ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ ОТОБРАЖЕНИЯ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

Рига 1985

Министерство высшего и среднего специального образования
Латвийской ССР
Латвийский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет имени Петра Стучки
Кафедра математического анализа

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ ОТОБРАЖЕНИЯ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

Латвийский государственный университет им. П.Стучки
Рига 1985

УДК 513 + 517 + 519

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ ОТОБРАЖЕНИЯ

Топологические пространства и их отображения: Сборник научных трудов /Отв.ред. Е.Д.Энгельсон. -Рига:ЛГУ им.П.Стучки, 1985. - 192 с.

Сборник научных трудов "Топологические пространства и отображения" содержит результаты исследований, проведен в 1982-84 гг. на математических кафедрах ЛГУ им. П.Стучки, Даугавпилсского педагогического института, РКИИГА им.Ленинского комсомола, МГУ им. М.В.Ломоносова и некоторых других вузов. Результаты, содержащиеся в статьях сборника, доложены на секции топологии и секции функционального анализа и его приложений 42-й и 43-й научных конференций ЛГУ им. П.Стучки в 1983 и 1984 гг., а также на заседаниях научных семинаров ЛГУ им. П.Стучки, ДПИ, МГУ им. М.В.Ломоносова и на заседаниях 8-й Школы по теории операторов в функциональных пространствах (Рига , 1983).

Сборник предназначен для научных работников в области функционального анализа, теории функций и топологии, а также для аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся в указанных областях.

Библ. - 140 назв.

Печатается по решению Издательского совета ЛГУ им. П.Стучки

Т $\frac{20203-072у}{М\ 812(11)-85}$ 5доп.85.1702040000

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1985.

УДК 513.83

О ПРОСТРАНСТВАХ С ТОЧЕЧНО-СЧЕТНОЙ БАЗОЙ

А.В.Архангельский
МГУ им.М.В.Ломоносова

Все пространства, рассматриваемые в статье, заранее предполагаются тихоновскими. Семейство $\mathfrak{B}$ открытых в пространстве X множеств, называется псевдобазой этого пространства, если $\{x\} = \bigcap\{U \quad U \in \mathfrak{B}$ и для всех $x \in X$. Если $\mathfrak{B}$ – семейство множеств в то $< \mathfrak{B}, \aleph_0 > = \{x \in X : |\{U \in \mathfrak{B} : U \ni x\}| \leq \aleph_0\}$ жество точек счетной кратности семейства $\mathfrak{B}$ Мы пользуемся этим обозначением ниже. Семейство $\mathfrak{B}$ называется чечно-счетным на множестве $Y \subset X$, если Y $\aleph_0$ Пространство называется псевдокомпактным, если всякая непрерывная вещественная функция на X ограничена.

<u>Определение 1.</u> Множество $A \subset X$ называется относительно счетно-компактным в пространстве X, если для всякого бесконечного множества $B \subset A$ найдется предельная точка в X

<u>Определение 2.</u> Пространство X называется счетно-пракомпактным, если существует всюду плотное в X подпространство Y, которое относительно счетно-компактно в X

Очевидно, каждое счетно-пракомпактное пространство псевдокомпактно.

Как известно, псевдокомпактность не наследуется, вообще говоря, произвольными замкнутыми подпространствами.

В связи с этим, мы даём

<u>Определение 3.</u> Пространство X называется сильно псевдокомпактным, если существует всюду плотное в X множество Y такое, что каково бы ни было счетное множество $A \subset Y$, найдется счетное множество $B \subset X$, для которого $\bar{B}$ псевдокомпактно и $A \subset B$

Очевидно, каждое счетно пракомпактное пространство сильно псевдокомпактно и каждое сильно псевдокомпактное пространство псевдокомпактно.

Следующий результат хорошо известен.

Теорема I (см. [I], (2.I.I4)). Если пространство X счетно-компактно и обладает псевдобазой $\mathfrak{B}$ такой, что множество $<\mathfrak{B}, \aleph_0>$ точек её счетной кратности всюду плотно в X, то семейство $\mathfrak{B}$ счетно и X - компакт со счетной базой.

В доказательстве теоремы I существенную роль играет следующий ее частный случай:

Теорема 2 [2]. Каждое счетно-компактное пространство со счетной псевдобазой обладает и счетной базой.

М.Матвеевым [3] выделена следующая разновидность теоремы I:

Теорема I'. Если X - счетно-пракомпактное пространство с точечно счетной псевдобазой $\mathfrak{B}$, то эта псевдобаза счетна.

Не каждое счетно-пракомпактное пространство со счетной псевдобазой имеет и счетную базу (В.В.Успенский).

В данной статье мы формулируем ряд обобщений теорем I и I', стремясь к максимальной общности. То, что мы подходим к цели весьма близко, видно из следующего замечательного результата, недавно полученного Д.Б.Шахматовым:

Для каждого кардинала τ, существует псевдокомпактное пространство с точечно-счетной базой, содержащее замкнутое дискретное подпространство мощности τ.

Предложение I. Пусть X - псевдокомпактное пространство. Тогда множество Y всех изолированных в X точек относительно счетно-компактно в X

Доказательство. Это сразу следует из того, что каждое дискретное семейство непустых открытых множеств в псевдокомпактном пространстве конечно (изолированные точки образуют открытые одноточечные множества).

Так как в разреженном пространстве множество всех изолированных точек всюду плотно, получаем из предложения I такой результат:

Теорема 3. Каждое разреженное псевдокомпактное пространство счетно-пракомпактно.

Из предложения I и теоремы I вытекает также

Теорема 4. Если X — псевдокомпактное пространство с точечно-счетной базой, и множество всех изолированных точек пространства X всюду плотно в X, то X — компакт со счетной базой.

Это утверждение представляет интерес в связи с приведенным выше результатом Шахматова.

Теорема 5. Пусть X — сильно псевдокомпактное пространство с точечно счетной базой $\mathfrak{B}$ Тогда база $\mathfrak{B}$ счетна и X — компакт.

Доказательство. Возьмем $Y \subset X$ такое, как в определении 3. Покажем, что если $A \subset Y$ и A счетно, то $\overline{A}$ — компакт. Действительно, существует счетное множество $B \subset X$ такое, что $A \subset B$ и $\overline{B}$ псевдокомпактно. Семейство $\gamma = \{U \in \mathfrak{B}: U \cap B \neq \phi\}$ счетно и $\{U \cap \overline{B} : U \in \gamma\}$ — счетная база пространства $\overline{B}$. Значит, $\overline{B}$ — компакт. Тем более, $\overline{A}$ — компакт. Отсюда следует, что Y относительно счетно-компактно в X — т.е. пространство X счетно-пракомпактно. Остаётся сослаться на теорему I Матвеева.

Предложение 2. Пусть $\mathfrak{B}$ — открытое покрытие пространства X и $A = \langle \mathfrak{B}, \aleph_0 \rangle$ — множество точек счетной кратности семейства $\mathfrak{B}$. Тогда, для каждого счетного множества $M \subset A$, $\overline{M} \subset \langle \mathfrak{B}, \aleph_0 \rangle$ (т.е. A $\aleph_0$ — замкнуто снизу в смысле [I]).

Доказательство. Пусть $x \in \overline{M}$ и $U \in \mathfrak{B}$, $U \ni x$. Тогда $U \ni y$ для некоторого $y \in M$. Значит, $\{U \in \mathfrak{B}: U \ni x\} \subset \{U \in \mathfrak{B} : U \cap M \neq \phi\} = \bigcup \{\{U \in \mathfrak{B}: U \ni y\} : y \in M\}$ — счетное семейство, так как $M \subset A$ и $|M| \leq \aleph_0$ Следовательно, $x \in \langle \mathfrak{B}, \aleph_0 \rangle = A$.

Предложение 3. Пусть $\mathfrak{B}$ — открытое покрытие счетно-компактного пространства X. Тогда $A = \langle \mathfrak{B}, \aleph_0 \rangle$ — счетно-компактное подпространство пространства X

Доказательство. Это прямо следует из предложения 2.

Предложение 4. Пусть $\mathfrak{B}$ — псевдобаза счетно-компактного пространства X. Тогда множество $A = \langle \mathfrak{B}, \aleph_0 \rangle$

точек счетной кратности семейства $\mathfrak{B}$ замкнуто в X, является компактом со счетной базой и множеством типа G_δ в X.

<u>Доказательство.</u> В силу предложения 3, A счетно-компактно. Семейство $\{U \cap A : U \in \mathfrak{B}$ и $U \cap A \neq \phi\}$ – точечно-счетная псевдобаза пространства A. По теореме I, семейство $\{U \in \mathfrak{B} : U \cap A \neq \phi\}$ счетно и A – компакт со счетной базой. Теперь ясно, что A – множество типа G_δ в X (так как $\mathfrak{B}$ – псевдобаза).

<u>Теорема 6.</u> Пусть $\mathfrak{B}$ – псевдобаза счетно-компактного пространства X и каждое замкнутое в X множество, лежащее во множестве $X \setminus \langle \mathfrak{B}, \aleph_0 \rangle$ точек не счетной кратности семейства $\mathfrak{B}$, метризуемо. Тогда X – компакт со счетной базой.

<u>Доказательство.</u> Это следует из предложения 4 и того, что счетно-компактное пространство, являющееся объединением счетного множества пространств со счетной базой, само имеет счетную базу и является компактом (см. [I], [4]).

<u>Следствие I.</u> Пусть $\mathfrak{B}$ – псевдобаза счетно-компактного пространства X и подпространство $\mathfrak{X} = X \setminus \langle \mathfrak{B}, \aleph_0 \rangle$, образованное множеством всех точек не счетной кратности семейства $\mathfrak{B}$, удовлетворяет какому-либо из следующих условий:

а) $\mathfrak{X}$ симметризуемо;

б) Диагональ в $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ имеет тип G_δ;

в) Пространство $\mathfrak{X}$ обладает точечно-счетной псевдобазой.

Тогда X – компакт со счетной базой.

<u>Доказательство.</u> Так как каждое счетно-компактное пространство, удовлетворяющее одному из условий а), б), в), метризуемо (см. [I], [4], [5]), можно сослаться на теорему 6.

Приведем для полноты и следующий результат, легко доказываемый с помощью теоремы I.

<u>Теорема 7.</u> Пусть X – счетно-компактное пространство и $\{\mathfrak{B}_i : i \in N^+\}$ – счетное семейство псевдобаз пространства X такое, что $X = \bigcup \{\overline{\langle \mathfrak{B}_i, \aleph_0 \rangle} : i \in N^+\}$.

Тогда X - компакт со счетной базой.

Доказательство. В силу предложения 4, $X = \bigcup\{\langle \mathfrak{B}_i, \aleph_0 \rangle : i \in N'\}$, причём каждое $\langle \mathfrak{B}_i, \aleph_0 \rangle$ является пространством со счетной базой. Значит, X обладает счетной сетью. Отсюда следует, что X - компакт со счетной базой.

Остается открытым следующий вопрос:

Задача. Пусть X - сильно псевдокомпактное пространство с точечно-счетной псевдобазой $\mathfrak{B}$. Верно ли, что семейство $\mathfrak{B}$ счетно?

Замечание. Теоремы I, 6 и 7 не распространяются на счетно пракомпактные пространства.

Литература

I. Архангельский А.В. Строение и классификация топологических пространств и кардинальные инварианты. - УМН, 1978, т.33, в.6, с.29-84.

2. Архангельский А.В., Произволов В.В. О связи между точечной мощностью системы подмножеств бикомпакта и его весом. - Вестн.МГУ. Сер.матем., 1966, т.3, с.75-77.

3. Матвеев М.В. О свойствах типа псевдокомпактности и счетной компактности. - Вестн. МГУ. Сер.матем., 1984, № 2. с. 24 - 26.

4. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. - М., 1974.

5. Chaber J. Conditions which imply compactness in countably compact spaces. - Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math., 1976, vol. 24, p. 993 - 998.

Поступила 27 января 1984 года

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1985.

УДК 517.988.52

ЗАМЕЧАНИЕ К ПРИНЦИПУ СРАВНЕНИЯ КРАСНОСЕЛЬСКОГО ДЛЯ КОМПАКТНЫХ ГРУПП

З.И.Баланов, С.В.Винниченко
Даугавпилсский педагогический институт

Настоящая заметка тесно связана с теоремой 2 из [1]. В [1] известный принцип сравнения Красносельского удалось распространить со случая действия конечных циклических групп на случай произвольных конечных групп и бесконечных, изоморфных компактной не вполне несвязной группе. В настоящей заметке строится пример векторных полей, эквивариантных и подугомотопных относительно бесконечной группы, изоморфной компактной вполне несвязной, которые, тем не менее, имеют различные вращения. Этим показывается существенность условия не вполне несвязности в теореме 2 из [1] . Все неопределенные здесь понятия можно найти в [1] и [4] .

Основной в наших построениях является следующая теоретико-групповая

Лемма 1. В группе G -гомеоморфизмов n -мерной сферы ($n>1$) – существует подгруппа, изоморфная группе целых p -адических чисел Z_p . (Как хорошо известно, последняя является бесконечной компактной вполне несвязной (см. [2], с.177)).

Доказательство. Очевидно, R^+ – аддитивная группа вещественных чисел – вложима в G . Покажем, что Z_p вложима в R^+ . Действительно, Z_p – абелева группа без кручения, следовательно, она вложима в G^* – полную абелеву группу без кручения (см. [3], с.62). Ясно, что G^* можно выбрать континуальной мощности. Для этого достаточно взять все частные Z_p . Остается показать, что G^* изоморфна R^+ . Так как G^* не имеет кручения, то по теореме 9.1.6 из [3] она представима прямой суммой континуального набора групп Q (здесь Q – аддитивная группа рациональных чисел). Аналогично, R^+ также представима континуальным набором слагаемых Q . Отсюда, G^* изоморфна R^+ .

Ниже мы строим пример действия R^+ (а, значит, с уче-

ом леммы I и Z_p) на единичной окружности и пример век-
орных полей, эквивариантных и полугомотопных относительно
R^+ , имеющих, однако, различные вращения. Нам удобно R^+
редставлять изоморфной ей $R^{\cdot}_{+}$ -мультипликативной группой по-
ожительных вещественных чисел. Считаем единичную окружность
трезком $[0,2]$ (0 и 2 совпадают). Для любого вещественного
оложительного α определим f_α – гомеморфизм единичной
кружности на себя – формулой

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha, & x \in [0,1] \\ 2-(2-x)^\alpha, & x \in [1,2] \end{cases} \qquad (I)$$

усть $V = \{f_\alpha\}_{\alpha \in R^{\cdot}_{+}}$ – группа гомэоморфизмов единич-
ой окружности, определенных по формуле (I). Как нетрудно
бедиться, V изоморфна $R^{\cdot}_{+}$ и, следовательно, содержит изо-
орфный образ Z_p . Положим теперь поле Φ равным тождест-
енному, а поле Ψ определим формулой $\Psi : x \to 2 - x$ Так
ак $N(V) = \{0;1\}$, то эквивариантность и полугомотопность
роверяются непосредственно. Однако при этом $\gamma(\Phi) = 1$
$\gamma(\Psi) = -1$, чем и завершается построение нашего
онтрпримера.

Литература

1. Баланов З.И., Бродский С.Д. Принцип сравнения Красносельского и продолжение эквивариантных отображений. – В кн.: Функциональный анализ. Ульяновск, вып. I, 1984.
2. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. – М., 1979.
3. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. М., 1977.
4. Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа. – М., 1975.

Поступила 3 ноября 1983 года

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1985.

УДК 519.46

ИЗОМОРФИЗМ ТРЕУГОЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ АЛГЕБР ЛИ (p-АЛГЕБР ЛИ) И АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР

А.Х.Брегман
ЛГУ им.П.Стучки

I. Конструкция треугольного произведения представлений алгебр Ли (p-алгебр Ли) и ассоциативных алгебр изучалась рядом авторов ([3] , [5] , [6]). Первоначально она была определена в категории представлений групп [4] , где является одним из основных инструментов исследования полугруппы многообразий представлений групп. При изучении операции треугольного произведения в указанных категориях оказалось, что многие ее свойства аналогичны известным свойствам сплетений групп (например, имеет место аналог теоремы Калужнина-Краснера о сплетении групп и др. [3]).

С.М.Вовси доказал аналог одной теоремы П.Неймана о сплетениях для операции треугольного произведения представлений групп.

Теорема I [2]. Любые два треугольных разложения произвольного точного представления обладают сопряженными продолжениями.

С другой стороны, Л.А.Альшанским доказан ослабленный вариант приведенной теоремы в категории полуавтоматов.

Теорема 2 [I]. Любые два треугольных произведения точных полуавтоматов над полем, изоморфные как полуавтоматы, обладают общим продолжением.

Основным результатом данной статьи является следующая теорема.

Теорема. Любые два треугольных разложения произвольного точного представления алгебры Ли обладают сопряженными продолжениями.

Аналогичное утверждение справедливо в категории представлений p-алгебр Ли и ассоциативных алгебр.

Отметим, что хотя формулировки ранее доказанной теоремы I и приведенной теоремы совпадают, понятие сопряженности пар в категории представлений групп и алгебр Ли различны. Если в случае групп сопряжение производится с помощью элемента из самой группы, то в рассматриваемом случае соответствующий элемент выбирается вне алгебры Ли. Это изменяет методику доказательства, хотя по существу его схема подобна приведенной в [2].

В заключении рассматриваются связи между треугольными разложениями представления p-алгебры Ли и соответствующего представления алгебры Ли, а также между треугольными разложениями представления ассоциативной алгебры и соответствующего представления коммутаторной алгебры.

2. Напомним основные определения, относящиеся к конструкции треугольного произведения лиевских пар.

Пусть даны две лиевские пары (V_1, L_1) и (V_2, L_2) над некоторым полем K. Пусть $\Phi = \mathrm{Hom}_K(V_2, V_1)$, $(V, \Sigma) = (V_1 + V_2, L_1 + L_2)$ – прямая сумма исходных лиевских пар. Определим действия алгебры $\Sigma = L_1 + L_2$ в Φ: если $\varphi \in \Phi$ и $\sigma = l_1 + l_2$, где $l_1 \in L_1$, $l_2 \in L_2$ и $v_2 \in V_2$, то $v_2 \cdot (\varphi \circ \sigma) = v_2 \cdot (\varphi \circ (l_1 + l_2)) = (v_2 \varphi) l_1 - (v_2 l_2) \varphi$. Полученной таким образом лиевской паре (Φ, Σ) отвечает полупрямая сумма $L = \Phi \leftthreetimes \Sigma$ (здесь Φ – абелева алгебра Ли). Определим теперь лиевскую пару $(V_1 + V_2, \Phi \leftthreetimes \Sigma)$. Сначала определим действие Φ в $V = V_1 + V_2$: если $\bar{\varphi}$ – элемент из Φ, рассматриваемый как элемент в $L = \Phi \leftthreetimes \Sigma$, то для $v_1 \in V_1$ и $v_2 \in V_2$ положим $v_1 \bar{\varphi} = 0$, $v_2 \bar{\varphi} = v_2 \varphi$ и продолжим, далее, действие $\bar{\varphi}$ по линейности.

Построенная таким образом пара $(V_1 + V_2, \mathrm{Hom}(V_2, V_1) \leftthreetimes (L_1 + L_2))$ обозначается через $(V_1, L_1) \triangledown (V_2, L_2)$ и называется треугольным произведением исходных лиевских пар.

Операция треугольного произведения лиевских пар легко распространяется на произвольное число сомножителей. При этом она является ассоциативной.

Пусть теперь (V, L) – произвольная лиевская пара и θ элемент из $\mathrm{End}\, V$ такой, что $(1 + \theta)$ – автоморфизм алгебры L и $\theta^2 = 0$. Пара отображений $v \to v(1 + \theta)$, $l \to (1 - \theta) l (1 + \theta)$, где $v \in V$, $l \in L$ определяет автоморфизм представления (V, L), который назовем внутренним. Если (A , Σ)-некоторое подпредставление в (V, L), то пару $(A(1+\theta), (1-\theta)\Sigma(1+\theta))$ будем обозначать через $(A,\Sigma)^{1+\theta} = (A^{1+\theta}, \Sigma^{1+\theta})$ (соответственно пару $(A(1-\theta), (1+\theta)\Sigma(1-\theta))$ обозначим через $(A,\Sigma)^{1-\theta} = (A^{1-\theta}, \Sigma^{1-\theta})$).

Если $(V,L) = (V_1,L_1)\nabla(V_2,L_2)\nabla \ldots \nabla(V_n,L_n) = (\bar V_1,\bar L_1)\nabla(\bar V_2,\bar L_2)\nabla\ldots\nabla(\bar V_m,\bar L_m)$, то по аналогии с групповым случаем эти два разложения пары (V , L) называются сопряженными, если $m = n$ и существует внутренний автоморфизм представления (V, L), отображающий (V_i, L_i) на ($\bar V_i, \bar L_i$), $i = 1, 2, \ldots, n$

Естественным образом определяется также понятие продолжения разложения в треугольное произведение.

Переходим к доказательству теоремы, сформулированной в пункте I. Рассмотрим вначале случай, когда оба разложения представления (V , L) состоят из двух сомножителей:

$$(V,L) = (V_1,L_1)\nabla(V_2,L_2) = (V_1\oplus V_2, \Phi\leftthreetimes L_1 + L_2), \qquad (1)$$

$$(V,L) = (\bar V_1,\bar L_1)\nabla(\bar V_2,\bar L_2) = (\bar V_1\oplus \bar V_2, \bar\Phi\leftthreetimes \bar L_1 + \bar L_2), \qquad (2)$$

где Φ и $\bar\Phi$ являются централизаторами в $\mathrm{End}\, V$ рядов $0 \le V_1 \le V$ и $0 \le \bar V_1 \le V$ соответственно. Так как V_1 и $\bar V_1$ инвариантны относительно L , то либо $V_1 \le \bar V_1$, либо $\bar V_1 \le V_1$ (см. [3]). Не ограничивая общности, предположим, что $V_1 \le \bar V_1$

Обозначим через $V_3 = \bar V_1 \cap V_2$, тогда используя закон модулярности, получаем $\bar V_1 = \bar V_1 \cap V = \bar V_1 \cap (V_1 \oplus V_2) = V_1 \oplus (\bar V_1 \cap V_2) = V_1 \oplus V_3$ и $V = \bar V_1 \oplus \bar V_2 = V_1 \oplus V_3 \oplus \bar V_2$.

Пусть π есть проекция пространства $\bar V_2$ на V_2 Тогда $V_2 = \bar V_2^{\pi} \oplus V_3$ и $V = V_1 \oplus V_3 \oplus V_2^{\pi}$ Проверка этих равенств проделана в [2] , лемма 2.

Обозначим через Ψ централизатор ряда $0 \le V_1 \le \bar V_1 \le V$ в $\mathrm{End}\, V$

Лемма I. $\Phi \subseteq \Psi$, $\bar\Phi \subseteq \Psi$ и Ψ - идеал в L

Доказательство. Непосредственно из определений следует, что $\Phi \subset \Psi$ и $\bar\Phi \subset \Psi$ Возьмем произвольный элемент $\psi \in \Psi$. Построим два отображения из $\mathrm{End}\, V$ $\varphi_1 \in \Phi$ и $\varphi_2 \in \bar\Phi$: если e_α , $\alpha \in I$ - базис пространства V , то

$$v_2\varphi_1=\begin{cases}0, & v_2\in V_1\\ v_2\psi, & v_2\in \overline{V}_1\setminus V_1\\ 0, & v_2\in V\setminus \overline{V}_1\end{cases}\qquad v_2\varphi_2=\begin{cases}0, & v_2\in \overline{V}_1\\ v_2\psi, & v_2\in V\setminus \overline{V}_1\end{cases}$$

Так как $\psi=\varphi_1+\varphi_2$ Φ и $\overline{\Phi}$ - идеалы в L, то Ψ - идеал в L

Определим отображение $\theta: V\to V$ следующим образом: $v_1\theta=0$, если $\bar v_1\in \overline{V}_1$; если $\bar v_2=v_1+v_2$, то $\bar v_2\theta=v_1$ Ясно, что $\overline{V}_1^{\theta}=0$ $\overline{V}_2^{\theta}\subset V_1$ $\theta^2=0$ и $(1-\theta)(1+\theta)=1$.

Покажем, что $1+\theta$ определяет внутренний автоморфизм пары (V, L).

Лемма 2. $(1-\theta)L(1+\theta)\le L$

Доказательство. Пусть $l\in L$, $l=\bar\varphi+\bar l_1+\bar l_2$ где $\bar\varphi\in\overline{\Phi}$, $\bar l_1\in \overline{L}_1$, $\bar l_2\in \overline{L}_2$ Легко проверить, что $(1-\theta)l(1+\theta)=\bar\varphi+\bar l_1+\bar l_2-\theta\bar l_1+\bar l_2\theta$.

Нужно показать, что $\bar\varphi-\theta\bar l_1+\bar l_2\theta\in\overline{\Phi}$ Это следует из того, что $\forall \bar v_1\in \overline{V}_1: \bar v_1(\bar\varphi-\theta\bar l_1+\bar l_2\theta)=0$ $\forall \bar v_2\in V_2: \bar v_2(\bar\varphi-\theta\bar l_1+\bar l_2\theta)\in V_1$

Значит, $(1-\theta)l(1+\theta)\in L$

Пусть L_3 множество всех тех элементов из L, которые действует в V_1 и в $\overline{V}_2$ нулевым образом и оставляет инвариантным $V_3=\overline{V}_1\cap V_2$. Тогда $L_3\le \overline{L}_1$

Лемма 3. $L=\langle\Psi, L_1, L_3, \overline{L}_2\rangle$.

Доказательство. Так как $L=\overline{\Phi}\leftthreetimes(\overline{L}_1+\overline{L}_2)$ и $\overline{\Phi}\le\Psi$, то достаточно доказать, что $\overline{L}_1\le\langle\Psi, L_1, L_3, \overline{L}_2\rangle$ Обозначим последнюю подалгебру через L_0.

Пусть $l_1\in\overline{L}_1$. Так как $\overline{L}_1\subset L$, то $l=\varphi+l_1+l_2$, где $\varphi\in\Phi$, $l_1\in L_1$, $l_2\in L_2$ А так как Φ $L_1\subset L_0$ то достаточно проверить что $l_2\in L_0$.

Пусть $v_3\in V_3$ Так как $V_3\subset\overline{V}_1$, а $\overline{V}_1L\subset V_1$ и $\overline{V}_1=V_1\oplus V_3$, то для любого $v_3\in V_3$

$$v_3 l_2=v_1'+v_3',\qquad \text{где}\quad v_1'\in V_1,\ v_3'\in V_3. \qquad (3)$$

Определим отображение $\tau\in \mathrm{End}\,V$ следующим образом: $v_1\tau=0$, $\bar v_2\tau=0$, $v_3\tau=v_1'$, где $v_1\in V_1$, $\bar v_2\in \overline{V}_2$, $v_3\in V_3$ и $v_1'\in V_1$ из разложения (3). Ясно, что $\tau\in\Psi$

Покажем, что $\tau-l_2\in L_3$ Прямо по определению следует, что $v_1(\tau-l_2)=0$ Если $v_3\in V_3$, то $v_3(\tau-l_2)=v_3\tau-(v_1'+v_3')=$ $=v_1'-v_1'-v_3'=-v_3'\in V_3$ Покажем, что $\bar v_2(\tau-l_2)=0$ $\bar v_2\in\overline{V}_2$. Если $\bar v_2=v_1+v_2$, $v_1\in V_1$ $v_2\in V_2$, то

$\bar{\sigma}_2 l = (\sigma_1+\sigma_2)(\varphi + l_1 + l_2) = \sigma_2\varphi + \sigma_1 l_1 + \sigma_2 l_2$.

Так как $l \in L_1$, то $\bar{\sigma}_2 l = 0$, а значит и $\sigma_2 l_2 = 0$. Поэтому $\bar{\sigma}_2 l_2 = (\sigma_1+\sigma_2) l_2 = \sigma_2 l_2 = 0$, и следовательно, $\bar{\sigma}_2(\tau - l_2) = \bar{\sigma}_2\tau - \bar{\sigma}_2 l_2 = 0$. Окончательно получаем, что $\tau - l_2 \in L_3 \subset L_0$. Но так как $\tau \in \Psi$, то $\tau - (\tau - l_2) = l_2 \in L_0$. Лемма доказана.

Лемма 4. $L^{1+\theta} \subseteq \bar{L}_1$

Доказательство. Надо показать, что $L_1^{1+\theta}$ действует в $\bar{V}_2$ нулевым образом, а элементы в $\bar{V}_1$ оставляет инвариантными.

Пусть $l_1 \in L_1$ и $\bar{\sigma}_2 = \sigma_1 + \sigma_2$. Тогда, так как $(1-\theta)l_1(1+\theta) = l_1 - \theta$, то $\bar{\sigma}_2(1-\theta)l_1(1+\theta) = (\sigma_1+\sigma_2)(l_1 - \theta l_1) = \sigma_1 l_1 - \bar{\sigma}_2\theta l_1 = \sigma_1 l_1 - \sigma_1 l_1 = 0$

Так как $V_1 \le \bar{V}_1$, то $\sigma_1(l_1 - \theta l_1) \in \bar{V}_1$

Лемма 5. $\bar{L}_2^{1-\theta} \le L_2$.

Доказательство. Пусть $\bar{l}_2 \in \bar{L}_2$. Покажем, что $\sigma_2(\bar{l}_2 - \bar{l}_2\theta) \in V_2$, где $\sigma_2 \in V_2$. Обозначим $\sigma_2\bar{l}_2 = \bar{\sigma}_2 \in \bar{V}_2$ и $\bar{\sigma}_2 = \sigma_1' + \sigma_2'$, $\sigma_1' \in V_1$, $\sigma_2' \in V_2$. Тогда $\sigma_2(\bar{l}_2 - \bar{l}_2\theta) = \sigma_1' + \sigma_2' - (\sigma_1' + \sigma_2')\theta = \sigma_1' + \sigma_2' - \sigma_1' = \sigma_2' \in V_2$. Из того, что $V_1 \subset \bar{V}_1$, сразу следует равенство $\sigma_1(\bar{l}_2 - \bar{l}_2\theta) = 0$, $\sigma_1 \in V_1$

Лемма 6. $(V, L) = (V_1, L_1^{1+\theta}) \triangledown (V_3, L_3) \triangledown (\bar{V}_2, \bar{L}_2)$
$(\bar{V}_1, \bar{L}_1) = (V_1, L_1^{1+\theta}) \triangledown (V_3, L_3)$.

Доказательство. I) Покажем, что если Σ - подалгебра в L, порожденная подалгебрами $L_1^{1+\theta}$, L_3 и L_2, то пара (V, Σ) раскладывается в прямую сумму пар $(V_1, L_1^{1+\theta})$, (V_3, L_3) и $(\bar{V}_2, \bar{L}_2)$. $\bar{L}_2$ действует нулевым образом в $\bar{V}_1 = V_1 + V_3$ и $\bar{V}_2\bar{L}_2 \subset \bar{V}_2$. L_3 по определению действует нулевым образом в V_1 и $\bar{V}_2$ и оставляет инвариантным V_3. По лемме 4 следует, что $L_1^{1+\theta}$ действует в $\bar{V}_2$ нулевым образом и элементы из V_1 оставляет инвариантными.

Покажем, что $L^{1+\theta}$ в V_3 действует нулевым образом. Это следует из того, что $V_3 = V_2 \cap \bar{V}_1$, значит $\sigma_3(l_1 - \theta l_1) = \sigma_3 l_1 - \sigma_3\theta l_1 = 0$. Используя равенство $V = V_1 \oplus V_3 \oplus V_2$ окончательно получаем, что $(V, \Sigma) = (V_1, L_1^{1+\theta}) \oplus (V_3, L_3) \oplus$
$\oplus (\bar{V}_2, \bar{L}_2)$

2) По лемме идеал Ψ в L является централизатором в $End\, V$, где $0 \subset V_1 \subset \bar{V}_1 \subset V$.

3) Из леммы 4 и из того, что $\theta \in \Psi$ следует, что $L = \langle \Psi, L_1^{1+\theta}, L_3, L_2 \rangle$. Поэтому $L = \Psi \leftthreetimes (L_1^{1+\theta} \oplus L_3 \oplus L_2)$

Из I)–3) следует, что $(V,L) = (V_1 L_1^{1+\theta}) \triangledown (V_3, L_3) \triangledown (\bar{V}_2, \bar{L}_2)$. Из этого равенства и из того, что $(V,L) = (\bar{V}_1, \bar{L}_1) \triangledown (\bar{V}_2, \bar{L}_2)$, $(V_1, L_1^{1+\theta}) \le (\bar{V}_1, \bar{L}_1)$, $(V_3, L_3) \le (\bar{V}_1, \bar{L}_1)$, следует равенство $(\bar{V}_1, \bar{L}_1) = (V_1, L_1^{1+\theta}) \triangledown (V_3, L_3)$

<u>Лемма 7.</u> $(V,L) = (V_1, L_1) \triangledown (V_3, L_3) \triangledown (\bar{V}_2^{1-\theta}, \bar{L}_2^{1-\theta})$
$(V_2, L_2) = (V_3, L_3) \triangledown (\bar{V}_2^{1-\theta}, \bar{L}_2^{1-\theta})$

<u>Доказательство.</u> I) Заметим сначала, что $\bar{V}_2^{1-\theta} = \bar{V}_2^{\sigma}$ так как если $\bar{v}_2 = v_1 + v_2$, то $\bar{v}_2(1-\theta) = v_1 + v_2 - v_1 = v_2 \in V_2$ и $V = V_1 \oplus V_3 \oplus \bar{V}_2^{\sigma}$. Алгебра L_1 действует нулевым образом в $V_2 = V_3 \oplus \bar{V}_2^{\sigma}$. По определению L_3 действует нулевым образом в V_1 и $\bar{V}_2$, а так как каждый $\bar{v}_2^{\sigma} \in \bar{V}_2^{\sigma}$ представим в виде $\bar{v}_2^{\sigma} = \bar{v}_2 - v_1$, где $\bar{v}_2 \in \bar{V}_2$, $v_1 \in V_1$, то L_3 действует нулевым образом в $V_1 + \bar{V}_2^{\sigma}$. Алгебра $\bar{L}_2^{1-\theta}$, очевидно, действует в $\bar{V}_1 = V_1 - V_3$ нулевым образом, а по лемме 5 элементы из V_2 оставляет инвариантными. Из всего сказанного следует, что
$(V, \langle L_1, L_3, \bar{L}_2^{1-\theta} \rangle) = (V_1, L_1) \oplus (V_3, L_3) \oplus (\bar{V}_2^{1-\theta}, \bar{L}_2^{1-\theta})$.

2) Идеал Ψ в L является централизатором в $\mathrm{End}\,V$ ряда $0 \le V_1 \le \bar{V}_1 \le V$

3) Из леммы 4 и из того, что $\theta \in \Psi$ следует равенство $L = \Psi \leftthreetimes (L_1 + L_3 + L_2^{1-\theta})$. Таким образом получаем, что $(V,L) = (V_1, L_1) \triangledown (V_3, L_3) \triangledown (\bar{V}_2, \bar{L}_2)^{1-\theta}$. С другой стороны, $(V,L) = (V_1, L_1) \triangledown (V_2, L_2)$. А так как по лемме 5 $(\bar{V}_2, \bar{L}_2)^{1-\theta} \le (V_2, L_2)$ и по определению $(V_3, L_3) \le (V_2, L_2)$, то $(V_2, L_2) = (V_3, L_3) \triangledown (\bar{V}_2, \bar{L}_2)^{1-\theta}$. Лемма доказана.

Из лемм 6 и 7 следует, что два разложения

$$(V,L) = (V_1, L_1) \triangledown (V_3, L_3) \triangledown (\bar{V}_2^{1-\theta}, \bar{L}_2^{1-\theta}) \qquad (4)$$

$$(V,L) = (V_1, L_1^{1+\theta}) \triangledown (V_3, L_3) \triangledown (\bar{V}_2, \bar{L}_2) \qquad (5)$$

являются продолжениями разложений (I) и (2) соответственно.

Заметим, что так как θ действует нулевым образом на $\bar{V}_1$, то $(1+\theta)$ действует тождественно на V_1 и V_3. Докажем, что также $L_3^{1+\theta} = L_3$. Действительно, если $v \in \bar{V}_1 \cap V_2 = V_3$ и $v = v_1 + v_2$ то $(v_1 + v_2)(1-\theta) l_3 (1+\theta) = (v_1 + v_2) l_3 (1+\theta) - (v_1 + v_2) \theta l_3 (1+\theta)$. Но $v_1 l_3 = 0$ и $V_3(1+\theta) \subset V_3$, $V_2 l_3 (1+\theta) \subset V_3 (1+\theta) \subset V_3$. Следовательно, $V_3(1-\theta)\ell_3(1+\theta)\subset V_3$. Легко видеть, что $\sigma_1(1-\theta)\ell_3(1+\theta)=0$ и $\sigma_2(1-\theta)\ell_3(1+\theta)=0$. Следовательно, $L_3^{1+\theta}\subset L_3$ Аналогично $L_3^{1-\theta}\subset L_3$. Значит $L_3^{1+\theta}=L_3$ Этим доказано, что разложения (4) и (5) сопряжены.

Общий случай доказывается по индукции также как и в [2] с очевидными изменениями и поэтому мы его опускаем. Теорема доказана.

Дословным повторением приведенных выше рассуждений доказывается аналогичная теорема в категории p-пар. Добавляется лишь проверка согласованности участвующих отображений с p-операцией. Наконец, в случае представлений ассоциативных алегбр те же рассуждения приводят к соответствующей теореме о сопряжении двух разложений в треугольное произведение подпар.

Укажем связь между треугольными разложениями представления p-алгебры Ли (ассоциативной алгебры) и ее лиевского разложения.

Пусть (V, L) - точное представление p-алгебры Ли L и $(V,L)=(V_1,L_1)\triangledown(V_2,L_2)\triangledown\ldots\triangledown(V_n,L_n)$ - некоторое треугольное разложение (V, L) на подпары (V_i, L_i) (см. [3]). Если теперь рассматривать (V, L) только как алгебру Ли, то последнее разложение естественно приводит нас к разложению (V, L) в треугольное произведение лиевских подпар (V_i, L_i). При этом из неразложимости лиевской пары (V_i, L_i) в треугольное произведение следует неразложимость этой пары с точки зрения p-алгебры Ли и наоборот. Это позволяет утверждать, что имеет место

<u>Предложение I.</u> Пусть $(V,L)=(V_1,L_1)\triangledown\ldots\triangledown(V_n,L_n)$ где все (V_i, L_i) - неразложимые p-пары.

Тогда, если $(V,L)=(\bar V_1,\bar L_1)\triangledown\ldots\triangledown(\bar V_m,\bar L_m)$ - разложение лиевской пары (V, L) в треугольное произведение неразложимых лиевских подпар $(\bar V_i, \bar L_i)$, то $n=m$ и $(V_i,L_i)\simeq(\bar V_i,\bar L_i)$, где $(\bar V_i, \bar L_i)$ является лиевской p-парой и последний изоморфизм сохраняет p-структуру.

Соответствующая связь имеется также при разложении представления ассоциативной алгебры A (V, A) в треугольное произведение подпар и разложении представления соответствующей ей коммутаторной алгебры A_L, то есть пары (V, A_L).

В заключение автор выражает искреннюю благодарность Р.С.Липянскому за руководство и помощь в работе над данной статьей.

Литература

I. Альшанский Л.А. Изоморфизм треугольных произведений линейных полуавтоматов и представлений. - Латв. мат. ежегодник, 1983, т.27, с.183-190.

2. Вовси С.М. Изоморфизм треугольных разложений представлений разложений групп. - Латв. мат. ежегодник, 1977, т.21, с.116-123.

3. Липянский Р.С. Полугруппа многообразий лиевских пар. - В кн.: Теория множеств и топология. Ижевск, 1977, с.44-54.

4. Плоткин Б.И. Треугольные произведения пар. - В кн.: Некоторые вопросы теории групп. Рига, 1971, с.140-170.

5. Кальюлайд У. Треугольные произведения представлений полугрупп и ассоциативных алгебр. - Успехи мат. наук, 1977, т. 32, вып. 4, с. 253-254.

6. Кроп Л.Е., Симонян Л.А. О чистых и магнусовых многообразиях в представлениях групп. - В кн.: Сборник работ по алгебре. Рига, 1978, с.108-129.

Поступила 12 сентября 1984 года

УДК 513.83

МЕТОД ЖЕСТКИХ СПЕКТРОВ В ТЕОРИИ ПАРАКОМПАКТНЫХ σ - ПРОСТРАНСТВ

Ю.Х.Брегман
ЛГУ им.П.Стучки

Многие задачи топологии, топологической алгебры и функционального анализа, связанные в своей постановке с метрическими пространствами, выводят за пределы этого класса. Такая ситуация возникает, например, при исследовании замкнутых непрерывных образов метрических пространств, CW - комплексов, свободных топологических групп в смысле Маркова и др. В связи с такими задачами в последние два десятилетия появились различные обобщения метризуемых пространств. К важнейшим из них принадлежат перистые паракомпакты [1], кружевные пространства [2] и паракомпактные σ -пространства [3]. Если теория перистых паракомпактов достаточно хорошо развита, то свойства паракомпактных σ -пространств (т.е. паракомпактов с σ -дискретной сетью) исследованы недостаточно.

В настоящей работе мы развиваем метод обратных спектров в классе паракомпактных σ -пространств (метод жестких спектров). Нашей целью является аппроксимация паракомпактных σ -пространств с помощью обратных спектров, объектами которых являются метрические пространства, а морфизмами - уплотнения, применение таких спектров для исследования размерностных свойств паракомпактных σ -пространств.

Исходным для нашего исследования явилось понятие слабого уплотнения, введенное А.В.Архангельским [4]. Уплотнение (т.е. непрерывная биекция) $f: X \to Y$ называется слабым, если пространство X регулярно, Y - паракомпакт и в Y существует такое σ -дискретное семейство $\mathcal{F}$, что $f^{-1}(\mathcal{F})$ является сетью в X. А.В.Архангельский доказал [4], что топологическое пространство, допускающее слабое уплотнение, является паракомпактным σ-пространством и что каждое паракомпактное σ-пространство допускает слабое уплотнение на метрическое пространство. В § 1 мы вводим понятие жесткого спектра (определение 1), которое является, по существу, спектральным аналогом слабого уплотнения, и доказываем, что паракомпактные σ-пространства - это в точности обратные пределы жестких спектров из метрических пространств (теорема 1). В этом параграфе также приводится пример жесткого спектра из полных метрических пространств, предел которого неметризуем.

Слабые уплотнения на метрические пространства не характеризуют размерность паракомпактных σ-пространств. По теореме Хилгерса [5] любое сепарабельное метрическое пространство мощности континуум является образом при уплотнении некоторого n-мерного сепарабельного метрического пространства для каждого $n>0$. Но каждое уплотнение в классе сепарабельных метрических пространств является слабым. Таким образом, при слабых уплотнениях размерность (ind, Ind и $\dim$) может как повышаться, так и понижаться. Для характеристики размерности $\dim$ паракомпактных σ-пространств мы применяем жесткие спектры. Центральным результатом статьи является теорема 2, утверждающая, что X является паракомпактным σ-пространством размерности $\dim X \leq n$ тогда и только тогда, когда X гомеоморфно пределу жесткого спектра из метрических пространств размерности $\dim$ не более n. В § 2 построен также пример жесткого спектра из конечномерных сепарабельных метрических пространств, являющегося обратной последовательностью, предел которого S-сильно бесконечномерен. В § 3 теорема 2 применяется для доказательства факторизационной теоремы по весу и размерности для слабых уплотнений. Нам неизвестно, верна ли общая факторизационная теорема по весу и размерности для паракомпактных σ-пространств.

Отметим определенный параллелизм значительной части наших результатов с фактами хорошо развитой теории перистых паракомпактов. Так, перистые паракомпакты могут быть охарактеризованы как пределы обратных спектров из метрических пространств с совершенными проекциями [6]. С помощью таких же обратных спектров может быть оценена и размерность $\dim$ перистых паракомпактов: по теореме Клюшина-Пасынкова, пространство X является перистым паракомпактом размерности $\dim X \leq n$ тогда и только тогда, когда X гомеоморфно пределу обратного спектра с совершенными проекциями из метрических пространств размерности $\dim$ не более n ([6], [7]).

Основные результаты данной статьи были сформулированы в [8], [9], [10]. Материал статьи составляет часть кандидатской диссертации автора. Пользуясь случаем, автор выражает искреннюю благодарность своим научным руководителям профессору Ю.М.Смирнову и доценту А.Л.Шостаку за постоянную помощь и поддержку.

Вся терминология статьи по общей топологии соответствует монографиям [11], [12], терминология по теории размерности - [13], по теории обратных спектров - [14]. $\mathbb{N}$ обозначает дискретное пространство натуральных чисел, $\mathbb{R}$ - вещественная прямая, $\mathbb{Q}$ - подпространство рациональных чисел (вещественной прямой). $[A]_X$ обозначает замыкание множества A в пространстве X, $|A|$ - его мощность, $w(X)$ - вес пространства X. Если $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ - семейство отображений пространства X, то $\Delta\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ обозначает диагональное произведение этого семейства. Если все пространства X_α суть экземпляры некоторого множества X, то $\Delta\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ обозначает диагональ в произведении $\Pi\{X_\alpha : \alpha \in A\}$. Пусть $f : X \to Y$ - отображение и $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{F}$ - семейства множеств в X и Y соответственно. Тогда $f(\mathfrak{K})$ и $f^{-1}(\mathfrak{F})$ обозначают семейства $\{f(K) : K \in \mathfrak{K}\}$ и $\{f^{-1}(F) : F \in \mathfrak{F}\}$ соответственно. Мы также не будем различать понятия метрического и метризуемого пространства. Мы неоднократно будем пользоваться следующим специальным видом факторизационной теоремы Б.А.Пасынкова для метрических пространств [13, с.388]: если $f : X \to Y$ - уплотнение нормального пространства X на метрическое пространство Y, то существует такое метрическое пространство Z и такие уплотнения $g : X \to Z$ и $h : Z \to Y$, что $f = h \circ g$, $\dim Z \leq \dim X$ и $w(Z) \leq w(Y)$.

§ I. Паракомпактные σ-пространства и жесткие спектры

Определение I. Обратный спектр $\{X_\alpha, \mathcal{F}_\alpha, \pi^\alpha_\beta, \alpha,\beta\in A\}$ назовем жестким спектром, если все пространства X_α - паракомпакты, все проекции π^α_β - уплотнения, $\mathcal{F}_\alpha$ - σ-дискретная сеть в X_α и $\pi^\alpha_\beta(\mathcal{F}_\alpha) = \mathcal{F}_\beta$ для всех $\beta < \alpha$.

Это понятие можно сформулировать также на категорном языке. Рассмотрим категорию $\mathcal{C}$, объектами которой являются пары $(X, \mathcal{F})$, где X - паракомпакт, $\mathcal{F}$ - σ-дискретная сеть в X, а морфизмами являются такие уплотнения $f:(X,\mathcal{F})\to(Y,\mathcal{H})$, что $f(\mathcal{F}) = \mathcal{H}$. Тогда жесткие спектры - это обратные спектры в категории $\mathcal{C}$. Следующее предложение утверждает фактически, что предел жесткого спектра в категории $\mathcal{C}$ всегда существует.

Предложение I. Предел жесткого спектра есть паракомпактное σ-пространство.

Доказательство. Пусть пространство X является пределом жесткого спектра $\{X_\alpha, \mathcal{F}_\alpha, \pi^\alpha_\beta, \alpha,\beta\in A\}$ и $\pi_\alpha: X \to X_\alpha$ - предельные проекции. Зафиксируем произвольное $\alpha \in A$. Ясно, что π_α - уплотнение и $\mathcal{F} = \pi_\alpha^{-1}(\mathcal{F}_\alpha)$ является σ-дискретным семейством в X. Покажем, что семейство $\mathcal{F}$ является сетью в пространстве X. Пусть $x \in X$ и V - произвольная базовая окрестность точки x, т.е. $V = \pi_\beta^{-1}(U)$ и U - некоторое открытое множество в X_β, $\beta \in A$. Пусть $x_\beta = \pi_\beta(x)$. Поскольку множество A направлено, то существует такое $\gamma \in A$, что $\alpha < \gamma$ и $\beta < \gamma$. Семейство $\mathcal{F}_\beta$ является сетью в X_β, поэтому найдется множество $C \in \mathcal{F}_\beta$ такое, что $x_\beta \in C \subset U$. Нетрудно заметить, что $(\pi^\gamma_\beta)^{-1}(C) \in \mathcal{F}_\gamma$ и $x \in \pi_\beta^{-1}(C) \subset \pi_\beta^{-1}(U)$. Поскольку $\alpha < \gamma$, то по определению жесткого спектра существует такое множество $D \in \mathcal{F}_\alpha$, что $(\pi^\gamma_\alpha)^{-1}(D) = (\pi^\gamma_\beta)^{-1}(C)$, но тогда $\pi_\alpha^{-1}(D) = (\pi^\gamma_\alpha \circ \pi_\gamma)^{-1}(D) = \pi_\gamma^{-1}((\pi^\gamma_\beta)^{-1}(C)) = \pi_\beta^{-1}(C)$, $\pi_\alpha^{-1}(D) \in \mathcal{F}$ и $x \in \pi_\alpha^{-1}(D) \subseteq V$.

Таким образом, $\mathcal{F}$ является σ-дискретной сетью в X, а отображение π_α - слабое уплотнение. Тогда по теореме А.В.Архангельского [4] X является паракомпактным σ-пространством.

Предложение 2. Пусть X - паракомпактное σ-пространствс и $\mathcal{F}$ – σ -дискретная сеть в нем. Тогда X является пределом такого жесткого спектра $\{X_\alpha, \mathcal{F}_\alpha, \pi_\beta^\alpha, \alpha, \beta \in A\}$, что все пространства X_α метризуемы, $\mathcal{F}_\alpha = \pi_\alpha(\mathcal{F})$ для любого $\alpha \in A$ и $|A| \leq w(X)$.

Доказательство. Существует такое слабое уплотнение f пространства X на метризуемое пространство Z, что $f(\mathcal{F})$ является σ -дискретной сетью пространства Z. Пусть $\mathfrak{B}$ – база топологии в пространстве X мощности $w(X)$. Для каждого множества $V \in \mathfrak{B}$ зафиксируем такое непрерывное отображение $g_V : X \longrightarrow [0;1]$, что $g_V^{-1}([0;1[) = V$. Пусть $\pi_V = f \Delta g_V : X \longrightarrow X_V \subset Z \times [0;1]$. Поскольку f является уплотнением, то и π_V – уплотнение. Легко заметить также, что семейство $\mathcal{F}_V = \pi_V(\mathcal{F})$ является σ -дискретной сетью в метризуемом пространстве X_V.

В качестве индексного множества A возьмем множество всех конечных подмножеств множества $\mathfrak{B}$. Пусть $\mathcal{I} = \{V_1, \ldots, V_k\} \in A$. Тогда положим $X_\mathcal{I} = X_{V_1} \Delta \ldots \Delta X_{V_k}$, $\mathcal{F}_\mathcal{I} = p_{V_1}^{-1}(\mathcal{F}_{V_1}) \wedge p_{V_2}^{-1}(\mathcal{F}_{V_2}) \wedge \ldots \wedge p_{V_k}^{-1}(\mathcal{F}_{V_k})$, где p_{V_i} – проекция диагонали $X_{V_1} \Delta X_{V_2} \Delta \ldots \Delta X_{V_k}$ на координату X_{V_i}. Если $\beta < \mathcal{I}$, то $\beta \subset \mathcal{I}$ и в качестве уплотнения $\pi_\beta^\mathcal{I}$ возьмем проекцию $p_\beta : \Delta\{X_V : V \in \mathcal{I}\} \longrightarrow \Delta\{X_V : V \in \beta\}$. Очевидно, что проекции $\pi_\beta^\mathcal{I}$ удовлетворяют условию транзитивности и $\pi_\beta^\mathcal{I}(\mathcal{F}_\mathcal{I}) = \mathcal{F}_\beta$. Таким образом, обратный спектр $\{X_\mathcal{I}, \mathcal{F}_\mathcal{I}, \pi_\beta^\mathcal{I}, \mathcal{I}, \beta \in A\}$ является жестким. Нетрудно также заметить, что пространство X будет пределом этого спектра. Предельными проекциями будут отображения $\pi_\mathcal{I} = \pi_{V_1} \Delta \ldots \Delta \pi_{V_k}$. Поэтому для каждого $\mathcal{I} \in A$ имеет место соотношение $\pi_\mathcal{I}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_\mathcal{I}$.

Замечание 1. Из доказательства видно, что в утверждении предложения 2 можно дополнительно считать, что каждый элемент индексного множества A жесткого спектра имеет конечное число предшественников.

