Bol. Inst. Esp. Oceanogr. 18 (1-4). 2002: 7-14

BOLETÍN. INSTITUTO ESPAÑOL DE OCEANOGRAFÍA
ISSN: 0074-0195

Modelo aleatorio de crecimiento CCT biparamétrico

M. Alamar, V. Estruch, J. Pastor y A. Vidal

Departamento de Matemática Aplicada. Escuela Politécnica Superior de Gandía. Universidad Politécnica de Valencia. Ctra. Nazaret-Oliva, s/n. E-46730 Gandía (Valencia), España. Correo electrónico: malamar@mat.upv.es

Recibido en julio de 2001. Aceptado en febrero de 2002.

RESUMEN

Se presenta un modelo matemático para simular el crecimiento de peces en peso. Este modelo se basa en el propuesto por Cho (1992), el cual se fundamenta en un único parámetro: el coeficiente de crecimiento térmico (CCT). La característica fundamental del nuevo modelo es la consideración de otro parámetro más, el cual permite separar la influencia de la temperatura y la de otros factores en el crecimiento de los peces. El modelo propuesto permite considerar la temperatura y el peso inicial como variables aleatorias y se ha implementado en un programa de ordenador utilizando el lenguaje del paquete matemático Matlab.

Palabras clave: Modelo matemático, coeficiente de crecimiento térmico, crecimiento de peces.

ABSTRACT

Random two-parameter TGC growth model

A mathematical model to simulate fish growth is presented, based on the model proposed by Cho (1992), which had only one parameter: the thermal growth coefficient (TGC). Our new model's fundamental difference is the consideration of a second parameter, which makes it possible to factor out the impact of temperature and other factors on fish growth. The proposed model enables us to consider temperature and starting weight as random variables, and has been implemented in a computer program using the Matlab mathematical package.

Keywords: *Mathematical model, coefficient of thermal growth, fish growth.*

INTRODUCCIÓN

El crecimiento de los peces está determinado, fundamentalmente, por la cantidad de alimento ingerido y por la temperatura del agua. Los peces son incapaces de regular su temperatura corporal, por lo que su metabolismo únicamente se desarrolla de forma óptima dentro de un rango de temperaturas adecuadas, en el que la ingestión y el crecimiento son máximos. El crecimiento disminuye o se detiene cuando la temperatura está por encima o por debajo del rango óptimo. En cuanto a la cantidad de alimento, el crecimiento será máximo con una alimentación a saciedad. En las granjas marinas, debido a la imposibilidad de utilizar comederos de autodemanda y a la dificultad de determinar la saciedad de los peces, la alimentación restringida es la opción más razonable. La predicción del crecimiento de los peces resulta imprescindible para establecer las necesidades nutritivas y las tasas de alimentación de una forma científica, pero, además, la determinación de la curva de crecimiento de una especie, en unas condiciones dadas, es fundamental para establecer planes de producción en piscicultura intensiva (Querellou, 1984).

Existe una extensa bibliografía sobre modelos matemáticos para el crecimiento de peces. Una buena aproximación al estudio del problema general de ajustar el crecimiento de los peces a una curva teórica y su interpretación biológica, con especial referencia a la función de crecimiento de Von Bertalanffy, puede encontrarse en el trabajo de Moreau (1987). En Querellou (1984), se propone un modelo de crecimiento para la lubina, *Dicentrarchus labrax* Linnaeus, 1758, basado en la temperatura del agua en la fase de engorde. En el trabajo de Cho (1992) se propone una predicción del crecimiento usando un índice denominado *thermal growth coefficient* o coeficiente de crecimiento térmico (CCT), que se define como

$$\mathrm{CCT} = \frac{P_f^{\frac{1}{3}} - P_i^{\frac{1}{3}}}{\sum {}^{\circ}\mathrm{C\ día}}$$

donde P_f es el peso final, P_i el peso inicial y $\sum$ ºC día es la suma de las temperaturas medias diarias en grados centígrados. La ventaja de este modelo radica en que, si se cumpliese que el valor de CCT es constante e independiente del peso corporal, una vez que se dispusiera de información basada en datos reales de crecimiento en granja para una especie, la predicción de la ganancia de peso en un periodo dado sería posible usando la expresión

$$P_i = \left(P_i^{\frac{1}{3}} + \mathrm{CCT} \cdot \sum {}^{\circ}\mathrm{C\ día} \right)^3$$

