{\bar{Y}_{nm}(\theta_y, \lambda_y)}{r_{>}^{n+1}}$ is the integral of the solid harmonic $r^n \bar{Y}_{nm}^*(\theta_x, \lambda_x)$.*

A.5 Berechnungsschemen rekursiver Algorithmen

Dieser Abschnitt gibt eine kurze Zusammenstellung häufig verwendeter Algorithmen zur Berechnung der assoziierten Legendre Funktionen. Die entsprechenden Gleichungen finden sich z.B. bei Koop (1993), Rummel (1993), Tsoulis and Sneeuw (1998), und anderen. Die ℓ - Rekursionen ergeben sich, ausgehend von den Startwerten $\bar{P}_{0,0} = 1$ sowie $\bar{P}_{1,1} = \sqrt{3} \sin\theta$

$$\begin{aligned} \bar{P}_{l,l} &= f_1 \sin\theta \bar{P}_{l-1,l-1} && \text{'sektorielle Rekursion'} \\ \bar{P}_{l,l-1} &= f_2 \cos\theta \bar{P}_{l-1,l-1} && \text{'horizontal: 1 Schritt'} \\ \bar{P}_{l,m} &= f_3 (f_4 \cos\theta \bar{P}_{l-1,m} - f_5 \bar{P}_{l-2,m}) && \text{'horizontal: 2 Schritt'} \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

mit den Hilfsgrössen

$$\begin{aligned} f_1 &= \sqrt{\frac{2l+1}{2l}} \\ f_2 &= \sqrt{2l+1} \\ f_3 &= \sqrt{\frac{2l+1}{(l-m)(l+m)}} \\ f_4 &= \sqrt{2l-1} \\ f_5 &= \sqrt{\frac{(l-m-1)(l+m-1)}{2l-3}} \end{aligned}$$

Für die ersten Ableitungen ergibt sich danach mit den Startwerten $\bar{P}'_{0,0} = 0$ sowie $\bar{P}'_{1,1} = \sqrt{3} \cos\theta$

$$\begin{aligned} \bar{P}'_{l,l} &= f_1 (\cos\theta \bar{P}_{l-1,l-1} + \sin\theta \bar{P}'_{l-1,l-1}) \\ \bar{P}'_{l,l-1} &= f_2 (-\sin\theta \bar{P}_{l-1,l-1} + \cos\theta \bar{P}'_{l-1,l-1}) \\ \bar{P}'_{l,m} &= f_3 (-f_4 \sin\theta \bar{P}_{l-1,m} + f_4 \cos\theta \bar{P}'_{l-1,m} - f_5 \bar{P}'_{l-2,m}) \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

^{A.2.} Die Entwicklungskoeffizienten der Kugelfunktionen werden üblich auch als Stokes' Koeffizienten bezeichnet.

sowie für die Zweiten

$$\begin{aligned}\bar{P}_{l,l}'' &= f_1(-\sin\theta\bar{P}_{l-1,l-1} + 2\cos\theta\bar{P}'_{l-1,l-1} + \sin\theta\bar{P}''_{l-1,l-1}) \\ \bar{P}_{l,l-1}'' &= f_2(-\cos\theta\bar{P}_{l-1,l-1} - 2\sin\theta\bar{P}'_{l-1,l-1} + \cos\theta\bar{P}''_{l-1,l-1}) \\ \bar{P}_{l,m}'' &= f_3(-f_4\cos\theta\bar{P}_{l-1,m} - 2f_4\sin\theta\bar{P}'_{l-1,m} + f_4\cos\theta\bar{P}''_{l-1,m} - f_5\bar{P}''_{l-2,m})\end{aligned}\quad (\text{A.52})$$

mit den Startwerten $\bar{P}_{0,0}'' = 0$ sowie $\bar{P}_{1,1}'' = -\sqrt{3}\sin\theta$.

Eine 'abwärts' gerichtete m -Rekursion sei gegeben zu

$$P_{l,m-2} = \frac{1}{f_6}[-2(m-1)\cot\theta\bar{P}_{l,m-1} + f_7\bar{P}_{l,m}]\quad (\text{A.53})$$

mit

$$\begin{aligned}f_6 &= \begin{cases} -\sqrt{2l(l+1)} & \text{falls } m=2 \\ -\sqrt{(l-m+2)(l+m-1)} & \text{falls } m\neq 2 \end{cases} \\ f_7 &= \sqrt{(l+m)(l-m+1)}\end{aligned}$$

Es existiert auch eine 'aufwärts' gerichtete m -Rekursion, die in Abschnitt näher diskutiert wird.