Замечание 2. Если $\mathcal{F}$ – σ -дискретная сеть в пространстве X, состоящая из замкнутых множеств, то в формулировке предложения 2 можно дополнительно потребовать, чтобы все $\mathcal{F}_\alpha$ являлись замкнутыми семействами.

Из утверждений предложения 1 и предложения 2 вытекает

<u>Теорема I.</u> Предел жесткого спектра является паракомпактным σ-пространством. Обратно, каждое паракомпактное σ-пространство гомеоморфно пределу жесткого спектра из метрических пространств.

<u>Следствие I.</u> Пространство со счетной сетью гомеоморфно пределу жесткого спектра из сепарабельных метрических пространств.

Естественно возникает вопрос, будет ли метризуем предел жесткого спектра из полных метрических пространств. Следующий пример дает отрицательный ответ на него.

<u>Пример I.</u> Существует жесткий спектр из полных сепарабельных метрических пространств, предел которого неметризуем.

Пусть $X_0 = \bigcup\{I_n ; n \in N\}$ - "еж" Ковальского веса $\aleph_0$, содержащий $\aleph_0$ "иголок" $I_n = I \times \{n\} (n \in N)$ и начальные точки $(0, n)$ "иголок", I_n, которого отождествлены в одну точку 0^* [II]. Пусть $\mathcal{B}_n$ - произвольная счетная база в отрезке $I_n \setminus \{0^*\}$ $(n \in N)$. Тогда семейство $\mathcal{S}_0 = \bigcup\{\mathcal{B}_n : n \in N\} \cup \{0^*\}$ является счетной сетью в пространстве X_0. Пусть $\alpha = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$ - произвольная точка множества $N^{\aleph_0}$. Определим множество $U_\alpha = \{x = (x, k) \in X_0 : x < \frac{1}{n_k}, k \in N\}$.
Определим теперь метрику ρ_α на множестве X_0. Пусть $\bar{x} = (x, m)$, $\bar{y} = (y, l)$. Если $m = l$ и $\bar{x}, \bar{y} \in U_\alpha$, либо $\bar{x}, \bar{y} \notin U_\alpha$, то положим $\rho_\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = |x - y|$. Если же $m = l$ и либо $\bar{x} \in U_\alpha$, $\bar{y} \notin U_\alpha$, либо $\bar{x} \notin U_\alpha$, $\bar{y} \in U_\alpha$, то пусть $\rho_\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = |x - y| + 1$. Если же $m \neq l$, то положим $\rho_\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \rho_\alpha(\bar{x}, 0^*) + \rho_\alpha(\bar{y}, 0^*)$. Обозначим через X_α множество X_0 с метрикой ρ_α. Нетрудно заметить, что в метрическом пространстве X_α множество U_α открыто. Пространство X_α является полным. Легко видеть, что семейство $\mathcal{S}_0$ является сетью в пространстве X_α, и мы эту сеть будем обозначать $\mathcal{S}_\alpha$. Частично упорядочим множество $N^{\aleph_0}$. Пусть $\alpha = (n_1, \ldots, n_k, \ldots)$, $\beta = (m_1, \ldots, m_k, \ldots)$. Положим $\alpha \geq \beta$, если $n_k \geq m_k$ для всех $k \in N$. Таким образом $N^{\aleph_0}$ становится направленным множеством. Если $\alpha \geq \beta$, то пусть $\pi_\beta^\alpha : X_\alpha \to X_\beta$ - естественное отображение, порожденное тождественным отображением множества X_0. В этом случае

$U_\alpha \subset U_\beta$ и, как легко заметить, π_β^α является уплотнением. Очевидно также, что $\pi_\beta^\alpha(\mathcal{T}_\alpha) = \mathcal{T}_\beta$ для любых $\beta \leq \alpha$. Таким образом, $S = \{X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha, \pi_\beta^\alpha, \alpha, \beta \in N^{\aleph_0}\}$ является жестким спектром из полных сепарабельных метрических пространств. Пусть $Y = \varprojlim S$. Пространство Y как множество совпадает с X_0^-, и семейство $\{U_\alpha : \alpha \in N^{\aleph_0}\}$ является базой окрестностей в точке 0^*, из которой нельзя выделить счетную базу. Следовательно, пространство Y неметризуемо. Заметим, что пространство Y является "веером" Фреше-Урысона и не обладает первой аксиомой счетности.

§ 2. Жесткие спектры и размерность паракомпактных σ-пространств

Предложение 3. Каждое паракомпактное σ-пространство X размерности $\dim X \leq n$ гомеоморфно пределу такого жесткого спектра $\{X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha, \pi_\beta^\alpha, \alpha, \beta \in A\}$ что X_α метризуемо и $\dim X_\alpha \leq n$ для каждого $\alpha \in A$

Доказательство. В силу предложения 2 и замечания I пространство X гомеоморфно пределу жесткого спектра $\{Y_\alpha, \mathcal{H}_\alpha, \omega_\beta^\alpha, \alpha, \beta \in A\}$ из метризуемых пространств, причем каждый элемент индексного множества A имеет конечное число предшественников. Пусть ω_α - предельные проекции ($\alpha \in A$) и $\mathcal{F}$ - такая σ-дискретная сеть в X, что $\mathcal{F} = \omega_\alpha^{-1}(\mathcal{H}_\alpha)$ для каждого $\alpha \in A$. Представим множество A в виде $A = \cup\{A_m \quad m = 0,1,2,\dots\}$, где A_m - множество всех элементов из A, имеющих ровно m предшественников. Искомый спектр построим по индукции. Пусть $m = 0$ и α - произвольный элемент множества A_0 По факторизационной теореме Б.А.Пасынкова для метрических пространств, существует такое метрическое пространство X_0 и такие уплотнения π_α и g_α, что $\dim X_\alpha \leq n$, $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$, $g_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$, $\omega_\alpha = g_\alpha \circ \pi_\alpha$. Нетрудно заметить, что семейство $\mathcal{T}_\alpha = g_\alpha^{-1}(\mathcal{H}_\alpha)$ - σ-дискретная сеть в X_α. Предположим, что для всех номеров $k<m$ и каждого $\alpha \in A_k$ построены метризуемое пространство X_α размерности $\dim X_\alpha \leq n$ и уплотнения π_α и $\tilde{g}_\alpha$ такие, что $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$, $\tilde{g}_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha \Delta(\Delta\{X_\beta : \beta < \alpha, \beta \in A_{k-1}\})$, причем $\omega_\alpha = g_\alpha \circ \pi_\alpha$, где $g_\alpha = p_\alpha \circ \tilde{g}_\alpha$ (p_α проекция на координату Y_α в роизведении $Y_\alpha \times \Pi\{X_\beta : \beta < \alpha, \beta \in A_{k-1}\}$. Проекциями $\tilde{\pi}_\beta^\alpha$ будут естественные уплотнения $\pi_\beta^\alpha = p_\beta \circ g_\alpha : X_\alpha \to X_\beta$

Пусть теперь α - произвольный элемент множества A_m. Тогда по факторизационной теореме для метрических пространств существует метризуемое пространство X_α размерности $\dim X_\alpha \leq n$ и уплотнения π_α и $\tilde{g}_\alpha$ такие, что $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$, $\tilde{g}_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha \Delta (\Delta\{X_\beta \; \beta < \alpha, \beta \in A_{m-1}\}$, причем $\omega_\alpha = g_\alpha \circ \pi_\alpha$, где $g_\alpha = p_\alpha \circ \tilde{g}_\alpha$. Заметим, что семейство $\mathcal{S}_\alpha = g_\alpha^{-1}(\mathcal{K}_\alpha)$ является σ-дискретной сетью в X_α и $\mathcal{S} = \pi_\alpha^{-1}(\mathcal{S}_\alpha)$. Продолжая индукцию, получим искомый жесткий спектр $\{X_\alpha, \mathcal{S}_\alpha, \pi_\beta^\alpha, \alpha, \beta \in A\}$. Нетрудно заметить, что его предел гомеоморфен X.

Для доказательства предложения 4, обратного предложению 3, нам потребуется следующий результат Б.А.Пасынкова ([15, предложение 10]).

<u>Лемма I.</u> Пусть дан обратный спектр $\{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha, \alpha, \beta \in A\}$ из метрических пространств размерности $\dim X_\alpha \leq n$, $\alpha \in A$ и такие непрерывные отображения $f_\alpha : X \to X_\alpha$, $\alpha \in A$, пространства X, что $f_\beta = \pi_\beta^\alpha \circ f_\alpha$ при $\beta < \alpha$. Если для открытого покрытия ω пространства X существует такое множество $A_\omega \subset A$ и такие открытые в X_α множества V_α, $\alpha \in A_\omega$, что система $\omega' = \{O_\alpha = f_\alpha^{-1}(V_\alpha) : \alpha \in A_\omega\}$ является σ-локально конечным и вписанным в ω покрытием пространства X, то X обладает ω-отображением на метрическое пространство Z_ω размерности $\dim Z_\omega \leq n$.

<u>Предложение 4.</u> Пусть пространство X гомеоморфно пределу такого жесткого спектра $\{X_\alpha, \mathcal{K}_\alpha, \pi_\beta^\alpha, \alpha, \beta \in A\}$, что пространство X_α метризуемо и $\dim X_\alpha \leq n$ для всякого $\alpha \in A$. Тогда $\dim X \leq n$.

<u>Доказательство.</u> Покажем, что для произвольного конечного открытого покрытия ω пространства X существует ω-отображение пространства X на метрическое пространство Z_ω размерности $\dim Z_\omega \leq n$. Пусть π_α - предельные проекции и пусть $\mathcal{B}$ - стандартная база в X, состоящая из множеств вида $U = \pi_\alpha^{-1}(O_\alpha)$, где O_α открыто в X_α. Пусть теперь $\mathcal{U}$ - максимальное подсемейство базы $\mathcal{B}$, вписан-

ное в покрытие ω. Семейство $\mathcal{H} = \pi_\alpha^{-1}(\mathcal{H}_\alpha), \alpha \in A$ является σ-дискретной сетью пространства X. Пусть $\mathcal{F}$ - максимальное подсемейство $\mathcal{H}$, вписанное в $\mathcal{U}$. Нетрудно заметить, что $\mathcal{U}$ будет базой, а $\mathcal{F}$ - σ-дискретной сетью в пространстве X. Поскольку система $\mathcal{F}$ - σ-дискретна, то для каждого $F \in \mathcal{F}$ можно зафиксировать открытое множество $O(F) \in \mathcal{U}$ и элемент $\alpha(F) \in A$ таким образом, что $F \subset O(F)$, семейство $\omega' = \{O(F) : F \in \mathcal{F}\}$ - σ-дискретно и $O(F) = \pi_{\alpha(F)}^{-1}(V)$ для некоторого открытого множества V в $X_{\alpha(F)}$ ($F \in \mathcal{F}$). Применим теперь лемму I, полагая $f_\alpha = \pi_\alpha$ и $A_\omega = \{\alpha(F) : F \in \mathcal{F}\}$. Тогда существует ω-отображение f пространства X на метрическое пространство Z_ω. В силу произвольности покрытия ω отсюда сразу следует, что $\dim X \leq n$

Предложение 5. Предел жесткого спектра из пространств размерности $\dim$ не более n также имеет размерность $\dim$ не более n

Доказательство. Пусть $\{X_\alpha, \mathcal{F}_\alpha, \pi_\beta^\alpha, \alpha, \beta \in A\}$ - данный жесткий спектр и паракомпактное σ-пространство X есть предел этого спектра. Без ограничения общности можно предполагать, что каждый элемент индексного множества A имеет конечное число предшественников (для этого достаточно перейти к множеству конечных подмножеств множества A, имеющих относительно индуцированного из A порядка наибольший элемент). Пусть $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$, где A_k - множество всех элементов из A, имеющих ровно k предшественников. В силу предложения 3 каждое пространство X_α является пределом такого жесткого спектра $\{Y_{(\alpha,\gamma)}, \mathcal{H}_{(\alpha,\gamma)}, p_{(\alpha,\delta)}^{(\alpha,\gamma)}, \gamma, \delta \in C_\alpha\}$ с предельными проекциями $p_{(\alpha,\gamma)}$, что для любых $\alpha \in A$ и $\gamma \in C_\alpha$ $p_{(\alpha,\gamma)}(\mathcal{F}_\alpha) = \mathcal{H}_{(\alpha,\gamma)}$, $\dim Y_{(\alpha,\gamma)} \leq n$, $Y_{(\alpha,\gamma)}$ метризуемо и $C_\alpha = \bigcup\{C_\alpha^k : k = 0, 1, \ldots\}$, где C_α^k - множество всех элементов из C_α, имеющих ровно k предшественников. Пусть $B = \bigcup\{\{\alpha\} \times C_\alpha : \alpha \in A\}$. Частично упорядочим множество B, считая $(\alpha,\gamma) < (\beta,\delta)$, если $\alpha < \beta$, $\gamma \in C_\alpha^k$, $\delta \in C_\beta^l$ и $k < l$. В смысле введенного порядка B является направленным множеством, каждый элемент которого имеет конечное число предшественников. Используя факторизационную теорему Б.А.Пасынкова для метрических пространств по индукции аналогично доказательству предложения 3 можно построить такой жесткий спектр $S=\{X_{(\alpha,\beta)}, \varphi_{(\alpha,\beta)}, \varphi^{(\alpha,\beta)}_{(\gamma,\delta)}, (\alpha,\beta),(\gamma,\delta)\in B\}$, что: I) $\varprojlim S=X$; 2) для каждого $(\alpha,\beta)\in B$ пространство $X_{(\alpha,\beta)}$ метризуемо, $\dim X_{(\alpha,\beta)}\leq n$, $\varphi_{(\alpha,\beta)}(\varphi_\alpha)=\varphi_{(\alpha,\beta)}$, где $\varphi_{(\alpha,\beta)}$ – предельные проекции; 3) для каждого $(\alpha,\beta)\in B$ существует такое уплотнение $\vartheta_{(\alpha,\beta)}: X_\alpha \to X_{(\alpha,\beta)}$, что $\varphi_{(\alpha,\beta)}=\vartheta_{(\alpha,\beta)}\circ\varphi_\alpha$; 4) топология $X_{(\alpha,\beta)}$ сильнее топологии $Y_{(\alpha,\beta)}$ при любом $(\alpha,\beta)\in B$. Таким образом, пространство X является пределом жесткого спектра S из метрических пространств размерности $\dim$ не более n. Поэтому в силу предложения 4 $\dim X\leq n$

Из теоремы I и предложений 3 и 5 непосредственно следует

Теорема 2. Для топологического пространства X следующие условия эквивалентны:

I) X – паракомпактное σ-пространство и $\dim X\leq n$;

2) X гомеоморфно пределу жесткого спектра из пространств размерности $\dim$ не более n ;

3) X гомеоморфно пределу жесткого спектра из метризуемых пространств размерности $\dim$ не более n

Замечание 3. При переходе к пределу в жестком спектре размерность может понижаться. Пусть $Q=\{q_k: k\in N\}$ – множество рациональных чисел, пространство X_k – действительная прямая, у которой точки q_j при $j<k$ изолированы, $\mathcal{H}$ – произвольная σ-дискретная замкнутая сеть в подпространстве иррациональных чисел, φ^i_k – тождественное отображение пространства X_i на X_k Обратная последовательность $\{X_k, \mathcal{H}\cup Q, \varphi^i_k, k,i\in N\}$ является жестким спектром из одномерных пространств, но обратным пределом этой последовательности будет дискретная сумма пространств рациональных и иррациональных чисел, т.е. нульмерное пространство.

Одним из обобщений конечномерных в смысле $\dim$ пространств является понятие S-слабо бесконечномерного, введенное Ю.М.Смирновым [13, с.528] Напомним, что пространство X называется S-слабо бесконечномерным, если для любой счетной (бесконечной) системы дизъюнктных пар замкнутых множеств $\{(A_i,B_i): i\in N\}$ найдутся такие перегородки C_i между A_i и B_i ($i\in N$) и такой номер N, что $\bigcap\{C_i: 1\leq i\leq N\}=\emptyset$

Если пространство X не является S-слабо бесконечномерным, то говорят, что X S-сильно бесконечномерно.

Естественно возникает вопрос о перенесении теоремы 2 на S-слабо бесконечномерные пространства. Следующий пример показывает, что такое перенесение невозможно: предел жесткого спектра из S-слабо бесконечномерных метрических пространств может быть S-сильно бесконечным. Пример 2 показывает также, что аналог теоремы Нагами о сохранении n-мерности при переходе к пределу обратной последовательности из метрических пространств в классе S-слабо бесконечномерных пространств не верен.

Пример 2. Существует обратная последовательность из конечномерных (следовательно, и S-слабо бесконечномерных) сепарабельных метрических пространств, образующая жесткий спектр, предел которой S-сильно бесконечномерен.

Пусть Y - произвольное сепарабельное метрическое пространство размерности $\dim Y = 0$ и мощности континуум. По теореме Хилгерса [5, с.311], для любого натурального числа n существует сепарабельное метрическое пространство Z_n и уплотнение $f_n: Z_n \longrightarrow Y$. Уплотнение f_n является слабым, поскольку Z_n и Y - сепарабельные метрические пространства.

Построим жесткий спектр $\{X_i, \mathfrak{F}_i, \mathfrak{F}_j^i, i, j \in N, j \leq i\}$. Для $n \in N$ пространство X_n определим как дискретную сумму равенством $X_n = \oplus\{H_k^n : k \in N\}$, где $H_k^n = Z_k$ при $k \leq n$ и $H_k^n = Y$ при $k > n$. Легко заметить, что X_n является сепарабельным метрическим пространством. Поскольку X_n является объединением счетного семейства своих открыто-замкнутых подпространств размерности не более n, то $\dim X_n \leq n$. Пространство X_n содержит замкнутое подпространство H_n^n размерности n. Размерности ind, Ind и $\dim$ в сепарабельных метрических пространствах совпадают, поэтому $\dim X_n = \operatorname{ind} X_n = \operatorname{Ind} X_n = n$. Таким образом, при каждом $n \in N$ пространство X_n n-мерно.

В каждом сепарабельном метрическом пространстве Z_n зафиксируем некоторую счетную базу топологии $\mathfrak{B}_n$ и положим $\mathfrak{K}_n = f_n(\mathfrak{B}_n)$. Легко заметить, что семейство $\mathfrak{K}_n$ будет счетной сетью в пространстве Y. Пусть $\mathcal{F}_n^k = \mathcal{B}_k$ при $k < n$ и $\mathcal{F}_n^k = \mathcal{X}_k$ при $k > n$ ($k,n \in N$). Тогда семейство $\mathcal{F}_n^k$ является счетной сетью в подпространстве H_k^n. Определим теперь счетную сеть $\mathcal{F}_n$ в пространстве X_n, положив $\mathcal{F}_n = \cup\{\mathcal{F}_n^k : k \in N\}$. Для каждого $n \in N$ определим спектральную проекцию $\mathcal{F}_n^{n+1} : X_{n+1} \longrightarrow X_n$ равенством

$$\mathcal{F}_n^{n+1}(x) = \begin{cases} Id_{H_k^{n+1}}(x) & \text{при } x \notin H_{n+1}^{n+1} \\ f_{n+1}(x) & \text{при } x \in H_{n+1}^{n+1} \end{cases},$$ где

$Id_{H_k^{n+1}}$ - тождественное отображение пространства H_k^{n+1}. Это определение корректно, так как при $k \neq n+1$ пространства H_k^{n+1} и H_k^n совпадают. Нетрудно заметить, что отображение $\mathcal{F}_n^{n+1}$ является уплотнением. Имеет место также равенство $\mathcal{F}_n^{n+1}(\mathcal{F}_{n+1}) = \mathcal{F}_n$, поскольку при $k \neq n+1$ $\mathcal{F}_n^{n+1}(\mathcal{F}_{n+1}^k) = Id_{H_k^{n+1}}(\mathcal{F}_{n+1}^k) = \mathcal{F}_n^k$ и при $k = n+1$ $\mathcal{F}_n^{n+1}(\mathcal{F}_{n+1}^{n+1}) = f_{n+1}(\mathcal{B}_{n+1}) = \mathcal{X}_{n+1} = \mathcal{F}_n^{n+1}$. Остальные спектральные проекции $\mathcal{F}_l^{n+1}$ ($l < n$) легко определяются из условия транзитивности $\mathcal{F}_l^{n+1} = \mathcal{F}_l^n \circ \mathcal{F}_n^{n+1}$. Таким образом, жесткий спектр $\{X_n, \mathcal{F}_n, \mathcal{F}_l^n, l,n \in N\}$ определен. Нетрудно заметить, что обратным пределом этого спектра будет сепарабельное метрическое пространство, которое равно дискретной сумме $X = \oplus\{Z_n : n \in N\}$. Пространство X S -сильно бесконечномерно как дискретная сумма замкнутых в X множеств ($n \in N$) размерности $\dim Z_n > n$ (см. [13, с.537]).

§ 3. Факторизационная теорема для слабых уплотнений

Теорема 3. Для слабого уплотнения $f : X \longrightarrow Y$ существует паракомпактное σ -пространство Z и слабые уплотнения $g : X \longrightarrow Z$, $h : Z \longrightarrow Y$ такие, что $f = h \circ g$, $\dim Z \leq \dim X$ и $\omega(Z) \leq \omega(Y)$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{X}$ - такая σ -дискретная сеть в пространстве X, что $\mathcal{F} = f(\mathcal{X})$ является σ -дискретной сетью в Y. Пространства X и Y - паракомпакты. В силу предложения 2, пространство Y является пределом такого жесткого спектра $\{Y_\alpha, \mathcal{F}_\alpha, \mathcal{F}_\beta^\alpha, \alpha,\beta \in A\}$, что все пространства Y_α метризуемы, каждый элемент индексного множества A имеет конечное число предшественников $|A| \leq \omega(Y)$ и, если $\mathcal{F}_\alpha$ - предельные проекции, то $\mathcal{F}_\alpha(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$.

Обозначим через A_k множество всех элементов из A, имеющих ровно k предшественников ($k=0,1,2,\dots$) и пусть $B_k=\bigcup_{i=0}^{k} A_i$. Для каждого $\alpha\in A$ положим $f_\alpha=\pi_\alpha\circ f$, тогда $f_\alpha(\mathcal{R})=\mathcal{F}_\alpha$, $f_\beta=\pi_\beta^\alpha\circ f_\alpha$ для любого $\beta<\alpha$.

Построим по индукции жесткий спектр $S=\{Z_\alpha, \mathcal{L}_\alpha, p_\beta^\alpha, \alpha,\beta\in A\}$ и системы уплотнений $\{(g_\alpha: X\to Z_\alpha): \alpha\in A\}$ и $\{(h_\alpha: Z_\alpha\to Y_\alpha): \alpha\in A\}$, удовлетворяющие для каждого $\alpha\in A$ следующим свойствам: I) Z_α – метризуемое пространство; 2) $\dim Z_\alpha\le\dim X$; 3) $w(Z_\alpha)\le\omega(Y)$; 4) $f_\alpha=h_\alpha\circ g_\alpha$; 5) $h_\alpha(\mathcal{L}_\alpha)=\mathcal{F}_\alpha$; 6) $g_\alpha(\mathcal{R})=\mathcal{L}_\alpha$; 7) $g_\beta=p_\beta^\alpha\circ g_\alpha$ для любого $\beta<\alpha$; 8) $p_\beta^\alpha\circ h_\beta=\pi_\beta\circ h_\alpha$ для любого $\beta<\alpha$.

Для каждого $\alpha\in A_0$ пространство Z_α и уплотнения g_α и h_α легко построить, используя факторизационную теорему Б.А.Пасынкова для метрических пространств. Предположим, что уже построены жесткий спектр $S_m=\{Z_\alpha, \mathcal{L}_\alpha, p_\beta^\alpha, \alpha,\beta\in B_m\}$ и системы уплотнений $\{(g_\alpha: X\to Z_\alpha):\alpha\in B_m\}$ и $\{(h_\alpha: Z_\alpha\to Y_\alpha):\alpha\in B_m\}$, удовлетворяющие свойствам I) – 8). Построим жесткий спектр S_{m+1} и соответствующие уплотнения g_α и h_α, $\alpha\in A_{m+1}$.

Пусть $\alpha\in A_{m+1}$ и пусть $\tilde f_\alpha: X\to Y_\alpha\times\prod\{Z_\beta:\beta<\alpha, \beta\in A_m\}$, где $\tilde f_\alpha=f_\alpha\Delta(\Delta\{g_\beta:\beta<\alpha, \beta\in A_m\}$. Тогда по факторизационной теореме Б.А.Пасынкова для метрических пространств существует метрическое пространство Z_α и уплотнения $\tilde h_\alpha: Z_\alpha\to Y_\alpha\times\prod\{Z_\beta:\beta<\alpha, \beta\in A_m\}$ и $g_\alpha: X\to Z_\alpha$ такие, что $\tilde f_\alpha=\tilde h_\alpha\circ g_\alpha$, $\dim Z_\alpha\le\dim X$ и $\omega(Z_\alpha)\le$ $\le\omega(Y_\alpha\times\prod\{Z_\beta:\beta<\alpha, \beta\in A_m\})\le\omega(Y)$. Положим h_α равным композиции отображения $\tilde h_\alpha$ с проекцией множества $\tilde h_\alpha(Z_\alpha)$ на Y_α в произведении $Y_\alpha\times\prod\{Z_\beta:\beta<\alpha, \beta\in A_m\}$. Тогда имеем $f_\alpha=h_\alpha\circ g_\alpha$. Пусть $\mathcal{L}_\alpha=g_\alpha(\mathcal{R})$. Нетрудно заметить, что семейство $\mathcal{L}_\alpha$ будет σ-дискретной сетью в пространстве Z_α. Если $\beta<\alpha$ и $\beta\in A_m$, то в качестве p_β^α возьмем композицию уплотнения $\tilde h_\alpha$ с проекцией множества $\tilde h_\alpha(Z_\alpha)$ на координату Z_β в произведении $Y_\alpha\times\prod\{Z_\beta:\beta<\alpha,$ $\beta\in A_m\}$. Остальные проекции p_β^α легко достраиваются, исходя из условия транзитивности. Нетрудно заметить, что $h_\alpha(\mathcal{L}_\alpha)=\mathcal{F}_\alpha$, $g_\alpha(\mathcal{R})=\mathcal{L}_\alpha$ и $p_\beta^\alpha(\mathcal{L}_\alpha)=\mathcal{L}_\beta$ для любого $\beta < \alpha$. Свойства 7) и 8) также проверяются непосредственно.

Проделав такую конструкцию для каждого элемента $\alpha \in A_{m+1}$, построим жесткий спектр S_{m+1}. Продолжая индукцию по всем $m \in N$, получим жесткие спектры $\{S_m : m \in N\}$, удовлетворяющие свойствам I) – 8) и такие, что $S_m \subset S_{m+1}$. Тогда жесткий спектр $S = \cup\{S_m : m \in N\}$ будет также удовлетворять свойствам I) – 8).

Определим пространство Z как обратный предел жесткого спектра S. Пусть $p_\alpha : Z \longrightarrow Z_\alpha$ – предельная проекция $\alpha \in A$. По теореме 2 пространство Z будет паракомпактным σ-пространством размерности $\dim Z \le \dim X$. В силу свойства 3) и неравенства $|A| \le \omega(Y)$ имеем $\omega(Z) \le |A| \cdot \omega(Y) \le \omega(Y)$. Система $\mathcal{L} = \mathfrak{I}_\alpha^{-1}(\mathcal{L}_\alpha)$ $(\alpha \in A)$ будет σ-дискретной сетью в Z. Из свойства 7) и определения предела обратного спектра следует, что существует единственное уплотнение $g : X \longrightarrow Z$, порожденное системой $\{(g_\alpha : X \longrightarrow Z_\alpha) : \alpha \in A\}$ и такое, что $g_\alpha = p_\alpha \circ g$ для любого $\alpha \in A$. В силу свойства 8) система $\{(h_\alpha : Z_\alpha \longrightarrow Y_\alpha) : \alpha \in A\}$ является спектральным морфизмом в категории жестких спектров S в спектр $\{Y_\alpha, \mathcal{F}_\alpha, \mathfrak{I}_\beta^\alpha, \alpha, \beta \in A\}$. Поэтому существует такое уплотнение $h : Z \to Y$, что $\mathfrak{I}_\alpha \circ h = h_\alpha \circ p_\alpha$ для любого $\alpha \in A$, а следовательно,
$h^{-1}(\mathcal{F}) = h^{-1}(\mathfrak{I}_\alpha^{-1}(\mathcal{F}_\alpha)) = (\mathfrak{I}_\alpha \circ h)^{-1}(\mathcal{F}_\alpha) = (h_\alpha \circ p_\alpha)^{-1}(\mathcal{F}_\alpha) = p_\alpha^{-1}(h_\alpha^{-1}(\mathcal{F}_\alpha)) = p_\alpha^{-1}(\mathcal{L}_\alpha) = \mathcal{L}$. Аналогично $g^{-1}(\mathcal{L}) = \mathcal{H}$. Таким образом, уплотнения h, g являются слабыми и $g(\mathcal{H}) = \mathcal{L}$ и $h(\mathcal{L}) = \mathcal{F}$. Непосредственно проверяется, что $f = h \circ g$

Литература

1. Архангельский А.В. Об одном классе пространств, содержащем все метрические и все локальные бикомпактные пространства. – Матем.сборник. 1965, т.67, № I, с.55–85.
2. Ceder J.G. Some generalizations of metric spaces. – Pacific J. Math., 1961, vol. 11, N 1, p. 105–126.
3. Okuyama A. Some generalizations of metric spaces, their metrization theorems and product spaces. – Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A9, 1967, p. 236–254.

4. Архангельский А.В. Классы топологических групп. - УМН, 1981, т.36, № 3, с.127-146.
5. Куратовский К. Топология. - М., 1966, т.I.
6. Клюшин В.Л. О совершенных отображениях паракомпактных пространств. - ДАН СССР, 1964, т.159, № 4, с.734-737.
7. Пасынков Б.А. О размерности произведений нормальных пространств. - ДАН СССР, 1973, т.209, № 4, с.792-794.
8. Bregman J.H. Paracompact σ-spaces: inverse systems and dimension. - In: Colloquium on topology, Eger, Hungary, 1983. p. 13.
9. Брегман Ю.Х. Спектральное представление некоторых классов паракомпактов, близких к метризуемым. - В кн.: Тезисы докладов конференции "Методы алгебры и анализа". Тарту, 1983, с.25.
10. Брегман Ю.Х. Паракомпактные σ-пространства: спектральное представление и размерность. - В кн.: VIII Школа по теории операторов в функциональных пространствах. Рига, 1983, ч.I, с.30-31.
11. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. - М., 1974.
12. Engelking R. General topology. - Warszawa, PWN, 1977.
13. Александров П.С., Пасынков Б.А. Введение в теорию размерности. - М., 1973.
14. Федорчук В.В. Произведения и спектры топологических пространств. - М., 1979, ч.I.
15. Пасынков Б.А. Факторизационные теоремы в теории размерности. - УМН, 1981, т.36, № 3, с.147-175.

Поступила 10 сентября 1984 года

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1985.

УДК 513.83

О ДОМИНИРУЮЩИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ И УЗКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

А.И.Векслер
Ленинградский институт текстильной и легкой промышленности им.С.М.Кирова

§ 1. Введение

Определение 1. Последовательность $\{F_n\}$ замкнутых нигде не плотных (з.н.н.п.) множеств данного пространства X называется доминирующей последовательностью (ДП) (на X), если ее объединение $\bigcup F_n$ плотно в X и для любой другой последовательности $\{F'_n\}$ з.н.н.п. множеств такой, что $F'_n \cap F_n = \emptyset$ ($n \in \omega$) обязательно $\bigcup F'_n$ н.н.п. в X. Объединение элементов какой-либо ДП называется стержнем. Топологическое пространство, имеющее ДП, называется узким.

Определение 2. Стержень M, такой что любая последовательность з.н.н.п. множеств $F_n \uparrow M$ (это значит, что $F_n \subset F_{n+1}$, $\bigcup F_n = M$) является ДП называется твердым. Стержень M, для которого существуют последовательности $\{F_n\}$ и $\{F'_n\}$ з.н.н.п. множеств такие, что $F_n \uparrow M$, $F'_n \cap F_n = \emptyset$ ($n \in \omega$), но $\bigcup F'_n$ плотно в X, называется мягким.

Указанные понятия были введены и изучались в [1] (см. также [2], [3]). Хотя узкие пространства встречаются нечасто и "хорошие" пространства не являются узкими - существуют нетривиальные примеры узких пространств, например, узкое P-пространство, узкий линейно упорядоченный бикомпакт, узкий экстремально несвязный бикомпакт с условием Суслина, узкое однородное пространство, узкое нормальное счетное пространство (впервые такое пространство было построено с помощью CH В.И.Малыхиным [3]; в дальнейшем П.Симон построил более простой пример такого пространства, не требующий никаких теоретико-множественных предположений). Из известных пространств узким является бикомпактное пространство $u\omega_1$ всех равномерных ультрафильтров в ω_1.

Здесь продолжается изучение ДП. Сначала договоримся об обозначениях. Буква Φ (с индексами) будет употребляться для обозначения замкнутого множества, буква F – для обозначения з.н.н.п. множества, буква G – для обозначения открытого множества. Запись „$A \,\mathrm{d}\, B$" будет употребляться вместо более длинной „$A \cap B = \emptyset$", а запись „$\cup E_n$" – вместо „$\cup\{E_n : n \in \omega\}$". X всюду будет обозначать топологическое пространство, а замыкание $E \subset X$ будет обозначаться $cl\,E$ или $cl_X E$. В остальном будет использована терминология монографий [4] и [5]

В § 2 устанавливаются некоторые характеристические свойства ДП с помощью тех или иных последовательностей замкнутых или з.н.н.п. множеств. В частности, доказывается совпадение классов доминирующих и вполне неправильных последовательностей ([6] , [7]) в не слишком плохих пространствах (теор.2 и предл.3). В теореме 8 устанавливается, что свойство доминируемости для монотонно возрастающей $\{F_n\}$ (напомним, что любая ДП мажорируется возрастающей ДП) равносильно отсутствию мажорирующей возрастающей последовательности з.н.н.п. множеств, след которой на каком-либо к.з. множестве разложим (по определению $\{\Phi_n\}$ разложима, если все множества $\Phi_{n+1} \setminus \Phi_n$ замкнуты). В § 3 даны некоторые способы построения узких пространств, а затем приведены абстрактные характеризации твердых стержней. Приведена также одна конструкция построения узких пространств, с помощью которой, в частности, строится узкое однородное пространство.

§ 2 <u>Доминирующие и вполне неправильные последовательности</u>

<u>Определение 3.</u> Последовательность $\{F_n\}$ з.н.н.п. множеств называется вполне неправильной (ВНП), если для любых замкнутых $\Phi_n \,\mathrm{d}\, F_n$ и для любого открытого $G \neq \emptyset$ существуют непустое (открытое) $G' \subset G$ и $p \in \omega$ такие, что $\cup\{\Phi_n : n > p\} \,\mathrm{d}\, G'$.

Близкое понятие было введено для случая экстремально несвязного бикомпакта в [6] и для произвольного бикомпакта в [7] . Нам будет удобно пользоваться другим характеристическим свойством ВНП. Будем называть последовательность

$\{E_n\}$ произвольных множеств <u>существенно плотной на данном</u> $A \subset X$, если $\bigcup\{E_n \cap A : n > p\}$ плотно на A при любом $p \in \omega$. Последовательность, не являющаяся существенно плотной ни на каком открытом $G \neq \phi$ называется <u>нигде не существенно плотной</u> (н.н.с.п.). Следующее утверждение очевидно.

<u>Предложение I.</u> Последовательность $\{F_n\}$ з.н.н.п. множеств является ВНП тогда и только тогда, когда всякая последовательность $\{\Phi_n\}$ (замкнутых множеств), где $\Phi_n \subset F_n$, является н.н.с.п.

Оказывается, ВНП имеют свойства, аналогичные свойствам ДП. Как показывает следующая теорема, это обстоятельство отнюдь не является случайным.

<u>Теорема 2.</u> Для того, чтобы последовательность $\{F_n\}$ з.н.н.п. множеств была ДП необходимо и достаточно, чтобы она была ВНП с плотным объединением.

<u>Доказательство.</u> Достаточность сразу следует из того, что произвольная последовательность $\{F'_n\}$ з.н.н.п. множеств существенно плотна на G тогда и только тогда, когда $\bigcup F'_n$ плотно на G

Необходимость. Пусть $\{F_n\}$ - ДП. Допустим, что она не является ВНП. Тогда существуют замкнутые $\Phi_n \subset F_n$ такие, что $\{\Phi_n\}$ существенно плотна на некотором $G \neq \phi$, а значит, и на канонически замкнутом (к.з.) $W = \mathrm{cl}\, G$ Так как след ДП на к.з. множестве есть ДП [I], то можно, не умаляя общности, считать, что $W = X$.

Положим $G_n = \mathrm{int}\, \Phi_n$ Так как $\Phi_n \setminus G_n$ - з.н.н.п., а $\{F_n\}$ - ДП, то $\bigcup(\Phi_n \setminus G_n)$ тоже з.н.н.п. Значит, $\{G_n\}$ существенно плотна на X.

Пусть $F'_n = \Phi_n \setminus [(G_{n+1} \cup G_{n+2} \cup \ldots) \setminus (F_1 \cup \ldots \cup F_n)]$
Тогда F'_n з.н.н.п. и $F'_n \subset F_n$ Значит $\bigcup F'_n$ н.н.п. Покажем, что это невозможно. Положим $E = (\bigcup F_n) \cap (\bigcup G_n)$
Так как $\bigcup G_n$ открыто и плотно, то E плотно в X. Проверим, что $\bigcup F'_n \supset E$ Возьмем $x \in E$ Мыслимы две возможности. а) x содержится в конечном числе множеств G_n Пусть G_k последнее из них. Тогда $x \leq F'_k$ б) x содержится в бесконечном числе G_n Так как $F_n \subset G_n$, то найдутся $l < k$ такие, что $x \in F_l$ и $x \in G_k \subset \Phi_k$ Отсюда $x \in F'_k$.

Итак, $E \subset \bigcup F'_n$, т.е. $\bigcup F'_n$ плотно в X, вопреки ранее установленному. Противоречие завершает доказательство.

В связи с теоремой 2, определенный интерес представляет следующее, нехитрое утверждение.

Предложение 3. Пусть в пространстве X всякое непустое открытое G содержит F_σ -множество A, не являющееся н.н.п. Тогда всякая ВНП $\{F_n\}$ в X имеет плотное объединение (и, следовательно, классы ДП и ВНП в X совпадают).

Доказательство. Допустим, что $\bigcup F_n \,\mathrm{d}\, G \neq \phi$. Пусть A - F_σ -множество из условия предложения, $A = \bigcup \Phi'_n$. Существует непустое $G' \subset G$ такое, что A плотно на G'. Возможны два варианта.

а) Существует Φ'_{n_0}, не являющееся н.н.п. Тогда, полагая $\Phi_n = \Phi'_{n_0}$ $(n \in \omega)$, получаем последовательность $\{\Phi_n\}$, существенно плотную на $int\, \Phi'_{n_0} \neq \phi$. Это противоречит предложению I.

б) Все Φ'_n н.н.п. Но тогда $\Phi'_n \,\mathrm{d}\, F_n$, а $\{\Phi'_n\}$ существенно плотна на G'. Это противоречит тому, что $\{F_n\}$ - ВНП.

Итак, действительно, в пространствах достаточно общего вида классы ДП и ВНП совпадают. В произвольных пространствах это не так.

Установим сейчас по одной характеризации монотонно возрастающих ДП и ВНП.

Предложение 4. А) Для того, чтобы монотонно возрастающая последовательность $\{F_n\}$ была ВНП, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие: если $\{\Phi_n\}$ существенно плотна на некотором $G \neq \phi$, то множества $\Gamma_n = \{m : \Phi_m \cap F_n \neq \phi\}$ бесконечны, начиная с некоторого n_0.

Б) Для того, чтобы монотонно возрастающая $\{F_n\}$ с плотным объединением была ДП, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие: если $\bigcup F'_n$ плотно на $G \neq \phi$, то множества $\Delta_n = \{m : F'_m \cap F_n \neq \phi\}$ бесконечны, начиная с некоторого n_0.

Доказательство. А) Прежде всего заметим, что множества Γ_n монотонно возрастают.

Необходимость. Пусть $\{F_n\}$ - ВНП, но все множества конечны. Можно считать, что $F_1 = \phi$. Положим $\Phi'_n =$ $= \bigcup\{\Phi_m : \Phi_m \cap F_n = \phi,\ \Phi_m \cap F_{n+1} \neq \phi\}$ $(n \in \omega)$. Очевидно, объединения в последнем равенстве берутся по конечным множествам индексов m, т.е. все Φ'_n замкнуты. По построению $\Phi'_n \,d\, F_n$. В силу предложения I, $\{\Phi_n\}$ н.н.с.п. в X. Далее положим $\omega^{(0)} = \omega \setminus \bigcup \Gamma_n$. Имеем $\bigcup\{\Phi_n : n \in \omega^{(0)}\} d \bigcup\{F_n : n \in \omega\}$. Потому и $\{\Phi_n (n \in \omega^{(0)})\}$ н.н.с.п. в X. Отсюда $L = \{\Phi'_n\} \cup \{\Phi_n (n \in \omega^{(0)})\}$ тоже н.н.с.п. в X. Но любой член исходной последовательности $\{\Phi_n\}$ мажорируется каким-нибудь членом из L. Следовательно, $\{\Phi_n\}$ не может быть существенно плотной на $G \neq \phi$.

Достаточность. Пусть $\Phi_n \,d\, F_n$. Тогда $F_n \,d\, (\Phi_n \cup \Phi_{n+1} \cup \ldots)$. Значит Γ_n конечно. По условию это означает, что $\{\Phi_n\}$ н.н.с.п. Поэтому $\{F_n\}$ – ВНП.

Б) Очевидно, условие, рассматриваемое в Б), слабее соответствующего условия из А). Отсюда, необходимость в Б) вытекает из необходимости в А) (и теоремы 2). Достаточность же в Б) доказывается таким же рассуждением, как и достаточность в А).

Накладывая не очень обременительные условия на X, можно получить и другие характеризации ДП. Напомним, что <u>нигде не плотно нормальным</u> (<u>н.н.п. нормальным</u>) называется такое регулярное пространство, в котором любые два з.н.н.п. непересекающихся множества можно отделить открытыми.

<u>Предложение 5.</u> Пусть X – н.н.п. нормальное пространство. Для того, чтобы последовательность $\{F_n\}$ з.н.н.п. множеств была ДП необходимо и достаточно, чтобы всякая последовательность к.з.множеств $\{W_n\}$, где $W_n \,d\, F_n$, была н.н.с.п.

<u>Доказательство.</u> Необходимость вытекает из предложения I и теоремы 2.

Достаточность. Если $\{F_n\}$ не есть ДП, то найдутся з.н.н.п. $F'_n \,d\, F_n$ такие, что $\bigcup F'_n$ плотно на некотором $G \neq \phi$ и, следовательно, плотно на к.з. $W = \mathrm{cl}\, G$. Так как, очевидно, W тоже является н.н.п. нормальным, то можно считать, не умаляя общности, что $W = X$. Таким образом, можно считать, что $\bigcup F'_n$ плотно на X. Пользуясь н.н.п. нормальностью X подберем к.з. $W_n \supset F'_n$, $W_n d F_n$. Очевидно, $\{W_n\}$ существенно плотна на X. Это завершает доказательство.

Замечания. I) Именно условие, рассматриваемое в предложении 5, было использовано в [7] для определения ВНП в бикомпакте.

2) Если $\{F_n\}$ - ДП в пространстве с π-базой к.з. множеств и $\bigcup(F'_n \cap F_n)$ - н.н.п., то и $\bigcup F'_n$ - н.н.п. ([I] , теор.5.2)). Отсюда следует, что предложение 5 остается в силе для X, отличающегося от н.н.п. нормального пространства на н.н.п. множество (например, оно верно для локального бикомпакта X). Аналогичное замечание можно сделать и для последующих результатов работы.

Предложение 6. Пусть X - н.н.п. нормальное пространство, $\{F_n\}$ - монотонно возрастающая последовательность з.н.н.п. множеств. Для того, чтобы $\{F_n\}$ была ДП необходимо и достаточно, чтобы не существовало к.з. множества $W \neq \varphi$ и такой $\{\bar{F}_n\}$, мажорирующей $\{F_n\}$, для которых
$cl(\bar{F}_{n+1} \setminus \bar{F}_n) \cap W d F_n$ $(n \in \omega)$.

Доказательство. Необходимость. Если $\{F_n\}$ - ДП, то полагая $F'_n = cl(\bar{F}_{n+1} \setminus \bar{F}_n) \cap W$, имеем $F'_n d F_n$, но $\bigcup F'_n \supset (\bigcup \bar{F}_n) \cap W$, т.е. плотно на W.

Достаточность. Пусть $\{F_n\}$ не есть ДП. В силу предложения 5 найдутся к.з. $W_n d F_n$ и к.з. $W \neq \varphi$ такие, что $\{W_n\}$ существенно плотна на W. Так как множества $W'_n = cl\, int(W_n \cap W)$ - к.з. подмножества в W (в относительной топологии на W), то так же, как и при доказательстве достаточности в предложении 5, можно считать, что $W = X$.

Пусть $V_n = cl(X \setminus W_n)$. Тогда V_n - к.з., $V_n \cup W_n = X$, $V_n \cap W_n = Fr\, W_n$. Для любого $n \in \omega$ рассмотрим множество $H_n = \bigcap\{V_l : l \geq n\}$. H_n замкнуто и является дополнением к $E = \bigcup\{int\, W_l \;\; l \geq n\}$ Так как W_l - к.з., то из плотности $\bigcup\{W_l : l \geq n\}$ вытекает плотность множества E. Значит, H_n - н.н.п. Положим
$\bar{F}_n = F_n \cup (F_{n+1} \cap V_n) \cup (F_{n+2} \cap V_n \cap V_{n+1}) \cup \ldots \cup (F_k \cap V_n \cap \ldots \cap V_{k-1}) \cup \ldots \cup H_n$
и покажем, что множества $\bar{F}_n$ - искомые.

Пусть $x \bar{\in} \bar{F}_n$. Тогда $x \bar{\in} H_n$. Поэтому $x \bar{\in} V_k$ при некотором $k \geq n$. Отсюда $x \in X \setminus (V_n \cap \ldots \cap V_k) = G$

Но G пересекается лишь с конечным числом слагаемых из правой части в определении F_n. Вычтя их из G, мы получим открытое множество, содержащее x и не пересекающееся с F_n. Итак, F_n замкнуто.

Так как н.н.п. $H_n = \cap\{V_n \cap \ldots \cap V_l \quad l \geq n\}$, то в любом открытом $G' \neq \varnothing$ найдется $x' \notin V_n \cap \ldots \cap V_{l_0}$. Но $G' \setminus (V_n \cap \ldots \cap V_{l_0})$ открыто. Отсюда F_n - н.н.п. Наконец, по построению $F_n = F_n \cap V_n$. Поэтому $F_{n+1} \setminus F_n \subset X \setminus V_n = \operatorname{int} W_n$, т.е. $cl(F_{n+1} \setminus F_n) \subset W_n$. Значит, $cl(F_{n+1} \setminus F_n) d F_n$.
Предложение доказано.

Теперь перейдем к случаю строго нульмерного в смысле [8] пространства. Для этого случая два предыдущих предложения могут быть усилены в части достаточности. Будем говорить, что монотонно возрастающая $\{\Phi_n\}$ <u>разложима</u>, если все $\Phi_{n+1} \setminus \Phi_n$ замкнуты.

<u>Теорема 7.</u> Пусть X - строго нульмерное нормальное пространство. Справедливы следующие утверждения А) и Б).

А) Для того, чтобы $\{F_n\}$ была ДП необходимо и достаточно, чтобы всякая последовательность $\{X_n\}$ открыто-замкнутых (о.з.) множеств, такая, что $X_n d F_n$, была н.н.с.п.

Б) Для того, чтобы монотонно возрастающая $\{F_n\}$ была ДП необходимо и достаточно, чтобы не существовало о.з. множества X_0 и такой $\{F_n\}$, мажорирующей $\{F_n\}$, след которой на X_0 - разложимая последовательность.

<u>Доказательство.</u> А) вытекает из предложения 5 и того факта, что если к.з. $W_n d F_n$, то в силу нормальности и строгой нульмерности X, существует о.з. $X_n \supset W_n$, $X_n d F_n$

Б) Необходимость вытекает из предложения 6.

Достаточность. Пусть о.з. $X_n d F_n$, X_0 - о.з. и $\{X_n\}$ существенно плотна на X_0 Не умаляя общности, можно считать, что $X = X_0$.

Положим $A_n = X_n \cup X_{n+1} \cup \ldots$ Тогда A_n - плотное открытое F_σ -множество и $A_n d F_n$. Пусть $\bar{F}_n = X \setminus A_n$ Очевидно, $F_n \subset \bar{F}_n$, $\bar{F}_n$ - з.н.н.п. и $\{\bar{F}_n\}$ монотонно возрастает. Кроме того, $\bar{F}_{n+1} \setminus \bar{F}_n = X \setminus A_{n+1}$ - з.н.н.п. G_δ-множество.

<u>Замечания.</u> I) Отметим, что множества $\bar{F}_{n+1} \setminus \bar{F}_n$, построенные при доказательстве Б), являются Θ -множествами,

(т.е. н.н.п. нуль-множествами).

2) Очевидно, А) не переносится в части достаточности на случай пространства, не являющегося строго нульмерным. А.В.Колдунов доказал то же самое для Б), построив на квадрате монотонно возрастающую $\{F_n\}$, удовлетворяющую условию из Б) (напомним, что в метрическом пространстве не существует ДП [3]).

§ 3. Узкие пространства и стержни

Сейчас мы укажем некоторые способы построения новых узких пространств, исходя из данных.

Теорема 8. Пусть X - узкое пространство с ДП $\{F_n\}$. Имеют место следующие утверждения А) - В).

А) Если Y - бикомпакт, то $Z = X \times Y$ - узкое пространство с ДП $\{F_n \times Y\}$.

Б) Если X плотное подпространство в н.н.п. нормальном Y, то Y узкое пространство с ДП $\{cl_Y F_n\}$

В) Любая бикомпактификация узкого пространства - узкое пространство.

Доказательство. А) Положим $\tilde F_n = F_n \times Y \subset Z$. Пусть $\Phi_n \, d \, \tilde F_n$. Возьмем $G = G_1 \times G_2 \neq \phi$. Ввиду бикомпактности Y операция P_X замкнута. Поэтому множество $\Phi_n' = P_X \Phi_n$ замкнуто. Так как $\tilde F_n = F_n \times Y$ то $\Phi_n' \, d \, F_n$ Так как $\{F_n\}$ - ВНП, то существует непустое $G_1' \subset G_1$ и $p \in \omega$ такие, что $\cup\{\Phi_n' : n \geq p\} \, d \, G_1'$, Но тогда $\cup\{\Phi_n : n \geq p\} \, d \, (G_1' \times G_2)$. Значит, $\{\tilde F_n\}$ - ВНП в Z Так как $\cup \tilde F_n$ плотно в Z , то $\{\tilde F_n\}$ - ДП.

Б) Положим $\tilde F_n = cl_Y F_n$. Если $\{\tilde F_n\}$ не ДП в Y, то, воспользовавшись теоремой 2 и предложением 5, найдем к.з. $W_n \, d \, \tilde F_n$ и $G \neq \phi$ такие, что $\{W_n\}$ существенно плотна на G . а значит, и на к.з. $W = cl\, G$. Так как множества $cl_W \, int_W (W_n \cap W)$ - к.з. подмножества в W в относительной топологии, то так же, как и в предыдущих доказательствах, достаточно ограничиться случаем $W = Y$

При любом $p \in \omega$ $\cup\{W_n : n \geq p\}$ плотно в Y. Так как W_n - .з. в Y, а X плотно в Y, то $\cup\{W_n \cap X : n \geq p\}$ плотно в X. Но это противоречит тому, что $(W_n \cap X) \, d \, F_n$, а $\{F_n\}$ - ДП.

В) есть очевидное следствие Б).

Замечания. I) В силу Б) всякий стержень $M \subset X$ может быть погружен в некоторый стержень $\tilde{M} = \bigcup cl_Y F_n$ в У. Но варьируя ДП, $F_n \uparrow M$, можно тем самым варьировать и свойства $\tilde{M}$. Можно, например, построить $M \subset X$, бикомпакт У и такие $F'_n \uparrow M$, $F''_n \uparrow M$, что $\bigcup cl_Y F'_n$ - твердый стержень, а $\bigcup cl_Y F''_n$ - мягкий стержень в У.