El modelo es adecuado para el rango de temperaturas normales propias de cada especie y resulta necesario obtener valores reales de CCT para cada tipo de procedencia de los peces, peso inicial, condiciones de alimentación, manejo, etc. La predicción del crecimiento se realiza en función de las temperaturas medias del agua previstas en la zona, mientras que para un ciclo de crecimiento en marcha la estimación de los pesos se realiza considerando la suma de temperaturas reales medidas en la instalación.

En este trabajo se presenta un modelo que generaliza el propuesto por Cho (1992) y permite, además, considerar la variabilidad de la temperatura y del peso inicial.

DESARROLLO DEL MODELO

En el caso del cultivo intensivo de la lubina, el crecimiento se interrumpe cuando la temperatura es inferior a 10 ºC (Querellou, 1984). En la construcción del modelo que se describe, que se utilizará para realizar simulaciones de crecimiento también con lubina, se supone que sólo existe crecimiento diario si la temperatura media de dicho día es mayor de 10 ºC. Para una serie continuada de días t_0, t_0+1, ...,t_0+h, se considera el modelo CCT, dado por

$$P_{(t_0+h)} = \left(P_{t_0}^{\frac{1}{3}} + \mathrm{CCT} \cdot \sum_{i=1}^{h} T_i \right)^3$$

donde P es el peso en gramos del pez y T es el máximo entre cero y la temperatura media diaria, en grados centígrados menos 10. Para simplificar, se considera $t_0 = 0$ y de esta forma resulta

$$P_h = \left(P_0^{\frac{1}{3}} + \mathrm{CCT} \cdot \sum_{i=1}^{h} T_i \right)^3$$

El modelo CCT planteado tiene un buen comportamiento para unas condiciones estables de temperatura controlada.

Sin embargo, en la realidad el coeficiente CCT no es constante para una serie de días. Se ha estudiado el valor de CCT para distintas etapas de crecimiento de peces, sobre distintas muestras con temperaturas diarias coincidentes, constatándose que los valores de CCT van disminuyendo inicialmente con el incremento inicial de la suma de temperaturas, hasta estabilizarse en un valor aproximadamente constante. Esta particularidad ha llevado a plantear el posible ajuste del valor del CCT como variable dependiente en función de la suma de temperaturas, y se obtiene muy buena correlación con el modelo biparamétrico siguiente

$$\mathrm{CCT}_t = a + \frac{b}{\sum_{i=1}^{h} T_i} \qquad [1]$$

donde *a* y *b* son parámetros y $\sum_{i=1}^{h} T_i$ es la suma de temperaturas medias diarias menos 10. Es fácil observar que, al crecer la suma de temperaturas, el coeficiente CCT_t se acerca al valor de *a*.

Se ha realizado un estudio sobre datos reales de crecimiento de lubina, alimentada con diferentes piensos experimentales, en condiciones de laboratorio (Zegrari, inédito). En la tabla I se representan los valores obtenidos de las constantes *a* y *b* en 8 tanques de lubina, indicándose los pesos medios iniciales en cada tanque, así como una distinción

Tabla I. Valores de a y b para el modelo [1].

Tanque	Peso inicial	Pienso	a	b	Coef. corr. (R)	R^2
1	38,97	A	0,000917025	0,0974002	0,819290	0,671237
2	30,32	A	0,000790780	0,0514189	0,723436	0,523360
3	38,65	B	0,000912032	0,2924170	0,944163	0,891443
4	30,11	B	0,000886385	0,0683423	0,743020	0,552079
5	38,00	C	0,000878026	0,1312430	0,822457	0,676436
6	29,72	C	0,000901668	0,1156220	0,824741	0,680980
7	34,88	D	0,000893538	0,1713020	0,923739	0,853295
8	30,16	D	0,000817785	0,1145260	0,866785	0,751317

entre piensos utilizados y los coeficientes de correlación correspondientes.