A.6 Funktionale des Erdschwerfeldes

In diesem Abschnitt folgt ein kurzer Überblick, welche Erdschwerfeldfunktionale unmittelbar mit den Beobachtungsdaten ins Verhältnis gesetzt werden können. Ausgehend von der Potentialentwicklung mit ausschliesslich trigonometrischen Basisfunktionen

$$V(\theta, \lambda, r) = \frac{GM}{R} \sum_{lm} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} e^{im\lambda} \sum_k e^{ik\theta} \cdot A_{\ell m k} \cdot c_{\ell m} \quad (\text{A.54})$$

lässt sich der Gradient des Erdschwerepotentials in lokalen, tangentialen Koordinaten unter Berücksichtigung eines Rechtssystems (North-West-Up), bilden zu

$$\nabla V = V^i \cdot \mathbf{e}^i = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}^r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}^\theta - \frac{1}{r \sin\theta} \cdot \frac{\partial V}{\partial \lambda} \vec{e}^\lambda \quad (\text{A.55})$$

wobei $\mathbf{e}^i = \frac{\partial X_k}{\partial x^i}$ mit den partiellen Ableitungen der kartesischen Koordinaten ($X_k = \{x, y, z\}$) jeweils nach den tangentialen Koordinaten ($x^i = \{\theta, \lambda, r\}$). Die partiellen Ableitungen der Potentialfunktion lauten

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial r} &= -(l+1) \cdot V_1 \\ -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta} &= -ik \cdot V_1 \\ -\frac{1}{r \sin\theta} \cdot \frac{\partial V}{\partial \lambda} &= -\frac{im}{\sin\theta} \cdot V_1\end{aligned}\quad (\text{A.56})$$

sowie

$$\frac{1}{r} V = V_1$$

Um ferner den Gradienten der Schwerebeschleunigung, den Gradiometer-Tensor, berechnen zu koennen ist zu beachten, dass die tangentiale Basis selber eine *Funktion des Ortes* ist. Die neuerliche Ableitung nach den tangentialen Koordinaten kann damit nicht mehr i.S. eines Tensors ausgedrückt werden, da sich die Konstanten in jedem Ort ändern müssten. Es bedarf der Einführung sogenannter Christoffel-Symbole. Einen gebräuchlichen Zugang zu ihrer Herleitung findet man z.B. bei Sexl und Urbantke [?] die von den Eulergleichungen des Variationsproblems ausgehen. An anderer Stelle findet man auch die Definition der Christoff-Symbole als Lösung für den Fall, in dem die kovariante Ableitung des Metrik-Tensors Null ergibt.

Wir bedienen uns an dieser Stelle der Lagrange– Funktion, die im Fall der ungestörten Bewegung mit der kinetischen Energie des Massepunktes übereinstimmt, $\mathcal{L} = \frac{1}{2}v^2$. Man erhält mit den Kugelkoordinaten und dem Metrik– Tensor, g_{ab}

$$\begin{aligned} ds^2 &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\lambda^2 \\ &= \frac{1}{2} g_{ab} x^a x^b, \end{aligned} \quad a, b = 1, 2, 3. \quad (\text{A.57})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \cdot \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\lambda}^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

Die Lagrange– Gleichung 2.Art, lautet

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = 0 \quad (\text{A.59})$$

Bildet man zunächst nach Gl. (A.59) die Partiale

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} &= g_{ai} \dot{x}^a \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^i} \dot{x}^a \dot{x}^b. \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

so erhält man nach Einsetzen in die Lagrange–Gleichung

$$g_{ai} \ddot{x}^a + \frac{\partial g_{ai}}{\partial x^b} \dot{x}^a \dot{x}^b - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^i} \dot{x}^a \dot{x}^b = 0. \quad (\text{A.61})$$