2) Мы не знаем, является ли стержень $\bigcup (F_n \times Y)$ условиях А) твердым, если стержень $\bigcup F_n$ твердый. Отметим в связи с этим, что, к примеру, если Х - узкий бикомпакт с твердым стержнем $\bigcup F_n$, а У -пространство рациональных чисел, то $\bigcup (F_n \times Y)$ - мягкий стержень в $Z = X \times Y$ и, вообще, все стержни в Z мягкие.

Пример I. Пусть У - бесконечный бикомпакт, Y^ω декартово произведение ω экземпляров У в ящичной топологии (т.е. открытая база в Y^ω есть совокупность всех множеств вида $G_1 \times \ldots \times G_n \times \ldots$). Зафиксируем неизолированную точку $y_0 \in Y$ и пусть $X = \{ x = \{ x(n)\ (n \in \omega)\} \in Y^\omega :$ $card \{ n \quad x(n) \neq y_0 \} < \omega \}$

Можно показать, что У - узкое пространство с ДП $\{F_n\}$ бикомпактных множеств, где $F_n = \{ x \in X : x(k) = y_0$ при $k > n\}$, $X = \bigcup F_n$ стержень в себе и в любой своей бикомпактификации. Если У - обычная окружность, то в качестве Х получаем узкое однородное пространство. Если $Y = \{ 1/n\ (n \in \omega)\} \cup \{0\}$ в обычной топологии и $y_0 = 0$, то в качестве Х получаем счетное узкое нормальное пространство П.Симона.

В заключение приведем абстрактные топологические характеризации твердого стержня в бикомпакте. Напомним, что замкнутое множество Φ называется P'-множеством, если $\Phi \subset cl\, int\, A$ для любого G_δ-множест а $A \supset \Phi$.

Лемма 9. Пусть Φ замкнуто в Х, H плотно в Х и $\Phi \subset H$. Если Φ - P'-множество в Х, то Φ - P'-подмножество в H. Обратно, если Х нормально и Φ - P'-подмножество в H, то Φ - P'-множество в Х.

Теорема IO. Для топологического пространства H равносильны следующие утверждения: I) H - σ-бикомпактное пространство I категории в себе и объединение всех бикомпактных P'-множеств плотно в H ; 2) H гомеоморфно твердому стержню в некотором бикомпакте X ; 3) H является твердым стержнем в любой своей бикомпактификации.

<u>Доказательство.</u> 3) $\Rightarrow$ 2). Тривиально.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть H - стержень в бикомпакте X. Тогда $H = \cup F_n$, где F_n - в.н.н.п. в X. Значит H - σ-бикомпактен и имеет I категорию в себе. По теореме 12 из [1] $\cup P'(F_n)$ плотно в H (здесь $P'(F_n)$ - наибольшее P' - множество, содержащееся в F_n). Но в силу леммы 9, $P'(F_n)$ - P'-подмножество в H .

1) $\Rightarrow$ 3). Пусть H погружено в качестве плотного подмножества в бикомпакт X. В силу 1) H есть F_σ-множество I категории в X. Всякое бикомпактное P'-подмножество $F \subset H$ (все они н.н.п.) является P'-множеством в X в силу леммы 9. Таким образом, по 1) совокупность всех P'-множеств из X, содержащихся в H , плотна в H . В силу другой части теоремы 12 из [1], H - твердый стержень.

Чтобы построить пространство H такое, как в теореме 10, достаточно в примере I взять в качестве y_0 любую недискретную P'-точку (т.е. одноточечное P'-множество).

Приведем без доказательства еще один результат.

<u>Теорема 11.</u> Пусть X - бикомпакт с ДП $F_n \uparrow M$. Для того, чтобы стержень M был твердым, необходимо и достаточно, чтобы $\{F_n \times Q\}$ была ДП в пространстве $X \times Q$.

Литература

1. Векслер А.И. Доминирующие последовательности и узкие топологические пространства. - В кн.: Топологические пространства и их отображения. Рига, 1981, с.159-174.
2. Векслер А.И. Доминирующие последовательности и узкие пространства. - УМН, 1982, т. 37, № 1, с. 143-144.
3. Малыхин В.И. Об узких пространствах. - В кн.: Топологические пространства и их отображения. Рига, 1983, с. 70-76.

4. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. - М., 1977.
5. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. - М., 1974.
6. Диканова З.Т. Об условиях ограниченности множеств в расширенном К-пространстве. - Сиб. мат. журнал, 1968, т. 9, № 4, с. 804-815.
7. Векслер А.И., Колдунов А.В. Решение одной топологической задачи. - В кн.: IУ Тираспольский симпозиум по общей топологии и ее приложениям. Кишинев, 1979, с.22-23.
8. Engelking R. General Topology.- Warszawa, 1977.

Поступила 18 января 198' года

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1985.

УДК 513.83

О ПРОСТРАНСТВАХ КОМПАКТНЫХ ПОДМНОЖЕСТВ НУЛЬ-МЕРНЫХ ПОЛЬСКИХ ПРОСТРАНСТВ

А.Н.Выборнов
МГУ им.М.В.Ломоносова

Напомним, что польским называется метризуемое полной метрикой сепарабельное топологическое пространство. Класс всех непустых нульмерных польских пространств мы будем обозначать через $\mathfrak{N}$.

Обозначения. 1) Пусть X - топологическое пространство, $A \subset X$, тогда $[A]$ - замыкание множества A в пространстве X 2) $IS(X)$ - множество изолированных точек топологического пространства X , $LC(X)$ - множество точек локальной бикомпактности пространства X , $NLC(X)=X\setminus LC(X)$. 3) N - натуральный ряд (счетное дискретное пространство), C - канторов дисконтинуум, P - пространство иррациональных точек вещественной прямой R , $S=C\times N$ Известно, что N , C , P , $S\in\mathfrak{N}$ и что C и P можно полностью определить некоторыми наборами их топологических свойств, а именно:

Предложение 1. 1) Если $X\in\mathfrak{N}$, X - бикомпакт и $IS(X)=\phi$, то $X\approx C$. 2) Если $X\in\mathfrak{N}$ и $LC(X)=\phi$, то $X\approx P$. Нетрудно показать также 3) Если $X\in\mathfrak{N}$, $LC(X)=X$, $IS(X)=\phi$ и X - небикомпакт, то $X\approx S$.

Экспонентой топологического пространства X мы будем называть пространство $\exp X$ непустых бикомпактных его подмножеств, наделенное топологией Вьеториса. Пусть $A_1,\ldots,$ A_k - подмножества X , тогда $\langle A_1,\ldots,A_k\rangle=\{\mathfrak{F}\subset X:\ \mathfrak{F}$ - бикомпакт и $\mathfrak{F}\subset\bigcup\{A_i: i=1,\ldots,k\};\ \mathfrak{F}\cap A_j\neq\phi,\ j=1,\ldots,k\}$. Топология Вьеториса - это топология на множестве подбикомпактов X , базой открытых множеств которой служат всевозможные множества вида $\langle \mathcal{U}_1,\ldots,\mathcal{U}_k\rangle$, где все $\mathcal{U}_i$ открыты в X (см. [1] стр.168).

Ниже мы будем часто использовать следующее предложение (см. [I] стр.169).

Предложение 2. Пусть $A_1, \ldots, A_k$ - подмножества топологического пространства X, тогда $[\langle A_1,\ldots,A_k\rangle]_{\exp X} = \langle [A_1],[A_2],\ldots,[A_k]\rangle$.

Если пространство X метризуемо, то на $\exp X$ может быть определена метрика, индуцирующая топологию Вьеториса. Имеется в виду метрика Хаусдорфа: $d_H(F_1,F_2)=\max\{\sup_{x_1\in F_1}\rho(x_1,F_2), \sup_{x_2\in F_2}\rho(x_2,F_1)\}$, где ρ - метрика на X.

Если на множестве непустых бикомпактных подмножеств ввести более слабую топологию с базой вида: $\{\langle \mathcal{U}\rangle$ $\mathcal{U}$ - открыто в $X\}$, то два T_1-пространства будут гомеоморфны тогда и только тогда, когда гомеоморфны их экспоненты с такой топологией (см. [2]). Однако, как впервые показал Пелчинский [3], отвечая на вопрос В.И.Пономарева [2], это неверно для топологии Вьеториса. Таким образом, различные пространства могут иметь одну и ту же экспоненту. Это дает основание предположить возможность полного перечисления экспонент некоторых классов топологических пространств.

Пусть $\mathcal{L}$ - некоторый класс топологических пространств, положим: $\exp\mathcal{L}=\{\exp X : X\in\mathcal{L}\}$. В настоящей работе рассматриваются экспоненты некоторых естественно определяемых подклассов класса $\mathcal{K}$. Каждый из классов будет мощным (мощности континуума или $\aleph_1$), тогда как мощность его экспоненты будет "маленькой" ($\leq \aleph_0$).

I. Обозначим через $\mathcal{K}_1$ - класс не более чем счетных компактов из $\mathcal{K}$, и пусть $\mathcal{K}_1^* = \{X\in\mathcal{K}_1 : X$ - бесконечно$\}$

Теорема I. (Пелчинский [3]). $|\exp\mathcal{K}_1| = \aleph_0$, $|\exp\mathcal{K}_1^*| = 1$

2. Пусть $\mathcal{K}_2$ - класс всех компактов из $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}_2^* = \{X\in\mathcal{K}_2 : IS(X)=\varnothing$ или $|IS(X)|=\aleph_0\}$.

Теорема 2 (Марьянович [4]). $|\exp\mathcal{K}_2| = \aleph_0$, $|\exp\mathcal{K}_2^*| = 1$

3. Пусть $\mathcal{K}_3$ - класс всех локально-компактных $X\in\mathcal{K}$, $\mathcal{K}_3^* = \{X\in\mathcal{K}_3 : IS(X)=\varnothing$ или $|IS(X)|=\aleph_0\}$

Теорема 3 (Выборнов [5]). $|\exp\mathcal{K}_3| = \aleph_0$, $|\exp\mathcal{K}_3^*| = 21$.

4. Пусть $\mathcal{K}_4$ - класс всех таких $X\in\mathcal{K}$, что $[IS(X)] = X$,

$\mathfrak{X}_4^* = \{X \in \mathfrak{X}_4 : X$ - бесконечно $\}$

<u>Теорема 4</u> (Выборнов [6]). $|\exp \mathfrak{X}_4| = \aleph_0$, $|\exp \mathfrak{X}_4^*| = 7$

5. Пусть $\mathfrak{X}_5$ - класс всех разреженных $X \in \mathfrak{X}$.

<u>Теорема 5</u> (Выборнов [6]). $\exp \mathfrak{X}_5 = \exp \mathfrak{X}_4$.

6. Пусть $\mathfrak{X}_6$ - класс всех совершенных $(IS(X) = \phi)$ $X \in \mathfrak{X}$, таких, что $[LC(X)] = X$.

<u>Теорема 6.</u> $|\exp \mathfrak{X}_6| = 3$

7. Пусть $\mathfrak{X}_7$ - класс всех совершенных приводимых ([7] стр.233) $X \in \mathfrak{X}$.

<u>Теорема 7.</u> $\exp \mathfrak{X}_7 = \exp \mathfrak{X}_6$

8. Пусть $\mathfrak{X}_8$ - класс всех совершенных $X \in \mathfrak{X}$, для которых $[LC(X)]$ - локально-компактное пространство.

<u>Теорема 8.</u> $|\exp \mathfrak{X}_8| = 7$

9. Пусть $\mathfrak{X}_9$ - класс всех совершенных $X \in \mathfrak{X}$, для которых $LC([LC(X)]) = LC(X)$.

<u>Теорема 9.</u> $|\exp \mathfrak{X}_9| = 11$

10. Пусть $\mathfrak{X}_{10}$ - класс всех таких $X \in \mathfrak{X}$, что $IS(X) = LC(X)$ и $[IS(X)]$ - локально компактно, $\mathfrak{X}_{10}^* = \{X \in \mathfrak{X}_{10} : IS(X) = \phi$ или $|IS(X)| \geq \aleph_0\}$

<u>Теорема 10.</u> $|\exp \mathfrak{X}_{10}| = \aleph_0$, $|\exp \mathfrak{X}_{10}^*| = 5$.

11. Пусть $\mathfrak{X}_{11}$ - класс всех таких $X \in \mathfrak{X}$, что $IS(X) = LC(X)$ и $LC([LC(X)]) = LC(X)$, $\mathfrak{X}_{11}^* = \{X \in \mathfrak{X}_{11} : IS(X) = \phi$ или $|IS(X)| \geq \aleph_0\}$

<u>Теорема 11.</u> $|\exp \mathfrak{X}_{11}| = \aleph_0$, $|\exp \mathfrak{X}_{11}^*| = 9$.

На самом деле можно сформулировать соответствующие теоремы i' ($i = 1,2,\ldots,11$), в которых классы $\exp \mathfrak{X}_i$ полностью описываются, т.е. указываются все возможные экспоненты, а также необходимые и достаточные условия, которым должно удовлетворять пространство X , чтобы $\exp X$ было гомеоморфно одному из перечисленных пространств. Это мы и сделаем для теорем 6-11, являющихся новыми. А для теорем 1-5 соответствующие описания см. в работах [3] [4] , [5] , [6]

<u>Предложение 3.</u> (1) X - бикомпакт $\Longleftrightarrow$ $\exp X$ - бикомпакт. (2) X - нульмерно $\Longleftrightarrow$ $\exp X$ - нульмерно. (3) X -сепарабельно $\Longleftrightarrow$ $\exp X$ - сепарабельно. (4) X - метризуемо $\Longleftrightarrow$ $\exp X$ - метризуемо. (5) X - полно

по Чеху $\Leftrightarrow$ $\exp X$ - полно по Чеху [8].

Пункты I,2,3 легко доказываются на основании определения топологии в $\exp X$. Для доказательства 4 используется метрика Хаусдорфа. Чтобы доказать 5, достаточно разложить X в спектр из локально-бикомпактных пространств с натуральным рядом в качестве направленного множества и использовать перестановочность функтора $\exp$ с операцией взятия предела обратного спектра (см. для бикомпактов [9]), а также следствие 2 (см. ниже).

<u>Следствие I.</u> $X \in \mathcal{K} \Leftrightarrow \exp X \in \mathcal{K}$

<u>Лемма I.</u> Пусть X - T_1-пространство, тогда $IS(\exp X) = \langle IS(X) \rangle$.

<u>Лемма 2.</u> Пусть X - T_1-пространство, тогда $LC(\exp X) = \langle LC(X) \rangle$.

Лемму I доказать легко. Лемма 2. Пусть $\mathcal{F} = LC(\exp X)$, тогда существует окрестность $\mathcal{F}$ вида $\langle \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_k \rangle$, с бикомпактным замыканием: $\langle [\mathcal{U}_1], \dots, [\mathcal{U}_k] \rangle$ (Предложение I). Докажем, что $[\mathcal{U}_i]$ - бикомпакт для каждого $i = 1, \dots, k$. Пусть $\{V_\alpha\}$ - любое открытое покрытие $[\mathcal{U}_i]$. Рассмотрим систему подмножеств $\exp X$ следующего вида: $[\langle X \setminus [\mathcal{U}_i], V_{j_1}, V_{j_2}, \dots, V_{j_n} \rangle] \cup \{\langle V_{j_1}, \dots, V_{j_n} \rangle\}$, $\{j_1, \dots, j_n\}$ пробегает все конечные наборы индексов из $A = \{\alpha\}$. Нетрудно убедиться, что это покрытие X. Выберем из этого покрытия конечное подпокрытие множества $\langle [\mathcal{U}_1], \dots, [\mathcal{U}_k] \rangle$ $\{X \setminus [\mathcal{U}_i], V_1^l, \dots, V_{k_l}^l\}_{l=1}^{m} \cup \{V_1^l, \dots, V_{k_l}^l\}_{l=1+m}^{p}$. Тогда $\{V_i^l : l = 1, \dots, p;\ i = 1, \dots, k_l\}$ - конечное подпокрытие для множества $[\mathcal{U}_i]$. Отсюда следует, что $\mathcal{F} \subset \langle LC(X) \rangle$. Пусть теперь $G \in \langle LC(X) \rangle$, тогда для каждой точки $x \in G$ выберем окрестность O_x такую, что $[O_x]$ - бикомпакт. Из покрытия $\{O_x\}_{x \in G}$ множества G выберем конечное подпокрытие и обозначим объединение его элементов через O, тогда $G \in \langle O \rangle$ и $[\langle O \rangle]_{\exp X} = \langle [O]_X \rangle = \exp([O])$ - бикомпакт.

<u>Следствие 2.</u> X - локально бикомпактно $\Leftrightarrow$ $\exp X$ - локально бикомпактно.

Используя предложения I и 3, леммы I и 2, получим:

<u>Следствие 3.</u> I) $\exp N \approx N$ 2) $\exp C \approx C$
3) $\exp S \approx S$, 4) $\exp P \approx P$

Существенную роль в доказательстве теорем будет играть нижеследующая "теорема о продолжении гомеоморфизмов", обобщающая предложение работы Пелчинского [3], леммы 2.7.I и 2.7.2 из работы автора [5], а также лемму I из работы [IO] Островского. Нульмерное пространство мы называем h-однородным, если любое непустое открыто-замкнутое его подмножество гомеоморфно всему пространству.

<u>Лемма 3</u> ("Теорема о продолжении гомеоморфизмов"). Пусть $\mathcal{Y}_1$ и $\mathcal{Y}_2$ - нульмерные сепарабельные метрические пространства, компактные или некомпактные одновременно, K_1 и K_2 - замкнутые нигде не плотные множества, соответственно, в $\mathcal{Y}_1$ и $\mathcal{Y}_2$. Пусть $\mathcal{Y}_1 \setminus K_1 \approx \mathcal{Y}_2 \setminus K_2$, причем каждое из этих пространств имеет базу из попарно гомеоморфных h-однородных множеств. Пусть g - любой гомеоморфизм, отображающий K_1 на K_2 и удовлетворяющий следующему условию: g переводит множество $K_1 \cap LC(\mathcal{Y}_1)$ на множество $K_2 \cap \cap LC(\mathcal{Y}_2)$. Тогда g может быть продолжен до гомеоморфизма, отображающего $\mathcal{Y}_1$ на $\mathcal{Y}_2$.

<u>Доказательство.</u> Искомый гомеоморфизм $G: \mathcal{Y}_1 \xrightarrow{\text{на}} \mathcal{Y}_2$, продолжающий $g: K_1 \longrightarrow K_2$ будем определять на специально выбираемых открыто-замкнутых частях пространств $\mathcal{Y}_1$ и $\mathcal{Y}_2$, которые в конце концов заполнят все $\mathcal{Y}_1 \setminus K_1$ и, соответственно, $\mathcal{Y}_2 \setminus K_2$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Рассмотрим покрытие $\{\mathcal{U}_i\}$ пространства $\mathcal{Y}_1$ дизъюнктными открыто-замкнутыми множествами диаметра $< \varepsilon$. Пусть система $\{\mathcal{U}_j\}$ содержит все те $\mathcal{U}_i$, для которых $\mathcal{U}_i \cap K_1 \neq \phi$. Положим $V_j^1 = \mathcal{U}_j \cap K_1$, $V_j^2 = g(V_j^1)$ для всех j. Пусть открытые в $\mathcal{Y}_2$ множества O_j^2 выбраны таким образом, чтобы $O_j^2 \cap K_2 = V_j^2$ для всех j. В покрытие $\mathcal{Y}_2$ множествами $\{O_j^2\}$ и $\mathcal{Y}_2 \setminus K_2$ впишем покрытие дизъюнктными открыто-замкнутыми множествами диаметра $< \varepsilon$, которое обозначим через $\{W_k^2\}$. Пусть $\{W_l^2\}$ включает в себя все те множества из W_k^2, для которых $W_k^2 \cap K_2 \neq \phi$. Обозначим через M_2 объединение всех W_k^2, не вошедших в $\{W_l^2\}$. Открытое в $\mathcal{Y}_1$ множество O_l^1 выберем для каждого l таким образом, чтобы $K_1 \cap O_l^1 = g^{-1}(W_l^2 \cap K_2)$ и, кроме того, чтобы $O_l^1 \subset \mathcal{U}_j$ для некоторого j. В покрытие пространства $\mathcal{Y}_1$ множествами $\{O_l^1\}$ и $\mathcal{Y}_1 \setminus K_1$ впишем покрытие дизъюнктными открыто-замкнутыми множествами $\{R_m\}$. Положим $W_l^1 = \cup\{R_m : R_m \cap (O_l^1 \cap K_1) \neq \phi\}$

и пусть $M_1 = \cup \{ R_m : R_m \not\subset W_l^1$ для всех $l \}$. Нетрудно убедиться в том, что все множества M_1, W_l^1 M_2, W_l^2 открыто-замкнуты, соответственно, в $\mathcal{Y}_1$ и $\mathcal{Y}_2$, кроме того, диаметр всех W_l^1 и W_l^2 меньше ε и $g(W_l^1 \cap K_1) = W_l^2 \cap K_2$. Можно добиться того, чтобы W_l^1 и W_l^2 были компактными одновременно. Для этого нужно, используя условия леммы, вычесть "лишнее" из некомпактного W_l^i и добавить это к M_i (i = I или 2) для каждого l

Из условий леммы следует, что любое открыто-замкнутое подмножество множества $\mathcal{Y}_1 \setminus K_1$ можно представить в виде не более чем счетного объединения дизъюнктных открыто-замкнутых множеств, гомеоморфных некоторому h-однородному пространству T. То же верно для $\mathcal{Y}_2 \setminus K_2$. Поэтому $M_1 = \oplus_{i<\alpha} T_i$ и $M_2 = \oplus_{j<\beta} T_j$, где α, β - ординалы $\leqslant \omega_0$, и все T_i и T_j гомеоморфны T. Если $\oplus_{i<\alpha} T_i \approx \oplus_{j<\beta} T_j$, то определим ограничение G на M_1, как любой гомеоморфизм, переводящий M_1 на M_2. Если $\oplus_{i<\alpha} T_i \not\approx \oplus_{j<\beta} T_j$ (это, в частности, означает, что T - компакт), то несколько изменим множества M_1 и M_2. Пусть $\alpha < \beta < \omega_0$, тогда из любого W_l^1 вычтем $(\beta - \alpha)$ штук открыто-замкнутых множеств гомеоморфных T, достаточно малого диаметра, чтобы не задеть K_1, и присоединим их к M_1. Если $\alpha < \omega_0 = \beta$, тогда, как можно доказать, $\mathcal{Y}_1$, $\mathcal{Y}_2$ и $\mathcal{Y}_1 \setminus M_1$ не компактны. Отсюда следует, что в $(\mathcal{Y}_1 \setminus M_1) \setminus K_1$ можно выбрать последовательность без предельных точек. Раздуем каждую точку этой последовательности до открыто-замкнутого в $\mathcal{Y}_1$ множества, гомеоморфного T, так, чтобы оно не задело K_1 и чтобы объединение всех этих "раздутых точек" было открыто-замкнутым в $\mathcal{Y}_1$ множеством. Мы получим в $\mathcal{Y}_1 \setminus M_1$ открыто-замкнутое множество, гомеоморфное $T \times N$. Вычтем его из всех W_l^1 и добавим к M_1. Аналогично поступаем, если $\beta < \alpha$. Теперь $M_1 \approx M_2$. Можно убедиться, что изменения M_i (i = I,2) можно проводить так, чтобы не пострадало требование одновременной компактности множеств W_l^1 и W_l^2 для каждого l. Определим $G|_{M_1}$ как любой гомеоморфизм $M_1 \xrightarrow{\text{на}} M_2$.

На следующем этапе возьмем $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$, для каждой пары множеств W_l^1 и W_l^2 (она удовлетворяет условиям леммы для $\mathcal{Y}_1$ и $\mathcal{Y}_2$, в качестве K_1 и K_2 выступают теперь $W_l^1 \cap K_1$ и

$W_l^2 \cap K_2$) проделаем то же, что ранее делали для $\mathcal{Y}_1$ и $\mathcal{Y}_2$. Мы определим здесь гомеоморфные открыто-замкнутые множества M_{1l} и M_{2l} для каждого l, а также систему $\{W^1_{ll_1}\}$ и $\{W^2_{ll_1}\}$ дизъюнктных открыто-замкнутых множеств диаметра $< \varepsilon_1$, таких, что $g(W^1_{ll_1} \cap K_1) = W^2_{ll_1} \cap K_2$ для всех ll_1. На каждом M_{1l} определим $G|_{M_{1l}}$ как любой гомеоморфизм: $M_{1l} \to M_{2l}$, и т.д. На $n+1$ этапе (для $\varepsilon_n = \frac{\varepsilon_{n-1}}{2}$) получим пары гомеоморфных $M_{1ll_1\ldots l_{n-1}}$ $M_{2ll_1\ldots l_{n-1}}$ и системы $\{W^1_{ll_1\ldots l_n}\}$ и $\{W^2_{ll_1\ldots l_n}\}$ таких, что $g(W^1_{ll_1\ldots l_n} \cap K_1) = W^2_{ll_1\ldots l_n} \cap K_2$. Определим G на $M_{1l\ldots l_{n-1}}$ как любой гомеоморфизм, отображающий его на $M_{2l\ldots l_{n-1}}$. Можно убедиться, что $\{M_{1ll_1\ldots l_n}\}_{n=1}^{\infty}$ покрывает $\mathcal{Y}_1 \setminus K_1$ и что полагая $G(x) = G|_{M_{1\ldots l_n}}(x)$, если $x \in M_{1\ldots l_n}$ и $G(x) = g(x)$, если $x \in K_1$, мы получим гомеоморфизм $G: \mathcal{Y}_1 \to \mathcal{Y}_2$, продолжающий g. Доказательство леммы 3 закончено.

<u>Определение.</u> Пусть X, $\mathcal{Y} \in K$, $\mathcal{Z}$ - замкнутое подмножество $\mathcal{Y}$. Определим пространство $\mathfrak{D}_X(\mathcal{Z} \subset \mathcal{Y})$ ("дождь из пространств X на подпространство $\mathcal{Z}$ в $\mathcal{Y}$ ") следующим образом. Пространства X и $\mathcal{Y}$ можно считать вложенными в любой отрезок. Построим $\mathfrak{D}_X(\mathcal{Z} \subset \mathcal{Y})$ как подпространство плоскости $\mathbb{R}^2$. Будем считать, что пространство $\mathcal{Y}$ вложено в ось абсцисс. Пусть $\{z_i\}$ - счетное всюду плотное подмножество $\mathcal{Z}$. Для каждого $i = 1, 2, \ldots$ построим множество $M_i \subset \mathbb{R}^2$, $M_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, где $X_n \approx X$ для всех n, и X_n вложено в отрезок, параллельный оси абсцисс с центром в точке с координатами $(z_i, 1/n)$, причем диаметр каждого X_n меньше чем $\min\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{3}\min_{k \le i} |z_k - z_i|\right)$. Тогда $\mathfrak{D}_X(\mathcal{Z} \subset \mathcal{Y}) = \mathcal{Y} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$. $\mathfrak{D}_X(\mathcal{Y} \subset \mathcal{Y})$ будем обозначать через $\mathfrak{D}_X(\mathcal{Y})$. Нетрудно показать, что $\mathfrak{D}_X(\mathcal{Z} \subset \mathcal{Y}) \in \mathfrak{I}$.

<u>Доказательство теоремы 6.</u> Пусть $X \in \mathfrak{X}_6$, $\mathcal{Y} = \exp X$. Тогда $LC(\mathcal{Y}) = \langle LC(X) \rangle$ (лемма 2) и $NLC(\mathcal{Y}) = \mathcal{Y} \setminus LC(\mathcal{Y}) = \langle X \rangle \setminus \langle LC(X) \rangle = \langle X, NLC(X) \rangle$ Используя леммы 1 и 2, нетрудно доказать, что $\exp \mathfrak{X}_6 \subset \mathfrak{X}_6$. Для всякого $X \in \mathfrak{X}_6$ точка $x \in LC(X)$ имеет открыто-замкнутую окрестность, гомеоморфную C, поэтому это верно для $\mathcal{Y}$. Предположим теперь, что $NLC(X) \neq \phi$, тогда можно показать, что $NLC(\mathcal{Y}) \approx P$. Пространство $\mathcal{Y}$ и $\mathfrak{D}_C(P)$ удовлетворяют условиям леммы 3 (полагая $\mathcal{Y}$ вместо $\mathcal{Y}_1$, $\mathfrak{D}_C(P)$ вместо

$\mathcal{Y}_2$, $NLC(\mathcal{Y})$ вместо K_1 $P\subset \mathfrak{A}_c(P)$ вместо K_2). Поэтому $\mathcal{Y}\approx \mathfrak{A}_c(P)$

Итак, доказана следующая теорема 6', а вместе с ней и теорема 6.

Теорема 6'. Пусть $X\in\mathcal{H}_6$, тогда I) если $NLC(X)=\phi$ X - компакт, то $\exp X\approx X\approx C$, 2) если $NLC(X)=\phi$ и X - не компактно, то $\exp X\approx X\approx S$, 3) если $NLC(X)\neq\phi$, то $\exp X\approx \mathfrak{A}_c(P)$

Доказательство теоремы 7. Заметим, что $\mathcal{H}_7\subset\mathcal{H}_6$, поэтому достаточно показать, что для каждого $\mathcal{Y}\in\exp\mathcal{H}_6$ существует $X\in\mathcal{H}_7$ такое, что $\exp X\approx\mathcal{Y}$ Теперь заметим, что C, S, $\mathfrak{A}_S(0)$, где 0 - одноточечное пространство, принадлежат $\mathcal{H}_7$ и $\exp C\approx C$ $\exp S\approx S$ $\exp\mathfrak{A}_S(0)\approx\mathfrak{A}_S(P)$.

Доказательство теоремы 8. Пусть $X\in\mathcal{H}_8$ и $\mathcal{Y}=\exp X$. Для любого топологического пространства $\mathcal{Z}$ обозначим $R(\mathcal{Z})=[LC(\mathcal{Z})]\setminus LC(\mathcal{Z})$, $PP(\mathcal{Z})=\mathcal{Z}\setminus[LC(\mathcal{Z})]$. Тогда $X=LC(X)\cup R(X)\cup PP(X)$ и $\mathcal{Y}=LC(\mathcal{Y})\cup R(\mathcal{Y})\cup PP(\mathcal{Y})$, причем $R(\mathcal{Y})=\langle[LC(X)],R(X)\rangle$ Легко доказать, что для всякого $X\in\mathcal{H}_8$ I) любая точка $\ell\in LC(X)$ имеет окрестность гомеоморфную C, 2) любая точка $p\in PP(X)$ имеет окрестность, гомеоморфную P, 3) $R(X)$ - локально-компактно, 4) $[PP(X)]\supset R(X)\subset[LC(X)]$ Пользуясь указанным выше равенством, можно доказать, что для $\mathcal{Y}\in\exp\mathcal{H}_8$ $R(\mathcal{Y})$ совершенно. Отсюда следует, что $R(\mathcal{Y})$ либо φ, либо $\approx C$, либо $\approx S$; $LC(X)$ либо ϕ, либо $\approx C$, либо $\approx S$; $PP(\mathcal{Y})$ либо ϕ, либо $\approx P$. Теперь, используя лемму 3, получим доказательство теоремы 8' и теоремы 8.

Теорема 8'. Пусть $X\in\mathcal{H}_8$, тогда I) если $LC(X)\approx C$ $PP(X)=\phi$, то $\exp X\approx C$, 2) если $LC(X)\approx S$ $PP(X)=\phi$, то $\exp X\approx S$, 3) если $LC(X)=\phi$, о $\exp X\approx P$, 4) если $LC(X)\approx C$, $R(X)=\phi$, $PP(X)\neq\phi$, то $\exp X\approx C\oplus P$, 5) если $LC(X)\approx S$, $R(X)=\phi$ $PP(X)\neq\phi$, то $\exp X\approx S\oplus P$, 6) если $R(X)\neq\phi$ и $[LC(X)]$ - компакт, то $\exp X\approx\mathfrak{A}_c(\mathcal{Z}\subset\mathfrak{A}_p(\mathcal{Z}))$, где $\mathcal{Z}\approx C$, 7) если $R(X)\neq\phi$ и $[LC(X)]$ - не компактно, то $\exp X\approx\mathfrak{A}_c(\mathcal{Z}\subset\mathfrak{A}_p(\mathcal{Z}))$, где $\mathcal{Z}\approx S$

Доказательство теоремы 9. Пусть $X\in\mathcal{H}_9$ и $\mathcal{Y}=\exp X$.

Тогда, определив $R(Y)$ как в предыдущей теореме, можно доказать, что $LC(Y)$ или $\emptyset$, или $\approx S$, или $\approx C$; $NLC(Y)\approx P$ или $\emptyset$; $R(Y)\approx P$ или $\emptyset$. Для любого топологического пространства Z обозначим через $B_0(Z)=NLC(Z)\setminus R(Z)$ (ранее $B_0(Z)$ обозначалось $PP(Z)$). Пусть далее $B_1(Z)=NLC(Z)\setminus[B_0(Z)]$, $B_2(Z)=NLC(Z)\setminus(B_0(Z)\cup[B_1(Z)])$, ..., $B_n(Z)=NLC(Z)\setminus(B_0(Z)\cup B_1(Z)\cup\ldots\cup B_{n-2}(Z)\cup[B_{n-1}(Z)])$ при $n=3,4,\ldots$. Для каждого $k=0,1,2,\ldots$ нетрудно построить пространство $X\in\mathfrak{A}_3$, для которого $B_k(X)\neq\emptyset$. В экспоненте ситуация улучшается:

<u>Предложение 4.</u> Пусть $Y\in\exp\mathfrak{A}_3$, тогда 1) $B_5(Y)=\emptyset$
2) $Y=LC(Y)\cup B_0(Y)\cup B_1(Y)\cup B_2(Y)\cup B_3(Y)\cup B_4(Y)$
3) Каждое $B_i(Y)$ или $\emptyset$, или $\approx P$.

<u>Определение.</u> Пусть X – замкнутое подпространство топологического пространства Y. Положим $(Y)_0=Y\setminus X$, $(Y)_1=Y\setminus[(Y)_0]$, $(Y)_2=Y\setminus((Y)_0\cup[(Y)_1])$, $(Y)_n=Y\setminus((Y)_0\cup(Y)_1\cup\ldots\cup(Y)_{n-2}\cup[(Y)_{n-1}])$ $n=3,4,\ldots$. X назовем m-вложенным в Y, если $(Y)_m\neq\emptyset$, а $(Y)_{m+1}=\emptyset$ (следовательно, $(Y)_i=\emptyset$, $i\geq m+1$).

Для каждого $n=1,2,\ldots$ построим пространство $P_n\subset P$, такое, что 1) P_n – n-вложено в P, 2) положим $Y=P$, $X=P_n$ и определим $(Y)_i$ как определено выше, тогда $(Y)_i\approx P$ для всех $i=0,1,\ldots,n-1,n$. Нам нужно построить последовательность пар $(X_i\subset Y_i)$ пространств и гомеоморфных P их вложений. Положим $X_1=P=Y_1$. Предположим, что уже построено $X_n\subset Y_n$, тогда пусть $X_{n+1}=Y_n$ и $Y_{n+1}=\mathfrak{A}_p(X_n\subset Y_n)$. Вложение $X_{n+1}=Y_n\subset\mathfrak{A}_p(X_n\subset Y_n)=Y_{n+1}$ – естественное.

Теперь, многократно применяя лемму 8, можно доказать теоремы 9 и 9'.

<u>Теорема 9'.</u> Пусть $X\in\mathfrak{A}_3$, тогда 1) если X гомеоморфно C, или S, или P или $C\oplus P$, или $S\oplus P$, то $\exp X\approx X$, 2) если $B_0(X)=\emptyset$, а $B_1(X)\neq\emptyset$, то $\exp X\approx\mathfrak{A}_c(P)$, 3) если $B_i(X)\neq\emptyset$, $i=0,1$, $B_j(X)=\emptyset$, $j\geq 2$, то $\exp X\approx\mathfrak{A}_c(P)\oplus P$, 4) если $B(X)=\emptyset$, а $B_2(X)\neq\emptyset$, то $\exp X\approx\mathfrak{A}_c(P_2\subset P)$, 5) если $B_i(X)\neq\emptyset$, $i=0,1,2$, а $B_3(X)=\emptyset$, то $\exp X\approx\mathfrak{A}_c(P_1\subset P)$

6) если $B_2(X)=\phi$, а $B_3(X)\neq\phi$, то $\exp X\approx \mathfrak{A}_c(P_3\subset P)$,
7) в остальных случаях $\exp X\approx \mathfrak{A}_c(P_6\subset P)$.

Аналогично теореме 8' доказывается теорема I0', и аналогично теореме 9' доказывается теорема II'.

Теорема I0'. Пусть $X\in\mathfrak{X}_{10}$, тогда I) если $NLC(X)=\phi$, то $\exp X=\langle IS(X)\rangle$, 2) если $LC(X)=\phi$, $NLC(X)\neq\phi$, то $\exp X\approx P$, 3) если $LC(X)\neq\phi$, $R(X)=\phi$ и $PP(X)\neq\phi$, то $\exp(X)=\langle IS(X)\rangle\oplus P$, 4) если $R(X)\neq\phi$ и $[LC(X)]$ - компакт, то $\exp X\approx \mathfrak{A}_0(\mathfrak{Z}\subset\mathfrak{A}_p(\mathfrak{Z}))$, где $\mathfrak{Z}\approx C$, 5) если $R(X)\neq\phi$ и $[LC(X)]$ - некомпакт, то $\exp X\approx \mathfrak{A}_0(\mathfrak{Z}\subset\mathfrak{A}_p(\mathfrak{Z}))$, где $\mathfrak{Z}\approx S$.

Теорема II'. Пусть $X\in\mathfrak{X}_{11}$, тогда I) если $X=IS(X)$ то $\exp X=\langle X\rangle$, 2) если $X=P$, то $\exp X\approx P$
3) если $X\approx IS(X)\oplus P$, то $\exp X\approx\langle IS(X)\rangle\oplus P$.
4) если $B_0(X)=\phi$, $B_1(X)\neq\phi$, то $\exp X\approx\mathfrak{A}_0(P)$,
5) если $B_i(X)\neq\phi$ $i=0,I$, $B_j(X)=\phi$, $j>2$, то $\exp X\approx\mathfrak{A}_0(P)\oplus P$, 6) если $B_1(X)=\phi$, а $B_2(X)\neq\phi$, то $\exp X\approx\mathfrak{A}_0(T_\omega\subset P)$, 7) если $B_i(X)\neq\phi$, $i=0,I,2$, $B_3(X)\neq\phi$, то $\exp X\approx\mathfrak{A}_0(P_4\subset P)$, 8) если $B_2(X)=\phi$, а $B_3(X)\neq\phi$, то $\exp X\approx\mathfrak{A}_0(P_3\subset P)$
9) в остальных случаях $\exp X\approx\mathfrak{A}_0(P_6\subset P)$

Автор благодарит профессора В.И.Пономарева за постановку вопросов и постоянное внимание к работе.

Литература

I. Куратовский К. Топология. - М., т.I, 1966; М., т.II, 1969.

2. Пономарев В.И. Новое пространство замкнутых множеств и многозначные непрерывные отображения бикомпактов. - Матем.сб., 1959, т.48, № 2, с.191-212.

3. Pelczynski A. A remark on spaces 2^X for zero-dimensional X, Bull. Acad. Polon. Soc. Ser. Math., 1965, v. 13, N 2, p. 85-89.

4. Marjanović M.M. Exponentially complete spaces III, Acad. Serbe. Sci. Publ. Inst. Math., Nouv. ser., 1973, v. 14, p. 97-109.

5. Выборнов А.Н. Пространства компактных подмножеств локально-бикомпактных нуль-мерных сепарабельных метрических пространств. - В кн.: Отображения и функторы. М., 1984, с.17-23.

6. Выборнов А.Н. Пространства компактных подмножеств нуль-мерных польских пространств с всюду плотным множеством изолированных точек. - УМН, 1984, т.4, с.153-154.

7. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. - М., 1977.

8. Чобан М.М. Об экспоненциальной топологии. - ДАН СССР, 1969, т.186, с.272-274.

9. Сирота С.О. О спектральном представлении пространства замкнутых подмножеств бикомпактов. - ДАН СССР, 1968, т. 181, с.1069-1072.

10. Островский А.В. Непрерывные образы произведения $C \times Q$ канторова совершенного множества C и рациональных чисел Q. - В кн.: Семинар по общей топологии. М., 1981, с.78-85.

Поступила 17 февраля 1984 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1985.

УДК 513.83

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ КОЛЛЕКТИВНО-НОРМАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ, СВЯЗАННАЯ С РАСХОДЯЩИМИСЯ НАПРАВЛЕННОСТЯМИ

М.А.Гольдман, С.В.Павлова
ЛГУ им. П.Стучки

В работах [2], [3], [4] при помощи расходящихся направленностей были описаны функционально отделимые, тихоновские, компактные, нормальные компактные, вполне регулярные и нормальные пространства. В предлагаемой статье дается характеризация коллективно-нормальных пространств (определение см., например, [1], с.357) в тех же терминах. Формулировке и доказательству теоремы предпошлем некоторые определения.

Пусть S – топологическое пространство, $(S_i)_{i\in\mathfrak{J}}$ – семейство подмножеств S, $(S_\alpha)_{\alpha\in A}$ – направленность в S. В работе [4] были даны определения предельного и собственно-предельного множества для направленности (см. [4], с.13). Назовем семейство $(S_i)_{i\in\mathfrak{J}}$ предельным (собственно-предельным) для направленности $(S_\alpha)_{\alpha\in A}$, если предельным (собственно-предельным) для этой направленности является множество $\bigcup_{i\in\mathfrak{J}} S_i$. Сопоставим множеству $\mathfrak{J}$ топологическое пространство $E(\mathfrak{J})$, называемое ежом. Еж $E(\mathfrak{J})$ получается в результате склеивания топологического пространства $\bigsqcup_{i\in\mathfrak{J}}[0,1]_i$ (топология на $[0,1]_i$ – обычная) по разбиению, все элементы которого, кроме элемента $\theta=\{(0,i): i\in\mathfrak{J}\}$, являются точками пространства $\bigsqcup_{i\in\mathfrak{J}}[0,1]_i$ (по поводу терминов в последней фразе см., например, [5], с.11, 38, 40).

Пусть далее $(S_i)_{i\in\mathfrak{J}}$ – дискретное семейство множеств. Обозначим через $C(S;E(\mathfrak{J}))$ семейство всех непрерывных функций $\varkappa: S\longrightarrow E(\mathfrak{J})$, таких, что $(\forall i\in\mathfrak{J})(\forall s\in S_i)$ $[\varkappa(s)=(1,i)]$. Каждой функции $\varkappa: S\longrightarrow E(\mathfrak{J})$ поставим в соответствие функцию $\bar\varkappa: S\longrightarrow[0,1]$ следующим образом: $\bar\varkappa(s)=pr_1\,\varkappa(s)$, $s\in S$. Будем говорить, что семейство

$(S_i)_{i\in\mathfrak{I}}$ строго подчинено $C(S;E(\mathfrak{I}))$, если какова бы ни была расходящаяся в S направленность $(s_\alpha)_{\alpha\in A}$, для которой семейство $(S_i)_{i\in\mathfrak{I}}$ является собственно предельным, существует функция $x\in C(S;E(\mathfrak{I}))$ такая, что направленность $(\tilde{x}(s_\alpha))_{\alpha\in A}$ расходится.

Теорема. Условие. $\mathfrak{T}_{cln}$ - класс коллективно-нормальных топологических пространств, $\mathfrak{T}_{(F_i)_{i\in\mathfrak{I}}}(C)$ - класс всевозможных топологических пространств S, в которых каждое дискретное семейство $(F_i)_{i\in\mathfrak{I}}$ замкнутых множеств строго подчинено $C(S;E(\mathfrak{I}))$.

Утверждение. $\mathfrak{T}_{cln}=\mathfrak{T}_{(F_i)_{i\in\mathfrak{I}}}(C)$.

Доказательство теоремы основано на следующем факте: для того чтобы топологическое пространство S было коллективно-нормальным необходимо и достаточно, чтобы для любого дискретного семейства $(F_i)_{i\in\mathfrak{I}}$ замкнутых в S множеств и для любой открытой окрестности $\mathfrak{V}$ множества $\bigcup_{i\in\mathfrak{I}}F_i$ нашлась функция $x\in C(S;E(\mathfrak{I}))$, принимающая значение θ на множестве $S\setminus\mathfrak{V}$ (достаточность очевидна, необходимость нетрудно доказать при помощи леммы Урысона).

Доказательство. Пусть $S\in\mathfrak{T}_{cln}$. Рассмотрим в S какое-либо дискретное семейство $(F_i)_{i\in\mathfrak{I}}$ замкнутых множеств и какую-либо расходящуюся направленность $(s_\alpha)_{\alpha\in A}$, для которой это семейство является собственно предельным. Существует такая открытая окрестность $\mathfrak{V}$ множества $\bigcup_{i\in\mathfrak{I}}F_i$, что множество $\{\alpha\in A: s_\alpha\in S\setminus\mathfrak{V}\}$ конфинально с A (множество $\{\alpha\in A: s_\alpha\in\mathfrak{U}\}$ конфинально с A для любой открытой окрестности $\mathfrak{U}$ множества $\bigcup_{i\in\mathfrak{I}}F_i$). Согласно факту, сформулированному перед доказательством теоремы, найдется функция $x\in C(S,E(\mathfrak{I}))$, такая, что $\forall s\in S\setminus\mathfrak{V}\quad x(s)=\theta$. Соответствующая ей функция $\tilde{x}$ преобразует направленность $(s_\alpha)_{\alpha\in A}$ в расходящуюся (легко видеть, что 0 и 1 - предельные точки направленности $(\tilde{x}(s_\alpha))_{\alpha\in A}$). Это доказывает, что $S\in\mathfrak{T}_{(F_i)_{i\in\mathfrak{I}}}(C)$. Тем самым включение $\mathfrak{T}_{cln}\subset\mathfrak{T}_{(F_i)_{i\in\mathfrak{I}}}(C)$ установлено.

Предположим, что обратное включение не имеет места. Значит, существует такое топологическое пространство S, что $S\in\mathfrak{T}_{(F_i)_{i\in\mathfrak{I}}}(C)$ и $S\notin\mathfrak{T}_{cln}$. Убедимся, что такая ситуация невозможна. Для этого докажем импликацию $S \notin \mathfrak{T}_{\mathfrak{M}} \Rightarrow S \notin \mathfrak{F}_{(F_i)_{i\in\mathfrak{J}}}(C)$. Пусть S пространство, не являющееся коллективно-нормальным. В силу необходимого и достаточного условия коллективной нормальности в S найдутся такое дискретное семейство $(F_i)_{i\in\mathfrak{J}}$ замкнутых множеств и такая открытая окрестность $\mathfrak{V}$ множества $\bigcup_{i\in\mathfrak{J}} F_i$, что $\forall x \in C(S; E(\mathfrak{J}))$ $\exists s \in S \setminus \mathfrak{V}$ $x(s) \neq \theta$. Введем в рассмотрение семейство $(\mathfrak{U}_\alpha)_{\alpha\in A}$ всех множеств вида $\{s \in S \mid 1 - \bar{x}(s) < \varepsilon\}$, где $x \in C(S; E(\mathfrak{J}))$ и $0 < \varepsilon < 1$. Заметим, что при любом $\alpha \in A$ $\mathfrak{U}_\alpha \cap (S \setminus \mathfrak{V}) \neq \phi$. Частично упорядочим A отношением $\alpha \leq \alpha'$, означающим, что $\mathfrak{U}_\alpha \supset \mathfrak{U}_{\alpha'}$. Нетрудно убедиться, что A - направленное множество без максимального элемента. Обозначим через B направленное произведение $A \times A$. Множества $B_1 = \{(\alpha,\alpha) : \alpha \in A\}$ и $B_2 = \{(\alpha_1,\alpha_2) : \alpha_1,\alpha_2 \in A$ & $\alpha_1 \neq \alpha_2\}$ конфинальны с B ([2] , лемма 2). Зафиксировав некоторую точку $s_0 \in \bigcup_{i\in\mathfrak{J}} F_i$ (будем для определенности считать, что $s_0 \in F_j$ при некотором $j \in \mathfrak{J}$), построим в S направленность $(s_\beta)_{\beta\in B}$ следующим образом: если $\beta = (\alpha,\alpha) \in B_1$, то в качестве s_β возьмем некоторый элемент из $\mathfrak{U}_\alpha \cap (S \setminus \mathfrak{V})$; если $\beta \in B_2$, то положим $s_\beta = s_0$. Направленность $(s_\beta)_{\beta\in B}$ является расходящейся (ни одна из точек $\bigcup_{i\in\mathfrak{J}} F_i$ не может быть точкой сходимости этой направленности, так как $\bigcup_{i\in\mathfrak{J}} F_i \subset \mathfrak{V}$ и $B_1 = \{\beta \in B : s_\beta \in S \setminus \mathfrak{V}\}$ не может направленность сходиться и ни к одной из точек множества $S \setminus \bigcup_{i\in\mathfrak{J}} F_i$, так как $S \setminus \bigcup_{i\in\mathfrak{J}} F_i \subset S \setminus F_j$ и $B_2 = \{\beta \in B : s_\beta \in S \setminus (S \setminus F_j)\}$. Семейство $(F_i)_{i\in\mathfrak{J}}$ является предельным для направленности $(s_\beta)_{\beta\in B}$ (так как $B_2 \subset \{\beta \in B : s_\beta \in \mathfrak{U}\}$, если $\mathfrak{U}$ - открытая окрестность множества $\bigcup_{i\in\mathfrak{J}} F_i$). Более того, оно является собственно-предельным для этой направленности (так как $\{\beta \in B : s_\beta \in S \setminus \mathfrak{V}\} = B_1$). При этом какую бы мы ни рассмотрели функцию $x \in C(S; E(\mathfrak{J}))$, направленность $(\bar{x}(s_\beta))_{\beta\in B}$ будет сходиться к I (доказательство проводится аналогично тому как это было проделано в теореме 2 работы [2]).

Литература

I. Архангельский А.В. Добавление. - В кн.: Келли Дж.Л. Общая топология. - М., 1981, с.356-409.
2. Гольдман М.А. Характеристика функционально отделимых и тихоновских пространств при помощи расходящихся сетей. - ДАН СССР, 1969, т.188, № 6, с.1217-1220.
3. Гольдман М.А. Об одном признаке компактности топологических пространств. - Латвийский математический ежегодник, №8, 1970, с. 39-41
4. Гольдман М.А. Характеризация некоторых классов топологических пространств, связанная с расходящимися сетями. - В кн.: Топологические пространства и отображения в них. - Рига, 1975, с.3-14.
5. Рохлин В.А., Фукс Д.Б. Начальный курс топологии. Геометрические главы. - М.,1977.

Поступила 27 марта 1984 года

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1985.