Los resultados obtenidos llevan, de forma natural, a una reinterpretación de CCT y, como consecuencia, al desarrollo de un nuevo modelo. Si en la expresión de P_t se sustituye CCT_t por la expresión [1] se obtendrá

$$P_t = \left(P_0^{\frac{1}{3}} + a \cdot \sum_{i=1}^{h} T_i + b \right)^3$$

El modelo así obtenido es idéntico al inicial, salvo en la aparición de una nueva constante, *b*. El parámetro *a* es el coeficiente que determina directamente el aumento de peso por influencia de la temperatura del agua y se le denominará CCT*. La constante *b* es un coeficiente corrector que determina el aumento de peso de acuerdo con otros factores, en principio indeterminados, y que será denominado F. De esta forma, el modelo queda

$$P_t = \left(P_0^{\frac{1}{3}} + CCT^* \cdot \sum_{i=1}^{h} T_i + F \right)^3 \qquad [2]$$

El cálculo de las constantes CCT* (a) y F (b) se puede realizar por el método de los mínimos cuadrados a partir de datos reales del CCT_t según el modelo [1] o, alternativamente, de datos reales de pesos a partir del modelo [2]. En la tabla II se expresan los valores obtenidos para el CCT* y F en este último supuesto. Los valores de CCT* y F de la tabla II mejoran, lógicamente, el valor R^2 del peso estimado respecto del peso real.

Otro elemento importante que se ha introducido en el modelo es la consideración como aleatorias de algunas de las variables que intervienen en el mismo. Para una mejor adaptación a las condiciones reales en que se suelen producir los procesos de crecimiento, se ha optado por considerar en una primera etapa las temperaturas medias diarias como variables aleatorias. En una segunda etapa se ha establecido la hipótesis de que tanto las temperaturas diarias como el peso inicial son variables aleatorias. Ambas consideraciones llevan a modelos probabilísticos para el peso final. Esto significa que el modelo proporcionará una distribución de probabilidad de la variable aleatoria peso P_t.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Modelo CCT con temperaturas aleatorias

Para cada instante *i* se considera cada temperatura diaria T_i como una variable aleatoria. Por lo tanto, el peso final P_i también será una variable aleatoria. El modelo desarrollado permite la simulación del crecimiento de un pez genérico con peso inicial P_0, que se considera constante.

Tabla II. Valores de CCT* y F para el modelo [2].

Tanque	Peso inicial	Pienso	CCT*	F	R^2
1	38,97	A	0,000897653	0,1163750	0,992837
2	30,32	A	0,000851908	-0,0930413	0,986167
3	38,65	B	0,000831777	0,2915520	0,993906
4	30,11	B	0,000879273	0,6221030	0,995519
5	38,00	C	0,000815773	0,2325790	0,994009
6	29,72	C	0,000883716	0,1244300	0,992036
7	34,88	D	0,000883702	-0,4534680	0,992036
8	30,16	D	0,000834410	0,0574189	0,991150

Suponiendo que $\hat{T}_i$ es la temperatura media del día *i* y que se distribuye normal con media $\hat{\mu}_i$ y desviación típica $\hat{\sigma}_i$, entonces la variable $T_i = \hat{T}_i - 10$ tendrá una distribución normal con media $\hat{\mu}_i - 10$ y desviación típica . Denominando

$$T^{(t)} = \sum_{i=1}^{t} T_i, \quad \mu^{(t)} = \sum_{i=1}^{t} \mu_i \;\; \text{y} \;\; \sigma^{(t)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{t} \hat{\sigma}_i^2}$$

se tendrá que $T^{(t)}$ se distribuirá normal, con media $\mu^{(t)}$ y desviación típica $\sigma^{(t)}$. En consecuencia, P_t será una variable aleatoria función de la variable aleatoria $T^{(t)}$.