Durch Redefinition des zweiten Terms zu

$$\frac{\partial g_{ai}}{\partial x^b} \dot{x}^a \dot{x}^b = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ai}}{\partial x^b} + \frac{\partial g_{bi}}{\partial x^a} \right) \dot{x}^a \dot{x}^b \quad (\text{A.62})$$

erhält man nach Multiplikation mit g^{ic} , sowie der Beziehung $g_a^c = \delta_a^c$

$$\begin{aligned} g_{ai} g^{ic} \ddot{x}^a + \frac{1}{2} g^{ic} \left(\frac{\partial g_{ai}}{\partial x^b} + \frac{\partial g_{bi}}{\partial x^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^i} \right) \dot{x}^a \dot{x}^b &= 0 \\ \ddot{x}^a + \Gamma_{ab}^c \cdot \dot{x}^a \dot{x}^b &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

die Christoffel–Symbole 2.Art. Gleichung (A.62) gibt die Bewegung eines Körpers im Gravitationsfeld wieder und wird auch als geodätische Linie bezeichnet. Man erhält für die Gleichungen 2.Art nach Gl. (A.59) folgendes System für die Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \cdot \dot{\lambda}^2 &= 0 \\ \ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\lambda}^2 &= 0 \\ \ddot{\lambda} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\lambda} + 2 \cot \theta \cdot \dot{\lambda} \dot{\theta} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.64})$$

Damit sind nur die folgenden Christoffel–Symbole von Null verschieden

$$\begin{aligned} \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r \\ \Gamma_{\lambda\lambda}^r &= -r \sin^2 \theta \\ \Gamma_{\lambda\lambda}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta &= \frac{1}{r} \\ \Gamma_{r\lambda}^\lambda = \Gamma_{\lambda r}^\lambda &= \frac{1}{r} \\ \Gamma_{\theta\lambda}^\lambda = \Gamma_{\lambda\theta}^\lambda &= \cot \theta \end{aligned} \quad (\text{A.65})$$

und lassen sich zur Berechnung des Gradiometrie– Tensors einsetzen, indem

$$V_{a;b} = V_{ab} - \Gamma_{ab}^c V_c \quad (\text{A.66})$$

wobei der Index $[_{a;b}]$ die kovariante Ableitung kennzeichnet. Mit Gl. (A.66) ergibt sich

$$\begin{aligned}
V_{r;r} &= V_{rr} \\
V_{r;\theta} &= -\frac{1}{r} \left(V_{r\theta} + \frac{1}{r} V_{\theta} \right) \\
V_{r;\lambda} &= -\frac{1}{r \sin \theta} \left(V_{r\lambda} - \frac{1}{r} \cdot V_{\lambda} \right) \\
V_{\theta;\theta} &= \frac{1}{r^2} (V_{\theta\theta} + r \cdot V_r) \\
V_{\theta;\lambda} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} (V_{\theta\lambda} - \cot \theta \cdot V_{\lambda}) \\
V_{\lambda;\lambda} &= \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} (V_{\lambda\lambda} + \sin \theta \cos \theta V_{\theta} + r \sin^2 \theta V_r)
\end{aligned} \tag{A.67}$$

Man erhält daraus die Gleichungen

$$\begin{aligned}
V_{r;r} &= V_{rr} \\
V_{r;\theta} &= -\frac{1}{r} V_{r\theta} - \frac{1}{r^2} V_{\theta} \\
V_{r;\lambda} &= -\frac{1}{r \sin \theta} V_{r\lambda} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot V_{\lambda} \\
V_{\theta;\theta} &= \frac{1}{r^2} V_{\theta\theta} + \frac{1}{r} V_r \\
V_{\theta;\lambda} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} V_{\theta\lambda} - \frac{\cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} V_{\lambda} \\
V_{\lambda;\lambda} &= \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} V_{\lambda\lambda} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} V_{\theta} + \frac{1}{r} V_r.
\end{aligned} \tag{A.68}$$

Die benötigten, zusätzlichen Partiale lauten

$$\begin{aligned}
V_{rr} &= (l+1)(l+2) V_2 \\
-\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial r \partial \theta} &= (l+1) i k V_2 \\
-\frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial V}{\partial \lambda \partial r} &= (l+1) \frac{i m}{\sin \theta} V_2 \\
\frac{1}{r^2} V_{\theta\theta} &= -k^2 V_2 \\
-\frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta \partial \lambda} &= -\frac{k m}{\sin \theta} V_2 \\
\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} V_{\lambda\lambda} &= \frac{-m^2}{\sin^2 \theta} V_2
\end{aligned} \tag{A.69}$$