УДК 510.644,513.83

О НЕЧЕТКИХ ПРЕДИКАТАХ НА НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВАХ (НА ПРИМЕРЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА)

З.Б.Дискин
ЛГУ им.П.Стучки

I. Постановка задачи, мотивация, обозначения

I.I. Пусть имеется множество X с определенной на нем математической структурой (в смысле Бурбаки [I]), для которой представляет интерес рассмотрение предикатов на подмножествах множества X , т.е. отображений

$$\Theta : \mathfrak{B}(X) \longrightarrow 2\,, \quad 2 = \{0,1\}, \tag{I.I}$$

где $\mathfrak{B}(X) = 2^X$ есть система всех подмножеств (булеан) X

Введем систему нечетких подмножеств X (нечеткий булеан)

$$\tilde{\mathfrak{B}}(X) = [0,1]^X\,, \quad [0,1] \subset R,$$

с операциями пересечения, объединения и дополнения:

$$\alpha, \beta \in \tilde{\mathfrak{B}}(X) \quad \alpha \wedge \beta = \min(\alpha,\beta)\,; \quad \alpha \vee \beta = \max(\alpha,\beta)\,; \quad \alpha^c = 1-\alpha\,, \tag{I.2}$$
$$\bigwedge_{i \in I} \alpha_i = \inf_i \alpha_i\,; \quad \bigvee_{i \in I} \alpha_i = \sup_i \alpha_i\,.$$

Примем следующие обозначения. Точки из X будут обозначаться $x, y, \ldots$; элементы $\mathfrak{B}(X)$ – $A, B, \ldots$ и называться четкими множествами; элементы $\tilde{\mathfrak{B}}(X)$ – $\alpha, \beta, \ldots$ и называться нечеткими множествами; предикаты на $\mathfrak{B}(X)$, как правило, – $\Theta, \Omega, \ldots$ Для нечетких множеств – как функций – аргумент будет записываться слева от символа функции без скобок – $x\alpha, x\beta, \ldots$

Представим интуитивно элементы $\tilde{\mathfrak{B}}(X)$ как "размытые" множества, о которых мы не имеем полной информации. Тогда, если для любого четкого множества $A \subset X$, некоторый предикат Θ либо верен, либо неверен, то для нечеткого тот же предикат верен лишь в некоторой степени $\Theta(\alpha) \in [0,1]$ т.е. нечеткость множества индуцирует нечеткость предиката на нем. Таким образом, приходим к задаче расширения четких предикатов (I.I) на $\mathfrak{B}(X)$ до нечетких предикатов на $\tilde{\mathfrak{B}}(X)$

$$\Theta: \tilde{\mathfrak{B}}(X) \to [0,1], \quad \tilde{\Theta} \upharpoonright \mathfrak{B}(X) = \Theta. \qquad (\widetilde{I.I})$$

Рассмотрим пример. Естественно обратиться к топологическим пространствам как классическим структурам, изобилующими предикатами на $\mathfrak{B}(X)$

Пусть $(X, \mathfrak{T})$ - топологическое пространство. Предикат "точка $x \in X$ есть предельная для множества $A \subset X$ " будем записывать в виде $\Pi(x, A)$, а оператор замыкания - как отображение $A \to A^{\kappa} = A^{\pi} \cup A$, где $A^{\pi} = \{x \in X : \Pi(x, A) = 1\}$ Представляется естественным определить соответствующий нечеткий предикат на $X \times \tilde{\mathfrak{B}}(X)$ следующим образом:

$$\tilde{\Pi}(x, \alpha) \overset{\text{Def}}{=} \inf_{G \in \mathfrak{T}_x} \sup_{y \in G - \{x\}} y\alpha, \qquad (\widetilde{I.3})$$

где $\mathfrak{T}_x$ - система открытых окрестностей точки x

В $(\widetilde{I.3})$ $\sup\{y\alpha : y \in G \setminus \{x\}\}$ есть степень непустоты "пересечения" α, понимаемого как "размытое" множество, с $G \setminus \{x\}$, а $\inf$ по $G \in \mathfrak{T}_x$ "выбирает наихудшую" в этом смысле окрестность x

Теперь вводим оператор замыкания на $\tilde{\mathfrak{B}}(X)$

$$\alpha \to \alpha^{\kappa} = \alpha^{\pi} \vee \alpha, \text{ где } x\alpha^{\pi} \overset{\text{Def}}{=} \tilde{\Pi}(x, \alpha). \qquad (\widetilde{I.4})$$

Далее, множество $A \subset X$ замкнуто ($A \in \mathfrak{T}^{\kappa}$) тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки, т.е. для любой $x \in X$ либо $x \notin A^{\pi}$, либо $x \in A$ Соответствующий нечеткий предикат, т.е. степень замкнутости нечеткого множества, естественно тогда определить как

$$\tilde{\mathfrak{T}}^{\kappa}(\alpha) \overset{\text{Def}}{=} \inf_x (x\alpha^{\pi c} \vee x\alpha); \qquad (\widetilde{I.5})$$

здесь $(x\alpha^{\pi c} \vee x\alpha)$ есть степень того, что либо x не предельная точка для α, либо " $x \in \alpha$ ".

Сразу же отметим, что можно ввести степень замкнутости чуть иначе:

$$\tilde{T}^{\kappa}_x(\alpha) \overset{\text{Def}}{=} \inf_x (x\alpha^{\kappa c} \vee x\alpha) \qquad (\widetilde{I.6})$$

Для четких множеств $(\widetilde{I.5})$ и $(\widetilde{I.6})$ совпадают и равны , а для нечетких множеств это не так, как явствует из простейшего пример В качестве $(X, \mathfrak{T})$ возьмем R и рассмотрим нечеткое "одноточечное" множество α $\alpha \upharpoonright R \setminus \{x_0\} = 0$, $x_0\alpha = a \in (0,1)$, для которого $\alpha^{\pi} = 0$, а α^{κ} в x_0 отлично от нуля: $x_0\alpha^{\kappa} = x_0\alpha = a$. Тогда степень замкнутости $(\widetilde{I.5})$ $\tilde{\mathfrak{T}}^{\kappa}(\alpha) = 1$, а $(\widetilde{I.6})$ дает $\tilde{\mathfrak{T}}^{\kappa}_x(\alpha) = a \vee (1-a)$

и для $a \in (0,1)$ $\tilde{\mathfrak{T}}^*_a(\alpha) \neq \tilde{\mathfrak{T}}^*_b(\alpha)$

Какому определению – ($\widetilde{I.5}$) или ($\widetilde{I.6}$) – отдать предпочтение? При построении нечетких предикатов ($\widetilde{I.I}$) хотелось бы требовать, чтобы имеющиеся между четкими предикатами логические связи сохранялись бы – в определенном смысле – и в нечеткой ситуации. Так, если для некоторых предикатов на $\mathfrak{B}(X)$ Θ .. Ω и для любого $A \subset X$ справедлива импликация $\Theta(A) \Rightarrow \Omega(A)$, то в нечетком случае естественно желать выполнения неравенства $\tilde{\Theta}(\alpha) \leq \tilde{\Omega}(\alpha)$ для $\forall \alpha \in \tilde{\mathfrak{B}}(X)$ (Далее будет видно, что ($\widetilde{I.6}$) в этом смысле предпочтительнее).

I.2. Нетривиальность поставленной задачи обусловлена следующими обстоятельствами.

Математическую структуру с предикатами на $\mathfrak{B}(X)$ будем рассматривать как модель соответствующего языка третьего порядка. (Так, предикат предельной точки для множества в топологических пространствах есть интерпретация такой формулы языка:

$\Pi(x,A) \Leftrightarrow \forall G(G \in \mathcal{T} \,\&\, x \in G \rightarrow \exists y(y \in G \,\&\, y \neq x \,\&\, y \in A))$ (*)).

Введем вместо булевой алгебры (б.а.) $2 = \{0,1\}$ значений истинности этой модели алгебру $[0,1]$ с операциями ($\widetilde{I.2}$), получим нечеткую модель того же самого языка, в которой все предикаты нечеткие, в частности, само нечеткое множество есть результат интерпретации символа $\in$ как предиката на $X \times \mathfrak{B}(X)$ со значениями в $[0,1]$

Алгебра $[0,1]$ не является булевой – в ней справедливы все пары двойственных аксиом б.а., кроме пары аксиом дополнения: для $\alpha \in \tilde{\mathfrak{B}} \setminus \mathfrak{B}$ $\alpha \vee \alpha^c \neq 1$, $\alpha \wedge \alpha^c \neq 0$ Отсюда сразу же следует несправедливость для $\tilde{\mathfrak{B}}(X)$ modus ponens

$\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta) \leq \beta$ – общем случае ($\alpha \rightarrow \beta$ есть, как обычно, сокращение для $\alpha^c \vee \beta$).(Кроме того, вместо полной дистрибутивности на $\mathfrak{B}(X)$ в $\tilde{\mathfrak{B}}(X)$ имеет место лишь $(\lambda,1)$ -дистрибутивность для любой мощности λ (...):

$|I| = \lambda, \beta \vee (\bigwedge_{i \in I} \alpha_i) = \bigwedge_{i \in I} (\beta \vee \alpha_i); \ \beta \wedge (\bigvee_{i \in I} \alpha_i) = \bigvee_{i \in I} (\beta \wedge \alpha_i)$).

Поэтому имеющийся в четкой ситуации вывод из посылки $\Theta(A)$ заключения $\Omega(A)$ вовсе не обязан обеспечивать в $[0,1]$ - модельной интерпретации справедливость неравенства $\tilde{\Theta}(\tilde{A}) < \tilde{\Omega}(\tilde{A})$

Тем не менее, как будет видно из нижеследующих результатов, поставленная в п.I задача может решаться следующим образом.

Рассматривается модель с двумя множествами значений истинности - обычной б.а. 2 для всех исходных, непосредственно заданных в языке предикатов, кроме предиката принадлежности $x \in A$, часть (!) вхождений которого в формулы языка интерпретируется нечетко, т.е. как отображение в $[0,1]$ (подразумевается, что $2 \subset [0,1]$). Тогда и все производные предикаты, содержащие нечеткие вхождения $\in$, также становятся нечеткими. (Так, в рассмотренном выше примере, предикат (I.3) $\tilde{\Pi}(x,\lambda)$ получен такой интерпретацией формулы (*), в которой лишь вхождение $\in$ в подформулу $y \in A$ " трактуется "нечетко", все прочие вхождения $\in$ интерпретируются, по-прежнему, как отображения в 2). Как следует из приведенных ниже результатов, в таких "четко-нечетких" моделях достаточно широкий ряд интересных логических связей между предикатами в четкой ситуации допускает обобщение на нечеткий случай.

I.3. Как уже отмечалось, классическим примером математической структуры, рассматривающей предикаты на $\mathcal{B}(X)$, является топологическое пространство. Поставленная в п.I задача будет решаться ниже для топологического пространства. Будут построены нечеткие расширения предикатов предельной и внутренней точек множества его замкнутости и открытости, бикомпактности в их различных формулировках и указаны логические связи, сохраняющиеся при таком расширении.

Рассмотрение всюду не теоретико-модельное, а в духе "обычной" математики, т.е. работаем непосредственно с моделью без привлечения синтаксических понятий (логические формулы используются лишь для наглядности, чисто символически).

Доказательства теорем - технически громоздкие - опущены.

В заключение будет указан ряд возможностей непосредственного аксиоматического задания нечеткой топологии (п.3)

2. Индуцированная нечеткая топология

Приступим к решению поставленной в п.I.I задачи применительно к структуре топологического пространства $(X,\mathfrak{G})$

2.I. Нечеткие предикаты предельной и внутренней точек множества

2.I.I. Запишем указанные предикаты, обозначив их Π и O соответственно, в обычной логической символике в виде

$$\left.\begin{aligned} \Pi(x,A) &\leftrightarrow \forall G\in\mathfrak{G}_x \quad \exists y\,(y\in G\setminus\{x\}\ \&\ y\in A) \\ O(x,A) &\Leftrightarrow \exists G\in\mathfrak{G}_x \quad \forall y\,(y\in G\setminus\{x\}\to y\in A), \end{aligned}\right\}, \qquad (2.I)$$

где $\mathfrak{G}_x=\{G\in\mathfrak{G} \mid x\in G\}$

(Здесь подразумевается, что точка может быть внутренней для множества и не принадлежа ему).

Обозначив $A^\pi=\{x: \Pi(x,A)\}$, $A^o=\{x: O(x,A)\}$

введем операторы замыкания и взятия внутренности в виде

$$Z: A\to A^z \overset{\text{def}}{=} A\cup A^\pi;\quad V: A\to A^v \overset{\text{def}}{=} A\cap A^o. \qquad (2.2)$$

Построим соответствующие нечеткие предикаты, полагая по определению

$$\tilde\Pi(x,\mu)\overset{\text{def}}{=}\inf_{G\in\mathfrak{G}_x}\ \sup_{y\in G\setminus\{x\}} y\mu;\quad \tilde O(x,\mu)\overset{\text{def}}{=}\sup_{G\in\mathfrak{G}_x}\ \inf_{y\in G\setminus\{x\}} y\mu \qquad (\widetilde{2.I})$$

Интуитивная мотивировка для $\tilde\Pi$ уже приводилась выше, для $\tilde O$ она аналогична.

Снова обозначая $\mu^\pi: x\mapsto\tilde\Pi(x,\mu)$, $\mu^o: x\longmapsto\tilde O(x,\mu)$, вводим операторы замыкания и взятия внутренности на $\tilde{\mathfrak{B}}(X)$

$$\tilde Z:\mu\longrightarrow\mu^z\overset{\text{def}}{=}\mu\vee\mu^\pi;\quad \tilde V:\mu\longmapsto\mu^v\overset{\text{def}}{=}\mu\wedge\mu^o \qquad (\widetilde{2.2})$$

Поскольку в $\tilde{\mathfrak{B}}(X)$ справедлив принцип двойственности, то

$$\mu^{\pi c}=\mu^{co};\ \mu^{zc}=\mu^{cv},\ \mu^{oc}=\mu^{c\pi},\ \mu^{vc}=\mu^{cz}, \qquad (\widetilde{2.3})$$

и в дальнейшем достаточно работать, например, с $\tilde\Pi$ и $\tilde Z$

Отметим, что направляя систему окрестностей $\mathfrak{G}_x$ включением, можно μ^z и μ^v представить в виде:

$$x\mu^z=\inf_{G\in\mathfrak{G}_x}\ \sup_{y\in G} y\mu=\overline{\lim_{G\in\mathfrak{G}_x}}\ \sup_{y\in G} y\mu;\quad x\mu^v=\sup_{G\in\mathfrak{G}_x}\ \inf_{y\in G} y\mu=\underline{\lim_{G\in\mathfrak{G}_x}}\ \inf_{y\in G} y\mu, \qquad (\widetilde{2.4})$$

откуда видно, что $\tilde{Z}$ и $\tilde{V}$ есть известные операторы перехода к верхнему и нижнему пределам $\mathbb{R}$ -значной функции, заданной на топологическом про транстве [2].

Отсюда справедлива теорема:

для $\forall \alpha \in \tilde{\mathfrak{D}}(X)$ $\left.\begin{array}{l}\text{(i) если } \alpha = const \text{, то } \alpha^{z} = \alpha \\ \text{(ii), (iii) } \alpha^{zz} = \alpha^{z},\ \alpha < \alpha^{z} \\ \text{(iv) } (\alpha \vee \beta)^{z} = \alpha^{z} \vee \beta^{z}\end{array}\right\}$ $(\widetilde{2.5})$,

утверждения которой можно рассматривать как нечеткие аналоги аксиом Куратовского для обычного топологического оператора замыкания.

2.1.2. В четкой ситуации замыкание множества можно равносильно определить таким образом:

$$A^{z} = \bigcap \mathfrak{T}^{*}_{A},\ \mathfrak{T}^{*}_{A} = \{F \in \mathfrak{T}^{*} : A \subset F\} \qquad (2.6)$$

(Здесь и далее $\mathfrak{T}^{*} = \{F \subset X : F^{c} \in \mathfrak{T}\}$ - замкнутая топология).

Что мы имеем в нечетком случае?

Ключевым моментом здесь является введение на $\tilde{\mathfrak{D}}(X)$, наряду с отношением $\leq$, бинарного отношения нечеткого включения $\tilde{\subset} : \tilde{\mathfrak{D}}(X) \times \tilde{\mathfrak{D}}(X) \to [0,1]$

$$(\alpha \tilde{\subset} \beta) \overset{\text{Def}}{=} \inf_{x} x(\alpha \to \beta), \qquad (\widetilde{2.7})$$

расширяющего на $\tilde{\mathfrak{D}}(X)$ отношение включения четких множеств

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x\ (x \in A \to x \in B) \qquad (2.7)$$

(Напомним, что $\alpha \to \beta \overset{\text{Def}}{=} \alpha^{c} \vee \beta$).

Точно также введем на $\tilde{\mathfrak{D}}(X)$ наряду с обычным равенством функций бинарное отношение нечеткого равенства

$$\simeq : \tilde{\mathfrak{D}} \times \tilde{\mathfrak{D}} \to [0,1]$$

$$\alpha \simeq \beta \overset{\text{Def}}{=} (\alpha \tilde{\subset} \beta) \wedge (\beta \tilde{\subset} \alpha), \qquad (\widetilde{2.8})$$

расширяющее на $\tilde{\mathfrak{D}}(X)$ отношение равенства четких множеств

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \,\&\, (B \subset A). \qquad (2.8)$$

$(\widetilde{2.7})$, $(\widetilde{2.8})$ трактуются как степень того, что " $\alpha \subset \beta$ " и степень того, что " $\alpha = \beta$ ", при понимании α и β как "множеств", а не как функций.

Отметим, что если $\alpha \in \tilde{\mathfrak{D}} \setminus \mathfrak{D}$, то $(\alpha \tilde{\subset} \alpha) < 1$, $(\alpha \simeq \alpha) < 1$

И, наконец, расширим определение $(\widetilde{I.2})$ пересечения и объединения семейства нечетких множеств (α_i), $i \in I$ на случай нечеткого семейства $\tilde{I} : \tilde{\mathfrak{D}}(X) \to [0,1]$

$$x(\wedge\tilde{\Gamma}) \overset{\text{Def}}{=} \inf_{\alpha\in\mathfrak{Z}}(\alpha\tilde{\Gamma}\to x\alpha); \quad x(\vee\tilde{\Gamma}) \overset{\text{Def}}{=} \sup_{\alpha\in\mathfrak{Z}}(\alpha\tilde{\Gamma}\wedge x\alpha). \qquad (\tilde{2.9})$$

Вернемся к (2.6). Для фиксированного α введем нечеткую систему четких замкнутых множеств $\tilde{\mathfrak{T}}^*_\alpha$, которая есть отображение $\mathfrak{T}^*$ в $[0,1]$ $F\to(\alpha\tilde{\subset}\chi_F)$, $(F\in\mathfrak{T}^*$ χ_F его характеристическая функция) и рассмотрим ее пересечение $(\tilde{2.9})$:

$$x(\wedge\tilde{\mathfrak{T}}^*_\alpha)=\inf_{F\in\mathfrak{T}^*}(F\tilde{\mathfrak{T}}^*_\alpha\to x\chi_F)=\inf_{F\ni x}\{1-(\alpha\tilde{\subset}\chi_F)\}=\inf_{G\in\mathfrak{G}_x}\sup_{y\in G}y\alpha$$

Сопоставляя с $(\tilde{2.3})$, убеждаемся, что имеет место

<u>Теорема.</u> $\alpha^* = \wedge\tilde{\mathfrak{T}}^*_\alpha$; где $\tilde{\mathfrak{T}}^*_\alpha: S\to[0,1], F\tilde{\mathfrak{T}}^*_\alpha=(\alpha\tilde{\subset}F)$ $(\tilde{2.6})$

2.I.3. В четкой топологии понятие предельной точки можно определить в терминах направленностей, что в логической символике запишется в виде

$$\Pi_s(x,A)\leftrightarrow\exists S(\forall n\in D(S_n\in A\setminus\{x\})\,\&\,x=\lim_{n\in D}S_n), \qquad (2.10)$$

где D есть направленное множество, $S: D\to X$

Тогда соответствующий нечеткий предикат естественно определить как

$$\tilde{\Pi}_s(x,\alpha)\overset{\text{Def}}{=}\sup_{\substack{S\\ \lim S_n=x}}\inf_{n\in D}S_n(\alpha\setminus\{x\}) \qquad (\tilde{2.10})$$

где $\quad y(\alpha-\{x\})=\begin{cases}y\alpha, & \text{если } y\neq x\\ 0, & \text{если } y=x\end{cases}.$

В $(\tilde{2.10})$ $\inf\{S_n(\alpha\setminus\{x\}): n\in D\}$ есть степень того, что направленность S "лежит в $(\alpha\setminus\{x\}$ ", а $\sup$ "выбирает" среди всех направленностей, сходящихся к x "наиболее лежащую в $(\alpha\setminus\{x\})$ ".

В четкой топологии предикаты (2.I) и (2.I0) равносильны, это же имеет место и для их нечетких аналогов.

<u>Теорема.</u> $\tilde{\Pi}(x,\alpha)=\tilde{\Pi}_s(x,\alpha)$ для любых x и α $(\tilde{2.1})$

Доказательство этой и других подобных теорем заключается в построении цепочек неравенств (аналогов цепочек вывода в логике) в ту и другую сторону. Вследствие несправедливости в $\mathfrak{F}(X)$ пары аксиом дополнения и modus ponens, такое построение нетривиально.

2.2. Нечеткие предикаты замкнутости и открытости нечеткого множества

2.2.I. Будем исходить из формулировки четкого предиката замкнутости (открытости) множества в терминах точек прикосновения (внутренних точек):

$A \in \mathfrak{T}^* \Leftrightarrow \forall x (x \in A^{\mathfrak{z}} \to x \in A)$; $A \in \mathfrak{T} \Leftrightarrow \forall x (x \in A \to x \in A^{\circ})$. (2.I2)

Определим соответствующие нечеткие предикаты

$\tilde{\mathfrak{T}}^*(\alpha) \overset{Def}{=} \inf_x x(\alpha^{\mathfrak{z}} \to \alpha)$; $\tilde{\mathfrak{T}}(\alpha) \overset{Def}{=} \inf_x x(\alpha \to \alpha^{\circ})$. $(\widetilde{2.I2})$

Из $(\widetilde{2.3})$ легко видеть, что эти определения двойственны:

Теорема. $\tilde{\mathfrak{T}}^*(\alpha) = \tilde{\mathfrak{T}}(\alpha^c)$ $(\widetilde{2.I3})$

Поэтому далее достаточно работать с нечеткой замкнутостью.

В четкой топологии $A \in \mathfrak{T}^* \Leftrightarrow A = A^{\mathfrak{z}}$ – это почти то же самое, что (2.I2). В нечетком случае – с введением определения $(\widetilde{2.8})$ – справедлива аналогичная

Теорема. $\tilde{\mathfrak{T}}^*(\alpha) = (\alpha \approx \alpha^{\mathfrak{z}})$ $(\widetilde{2.I4})$

Поэтому если $\alpha \in \tilde{\mathfrak{B}} \setminus \mathfrak{B}$, то несмотря на $\alpha = \alpha^{\mathfrak{z}}$, $\tilde{\mathfrak{T}}^*(\alpha) < 1$

Отметим ещё, что справедливо неравенство

$$\tilde{\mathfrak{T}}^*(\alpha) \leq \tilde{\mathfrak{T}}^*(\alpha^{\mathfrak{z}}), \qquad (\widetilde{2.I5})$$

однако даже и для $\alpha \neq \alpha^{\mathfrak{z}}$ здесь возможно равенство (соответствующий пример легко строится уже в $(X, \mathfrak{T}) = \mathbb{R}$). Для введенной в $(\widetilde{I.5})$ степени замкнутости $\tilde{\mathfrak{T}}^*_{\mathfrak{z}}$ в пространствах, не удовлетворяющих первой аксиоме отделимости, $(\widetilde{2.I5})$ не справедливо в общем случае.

2.2.2. В четкой ситуации имеем импликации:

$\Sigma \subset \mathfrak{T}^* \Rightarrow \bigcap \Sigma \in \mathfrak{T}^*$; $A, B \in \mathfrak{T}^* \Rightarrow (A \cup B) \in \mathfrak{T}^*$. (2.I6)

Для определенной в $(\widetilde{2.I2})$ $\tilde{\mathfrak{T}}^*$ (и $\tilde{\mathfrak{T}}^*_{\mathfrak{z}}$) верна аналогичная

Теорема. Для любой четкой системы нечетких множеств

(i) $\inf_{\alpha \in \Sigma} \tilde{\mathfrak{T}}^*(\alpha) \leq \tilde{\mathfrak{T}}^*(\wedge \Sigma)$,

и для любых нечетких множеств α, β $(\widetilde{2.I6})$

(ii) $\tilde{\mathfrak{T}}^*(\alpha) \wedge \tilde{\mathfrak{T}}^*(\beta) \leq \tilde{\mathfrak{T}}^*(\alpha \vee \beta)$.

(Левую часть (i) можно также записать как $(\Sigma \subseteq \tilde{\mathfrak{T}}^*)$).

2.2.3. Отображение $f: X \to Y$ индуцирует отображения $\tilde{f}: \tilde{\mathfrak{B}}(X) \to \tilde{\mathfrak{B}}(Y)$ и $\tilde{f}^{-1}: \tilde{\mathfrak{B}}(Y) \to \tilde{\mathfrak{B}}(X)$ по правилам:

$\alpha \in \tilde{\mathfrak{B}}(X), \beta \in \tilde{\mathfrak{B}}(Y)$ $x(\beta \tilde{f}^{-1}) = (xf)\beta$; $y(\alpha \tilde{f}) = \sup_{x \in yf^{-1}} x\alpha$ (2.I7)

Очевидно, что ограничения $\tilde{f}^{-1}$ и $\tilde{f}$ на четких булеанах совпадают с обычными отображениями образа и прообраза множества.

Для определенных выше нечетких предикатов верна теорема, обобщающая свойства непрерывных отображений топологических пространств на нечеткую ситуацию.

<u>Теорема.</u> Пусть $f: (X, \mathfrak{T}) \to (Y, \Sigma)$ – непрерывно. Тогда для любых $\alpha \in \mathfrak{F}(X)$, $\beta \in \mathfrak{F}(Y)$ справедливы неравенства: $\alpha^{z} f \le (\alpha f^{1})^{z}$; $(\beta f^{-1})^{z} \le \beta^{z} f^{-1}$; $\mathfrak{T}^{*}(\beta f^{-1}) \ge \Sigma^{*}(\beta)$; $\mathfrak{T}(\beta f^{-1}) \ge \Sigma(\beta)$.

2.3. Нечеткая бикомпактность нечеткого множества

2.3.I. Предикат бикомпактности B в четком случае представим в виде

$$B(A) \leftrightarrow \forall \Sigma \subset \mathfrak{T}(A \subset \cup \Sigma \to \exists \Sigma_{F} \subset \Sigma (X \subset \cup \Sigma_{F})), \qquad (2.18)$$

где Σ_{F} есть конечная система множеств.

Определим нечеткую бикомпактность $\tilde{B}: \mathfrak{F}(X) \to [0,1]$

$$\tilde{B}(\alpha) \overset{\mathrm{def}}{=} \inf_{\Sigma \subset \mathfrak{T}} [(\alpha \tilde{\subset} \cup \Sigma) \to \sup_{\Sigma_{F} \subset \Sigma} (\alpha \tilde{\subset} \cup \Sigma_{F})] \qquad (\widetilde{2.18})$$

Интуитивный смысл этого определения очевиден.

Двойственным образом, в терминах центрированных систем замкнутых множеств, (2.18) записывается в виде

$$B(A) \leftrightarrow \inf_{\Phi \subset \mathfrak{T}^{*}} [C(\Phi, A) \to (\cap \Phi) \cap A \ne \emptyset], \qquad (2.19)$$

где $C(\Phi, A) \leftrightarrow \forall \Phi_{F} \subset \Phi ((\cap \Phi_{F}) \cap A \ne \emptyset)$ есть предикат центрированности системы Φ относительно множества A (Φ_{F} – конечная система).

По двойственности в $\mathfrak{F}(X)$ легко проследить, что $(\widetilde{2.18})$ также допускает равносильную формулировку

$$\tilde{B}(\alpha) = \inf_{\Phi \subset \mathfrak{T}^{*}} [\tilde{C}(\Phi, \alpha) \to \sup_{x \in \cap \Phi} x\alpha], \qquad (\widetilde{2.19})$$

где $\tilde{C}(\Phi, \alpha) = \inf_{\Phi_{F} \subset \Phi} \sup_{x \in \cap \Phi_{F}} x\alpha$.

2.3.2. Четкая бикомпактность имеет равносильное определение в терминах направленностей:

$$B_{S}(A) \leftrightarrow \forall S [S(D) \subset A \to \exists x (x \in A \,\&\, x = \lim_{n \in D} S_{n})], \qquad (2.20)$$

где снова D – направленное множество, $S: D \to X$, соответствующий нечеткий предикат определим как

$$\tilde{B}_{S}(\alpha) \overset{\mathrm{def}}{=} \inf_{S} [(S(D) \tilde{\subset} \alpha) \to \sup_{x = \lim S_{n}} x\alpha] \qquad (\widetilde{2.20})$$

Как и в четком случае, можно доказать равносильность

$(\widetilde{2.20})$ и $(\widetilde{2.18})$.

Теорема. $\forall \mathcal{A} \in \mathfrak{Z}(X)$ $\widetilde{B}(\mathcal{A}) = \widetilde{B}_0(\mathcal{A})$

2.3.3. Венцом исследований введенных нечетких предикатов является следующий результат:

Теорема. (i) Если $(X, \mathcal{T})$ хаусдорфово, то $\forall \mathcal{A}$ $\widetilde{B}(\mathcal{A}) \leq \widetilde{\mathcal{T}}^*(\mathcal{A})$
(ii) Если $(X, \mathcal{T})$ бикомпактно, то $\forall \mathcal{A}$ $\widetilde{\mathcal{T}}^*(\mathcal{A}) \leq \widetilde{B}(\mathcal{A})$, демонстрирующий "идеальное" обобщение логических связей четких предикатов на их индуцированные нечеткие аналоги.

Отметим, что для меры замкнутости $\widetilde{\mathcal{T}}_T^*$ (I.5) эта теорема не верна.

2.3.4. Непрерывные отображения "сохраняют" также и нечеткую бикомпактность.

Теорема. Если $f: (X, \mathcal{T}) \to (Y, \Sigma)$ непрерывно, то $\widetilde{B}(\mathcal{A}) \leq \widetilde{B}(\mathcal{A} f^{-1})$

2.4. Приведенные результаты наводят на мысль, что должна быть справедлива следующая общая метатеорема T : если в четкой ситуации для предикатов Θ и Ω справедлива импликация $\Theta \Rightarrow \Omega$, то для их нечетких аналогов $\widetilde{\Theta}$ и $\widetilde{\Omega}$, индуцированных нечеткостью множеств, справедливо неравенство $\widetilde{\Theta} \leq \widetilde{\Omega}$. Чтобы говорить о такой метатеореме, нужна, разумеется, однозначная формальная процедура построения по предикату Θ его нечеткого аналога $\widetilde{\Theta}$. Таким образом, мы естественно приходим к необходимости рассмотрения логических формул языка, которым мы "записываем" утверждения о рассматриваемой структуре, и трактовке нечетких предикатов как специальным образом устроенных интерпретаций таких формул (об этом уже говорилось в п.I.2.). Так, например, определения $(\widetilde{2.1})$, $(\widetilde{2.10})$, $(\widetilde{2.18})$, $(\widetilde{2.20})$ получались из соответствующих формул четкой интерпретацией предикатных символов, входящих в подформулы со связанными переменными для множеств, и нечеткой - для подформул со свободной переменной для множеств. Некоторая общая тенденция просматривается, однако необходимая строго формальная процедура построения $\widetilde{\Theta}$ по Θ не могла быть выявлена, поскольку все рассмотрения были сугубо семантическими, а логическая символика использовалась лишь для наглядности и облегчения изложения неформальных соображений.

В пределах строгого синтаксического подхода уже получены некоторые соображения, позволяющие надеяться на построение указанной формальной процедуры, для которой справедлива метатеорема T, однако их обсуждение выходит за рамки настоящей статьи.

3. Аксиоматические нечеткие топологии

3.I. В построениях п.2 исходной была обычная "четкая" математическая структура топологического пространства, а нечеткость предикатов на $\tilde{\mathfrak{P}}(X)$ индуцировалась нечеткостью множеств. Однако поскольку в этой структуре имеется непосредственно аксиоматически заданный, а не произвольный, предикат второго порядка - сама топология $\mathfrak{T}$, то появляется возможность рассматреть структуру с непосредственно заданным нечетким предикатом $\tilde{\mathfrak{T}}: \tilde{\mathfrak{P}}(X) \to [0,1]$, подчинив его аксиомам, которые бы в четкой ситуации переходили в обычные аксиомы топологии:

$$\Sigma \subset \mathfrak{T} \Rightarrow \bigcup \Sigma \in \mathfrak{T}; \quad \Sigma_p \subset \mathfrak{T} \to \bigcap \Sigma_p \in \mathfrak{T} \qquad (3.I)$$

(Σ_p есть конечная система множеств).

Можно предложить ряд различных наборов аксиом нечеткости $\tilde{\mathfrak{T}}$, вырождающихся в (3.I) в четком случае, соответственно этому имеем несколько вариантов аксиоматических нечетких топологий.

3.2. Естественным представляется введение такой структуры - пара $(X, \tilde{\mathfrak{T}})$ $\tilde{\mathfrak{T}}: \tilde{\mathfrak{P}}(X) \to [0,1]$ и для $\tilde{\mathfrak{T}}$ справедливы аксиомы

$$(\Sigma \tilde{\subset} \tilde{\mathfrak{T}}) \leq (\vee \Sigma) \quad \text{или} \quad \inf_{A \in \Sigma} \tilde{\mathfrak{T}}(A) \leq \tilde{\mathfrak{T}}(\vee \Sigma) \qquad (3.2)$$

$$(\Sigma_p \tilde{\subset} \tilde{\mathfrak{T}}) \leq \tilde{\mathfrak{T}}(\wedge \Sigma_p) \quad \text{или} \quad \min_{A \in \Sigma_p} \tilde{\mathfrak{T}}(A) \leq \tilde{\mathfrak{T}}(\wedge \Sigma_p)$$

Здесь Σ, Σ_p - четкие системы нечетких множеств.

Именно таким условиям удовлетворяет индуцированная нечеткая топология п.2 (теорема 2.Тб).

Можно предложить и "более нечеткие" аксиомы для $\tilde{\mathfrak{T}}$, если рассматривать нечеткие системы $\tilde{\Sigma}$ нечетких множеств $\tilde{\Sigma}: \tilde{\mathfrak{P}}(X) \to [0,1]$, и понимать "конечность" $\tilde{\Sigma}_p$ как его отличие от 0 лишь на конечном подмножестве аргументов (объединение и пересечение нечетких систем нечетких множеств определены в $(\widetilde{2.9})$).

Интересным представляется также рассмотрение нечеткой топологии на четких множествах, т.е. структуры $(X, \tilde{\mathfrak{T}})$, $\tilde{\mathfrak{T}}: \mathfrak{P}(X) \to [0,1]$, и $\tilde{\mathfrak{T}}$ удовлетворяет, например, аксиомам (3.2), где Σ, Σ_F есть системы четких множеств.

Для всех указанных топологий мы можем для фиксированного $\alpha \in \tilde{\mathfrak{P}}(X)$ ввести

$$\mathfrak{T}^*_\alpha: \tilde{\mathfrak{P}}(X) \to [0,1], \; \mathfrak{T}^*_\alpha(\beta) = \mathfrak{T}^*(\beta) \wedge (\alpha \subseteq \beta).$$

(т.е. $\mathfrak{T}^*_\alpha$ есть система замкнутых множеств, содержащих α), и положить по определению $\alpha^z = \wedge \mathfrak{T}^*_\alpha$ – таким образом строится оператор замыкания $\alpha \to \alpha^z$.

Отметим, что и в случае нечеткой топологии на четких множествах, $\mathfrak{T}^*_A$ есть нечеткая система множеств и $A^z = \wedge \mathfrak{T}^*_A$ есть нечеткое множество. Поэтому мы не сможем ограничиться рассмотрением лишь $\mathfrak{P}(X)$ и придется доопределять $\mathfrak{T}$ на $\tilde{\mathfrak{P}}(X)$.

3.3. Еще один путь введения аксиоматической нечеткой топологии – задание на $\tilde{\mathfrak{P}}(X)$ оператора замыкания $\tilde{Z}$, удовлетворяющего "нечетким" условиям Куратовского $(\widetilde{2.5})$, а далее введение замкнутой топологии на $\tilde{\mathfrak{P}}(X)$ соотношением $\tilde{\mathfrak{T}}^*(\alpha) \overset{Def}{=} (\alpha \approx \tilde{Z}(\alpha))$

3.4. Отметим, наконец, что структура, введенная С.Чангом [4] – $(X, \mathfrak{T})$, $\mathfrak{T}: \tilde{\mathfrak{P}}(X) \to \{0,1\}$ и называемая в настоящее время нечеткой топологией, с развитой здесь точки зрения должна именоваться четкой топологией на нечетких множествах.

Литература

1. Н.Бурбаки. Теория множеств.-М., 1965.
2. Н.Бурбаки. Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства.-М., 1969.
3. Р.Сикорский. Булевы алгебры.-М., 1969.
4. S.Chang. Fuzzy topological spaces. - J.Math. Anal. Appl. 1968, v.24, p.182-190.

Поступила 26 октября 1984 года

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1985.

УДК 513.88

НОРМАЛЬНО РАЗРЕШИМЫЕ ОПЕРАТОРЫ С БЕСКОНЕЧНОЙ (n, d) - ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

Б.Ф.Иванов
ЛГУ им.П.Стучки

Пусть X и Y - банаховы пространства, A - линейный замкнутый оператор, действующий из X в Y т.е. $A: X \to Y$. Введем обозначения

$$n = \dim \operatorname{Ker} A \quad , \quad d = \dim \operatorname{Ker} A^*$$

Число d называется дефективным числом оператора A. Упорядоченную пару чисел (n, d) называют (n, d)-характеристикой оператора A. Если оба числа n и d конечные, то о (n, d)-характеристике оператора A говорят, что она конечна. Если только одно из чисел n или d конечно, то (n, d) характеристику оператора A зывают полубесконечной. И, наконец, если оба числа n и d бесконечны, то (n, d)-характеристику называют бесконечной.

Операторы с конечной или полубесконечной (n, d)-характеристикой обладают устойчивостью свойства нормальной разрешимости относительно любых малых (по норме операторов) возмущений, а также относительно всех вполне непрерывных возмущений (см. [1] , [2]). Если же не делать предположения о конечности по крайней мере одного из чисел n и d т.е. считать оператор A только линейным и замкнутым, то можно утверждать, что замкнутость $R(A)$ (замкнутость $R(A)$ равносильна нормальной разрешимости оператора A) устойчива при возмущениях A произвольными непрерывными операторами конечного ранга [3] . Ясно, что в этом случае возмущающие операторы образуют весьма тонкий слой в пространстве $\mathcal{L}(X, Y)$ всех линейных ограниченных операторов, отображающих X в Y . М.А.Гольдман в [2] показал, что "если A - нормально разрешимый оператор с бесконечной (n, d)-характеристикой, то всегда возможно прибавлением к нему оператора сколь угодно малого по норме или вполне непрерывного нарушить его нормальную разрешимость и даже бесконечность его (n, d)-характеристики". М.А.Гольдман и С.Н.Крачковский [3] рассмотрели промежуточный случай, когда n и d произвольны, но множество $\mathfrak{Ker}\, A$, с которым связана $n = \dim \mathfrak{Ker}\, A$, подчинено известным ограничениям, позволяющим выделить определенный класс возмущений, сохраняющих замкнутость области значений и некоторые другие свойства оператора A . Речь идет о следующих условиях, налагаемых на оператор A .

1°. Оператор A нормально разрешим.

2°. (n, d)-характеристика оператора A бесконечна.

3°. Существует непрерывный оператор проектирования на ядро данного оператора.

4°. $\dim (\mathfrak{Ker}\, A \setminus \mathfrak{Ker}\, A \bigcap_{n=1}^{\infty} R(A^n)) < \infty$.

Заметим, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} R(A^n)$ называют ядром Рисса оператора A и обозначают $\mathfrak{R}(A)$. Условие 4° означает, что ядро оператора A образует на риссовом ядре не более чем конечномерный выступ.

Целью данной заметки является указать примеры операторов, удовлетворяющих условиям 1° и 2°. На то, что это не простой вопрос, указывает тот факт, что среди сингулярных интегральных операторов на простом контуре или среди одномерных операторов Теплица таковых не имеется. Построенные примеры должны послужить отправным пунктом для отыскания операторов, удовлетворяющих условиям 1°-4° и исследования их свойств.

1. Нормально разрешимые сингулярные интегральные операторы с бесконечной (n, d)-характеристикой

Пусть $\mathcal{M}$ - конечное множество попарно дизъюнктных простых замкнутых кривых типа Ляпунова на комплексной плоскости. $\Gamma = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} M$

Кривая Γ определяет разбиение расширенной комплексной плоскости $\bar{\mathbb{C}}$ на дизъюнктные открытые множества $\mathfrak{F}^+$ и $\mathfrak{F}^-$.

$$\bar{\mathbb{C}} = \mathfrak{F}^+ \cup \mathfrak{F}^- \cup \Gamma, \quad \infty \in \mathfrak{F}^-$$

В пространстве $L^2(\Gamma)$ рассматривается ограниченный линейный оператор T , определяемый сингулярным уравнением

$$(T\varphi)(t)=c(t)\varphi(t)+\frac{d(t)}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau \qquad (t\in\Gamma)$$

с непрерывными коэффициентами c и d. Стандартным приемом оператор T представляют в виде $T=aP+bQ$, где $P=\frac{1}{2}(I+S)$, $Q=\frac{1}{2}(I-S)$, S – оператор, определяемый равенством $(S\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau$ $(t\in\Gamma)$,

$a=a(t)=\frac{c(t)+d(t)}{2}$, $b=b(t)=\frac{c(t)-d(t)}{2}$.

Оператор P есть проектор, проектирующий $L^p(\Gamma)$ на множество тех функций из $L^p(\Gamma)$, для которых $S\varphi=\varphi$.

Теорема I. Пусть множество $\mathfrak{M}^\Gamma$ связно; $b(t)\neq 0$ всюду на Γ, $a(t)\neq 0$ всюду на Γ, исключая некоторое подмножество $\mathcal{M}\subset M$ и $a(t)=0$ для всех $t\in\bigcup_{M\in\mathcal{M}}M$. Тогда оператор $T=aP+bQ$ будет нормально разрешим с бесконечной (n, d)-характеристикой.

Доказательство этой теоремы основано на ряде теорем из [4] В условиях теоремы I функции a и b будут нормальными, т.е. они на каждой кривой $M\in\mathcal{M}$ удовлетворяют условию: либо a и b отличны от нуля для всех $t\in M$ либо a и b есть тождественные нули на M. Отметим, что нормальность функций a и b является необходимым условием нормальной разрешимости оператора T, а для простого контура Γ и достаточным. Бесконечность (n, d)-характеристики вытекает из того, что в условиях теоремы оператор T будет нормально разрешимым, но ни Φ^{+}_{-}, ни Φ-оператором не будет.

2. Нормально разрешимые операторы Теплица с бесконечной (n, d)-характеристикой

Пусть Γ – единичная окружность, $H_2(\Gamma)$ – пространство Харди функций на Γ, H_2 – замыкание по норме $L_2(\Gamma\times\Gamma)$ алгебраического тензорного произведения $H_2(\Gamma)\otimes H_2(\Gamma)$, P – ортопроектор из $L_2(\Gamma\times\Gamma)$ на H_2. Оператором Теплица T_a в пространстве H_2, отвечающим непрерывной на $\Gamma\times\Gamma$ функции $a(t_1,t_2)$ называется оператор, определяемый формулой

$$T_a(f)=P(af),\quad f\in H_2$$

Функцию $a(t_1,t_2)$ будем называть символом оператора T_a. Через $T(H_2)$ обозначим C^* - подалгебру алгебры всех линейных, ограниченных операторов, действующих в H^2, порожденную операторами Теплица. Через $C^{++}_{--}(\Gamma\times\Gamma)$ обозначим подалгебру алгебры $C(\Gamma\times\Gamma)$, непрерывных на $\Gamma\times\Gamma$ функций, состоящую из функций, допускающих аналитическое продолжение в соответствующую бицилиндрическую область

$$\mathfrak{X}^{++}\{|t_1|\leq 1,\ t_2\geq 1\}$$

Топологическим индексом не обращающейся в нуль непрерывной на H_2 функции $a(t_1,t_2)$ будем называть пару целых чисел $(\varkappa,\mu)$, вычисляемых следующим образом: $\varkappa$ и μ являются числами вращения (порядками) кривых $a(t_1,1)$ и $a(1,t_2)$ соответственно, относительно начала координат.

Предложение I. Оператор T_a является Φ -оператором тогда и только тогда, когда его символ и топологический индекс удовлетворяют условиям

1) $a(t_1,t_2)\neq 0$ на $\Gamma\times\Gamma$,

2) $ind\, a(t_1,1)=0$, $ind\, a(1,t_2)=0$. [5]

Мы покажем теперь важность "топологического индекса" в случаях, когда он отличен от нуля.

Теорема 2 [6] . Рассмотрим множество теплицевых операторов в H_2 , имеющих не обращающийся в нуль символ и топологический индекс $(\varkappa,\mu)$ для фиксированных целых чисел $\varkappa$ и μ .

Если $\varkappa,\mu>0$ и $\varkappa+\mu>0$, то оператор T_a нормально разрешим, T_a имеет нулевое ядро и бесконечное коядро.

в) Если $\varkappa$, $\mu<0$ и $\varkappa+\mu<0$, то область значений T_a замкнута, а нулевое коядро T_a бесконечномерно.

с) Если $\varkappa$ и μ имеют противоположные знаки, то подмножество операторов среди них, имеющих как бесконечномерное ядро, так и бесконечномерное коядро, содержит плотное подмножество.

Лемма I. Пусть функция $a(t_1,t_2)$ такова, что $\varkappa$ и μ имеют противоположные знаки, где $(\varkappa,\mu)$ - топологический индекс функции $a(t_1,t_2)$. Если оператор Теплица T_a , порожденный этой функцией, нормальноразрешим, то он имеет бесконечную (n,d)-характеристику.

Доказательство проведем, предполагая противное, т.е. полагаем, что T_a в условиях теоремы имеет по крайней мере полубесконечную (n,d)-характеристику. Это вступает в противоречие с плотностью операторов с бесконечной (n,d)-характеристикой (теорема 2,с)) и устойчивостью полубесконечности характеристики.

Теорема 3. Пусть функция $a(t_1,t_2) \in C(\Gamma\times\Gamma)$ не обращается в нуль и допускает факторизацию вида

$$a(t_1,t_2)=a_{++}(t_1,t_2)a_{+-}(t_1,t_2)\cdot t_1^{æ}\cdot t_2^{\mu}\, a_{-+}(t_1,t_2)a_{--}(t_1,t_2) \quad ,$$

где $a^{\pm}_{\pm}(t_1,t_2) \in C^{\pm}(\Gamma\times\Gamma)$, $æ,\mu < 0$.

Если $æ < 0$ ($æ > 0$) и функция $a^{-1}_{+-}(t_1,t_2)(a^{-1}_{-+}(t_1,t_2))$ является полиномом по одной из переменных t_1 , t_2 , то оператор T_a является нормально разрешимым и имеет бесконечную (n, d)-характеристику.

Доказательство. Нормальная разрешимость T_a доказана в [5] . Бесконечность (n, d)-характеристики вытекает из леммы I.

Литература

I. Аткинсон Ф.В. Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах. - Матем. сб., 1951, т.28:I, с.3-I4.

2. Гольдман М.А. Об устойчивости свойства нормальной разрешимости уравнений. - ДАН СССР, 1955, т.100, № 2.

3. Гольдман М.А., Крачковский С.Н. О возмущении гомоморфизмом операторами конечного ранга. - ДАН СССР, 1967, т.174, № 4.

4. Лайтерер Ю. О нормальной разрешимости сингулярных интегральных уравнений на непростом контуре. - В кн.: Математические исследования, т. VI, вып.2(20). - Кишинев, 1971, с.105-112.

5. Сазонов Л.И. О нормальной разрешимости двумерных операторов Теплица. - Математические заметки, 1981, т.30, № 2, с. 261-268.

6. Douglas R.G., Howe R., On the C-algebra of Toeplitz operators on the quarter-plane. Trans.Amer.Math.Soc., 1971, vol.158, p.203-218.

Поступила 1 октября 1984 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1985.

УДК 517.98

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ПОНЯТИЯ ВОГНУТОСТИ ПО М.А.КРАСНОСЕЛЬСКОМУ

М.Л.Катков
Уральский государственный университет

М.А.Красносельским было введено и изучено понятие монотонного вогнутого оператора. Это понятие было существенным образом обобщено В.И.Опойцевым, который рассматривал так называемые гетеротонные операторы. Введенное им понятие гетеротонности позволило распространить известные для монотонных вогнутых операторов результаты на некоторый специальный класс, вообще говоря, не монотонных операторов. В настоящей заметке дается определение оператора медленного роста. Это определение позволяет выделить классы монотонных операторов отличные от класса вогнутых, с такими же свойствами, что и вогнутых операторов.

§ I. Определение одной специальной метрики

Пусть X – банахово пространство, полуупорядоченное конусом K, R – множество действительных чисел с естественным порядком и расстоянием, M – некоторое подмножество пространства X, R^+ – множество неотрицательных действительных чисел.

Определение I. На произведении $R^+ \times M$ рассмотрим оператор $\mathcal{U}: R^+ \times M \longrightarrow M$. Относительно оператора $\mathcal{U}$ будем предполагать, что он удовлетворяет следующим условиям.

I. Оператор $\mathcal{U}$ непрерывен.

2. Монотонен по переменной x и монотонен либо антимонотонен по переменной t.

3. Для любого $x \in M$ равенство $\mathcal{U}(t,x) = x$ выполняется тогда и только тогда, когда $t = 0$.

4. Для любых $t_1, t_2 \in R^+$ и для любого $x \in M$ выполняется равенство $\mathcal{U}(t_1 + t_2, x) = \mathcal{U}(t_1, \mathcal{U}(t_2, x))$.

Множество всех значений $\mathcal{U}(t,x)$ оператора $\mathcal{U}$, удовлетворяющего условиям I–4, при фиксированном $x \in M$ будем называть траекторией, а сам оператор $\mathcal{U}$ – оператором сдвига по траекториям множества M

<u>Определение 2.</u> Оператор сдвига по траекториям множества M будем называть нормальным, если он определен на множестве $R \times M$ и удовлетворяет условиям I–4 на всем этом множестве.

Оператор сдвига по траекториям множества M порождает на некоторых подмножествах M метрические пространства. Пусть x_0 произвольный элемент множества M. Составляющей множества M, порожденной элементом x_0 и оператором сдвига $\mathcal{U}$, будем называть множество таких элементов $y \in M$ для которых при некотором $t > 0$ выполняется система неравенств

$$x_0 \le \mathcal{U}(t,y) \quad , \quad y \le \mathcal{U}(t,x_0) \qquad (I)$$

либо система неравенств

$$\mathcal{U}(t,x_0) \le y \quad , \quad \mathcal{U}(t,y) \le x_0 \qquad (2)$$

Обозначать составляющую, порожденную элементом x_0 и оператором сдвига $\mathcal{U}$, будем символом $K(x_0,\mathcal{U})$. Очевидно, $y \in K(x,\mathcal{U})$ тогда и только тогда, когда $x \in K(y,\mathcal{U})$ Поэтому любые две составляющие совпадают или не пересекаются.

На множестве $K(x_0,\mathcal{U}) \times K(x_0,\mathcal{U})$ определим с помощью оператора сдвига $\mathcal{U}$ метрику. Для произвольных x и y из $K(x_0,\mathcal{U})$ величину $\rho(x,y)$ положим равной минимальному t, при котором выполняется система (I), если оператор $\mathcal{U}$ монотонен по переменной t, и положим эту величину равной минимальному t, при котором выполняется система (2), если оператор $\mathcal{U}$ антимонотонен по переменной t Выполнение аксиом метрики очевидно.

<u>Пример I.</u> Пусть M множество всех отличных от нуля элементов конуса K Оператор $\mathcal{U}$ определим равенством

$$\mathcal{U}(t,x) = e^{t} \cdot x \qquad (3)$$

Условия I–4 легко проверяются Составляющей, порожденной любым ненулевым элементом x_0 из K и данным оператором $\mathcal{U}$ является множество элементов, удовлетворяющих при некотором $t > 0$ неравенству $e^{-t} x_0 \le x \le e^{t} x_0$. Полученная в этом случае метрика хорошо известна (см. [2]).

Пример 2. Пусть множество M совпадает со всем пространством, u_0 – произвольный ненулевой элемент из конуса K. Оператор $\mathcal{U}$ определим равенством $\mathcal{U}(t,x)=x+tu_0$. Составляющей, порожденной элементом $x_0\in X$ и оператором $\mathcal{U}$, является "сдвинутое" на x_0 пространство E_{u_0} (пространство u_0-измеримых элементов [I]). Метрика, которая получается в этом случае, рассматривалась в [4] .

Рассмотрим один способ определения операторов сдвига. Пусть M некоторое подмножество пространства X, u_0 – произвольный ненулевой элемент из конуса K, Φ монотонный гомеоморфизм, определенный на множестве M, такой, что отображение Φ^{-1} также монотонно и выполняется одно из соотношений:

$$\forall t>0 \quad \Phi(M)+tu_0\subset\Phi(M) \tag{4}$$

$$\forall t>0 \quad \Phi(M)-tu_0\subset\Phi(M) \tag{5}$$

Оператор $\mathcal{U}$ при выполнении включения (4) определим равенством

$$\mathcal{U}(t,x)=\Phi^{-1}(\Phi(x)+tu_0) , \tag{6}$$

а при выполнении соотношения (5) равенством

$$\mathcal{U}(t,x)=\Phi^{-1}(\Phi(x)-tu_0) \tag{7}$$

Операторы, определенные равенствами (6) и (7), являются операторами сдвига по траекториям множества M. Составляющей $K(x_0,\mathcal{U})$ в данном случае является множество всех $x\in M$, удовлетворяющих при некотором $t>0$ неравенству

$$\Phi(x_0)-tu_0\leqslant\Phi(x)\leqslant\Phi(x_0)+tu_0$$

Из последнего неравенства следует, что составляющая есть прообраз при отображении Φ пространства u_0-измеримых элементов, сдвинутого на $\Phi(x_0)$

Замечание. Если $\forall t\in R$ выполняется соотношение $\Phi(M)+tu_0\subset\Phi(M)$, то оператор $\mathcal{U}(t,x)=\Phi^{-1}(\Phi(x)+tu_0)$ ($x\in M$, $t\in R$) является нормальным оператором сдвига по траекториям множества M.