También se han obtenido las expresiones analíticas para la función de densidad $f_t(y)$, de la variable peso P_t

$$f_t(y) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}\cdot\sigma^{(t)}\cdot CCT\cdot y^{\frac{2}{3}}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y^{\frac{1}{3}} - P_0^{\frac{1}{3}} - F - CCT\cdot\mu(t)}{CCT\cdot\sigma^{(t)}}\right)^2}$$

para el valor esperado (media) del peso en el instante t, $E(P_t)$

$$E(P_t) = \left(P_0^{\frac{1}{3}} + \mu^{(t)}CCT^* + F\right)^3 + $$
$$+ 3(\sigma^{(t)})^2\left(P_0^{\frac{1}{3}} + \mu^{(t)}CCT^* + F\right)\cdot CCT^{*2}$$

y para la desviación típica de la variable aleatoria P_t, σ_{P_t}

$$\sigma_{P_t} = \Big(15\sigma^{(t)6}CCT^{*6} + 36\sigma^{(t)4}(P_0^{\frac{1}{3}} + \mu^{(t)}CCT^* + F)^2$$
$$CCT^{*4} + 9\sigma^{(t)2}(P_0^{\frac{1}{3}} + \mu^{(t)}CCT^* + F)^4 CCT^{*2}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

Aunque la variable P_t no se distribuye, en principio, normal, al ser función de la variable "suma de temperaturas", que sí se distribuye normal, podemos establecer fácilmente los percentiles teóricos. Concretamente, el percentil de orden β, $0 < \beta < 100$, viene dado por

$$Per_\beta(P_t) = \left(P_0^{\frac{1}{3}} + CCT^*\cdot\;(\mu^{(t)} + \sigma^{(t)} + Z_a) + F\right)^3$$

donde $\alpha = 1 - \dfrac{\beta}{100}$ y Z_a es el valor crítico que acumula una probabilidad $\dfrac{\beta}{100} = 1 - \alpha$ para una variable aleatoria distribuida normal con media cero y desviación típica 1. Los intervalos de confianza teóricos para P_t, a nivel de significación α prefijado, vienen dados por $[u_t, v_t]$ con

$$u_t = \left(P_0^{\frac{1}{3}} + CCT^*\cdot\left(\mu^{(t)} - \sigma^{(t)} + Z_{\frac{a}{2}}\right) + F\right)^3$$

$$v_t = \left(P_0^{\frac{1}{3}} + CCT^*\cdot\left(\mu^{(t)} + \sigma^{(t)} + Z_{\frac{a}{2}}\right) + F\right)^3$$

La utilización del modelo para la simulación exige el conocimiento previo de los coeficientes CCT^* y F, de las temperaturas medias diarias y de la desviación típica de las mismas y, por último, del peso inicial. Este modelo se ha programado usando el paquete Matlab.

Como ejemplo, se simuló el crecimiento de un pez del tanque 6, con peso inicial de 30 g, durante 221 días, divididos en 7 periodos según se indica en la tabla III. Para realizar la simulación se ha considerado $CCT^* = 0{,}000884$ y $F = 0{,}124430$. En la figura 1 se muestra el gráfico correspondiente a los pesos medios esperados a lo largo del periodo, y en la figura 2 se representa una banda en la cual debe estar el peso del pez, en cada instante, con una probabilidad de 0,99. En ambas figuras los pesos reales se refieren al tanque 6, partiendo de un peso medio inicial de 29,72 g. Por último, en la figura 3 se representa la gráfica correspondiente al percentil 75 del peso esperado en las condiciones descritas.

Modelo CCT con peso inicial y temperaturas aleatorias

En este caso se añadirá la hipótesis de que P_0 es una variable aleatoria con el objetivo de poder estimar la producción total a partir del peso medio de los peces de un tanque. Por tanto, P_t representa una variable aleatoria función de otras dos, P_0 y $\sum_{i=1}^{t} T_i$. Esto origina que el cálculo del valor esperado de

Tabla III. Datos de temperaturas consideradas en la simulación.

Periodo	N.º días	T.ª media diaria (ºC)	Desviación típica
1	36	23	1,5
2	31	25	1,5
3	31	27	1,5
4	29	29	1,5
5	32	30	1,5
6	29	26	1,5
7	33	24	1,5