sowie

$$\frac{1}{r^2} V = V_2.$$

Eingesetzt in Gl. (A.67) erhält man daraus,

$$\begin{aligned}
V_{r;r} &= (l+1)(l+2) V_2 \\
V_{r;\theta} &= (l+2) i k V_2 \\
V_{r;\lambda} &= (l+2) \frac{i m}{\sin \theta} V_2 \\
V_{\theta;\theta} &= -(k^2 + l + 1) V_2 \\
V_{\theta;\lambda} &= \frac{(k - i \cot \theta) \cdot m}{\sin \theta} V_2 \\
V_{\lambda;\lambda} &= \left(\frac{-m^2}{\sin^2 \theta} + i k \cot \theta - (l+1) \right) V_2,
\end{aligned} \tag{A.70}$$

vgl. auch Koop (1993, Tab. 3.3) für eine Diskussion hinsichtlich der zweifachen Ableitungen und Tabellen zu den Tensor- Elementen in verschiedenen Koordinaten- Systemen.

Anwendung des tangentialen Nabla-Operators auf den Gradienten ergibt die Spur des Gradienten-Tensors, dessen Daten durch Messungen zur Verfügung stehen^{A.3}. Wegen der Laplace-Bedingung

$$\begin{aligned} \nabla_j \cdot \nabla^j V &= 0 \\ (l+1)(l+2) - (k^2 + l + 1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} + ik \cot\theta - (l+1) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.71})$$

lässt sich die Diagonalkomponente $V_{\lambda;\lambda}$ damit vereinfachen. Die relevanten Komponenten für mit kompakten Eigenwerten lauten damit

$$\begin{aligned} V_{r;r} &= (l+1)(l+2) V_2 \\ V_{\theta;\theta} &= -(k^2 + l + 1) V_2 \\ V_{\lambda;\lambda} &= [k^2 - (l+1)^2] V_2 \\ V_{r;\theta} &= (l+2) ik V_2 \end{aligned} \quad (\text{A.72})$$

mit

$$\frac{1}{r^2} V = V_2.$$

Anmerkung A.1. Die Absenz einer weiteren Ortskoordinate in den Eigenwerten macht dies zu einer sehr günstigen Konstellation zur Auswertung der Komponenten sowohl im Zeitbereich (time-wise approach) als auch im Ortsbereich, was durch effiziente Berechnung der Normalgleichungen erfolgen kann.

A.7 Das Meissl-Schema

Die Ergebnisse des vorherigen Abschnittes können übersichtlich zusammengestellt werden im Sinne kommutativer Diagramme, die die Anwendung der Differentialoperatoren veranschaulichen. Idealisierte Beobachtungsdaten lassen sich dabei generell als eine Funktion des Störpotentials beschreiben, Meissl (1971)[MEI]. Man spricht von Eigenwerten für selbstadjungierte Endomorphismen sowie Singulärwerten für nicht-selbstadjungierte Operatoren.

Operator	Eigen/Singulärwerte λ_ℓ	Dimensionierung	Dämpfungsindex $(R/r)^{l+\alpha}$
(\mathcal{I}, T)	1	GM/R	$\alpha = 1$
(N, T)	-	R	1
(∂_x, T)	ik	GM/R ²	2
(∂_z, T)	$-(l+1)$	GM/R ²	2
$(\Delta g, T)$	$(l-1)$	GM/R ²	2
(∂_{zz}, T)	$(l+1)(l+2)$	GM/R ³	3
(∂_{xx}, T)	$k^2 - (l+1)^2$	GM/R ³	3
(∂_{yy}, T)	$-(k^2 + l + 1)$	GM/R ³	3
(∂_{xz}, T)	$(l+2)ik$	GM/R ³	3

Tabelle A.1. Eigenwerte der Störpotentialoperatoren sowie Massstab und Feldfortsetzung

A.3. Zwar werden auch die Nebendiagonalelemente des Tensor gemessen, jedoch dienen sie vorwiegend zu rotationszwecken in das Orbitalsystem. Eine Schwerefeldbestimmung daraus ist wegen des schlechten Signal-Rausch Verhaltens bislang nicht vorgesehen. Siehe insbesondere [Rummel 1993]. Darüberhinaus gibt es die Möglichkeit eines pre-adjustment, zu dessen Zweck von der Laplace-Gleichung gebrauch gemacht wird. Siehe auch Rummel und Colombo (1985).