Известно, что если конус K нормален, то пространство E_{u_0} полно по u_0-норме и норма пространства X подчинена u_0-норме [I]. Так как Φ гомеоморфизм, то из способа определения метрики ρ следует, что в пространстве с нормальным конусом сходимость по метрике ρ влечет сходимость по норме пространства X, и, если множество $\Phi(M)$ замкнуто в X, то метрическое пространство $(K(x_0,\mathcal{U}),\rho)$ полное.

Рассмотрим в пространстве $C_{[a;b]}$ непрерывных на $[a;b]$ функций, полуупорядоченном конусом неотрицательных функций, примеры конкретных операторов сдвига, определенных указанным выше способом. В этих примерах гомеоморфизм ϕ определяется с помощью функции $\varphi\ R \to R$ равенством $\phi x(s)=\varphi(x(s))$, где $x \in C_{[a;b]}$, $s \in [a;b]$

Пример 3. Пусть $\varphi(z)=z$ ($z \in R$), $u_0(s)\equiv 1$ ($s \in [a;b]$), множество M есть все пространство $C_{[a;b]}$ В этом случае для всех $x \in C_{[a;b]}$ $\mathcal{U}(t,x)=x\ tu_0$, для любого $x_0 \in C$ составляющая $K(x_0,\mathcal{U})$ совпадает со всем пространством C, а метрика ρ определяется равенством $\rho(x,y)=\max\limits_{s\in[a;b]}|x(s)-y(s)|$, $(x,y\in C[a;b])$.

Пример 4. Пусть $\varphi(z)=\ln z$, $u_0(s)\equiv 1$ ($s\in[a;b]$) множество M есть множество всех непрерывных функций, принимающих только положительные значения. В этом случае для всех $x\in M$ $\mathcal{U}(t,x)=e^t x$ составляющая $K(x_0,\mathcal{U})$ для любой функции $x_0\in M$ совпадает с M, метрика ρ определяется равенством $\rho(x,y)=\max\limits_{s\in[a;b]}|\ln x(s)-\ln y(s)|$ ($x,y\in M$)

Пример 5. Пусть функция $\varphi(z)$ задана следующим образом

$$\varphi(z)=\begin{cases}\ln z & \text{если } 0<z\le 1\\ z-1 & \text{, если } 1\le z\end{cases}$$

множество M и элемент u_0 - такие же, как и в примере 4. В этом случае оператор сдвига определяется равенством

$$\mathcal{U}(t,x)(s)=\begin{cases}e^t x(s) & \text{, если } 0<x(s)\le e^{-t}\\ \ln x(s)+t+1 & \text{, если } e^{-t}<x(s)<1\\ x(s)+t & \text{, если } x(s)>1\end{cases}$$

Составляющая $K(x_0,\mathcal{U})$ для любого $x_0\in M$ совпадает с M Для любых x и y из M $\rho(x,y)=\max\limits_{s\in[a;b]}|\varphi(x(s))-\varphi(y(s))|$

Пример 6. Пусть $\varphi(z)=z^m$, где $m\in]0;1[$ ($z\in[0;+\infty[$, $u_0(s)\equiv 1$ ($s\in[a;b]$)). Пусть множество M есть конус K Оператор сдвига $\mathcal{U}$ определим равенством (6). Составляющая $K(x_0,\mathcal{U})$, порожденная любым элементом x_0 в этом случае совпадает с конусом K.

Пример 7. Пусть $\varphi(z)=-z^k$, где $k\in]-\infty,0[$ ($z\in]0;+\infty[$), $u_0(s)\equiv 1$ ($s\in[a;b]$), множество M есть множество всех непрерывных функций, принимающих положительные значения. В этом примере оператор сдвига $\mathcal{U}$ определим равенством (7). Составляющая $K(x_0, \mathcal{U})$, порожденная любым элементом $x_0 \in M$ совпадает с множеством M

§ 2. Операторы медленного роста

<u>Определение 3.</u> Пусть M подмножество пространства X, $\mathcal{U}$ оператор сдвига по траекториям множества M. Монотонный оператор T, отображающий множество M в M, назовем оператором медленного роста относительно оператора сдвига $\mathcal{U}$, если для любых $t > 0$, $x \in M$ выполняется неравенство

$$T\mathcal{U}(t,x) < \mathcal{U}(t,Tx) \qquad (9а)$$

при условии, что оператор сдвига $\mathcal{U}$ монотонен по переменной t, либо выполняется неравенство

$$T\mathcal{U}(t,x) > \mathcal{U}(t,Tx), \qquad (9б)$$

если оператор сдвига $\mathcal{U}$ антимонотонен по переменной t

<u>Лемма I.</u> Пусть функция $\varphi(x)$ монотонно возрастает, дифференцируема на некотором интервале и такова, что для положительных t и всех x из этого интервала определена функция $\mathcal{U}(t,x) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + t)$ Пусть функция $y = f(x)$ отображает указанный интервал в себя, монотонно возрастает и является дифференцируемой.

Тогда, для того чтобы функция $y = f(x)$ являлась оператором медленного роста относительно оператора сдвига $\mathcal{U}(t,x) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + t)$, достаточно выполнения условия $f'(x) < \varphi'(x)/\varphi'(f(x))$.

<u>Доказательство.</u> Для того, чтобы получить утверждение леммы, достаточно применить теорему Лагранжа к функции $y = \varphi(f(\varphi^{-1}(\xi)))$, где $\xi = \varphi(x)$.

Рассмотрим теперь определение оператора медленного роста для функций на числовой прямой. Пусть $X = R$, $M =]0; +\infty[$, φ одна из множества функций, определенных в примерах 3-7 Оператор сдвига по траекториям множества M определим равенством

$$\mathcal{U}(t,x) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + t) \quad (t > 0,\ x > 0), \qquad (10)$$

если φ принадлежит множеству функций, определенных в примерах 3-6, либо равенством

$$\mathcal{U}(t,x) = \varphi^{-1}(\varphi(x) - t) \quad (t > 0;\ x > 0), \qquad (11)$$

если φ из множества функций, определенных в примере 7.

Тогда для того, чтобы положительная дифференцируемая монотонная функция f являлась оператором медленного роста на множестве M, достаточно выполнения неравенства

$$f'(x) \leq \varphi(x)/\varphi(f(x)) \qquad (0<x<+\infty) \tag{12}$$

При $\varphi(x)=\ln x$ класс функций медленного роста относительно соответствующего оператора сдвига совпадает с классом вогнутых (в смысле определения [1]) функций.

Отметим также, что если при некотором k ($0 \leq k<+\infty$) положительная дифференцируемая монотонная функция f удовлетворяет условию

$$f'(x) \leq (f(x)/x)^k \qquad (0<x<+\infty), \tag{13}$$

то эта функция является оператором медленного роста на множестве $]0;+\infty[$ относительно оператора $\mathcal{U}$, определенного равенством (10) либо равенством (11), где φ выбрана должным образом из множества функций, определенных в примерах 3,4,6,7.

<u>Замечание</u> к определению оператора медленного роста. Если оператор сдвига $\mathcal{U}$ является нормальным, то для любых $t<0$ и $x \in M$ из неравенства (9а) следует неравенство $T\mathcal{U}(t,x) > \mathcal{U}(t,Tx)$, а из неравенства (9б) следует справедливость неравенства $T\mathcal{U}(t,x) \leq \mathcal{U}(t,Tx)$

Рассмотрим уравнение

$$Tx=x \tag{14}$$

с монотонным оператором T Известны различные условия (см. [1]), при выполнении которых решение уравнения (14) может быть найдено методом последовательных приближений. Главная трудность в применении этого метода состоит в выборе начального приближения. Для операторов медленного роста эта задача значительно упрощается.

<u>Теорема 1.</u> Пусть $\mathcal{U}$ - оператор сдвига по траекториям множества M является нормальным. Пусть T есть оператор медленного роста на множестве M относительно оператора сдвига $\mathcal{U}$ Предположим, что оператор T имеет единственную неподвижную точку x^* и существует элемент $y_0 \in M$ такой, что для всех $x \in M$ $Tx \in K(y_0,\mathcal{U})$ и выполняется одно из условий:

а) конус K правилен, оператор T непрерывен;

б) конус K нормален, оператор T вполне непрерывен;

в) конус K нормален, единичный шар в X слабо компактен, оператор T слабо непрерывен.

Тогда для любого $x_0 \in M$ последовательные приближения $T^n x_0$ сходятся к точке x^* по норме пространства X

Доказательство проведем для оператора сдвига монотонного по переменной t. Покажем, что для любого $t>0$ конусный отрезок вида $<\mathcal{U}(-t,x^*); \mathcal{U}(t,x^*)>$ является инвариантным для оператора T Действительно, для любого x из указанного отрезка имеем $Tx \le T\mathcal{U}(t,x^*) \le \mathcal{U}(t,x^*)$ с другой стороны $Tx \ge T\mathcal{U}(t,x^*) \ge \mathcal{U}(-t,x^*)$.

Так как $x^* \in K(y_0,\mathcal{U})$, то это значит, что при некотором положительном t_1 выполняется система неравенств $\mathcal{U}(-t_1,y_0) \le x^* \le \mathcal{U}(t_1,y_0)$. Для любого $x_0 \in M$ $Tx \in K(y_0,\mathcal{U})$ Поэтому существует положительное t_2, для которого справедливы неравенства $\mathcal{U}(-t_2,y_0) \le Tx_0 \le \mathcal{U}(t_2,y_0)$

Таким образом, $\mathcal{U}(-t,x^*) \le Tx \le \mathcal{U}(t,x^*)$, где $t = t_1 + t_2$

Применение известного утверждения теории монотонных операторов (см. теорему 4.4 из [I]) завершает доказательство.

Замечание. Утверждение теоремы остается в силе, если монотонный по переменной t оператор сдвига $\mathcal{U}$ не является нормальным, но в M можно указать элемент x_0 такой, что для всех $x \in M$ $x_0 \le x$ В частности, для оператора $\mathcal{U}$ и множества M, описанных в примере 6, $x_0 = 0$ В этом случае теорему 4.4 нужно применить к конусному отрезку вида $<0; \mathcal{U}(t,x^*)>$

Для того, чтобы привести пример интегрального оператора медленного роста, понадобится следующая лемма.

Лемма 2. Пусть функция $\varphi(z)$ монотонно возрастает на некотором интервале, дважды дифференцируема и такова, что для всех z из этого интервала и положительных t определена функция $\mathcal{U}(t,z) = \varphi^{-1}(\varphi(z)+t)$.

Тогда, если производная функции $1/\varphi'(z)$ не возрастает, то для каждого положительного t функция $\mathcal{U}(t,z)$ вогнута по переменной z.

Доказательство. Достаточно проверить, что вторая производная функции $\mathcal{U}(t,z)$ по переменной z не положительна.

Пример 8. Рассмотрим интегральный оператор, заданный соотношением

$$Tx(t) = \int_a^b G(t,s,x(s))ds, \qquad (15)$$

где ядро $G(t,s,u)$ непрерывно, положительно, не убывает по переменной u. Тогда оператор (15) вполне непрерывен, положителен, монотонен на конусе K неотрицательных функций в пространстве $C_{[a,b]}$. Предположим, что длина отрезка $[a,b]$ равна единице, а функция $G(t,s,u)$ удовлетворяет условию

$$G'_u(t,s,u) \leq \left(G(t,s,u)/u\right)^k \quad (0 \leq k < 1,\ t,s \in [a,b],\ u \in]0,+\infty[) \qquad (16)$$

В этом случае оператор (15) является оператором медленного роста на конусе K относительно оператора сдвига, порожденного функцией $\varphi(t) = t^{1-k}$ ($t > 0$).

Действительно, на основании леммы I имеем, что функция $G(t,s,u)$ является оператором медленного роста по переменной u, поэтому $G(t,s,\mathcal{U}(t,x(s))) \leq$
$\leq \mathcal{U}(t, G(t,s,x(s)))$ $(t,s \in [a,b],\ t > 0,\ x \in K)$

Функция $\varphi(t) = t^{1-k}$ удовлетворяет условиям леммы 2, поэтому функция $\mathcal{U}(t,x) = \varphi^{-1}(\varphi(x)+t)$ вогнута по переменной x. Воспользуемся неравенством Иенсена для вогнутой функции:

$$\int_a^b G(t,s,\mathcal{U}(t,x(s)))ds \leq \int_a^b \mathcal{U}(t, G(t,s,x(s)))ds \leq \mathcal{U}\left(t, \int_a^b G(t,s,x(s))ds\right)$$

Учитывая определение оператора T, получаем неравенство $T\mathcal{U}(t,x) \leq \mathcal{U}(t,Tx)$. То есть, оператор T – медленного роста.

§ 3. Операторы u_0-медленного роста.

Определение 3. Пусть M подмножество пространства X, u_0 – фиксированный элемент из M, $\mathcal{U}$ – оператор сдвига по траекториям множества M. Монотонный оператор T, отображающий множество M в себя, будем называть оператором u_0-медленного роста относительно оператора $\mathcal{U}$, если он удовлетворяет двум условиям:

1) для любого x из M $Tx \in K(u_0,\mathcal{U})$;

2) для любых $x \in K(u_0,\mathcal{U})$ и $t > 0$ существует положительное $q(x,t) < 1$, при котором справедливо неравенство $T\mathcal{U}(t,x) \leq \mathcal{U}(qt, Tx)$, если оператор сдвига $\mathcal{U}$ моното-

нек по переменной t либо справедливо неравенство $T\mathcal{U}(t,x) > \mathcal{U}(qt, Tx)$, если оператор сдвига $\mathcal{U}$ антимонотонен по переменной t

Заметим, что при соответствующем выборе множества M элемента u_0, оператора $\mathcal{U}$, определение 3 переходит в определение u_0-вогнутого оператора. Операторы из выделенного класса обладают рядом замечательных свойств, аналогичных свойствам u_0-вогнутых операторов.

Теорема 2. Пусть T оператор u_0-медленного роста на множестве M относительно оператора сдвига $\mathcal{U}$.

Тогда оператор T не может иметь на множестве M более одной неподвижной точки.

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 неподвижные точки для оператора T. Пусть $t = \rho(x_1, x_2)$ Из условия 2 определения 3 получаем, что существует положительное $q < 1$, при котором выполняется неравенство $\rho(Tx_1, Tx_2) < q\cdot\rho(x_1, x_2)$ А это возможно лишь при $x_1 = x_2$ Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть $\mathcal{U}$ нормальный оператор сдвига по траекториям множества M, T - оператор u_0-медленного роста на этом множестве относительно оператора сдвига $\mathcal{U}$ x^* - неподвижная точка оператора T

Тогда для любого $x_0 \in M$ последовательные приближения $T^n x_0$ сходятся по метрике ρ к x^*.

Доказательство. Для определенности будем считать, что оператор $\mathcal{U}$ монотонен по переменной t Покажем, что для любого $x_0 \in M$ Tx_0 принадлежит конусному отрезку вида $<\mathcal{U}(-t, x^*); \mathcal{U}(t, x^*)>$ при некотором положительном t.

Действительно, $Tx_0 \in K(u_0, \mathcal{U})$, $x^* \in K(u_0, \mathcal{U})$ Поэтому для некоторых положительных t_1 и t_2 выполняются неравенства $\mathcal{U}(-t_1, u_0) \leq x^* \leq \mathcal{U}(t_1, u_0)$, $\mathcal{U}(-t_2, u_0) \leq Tx_0 \leq \mathcal{U}(t_2, u_0)$, из которых следует, что $\mathcal{U}(-t, x^*) \leq Tx_0 \leq \mathcal{U}(t, x^*)$, где $t = t_1 + t_2$

Конусный отрезок $<\mathcal{U}(-t, x^*); \mathcal{U}(t, x^*)>$ инвариантен для оператора T. Обозначим $v_0 = \mathcal{U}(-t, x^*)$, $w_0 = \mathcal{U}(t, x^*)$ Рассмотрим две итерационные последовательности

$$v_n = Tv_{n-1}, \quad w_n = Tw_{n-1}, \; n = 1, 2, \ldots$$

Из монотонности оператора T следует справедливость неравенств $v_0 \leq v_1 \leq v_2 \leq \ldots \leq x^* \leq \ldots \leq w_2 \leq w_1 \leq w_0$

Пусть $\alpha_n = \rho(x^*, v_n)$, а $\beta_n = \rho(x^*, w_n)$. Последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ не возрастают. Обозначим $t_n = \max\{\alpha_n, \beta_n\}$. Предположим, что $\lim_{n\to\infty} t_n = t \neq 0$. Тогда существуют положительные $q_1 < 1$ и $q_2 < 1$, для которых справедливы неравенства $T\mathcal{U}(t, x^*) \leq \mathcal{U}(q_1 t, x^*)$, $T\mathcal{U}(-t, x^*) \geq \mathcal{U}(-q_2 t, x^*)$. Учитывая эти неравенства, получаем $Tv_n \geq T\mathcal{U}(-t_n, x^*) = T\mathcal{U}(t-t_n, \mathcal{U}(-t, x^*)) \geq \mathcal{U}(t-t_n-q_2 t, x^*)$

$Tw_n \leq T\mathcal{U}(t_n, x^*) = T\mathcal{U}(t_n - t, \mathcal{U}(t, x^*)) \leq \mathcal{U}(t_n - t + q_1 t, x^*)$

Так как $t_n \to t$ при $n \to \infty$ и $t > 0$, то найдутся такие q_0 ($0 < q_0 < 1$) и $t > 0$, что для всех $n \geq N$ справедливы неравенства $Tv_n \geq \mathcal{U}(-q_0 t, x^*)$, $Tw_n \leq \mathcal{U}(q_0 t, x^*)$.

Из определения метрики ρ следуют неравенства $\alpha_{n+1} = \rho(v_{n+1}, x^*) \leq q_0 t$, $\beta_{n+1} = \rho(w_{n+1}, x^*) \leq q_0 t$, противоречащие предположению. Сходимость последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ к x^* доказана. Сходимость последовательности $\{T^n x_0\}$ к неподвижной точке теперь очевидна.

Литература

1. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. - М., 1962.
2. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я. Приближенное решение операторных уравнений. - М., 1969.
3. Опойцев В.И. Обобщение теории монотонных и вогнутых операторов. - Труды Моск. мат. о-ва, 1978, 36, с. 237-27.
4. Катков М.Л. Анализ одного класса монотонных операторов: - Дис. на соиск. канд. физ.-мат.наук, Свердловск.

Поступила 15 сентября 1984 года

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1985.

УДК 517.98

СУЩЕСТВОВАНИЕ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК ОТОБРАЖЕНИЙ КАК ПРОБЛЕМА ОПТИМИЗАЦИИ

А.Х.Лиепиньш
ЛГУ им.П.Стучки

Пусть нашим миром в этой работе будет метрическое пространство X с расстоянием d на нем. Рассмотрим отображение $f: X \to X$

Обозначая множество всех вещественных неотрицательных чисел через R^+, определим отображение $t: X \to R^+$ для любого $x \in X$ равенством $t(x) := d(x, f(x))$

Положим $t_0 := \inf\{t(x) \mid x \in X\}$ (т.е. $t_0 := \inf t(X)$).

Будем исследовать проблему минимизации отображения t

Если проблема решение имеет, т.е. существует такое $x_0 \in X$, что $t(x_0) = t_0$, то в случае, когда $t_0 = 0$, x_0 является неподвижной точкой отображения f

I. Отметим некоторые из ситуаций, в которых $t_0 = 0$

Напомним, что:

I) f называется нерастягивающим, если
$d(f(x), f(y)) \le d(x, y)$ для любых $x, y \in X$;

2) f называется асимптотически регулярным в $x \in X$, если $\lim_{n \to +\infty} t(f^n(x)) = 0$

В случае, когда X - подмножество пространства Банаха (и $d(x, y) = \|x - y\|$ для любых $x, y \in X$), напомним, что:

I) X называется звездно выпуклым, если существует такое $x \in X$, что $\{sx + (1-s)y \mid y \in X \ \& \ s \in]0,1[\} \subset X$;

2) X называется линейно ограниченным, если
$X \cap \{x + sy \mid s \in R^+\}$ ограничено для любых $x, y \in X$

Предложение I (ср. [5]). $t_0 = 0$, если f является нерастягивающим, а X - ограниченное замкнутое звездно выпуклое подмножество пространства Банаха.

Предложение 2 (ср. [4]). $t_0 = 0$, если f является нерастягивающим, а X - линейно ограниченное замкнутое выпуклое подмножество рефлексивного пространства Банаха.

Предложение 3. $t_0 = 0$, если существует такое $x \in X$, что f асимптотически регулярно в x

2. Согласно теореме Вейерштрасса проблема минимизации отображения t заведомо имеет решение, если пространство X компактно и отображение f непрерывно. Таким образом, если f непрерывно (в частности, является нерастягивающим), представляют интерес теоремы, существование решения проблемы минимизации в которых утверждается без предположения компактности пространства X .

Теорема I (ср. [3] , [I] , [2]). Пусть X - выпуклое слабо компактное подмножество пространства Банаха. Предположим, что отображение f непрерывно.

Пусть для любых $x, y \in X$ существует такое $s \in]0,1[$ что $\| f(x) - f(y) \| \leq s t(x) + (1-s) t(y)$

Тогда проблема минимизации отображения t имеет решение. (При этом, если $t(x_0) = t_0$ и $t(y_0) = t_0$ для $x_0, y_0 \in X$, то $\| f(x_0) - f(y_0) \| \leq t_0$,).

Доказательство. Через $co\, A$ будем обозначать выпуклую оболочку множества $A \subset X$, через $\overline{co}\, A$ - его замкнутую выпуклую оболочку.

Пусть $r \in R^+$. Положим $A := \{ x \in X \mid t(x) \leq r \}$

Установим, что $\overline{co}\, f(A) \subset A$.

Отметим, что A замкнуто в силу непрерывности отображения t (непрерывно по условию отображение f). Таким образом, достаточно доказать, что $co\, f(A) \subset A$

Пусть $x \in co\, f(A)$ Тогда $x = \sum_{i=1}^{n} s_i f(x_i)$, где $x_i \in A$ и $s_i \in R^+$ ($i = 1, \ldots, n$), причем $\sum_{i=1}^{n} s_i = 1$

Так как $f(x_i) \in X$ ($i = 1, \ldots, n$) и X по условию выпукло, то $x \in X$ Тем самым отображение t определено в x

Имеем: $t(x) = \| x - f(x) \| = \| \sum_{i=1}^{n} s_i f(x_i) - (\sum_{i=1}^{n} s_i) f(x) \| \leq \sum_{i=1}^{n} s_i \| f(x_i) - f(x) \|$

Пусть $j \in \{1, \ldots, n\}$ фиксировано так, что $\| f(x_j) - f(x) \| = \max \{ \| f(x_i) - f(x) \| \mid i = 1, \ldots, n \}$. Существует такое $s \in]0,1[$ что $\| f(x_j) - f(x) \| \leq s t(x_j) + (1-s) t(x)$. Следовательно, $t(x) \leq s\, t(x_j) + (1-s) t(x)$ и $t(x) \leq t(x_j) \leq r$

т.е. $x \in A$.

Для каждого $n \in N$ положим $A_n := \overline{co} \{ x \in X \mid t(x) \leq t_0 + \frac{1}{n} \}$

По построению $A_n \neq \emptyset$ и $A_n \supset A_{n+1}$ для любого $n \in N$

Следовательно, $\bigcap_{n\in N} A_n \neq \emptyset$, ибо X по условию слабо компактно. Пусть $x_0 \in \bigcap_{n\in N} A_n$. Согласно доказанному тогда $f(x_0) \leq t_0 + \frac{1}{n}$ для любого $n \in N$. Следовательно, $f(x_0) = t_0$

Теорема 2. Предположим, что пространство X полно и отображение f непрерывно.

Пусть существует такое отображение $\varphi: R^+ \times R^+ \to R^+$, что: I) $\lim_{(s_1,s_2)\to(t_0,t_0)} \varphi(s_1,s_2) = 0$;

2) $d(x,y) \leq \varphi(f(x), f(y))$ для любых $x, y \in X$

Тогда проблема минимизации отображения f имеет решение. (При этом единственное: если $f(x_0) = t_0$ и $f(y_0) = t_0$ для $y_0 \in X$, то $x_0 = y_0$.)

Доказательство. Существует такое отображение $\varphi: R^+ \times R^+ \to R^+$, что:

I) $\lim_{(s_1,s_2)\to(t_0,t_0)} \varphi(s_1, s_2) = 0$;

2) $d(x, y) \leq \varphi(f(x), f(y))$ для любых $x, y \in X$.

Вследствие первого условия тогда, обозначая $\sup\{\varphi(s_1,s_2) \mid s_1, s_2 \in R^+ \,\&\, \max\{|s_1 - t_0|, |s_2 - t_0|\} \leq \frac{1}{n}\}$ через t_n для любого $n \in N$, имеем: $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$.

Для каждого $n \in N$ положим $A_n = \{x \in X \mid f(x) \leq t_0 + \frac{1}{n}\}$.

Пусть $n \in N$. По построению $A_n \neq \emptyset$ и $A_n \supset A_{n+1}$. В силу непрерывности отображения f (непрерывно по условию отображение f) A_n замкнуто. Кроме того:

$$\operatorname{diam} A_n = \sup\{d(x,y) \mid x, y \in A_n\} \leq \sup\{\varphi(f(x), f(y)) \mid x, y \in A_n\} \leq$$
$$\sup\{\varphi(s_1, s_2) \mid s_1, s_2 \in R^+ \,\&\, \max\{|s_1 - t_0|, |s_2 - t_0|\} \leq \frac{1}{n}\} = t_n$$

Вследствие полноты пространства X заключаем, что $\bigcap_{n\in N} A_n \neq \emptyset$

Пусть $x_0 \in \bigcap_{n\in N} A_n$. Тогда $f(x_0) \leq t_0 + \frac{1}{n}$ для любого $n \in N$. Следовательно, $f(x_0) = t_0$

Если, кроме того, $f(y_0) = t_0$ для $y_0 \in X$, то $y_0 \in \bigcap_{n\in N} A_n$. Следовательно, $d(y_0, x_0) \leq \lim_{n\to+\infty} \operatorname{diam} A_n = 0$, т.е. $y_0 = x_0$.

3. Теоремы о неподвижных точках следуют согласно изложенному. Номер теоремы и предложения, обосновывающих теорему о неподвижных точках, указан в скобках после ее формулировки.

Теорема 3 (ср. [2]). Пусть X - выпуклое слабокомпактное подмножество пространства Банаха. Предположим, что отображение f является нерастягивающим.

Пусть для любых $x, y \in X$ существует такое $s \in]0,1[$, что $\| f(x) - f(y) \| \le s \| x - f(x) \| + (1-s) \| y - f(y) \|$.

Тогда f имеет единственную неподвижную точку (теорема 1, предложение 1).

Замечание, справедливость которого проверяется, ссылаясь на аксиому треугольника.

В рассматриваемой в работе ситуации такое отображение $\varphi_1 : R^+ \times R^+ \to R^+$, что:

1) $\lim_{(s_1,s_2)\to(0,0)} \varphi_1(s_1,s_2) = 0$;

2) $d(x,y) \le \varphi_1(d(x,f(x)), d(y,f(y)))$ для любых $x, y \in X$;

существует тогда и только тогда, когда существует такое отображение $\varphi_2 \; R^+ \times R^+ \to R^+$, что:

1) $\lim_{(s_1,s_2)\to(0,0)} \varphi_2(s_1,s_2) = 0$;

2) $d(f(x), f(y)) \le \varphi_2(d(x,f(x)), d(y,f(y)))$ для любых $x, y \in X$.

Теорема 4. Пусть X - ограниченное замкнутое звездно выпуклое подмножество пространства Банаха. Предположим, что отображение f является нерастягивающим.

Пусть существует такое отображение $\varphi : R^+ \times R^+ \to R^+$ что: 1) $\lim_{(s_1,s_2)\to(0,0)} \varphi(s_1,s_2) = 0$;

2) $\| f(x) - f(y) \| \le \varphi(\| x - f(x) \|, \| y - f(y) \|)$ для любых $x, y \in X$.

Тогда отображение f имеет единственную неподвижную точку (теорема 2, предложение 1).

Следствие, которое показывает, что теорема 4 обобщает теорему 3.

Пусть X - ограниченное замкнутое звездно-выпуклое подмножество пространства Банаха. Предположим, что отображение f является нерастягивающим и $\| f(x) - f(y) \| \le \max \{ \| x - f(x) \|, \| y - f(y) \| \}$ для любых $x, y \in X$.

Тогда f имеет единственную неподвижную точку.

Теорема 5. Пусть X - линейное ограниченное замкнутое выпуклое подмножество рефлексивного пространства Банаха. Предположим, что отображение f является нерастягивающим.

Пусть существует такое отображение $\varphi \; R^+ \times R^+ \to R^+$ что: 1) $\lim_{(s_1,s_2)\to(0,0)} \varphi(s_1,s_2) = 0$;

2) $\| f(x) - f(y) \| \le \varphi(\| x - f(x) \|, \| y - f(y) \|)$ для любых $x, y \in X$

Тогда отображение f имеет единственную неподвижную точку (теорема 2, предложение 2).

Теорема, из которой, в частности, следует принцип Банаха.

Предположим, что пространство X полно и отображение непрерывно.

Пусть существует такое $x \in X$, что f асимптотически регулярно в x, и такое отображение φ $R^+ \times R^+ \to R^+$, что: I) $\lim_{(s_1,s_2)\to(0,0)} \varphi(s_1,s_2) = 0$;

2) $f($ $d($ $f(x)), d(y, f(y)))$ для любых $x, y \in X$.

Тогда отображение f имеет единственную неподвижную точку (теорема 2, предложение 3).

Доказательство, которое, как оказывается, легко провести непосредственно, не ссылаясь на теорему 2 и предложение

Ограничимся доказательством существования.

Пусть $x_0 \in X$, f асимптотически регулярно в x_0 , и отображение φ $R^+ \times R^+ \to R^+$ такое, что:

I) $\varphi($ $,s_2) = 0$;

2) $d(f($ $\varphi(d(x$ $f(x)), d(y, f(y)))$ для любых $x, y \in X$

Пусть $\in N$ Имеем: $d(f^n(x_0), f^m(x_0)) \le d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) +$ $+ d(f^n(x_0), f^{m+1}(x_0)) + d(f$ $) \le d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) + d(f^m(x_0), f^{m+1}(x_0)) + \varphi(d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)), d(f^m($

Заключаем, что последовательность $(f^n(x_0))_{n\in N}$ фундаментальна и завершаем доказательство ссылкой на полноту пространства X и непрерывность отображения f

Литература

I. Лиепиньш А.Х. Колыбельная для маленького тигренка о неподвижных точках. - В кн.: Топологические пространства и их отображения. Рига, 1983, с.61-69.

2. Лиепиньш А.Х. Неподвижные точки отображений в слабокомпактном выпуклом множестве в пространстве Банаха. - В кн. Труды VIII Школы по теории операторов в функциональных пространствах. - Рига, 1983, т.2, с.15-16.

3. Kannan.R. Fixed point theorems in reflexive Banach spaces..- Proc. Amer. Math. Soc., 1973, v. 38, p. 111-1

4. Reich S. The almost fixed point property for nonexpansive mappings..- Proc. Amer. Math. Soc., 1983, v.88, p. 44-4

5. Smart D.R. Fixed point theorems. Cambridge, 1974.

Поступила 27 июня 1984 года

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1985.

УДК 513.831

О ПСЕВДОКОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

М.В.Матвеев
МГУ им.М.В.Ломоносова

Напомним, что топологическое пространство называется псевдокомпактным, если всякая непрерывная на нем функция ограничена. Все пространства в этой работе предполагаются вполне регулярными, символом βX, как обычно, обозначается расширение Стоуна-Чеха пространства X.

Значительно более узкий класс пространств, чем псевдокомпактные пространства, составляют так называемые счетно компактные пространства, т.е. пространства, в которых каждое бесконечное множество имеет хоть одну предельную точку. В работе [1] изучается вопрос, какие пространства представимы в виде пересечения некоторого семейства счетно компактных подпространств своего расширения Стоуна-Чеха. Получена

Теорема [1]. Если пространство X топологически полно, то существует множество $\{X_\alpha : \alpha < 2^c\}$ счетно компактных подпространств из βX, удовлетворяющих равенству $X_\alpha \cap X_{\alpha'} = X$ для любых $\alpha < \alpha' < 2^c$.

С другой стороны, легко строятся примеры пространств, не представимых в таком виде. В связи с этим естественно поставить вопрос, какие пространства представимы в виде пересечения определенных семейств псевдокомпактных подпространств своего Стоун-Чеховского расширения. Нами будет доказана

Теорема 1. Для каждого вполне регулярного пространства X существует такое семейство $\{X_\alpha : \alpha < 2^c\}$ псевдокомпактных подпространств пространства βX, что $X_\alpha \cap X_{\alpha'} = X$ как только $\alpha < \alpha' < 2^c$.

Следствие. Каждое вполне регулярное пространство представимо в виде пересечения двух псевдокомпактных подпространств своего Стоун-Чеховского расширения.

Для доказательства теоремы I нам понадобится несколько простых вспомогательных утверждений. Напомним, что подпространство A топологического пространства X называется С-вложенным, если каждая непрерывная функция, заданная на A, имеет непрерывное продолжение на X. Счетные дискретные С-вложенные подпространства мы будем называть сильно расходящимися последовательностями. Множество всех сильно расходящихся последовательностей в пространстве X будем обозначать $\mathfrak{A}(X)$. Следующие утверждения очевидны:

Лемма I. Пространство X псевдокомпактно тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}(X) = \emptyset$.

Лемма I'. Пусть X_0 - всюду плотное подпространство пространства X. Если пространство X не псевдокомпактно, то найдется последовательность $A \in \mathfrak{A}(X)$ такая, что $A \subset X_0$.

Лемма 2. Пусть $A \in \mathfrak{A}(X)$. Тогда существует гомеоморфизм пространства $[A]_{\beta X}$ на пространство βN, отображающий A на N.

Лемма 3. Пусть $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}(X)$, $|A_1 \cap A_2| < \aleph_0$. Тогда $[A_1]_{\beta X} \cap [A_2]_{\beta X} = A_1 \cap A_2$.

Лемма 4. Пусть $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}(X)$. Тогда $A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{A}(X)$.

Напомним, что семейство множеств называется почти дизъюнктным, если пересечение любых двух его элементов конечно.

Лемма 5. Пусть $\mathfrak{B}$ - максимальное (по включению) почти дизъюнктное подсемейство семейства множеств $\mathfrak{A}(X)$ и пусть $X \subset Y \subset \beta X$. Тогда если для каждого $A \in \mathfrak{B}$ подпространство $[A]_Y$ счетно компактно, то Y псевдокомпактно.

Следующая лемма является частным случаем теоремы из [I] :

Лемма 6. Существует такое семейство $\{N_\alpha : \alpha < 2^c\}$ счетно компактных подпространств пространства βN, что $N_\alpha \cap N_{\alpha'} = N$, как только $\alpha < \alpha' < 2^c$.

Доказательство теоремы I. Выделим из $\mathfrak{A}(X)$ максимальное почти дизъюнктное подсемейство $\mathfrak{B}$. В силу леммы 2 и леммы 6 для каждого $B \in \mathfrak{B}$ найдутся такие счетно компактные подпространства B_α, $\alpha < 2^c$ пространства $[B]_{\beta X}$, что $B_\alpha \cap B_{\alpha'} = B$ при $\alpha \neq \alpha'$. Для каждого $\alpha < 2^c$ положим $X_\alpha = \bigcup\{B_\alpha : B \in \mathfrak{B}\} \cup X$. Из леммы 5 вытекает, что пространства X_α псевдокомпактны. Покажем, что $X_\alpha \cap X_{\alpha'} = X$ при $\alpha \neq \alpha'$. Действительно, пусть $x \in X_\alpha \cap X_{\alpha'} \setminus X$. Тогда найдутся такие $B, B' \in \mathfrak{B}$, что $x \in B_\alpha \cap B'_{\alpha'} \setminus X$. Но тогда $B = B'$, иначе по лемме 2 мы имели бы $B_\alpha \cap B'_{\alpha'} \setminus X \subset [B]_{\beta X} \cap [B']_{\beta X} \setminus X = \emptyset$. Поэтому $x \in B_\alpha \cap B_{\alpha'} \setminus X$, откуда следовало бы $\alpha = \alpha'$.

Напомним, что цепью называется семейство множеств, линейно упорядоченное по включению. Аналогично теореме I доказывается

Теорема 2. Каждое вполне регулярное пространство X представимо в виде пересечения цепи псевдокомпактных подпространств пространства βX.

Теоремы I и 2 показывают, насколько различными могут быть псевдокомпактные расширения данного пространства X, лежащие в данном его бикомпактном расширении. Возникает задача классификации псевдокомпактных расширений, в частности, отыскания среди них минимальных и максимальных (в некотором смысле).

Псевдокомпактное расширение пространства X будем называть строгим, если каждое замкнутое псевдокомпактное подпространство пространства X замкнуто и в расширении.

Теорема 3. Для каждого вполне регулярного пространства X и для каждого его бикомпактного расширения bX существует строгое псевдокомпактное расширение $\pi_b X \subset bX$.

Доказательство. Мы построим псевдокомпактное расширение, удовлетворяющее следующему более сильному условию, чем требование строгости: каждое замкнутое ограниченное множество в X замкнуто и в $\pi_b X$. Пусть $\mathfrak{F} = \{F \subset X : F$ замкнуто и ограничено в $X\}$. Положим $\pi_b X = X \cup (bX \setminus \bigcup\{[F]_{bX} : F \in \mathfrak{F}\})$. Покажем, что пространство $\pi_b X$ псевдокомпактно. Пусть $A \subset bX \setminus \pi_b X$ — замкнутое G_δ-множество в bX. Можно считать, что $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} O_i$, где O_i открыто в bX и $[O_{i+1}] \subset O_i$ для каждого $i \in N$. Так как $bX \setminus \pi_b X = \bigcup\{[F] : F \in \mathfrak{F}\}$, то найдется множество $F^* \in \mathfrak{F}$ такое, что $A \cap [F^*]_{bX} \neq \emptyset$. Можно построить функции $f_i : bX \longrightarrow [0,1]$, принимающие значение 1 на $[O_{i+1}]$ и 0 на $bX \setminus O_i$. Функция

$f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i$ определена и непрерывна на $\beta X \setminus A$. Но тогда $f|_X$ – непрерывная функция на X, неограниченная на F^*. Полученное противоречие доказывает, что $\beta X \setminus \pi_\beta X$ не содержит непустых замкнутых G_δ-множеств, т.е. пространство $\pi_\beta X$ псевдокомпактно (см. [2]). Строгость расширения π_β следует непосредственно из его построения.

<u>Предложение I.</u> Расширение $\pi_\beta X$, построенное в предыдущей теореме, обладает следующим свойством типа максимальности: всякое строгое псевдокомпактное расширение пространства X является подпространством его непрерывного образа.

В работе [3] строится псевдокомпактное расширение $\pi X = X \cup (\beta X \setminus \upsilon X)$, где υX – Хьюиттовское расширение пространства X [2].

<u>Предложение 2.</u> Для всякого тихоновского пространства X имеет место включение $\pi X \subset \pi_\beta X$ (и следовательно, расширение πX является строгим псевдокомпактным расширением

<u>Предложение 3.</u> Если существует несчетный измеримый кардинал m, то $\pi X \neq \pi_\beta X$ для некоторого пространства X

<u>Доказательство.</u> Возьмем в качестве X дискретное пространство мощности m. Тогда X не будет вещественно компактным [2], и следовательно $\upsilon X \neq X$. Но тогда $\pi X \neq \beta X$, в то время как $\pi_\beta X$ βX, поскольку в X нет бесконечных ограниченных множеств.

Теорема 3 не имеет аналога для строгих счетно компактных расширений (счетно компактное расширение pX пространства X называется строгим, если в нем замкнуто каждое замкнутое счетно компактное подпространство пространства X). Известны примеры нормальных пространств, не имеющих строгих счетно-компактных расширений [4], [5]. Однако для нормальных пространств теорема 3 имеет аналог в некотором классе пространств, промежуточном между счетно-компактными и псевдокомпактными.

Пространство X называется слабо счетно-компактным [6], [7], если у него есть всюду плотное подпространство, каждое бесконечное подмножество которого имеет предельную точку во всем пространстве. Строгим слабо счетно-компактным расширением пространства будем называть всякое пространство, содержащее X в качестве всюду плотного подпространства, для которого выполнены следующие два условия: 1) каждое бесконечное подмножество пространства X имеет предельную точку в расширении, 2) каждое замкнутое слабо счетно-компактное подмножество пространства X замкнуто и в расширении.

Теорема 4. Каждое нормальное пространство имеет строгое слабо счетно-компактное расширение.

Доказательство. Обозначим $Y = X \cup \bigcup\{[A]_{\beta X} \colon A \in \mathfrak{A}(X)\}$. По лемме 5 Y будет псевдокомпактным расширением пространства X, причем, как легко заметить, это псевдокомпактное расширение будет строгим. Тем более в Y окажутся замкнутыми все замкнутые слабо счетно-компактные подмножества пространства X.

Пусть Y – пространство. Рассмотрим следующее свойство

(H) Для каждого замкнутого $B \subseteq Y$ либо B слабо счетно-компактно, либо существует $A \subset B$ такое, что $A \in \mathfrak{A}(Y)$.

Доказательство теоремы 4 распадается на две леммы.

Лемма 7. Если пространство X удовлетворяет свойству (H), то Y – строгое слабо счетно-компактное расширение X.

Доказательство. Покажем, что X счетно-компактно в Y. Пусть $B \subset X$ бесконечно. Если B слабо счетно-компактно, то B имеет предельную точку в X и, следовательно, в Y. В противном же случае в силу (H) найдется $A \subset B$ такое, что $A \in \mathfrak{A}(X)$. Но тогда множество $[B]_Y \setminus B$ непусто, так как $[B]_Y \supset [A]_Y$ и $[A]_Y = [A]_{\beta X}$ – бесконечный бикомпакт. Строгость расширения Y следует из сделанного выше замечания.

Лемма 8. Каждое нормальное пространство обладает свойством (H).

Доказательство. Пусть $B \subset X$ – бесконечное замкнутое подпространство. Возможны два случая: (1) B псевдокомпактно. Тогда, как легко видеть, B слабо счетно компактно. (2) B не псевдокомпактно. Возьмем произвольное $A \in \mathfrak{A}(B)$ (оно существует в силу леммы 1). Тогда $A \in \mathfrak{A}(X)$, так как A C-вложено в B, а B C-вложено в X как замкнутое подмножество нормального пространства. Лемма 8, а вместе с ней и теорема 4 доказаны.

Заметим, что не каждое пространство, обладающее свойством (H), нормально: примером может служить любое счетно-компактное пространство, не являющееся нормальным.

Перейдем к рассмотрению минимальных псевдокомпактных расширений (минимальность далее понимается в смысле включения).

Предложение 4. Пусть pX – минимальное псевдокомпактное расширение пространства X. Тогда к каждой точке из $pX \setminus X$ сходится хотя бы одна сильно расходящаяся в X последовательность.

Доказательство. Пусть $p \in pX \setminus X$. В силу минимальности расширения pX пространство $pX \setminus \{p\}$ не псевдокомпактно. По лемме I' найдется последовательность $A \in \beta(pX \setminus \{p\})$ такая, что $A \subset X$. Эта последовательность сходится к точке p. Действительно, в противном случае нашлась бы окрестность U точки p такая, что множество $B = A \setminus U$ бесконечно. Но тогда $B \in \beta(pX)$, что противоречит псевдокомпактности pX.

Лемма 9. Пусть $A \in \beta(Y)$, а B – последовательность в Y, сходящаяся к некоторой точке $p \in Y \setminus A$, причем $A \cap B = \emptyset$. Тогда множества A и B функционально отделимы в Y.

Доказательство. Так как Y вполне регулярно, а $p \notin [A]$, то найдется непрерывная функция g на Y такая, что $g(A) = \{0\}$, а $g(p) = 2$. Функция h, задаваемая правилом

$$h(x) = \begin{cases} g(x), & \text{если } g(x) \leq 1, \\ 1, & \text{если } g(x) \geq 1, \end{cases}$$

также будет непрерывной на Y. Так как последовательность B сходится к точке p, а в некоторой окрестности точки p мы имеем $h(x) = 1$, то множество $C = \{x \in B : h(x) \neq 1\}$ конечно. Пусть $C = \{x_1, \dots, x_n\}$. Существуют окрестности $U_1, \dots, U_n$ точек $x_1, \dots, x_n$ соответственно, такие, что $[U_i] \cap [U_j] = \emptyset$ при $i \neq j$ и $([U_1] \cup \dots \cup [U_n]) \cap$ $\cap (A \cup h^{-1}(1)) = \emptyset$. Найдется непрерывная на Y функция $\alpha(x)$ такая, что $\alpha(x_i) = 1$ при $i = 1, \dots, n$ и $\alpha(Y \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_n)) = \{0\}$. Положим $f(x) = \alpha(x) +$ $+ (1 - \alpha(x))\, h(x)$. Непосредственно проверяется, что функция

f непрерывна на Y, $f(A)=\{0\}$ и $f(B)=\{1\}$

Пусть X - пространство, bX - его псевдокомпактное расширение, $S\subset \mathfrak{f}(X)$. Положим $Y=X\cup \bigcup\{[A]_{bX}: A\in S\}$. Семейство S будем называть bX -полным, если выполнены следующие условия: (I) для всякого $A\in \mathfrak{f}(X)$ существует множество $B\in S$ такое, что либо множество $A\cap B$ бесконечно, либо множества $A\setminus B$ и $B\setminus A$ не являются функционально отделимыми в Y и (2) для любых $A,B\in S$ множество $A\cap B$ конечно.

Теорема 5. Пусть bX - псевдокомпактное расширение пространства X. Для того, чтобы из bX можно было выделить минимальное псевдокомпактное расширение pX необходимо и достаточно, чтобы в X существовало bX полное семейство, состоящее из сходящихся в bX последовательностей.

Доказательство. Достаточность. Пространство Y (см. определение перед формулировкой теоремы) псевдокомпактно. Действительно, если это не так, то по лемме I найдется множество $A\in \mathfrak{f}(Y)$ такое, что $A\subset X$ Но тогда в силу bX -полноты семейства S найдется последовательность $B\in S$ такая, что множества $A\setminus B$ и $B\setminus A$ не являются функционально отделимыми в Y, и следовательно по лемме 9 множество A не является С-вложенным в X Минимальность псевдокомпактного расширения Y следует из предложения 4.

Необходимость. Пусть $Y'\subset bX$ - минимальное псевдокомпактное расширение пространства X. Покажем, что $Y'\supset Y$ (и тогда, очевидно, $Y'=Y$). Действительно, к каждой точке $p\in Y'\setminus X$ по предложению 4 сходится некоторая последовательность $A\in \mathfrak{f}(X)$ Но тогда найдется такая последовательность $A'\in S$, что множество $A\cap A'$ бесконечно, откуда следует, что и последовательность A' сходится к точке p, то есть $p\in Y$.

Следствие. Из данного псевдокомпактного расширения можно выделить не более одного минимального псевдокомпактного расширения.

В частности, из теоремы I вытекает, что в βX не содержится ни одного минимально псевдокомпактного расширения пространства X. Автору неизвестен ответ на следующий

Вопрос: У всякого ли пространства существует хотя бы одно минимальное псевдокомпактное расширение?

Частным случаем минимальных псевдокомпактных расширений являются одноточечные псевдокомпактные расширения (пространств, которые сами не псевдокомпактны). Хорошо известно, что пространство имеет одноточечное бикомпактное расширение тогда и только тогда, когда оно локально-бикомпактно. Выясним, для каких пространств существует одноточечное псевдокомпактное расширение.

Будем говорить, что пространство локально-псевдокомпактно, если у каждой его точки есть окрестность, замыкание которой псевдокомпактно. Сильно локально-псевдокомпактными будем называть пространства, в которых у каждого псевдокомпактного подмножества есть окрестность, замыкание которой псевдокомпактно.

Теорема 6. Регулярное пространство имеет одноточечное строгое псевдокомпактное расширение тогда и только тогда, когда оно сильно локально псевдокомпактно.

Доказательство. Необходимость вытекает из требования регулярности и строгости расширения. Для доказательства достаточности положим $\tau_1 X = X \cup \{y\}$, где $y \notin X$. Окрестности точки y имеют вид $\{y\} \cup (X \setminus [P])$, где P – псевдокомпактное подмножество X. Легко видеть, что $\tau_1 X$ псевдокомпактно. Его регулярность вытекает из сильно локальной псевдокомпактности пространства X.

Заметим, что в классе хаусдорфовых пространств для существования одноточечного строгого псевдокомпактного расширения достаточно локальной псевдокомпактности. Чтобы доказать, что это неверно для регулярных пространств, построим пример вполне регулярного пространства, которое локально псевдокомпактно, но не сильно локально псевдокомпактно. В качестве исходного возьмем пространство $\mathcal{N} \cup \mathcal{R}$ из [8], а для каждого $r \in \mathcal{R}$ возьмем счетное множество $\mathcal{N}_r$ такое, что $\mathcal{N}_r \cap (\mathcal{N} \cup \mathcal{R}) = \phi$ и $\mathcal{N}_r \cap \mathcal{N}_{r'} = \phi$ при $r \neq r'$. Положим $X = \mathcal{N} \cup \mathcal{R} \cup \bigcup \{\mathcal{N}_r : r \in \mathcal{R}\}$. Точки из $\mathcal{N}$ и из $\mathcal{N}_r$ ($r \in \mathcal{R}$) объявляем изолированными. Окрестность точки $r \in \mathcal{R}$ имеет вид $U \cup (\mathcal{N}_r \setminus K)$, где U – окрестность точки r в пространстве $\mathcal{N} \cup \mathcal{R}$, а K – конечное множество. Пространство X даже локально бикомпактно. Рассмотрим псевдокомпактное множество $\mathcal{N} \cup \mathcal{R} \subset X$. Каждая его окрестность замкнута и содержит открыто-замкнутое дискретное подпространство.

Автор глубоко признателен профессору А.В.Архангельскому за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Литература

Комфорт В., Вейзерис Ч. Пересечения счетно-компактных подпространств Стоун-Чеховских бикомпактификаций. - УМН, 1980, т.35, № 3, с.67-77.
2. Engelking R., General Topology. Warszawa, 1977.
3. Blaszczyk.A., On.pseudocompact extensions. - Annales Soc. Math. Polon., v. 20, p. 259-261.
4. Kato A., Various countable compactifications and their applications. - General Topology, 1978, v. 8, N.1.
5. D.K. Burke, E.K. van Douwen, On countably compact extensions of normal locally compact M-spaces. - В кн.: Settheoretic Topology, Acad. Press. N. Y., 1977, p.81-89.
6. A.Berner, Spaces with. dense conditionally compact subspace.- Proc. Amer. Math. Soc., v.81, N 1, p.137-142.
7. Матвеев М.В. О свойствах типа псевдокомпактности и счетной компактности. - Вестник МГУ. Сер. мат. мех., 1984, № 2, с.24-26.
8. S.Mrowka, Some set-theoretic constructions in topology.- Fund. Math., 1977, vol. 44 N 2, p. 83-92.

Поступила 20 января 1984 года

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1985.

УДК 519.55

СПЛАЙНЫ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ОБЫКНОВЕННЫМ ЛИНЕЙНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ И ОПЕРАТОРОМ КРАТНОГО ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ

С.И.Мельник
ЛГУ им. П.Стучки

В общей вариационной теории сплайнов в гильбертовых пространствах пространство $S(T,A)$ сплайнов определяется следующим образом:

Пусть X, Y, Z - вещественные гильбертовы пространства, а операторы $T \in LC(X,Y)$ и $A \in LC(X,Z)$ таковы, что $T(X)\ Y$ и $A(X)=Z$; тогда $S(T,A) \overset{\text{def}}{=}$ $=\{s \in X \mid \langle Ts, Tx \rangle_Y = 0 \quad \forall x \in \mathrm{Ker}\,A\}$

Ниже рассматривается пространство сплайнов, соответствующее обыкновенному линейному дифференциальному оператору и оператору кратного интерполирования. Формулируется теорема характеризации пространства $S(T,A)$, которая, естественно обобщая "алгебраическое" определение сплайна, позволяет вычислять сплайн и характеризовать его дифференциальные свойства.