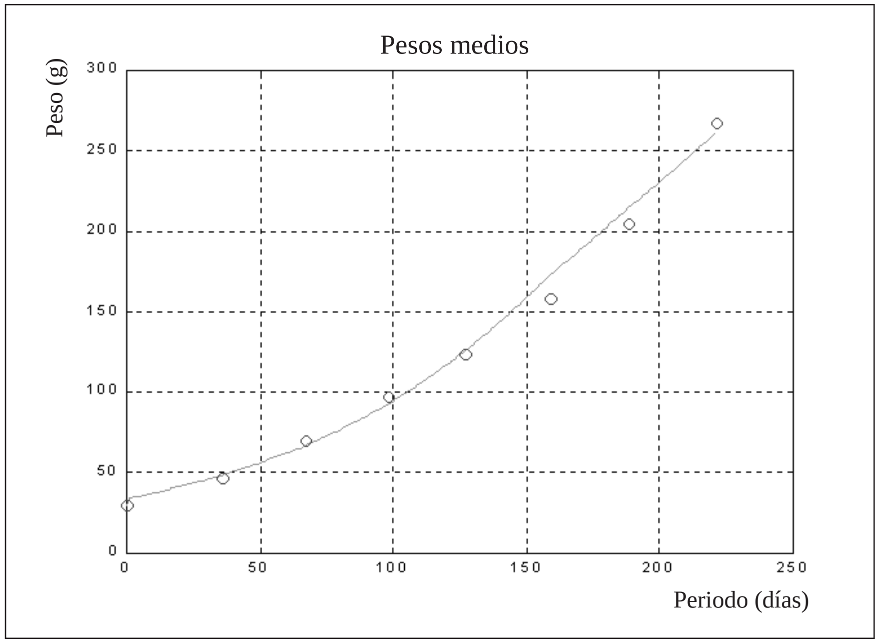

Figura 1. Comparación de los pesos medios calculados con el modelo (línea) con los obtenidos realmente en el tanque 6 (○).

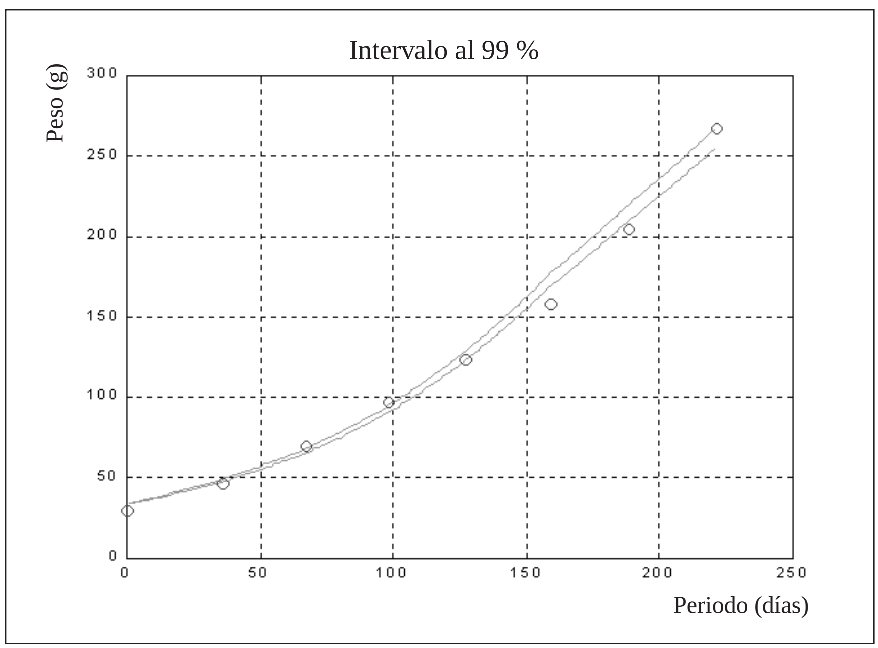

Figura 2. Comparación del intervalo de confianza, al 99 %, de los pesos medios calculados con el modelo (espacio entre líneas) con los obtenidos realmente en el tanque 6 (○).

P_t sea complejo desde el punto de vista analítico, y lo mismo sucede con el cálculo de la varianza de P_t. En esta situación, resulta adecuada la utilización de un método de simulación tipo Montecarlo. El método consiste en, conociendo la distribución de la media de los pesos iniciales y la de las temperaturas medias diarias, simular el crecimiento, en media, a partir de la generación de valores aleatorios para el peso inicial y las temperaturas. El número de simulaciones a realizar queda limitado por el valor del error estándar, finalizándose la generación de valores aleatorios cuando dicho error sea menor que un límite prefijado de antemano. Para obtener los pesos medios esperados se siguió el siguiente procedimiento.