A.8 Variablensätze der Himmelsmechanik

Die gebräuchlichsten Bahnvariablen in der Geodäsie sind nach wie vor Kepler-Elemente $\{a, e, i, \Omega, f, M\}$ deren Berechnung an verschiedenen Stellen zu finden sind, z.B. Kaula (1966),

Ein kanonischer Variablensatz sei gegeben in Form der Hill-Variablen $\{\dot{r}, G, H; r, u, \Omega\}$, Cui und Mareyev (1992). Ausgehend von dem Drehimpulsvektor

$$\vec{g} = \vec{r} \times \vec{v}, \quad r = |\vec{r}|, \quad v = |\vec{v}|$$

dem Knotenvektor

$$\vec{N} = \vec{e}_3 \times \vec{g}$$

sowie dem rektangulären Knoten

$$\vec{W} = \vec{n} \times \vec{N}$$

und der orthonormalen Basis des Bewegungssystems

$$\vec{s} = \vec{r}/r, \quad \vec{n} = \vec{g}/G, \quad \vec{t} = \vec{s} \times \vec{n} \quad (\text{A.73})$$

ergeben sich

$$\begin{aligned} \text{radiale Geschwindigkeit} \quad \dot{r} &= \vec{r} \cdot \vec{v}/r \\ \text{Drehimpuls} \quad G &= |\vec{g}| \\ \text{vertikaler Impuls} \quad H &= \vec{e}_3 \cdot \vec{g} \\ \text{Radius} \quad r &= |\vec{r}| \\ \text{argument der Breite} \quad u &= \tan^{-1} \left(\frac{\vec{s} \cdot \vec{W}}{\vec{s} \cdot \vec{N}} \right) \\ \text{Bahnknoten} \quad \Omega &= \tan^{-1} \left(\frac{\vec{n} \cdot \vec{e}_1}{\vec{n} \cdot \vec{e}_2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.74})$$

Die Kepler Elemente folgen aus dem semi latus rectum

$$P = G^2/GM$$

sowie der Vis-Viva Gleichung

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r} = -\frac{GM}{2a}.$$

Es ergeben sich

$$\begin{aligned} \text{grosse Halbachse} \quad a &= r GM / (2GM - rv^2) \\ \text{Exzentrizitaet} \quad e &= \sqrt{(P/r - 1)^2 + (g/GM \vec{r} \cdot \vec{v}/r)^2} \\ \text{Inklination} \quad i &= \tan^{-1} \left(\frac{g_1^2 + g_2^2}{g_3} \right) \\ \text{aufsteigender Bahnknoten} \quad \Omega &= \tan^{-1} \left(-\frac{g_1}{g_2} \right) \\ \text{wahre Anomalie} \quad f &= \tan^{-1}[\sqrt{1-e^2} \sin E / (\cos E - e)] \\ \text{mittlere Anomalie} \quad M &= E - e \sin E \end{aligned} \quad (\text{A.75})$$

mit der exzentrischen Anomalie

$$E = \cos^{-1}[(a-r)/a/e]$$

Danksagung

Besonderer Dank gebührt meinem Betreuer Prof. Dieter Lelgemann, der auch in einer besonders schwierigen Phase Kontinuität gewährleistete. Kritische Anmerkungen und unterstützende Ratschläge wirkten auf mich stets motivierend und waren zugleich Ansporn und wertvolle Anregung. Ich bedanke mich auch bei der Hegemann-Stiftung der TU-Berlin für die finanzielle Förderung während meines Gastaufenthaltes am astronomischen Institut in Prag. Hier möchte ich insbesondere Herrn Dozent Dr. Jaroslav Klokočník und Prof. Jan Kostelecký nennen, die mir von Anfang an den Eindruck vermittelten, zu einem festen Bestandteil ihrer Arbeitsgruppe zu gehören. Der tschechischen Akademie der Wissenschaften und insbesondere dem Direktor des astronomischen Instituts in Ondřejov, Dozent Dr. Petr Heinzel sowie Prof. Jan Palouš der Gruppe planetarer Systeme sei hiermit meine Verbundenheit für ihre Unterstützung ausgesprochen.

Herzlicher Dank gilt natürlich auch meinen Eltern und Verwandten, die mich immer unterstützt haben. Der Antje-Graupe-Prior Foundation der University of Calgary zu einem Gastaufenthalt sei hiermit ebenso gedankt, wie Prof. Nico Sneeuw und Dr. Ing. Michael Kern, die mein Interesse an der Erdschwerefeldmodellierung geweckt haben. Dipl.-Ing. Christian Marx sei gedankt für die bereitwillige Korrekturlesung. Ganz besonders herzlich möchte ich mich aber bei Petra Laudátová bedanken, die mir stets den entscheidenden Rückhalt und Frohsinn geboten hat.