Пусть $X = H^q([a,b])$ - пространство Соболева, $Y = L_2([a,b])$ и $Z = R^r$, где $r = \sum_{i=0}^{n+1} r_i$, $n \in N$, а r_0, r_1, ... r_n, r_{n+1} - заданная система целых чисел, причем $0 \le r_0 \le q$, $1 \le r_i \le q$ $(i=0,1,\dots,n)$, $0 \le r_{n+1} \le q$.

Зададим на $[a,b]$ сетку $\sigma_t = \{t_0, t_1, \dots, t_n, t_{n+1}\}$, где $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = b$. Положим $\forall x \in X$

$$Ax = (x(t_0),\dots,x^{(r_0-1)}(t_0), x(t_1),\dots, x^{(r_1-1)}(t_1),\dots, x^{(r_{n+1}-1)}(t_{n+1}))$$

и

$$Tx = \sum_{j=0}^{q} a_j x^{(j)},$$

где $\{a_0, a_1, \dots, a_q\} \subset C^q([a,b])$ и $a_q(t) \neq 0$ $\forall t \in [a,b]$, а $C^q(\Omega)$ - пространство q раз непрерывно дифференцируемых на Ω функций.

Нетрудно проверить, что $T \in LC(X,Y)$, $A \in LC(X,Z)$, $T(X)=Y$ и $A(X)=Z$, а множество $\mathrm{Ker}\,T + \mathrm{Ker}\,A =$ $=\{(x'+x'') \mid x' \in \mathrm{Ker}\,T,\ x'' \in \mathrm{Ker}\,A\}$ замкнуто. Поэтому, если дополнительно потребовать выполнения условия $\mathcal{Ker}\,T \cap \mathcal{Ker}\,A = \{0_X\}$, то все условия теоремы существования и единственности интерполяционного сплайна ([I] гл. 4) выполняются, т.е. $\forall z \in \mathcal{Z}\ \exists!\ \sigma \in S(T,A)\ A\sigma = z$.

Для характеризации сплайнов из $S(T,A)$ введем оператор $T^{\circledast}$, определяемый равенством
$T^{\circledast}x = \sum_{\nu=0}^{q}(-1)^{\nu}(a_\nu X)^{(\nu)} \quad \forall x \in \mathcal{R}^{q}([a,b]\setminus \pi_t)$,
где $\mathcal{R}^{q}(\Omega)$ – пространство q раз дифференцируемых на Ω функций.

<u>Теорема.</u> Пусть $s \in X$ и $As = z$. Тогда следующие 2 утверждения равносильны.

1°. s – сплайн.

2°. $s \in \mathcal{R}^{2q}([a,b]\setminus \pi_t)$ (I)

$T^{\circledast}(Ts)(t)=0 \quad \forall t \in [a,b]\setminus \pi_t$ (2)

$(Ts)^{(\mu)}(a+0)=0,\ \mu=0,1,\dots,q-r_0-1$ (3а)

$(Ts)^{(\mu')}(b-0)=0,\ \mu'=0,1,\dots,q-r_{n+1}-1$ (3б)

$s \in C^{(2q-r_i-1)}(t_i),\ i=1,2,\dots,n$ (4)

<u>Доказательство.</u> Воспользуемся тождеством Лагранжа [2, § 9] : $\int_\alpha^\beta(u\cdot Tv - v\cdot T^{\circledast}u)\,dt = \mathcal{L}(v,u)\big|_\alpha^\beta$, где $u,v \in H^q([\alpha,\beta])$, а $\mathcal{L}(v,u)=\sum_{\nu=1}^{q}\sum_{p=0}^{\nu-1}(-1)^p v^{(\nu-1-p)}(a_\nu u)^{(p)}$

$2^{\circ} \to 1^{\circ}$. Из (I) следует, что $Ts \in H^q([a,b])$ а из (2) следует, что $\int_{t_i}^{t_{i+1}} v\,T^{\circledast}(Ts)\,dt=0 \quad \forall v \in H^q([a,b])$, $i=0,1,\dots,n$. Поэтому, положив в тождестве Лагранжа $\alpha=t_i$, $\beta=t_{i+1}$ ($i=0,1,\dots,n$) и $u=Ts$, получим
$\int_{t_i}^{t_{i+1}} Ts\cdot Tv\,dt = \mathcal{L}(v,Ts)\big|_{t_i}^{t_{i+1}} \quad \forall v \in H^q([a,b])$.

Отсюда $\langle Ts, Tv\rangle_Y = \int_a^b Ts\cdot Tv\,dt = \sum_{i=0}^{n}\mathcal{L}(v,Ts)\big|_{t_i+0}^{t_{i+1}-0}$
$= \sum_{\nu=1}^{q}\sum_{p=0}^{\nu-1}[(-1)^p v^{(\nu-1-p)}(a_\nu Ts)^{(p)}]\big|_{t_0+0}^{t_{n+1}-0} +$
$+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{q}\sum_{p=0}^{\nu-1}[(-1)^p v^{(\nu-1-p)}(a_\nu Ts)^{(p)}]\big|_{t_i+0}^{t_i-0}$

Для $v \in \mathcal{Ker}\,A$ по формуле Лейбница имеем
$\sum_{\nu=1}^{q}\sum_{p=0}^{\nu-1}[(-1)^p v^{(\nu-1-p)}(a_\nu Ts)^{(p)}]\big|_{t=t_0+0} = \sum_{\nu=1}^{q}\sum_{p=0}^{\nu-1}\sum_{m=0}^{p}[(-1)^p v^{(\nu-1-p)}C_p^m a_\nu^{(p-m)}(Ts)^{(m)}]\big|_{t=t_0+0}$.
Если $p \geq \nu - r_0$, то $v^{(\nu-1-p)}(t_0+0)$, т.к. $v \in \mathcal{Ker}\,A$, если же $p < \nu - r_0$, то $p < q - r_0$ и $(Ts)^{m}(t_0+0)=0$ при $m \leq p$ в силу условия (3а). Следовательно, последнее выражение равно 0. Аналогично, $\sum_{\nu=1}^{q}\sum_{p=0}^{\nu-1}[(-1)^p v^{(\nu-1-p)}(a_\nu Ts)^{(p)}]_{t=t_{n+1}-0}=0$. Значит, при $v \in \mathcal{Ker}\,A$, $\langle Ts, Tv\rangle =$
$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{q}\sum_{p=0}^{\nu-1}[(-1)^p v^{(\nu-1-p)}(a_\nu Ts)^{(p)}]\big|_{t_i-0}^{t_i+0}$. Учитывая условия (4) и $v \in \mathcal{Ker}\,A$, по формуле Лейбница получаем $\sum_{\nu=1}^{q}\sum_{p=0}^{\nu-1}[(-1)^p v^{(\nu-1-p)}(a_\nu Ts)^{(p)}]\big|_{t_i-0}^{t_i+0} =$

$-\sum_{\nu=1}^{q}\sum_{p=0}^{\nu-1}\sum_{\eta=0}^{p+q}\left[(-1)^p \sigma^{(\nu-1-p)} b_\eta s^{(\eta)}\right]\Big|_{t_i-0}^{t_i+0}=0$ (Заметим, что $b_\eta \in C([t_i,t_{i+1}])$, $\eta=0,1,\ldots,(p+q)$). Таким образом, доказано, что $\forall\sigma\in \operatorname{Ker} A$ $\langle Ts, T\sigma\rangle_Y=0$, а значит, s – сплайн.

$1^\circ \Rightarrow 2^\circ$ Пусть s – сплайн и $As=z_0\in Z$. Покажем, что s удовлетворяет условиям (1)-(4).

Сначала покажем, что существует функция $\tilde{s}\in X$, удовлетворяющая условиям (1)-(4) и условию интерполяции $A\tilde{s}=z_0$. Для построения функции $\tilde{s}$ будем искать ее сужения $\tilde{s}_i=\tilde{s}\big|_{]t_i,t_{i+1}[}$, $i=0,1,\ldots,n$. $\tilde{s}_i$ представимы, в силу (1)-(2), в виде $\tilde{s}_i=\sum_{j=1}^{2q}\lambda_j^{(i)}u_j$, где $u_1,u_2,\ldots,u_{2q}$ образуют фундаментальную систему решений дифференциального уравнения $T^\#(Tx)=0$. Существование такой системы обеспечивается тем, что $T^\#(Tx)=\sum_{\eta=0}^{2q}c_\eta x^{(\eta)}$, причем $c_\eta\in C([a,b])$, $\eta=0,1,\ldots,2q$ и $c_{2q}(t)=(-1)^q a_q^2(t)\neq 0$ $\forall t\in[a,b]$.

Условия (3)-(4), вместе с условиями интерполяции, составляют систему $2(n+1)q$ линейных алгебраических уравнений с $2(n+1)q$ неизвестными $\lambda_j^{(i)}$, $i=0,1,\ldots,n$, $j=1,2,\ldots,2q$. Из доказанного $2^\circ\to 1^\circ$ следует, что всякое решение этой системы, если оно существует, определяет некоторый сплайн, интерполирующий некоторый вектор $z\in Z$ (вектор z определяет вектор свободных членов системы). В силу единственности интерполирующего сплайна, $\forall z\in Z$ система уравнений имеет не более одного решения. Положив $z=\theta_Z$, получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений, имеющую решение. Оно единственное, следовательно, матрица системы невырождена, и система разрешима единственным образом для всех $z\in Z$, в том числе и для $z=z_0$. Итак, $\tilde{s}$, удовлетворяющий условиям (1)-(4) и условию интерполяции, существует. Но это ввиду доказанного $2^\circ\to 1^\circ$ означает, что $\tilde{s}$ – сплайн, интерполирующий $z_0=As$. Следовательно, в силу единственности интерполяционного сплайна, $s=\tilde{s}$. Этим доказательство теоремы завершается.

Применим полученную теорему характеризации к исследованию краевых задач определенного вида. Для этого положим $n=0$.

<u>Следствие I.</u> Пусть $Ax=(x(a),\dots,x^{(\tau_0-1)}(a),x(b),\dots,x^{(\tau_1-1)}(b))$; $Tx=\sum_{\nu=0}^{q} a_\nu x^{(\nu)}$, $a_\nu\in C^{q}([a,b])$, $\nu=0,1,\dots,q$, $a_q(t)\neq 0$ $\forall t\in[a,b]$; $\mathcal{A}x=T^{*}Tx=\sum_{\nu=0}^{q}\sum_{\mu=0}^{q}(-1)^{\nu}(a_\nu a_\mu x^{(\mu)})^{(\nu)}$. Тогда, если $\operatorname{Ker}T\cap\operatorname{Ker}A=\{0\}$, то краевая задача

$\mathcal{A}x=0$,

$(Tx)^{(\eta)}(a)=0$, $\eta=0,1,\dots,q-\tau_0-1$

$(Tx)^{(\eta)}(b)=0$, $\eta=0,1,\dots,q-\tau_1-1$,

$Ax=z$,

имеет единственное решение для любого $z\in R^{\tau_0+\tau_1}$.

В частности, положив $\tau_0=\tau_1=q$, получаем

<u>Следствие 2.</u> Если задача (5)-(6)

$$Tx=0, \tag{5}$$

$$x(a)=\dots=x^{(q-1)}(a)=x(b)=\dots=x^{(q-1)}(b)=0, \tag{6}$$

имеет только тривиальное решение, то задача (7)-(8)

$$\mathcal{A}x=0, \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &x(a)=z_0^a,\ x'(a)=z_1^a,\dots,x^{(q-1)}(a)=z_{q-1}^a,\\ &x(b)=z_0^b,\ x'(b)=z_1^b,\dots,x^{(q-1)}(b)=z_{q-1}^b \end{aligned} \tag{8}$$

имеет единственное решение при любом $z=(z_0^a,\dots,z_{q-1}^a,z_0^b,\dots,z_{q-1}^b)\in R^{2q}$.

Применим теорему для характеризации некоторых конкретных пространств сплайнов.

<u>Пример I.</u> Положим $q=1$; $\tau_0=\tau_{n+1}=0$, $\tau_1=\tau_2=\dots=\tau_n=1$; $a_1(t)\equiv 1$ $a_2(t)\equiv-\alpha$ $(\alpha\in R\setminus\{0\})$ Тогда $Tx=x'-\alpha x$ $Ax=(x(t_1),\dots,x(t_n))$

Если $n>1$, то $\operatorname{Ker}T\cap\operatorname{Ker}A=\{0\}$

В силу теоремы характеризации $s\in S(T,A)$ тогда и только тогда, если

а) s – линейная комбинация функций $e^{\alpha t}$ и $e^{-\alpha t}$ на каждом из интервалов (t_i,t_{i+1}) , $i=1,2,\dots,(n-1)$.

б) $s(t)=c_i e^{\alpha t}$ на каждом из интервалов (t_i,t_{i+1}) $i=0,n$

в) $s\in C([a,b])$.

<u>Пример 2.</u> Пусть $q=2p$, $p\in N$, а $P(\lambda)=\prod_{k=1}^{p}(\lambda^2+k^2)=\sum_{k=0}^{p} b_k\lambda^{2k}$ Рассмотрим оператор T следующего вида: $Tx=\sum_{k=0}^{p} b_k x^{(2k)}$. $P(\lambda)$ – его характеристический полином с корнями $\pm i$; $\pm 2i,\dots;\pm pi$, т.е. функции $\sin t$, $\cos t$,... $\sin pt$, $\cos pt$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $Tx=0$. Далее $T^{*}x=Tx$, $\mathcal{A}x=T(x)=\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{p} b_i b_j x^{2(i+j)}$, поэтому характеристический полином оператора $\mathcal{A}$

$Q(\lambda)=\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{p} b_i b_j \lambda^{2(i+j)}=\sum_{i=0}^{p} b_i \lambda^{2i}\cdot\sum_{j=0}^{p} b_j \lambda^{2j}$ имеет $2p$ двукратных корней $\pm i; \pm 2i; \ldots; \pm pi$. Положим $\tau_0=\tau_{n+1}=0$; $Ax=(x(t_1),\ldots,x^{(\tau_1-1)}(t_1),\ldots,x(t_n),\ldots,x^{(\tau_n-1)}(t_n))$. Если $\operatorname{Ker}T\cap\operatorname{Ker}A=\{0\}$ (а это условие легко проверяется для каждого данного оператора A), то в силу теоремы характеризации, $s\in S(T,A)$ тогда и только тогда, если

а) $s(t)=\sum_{i=1}^{p}(\alpha_i \sin(it)+\beta_i\cos(it))$ на каждом из интервалов (t_i,t_{i+1}) $i=0,n$; $\alpha_i\in R$, $\beta_i\in R$.

б) $s(t)=\sum_{i=1}^{p}(\alpha_i\sin(it)+\beta_i\cos(it)+\gamma_i t\cdot\sin(it)+\delta_i t\cdot\cos(it))$ на каждом из интервалов (t_i,t_{i+1}), $i=1,2,\ldots,(n-1)$; $\alpha_i\in R$, $\beta_i\in R$, $\gamma_i\in R$, $\delta_i\in R$

в) $s\in C^{(2q-\tau_i-1)}(t_i)$, $i=1,2,\ldots,n$.

В частности, положив $\tau_1=\tau_2=\ldots=\tau_n=1$ и $p=1$ и потребовав, чтобы среди точек $t_1,t_2,\ldots,t_n$ была хотя бы одна пара точек, удаленных друг от друга на расстояние, не кратное π, что обеспечивает выполнение $\operatorname{Ker}T\cap\operatorname{Ker}A=\{0\}$, получим характеризацию тригонометрических сплайнов ([I],гл.4).

Пример 3. Положим $q=1$; $\tau_0=\tau_{n+1}=0$, $\tau_1=\tau_2=\ldots=\tau_n=1$; $a_1(t)=1$, $a_2(t)=-2/t$. Пусть $0\notin[a,b]$. Тогда $Tx=x'-\frac{2}{t}x$; $Ax=(x(t_1),x(t_2),\ldots,x(t_n))$, $\operatorname{Ker}T\cap\operatorname{Ker}A=\{0\}$.

В силу теоремы характеризации $s\in S(T,A)$ тогда и только тогда, когда

а) $s(t)=\alpha_i t^2+\beta_i t^{-1}$ на каждом из интервалов (t_i,t_{i+1}), $i=1,2,\ldots,(n-1)$; $\alpha_i\in R$, $\beta_i\in R$.

б) $s(t)=\alpha_i t^2$ на каждом из интервалов (t_i,t_{i+1}), $i=0,n$; $\alpha_i\in R$.

в) $s\in C([a,b])$.

В заключение я хочу поблагодарить доцента М.А.Гольдмана за руководство и помощь в создании этой работы.

Литература

I. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. - М., 1975.

2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М., 1961.

Поступила 14 марта 1984 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига. 1985.

УДК 512.546 + 513.83

ОДИН ПРИМЕР КРУЖЕВНОЙ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ГРУППЫ

В.Г.Пестов
МГУ им. М.В.Ломоносова

Топологическая группа имеет счетный псевдохарактер, если ее единица является пересечением счетного семейства открытых множеств. Отвечая на вопрос А.В.Архангельского, поставленный в [1] , автор построил в [2] пример топологической группы счетного псевдохарактера, топологию которой нельзя ослабить до метризуемой групповой топологии (отметим, что мы рассматриваем только отделимые групповые топологии).

Кружевные топологические группы (т.е., топологические группы, пространства которых являются кружевными) по своим свойствам еще ближе к метризуемым группам, чем группы счетного псевдохарактера (см. [3]). Это побудило D.Х.Брегмана поставить в [3] вопрос: можно ли ослабить топологию произвольной кружевной группы до метризуемой групповой топологии? Ниже на этот вопрос дан отрицательный ответ с помощью примера, представляющего из себя подходящую модификацию конструкции [2].

Пусть $\mathcal{G} = \{G_\alpha$ [illegible] – несчетное семейство экземпляров группы [illegible], где [illegible]. Обозначим через $G = \prod \mathcal{G}$ декартово произведение семейства групп $\mathcal{G}$, наделенное дискретной топологией, и через $G^* = \prod_B^* \mathcal{G}$ прямое произведение семейства групп $\mathcal{G}$, наделенное ящичной топологией. Группа G непрерывно действует на группе G^* следующим образом: для $h \in G$ и $g \in G^*$ положим $\tau_h(g) = \langle h_\alpha g_\alpha h_\alpha^{-1} \rangle$, если $g = \langle g_\alpha \rangle$, $h = \langle h_\alpha \rangle$. Обозначим через $H = G^* \circledS G$ полупрямое произведение топологических групп G^* и [illegible] относительно действия τ ([4] , 6.20). В [3] отмечено, что группа G^* является кружевной. Поскольку [illegible] – открытая подгруппа в H , то и H - кружевная группа (см. [3], следствие 2).

Предположим, что топология $\mathcal{T}$ группы H ослабляется до групповой метризуемой топологии $\mathcal{T}^*$, и выберем счетную базу $\mathfrak{B}$ группы $(H, \mathcal{T}^*)$ в единице. Существует счетное семейство подмножеств $\{V(n): n \in N\}$ группы H такое, что при $n \in N$ $V(n) = \prod^* V(n,\alpha)$, $V(n,\alpha)$ - открытые подмножества G_α и для любого $U \in \mathfrak{B}$ существует $n \in N$, для которого $V(n) \subset U$ (Мы считаем группу G^* канонически вложенной в группу H). Отметим, что множества $V(n)$ открыты в группе $(H, \mathcal{T})$, не будучи, вообще говоря, открытыми в группе $(H, \mathcal{T}^*)$.

Пусть при $\alpha \in A$ $x_\alpha \in G_\alpha$ таков, что для любой окрестности V единицы e_α группы G_α и любой окрестности W элемента x_α существует $g \in G_\alpha$, для которого $gVg^{-1} \cap W \neq \phi$ (существование таких элементов следует из [4], 4.24).

В силу отделимости топологии $\mathcal{T}^*$ для каждого $\alpha \in A$ можно выбрать множество W, открытое в G_α в топологии $\mathcal{T}^*|_{G_\alpha}$, содержащее x_α и такое, что $e_\alpha \notin cl_{\mathcal{T}^*} W_\alpha$ (Группу G_α мы считаем канонически вложенной в G^* - и, тем самым, в H - при отображении $g \mapsto \langle g_\beta \rangle$, где $g_\alpha = g$ и $g_\beta = e_\beta$ при $\beta \neq \alpha$.

Выберем в A произвольное счетное подмножество $B = \{b(k): k \in N\}$. Определим $x = \langle x_\alpha \rangle \in G \subset H$ следующим образом: $x_\alpha = e_\alpha$ при $\alpha \in A \setminus B$, а $x_{b(k)}$ выбрано так, чтобы было: $x_{b(k)} V(k) x^{-1}_{b(k)} \cap W_{b(k)} \neq \phi$, или, другими словами, что $\tau_{x_{b(k)}}(V(k)) \cap W_{b(k)} \neq \phi$ $(*)$.
Для любого $U \in \mathfrak{B}$ существует $U_1 \in \mathfrak{B}$, для которого $xU_1x^{-1} \subset U$; поэтому для некоторого $n \in N$ $xV(n)x^{-1} \subset U$. При $k > n$, ввиду $(*)$ и определения группы H как подупрямого произведения групп G^* и G, имеем: $x_{b(k)} V(n) x^{-1}_{b(k)} \cap W_{b(k)} \neq \phi$ (здесь $V(n)$ и $W_{b(k)}$ понимаются, как подмножества группы G^* !) Поэтому $U \cap G_{b(k)} \cap W_{b(k)} \neq \phi$ (опять напомним, что группу $G_{b(k)}$ мы считаем подгруппой группы G^*).

С учетом произвольности выбора B, мы получили, что для любого $U \in \mathfrak{B}$ множество A_U тех $\alpha \in A$ для которых $U \cap G_\alpha \cap W_\alpha \neq \emptyset$, имеет не более чем конечное дополнение в A. Поэтому, в-частности, $\bigcap \{A_U : U \in \mathfrak{B}\} \neq \emptyset$ и для некоторого $\alpha \in A$ имеет место - при всех $U \in \mathfrak{B}$ $U \cap G_\alpha \cap W_\alpha \neq \emptyset$, что означает $e_\alpha \in cl_{\tau^*} W_\alpha$ - противоречие с выбором множеств W_α.

Автор признателен D.Х.Брегману за полезные обсуждения.

Литература

1. Архангельский А.В. Кардинальные инварианты топологических групп. Вложения и уплотнения. - ДАН СССР, 1979, т. 247, № 4, с. 779-782.
2. Пестов В.Г. О вложениях и уплотнениях топологических групп. - Матем. заметки, 1982, т.31, № 3, с. 443-446.
3. Брегман D.Х. О кружевных топологических группах. - Топологические пространства и их отображения. Рига, 1983, с.3-9.
4. Э.Хьюитт, К.А.Росс. Абстрактный гармонический анализ. - М., т.1, 1975.

Поступила 27 мая 1983 года.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1985.

УДК 513.6

РАЗЛОЖЕНИЕ ТИПА ШЕВАЛЛЕ-МАЦУМОТО ДЛЯ СКРУЧЕННЫХ ГРУПП ШЕВАЛЛЕ

Е.Б.Плоткин

ВНИИводполимер

Настоящая работа посвящена получению аналога разложения Шевалле-Мацумото для случая скрученных групп Шевалле над произвольным коммутативным кольцом. Для групп Шевалле нормальных типов это разложение было установлено в работе Мацумото [11] (случай, когда основное кольцо является полем, рассматривался ещё Шевалле [12]). Это разложение является важным инструментом при изучении различных вопросов теории линейных алгебраических групп. Так, например, в работе [13] оно применялось к исследованию проблемы стабилизации для групп Шевалле нормальных типов, а в [5] использовалось для доказательства разложения Гаусса в сетевых подгруппах этих групп. В [7] решается вопрос об аналоге разложения Шевалле-Мацумото для классических скрученных групп над произвольным коммутативным кольцом и для группы типа ${}^2E_6$ над полулокальным кольцом. Здесь мы завершаем построение этого разложения для всех скрученных групп над произвольным коммутативным кольцом за исключением группы типа ${}^2A_{2n}$.

§ 1. Предварительные обозначения.

Пусть Φ – приведенная, неприводимая система корней типов A_{n-1}, D_l, E_6 ; $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ – множество простых корней, Φ^+ и Φ^- множества положительных и отрицательных корней относительно Π . Пусть R – произвольное коммутативное кольцо и R^* – множество его обратимых элементов. Группа Шевалле типа Φ над коммутативным кольцом R обозначается через $G(\Phi, R)$. На системах корней типов A_{n-1}, D_l , E_6 имеется единственный связанный с графом автоморфизм ρ порядка 2 (инволюция), сохраняющий Π . На системе корней типа $\mathfrak{D}_4$ имеется также автоморфизм порядка 3, сохраняющий Π. Пусть кольцо R обладает инволюцией или автоморфизмом третьего порядка. Тогда можно сконструировать автоморфизм группы Шевалле $G(\Phi,R)$ того же порядка. Все автоморфизмы: кольца, системы корней и группы будем обозначать одной буквой ϱ. Скрученная группа Шевалле $G_\varrho(\Phi,R)$ есть по определению подгруппа в $G(\Phi,R)$, состоящая из неподвижных относительно ϱ точек [10]. Имея в виду показатель автоморфизма, применяют также обозначения ${}^2G(\Phi,R)$, ${}^3G(\mathfrak{D}_4,R)$. Пусть R_0 - подкольцо инвариантных элементов кольца R относительно автоморфизма ϱ.

Как обычно [9], обозначим через $x_\alpha(t)$, $\alpha\in\Phi$, $t\in R$ корневые унипотентные элементы группы $G(\Phi,R)$. Для удобства, действие автоморфизма ϱ обозначают также чертой. Роль корневых унипотентов в группе $G_\varrho(\Phi,R)$ играют элементы видов $x_A(t)$, где

$$x_A(t)=\begin{cases} x_\alpha(t) & \text{, если } \alpha=\bar\alpha,\ t\in R_0,\\ x_\alpha(t)\,x_{\bar\alpha}(\bar t) & \text{, если } \alpha\neq\bar\alpha,\ \alpha=\bar{\bar\alpha},\ t\in R,\\ x_\alpha(t)\,x_{\bar\alpha}(\bar t)\,x_{\bar{\bar\alpha}}(\bar{\bar t}) & \text{, если } \alpha\neq\bar\alpha\neq\bar{\bar\alpha},\ t\in R\end{cases}$$

Определим теперь некоторые подгруппы в группе $G_\varrho(\Phi,R)$. Пусть для любого множества X, $\langle X\rangle$ обозначает подгруппу, порожденную X, если же X подмножество в Π, то $\langle X\rangle$ - минимальная система корней, содержащая X. Тогда

$$E_\varrho(\Phi,R)=\langle x_A(t),\alpha\in\Phi,t\in R\rangle,$$
$$\mathcal{U}_\varrho(\Phi,R)=\langle x_A(t),\alpha\in\Phi^+,t\in R\rangle,$$
$$V_\varrho(\Phi,R)=\langle x_A(t),\alpha\in\Phi^-,t\in R\rangle.$$

Пусть, далее, $T(\Phi,R)$ - максимальный расщепимый тор в $G(\Phi,R)$ и $T_\varrho(\Phi,R)=G_\varrho(\Phi,R)\cap T(\Phi,R)$.

§ 2. Базисные представления

Пусть π - базисное представление группы $G(\Phi,R)$ ([11], [13]). Напомним, что базисным представлением скрученной группы Шевалле $G_\varrho(\Phi,R)$ называется ограничение представления группы $G(\Phi,R)$ на подгруппу $G_\varrho(\Phi,R)$. Диаграммы базисных представлений хорошо известны [6, 13]. Мы будем пользоваться только базисными представлениями без нулевого веса (микровесовыми представлениями [2]).

Пусть V^π - R-модуль представления π и $\Lambda(\pi)$ множество весов π. В силу того, что представление π - базисное, весовые подмодули, отвечающие любому весу $\lambda\in\Lambda(\pi)$, одномерны. Обозначим их V^λ. Пусть $\{v^\lambda\}$, $v^\lambda\in V^\lambda$ базис в V, причем элементы v^λ выбраны так же как в [4]. Элемент g, принадлежащий $G(\Phi,R)$, $G_\sigma(\Phi,R)$ в этом базисе представляется матрицей, элементы которой будем записывать g_{λ_i,λ_j}; $\lambda_i,\lambda_j\in\Lambda(\pi)$. Нас интересует действие корневых унипотентов $x_A(t)$ на базисные векторы v^λ. Будем писать $x_A(t)v^\lambda$ вместо $\pi(x_A(t))v^\lambda$. Если $x_\alpha(t)\in G(\Phi,R)$, то действие $x_\alpha(t)$ описывается леммой 2.3 из [11], если $x_A(t)\in{}^2G(\Phi,R)$, то леммой I из [7]. Приведем теперь действие элементов $x_A(t)$, принадлежащих ${}^3G(\mathfrak{D}_4,R)$ на вектора v^λ.

<u>Лемма I.</u> I. Пусть $x_A(t)=x_\alpha(t)$, $\alpha=\bar\alpha=\bar{\bar\alpha}$, $t\in R_0$.

а) Если $\lambda\in\Lambda(\pi)$, $\lambda+\alpha\notin\Lambda(\pi)$, то $x_A(t)v^\lambda=v^\lambda$

б) Если $\lambda\in\Lambda(\pi)$, $\lambda+\alpha\in\Lambda(\pi)$, то $x_A(t)v^\lambda=v^\lambda\pm t\,v^{\lambda+\alpha}$

2. Пусть $x_A(t)=x_\alpha(t)\,x_{\bar\alpha}(\bar t)\,x_{\bar{\bar\alpha}}(\bar{\bar t})$, $\alpha\neq\bar\alpha$, $\alpha\neq\bar{\bar\alpha}$, $t\in R$. Тогда

а) Если $\lambda\in\Lambda(\pi)$; $\lambda+\alpha$, $\lambda+\bar\alpha$, $\lambda+\bar{\bar\alpha}\notin\Lambda(\pi)$, то $x_A(t)v^\lambda=v^\lambda$.

б) Если $\lambda,\lambda+\alpha\in\Lambda(\pi)$, $\lambda+\bar\alpha,\lambda+\bar{\bar\alpha}\notin\Lambda(\pi)$, то $x_A(t)v^\lambda=v^\lambda\pm\bar t\,v^{\lambda+\bar{\bar\alpha}}$

в) Если $\lambda,\lambda+\bar\alpha\in\Lambda(\pi)$, $\lambda+\alpha,\lambda+\bar{\bar\alpha}\notin\Lambda(\pi)$, то $x_A(t)v^\lambda=v^\lambda\pm\bar t\,v^{\lambda+\bar\alpha}$.

г) Если $\lambda,\lambda+\bar{\bar\alpha}\in\Lambda(\pi)$, $\lambda+\alpha,\lambda+\bar\alpha\notin\Lambda(\pi)$, то $x_A(t)v^\lambda=v^\lambda\pm\bar{\bar t}\,v^{\lambda+\alpha}$

д) Если $\lambda,\lambda+\alpha,\lambda+\bar\alpha,\lambda+\alpha+\bar\alpha\in\Lambda(\pi)$ то $x_A(t)v^\lambda=v^\lambda\pm t\cdot v^{\lambda+\alpha}\pm\bar t\,v^{\lambda+\bar\alpha}\pm t\bar t\,v^{\lambda+\alpha+\bar\alpha}$

е) Если $\lambda,\lambda+\alpha,\lambda+\bar{\bar\alpha},\lambda+\alpha+\bar{\bar\alpha}\in\Lambda(\pi)$, то $x_A(t)v^\lambda=v^\lambda\pm t\cdot v^{\lambda+\alpha}\pm t\bar{\bar t}\,v^{\lambda+\alpha+\bar{\bar\alpha}}\pm\bar{\bar t}\,v^{\lambda+\bar{\bar\alpha}}$

ж) Если $\lambda,\lambda+\bar\alpha,\lambda+\bar{\bar\alpha},\lambda+\bar\alpha+\bar{\bar\alpha}\in\Lambda(\pi)$ то $x_A(t)v^\lambda=v^\lambda\pm\bar t\,v^{\lambda+\bar\alpha}\pm\bar{\bar t}\,v^{\lambda+\bar{\bar\alpha}}\pm\bar t\bar{\bar t}\,v^{\lambda+\bar\alpha+\bar{\bar\alpha}}$

Для доказательства леммы проще всего воспользоваться диаграммой базисного представления типа $\mathfrak{D}_4$:

и перебрать возможности для действия корневых унипотентов из ${}^3G(\mathfrak{A}_4,R)$ учитывая, что $\alpha_4=\bar{\alpha}_4=\bar{\alpha}_k$ $\alpha_3=\bar{\alpha}_4$, $\alpha_4=\bar{\alpha}_4$

§ 3. Разложение типа Шевалле-Мацумото

Пусть μ - старший вес представления π, μ^* младший вес представления π. Пусть, далее, α_k принадлежит Π и Δ - подсистема корней в Φ, порожденная всеми простыми корнями, кроме α_k, если $\alpha_k=\bar{\alpha}_k$, или α_k, $\bar{\alpha}_k$ если $\alpha_k\neq\bar{\alpha}_k$, и $\bar{\alpha}_k=\alpha_k$, или α_k, $\bar{\alpha}_k$, $\bar{\bar{\alpha}}_k$, если $\alpha_k=\bar{\alpha}_k=\bar{\bar{\alpha}}_k$. Положим $\Sigma=\Phi\setminus\Delta$ и $\Sigma^{\pm}=\Phi^{\pm}\cap\Sigma$. Очевидно, что по построению множество корней Σ инвариантно относительно автоморфизма ρ. Все микровесовые представления групп $G(\Phi,R)$ являются фундаментальными. Поэтому, имеется единственный корень α_k, такой что $\mu-\alpha_k\in\Lambda(\pi)$. Его мы и будем выбирать при определении Σ и Δ. Обозначим через $\mathcal{U}_\rho(\Sigma,R)$, $V_\rho(\Sigma,R)$ подгруппы в $G_\rho(\Phi,R)$ порожденные корневыми унипотентами $x_\alpha(t)$, $\alpha\in\Phi^+$ и $\alpha\in P^-$ соответственно.

Теорема I. Пусть для элемента g из скрученной группы Шевалле $G_\rho(\Phi,R)$ типа Φ над коммутативным кольцом R выполнено $g_{\mu\mu}\in R^*$. Тогда имеет место разложение $g=vhg_1u$, где $v\in V_\rho(\Sigma,R)$, $u\in\mathcal{U}_\rho(\Sigma,R)$ $hg_1\in T_\rho(\Phi,R)G_\rho(\Delta,R)$, причем сомножители v, u, $h\,g_1$ определены однозначно.

Эта теорема дает возможность доказать разложение Гаусса для сетевых подгрупп скрученной группы Шевалле ${}^3G(\mathfrak{A}_4,R)$. Этот случай не разобран в [7]. По поводу определений см. [I], [3], [5], [8].

Теорема 2. Пусть R - полулокальное кольцо, $\sigma=(\sigma_\alpha)$ - ρ - инвариантная сеть идеалов в R типа $\mathfrak{A}_4$. Тогда для сетевой подгруппы $\Gamma_\rho(\sigma)$ в группе ${}^3G(\mathfrak{A}_4,R)$ имеет место разложение $\Gamma_\rho(\sigma)=\mathcal{U}_\rho(\sigma)V_\rho(\sigma)T_\rho(\mathfrak{A}_4,R)\,\mathcal{U}_\rho(\sigma)$
В частности, $\Gamma_\rho(\sigma)=\Gamma_{\rho,e}(\sigma)$

Доказательство теоремы 2 мы не приводим, так как с учетом теоремы I оно проводится по той же схеме, что и доказательство из [5], [7]

Следствие. Пусть R - полулокальное кольцо. Тогда имеет место $E_\rho(\sigma) \triangleleft \Gamma_\rho(\sigma)$.

Для доказательства теоремы I рассмотрим вначале подрадикальный случай, затем случай поля и, наконец, полупростого кольца. Из наличия разложения в каждом из указанных случаев несложно выводится разложение для произвольного коммутативного кольца. Отметим сразу, что в доказательстве теоремы мы можем исключить системы корней типов $\Phi = A_{2l-1}, \mathcal{A}_l$, так как для них в [7] приводится прямое доказательство.

§ 4. Подрадикальный случай

Обозначим через $\mathfrak{J}$ радикал Джекобсона кольца R
Пусть $G_\rho(\Phi,R,\mathfrak{J})$ - главная конгруэнцподгруппа по $\mathfrak{J}$, т.е.

$$G_\rho(\Phi,R,\mathfrak{J}) = \langle (g_{\lambda_i,\lambda_j}) \mid g_{\lambda_i,\lambda_j} \equiv \delta_{\lambda_i,\lambda_j} (\mathrm{mod}\,\mathfrak{J}) \rangle$$

где $\delta_{\lambda_i,\lambda_j}$ - символ Кронекера. Другими словами, $G_\rho(\Phi,R,\mathfrak{J})$ - ядро естественного гомоморфизма $\mu: G_\rho(\Phi,R) \longrightarrow G_\rho(\Phi, R/\mathfrak{J})$
Пусть $\mathcal{U}_\rho(\Phi,R,\mathfrak{J})$, $V_\rho(\Phi,R,\mathfrak{J})$, $T_\rho(\Phi,R,\mathfrak{J})$ - ядра индуцированных гомоморфизмов $\mathcal{U}_\rho(\Phi,R) \longrightarrow \mathcal{U}_\rho(\Phi, R/\mathfrak{J})$
$\mathcal{V}_\rho(\Phi,R) \longrightarrow V_\rho(\Phi, R/\mathfrak{J})$, $T_\rho(\Phi,R) \longrightarrow T_\rho(\Phi, R/\mathfrak{J})$

Лемма 2. Произведения $V_\rho(\Phi,R,\mathfrak{J})T(\Phi,R)\mathcal{U}_\rho(\Phi,R)$, $V_\rho(\Phi,R)T_\rho(\Phi,R)\mathcal{U}_\rho(\Phi,R,\mathfrak{J})$ являются группами.

Для случая инволюции доказательство леммы см. [14] , [7] Доказательство из [7] проходит без изменений для случая автоморфизма порядка 3.

Лемма 3. Имеет место разложение $G_\rho(\Phi,R,\mathfrak{J}) = V_\rho(\Sigma,R,\mathfrak{J})T_\rho(\Phi,R,\mathfrak{J})G_\rho(\Delta,R,\mathfrak{J})\mathcal{U}_\rho(\Sigma,R,\mathfrak{J})$

Доказательство. Пусть $g \in G_\rho(\Phi,R,\mathfrak{J})$ Будем последовательно отбрасывать корни α_k , $\mathcal{L}_k$, $\mathcal{I}_k$ и на каждом шагу пользоваться теоремой Шевалле-Мацумото для группы $G(\Phi,R,\mathfrak{J})$ Легко видеть, что для этого необходимо наличие обратимых элементов на некоторых диагональных местах матрицы g и получаемых на каждом шагу матриц. (Для случая $\Phi \neq \mathcal{A}_l$ это просто условия $g_{\mu,\mu} \in R^*$ и $g^i_{\mu^*,\mu^*} \in R^*$). Однако в группе $G_\rho(\Phi,R,\mathfrak{J})$, $g_{\lambda_i,\lambda_i} \in R^*$, для любого $\lambda_i \in \Lambda(\pi)$. Следовательно, указанные условия выполнены автоматически. Из разложения Шевалле-Мацумото в $G(\Phi,R,\mathfrak{J})$ получим что g представляется в виде произведения элементов $u_i \in \mathcal{U}(\Sigma_i,R)$,

$a_i \in V(\Sigma_i, R)$ (где $i = 1,2,3$), стоящих в некотором порядке и элемента hg_1 из $T(\Phi, R, \mathfrak{J})G(\Delta, R, \mathfrak{J})$. Очевидно, что $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$. Так как $T(\Phi, R, \mathfrak{J})G(\Delta, R, \mathfrak{J})$ является конгруэнцподгруппой Леви - компоненты параболической подгруппы, отвечающей множеству корней $\Delta \cup \Sigma^+$, то $T(\Phi, R, \mathfrak{J})G(\Delta, R, \mathfrak{J})$ нормализует группы $\mathfrak{U}(\Sigma, R, \mathfrak{J})$ $V(\Sigma, R, \mathfrak{J})$ Переставив теперь с помощью леммы 2 элементы u_i, v_i, получим $g = v h' g_1' u$, где $v \in V_\varrho(\Sigma, R, \mathfrak{J})$, $u \in \mathfrak{U}_\varrho(\Sigma, R, \mathfrak{J})$, $h' g_1' \in T_\varrho(\Phi, R, \mathfrak{J})G_\varrho(\Delta, R, \mathfrak{J})$ Так как все сомножители v_i, u_i определялись однозначно, то и все сомножители u, v, $h' g_1'$ определены единственным образом.

Заметим, что утверждение леммы I можно вывести также из следствия I работы [7].

§ 5. Случай поля

Пусть K - произвольное поле. Учитывая, что в [7] разбиралея случай системы корней типа E_6, нам остается рассмотреть группу ${}^3G(\mathfrak{D}_4, K)$.

Лемма 5. Пусть $g \in {}^3G(\mathfrak{D}_4, K)$, $g_{\mu,\mu} \in R^*$. Тогда существует $y \in {}^3V(\Sigma, K)$ такой, что $(yg)_{\lambda,\mu} = 0$, при $\lambda \neq \mu$.

Доказательство. В силу разложения Брюа имеем, что $g = u h n_w u_1$, где $u, u_1 \in {}^3\mathfrak{U}(\mathfrak{D}_4, K)$, $h \in {}^3T(\mathfrak{D}_4, K)$, n_w - мономиальная матрица, соответствующая элементу w из группы Вейля системы корней типа $G_2 \rightleftarrows {}^3\mathfrak{D}_4$. Имеем $g_{\lambda_i,\mu} = \xi^{\mu} \cdot (u h n_w u_1) e^{\mu} = \delta (u h n_w) e^{\mu}$, где $\delta \in K^*$, а $\lambda_i \in \Lambda(\sigma)$ Так как n_w - мономиальная матрица, то следовательно, первый столбец матрицы g пропорционален некоторому столбцу матрицы u Не теряя общности, можно считать, что первый столбец g совпадает с последним столбцом матрицы u Имеем $u = \prod_{i=1} x_{\beta_i}(a_i)$, $h_i \in {}^3\mathfrak{D}_4$, где корни занумерованы в соответствии с диаграммой базисного представления для $\mathfrak{D}_4$. Воспользовавшись леммой I, мы можем вычислить явный вид первого столбца матрицы g. Нас будут интересовать элементы $g_{\lambda_i,\mu}$, $i = 4,5,6,7$. Имеем $g_{\lambda_4,\mu} = -\bar{t}_2 t_4 + t_3$, $g_{\lambda_5,\mu} = t_1 t_3 + t_4$, $g_{\lambda_6,\mu} = t_1 \bar{t}_2 + t_3$, $g_{\lambda_7,\mu} = t_1 \bar{t}_1 \bar{t}_2 + t_2 \bar{t}_3 + t_5$, где $t_4, t_5 \in R_0$. Положим

$\phi_1 = x_{-\lambda_1}(-g_{\lambda_2,\mu})x_{-\lambda_4}(-g_{\lambda_3,\mu})$ и $g' = \phi_1 g$. Тогда $g'_{\lambda_2,\mu} = g'_{\lambda_3,\mu} = 0$ и $g'_{\lambda_4,\mu} = g_{\lambda_5,\mu}$. Пусть $\phi_2 = x_{-\lambda_3}(-g'_{\lambda_4,\mu})$ и $g'' = \phi_2 g'$. Тогда $g''_{\lambda_6,\mu} = t_4 + t_1\bar{t}_3 + \bar{t}_1\bar{t}_3 + \bar{t}_1 t_3 + t_1\bar{t}_1\bar{t}_2 + t_1\bar{t}_2\bar{t}_1 + \bar{t}_1 t_2 \bar{t}_1 \in K_0$. Аналогично принадлежит кольцу инвариантов и элемент $g''_{\lambda_7,\mu}$. Поэтому мы можем воспользоваться корневыми унипотентами, соответствующими самосопряженным корням. Положим $\phi_3 = x_{-\lambda_4}(-g''_{\lambda_6,\mu}) \cdot x_{-\lambda_8}(-g''_{\lambda_7,\mu})$ и рассмотрим $g_1 = \phi_3\phi_2\phi_1 g$. Тогда очевидно, что $(g)_{\lambda_i,\mu} = 0$, $i = 2, \ldots, 7$ и $g_{\lambda_8,\mu} = 0$ в силу ортогональности представления $\mathfrak{A}_4$ со старшим весом ω_1.

<u>Лемма 5.</u> Пусть в матрице $g \in {}^3G(\mathfrak{A}_4, K)$ выполнено $g_{\mu,\mu} \in K^*$ и $g_{\lambda,\mu} = 0$ при $\lambda \neq \mu$. Тогда g имеет блочно-треугольный вид: $g_{\lambda_i,\lambda_j} = 0$ при $4 \le i \le 8$, $2 \le j \le 4$; $5 \le i \le 8$, $2 \le j \le 4$; $6 \le i \le 8$, $2 \le j \le 5$; $i = 8$, $2 \le j \le 7$.

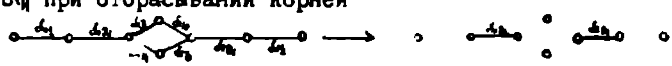
<u>Доказательство.</u> Нам достаточно показать, что в разложении Брюа элемента g, матрица n_w имеет требуемый вид. Имеем $\lambda_i = \varepsilon_i$ при $1 \le i \le 4$, $\lambda_i = -\varepsilon_i$ при $4 < i \le 8$ [2]. Так как $w(\mu) = w(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$ и $\lambda_8 = -\varepsilon_1$, то $w(\lambda_8) = \lambda_8$. Далее $\mu = (\alpha_1 + \alpha_2) + 1/2(\alpha_3 + \alpha_4)$. Имеем $\bar{\mu} - \bar{\mu} = (\alpha_4 + \alpha_2) + 1/2(\alpha_1 - \alpha_3) - (\alpha_3 + \alpha_4) + 1/2(\alpha_4 + \alpha_1) = (\alpha_4 - \alpha_3) - 1/2(\alpha_4 - \alpha_3) = \frac{\alpha_4 - \alpha_3}{2} = \varepsilon_4$

Следовательно

$$w(\lambda_4) = w(\varepsilon_4) = w\left(\frac{\bar{\mu} - \bar{\mu}}{2}\right) = \frac{\overline{w(\mu)} - w(\mu)}{2} = \frac{\bar{\mu} - \bar{\mu}}{2} = \lambda_4.$$

Кроме того, $w(\lambda_5) = w(-\lambda_4) = \lambda_5$. Рассмотрим $w(\lambda_2)$. Имеем $\lambda_2 = \mu - \alpha_1$, $\alpha_1 \neq \bar{\alpha}_1$. Но так как w переводит несамосопряженный корень в такой же, то $w(\lambda_2) \neq \lambda_6, \lambda_7$. Следовательно, $w(\lambda_2) = \lambda_3$ или λ_2. Аналогично $w(\lambda_6) = \lambda_6$ или λ_7. Это и показывает, что n_w имеет необходимый вид.

Лемму 5 удобно проиллюстрировать распадением диаграммы $\mathfrak{A}_4$ при отбрасывании корней



Мы получаем четыре одномерных представления и два представления типа A_1.

Ясно, что леммы 4, 5 в совокупности дают разложение Шевалле-Мацумото для группы ${}^3G(\mathfrak{A}_4, K)$.

§ 6. Случай полупростого кольца

Лемма 6. Пусть $g \in G_\varrho(\Phi,R)$, R - полупростое кольцо, $g_{\mu,\mu} \in R^*$. Тогда для g имеет место разложение Шевалле-Мацумото.

Доказательство. Так как кольцо R - полупросто, то R является подпрямым произведением полей $K_\alpha = R/\mathfrak{M}_\alpha$, где $\{\mathfrak{M}_\alpha\}$, $\alpha \in I\}$ - множество максимальных идеалов кольца R. Будем считать, что ϱ - инволюция. Пусть $\{\mathfrak{M}_\alpha, \alpha \in I_1\}$ - множество инвариантных относительно ϱ идеалов кольца R, таких, что на поле $K_\alpha = R/\mathfrak{M}_\alpha$ наследуется нетривиальная инволюция, $\{\mathfrak{M}_\alpha, \alpha \in I_2\}$ - множество остальных инвариантных относительно ϱ максимальных идеалов, $\{\mathfrak{M}_\alpha, \alpha \in I_3\}$ - множество неинвариантных относительно ϱ максимальных идеалов. Имеем $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3$, и нас интересует, какие группы образуются при переходе к полям K_α, если α принадлежит I_1, I_2, I_3. Если $\alpha \in I_1$, то возникает скрученная группа Шевалле над полем K_α. Если же $\alpha \in I_2$, то имеет место изоморфизм $\varphi: G_\varrho(\Phi,K_\alpha) \cong G(\Phi, K_\alpha)$. Этот изоморфизм осуществляется с помощью отождествления орбит вида $A = (\alpha)$ или $A = (\alpha, \bar{\alpha})$ с корнями системы Φ_ϱ и $x_A(t)^\varphi = x_\alpha(t)$ или $x_A(t)^\varphi = x_\alpha(t)\, x_{\bar{\alpha}}(t)$ где $A \in \Phi_\varrho$, $\alpha \in \Phi$, $t \in R$. Поэтому, если $g = v h g_1 u$ - разложение Шевалле-Мацумото в группе $G(\Phi_\varrho, K_\alpha)$ по корню A_k, то $g^\varphi = u^\varphi h^\varphi g_1^\varphi v^\varphi$ разложение в группе $G_\varrho(\Phi,K_\alpha)$ по $\{\alpha_k, \bar{\alpha}_k\}$. Пусть, далее, $\mathfrak{M}_\alpha$, $\mathfrak{M}_\beta$, $\alpha, \beta \in I_3$ - пара идеалов, таких, что $\mathfrak{M}_\beta = \varrho\mathfrak{M}_\alpha$, и рассмотрим $\mathfrak{M}_{\alpha\beta} = \mathfrak{M}_\alpha \cap \mathfrak{M}_\beta$. Очевидно, что $\varrho\mathfrak{M}_{\alpha\beta} \subset \mathfrak{M}_{\alpha\beta}$ и так как $\varrho^{-1} = \varrho$, то $\varrho\mathfrak{M}_{\alpha\beta} = \mathfrak{M}_{\alpha\beta}$. Факторкольцо $R/\mathfrak{M}_{\alpha\beta}$ есть прямая сумма изоморфных полей $K \oplus K$, на которой действует инволюция $\varrho: \varrho(x \oplus y) = y \oplus x$. Рассмотрим группу $G(\Phi,K)$ в двух изоморфных представлениях - со старшим весом μ и в сопряженном, со старшим весом $\bar{\mu}$ (обозначим соответствующие группы $G^\mu(\Phi,K)$ и $G^{\bar{\mu}}(\Phi,K)$). Для $\Phi = A_{2l-1}, E_6$ имеем $\bar{\mu} = \mu^*$, а для $\Phi = D_l$, $\bar{\mu} = \mu$. Если $f: x_\alpha(t) \longrightarrow x_{\bar{\alpha}}(t)$ - связанный с графом автоморфизм группы $G^\mu(\Phi,K)$, то ясно, что переход от $G^\mu(\Phi,K)$ к $G^{\bar{\mu}}(\Phi,K)$ эквивалентен действию автоморфизма f. Имеем, далее, $(g_{\lambda,\nu})^f = g_{\bar{\nu}\bar{\lambda}} \in K^*$, если $\lambda = \nu = \mu$ и разложения Шевалле-Мацумото в $G^\mu(\Phi,K)$ по корню α переходит при изоморфизме представлений в разложение по корню $\bar{\alpha}$ в группе $G^{\bar{\rho}}(\Phi,K)$. Имеет место изоморфизм $\Psi: G_\rho(\Phi,K\oplus K)\cong G(\Phi,K)$, причем группа $G^{\rho}(\Phi,K)$ представлена в виде диагонали прямого произведения $G^{\rho}(\Phi,K)\times G^{\bar\rho}(\Phi,K)$. На элементарных унипотентах изоморфизм Ψ действует следующим образом: $x_\alpha(a\oplus a)^\Psi=(x_\alpha(a),x_{\bar\alpha}(a))$, если $\alpha=\bar\alpha$, $x_\alpha(a\oplus b)x_{\bar\alpha}(b\oplus a)^\Psi=(x_\alpha(a)x_{\bar\alpha}(b),x_\alpha(b)x_{\bar\alpha}(a))$, т.е. в соответствии с ограничением изоморфизма $\sigma: G(\Phi,K\oplus K)\cong G(\Phi,K)\times G(\Phi,K)$ на группу $G_\rho(\Phi,K\oplus K)$. Если $g=vhg_1u$ - разложение Шевалле-Мацумото по корню α в группе $G^{\rho}(\Phi,K)$, то $g^{\bar\rho}=v^{\bar\rho}h^{\bar\rho}g_1^{\bar\rho}u^{\bar\rho}$ - разложение в группе $G^{\bar\rho}(\Phi,K)$ по корню $\bar\alpha$ и $(vhg_1u, v^{\rho}h^{\rho}g_1^{\rho}u^{\rho})^\sigma=g^\Psi$ - разложение Шевалле-Мацумото элемента $g^\Psi\in G_\rho(\Phi,K\oplus K)$ по паре корней $\{\alpha,\bar\alpha\}$. Воспользовавшись полученными изоморфизмами, имеем

$$G_\rho(\Phi,\prod_{\alpha\in I}K_\alpha)=\prod_{\alpha\in I_1}G_\rho(\Phi,K_\alpha)\prod_{\alpha\in I_2}G(\Phi_\rho,K_\alpha)\prod_{\alpha\in I_3}G(\Phi,K_\alpha).$$

Для каждого из трех прямых произведений мы уже имеем разложение Шевалле-Мацумото и мы можем считать, что множество корней, относительно которого рассматривается разложение во всех сомножителях одинаково.