Procedimiento

Para cada t = 1, 2, 3,... se supone que la temperatura (X) se distribuye normal de media y desviación típica σ_X y que el peso inicial (Z) se distribuye

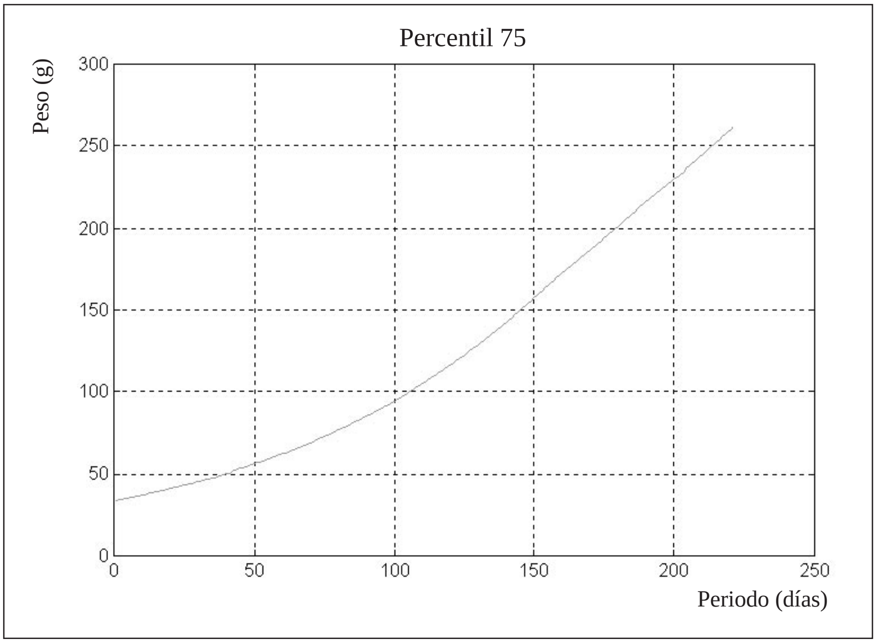

Figura 3. Percentil 75 del peso esperado para las condiciones del tanque 6.

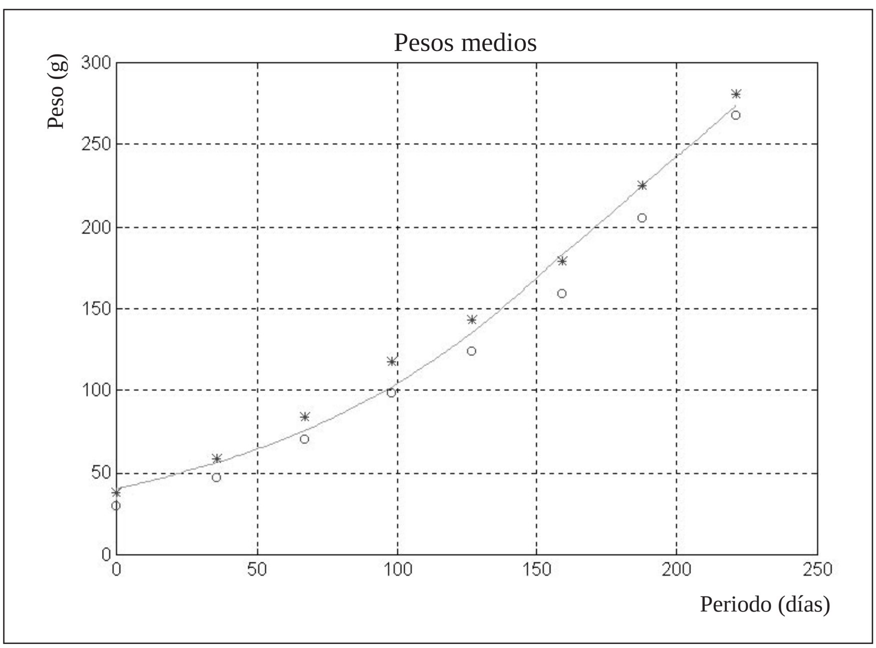

Figura 4. Simulación de los pesos medios en el crecimiento (línea) y comparación con los correspondientes a los tanques 5 (*) y 6 (○).

también normal, con media y desviación típica σ_Z, fijándose, además, un valor para el error ε.

Paso 1. Se generan inicialmente *n* valores aleatorios de las variables X y Z: (x_i^t, z_i), i = 1, 2,..., n.

Paso 2. Se calcula $y_i = (\sqrt[3]{z_i} + CCT^* \cdot x_i + F)^3$, i = 1, 2,..., n.

Paso 3. Se calculan el valor medio $\overline{Y} = \frac{\sum_{j=1}^{n} y_j}{n}$, la cuasivarianza $\sigma_n{}^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2 - n\overline{Y}^2\right)$ y la cuasidesviación típica $\sigma_n = \sqrt{\sigma_n^2}$.

3.1. Si $\frac{3\sigma_n}{\sqrt{n}} < \varepsilon$, se puede dar como valor aproximado del peso medio esperado $\overline{P_t} = \overline{Y}$, y como estimación de la desviación típica de P_t, $\sigma_{P(t)} = \sigma_n$.

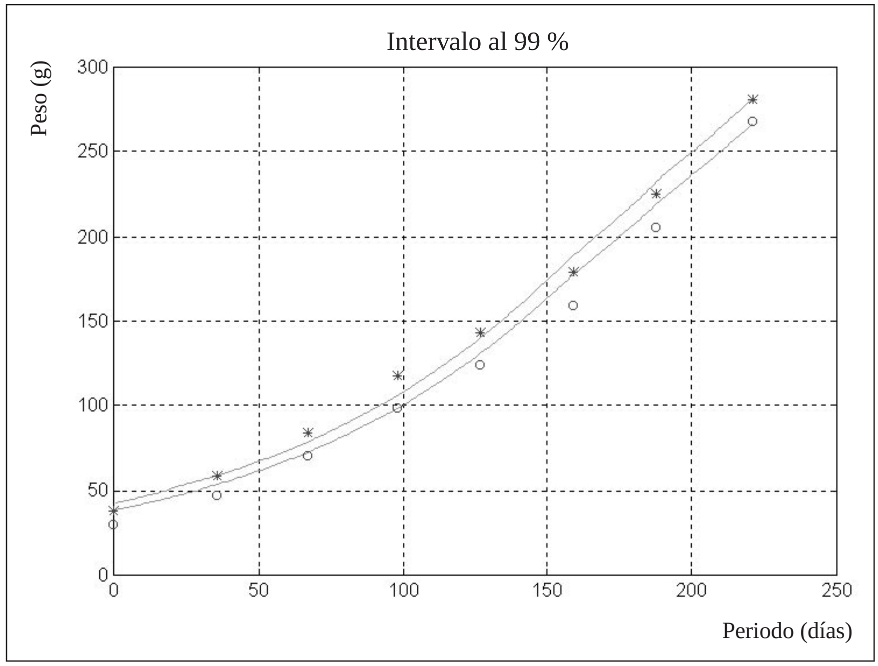

Figura 5. Comparación del intervalo de confianza, al 99 %, de los pesos medios calculados con el modelo (espacio entre líneas) con los pesos reales correspondientes a los tanques 5 (*) y 6 (○).