Пусть $g\in G_\rho(\Phi,R)$ и $g_{\mu,\mu}=1$. Тогда из разложений в группах $G_\rho(\Phi,K_\alpha)$, $G(\Phi_\rho,K_\alpha)$, $G(\Phi,K_\alpha)$, с учетом указанных изоморфизмов следует, что найдется $y\in V^-(\Sigma,R)$ такой, что $(yg)_{\lambda,\mu}\equiv\delta_{\lambda\mu}(\mathrm{mod}\ \mathfrak{m}_\alpha)$, где $\mathfrak{m}_\alpha$ есть максимальный ρ инвариантный идеал или пересечение двух сопряженных относительно ρ идеалов. Так как $\bigcap_{\alpha\in I}\mathfrak{m}_\alpha=0$, то $(yg)_{\lambda,\mu}=\delta_{\lambda,\mu}$. Возьмем теперь элемент $(yg)_{\lambda_i,\lambda_j}$, $\lambda_i>\lambda_j\in\Lambda(\pi)$ такой, что в разложении $\lambda_i-\lambda_j=\sum\alpha_k$, $\alpha_k\in\Pi$ существует корень, не принадлежащий Δ. Тогда опять имеем $(yg)_{\lambda_i,\lambda_j}\equiv 0(\mathrm{mod}\ \mathfrak{m}_\alpha)$ и, следовательно, $(yg)_{\lambda_i,\lambda_j}=0$ для таких λ_i,λ_j. Это завершает доказательство для случая инволюции.

В случае автоморфизма третьего порядка через $\mathfrak{m}_\alpha$ обозначим либо максимальный самосопряженный идеал в R, либо пересечение $\mathfrak{m}_\rho\cap\rho\mathfrak{m}_\rho\cap\rho^2\mathfrak{m}_\rho$, где $\mathfrak{m}_\rho$ - максимальный идеал в R, такой, что $\rho\mathfrak{m}_\rho\neq\mathfrak{m}_\rho$. Во втором случае $G_\rho(\Phi,R/\mathfrak{m}_\alpha)\cong G_\rho(\Phi,K_\alpha\oplus K\oplus K)\cong G(\Phi,K_\alpha)$, причем опять при этом изоморфизме разложение в $G(\Phi,K)$ по $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ в представлениях со старшими весами $\omega_1,\omega_3,\omega_4$ переходит в разложение в $G_\rho(\Phi,R/\mathfrak{m}_\alpha)$ по корню $A=(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4)$. Дальнейшее совершенно аналогично случаю инволюции.

Доказательство теоремы I. Имеем эпиморфизм $G_\rho(\Phi,R)\to$ $\to G_\rho(\Phi,R/\mathfrak{J})$ с ядром $G_\rho(\Phi,R,\mathfrak{J})$ Воспользовавшись наличием разложений в $G_\rho(\Phi,R/\mathfrak{J})$, $G_\rho(\Phi,R,\mathfrak{J})$, леммой 2 и тем что $G_\rho(\Delta,R)$ нормализует $\mathcal{U}_\rho(\Sigma,R)$, $V_\rho(\Sigma,R)$, получим для элемента $g\in G_\rho(\Phi,R)$ разложение

$$g=v_1h_1g_1u_1v_2h_2g_2u_2=v'h'g'u',$$

где $v'\in V_\rho(\Sigma,R)$, $u'\in\mathcal{U}_\rho(\Sigma,R)$, $h'g'\in T_\rho(\Phi,R)G_\rho(\Delta,R)$.

Замечание. Из разложения Шевалле-Мацумото для группы $G_\rho(\Phi,R)$ следует, что если в некотором столбце $g_{\lambda,\nu}$ матрицы g из $G_\rho(\Phi,R)$ имеется обратимый элемент, то найдется матрица из элементарной подгруппы группы $G_\rho(\Phi,R)$ такая, что под ее действием столбец $g_{\lambda,\nu}$ преобразуется в столбец со стоящей на некотором месте единицей и остальными нулями. В частности, для работы со скрученными группами Шевалле над кольцами важно, что мы можем для получения нулей на нужных местах пользоваться корневыми унипотентами, соответствующими самосопряженным корням.

Литература

1. Борович З.И. О параболических подгруппах в линейной группе над полулокальным кольцом. - Вестн. Ленинград. ун-та, № 13, с.16-24.
2. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. - М., 1972, с.331.
3. Вавилов Н.А. О параболических подгруппах групп Шевалле скрученного типа над полулокальным кольцом. - Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1979, т.94, с.21-36.
4. Вавилов Н.А., Плоткин Е.Б. Сетевые подгруппы групп Шевалле. I. - Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1979, т.94, с. 40-49.
5. Вавилов Н.А., Плоткин Е.Б. Сетевые подгруппы групп Шевалле. II. - Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1982, т.114, с.62-76.

6. Залесский А.Е. Полупростые корневые элементы алгебраических групп. - Минск, 1980, с.24 (Препринт, Ин-т математики АН БССР, № 13 (93)).
7. Плоткин Е.В. О сетевых подгруппах скрученных групп Шевалле. - Латв. матем. ежегодник, 1984, вып. 28, с.179-193.
8. Плоткин Е.Б. О параболических подгруппах в $\mathfrak{G}_n(R)$. - Зап. науч. семинаров Мат. ин-та АН СССР, 1980, т.103, с.106-113.
9. Стейнберг Р. Лекции о группах Шевалле. - М., 1975, с.261.
10. Abe E. Coverings of twisted Chevalley groups over commutative rings.- Sci.Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, 1977, A 13, N 366-382, p. 194-218.
11. Matsumoto M. Sur les sous-groupes arithmetiques des groupes semi-simples deployes. Ann.scient. Ecole Norm. Super 4eme serie, 1969, t.2, p. 1-62.
12. Chevalley C. Seminaire sur la classification des groupes de Lie algebriques.- Paris : Ecole Norm. Sup.,1956-1958.
13. Stein M.R. Stability theorems for K_1, K_2 and related functors, modeled on Chevalley groups.- Japan I. Math., 1978, vol. N 1, p. 77-108.
14. Suzuki K. On normal subgroups of twisted Chevalley groups over local rings.- Sci.Rep. Tokyo Kyoiku Daidaku, 1977, vol. 13, N 375, p. 238-249.

Поступила 30 октября 1984 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1985.

УДК 517.97

К G-СХОДИМОСТИ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

У.Е.Райтум
ЛГУ им. П.Стучки

В [5] были изучены основные свойства G-сходимости операторов, соответствующих квазилинейным эллиптическим уравнениям второго порядка дивергентного вида с одной неизвестной функцией. Примененная для получения этих результатов методика может быть без существенных изменений перенесена на случай операторов, соответствующих системам уравнений. Этой цели и посвящена настоящая работа. Для упрощения изложения рассматривается только первая краевая задача с нулевыми граничными условиями, но все результаты без существенных изменений переносятся также на случай третьей или смешанной краевой задачи.

Многие свойства решений эллиптических уравнений и также обозначения основных пространств берутся из [4], а ряд понятий и идей теории G-сходимости – из [3].

Пусть Ω – ограниченная строго липшицева область евклидова пространства R^n, $n \geq 2$, $\partial\Omega$ – граница области Ω, $x = (x_1, \dots, x_n)$ – точка из Ω, N – натуральное число.

Для $p > 1$, $\infty \geq r > \max\{n; p\}$ определим пространства

$$\mathcal{L}_{pr} = \prod_{i=1}^{N} \big(L_{\frac{p}{r}}(\Omega) \times \underbrace{L_p(\Omega) \times \dots \times L_p(\Omega)}_{n} \big),$$

$$\mathcal{L}'_{pr} = \prod_{i=1}^{N} \big(L_{\frac{p}{r}}(\Omega) \times \underbrace{L_{p'}(\Omega) \times \dots \times L_{p'}(\Omega)}_{n} \big), \quad p' = \frac{p}{p-1}$$

элементами

$$g = (g_{10}, g_{11}, \dots, g_{1n}, \quad g_{N0}, g_{N1}, \quad , g_{Nn}) \in \mathcal{L}_{pr},$$

$$f = (f_{10}, f_{11}, \dots, f_{1n}, \quad f_{N0}, f_{N1}, \quad , f_{Nn}) \in \mathcal{L}'_{pr},$$

билинейной формой

$$\langle\langle g, f \rangle\rangle = \sum_{l=1}^{N} \sum_{i=0}^{n} \int_{\Omega} f_{li} g_{li} \, dx .$$

Если $s=\infty$, то показатели $\frac{ps}{s-p}$ и $\frac{p's}{s+p'}$ считаются равными p и p' соответственно.

Обозначим через W_{ps} подпространство всех тех $g\in\mathcal{L}_{ps}$, которые имеют представление

$$g=(z_1, z_{1x_1}, \dots, z_{1x_n}, \dots, z_N, z_{Nx_1}, \dots, z_{Nx_n}),$$
$$z_l\in W^1_p(\Omega),\ z_l\big|_{\partial\Omega}=0,\ l=1,\dots,N. \tag{I}$$

а через W'_{ps} – подпространство всех тех $f\in\mathcal{L}'_{ps}$, которые имеют аналогичное представление, только с функциями $z_l\in W^1_{p'}(\Omega)$, $l=1,\dots,N$.

Относительно облести Ω и показателя p предпологается выполнение следующего условия:

I⁰ а) Существует число $p_0>2$ и константа c_0 такие, что для каждого фиксированного p, $p_0'\le p\le p_0$, при каждом $g\in\mathcal{L}_{p\infty}$ вариационное равенство

$$\langle\langle u-g, v\rangle\rangle=0 \qquad \forall v\in W'_{p\infty}$$

имеет в $W_{p\infty}$ единственное решение u, для которого имеет мест априорная оценка

$$\|u\|_{\mathcal{L}_{p\infty}}\le c_0\|g\|_{\mathcal{L}_{p\infty}}.$$

б) число р принадлежит сегменту $[2,p_0]$.

Считая р и s фиксированными, в дальнейшем будем опускать эти индексы в обозначениях пространств и соответствующих норм. Для элементов различных пространств сохраним использованные выше обозначения: $g\in\mathcal{L}$, $f\in\mathcal{L}'$, $u\in W$, $v\in W'$; элементы одного пространства будем различать верхними индексами. Наконец, скалярное произведение в евклидовом пространстве будем обозначать $\langle\cdot,\cdot\rangle$, а слабую сходимость символом $\rightharpoonup$.

В силу условия I⁰, оператор $\mathcal{P}$, который элементу $g\in\mathcal{L}$ сопоставляет элемент $u\in W$ как решение вариационного равенства

$$\langle\langle u-g, v\rangle\rangle=0 \qquad \forall v\in W',$$

является линейным ограниченным проектором [2] пространства $\mathcal{L}$ на W. Поэтому сопряженный к $\mathcal{P}$ оператор $\mathcal{P}'$ также является проектором, отображает $\mathcal{L}'$ на W' (в силу свойств W и W' и и свойства проекторов) и пространства $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$ распадаются на прямые суммы $\mathcal{L} = W \oplus \mathcal{G}$, $\mathcal{L}' = W^{\perp} \oplus \mathcal{G}'$, причем $W' = \mathcal{G}^{\perp}$, $W = \mathcal{G}'^{\perp}$ (см. [2]). Элементы из $\mathcal{G}'$ будем обозначать ψ.

Определение. Для заданных констант $\nu_0 > 0$, $\nu_1 > 0$, $0 < q \le 1$, $\mu_0 > 0$, $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$ оператор $A: \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ принадлежит классу $\mathfrak{A}(\nu_0, \nu_1, q, \mu_0, \mu_1, \mu_2)$ тогда и только тогда, если

A I. A имеет представление

$$(Ag)(x) = (a_{10}(x, g(x)), a_{11}(x, g(x)), \ldots, a_{1m}(x, g(x)), \ldots$$
$$\ldots, a_{N0}(x, g(x)), a_{N1}(x, g(x)), \ldots, a_{Nm}(x, g(x))), \quad x \in \Omega, \ g \in \mathcal{L}, \tag{2}$$

где функции $a_{li} = a_{li}(x, \xi)$, $i = 0, 1, \ldots, m$, $l = 1, 2, \ldots, N$,

$\xi = \bar{\xi} + \tilde{\xi}$, $\bar{\xi} = (\xi_{10}, 0, \ldots, 0, \xi_{20}, 0, \quad , 0, \ldots, \xi_{N0}, 0, \ldots, 0)$,

$\tilde{\xi} = (0, \xi_{11}, \ldots, \xi_{1m}, \ldots, 0, \xi_{N1}, \quad , \xi_{Nm})$, $x \in \Omega$, $\bar{\xi}, \tilde{\xi} \in R^{N(m+1)}$

удовлетворяют условию Каратеодоры.

A 2. Существует функция $h_1 \in L_{\tilde{p}}(\Omega)$, $h_1 \ge 0$, $\|h_1\| \le \nu_1$, такая, что для почти всех $x \in \Omega$ и всех $\xi', \xi'' \in R^{N(m+1)}$

$$\sum_{l=1}^{N} \sum_{i=0}^{m} (a_{li}(x, \xi') - a_{li}(x, \xi''))(\xi'_{li} - \xi''_{li}) \ge$$
$$\ge \nu_0 |\xi' - \xi''|^p - h_1(x)(1 + |\tilde{\xi}'| + |\tilde{\xi}''|)^{p-2} |\tilde{\xi}' - \tilde{\xi}''|^2.$$

A 3. Существуют функции $h_2 \in L_\infty(\Omega)$, $h_2 \ge 0$, $h_3 \in L_p(\Omega)$, $h_3 \ge 0$, $\|h_2\| \le \mu_1$, $\|h_3\| \le \mu_1$, такие, что для почти всех $x \in \Omega$ и всех $\xi', \xi'' \in R^{N(m+1)}$

$$|a_{li}(x, \xi') - a_{li}(x, \xi'')| \le (\mu_0 + \varepsilon_i h_2(x))[1 + |\xi'| + |\xi''| + (1 + h_2(x))(|\tilde{\xi}'| + |\tilde{\xi}''|) + h_3(x)]^{p-1-q} \times$$
$$\times [|\xi' - \xi''| + (1 + h_2(x))|\tilde{\xi}' - \tilde{\xi}''|]^q,$$

$l = 1, \ldots, N$, $i = 0, 1, \ldots, m$, $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$.

A 4. $\|a_{l0}(\cdot, 0)\|_{L_{\tilde{p}}(\Omega)} \le \mu_2$, $l = 1, \ldots, N$,

$\|a_{li}(\cdot, 0)\|_{L_{p'}(\Omega)} \le \mu_2$, $l = 1, \ldots, N$, $i = 1, \ldots, m$.

Функции h_1, h_2, h_3 считаются фиксированными для каждого конкретного оператора А данного класса.

Класс $\mathfrak{A}(\nu_0, \nu_1, q, \mu_0, \mu_1, \mu_2)$ в дальнейшем считается фиксированным, поэтому будем его обозначать также просто через $\mathfrak{A}$.

Каждому $A \in \mathfrak{A}$ сопоставим оператор $M(A): \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$,

$$(M(A)g)(x) = \big((p-1)4^p h_1(x)[|\tilde g(x)|^{p-2} g_{10}(x) + g_{10}(x)], 0, \dots, 0, \dots \quad (3)$$
$$\dots, (p-1)4^p h_1(x)[|\tilde g(x)|^{p-2} g_{N0}(x) + g_{N0}(x)], 0, \dots, 0\big),$$

$x \in \Omega$, $g \in \mathcal{L}$.

Здесь и в дальнейшем $f = \bar f + \tilde f$, $g = \bar g + \tilde g$ или $Ag = \overline{Ag} + \widetilde{Ag}$ обозначает разложение элементов на сумму, аналогичную $f = \bar f + \tilde f$, т.е., $(\bar f)_{l0} = f_{l0}$, $l = 1, \dots, N$, $(\bar f)_{li} = 0$, $i = 1, \dots, n$, $l = 1, \dots, N$, $\tilde f = f - \bar f$.

Сужение M(A) на W является вполне непрерывным оператором и при $\lambda > 1$ оператор $A + \lambda M(A): W \to \mathcal{L}'$ является сильно монотонным [I].

Отсюда и из условий А I - А 4 следует, что при $\lambda > 1$ для любых $g \in \mathcal{L}$, $f \in \mathcal{L}'$ уравнение

$$A(u+g) + \lambda M(A)(u+g) = f + \xi \quad (4)$$

относительно $u \in W$, $\xi \in \mathcal{Y}'$ однозначно разрешимо. Оператор, который выбранной паре $(g, f) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}'$ сопоставляет $(u, \xi) \in V \times \mathcal{Y}'$ как решение уравнения (4), обозначим через $\mathcal{D}_\lambda(A)$, $\mathcal{D}_\lambda(A): \mathcal{L} \times \mathcal{L}' \to W \times \mathcal{Y}'$, $\mathcal{D}_\lambda(A) = \{\mathcal{D}^1_\lambda(A), \mathcal{D}^2_\lambda(A)\}$.

Очевидно, что уравнение (4) является другой формой записи определения обобщенного решения из W для системы квазилинейных эллиптических уравнений

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i}(A(u+g))_{li} + (A(u+g))_{l0} + \lambda(p-1)4^p h_1[|\tilde g(x) + u|^{p-2}(g_{l0} + u_{l0}) +$$
$$+ g_{l0} + u_{l0}] = 0, \quad l = 1, \dots, N,$$

где u и неизвестная вектор-функция $(z_1, \dots, z_N)$ связаны соотношением (I).

<u>Определение</u>. Последовательность операторов $A_s \in \mathfrak{A}$, $s = 1, 2, \dots$, G - сходится к оператору $A: \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$, если существует оператор M_0, имеющий представление (3) с некоторой функцией $h_{10} \in L_{\bar p}$ такой, что для всех фиксированных $\lambda > I$, $g \in \mathcal{L}$, $f \in \mathcal{L}'$ имеет

место следующие свойства

1) уравнение

$$(A_0 + \lambda M_0)(u+g) = f + \eta \qquad (5)$$

относительно $(u,\eta) \in W \times \mathcal{G}'$ однозначно разрешимо;

2) если (u^0, η^0) решение уравнения (5) и $(u^k, \eta^k) = \mathcal{D}_\lambda(A_k)(g,f)$, $k=1,2,\ldots$, то последовательность $\{u^k\}$ слабо в $\mathcal{L}$ сходится к u^0 и последовательность $\{A_k(u^k+g)\}$ слабо в $\mathcal{L}'$ сходится к $A_0(u^0+g)$

Лемма I. Класс $\mathcal{U}$ является G-компактным, т.е. из любой последовательности $\{A_m\} \subset \mathcal{U}$ можно выделить подпоследовательность $\{A_k\}$ G-сходящуюся к некоторому оператору $A_0 : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$.

Доказательство. Зафиксируем $\lambda \geq 1$. В силу сделанных предположений операторы $\mathcal{D}_\lambda(A_m)$ равномерно по $m=1,2,\ldots$ непрерывны, поэтому, в силу рефлексивности и сепарабельности $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$, существуют подпоследовательность $\{A_{m(s)}\} \subset \{A_m\}$ и непрерывный оператор $\mathcal{D}_\lambda : \mathcal{L} \times \mathcal{L}' \to W \times \mathcal{G}'$ такие, что для любых $(g,f) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}'$

$$\mathcal{D}_\lambda(A_{m(s)})(g,f) \to \mathcal{D}_\lambda(g,f)$$

Согласно определению класса $\mathcal{U}$, соотношению $\lambda \geq 1$ и свойствам строго монотонных непрерывных операторов, сужения операторов $\mathcal{D}^1_\lambda(A_{m(s)})$ на $\mathcal{G} \times W'$ будут строго монотонными. Поэтому, в силу слабой полунепрерывности снизу нормы в рефлексивных пространствах, этим же свойством обладает оператор $\mathcal{D}^1_\lambda$. Так как $\mathcal{D}^1_\lambda(g,f) = \mathcal{D}^1_\lambda(g - \mathcal{P}g, \mathcal{P}f, -\mathcal{P}g)$, то для любого фиксированного $g \in \mathcal{L}$ оператор $\mathcal{D}^1_\lambda(g,\cdot) : W \to W'$ является строго монотонным и коэрцитивным. Таким образом, для любых $g \in \mathcal{L}$, $u \in W$ уравнение $\mathcal{D}^1_\lambda(g, \tau) = u$ однозначно разрешимо относительно $\tau \in W'$ и тем самым определяет неявную функцию $\tau = C_\lambda(g,u)$, $C_\lambda : \mathcal{L} \times W \to W'$, со свойством $C_\lambda(g,u) = C_\lambda(g - \mathcal{P}g, u - \mathcal{P}g)$, которая является непрерывной и для любого $g \in \mathcal{L}$ отображение $C_\lambda(g,\cdot) : W \to W'$ является взаимно однозначным.

Из свойств операторов $\mathcal{D}_\lambda$ и C_λ вытекает, что соотношение $(u,\eta) = (\mathcal{D}^1_\lambda(g,f), \mathcal{D}^2_\lambda(g,f))$ эквивалентно соотношению $A_\lambda(u+g) = f + \eta$ с

$$A_\lambda(u+g) = C_\lambda(u+g - \mathcal{P}(u+g), \mathcal{P}(u+g)) + \qquad (6)$$
$$+ \mathcal{D}^2_\lambda(u+g - \mathcal{P}(u+g), C_\lambda(u+g - \mathcal{P}(u+g), \mathcal{P}(u+g))).$$

Построенный оператор $\mathcal{A}_1$ является непрерывным и для любых $(g,f) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}'$ уравнение

$$\mathcal{A}_1(u+g) = f + \eta \qquad (7)$$

относительно $u \in W$, $\eta \in \mathcal{Y}'$ разрешимо, а из свойств оператора C_λ следует, что это уравнение имеет только одно решение.

Для завершения доказательства остается только показать, что существует оператор M_0 с представлением вида (3) такой, что разность $\mathcal{A}_1 - \lambda M_0 = \mathcal{A}_0$ не зависит от λ. Но это почти непосредственно следует из полной непрерывности операторов $M(A_m): W \to \mathcal{L}'$ после перехода к подпоследовательности, для которой коэффициенты операторов $M(A_m)$ слабо сходятся.

Следствие 1. Если $p=2$ и операторы A_m, $m=1,2,\dots$ являются линейными, то оператор A_0 также является линейным.

Следствие 2. Если задано множество $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}$, то множество $\mathfrak{A}_1$, построенное путем присоединения к $\mathfrak{A}_0$ всех предельных в смысле G-сходимости операторов последовательностей из $\mathfrak{A}_0$, является G-компактным и G-замкнутым, т.е. любая последовательность $\{A_m\} \subset \mathfrak{A}_1$ содержит подпоследовательность, которая G-сходится к некоторому оператору из $\mathfrak{A}_1$.

Справедливость этих утверждений почти непосредственно следует из построения оператора A_0 и сепарабельности и рефлексивности пространств $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$

Поскольку оператор M_0 является вполне определенным (он определяется как слабый предел последовательности $\{M(A_k)\}$), то в дальнейших рассуждениях будем считать, что $\vartheta_1 = 0$.

Для заданных $g \in \mathcal{L}$ и $\varphi \in L_\infty(\Omega)$ обозначим через $\varphi \cdot\cdot g$ элемент с компонентами $(\varphi \cdot\cdot g)_{i\ell} = \varphi g_{i\ell}$, $i=0,1,\dots,n$, $\ell=1,\dots,N$. Пусть теперь заданы две последовательности операторов $\{A_s\}$, $\{B_s\} \subset \mathfrak{A}$, которые G-сходятся к операторам A_0 и B_0 соответственно. Тогда из ортогональности W к $\mathcal{Y}'$, теорем вложения и определения G-сходимости следует, что для $u^s = \mathcal{D}'(A_s)(g^1, f^1)$, $v^s = \mathcal{F}'(B_s)(g^2, f^2)$, $s=0,1,2,\dots$, имеет место соотношение

$$\langle\langle A_s(u^s+g^1) - B_s(v^s+g^2), \varphi \cdot\cdot (u^s+g^1-v^s-g^2)\rangle\rangle \xrightarrow[s\to\infty]{}$$
$$\xrightarrow[s\to\infty]{} \langle\langle A_0(u^0+g^1) - B_0(v^0+g^2), \varphi \cdot\cdot (u^0+g^1-v^0-g^2)\rangle\rangle, \qquad (8)$$

где g^1, $g^1 \in \mathcal{L}$, f^1, $f^1 \in \mathcal{L}'$, $\varphi \in C(\bar\Omega)$, а через $\mathcal{D}(A_k)$ обозначается оператор $\mathcal{D}_1(A_k)$ при $\lambda = 0$

Обозначим через E произвольную строго липшицеву подобласть из Ω, $\bar E \subset \Omega$. Тогда из условия $A2$ и теоремы А.Д.Александрова [2, стр.154] следует, что в случае $A_k = B_k$, $k = 1, 2$, соотношение (8) справедливо также для $\varphi = \chi_E$ где χ_E – характеристическая функция множества E

Пусть выбраны $g \in \mathcal{L}$ G-сходящаяся к A_0 последовательность $\{A_k\} \subset \mathcal{A}$ и

$u^k \in \mathcal{D}^1(A_k)(g, A_0 g) \to 0$, $v^k = \mathcal{D}(A_k)(0, A_0(0)) \to 0$

Так как $\lambda_1 = 0$, то, обозначая $\psi^+ = \max\{0; \psi\}$, имеем $|\langle \tilde A_k(u^k+g) - \tilde A_k v^k, u^k + g - v^k\rangle^-| \le \langle \tilde A_k(u^k+g) - \tilde A_k v^k, \tilde u^k + \tilde g - \tilde v^k\rangle$ и элементы в правой части этого неравенства, в силу теоремы вложения, образуют слабо секвенциально компактную последовательность в $L_1(\Omega)$ Поэтому этим же свойством обладает последовательность, составленная из элементов левой части неравенства. Без умаления общности можно считать, что эти последовательности слабо сходятся в $L_1(\Omega)$ к элементам b_1 и b_2 соответственно, $b_1 \le c \le b_2$, $|b_1| \le b_2$

Таким образом из (8) следует, что

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \int_E \langle \tilde A_k(u^k+g) - \tilde A_k v^k, \tilde u^k + \tilde g - \tilde v^k\rangle^+ dx \le \int_E \langle \tilde A_0 g - A_0(0), g\rangle^+ dx + \int_E b_2\, dx$$

откуда в силу $A2$ в свою очередь вытекает, что для любых $0 < t_0 \le p$ и $\varepsilon > 0$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \int_E |u^k + g - v^k|^{t_0} dx \le \varepsilon J_1 + \bar C(p, t_0, \varepsilon)[J_2 + J_3],$$

$$J_1 = \int_E |\tilde A_0 g - \tilde A_0(0)|^{\tilde p} dx, \quad J_2 = \int_E |g|^{p} dx$$

$$J_3 = \overline{\lim_{k\to\infty}} \int_E (|\tilde A_k(u^k+g) - \tilde A_k v^k||\tilde g|)^{t_0/2} dx.$$

После применения свойств $A3$, $A4$ окончательно получаем, что для $0 < t_0 < p$ (последовательность $\{|\tilde v^k|^p\}$ может не сходиться слабо в $L_1(\Omega)$) и $0 < t \le t_0$

$$\int_E |u^k + g|^t dx \le C(p, t_0, \mu_0) \int_E [|g|^t + |h_2^1|^t (1 + |\tilde g|)^t + |h_3^1|^t + |h_4|^t]\, dx, \quad (9)$$

где $|h_2^1|^{t_0} = w\text{-}\lim_{k\to\infty} |\tilde v^k|^{t_0}$, $|h_2^1|^{t_0} = w\text{-}\lim_{k\to\infty} |h_2^k|^{t_0}$, $|h_3^1|^{t_0} = w\text{-}\lim_{k\to\infty} |h_3^k|^{t_0}$, через $w\text{-}\lim$ означает слабый предел, а пара (h_1^k, h_2^k) соответствует оператору A_k $k = 1, 2, \ldots$, согласно условию $A3$

Из полученных соотношений, (8) и условия $A3$ теперь уже следует окончательная оценка

$$\int_E \langle A_0 g^1 - A_0 g^2, g\rangle dx \le C(t, \mu_0, p, \lambda)[J_4]^{1/t}[J_2]^{\frac{t-1}{t}}[J_4]^{1/p},$$

$$J_4 = \int_E [\mu_0 |g| + h_2^1 |\tilde g|]^t dx, \quad (10)$$

$\mathcal{I}_5 = \int\limits_\Omega [1+|q^1|+|q^2|+k_2'(|\bar q^1|+|\bar q^2|)+k_3'+k_4']^r dx$,

$\mathcal{I}_6 = \int\limits_\Omega [k_4'|\bar q^1-\bar q^2|]^r dx + \int\limits_\Omega \langle A_0 q^1 - A_0 q^2, q^1-q^2\rangle dx$,

справедлива для всех $q, q^1, q^2 \in$ ... , $|q| \in L_\infty(\Omega)$ и

$\frac{\psi(p-q-1)}{\psi(p-q-1)+\psi-p} < r < p$, $p < \delta = \frac{pr}{r-(p-r)(p-q-1)} < \infty$,

$r < r_0$, где r_0 фиксировано и $p-\frac{1}{2} < r_0 < p$.

В первую очередь из (10) вытекает, что оператор A_0 является локальным. Это совместно с леммой I и результатами [6] дает для A_0 искомое представление вида (2) с функциями, удовлетворяющими условию Каратеодори.

Поскольку $\frac{1}{\delta}+\frac{p-r}{r}+\frac{1}{p}=1$, то после перехода к точкам Лебега в (10) путем соответствующего подбора элементов q , q^1 , q^2 легко устанавливается, что A_0 удовлетворяет аналогу условия $A3$ с константами μ_0 , $q^1 = q/_{p-q}$, μ_1' , зависящими только от параметров класса $\mathcal{A}$, если только имеется соответствующая оценка для функции k_4' .

В свою очередь из (8), слабой полунепрерывности снизу выпуклых непрерывных функционалов в рефлексивных пространствах и теорем вложения легко устанавливается, что A_0 удовлетворяет условию $A2$ с функцией $k_1' = \lim\limits_{n\to\infty} k_1^n$ в L_{q_1} , если $q_1 > 0$.

Рассмотрим теперь оценки для k_4' и $A_0(0)$. Мы хотим показать, что нормы этих величин также зависят только от параметров класса $\mathcal{A}$.

Поскольку $M_0(0)=0$ то оценку для $A_0(0)$ можно проводить, считая $q_1=0$. Тогда

$$A_0(0) = C_0(0,0) + \mathfrak{Q}_0^2(0, C_0(0,0))$$.

В силу условий $A2 - A4$, слабой полунепрерывности снизу нормы в $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$ и ограниченности операторов $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}'$ $\|A_0(0)\| \le c_2 \|C_0(0,0)\|$, где константа c_2 зависит только от Ω , k , N , $\|\mathcal{P}'\|$ и остальных параметров класса $\mathcal{A}$. Согласно определению оператора C_0 $\mathfrak{Q}_0^1(0, C_0(0,0))=0$, а из свойств монотонности операторов A_k , $k=1,2,\ldots$, и из условий $A3$, $A4$ вытекает, что для $u^0 = \mathfrak{Q}_0^1(0,0)$ имеет место оценка $\|u^0\| \le c_3$, где c_3 зависит только от тех же параметров, что и c_2 .

Наконец, из $A2$, $A3$ следует, что для элемента $v = C_0(u_0)$ справедлива оценка

$-\langle\langle u^\circ, v^\circ\rangle\rangle = \langle\langle \mathfrak{D}^1_0(0,0) - \mathfrak{D}^1_0(0,v^\circ), 0 - v^\circ\rangle\rangle \geq c_1[1+\|v^\circ\|^{\frac{1}{p-1}}]^{-\frac{p-q}{q}} \|v^\circ\|^{\frac{1}{q}}$,
где константа c_1 также зависит только от тех параметров, что и c.

Отсюда уже непосредственно следует требуемая оценка для $A_0(0)$. В свою очередь, из оценки для $A_0(0)$ и равномерной по $k=1,2,\ldots$, ограниченности операторов $\mathfrak{D}^1(A_k)$ вытекает соответствующая оценка для h_1'

Если же, кроме того, последовательность $\{A_k(0)\}$ сходится сильно к f° , то последовательность $\{v^k\}$ сходится к нулю сильно и $A_0(0) = f^\circ$.

Таким образом доказано следующее предложение:

<u>Теорема I.</u> Пусть задана последовательность операторов $A_m \in \mathfrak{A}(\nu_0, \nu_1, q, \mu_0, \mu_1, \mu_2)$, $m=1,2,\ldots$. Тогда существуют подпоследовательность $\{A_k\} \subset \{A_m\}$ и оператор $A_0 : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ такие, что:

I) оператор A_0 принадлежит классу $\mathfrak{A}(\nu_0, \nu_1, q/p-q, \mu_0', \mu_1', \mu_2')$, где константы μ_0', μ_1', μ_2' зависят только от $\Omega, n, N, p, r, \nu_0, \nu_1, q, \mu_0, \mu_1, \mu_2$;

2) последовательность $\{A_k\}$ G-сходится к A_0 .

Если, кроме того, последовательность $\{A_k(0)\}$ сходится сильно и $\mu_1 = 0$, то $\mu_1' = 0$, т.е. оператор $A_0(\cdot) - A_0(0)$ является оператором с ограниченными по $x \in \Omega$ коэффициентами.

<u>Следствие 3.</u> Если последовательность $\{A_k\} \subset \mathfrak{A}(\nu_0, \nu_1, q, \mu_0, 0, \mu_2)$ G-сходится к оператору A_0 и $|(A_k(0))(x)| \leq c_2$, $k=1,2,\ldots$, то оператор A_0 принадлежит классу $\mathfrak{A}(\nu_0, \nu_1, q/p-q, \mu_0', 0, \mu_2')$, где μ_0' , μ_2' зависят только от $\Omega, n, N, p, r, \nu_0, q, \mu_0, \mu_2, c_2$.

<u>Доказательство.</u> Необходимо только дополнительно показать, что в рассматриваемом случае оценка (9) остается в силе, если функции h_0' , h_2' , h_1' заменить константами.

Мы имеем для $\varphi \in C(\bar\Omega)$, $\varphi \geq 0$, $u^k = \mathfrak{D}^1(A_k)(q, A_0 q)$ $k=1,2,\ldots$, что $u^k \rightharpoonup u^\circ = 0$ и

$$\varliminf_{k\to\infty} \nu_0 \int_\Omega |u^k+q|^p \varphi\, dx \leq \varlimsup_{k\to\infty} \int_\Omega \langle A_k(u^k+q) - A_k(0), u^k+q\rangle \varphi\, dx \leq \qquad (II)$$

$$\leq \varlimsup_{k\to\infty} \int_\Omega \langle A_k(u^k+q) - A_k(0), q\rangle \varphi\, dx + \varlimsup_{k\to\infty} \int_\Omega \langle -A_k(0), u^k\rangle \varphi\, dx$$

так как $\int_\Omega \langle A_k(u^k+q), u^k\rangle \varphi\, dx \to \int_\Omega \langle A_0(u^\circ+q), u^\circ\rangle \varphi\, dx = 0$

Из (II), A3 и сильной сходимости $\bar u^k \to 0$ следует, что $\varlimsup_{k\to\infty} \int_\Omega |u^k+g|^p \varphi\, dx \le c(\lambda, \mu, \kappa, N) \varlimsup_{k\to\infty} \int_\Omega \{[(1+|u^k+g|+|\xi|]^{p-q-1} \times [|u^k+g|+|\xi|]^q + |u^k|\}\varphi\, dx$, откуда вытекает требуемая оценка.

Рассмотрим теперь свойств локальной зависимости предельного оператора [3] .

Пусть $\Omega' \subset \Omega$ является строго липшицевой подобластью и последовательность $\{A_k\} \subset \mathcal{A}$ G-сходится к оператору A_0.

Обозначим через $W(\Omega')$ аналог пространства W, определенное для Ω'. Без умаления общности можно считать, что $\lambda_1 = 0$ и что для заданных $g \in \mathcal{L}$ последовательность $\{B_k(g+\cdot)\}$ сильно монотонных операторов, действующих из $W(\Omega)$ в $(W(\Omega))^*$ и определяемых равенством
$(B_k(g'))(x) = (A_k(g'))(x)$, $x \in \Omega'$, $g' \in \mathcal{L}$, $k = 1,2,\dots$,
G-сходится к некоторому оператору $B_g: W(\Omega') \to (W(\Omega'))^*$.

Для $\varphi \in C(\Omega)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega'$ справедлив аналог соотношения (8). Поэтому, если обозначить $u^k = \mathcal{D}^1(A_k)(g, A_0 g)$, $k=1,2,$, $u'^k = \mathcal{D}^1(B_k)(g, B_g(0))$, $k=1,2,$, то $u^k \to 0$, $u'^k \to 0$ и

$$\varlimsup_{k\to\infty} \int_\Omega |u^k - u'^k|^p \varphi\, dx = 0 . \qquad (12)$$

Так как $A_k(u^k+g) \to A_0(g)$, $B_k(u'^k+g) \to B_g(0)$, то из свойств непрерывности операторов A_k и B_k и (12) следует, что в Ω' $B_g(0) = A_0(g)$.

Поскольку пространство $\mathcal{L}$ сепарабельно и отображение $g \mapsto (B_k(g+\cdot))^{-1}$ является непрерывным, то последовательность $\{B_k\}$ будет G-сходится к оператору B_0, который является сужением на Ω' оператора A_0.

Отсюда также следует, что выполнение условия I* не обязательно. В самом деле, область Ω всегда можно поместить в большую область Ω_1 со сколько угодно хорошей границей, для которой имеет место аналог условия I с любым p, $2 < p < \infty$. После этого можно коэффициенты операторов A_k, $k=1,2,\dots$, доопределить на Ω_1, установить в Ω_1 G-сходимость и применить свойство локальной зависимости предельного оператора.

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 2. Теорема I и следствие 3, а также свойство локальной зависимости коэффициентов предельного оператора сохраняются, если не предполагать выполнение условия I*.

В заключение отметим, что вполне аналогичные результаты имеют место и для второй, третьей или смешанной краевой задачи, если условие I° заменить соответствующим аналогом.

Литература

1. Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. - М., 1978.
2. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. - М., 1962.
3. Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А., Ха Тьен Нгоан. Усреднение и G-сходимость дифференциальных операторов. - УМН, 1979, т.34, вып.5, с.65-133.
4. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. - М., 1973.
5. Райтум У.Е. К G-сходимости квазилинейных эллиптических операторов с неограниченными коэффициентами. - ДАН СССР, 1981, т.261, № 1, с.30-34.
6. Райтум У.Е. К непрерывной зависимости от параметров решений почти линейных эллиптических уравнений. - Латв.матем.ежегодник, 1983, вып.27, с.100-115.

Поступила 20 декабря 1983 г.

УДК 517.52

ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ИЗОБРАЖЕНИЯ

Я.А.Смотровс
ЛГУ им.П.Стучки

§ I. Введение

В работе рассматривается приближенный метод нахождения оригинала преобразования Фурье $f(x)$ по известному изображению $F(y)$, где

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(y)\,e^{ixy}\,dy, \tag{I.1}$$

$$F(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{-ixy}\,dx. \tag{I.2}$$

Если $f\in C^{n}(]-\infty;+\infty[)$ и $f^{(k)}(x)\to 0$ при $x\to\pm\infty$ $(k=1,2,3,\dots,n;\ n\geq 2)$, то существуют такие постоянные c,T, что

$$\left|\,f(x)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-T}^{T}F(y)\,e^{ixy}\,dy\,\right|\leq C\,T^{1-n} \tag{I.3}$$

Формула (I.3) выводится из (I.2) n-кратным интегрированием по частям и применением леммы Римана-Лебега.

Из (I.3) следует, что при достаточно большом T оригинал $f(x)$ можно приближенно находить по формуле

$$f(x)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-T}^{T}F(y)\,e^{ixy}\,dy \tag{I.4}$$

Часто в практике встречаются изображения, отличные от нуля только на конечном интервале $[a;b]$. Тогда получаем точную формулу

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{a}^{b}F(y)\,e^{ixy}\,dy \tag{I.5}$$

После линейной замены переменной интеграл в (I.5) можно свести к виду (I.4), который в дальнейшем и будем рассматривать.

Сущность предложенного в данной работе метода заключается в следующем.

Разложим изображение $F(y)$ в бесконечный ряд

$$F(y)=(T^2-y^2)^{\lambda-1/2}\sum_{k=0}^{\infty}b_k\,C_k^{(\lambda)}\left(\frac{y}{T}\right)\qquad \operatorname{Re}\lambda>-\frac{1}{2} \tag{I.6}$$

где $C_k^{(\lambda)}(t)$ – многочлены Гегенбауэра, и аппроксимируем $F(y)$ частной суммой этого ряда:

$$F(y)\approx F_N(y)=(T^2-y^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{N}b_k\,C_k^{(\lambda)}\left(\frac{y}{T}\right). \tag{I.7}$$

Можно доказать [2], что если $|F(y)-F_N(y)|<\varepsilon$, то $|f(x)-f_N(x)|<2\varepsilon$, т.е.

$$f(x)\approx f_N(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int F_N(y)e^{ixy}dy. \qquad (I.8)$$

Подставляя вместо $F_N(y)$ сумму (I.7), получим формулу

$$f_N(x)=\sqrt{2\pi}\left(\frac{T}{2x}\right)^{\lambda}\sum_{k=0}^{N} b_k\frac{i^k}{k!}\frac{\Gamma(2\lambda+k)}{\Gamma(\lambda)}J_{k+\lambda}(Tx) \qquad (I.9)$$

где

$$b_k=\frac{k!(k+\lambda)[\Gamma(\lambda)]^2}{\pi T^{2\lambda}2^{1-2\lambda}\Gamma(k+2\lambda)}\int_{-T}^{T}F(y)C_k^{(\lambda)}\left(\frac{y}{T}\right)dy \qquad \mathrm{Re}\,\lambda>-\frac{1}{2},\ \lambda\neq 0. \qquad (I.10)$$

Таким образом приближенный оригинал $f_N(x)$ мы находим как сумму по функциям Бесселя $J_{k+\lambda}(Tx)$ индекса $k+\lambda$. Коэффициенты b_k можно найти по формуле (I.10), но непосредственное вычисление их с помощью приближенных квадратурных формул при больших k может вызвать затруднения из-за потери точности вследствие сильной осцилляции ядра $C_k^{(\lambda)}\left(\frac{y}{T}\right)$. Для устранения этой потери точности известны методы [I, 2] суть которых заключается в следующем: требуют, чтобы формула (I.7) была точной для конечного множества точек y_i, $i=1,\dots,N+1$ являющимся множеством корней многочлена $C_N^{(\lambda)}\left(\frac{y}{T}\right)$. Тогда коэффициенты b_k находятся из условия ортогональности многочленов $C_k^{(\lambda)}$ в смысле суммирования по этому множеству точек [3]. В работах [I] и [2] использованы соответственно многочлены Лежандра и Чебышева.

Необходимо заметить, что повышение точности вычислений в работах [I, 2] достигается за счет использования значений изображения на конечном множестве точек действительной оси.

В настоящей работе мы предлагаем другой метод численного нахождения коэффициентов b_k, где для повышения точности вычислений существенно используется другая информация об изображении - его аналитические свойства (характер и расположение особых точек изображения на комплексной плоскости). Для этого формула (I.9) заменяется приближенным равенством

$$f_N(x)\approx\sqrt{2\pi}\left(\frac{T}{2x}\right)^{\lambda}\sum_{k=0}^{M} b_k\frac{i^k}{k!}\frac{\Gamma(2\lambda+k)}{\Gamma(\lambda)}J_{k+\lambda}(Tx)+$$

$$+\sqrt{2\pi}\left(\frac{T}{2x}\right)^{\lambda}\sum_{k=M+1}^{N} b_k^*\frac{i^k}{k!}\frac{\Gamma(2\lambda+k)}{\Gamma(\lambda)}J_{k+\lambda}(Tx), \qquad (I.11)$$

где b_k^* - асимптотические представления коэффициентов b_k при $k\to+\infty$, т.е. $b_k\sim b_k^*$ $k\to+\infty$

(I.12)

Число M выбирается так, чтобы первые коэффициенты b_k, $k=0,1,2,\dots M$ находились без большой потери точности непосредственно из (I.10) при помощи квадратурных формул, а остальные b_k, $k=M+1,\dots N$ – из асимптотической формулы (I.12).

§ 2. Разложение изображения по многочленам Якоби

Для реализации вышеописанного метода требуется, чтобы функция $F(y)/(T^2-y^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$ была разложена по многочленам Гегенбауэра $C_k^{(\lambda)}(\frac{y}{T})$. Однако иногда предпочтительнее разложить эту функцию в ряды по другим многочленам. Поэтому сначала предположим, что нам известно разложение по многочленам Якоби:

$$F(y)=(T^2-y^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\sum_{i=0}^{\infty} a_i P_i^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{y}{T}\right), \qquad (2.1)$$

частная сумма которого имеет вид

$$F_N(y)=(T^2-y^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\sum_{i=0}^{N} a_i P_i^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{y}{T}\right) \qquad (2.2)$$

Очевидно

$$\sum_{i=0}^{N} a_i P_i^{(\alpha,\beta)}(t)=\sum_{i=0}^{N} b_i C_i^{(\lambda)}(t), \quad -1\le t\le 1. \qquad (2.3)$$

Обозначим через $(C_{i,s})$ матрицу перехода от $P_i^{(\alpha,\beta)}$ к $C_i^{(\lambda)}$ тогда

$$P_i^{(\alpha,\beta)}(t)=\sum_{s=0}^{i} c_{i,s}C_s^{(\lambda)}(t) \qquad (2.4)$$

Подставляя в (2.3), получим

$$\sum_{i=0}^{N} b_i C_i^{(\lambda)}(t)=\sum_{i=0}^{N} a_i\sum_{s=0}^{i} c_{i,s}C_s^{(\lambda)}(t)=\sum_{s=0}^{N} C_s^{(\lambda)}(t)\sum_{i=s}^{N} a_i c_{i,s},$$

или

$$b_i=\sum_{s=i}^{N} a_s c_{s,i} \qquad (2.5)$$

Так как a_i известны, то необходимо найти $c_{s,i}$. Для этого найдем для них рекуррентные соотношения по аналогии с [2]. Как известно

$$a_{1n}P_n^{(\alpha,\beta)}(t)=(a_{2n}+a_{3n}t)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(t)-a_{4n}P_{n-2}^{(\alpha,\beta)}(t), \quad n\ge 2 \qquad (2.6)$$

где $a_{1n}=2n(n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)$ $a_{2n}=(2n+\alpha+\beta-1)(\alpha^2-\beta^2)$, $a_{3n}=(2n+\alpha+\beta-2)_3$, $a_{4n}=2(n+\alpha-1)(n+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)$, а $(\alpha)_\ell$ – символ Похгаммера.

Подставляя (2.4), получим

$$a_{1n}\sum_{s=0}^{n} c_{n,s}C_s^{(\lambda)}(t)=(a_{2n}+a_{3n}t)\sum_{s=0}^{n-1} c_{n-1,s}C_s^{(\lambda)}(t)-a_{4n}\sum_{s=0}^{n-2} c_{n-2,s}C_s^{(\lambda)}(t).$$

Так как $tC_s^{(\lambda)}(t)=\frac{s+1}{2(s+\lambda)}C_{s+1}^{(\lambda)}(t)+\frac{s+2\lambda-1}{2(s+\lambda)}C_{s-1}^{(\lambda)}(t)$, $s\ge 1$,

то после некоторых преобразований, получаем искомое рекуррентное соотношение:

$$a_{1n} c_{n,s} = a_{2n} c_{n-1,s} + a_{3n} \frac{s}{2(s+\lambda-1)} c_{n-1,s-1} +$$
$$+ a_{3n} \frac{s+2\lambda}{2(s+\lambda+1)} c_{n-1,s+1} - a_{4n} c_{n-2,s}; \qquad (2.7)$$

если считать, что $c_{i,k}=0$ при $k<0$ или $k>i$, то формула пригодна для $s=0,1,2,\dots,n$; $n\geq 2$. Начальные значения находятся непосредственно и равны:

$$c_{0,0}=1,\quad c_{0,1}=\frac{\alpha-\beta}{2},\quad c_{1,1}=\frac{\alpha+\beta+2}{4\lambda} \qquad (2.8)$$

Из соотношений (2.7) и (2.8) $c_{s,i}$ можно найти с требуемой точностью.

Необходимо заметить, что асимптотику коэффициентов b_i можно найти, используя непосредственно асимптотику для a_i на основании формулы (2.5).

§ 3. Вычисление функций Бесселя

Как известно функции Бесселя удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$J_{n+\alpha}(t) = \frac{2(n+\alpha+1)}{t} J_{n+\alpha-1}(t) - J_{n+\alpha-2}(t). \qquad (3.1)$$

Однако вычисление значений функций Бесселя по формуле (3.I) при больших n приводит к большой погрешности. Поэтому более удобно вычисление вести при помощи цепных дробей.

Вместо (3.I) используем соотношение:

$$k_n = \frac{J_{n+\alpha-1}}{J_{n+\alpha}} = \frac{2(n+\alpha)}{t} - \frac{1}{k_{n+1}} \qquad (3.2)$$

l-я подходящая дробь имеет вид:

$$k_n \approx \frac{A_l}{B_l} = p_0 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_l} \qquad (3.3)$$

где A_l и B_l можно найти из рекуррентных соотношений

$$A_l = p_l A_{l-1} + A_{l-2},\quad B_l = p_l B_{l-1} + B_{l-2},\quad l=1,2,3,\dots \qquad (3.4)$$

где начальные значения:

$$A_0 = p_0,\quad B_0 = 1,\quad A_{-1} = 1,\quad B_{-1} = 0 \qquad (3.5)$$

В нашем случае

$$p_k = \frac{2(n+k+\alpha)}{t}\quad k=0,1,2,\dots,l \qquad p_l = k_{n+l} \qquad (3.6)$$

Для вычисления функций Бесселя в работе [I] предлагается следующий алгоритм. Выбирая достаточно большое l и считая, что $1/k_{l+n}=0$, по формуле (3.2) вычисляют k_{n+l-1}, $k_{n+l-2}, \dots, k_n$. Так как $k_i = \frac{J_{i+\alpha-1}}{J_{i+\alpha}}$, то значения $J_\alpha, \dots, J_{n+\alpha-1}$ получают из соотношения (3.I), а последующие значения $J_{n+\alpha}, \dots, J_{k+\alpha}$ вычисляют по найденным k_i.

В работе [2] предлагается использовать цепную дробь (3.2) для нахождения всех необходимых величин $k_0, \dots, k_n$

С их помощью из точно найденного значения $\mathcal{J}_k(4)$ получают следующие значения.

§ 4. Асимптотические представления b_k

Асимптотические представления интегралов вида
$$D_n = \frac{1}{\|q_n\|^2} \int_a^b f(x)\, \rho(x)\, q_n(x)\, dx, \qquad (4.1)$$
где $\{q_n\}$ – полная система многочленов, ортогональных на $[a, b]$ с весом $\rho(x)$, подробно рассмотрена в работах [4, 5]. Сводку результатов для многочленов Гегенбауэра легко получить, используя случай полиномов Якоби [5] Так как доказательства соответствующих теорем аналогичны приведенным в [4, 5], то здесь их не приводим.