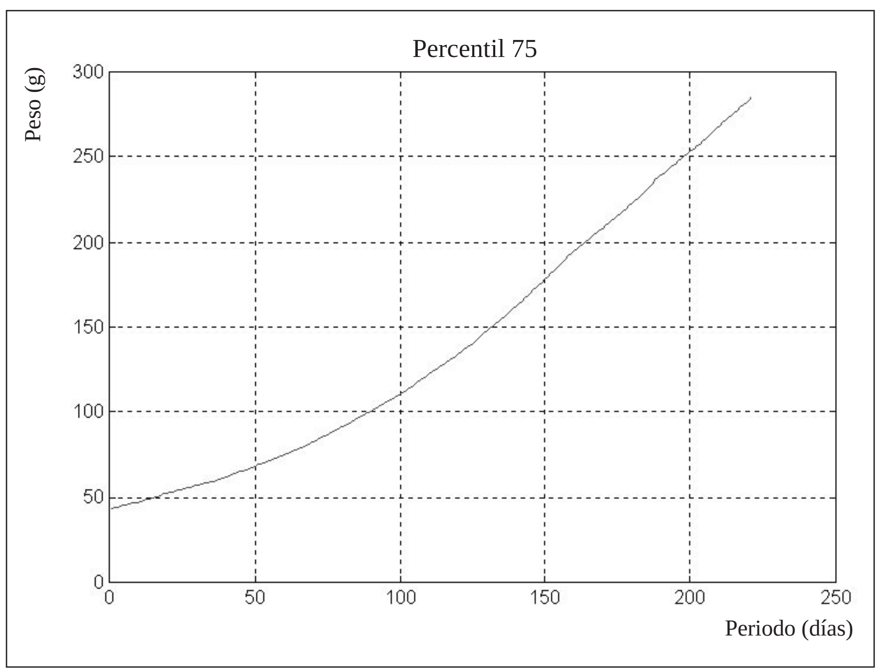

Figura 6. Percentil 75 del peso medio a lo largo del periodo.

3.2. En caso contrario, se hace n = n + 1, se genera un nuevo par de valores (x_n^t, z_n) y se vuelve al paso 3.

La utilización de esta versión del modelo para la simulación exige el conocimiento previo de los coeficientes CCT* y F, de las temperaturas medias diarias y la desviación típica de las mismas y, por último, de los parámetros que definen la distribución del peso inicial.

Como ejemplo, se ha simulado la evolución del crecimiento correspondiente a los tanques 5 y 6, suponiendo un peso inicial, P_0, distribuido normal con media 34 g y desviación típica 5. Como valores de CCT y F se utilizaron los promedios obtenidos para los dos tanques, es decir, CCT* = 0,00085 y F = 0,179, suponiendo unos periodos de tiempo y temperaturas análogos a los descritos en la tabla III y un error estándar máximo de 10 g para el peso medio.

En las figuras 4 y 5 se representan los datos reales de los pesos obtenidos a partir de pesos iniciales de 38 y 29,72 g, correspondientes a los tanques 5 y 6, respectivamente, en condiciones de crecimiento idénticas. La figura 6 representa la curva correspondiente al percentil 75 obtenida como resultado de la simulación en las mismas condiciones descritas.

CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS

El modelo desarrollado es una generalización del modelo de Cho (1992), mediante el cual se pueden considerar las variaciones de peso relacionadas con el carácter aleatorio de la temperatura media diaria y de la media del peso medio inicial de los peces. El modelo ofrece buenos resultados con las pruebas realizadas en tanques de engorde de lubina en condiciones de laboratorio.

Actualmente, se está investigando en la aplicación del modelo propuesto a la simulación del crecimiento en una granja marina de lubina, situación en la que se hace más patente, y los estudios previos así parecen indicarlo, la influencia de la variabilidad de las temperaturas medias diarias en el peso final. Tras el ajuste de los valores CCT^* y F para distintas situaciones de pesos medios iniciales y distintos tipos de alimentación, en una segunda fase se pretende integrar este modelo en uno más complejo que permita estimar el rendimiento económico de la producción en distintas épocas del año.

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto ha sido financiado por el programa de incentivo a la investigación de la Universidad Politécnica de Valencia (PPI-5) 2000-2001.

BIBLIOGRAFÍA

Cho, C. Y. 1992. Feeding systems for rainbow trout and other salmonids with reference to current estimates of energy and protein requirements. *Aquaculture* 100: 107-123.

Moreau, J. 1987. Mathematical and biological expression of growth in fishes: Recent trends and further developments. En: *The Age and Growth of Fish*, R. C. Summerfelt y G. E. Hall (eds.): 81-113. The Iowa State University Press. Ames, Iowa, EE UU.

Querellou, J. 1984. Modèles de production en pisciculture intensive: application à l'élevage de loup *Dicentrarchus labrax* L. En: *L'Aquaculture du Bar et des Sparidés*, G. Barnabé y R. Billard (eds.): 483-494. INRA Pub. París, Francia.