Для удобства записи обозначим через $\mathcal{J}_k$ интеграл, встречающийся в формуле (1.10) для коэффициентов b_k, т.е.
$$\mathcal{J}_k = \int_{-T}^{T} F(y)\, C_k^{(\lambda)}\left(\tfrac{y}{T}\right) dy. \qquad (4.2)$$
Если $F(y)/(T^2-y^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$ и ее производные до m-ого порядка включительно непрерывны на отрезке $[-T, T]$, а производная $(m+1)$-ого порядка терпит разрыв первого рода в точке $y_0 \in]-T, T[$, то асимптотическое представление (4.2) при $k \to \infty$ может быть получено разбиением интеграла $\int_{-T}^{T} = \int_{-T}^{y_0} + \int_{y_0}^{T}$ и интегрированием по частям. При этом основной вклад в асимптотику $\mathcal{J}_k$ дает вообще точка $y = y_0$.

Пусть $F(z)/(T^2-z^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$ как функция комплексного переменного удовлетворяет следующим условиям:

1) она аналитична внутри эллипса
$$z = z(t) = \tfrac{1}{2}\left(r_0 e^{it} + \tfrac{1}{r_0} e^{-it}\right) \qquad t \in]-\pi, \pi[\qquad (4.3)$$
с фокусами в точках $\pm T$ $T > 0$ и некоторым фиксированным r_0 $0 < r_0 < T$;

2) на эллипсе (4.3) функция имеет m особых точек $z_1, z_2, z_3, \dots, z_m$, где
$$z_n = \tfrac{1}{2}\left(r_0 e^{i\alpha_n} + \tfrac{1}{r_0} e^{-i\alpha_n}\right), \quad n = 1, 2, \dots, m, \qquad (4.4)$$
в окрестности каждой из которых справедливо разложение
$$F(z)/(T^2-z^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} \quad A_n (z-z_n)^{-\mu_n}\left[1 + \alpha_n (z-z_n) + \dots\right] \qquad (4.5)$$
$$A_n \neq 0 \qquad \mu_n \neq 0, -1, -2,$$
Тогда для $\mathcal{J}_k$ при $k \to +\infty$ верна следующая асимптотическая формула:

$$\mathcal{J}_k \sim \sqrt{\pi}\, T^{2\lambda} k^{\lambda-2} \frac{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}{\Gamma(2\lambda)} r_0^k \sum_{n=1}^{m} A_n \frac{(k/T)^{\mu_n}}{\Gamma(\mu_n)} \times$$
$$\times \exp\{ i x_n k + \lambda \ln(T^2 - S_n^2) - \mu_n \ln(S_n - z_n)\}, \qquad (4.6)$$

где $S_n = r_0 \exp(i x_n)$, $-\pi < x_n \le \pi$ и z_n определяются из (4.4).

Примечания. I. Если на эллипсе (4.3) лежит несколько особых точек функции $f(z)$, в окрестности которых имеет место (4.5), то главный член асимптотики $\mathcal{J}_k$ дает вклад той особой точки, для которой $\mathrm{Re}\,\mu_n$ при $n=1,2, \ldots ,m$ наибольшая.

2. Вычисляя дальнейшие члены асимптотики, можно получить также более точные разложения интегралов $\mathcal{J}_k$ при $k \to +\infty$

3. Если $F(z)/(T^2-z^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$ в окрестности особых точек имеет разложение иного вида, чем (4.5) (логарифмическая точка ветвления, существенно особая точка и т.д.), то модифицируя соответствующим образом методику расчета, можно также получить асимптотику $\mathcal{J}_k$ при $k \to +\infty$

Если $F(z)/(T^2-z^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$ целая аналитическая функция порядка $\rho < 2$, то для $\mathcal{J}_k$ определяемых формулой (4.2), имеет место

$$\mathcal{J}_k = \frac{T^{2\lambda}}{k!\,2^k} \frac{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})\Gamma(2\lambda+k)}{\Gamma(2\lambda)} \sum_{l=0}^{\infty} a_{k+2l}\, T^{2l+k} \frac{(2l+k)!\,\Gamma(l+\frac{1}{2})}{(2l)!\,\Gamma(l+k+\lambda+1)} , \qquad (4.7)$$

где коэффициенты a_m определяются из разложения

$$F(z)/(T^2-z^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m \qquad (4.8)$$

Сходящиеся ряды (4.7) являются одновременно асимптотическими, если $k \to +\infty$, быть может, после некоторой перестановки членов ряда при суммировании по l .

Если $F(y)/(T^2-y^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$ аналитична на $]-T,T]$ и при $y \to -T+0$ имеет асимптотическое представление

$$F(y)/(T^2-y^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n (y+T)^{\mu_n} , \qquad (4.9)$$

где $a_0 \ne 0$, $\frac{1}{2}-\lambda < \mathrm{Re}\,\mu_0 < \mathrm{Re}\,\mu_1 < \ldots$, то $\mathcal{J}_k$ при $k \to +\infty$ имеет следующее асимптотическое представление:

$$\mathcal{J}_k \sim \frac{(-1)^k (2T)^{2\lambda}}{k!} \frac{\Gamma(2\lambda+k)\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}{\Gamma(2\lambda)} \sum_{0}^{\infty} a_l (2T)^{\mu_l} (-\mu_l)_k \frac{\Gamma(\lambda+\mu_l+\frac{1}{2})}{\Gamma(2\lambda+\mu_l+k+1)} \qquad (4.10)$$

Если $F(y)/(T^2-y^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$ аналитична на $[-T,T[$ и при $y \to T-0$ имеет асимптотическое представление

$$F(y)/(T^2-y^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n (T-y)^{\gamma_n} , \qquad (4.11)$$

где $c_0 \ne 0$; $\gamma_0 \ne 0,1,2,\ldots$; $\frac{1}{2}-\lambda < \mathrm{Re}\,\gamma_0 < \mathrm{Re}\,\gamma_1 < \ldots$, то $\mathcal{J}_k$ при $k \to +\infty$ имеет асимптотическое разложение

$$\mathcal{J}_k \sim \frac{(2T)^{2\lambda}}{k!}\,\frac{\Gamma(2\lambda+k)\,\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}{\Gamma(2\lambda)}\;\sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell\,(2T)^{\ell}\,(-\ell)_k\,\frac{\Gamma(\lambda+\ell+\frac{1}{2})}{\Gamma(2\lambda+\ell+k+1)}\,. \qquad (4.12)$$

Если

$$F(y)/(T^2-y^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} = (T+y)^{\sigma}(T-y)^{\tau}\,\varphi(y)\,, \qquad (4.13)$$

где $\sigma,\tau \neq 0,1,\ldots$; $\sigma>-1$, $\tau>-1$, а $\varphi(z)$ – аналитична на сегменте $[-T,T]$, то $\mathcal{J}_k$ при $k\to+\infty$ имеет следующее асимптотическое разложение $\mathcal{J}_k \sim \frac{(2T)^{2\lambda}}{k!}\,\frac{\Gamma(2\lambda+k)\,\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}{\Gamma(2\lambda)}$,

$$\times\Big\{(-1)^k(2T)^{\sigma}\sum_{\ell=0}^{\infty} B_\ell\,(2T)^{\ell}(-\sigma-\ell)_k\frac{\Gamma(\lambda+\sigma+\ell+\frac{1}{2})}{\Gamma(2\lambda+\sigma+\ell+k+1)}+(2T)^{\tau}\sum_{\ell=0}^{\infty} C_\ell\,(2T)^{\ell}(-\tau-\ell)_k\frac{\Gamma(\lambda+\tau+\ell+\frac{1}{2})}{\Gamma(2\lambda+\tau+\ell+k+1)}\Big\},\qquad (4.14)$$

где коэффициенты B_n и C_n определяются из разложений

$$(T-y)^{\tau}\varphi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n\,(y+T)^{n}\,, \qquad (4.15)$$

$$(T+y)^{\sigma}\varphi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\,(T-y)^{n}\,. \qquad (4.16)$$

Литература

1. Бахвалов Н.С., Васильева Л.Г. Вычисление интегралов от осциллирующих функций при помощи интерполяции по узлам квадратуры Гаусса. – Журн. вычисл. мат. и мат. физики, 1968, 8(I), с.175-181.
2. Littlewood R.K., Zakian V. Numerical Evolution of Fourier Integrals. "J. Inst. Math. and Appl.", 1976, v.18, 331-3
3. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. – М., 1961.
4. Цирулис Т.Т. Асимптотическое представление коэффициентов Фурье разложения функций в ряды по полиномам Лежандра. – Латвийский математический ежегодник, 1976, 20, с.47-62
5. Цирулис Т.Т. Асимптотические представления коэффициентов Фурье в ряды по классическим ортогональным полиномам. – Латвийский математический ежегодник, 1979, 23, с.37-52.

o

Поступила 10 сентября 1984 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1985.

УДК 513.83

О СВОЙСТВАХ ЛИНДЕЛЕФА ПРОСТРАНСТВ ФУНКЦИЙ

Г.А.Соколов
Томский государственный университет

Символом $C_p(X)$ обозначается пространство всех непрерывных вещественных функций, заданных на X, и наделенное топологией поточечной сходимости. Если $\{X_i, i \in J\}$ семейство топологических пространств с выделенными точками $x_i^* \in X_i$, $i \in J$, то следующее подпространство тихоновского произведения

$$\Sigma\{X_i ; i \in J\} = \{x = (x_i) \in \Pi\{X_i ; i \in J\} ; |\{i, x_i \neq x_i^*\}| \le \aleph_0\}$$

называется Σ-произведением этого семейства. Остальные определения и обозначения стандартны (см [1]).

Теорема 1. Пусть X^n имеет счетную тесноту для всех $n = 1, 2, \ldots$ и для любой последовательности подмножеств $Y_n \subset X^n$ существует непрерывное отображение $f : X \to X$ такое, что $f^n(Y_n)$ сепарабельно и $f^n(Y_n) \subset \overline{Y_n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда пространство $C_p(X)$ линделефово.

Следующее утверждение является одновременно обобщением теорем С.П.Гулько [2] и Н.В.Величко [3].

Следствие 1. Пусть X – замкнутое (более общо – почти инвариантное [2]) подпространство Σ-произведения семейства $\{X_i ; i \in J\}$, причем для любого счетного $A \subset J$ пространство $(\Pi\{X_i ; i \in A\})^n$ наследственно сепарабельно, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда пространство $C_p(X)$ линделефово.

Следствие 2. Пусть X – замкнутое подпространство Σ-произведения сепарабельных метрических пространств, причем X^n линделефово для всех $n = 1, 2, \ldots$. Тогда любое пространство вида $C_p(\ldots C_p(X))$ линделефово.

Литература

1. Архангельский А.В. – Успехи мат. наук, т.39, вып.5, 1984, с.11-50.
2. Гулько С.П. – ДАН СССР, 1977, т.237, № 3, с.505-508.
3. Величко Н.В. – Матем. заметки, 1981, т.30, № 5, с.703-712.

Поступила 8 ноября 1984 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1985.

УДК 519.21

О СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ИМПУЛЬСНЫМИ СЛУЧАЙНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

В.Н.Царькова
ЛГУ им. П.Стучки

Пусть $\mathcal{H}$ сепарабельное гильбертово пространство, $\mathcal{L}$ - замкнутый линейный оператор, действующий из $\mathcal{D}(\mathcal{L})\subset\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}$ и порождающий полугруппу линейных непрерывных операторов $\{e^{t\mathcal{L}},\ t\in R_+\}$. Полугруппу можно рассматривать, как полугруппу операторов сдвига вдоль решений дифференциального уравнения [I]:

$$\frac{du}{dt}=\mathcal{L}u,\qquad u(0)=u_0. \qquad (I)$$

Предположим, что в моменты времени $t=n\Delta$, $n\in N$, $\Delta>0$ решение (I) претерпевает разрыв I-го рода вида

$$u(n\Delta+0)=(A+\alpha_n(\omega)B)\,u(n\Delta), \qquad (2)$$

где $A,B\in L(\mathcal{H},\mathcal{H})$, $L(X,Y)$ - пространство линейных непрерывных операторов, действующих из X в Y, а $\{\alpha_n(\omega),n\in N\}$ - последовательность независимых в совокупности случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией. Для дальнейших рассуждений удобно считать, что (2) выполняется и при $n=0$. Назовем тривиальное решение (I)-(2) экспоненциально устойчивым в среднем квадратичном, если существуют такие положительные константы M и γ, что при всех $t\in R_+$ и $u_0\in\mathcal{H}$ выполняется неравенство

$$E\,\|u(t)\|^2\le M\cdot e^{-\gamma t}\,\|u_0\|^2. \qquad (3)$$

Лемма. Тривиальное решение (I)-(2) экспоненциально устойчиво в среднем квадратичном тогда и только тогда, когда существуют положительные константы $\hat{M}$ и $\hat{\gamma}$ такие, что при всех $n\in N$ и $u_0\in\mathcal{H}$ выполняется неравенство

$$E\,\|u(n\Delta)\|^2\le\hat{M}\,e^{-\hat{\gamma} n}\,\|u_0\|^2. \qquad (4)$$

Доказательство. Необходимость условия (4) следует непосредственно из (3) после подстановки $t=k\Delta$, $k\in N$. Для доказательства достаточности выпишем вспомогательное неравенство при $\tau\in(0,\Delta)$

$$\|u(k\Delta+\tau)\|^2 \le \|e^{\tau\mathcal{X}}\|^2\,\|A+\alpha_k(\omega)B\|^2\,\|u(k\Delta)\|^2 \le$$
$$\le \lambda\|A+B\alpha_k(\omega)\|^2\,\|u(k\Delta)\|^2, \tag{5}$$

где $\lambda=\sup\limits_{\tau\in[0,\Delta]}\|e^{\tau\mathcal{X}}\|^2$.

Обозначим $\mathcal{F}_k$ - минимальную σ-алгебру, относительно которой измеримы случайные величины $\alpha_0,\alpha_1,\ldots\alpha_k$, $k\in N$. Ясно, что случайная величина $u(t)$ при всех $t\in[k\Delta,(k+1)\Delta]$ $\mathcal{F}_k$ - измерима и не зависи. от случайных величин α_n с номерами большими k. Поэтому из (5) имеем при всех $k\in N$ и $\tau\in(0,\Delta)$

$$E\|u(k\Delta+\tau)\|^2 \le \lambda E\{E\{\|A+\alpha_k(\omega)B\|^2\|u(k\Delta)\|^2\,|\,\mathcal{F}_{k-1}\}\}=$$
$$=\lambda E\{\|u(k\Delta)\|^2 E\{\|A+\alpha_k(\omega)B\|^2\,|\,\mathcal{F}_{k-1}\}\}=$$
$$=\lambda E\{\|u(k\Delta)\|^2\}\,E\{\|A+\alpha_k(\omega)B\|^2\}\le 2\lambda(\|A\|^2+\|B\|^2)\hat{M}e^{-k\Delta\hat{\gamma}}\|u_0\|^2=$$
$$=2\lambda(\|A\|^2+\|B\|^2)\hat{M}e^{-(k\Delta+\tau)\hat{\gamma}}e^{\tau\hat{\gamma}}\|u_0\|^2\le$$
$$\le Me^{-\gamma(k\Delta+\tau)}\|u_0\|^2,$$

где $M=2\lambda(\|A\|^2+\|B\|^2)\hat{M}e^{\hat{\gamma}}$; $\gamma=\frac{\hat{\gamma}}{\Delta}$

Остается при любом $t\in R_+$ записать $t=[\frac{t}{\Delta}]\Delta+\tau$, где $\tau\in[0,\Delta]$, $[\cdot]$ -целая часть числа и неравенство (3), а вместе с ним и лемма доказаны.

Теперь вместо (I)-(2) для исследования экспоненциальной устойчивости тривиального решения можно анализировать рекуррентную процедуру

$$u((k+1)\Delta)=e^{\Delta\mathcal{X}}(A+\alpha_k(\omega)B)\,u(k\Delta), \tag{6}$$

которую вместе с начальным условием $u(0)=u_0$ принято называть разностным уравнением в гильбертовом пространстве [I].

Обозначим $\mathcal{K}$ множество самосопряженных линейных непрерывных положительных операторов, действующих из $\mathcal{H}$ в

$\mathcal{X}$ [2] Это множество образует телесный конус в пространстве V линейных самосопряженных операторов, действующих из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{X}$. Введем оператор $\mathcal{A}: V \to V$ равенством

$$\mathcal{A}q = A^* e^{\Delta\mathcal{X}^*} q\, e^{\Delta\mathcal{X}} A + B^* e^{\Delta\mathcal{X}^*} q\, e^{\Delta\mathcal{X}} B .$$

<u>Теорема.</u> Тривиальное решение (I)-(2) экспоненциально устойчиво в среднем квадратичном тогда и только тогда, когда существует сильно положительное решение уравнения

$$(I - \mathcal{A})q = j, \tag{7}$$

где j - единица из $L(\mathcal{X},\mathcal{X})$, I - единица из $L(V,V)$.

<u>Доказательство</u>. Из [2] известно, что сильно положительными являются внутренние точки $\mathcal{X}$.

Пусть q - решение (7). По условию теоремы существует такая константа $c>0$, что при всех $x\in\mathcal{X}$ выполняется неравенство

$$(qx, x) \ge c\,\|x\|^2.$$

Поэтому при всех $\rho\in R_+$ имеет место неравенство

$$c\rho^n\|u(n\Delta)\|^2 \le (q u(n\Delta), u(n\Delta))\,\rho^n =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \rho^k[(q u((k+1)\Delta), u((k+1)\Delta))\rho - (q u(k\Delta), u(k\Delta))] + (q u_0, u_0). \tag{8}$$

Для оценки математического ожидания разностей, стоящих под знаком суммы (8) используем операцию условного математического ожидания и запишем на основании (6) и (7)

$$E\{\rho(q u((k+1)\Delta), u((k+1)\Delta)) - (q u(k\Delta), u(k\Delta))\} =$$
$$= E[E\{\rho(q e^{\Delta\mathcal{X}}(A+\alpha_n(\omega)B)u(k\Delta), e^{\Delta\mathcal{X}}(A+\alpha_n(\omega)B)u(k\Delta)) - (q u(k\Delta), u(k\Delta))\,|\,\mathcal{F}_{k-1}\}] =$$
$$= E\{([\rho\mathcal{A} - I]q\, u(k\Delta), u(k\Delta))\} = E\{([(\rho-1)q - \rho j]u(k\Delta), u(k\Delta))\} \le$$
$$\le (\|q\|\,|\rho-1| - \rho)\, E\{\|u(k\Delta)\|^2\}.$$

Последнее выражение при достаточно малом положительном числе $\rho-1$ отрицательно. Следовательно, из (8)

$$c\rho^n E\|u(n\Delta)\|^2 \le \|q\|\,\|u_0\|^2$$

при всех $n\ge 1$. Из этого неравенства следует (4). Достаточность доказана.

Для доказательства необходимости (7) используем (6) как рекуррентное соотношение и запишем при $n>1$

$$E\{(q\,u(n\Delta),\ u(n\Delta))\} =$$

$$= E\{E\{(q\,e^{\Delta L}(A+\alpha_{n-1}(\omega)B)\,u((n-1)\Delta),\ e^{\Delta L}(A+\alpha_{n-1}(\omega)B)\,u((n-1)\Delta))\,|\,\mathcal{F}_{n-2}\}\} =$$

$$= E\{(\mathcal{A}q\,u((n-1)\Delta),\ u((n-1)\Delta))\} = E\{E\{(\mathcal{A}q\,u((n-1)\Delta),\ u((n-1)\Delta))\,|\,\mathcal{F}_{n-3}\}\} =$$

$$= \ldots = E\{(\mathcal{A}^{n-1}q\,u(\Delta),\ u(\Delta))\} = (\mathcal{A}^{n}q\,u_0,\ u_0).$$

Из полученного равенства и из (4) при всех $x\in\mathcal{X}$, $n>1$ и $q\in V$, положив $u_0=x$, легко получить неравенство

$$|(\mathcal{A}^n q\,x,\ x)| = |E\{(q\,u(n\Delta),\ u(n\Delta))\}| \le$$

$$\le \|q\|\,E\{\|u(n\Delta)\|^2\} \le \|q\|\,\hat{M}e^{-\hat{\gamma}n}\|x\|^2,$$

и поэтому при всех $q\in V$ и $n>1$

$$\|\mathcal{A}^n q\| \le \hat{M}e^{-\hat{\gamma}n}\|q\|,$$

откуда следует, что спектральный радиус [2] оператора $\mathcal{A}$ меньше единицы. Следовательно, существует ограниченный оператор $(I-\mathcal{A})^{-1}$, причем его можно представить в виде сходящегося по операторной норме ряда

$$(I-\mathcal{A})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{A}^n$$

Т.к. оператор $\mathcal{A}$ оставляет инвариантным конус $\mathcal{K}$, то уравнение (7) имеет решение q, для которого при всех $x\in\mathcal{X}$ выполняется неравенство

$$(qx,x) = ((I-\mathcal{A})^{-1}jx,\ x) = (jx,x) + \Big(\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{A}^n jx,\ x\Big) \ge (jx,x) = \|x\|^2,$$

что означает сильную положительность q. Необходимость условий теоремы доказана.

<u>Следствие</u>. Тривиальное решение (I)-(2) экспоненциально устойчиво в среднем квадратичном тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} E\{\|u(n\Delta)\|^2\}$

при всех $u_0\in\mathcal{X}$.

<u>Доказательство</u>. Упомянутый в условии ряд можно переписать в форме $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\mathcal{A}^n j u_0, u_0)$. Необходимость сходимости ряда непосредственно доказана при доказательстве необходимости условий теоремы. Из сходимости последнего ряда при всех $u_0\in\mathcal{X}$ можно заключить [2], что существует элемент $q\in\mathcal{K}$, задаваемый равенством

$$(qu_0, u_0) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} A^k j u_0, u_0\right)$$

Отсюда, во-первых $(qu_0, u_0) \geq (u_0, u_0)$, и, во-вторых,

$$((I - A)qu_0, u_0) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (I - A) A^k_j u_0, u_0\right) =$$

$$= (ju_0, u_0) - \lim_{n\to\infty} (A^{n+1}_j u_0, u_0) = (ju_0, u_0).$$

В качестве примера рассмотрим скалярное уравнение в частных производных вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \tau^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \beta u, \tag{9}$$

$u(t,0) = u(t,\pi) = 0$, $\tau \in R$, $\beta \in R$ $y \in [0,\pi]$, $t \in R_+$

$$u(k\Delta + 0, y) = (a + \alpha_k(\omega) b)\, u(k\Delta, y), \tag{10}$$

$E\alpha_k(\omega) = 0$, $D\alpha_k(\omega) = 1$ $a \in R$ $b \in R$.

Используя краевое условие, в качестве $\mathcal{H}$ выберем пространство суммируемых с квадратом на отрезке $[0,\pi]$ функций с базисом $\{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sin my, m \in N\}$. Уравнение (9) в этом пространстве перепишется в форме

$$\frac{dX_m}{dt} = (\beta - \tau^2 m^2) X_m \qquad m \in N \tag{11}$$

$$X_m(k\Delta + 0) = (a + \alpha_k(\omega) b) X_m(k\Delta), \tag{12}$$

причем $\|u(t)\|^2 = \sum_m \|X_m\|^2$.

Поэтому

$E\{\|u(t)\|^2\} = \sum_{m=1}^{\infty} e^{2(\beta - \tau^2 m^2)t} \|X_m(0)\|^2$ при всех $t \in [0,\Delta]$

Далее $E\{\|u(k\Delta+0)\|^2\} = \sum_{m=1}^{\infty} E\{\|X_m(k\Delta + 0)\|^2\} =$

$$\sum_{m=1}^{\infty} (a^2 + b^2)^k e^{2(\beta - \tau^2 m^2)\Delta k} \|X_m(0)\|,$$

и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} E\{\|u(k\Delta)\|^2\}$ сходится при всех $u(0,x) \in \mathcal{H}$ тогда и только тогда, когда $(a^2 + b^2) e^{2(\beta - \tau^2)\Delta} < 1$. Это условие является необходимым и достаточным условием экспоненциальной устойчивости в среднем квадратичном тривиального решения (9).

Литература

1. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы.-М., 1962.

2. Ахиезер Н., Глазман И. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.-Харьков, 1977.

Поступила 21 ноября 1983 года

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1985.

УДК 513.83

ДВА ЗАМЕЧАНИЯ О ПРОСТРАНСТВАХ МЕЖНОСТИ

Я.П.Цирулис
ЛГУ им. П.Стучки

Пространства межности, или межностные пространства были определены автором в [I]. Мы будем свободно пользоваться введенными в [I] обозначениями и терминологией. В настоящей заметке устранено одно возможное недоразумение, связанное с понятием внутренней точки в таких пространствах, а также приведена новая характеристика отношений линейной межности.

I. В [I] понятие внутренней точки множества было определено непосредственно в терминах межности β (определение 5), и на этой основе определялась сама топология межности τ_β. Каждая точка множества, принадлежащая ему вместе с некоторой своей окрестностью, т.е. внутренняя в топологии τ_β, оказывается внутренней и в смысле этого определения. К сожалению, обратное имеет место не всегда, как показывает приводимый ниже контрпример. В связи с этим мы теперь предлагаем называть точку x, удовлетворяющую условию из определения 5 работы [I], β—внутренней точкой множества $\mathcal{U}$, оставляя более короткий термин "внутренняя точка" для соответствующего топологического понятия. Понятие открытого множества остается, разумеется, прежним.

Итак, опишем упомянутый контрпример. Пусть $X := \{(\xi,\eta) \in R^2 : \xi,\eta \geq 0\}$ - множество точек первого квадранта числовой плоскости. Пусть, далее, L_1 - семейство подмножеств X вида $A(\xi) := \{(\xi,\eta) : \eta > 0\}$, где $\xi \geq 0$, L_2 - множество с единственным элементом - множеством $A^* := \{(\xi,0) : \xi > 0\}$, а L_3 - множество всех таких пар точек $\{x,y\} \subset X$, что $\{x,y\} \not\subset A$ для любого $A \in L_1 \cup L_2$. Тогда $L := L_1 \cup L_2 \cup L_3$ - система прямых в X. Превратим ее в B—структуру, определив на каждой прямой $A \in L$ линейную межность β_A следующим образом: если $A \in L_1 \cup L_2$, то ρ_A – естественная межность евклидовой полупрямой, а если $A \in L_3$, то ρ_A – единственная возможная на двухэлементном множестве межность. Согласно теореме I из [I], теперь имеем некоторую вполне определенную межность ρ на X; множество же L оказывается системой прямых пространства (X, ρ). Нетрудно видеть, что множество ρ-внутренних точек множества $\mathcal{U} := A^* \cup A(0)$ совпадает с $A(0)$, а также, что точка $(0, 0)$, хотя и принадлежит множеству $L(0)$, уже не является ρ-внутренней точкой последнего (в отличие от всех других его точек). Таким образом, имеем пример множества, множество ρ-внутренних точек которого не открыто. Более точно, $(0,0)$ является ρ-внутренней, но не внутренней точкой $\mathcal{U}$.

Проблема выяснения, в каких случаях различие между обоими понятиями внутренней точки исчезает, остается открытой.

2. Докажем сперва одно вспомогательное утверждение.

<u>Лемма.</u> Пусть $\leq$ – бинарное, а ρ – тернарное отношение на некотором множестве $A \subset X$, связанные соотношением

$$\rho xyz \leftrightarrow x \leq y \leq z \vee z \leq y \leq x$$

Если ρ обладает свойствами ρ_1, ρ_2, а также одним из свойств ρ_4, ρ_5, то $\leq$ – линейная упорядоченность на A.

<u>Доказательство.</u> Допустим, что условие леммы выполнено. Из ρ_1 вытекает, что $x \leq y \leq y$ или $y \leq x \leq x$. Это, в частности, означает, что отношение $\leq$ связно (дихотомично), а значит, и рефлексивно. Из ρ_2 вытекает антисимметричность $\leq$. Убедимся, далее, что

$$x \leq y \leq z \leq x \rightarrow y = z$$

На самом деле, из трех неравенств в левой части вытекает, что ρxyz, ρzxy и ρyzx. Первые два из этих соотношений дают требуемое равенство в силу ρ_4 и ρ_2, а первое и третье – в силу ρ_5 и ρ_2. Теперь нетрудно установить транзитивность $\leq$. Действительно, допустим, что $x \leq y \leq z$. Ввиду связности $\leq$ $x \leq z$ – что и требуется – или $z \leq x$. Но во втором случае согласно только что доказанному $y = z$, и все равно $x \leq z$.

Эта лемма вместе с теоремой 3 из [I] приводит к следующему любопытному заключению.

Теорема. Отношение ρ на A, обладающее указанными в условии леммы свойствами, является линейной межностью тогда и только тогда, когда на A можно указать два взаимно обратных отношения $\lessdot$, $\gtrdot$ так, что

$$\rho xyz \longleftrightarrow x \lessdot y \lessdot z \ \vee \ x \gtrdot y \gtrdot z$$

Такое множество $\{\lessdot, \gtrdot\}$, если оно существует, определено однозначно и является неориентированной линейной упорядоченностью на A

Литература

I. Цирулис Я.П. Пространства межности. - В кн.: Топологические пространства и их отображения. Рига, 1983, с.137-146.

Поступила 26 ноября 1984 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1985.

УДК 513.83

ОБРАЗЫ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

Г.И.Чертанов
Мордовский государственный университет

Введение

Обозначения и термины статьи в основном соответствуют книге [I] Замыкание множества M обозначается $[M]$ Если ξ – система множеств, то через $\cup\xi$ обозначается объединение всех множеств из ξ. Кардиналы отождествляются с первыми ординалами той же мощности. Через ω_0 обозначается первый бесконечный кардинал, через ω – первый бесконечный ординал через τ^+ – кардинал, непосредственно следующий за кардиналом τ. Система $\xi = \{M\}$ называется консервативной, если $[\cup\xi_0] = \cup\{[M] \quad M \in \xi_0\}$ для всякой подсистемы $\xi_0 \subset \xi$ Консервативное покрытие пространства X замкнутыми множествами кратко называется cc пространства x

Статья состоит из двух параграфов. В первом, большем по объему, рассматривается новый кардинальный инвариант, консервативная клеточность (см. определение I). Для довольно широкого класса пространств, включающего в себя кружевные [2] , а также подпространства типа G_δ регулярных счетно-компактных пространств (в частности, полные по Чеху и бикомпакты) доказывается равенство $c(X) = cc(X)$. Дан пример пространства, для которого $c(X) < cc(X) < d(X)$ Приведен пример Муровского вполне регулярного (и, следовательно, перистого) пространства X, для которого $c(X) < cc(X)$. Это – специальным образом построенное подпространство пространства примера Пшимусинского и Толла [3] .

Далее рассматривается один из типов факторизации произведения пространств через τ-грань, называемый "накрытие образа τ-оболочкой точки произведения".(см. определение 3).

Доказывается теорема о том, что если X – произведение бикомпактов, Y - бикомпакт, и $hc(Y) \leq \tau$, то непрерывная сюрьекция $f: X \to Y$ накрывает Y τ-оболочкой любой точки $o \in X$. В частности, если бикомпакт Y совершенно нормален, то f накрывает Y счетной оболочкой любой точки $o \in X$

Во втором, меньшем параграфе, рассматриваются образы произведений метрических пространств при замкнутых непрерывных отображениях. Доказывается, что при замкнутом и неприводимом непрерывном отображении псевдо-τ-компактность переходит от образа к полному прообразу. Используя этот факт, получаем, что если $\mathscr{C}$-пространство [4] псевдокомпактно, то оно является диадическим бикомпактом.

§ I.

Определение I. Консервативной клеточностью пространства X назовем кардинал $cc(X) = \omega_0 \min\{\tau$ каждое cpc пространства X содержит подпокрытие мощности $\leq \tau\}$. Будем говорить, что пространство X обладает свойством S, если $cc(X) \leq \omega_0$

Предложение I. $c(X) \leq cc(X) \leq d(X)$ для всякого пространства X

Доказательство. Пусть M - всюду плотное подмножество X минимальной мощности, и $\xi = \{F\}$ - cpc пространства X Для каждой точки $x \in M$ выберем одно-единственное множество $F(x) \in \xi$ такое, что $x \in F(x)$. Пусть $\xi_0 = \{F(x) \quad x \in M\}$ Тогда $|\xi_0| \leq d(X)$ Поскольку множество M всюду плотно в X, а система ξ консервативна и состоит из замкнутых множеств, ξ_0 - покрытие X Значит, $cc(X) \leq d(X)$. Для доказательства неравенства $c(X) \leq d(X)$ предположим, что в X существует система $\theta = \{U_\alpha : \alpha < \tau\}$ попарно дизъюнктных непустых открытых множеств и $\tau = cc(X)^+$. Для каждого $\alpha < \tau$ положим $F_\alpha = X \setminus \cup\{U_\beta \quad \beta \geq \alpha\}$ Легко видеть, что растущая система $\xi = \{F_\alpha \quad \alpha < \tau\}$ - cpc пространства X, из которого нельзя выделить подпокрытия мощности меньшей, чем τ, ибо кардинал τ регулярен. Полученное противоречие доказывает, что $c(X) \leq cc(X)$

Предложение 2. Если $c(X) = d(X)$, то $c(X) = cc(X) = d(X)$. В частности, эти равенства верны для любого кружевного, а поэтому любого лашневского и любого метрического пространства.

Доказательство. Равенство $c(X) = d(X)$ для кружевных пространств и то, что всякое лашневское и всякое метрическое пространство являются кружевными, доказано в [2]. Остальное следует из предложения I.

Предложение 3. Пусть $f: X \to Y$ – непрерывная сюръекция, тогда $cc(Y) \leq cc(X)$. Если f – замкнутая и неприводимая непрерывная сюръекция, то $cc(X) = cc(Y)$.

Доказательство. Первое утверждение почти очевидно. Для доказательства второго нужно только проверить, что $cc(X) \leq cc(Y)$. Пусть $\xi = \{F_\alpha : \alpha \in A\}$ – такое cpc пространства X, что $|\xi| = \tau = cc(X)$, и для всякого кардинала $\lambda < \tau$, если $A_0 \subset A$, $|A_0| = \lambda$, то $\xi_0 = \{F_\alpha : \alpha \in A_0\}$ не является покрытием X. Так как отображение f замкнуто, система $f\xi = \{fF_\alpha : \alpha \in A\}$ – cpc пространства Y. Если бы покрытие $f\xi$ имело подпокрытие $f\xi_0 = \{fF_\alpha : \alpha \in A_0$, $|A_0| = \lambda < \tau\}$, то для замкнутого множества $\Phi_0 = \cup\{F_\alpha : \alpha \in A_0\}$ мы имели бы $f\Phi_0 = Y$, но $\Phi_0 \neq X$, что противоречит неприводимости f. Поэтому $cc(Y) \geq \tau = cc(X)$, и из первого утверждения следует, что $cc(X) = cc(Y)$.

Предложение 4. Если Y – открытое подпространство X, то $cc(Y) \leq cc(X)$.

Доказательство. Если система $\xi = \{F_\alpha : \alpha \in A\}$ – cpc подпространства Y, то $\xi' = \{F_\alpha \cup (X \setminus Y) : \alpha \in A\}$ – cpc пространства X. Остальное очевидно.

Определение 2. Будем говорить, что пространство X сильно бэровское, если объединение внутренностей всякого cpc пространства X всюду плотно в X.

Теорема I. Если X – сильно беровское пространство, то $c(X) = cc(X)$.

Доказательство. Ввиду предложения I, достаточно установить неравенство $cc(X) \leq c(X)$. Пусть $\xi = \{F_\alpha : \alpha < \tau\}$ – cpc пространства X. Выделим из ξ подпокрытие мощности, не превосходящей $c(X)$. Пусть $\alpha_0 = \min\{\alpha,\ \mathrm{Int}(F_\alpha) \neq \emptyset\}$, положим $U_{\alpha_0} = \mathrm{Int}(F_{\alpha_0})$. Пусть для всех

$\beta < \tau$ уже построены попарно-дизъюнктные непустые открытые множества $\mathcal{U}_{\alpha\beta} \subset F_{\alpha\beta} \in \xi$. Если $\cup\{\mathcal{U}_{\alpha\beta} \;\; \beta < \tau\}$ всюду плотно в X, то считаем построение законченным. Тогда подсистема $\xi_0 = \{F_{\alpha\beta} \;\; \beta < \tau\}$ является покрытием X, и ее мощность не больше $c(X)$. Если же $\cup\{\mathcal{U}_{\alpha\beta} \;\; \beta < \tau\}$ не всюду плотно в X, то пусть $\alpha_\tau = \min\{\alpha;$

$$\mathrm{Int}\,(F_{\alpha\tau} \setminus (\cup\{\mathcal{U}_{\alpha\beta} \;\; \beta < \tau\})) \neq \emptyset\} .$$

Предложение 5. Любое сильно бэровское пространство удовлетворяет теореме Бэра "о категориях". Сильно бэровскими являются открытые подпространства сильно бэровских пространств и все пространства, в которых любая точка имеет окрестность, гомеоморфную подпространству типа G_δ в регулярном счетно-компактном пространстве. В частности, такими являются все бикомпакты и все локально-полные по Чеху пространства.

Доказательство. Первое и второе утверждение очевидны. Третье докажем методом "от противного". Пусть существуют $\xi = \{F_\alpha \;\; \alpha \in A\}$ - cpc пространства X и $\mathcal{U} \neq \emptyset$ открытое в X подмножество, такие, что пересечения $F_\alpha \cap \mathcal{U}$ нигде не плотны для всех $\alpha \in A$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\mathcal{U}$ есть подпространство типа G_δ в регулярном счетно-компактном пространстве Y, т.е. $\mathcal{U} = \cap\{\Gamma_n : n < \omega\}$, где $\Gamma_{n+1} \subset \Gamma_n$ и Γ_n открыты в Y. Систему ξ будем рассматривать только внутри $\mathcal{U}$. По индукции построим две последовательности $\{F_{\alpha_n}, V_n \;\; n < \omega\}$ множеств, которые при всех $n < \omega$ обладают следующими свойствами: (1) $V_n \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$; (2) V_n открыты в Y; (3) $V_n \subset \Gamma_n$; (4) $F_{\alpha_n} \in \xi$; $F_{\alpha_n} \cap V_n \neq \emptyset$; (5) $[V_{n+1}] \subset V_n$; (6) $V_{n+1} \cap F_{\alpha_n} = \emptyset$.

Множества F_{α_n}, удовлетворяющие условию (4), существуют, ибо ξ - покрытие $\mathcal{U}$ и $V_n \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ по условию (1). Множество V_{n+1}, удовлетворяющее условиям (1)-(3), (5) и (6) существует, ибо Y регулярно, а $F_{\alpha_n} \cap \mathcal{U}$ нигде не плотно в $\mathcal{U}$.

Пусть $\Phi = \cap\{V_n \;\; n < \omega\} = \cap\{[V_n] \;\; n < \omega\}$; $M = \cup\{F_{\alpha_n} \;\; n < \omega\}$. Из условия (5) и счетной компактности Y следует, что $\Phi \neq \emptyset$. Так как Φ является пересечением счетного числа вложенных друг в друга замкнутых подмножеств Y, для каждой окрестности O_Φ множества Φ в Y существует номер m такой, что $V_m \subset O_\Phi$. Но $V_m \cap F_{\alpha_m} \neq \emptyset$ по условию (4). Значит, $O_\Phi \cap M \neq \emptyset$ для любой окрестности O_Φ множества Φ в Y. Поэтому существует точка $x \in \Phi$, предельная для множества M. Из условия (3) и определения $\mathcal{U}$ следует, что $\Phi \subset \mathcal{U}$. Значит, M не замкнуто в $\mathcal{U}$, а поэтому M не замкнуто и в X, что противоречит тому, что $\mathfrak{F}$ – консервативное покрытие пространства X замкнутыми множествами.

Предложение 6. Если пространство X имеет всюду плотное подпространство Y такое, что $cf(d(Y)) > \omega_0$, то существует $Z \subset Y$, $[Z] = X$ такое, что $cc(Y) > \omega_0$.

Доказательство. Рассмотрим всюду плотное подпространство $M = \{x_\alpha : \alpha < \tau\} \subseteq Y$, где $\tau = d(Y)$. Положим $K_0 = \{x_0\}$ и, если для всех $\alpha < \beta < \tau$ построены множества $K_\alpha \subset M$, то пусть L_β – их объединение, и $\delta_\beta = \min\{\delta : x_\delta \in M \setminus [L_\beta]\}$. Полагаем $K_\beta = L_\beta \cup \{x_{\delta_\beta}\}$. Заметим, что L_β замкнуто в K_β, и что если $\beta < \tau$, то $|L_\beta| < |\beta| < \tau$, поскольку $\tau = d(Y)$, то $[L_\beta] \neq X$ при всех $\beta < \tau$. Значит, построение будет продолжаться для всех $\alpha < \tau$. Положим $Z = \cup\{K_\alpha : \alpha < \tau\}$.

Докажем, что Z всюду плотно в X. Предположим противное, пусть $M' = M \setminus [Z] \neq \emptyset$ и $x_\gamma \in M'$ – элемент с наименьшим индексом. Так как множество индексов $\{\alpha : x_\alpha \in Z\}$ конфинально τ и $\gamma < \tau$, то существует наименьший индекс α_0, такой, что $\gamma < \alpha_0$ и $x_{\alpha_0} \in Z$. Это значит, что для некоторого ординала β мы имеем $K_\beta = L_\beta \cup \{x_{\alpha_0}\}$, где $\alpha_0 = \min\{\alpha : x_\alpha \notin [L_\beta]\}$. Противоречие с определением x_γ. Значит, Z всюду плотно в X.

Замкнутость множеств K_α в Z следует из их определения. Поскольку система $\mathfrak{F} = \{K_\alpha : \alpha < \tau\}$ растущая, и Z_β замкнуты в K_β, эта система – CPC пространства Z. Легко видеть, что $\mathfrak{F}$ имеет подпокрытие только мощности, равной $cf(\tau) > \omega_0$, поэтому $cc(Z) > \omega_0$.

Пример I. Континуум Суслина K обладает свойством S по теореме I, но в нем существует всюду плотное подпространство Z, для которого $cc(Z) = \omega_1$, ибо

$d(\mathscr{U}) = \omega_1$ (см. [I, 2.7.9 (g)]). Это пространство Z совершенно нормально, наследственно финально компактно и удовлетворяет первой аксиоме счетности. ибо таков континуум Суслина.

<u>Пример 2.</u> Пространство "наивного" примера Пшимусинского и Толла [3] – Муровское, вполне регулярное, со свойством Суслина и плотностью ω_1. Если в нем построить, как это описано в предложении 5, всюду плотное подпространство Z, то оно по-прежнему будет Муровским, вполне регулярным, значит, нормальным пространством со свойством Суслина, но без свойства S – ответ на один вопрос А.В.Архангельского.

<u>Пример 3.</u> Квадрат континуума Суслина не обладает свойством Суслина ([I, 2.7.10 (f)]), поэтому не обладает и свойством S. С другой стороны, если предположить аксиому Мартина и отрицание континуум-гипотезы, то квадрат любого бикомпакта, обладающего свойством Суслина, тоже обладает этим свойством [6]. Значит, утверждение: "Если бикомпакт обладает свойством S, то и его квадрат обладает свойством S" не зависит от системы аксиом Цермело-Френкеля.

<u>Проблема I.</u> Существуют ли классы пространств, кроме перечисленных выше, для которых $c(X) = cc(X)$? В частности, верно ли это равенство для паракомпактных p-пространств? (Вопрос В.И.Пономарева).

Пусть X – декартово произведение множеств X_α, $\alpha \in A$, $o = \{a_\alpha\}$ – произвольная фиксированная точка из X, τ – кардинал. Если $x \in X$, то пусть $A_x = \{\alpha \in A : x_\alpha \neq a_\alpha\}$, $\Sigma_\tau(X,o) = \{x \in X : |A_x| < \tau\}$. В частности, $\Sigma_{\omega_1}(X,o)$ обозначается через $\Sigma(X,o)$ – это обычное Σ-произведение множеств X_α, $\alpha \in A$ с центром o. Наконец, $\sigma(X,o) = \{x \in X : |A_x| < \omega_0\}$. Пусть n – натуральное число, A^n – декартова n-я степень A, и $A^{(n)}$ – подмножество A^n, состоящее из точек, все n координат у каждой из которых различны. Если $\alpha^n \in A^{(n)}$, то пусть $F(\alpha^n) = \{x \in X : A_x \subset \alpha^n\}$, $\mathfrak{F}_n = \{F(\alpha^n) : \alpha^n \in A^{(n)}$, n фиксировано $\}$.
$\mathfrak{F} = \{F(\alpha^n) : \alpha^n \in A^{(n)}, n < \omega\}$. Легко видеть, что $\sigma(X,o)$ равно объединению всех множеств системы $\mathfrak{F}$. Положим $\sigma_n(X,o) =$

$= \cup \xi_\alpha$. Легко видеть, что $\sigma_n(X,o) = \{x \in X \ |A_x| \leq n\}$

Предложение 7. Если все X_α, $\alpha \in A$ – T_1-пространства, то ξ – консервативное покрытие $\sigma(X,o)$ замкнутыми в X множествами, из которого нельзя выделить подпокрытия мощности меньшей, чем $|\xi| = |A|$

Доказательство. Замкнутость в X множеств $F(\alpha^n)$ следует из того, что все X_α – T_1-пространства. Пусть $\xi_0 < \xi$ и x из $\sigma(X,o)$ не принадлежит $\cup \xi_0$. Докажем, что $x \notin [\cup \xi_0]$, замыкание берется в $\sigma(X,o)$. Пусть $A_x = \{\beta_1, \dots, \beta_s\}$. Положим $\xi_0(\beta_i) = \{F(\alpha^n) : \beta_i \notin \alpha^n\}$. Так как $x \in F(\alpha^n)$ для любого $F(\alpha^n) \in \xi_0$, неверно, что $A_x \subset \alpha^n$ хотя бы для одного $F(\alpha^n) \in \xi_0$, значит, $\xi_0 = \cup\{\xi_0(\beta_i) : i = 1, \dots, s\}$. Так как ространства X_{β_i} удовлетворяют аксиоме T_1, существуют окрестности U_i точек x_{β_i} в X_{β_i}, не содержащие точек o_{β_i}. Тогда $\pi_{\beta_i}^{-1} U_i$ – окрестность точки x, не содержащая ни одной точки из $\cup \xi_0(\beta_i)$, ибо для всех $F(\alpha^n) \in \xi_0(\beta_i)$ имеем: $\pi_{\beta_i}(F(\alpha^n)) = o_{\beta_i}$, $i = 1, 2, \dots, s$. Пересечение всех таких окрестностей точки x – открытое подмножество X, не содержащее ни одной точки из $\cup \xi_0$. Значит, $\cup \xi_0$ содержит все свои точки прикосновения в $\sigma(X,o)$ и поэтому замкнуто. Это и означает консервативность покрытия ξ. Пусть $|\xi_0| < |A|$. Рассмотрим $A_0 = \{\alpha \quad \alpha \in \alpha^n, F(\alpha^n) \in \xi_0\}$. Так как каждое множество α^n конечно, $|A_0| \leq |\xi_0| < |A|$. Поэтому существует индекс $\beta \in A \setminus A_0$. Тогда ни одна точка из $\pi_\beta^{-1} O_\beta$ не принадлежит ни одному из множеств системы ξ_0, значит, ξ_0 не является покрытием $\sigma(X,o)$.

Пример 4. Существует пространство X, для которого $c(X) < cc(X) < d(X)$. Пусть $\tau = 2^{\omega_1}$ и $Y_\alpha = \mathcal{D}^\tau$ при всех $\alpha < \omega_1$, где $\mathcal{D}$ – дискретное двоеточие. Пусть $Y = \Gamma\{Y_\alpha \quad \alpha < \omega_1\}$, $o = \{o_\alpha, \alpha < \omega_1\}$, где o_α – точка из $\mathcal{D}^\tau$, все координаты которой равны 0. Пусть $X = \sigma(Y, o)$. Тогда по предложению 5 X имеет консервативное покрытие ξ замкнутыми в Y (значит, и в X) множествами, и $|\xi| = \omega_1$. Поскольку Y – диадический бикомпакт, $c(X) = \omega_0$. Каждое множество $F \in \xi$ гомеоморфно $\mathcal{D}^\tau$, а следовательно, обладает свойством S. Поэтому, если η – какое-то другое CPC пространства X, то для каждого $F \in \xi$ из η можно выделить счетное подпокрытие $\eta(F)$ для $F \in \xi$. Если $\eta_0 = \cup\{\eta(F) : F \in \xi\}$, то $|\eta_0| \leq \omega_1$. Значит, $cc(X) = \omega_1$. По теорем Хьюитта-Марчевского-Пондичерри, $d(F) \leq \omega_2$, ибо $\tau = 2^{\omega_1}$ (см. [I 2.3.15]). Тогда и $d(X) = \omega_2$. Поэтому

$$\omega_0 = c(X) < \omega_1 = cc(X) < \omega_2 = d(X)$$

Определение 3. Пусть X – тихоновское произведение пространств X_α, $\alpha \in A$, $[Z] = X$, f $Z \to Y$ – непрерывная сюръекция, $o = \{o_\alpha\} \in Z$, τ – бесконечный кардинал. Будем говорить, что <u>f накрывает Y τ-оболочкой точки $o \in X$</u>, если найдется такое подмножестго $A_0 \subset A$, что $|A_0| \leq \tau$, и если $X_0 = \{x \in X \ A_x \subset A_0\}$, и $X_0 \subset Z$, то $f X_0 = Y$. Само множество X_0 называем τ-оболочкой (или A_0-оболочкой) точки o в X

Теорема 2. Пусть X_α, $\alpha \in A$ – T_1-пространства, X – их тихоновское произведение $Z \subset X$ содержит $\Sigma_\tau(X, o)$ для $o \in X$, f $X \to Y$ – замкнутая непрерывная сюръекция, и $cc(F) \leq \tau$ для любого F, замкнутого в Y Тогда f накрывает Y τ-оболочкой точки o. Если $Z = Y$, то f накрывает Y τ-оболочкой любой точки $p \in X$.

Доказательство. Пусть $H(\alpha^n) = f(F(\alpha^n))$, $\Phi_n = f(\sigma(X, o))$ и $\eta_n = \{H(\alpha^n) \ \alpha \in A^{(n)}\}$ Так как отображение f замкнуто, множества Φ_n замкнуты в Y и η_n – консервативное покрытие Φ_n замкнутыми в Y (значит, и в Φ_n) множествами при всех $n < \omega$. По условию существуют подпокрытия η_n^0 мощности $\leq \tau$ для всех $n < \omega$. Для каждого $H(\alpha^n) \in \eta_n^0$ выберем одно-единственное $F(\alpha^n) \in \xi_n$ такое, что $f(F(\alpha^n)) = H(\alpha^n)$. Пусть ξ_n^0 – система всех выбранных таким образом множеств, F_n – объединение всех множеств системы ξ_n^0, и $A_n^0 = \{\alpha \in A \ \alpha \subset \alpha^n, F(\alpha^n) \in \xi_n^0\}$ Ясно, что $f F_n = \Phi_n$, и $|A_n^0| \leq \tau$. Пусть $A_0 = \cup\{A_n^0 \ n < \omega\}$ и $X_0 = \{x \in X \ A_x \subset A_0\}$. Легко видеть, что X_0 – искомая τ-оболочка точки o.

Теорема 3. Если X – тихоновское произведение бикомпактов, Y – бикомпакт, $hc(Y) \leq \tau$, f $X \to Y$ – непрерывная сюръекция, то f накрывает Y τ-оболочкой любой точки $o \in X$.

Следствие I. Пусть в условиях теоремы 3 бикомпакт Y совершенно нормален. Тогда f накрывает Y ω_0-оболочкой любой точки $o \in X$.

Предложение 8. Пусть X_α, $\alpha \in A$ – T_1-пространства, X – их тихоновское произведение, $f: X \to Y$ – замкнутая непрерывная сюръекция, и $t(Y) \leq d(Y) \leq \tau$. Тогда f накрывает Y τ-оболочкой любой точки в X.

Доказательство. Если $\Sigma_\tau = \Sigma_\tau(X, o)$, то $f(\Sigma_\tau)$ всюду плотно в Y, легко видеть, что $f(\Sigma_\tau) = Y$. Пусть $|M| = d(Y)$ и M всюду плотно в Y, $M_0 \subset \Sigma_\tau$, $f(M_0) = M$ и $f|_{M_0}$ – взаимно-однозначно. Полагаем $A_0 = \cup\{A_x \ x \in M_0\}$ и $X_0 = \{x \in X \ A_x \subset A_0\}$. Тогда X_0 – искомая τ-оболочка точки o.

Проблема 2. Пусть X_α, $\alpha \in A$ – бикомпакты, X – их тихоновское произведение, Y – бикомпакт, $c(Y) = t(Y) = \omega_0$. Верно ли "наивно", что непрерывная сюръекция f $X \to Y$ накрывает Y τ-оболочкой любой точки $o \in X$? Если предположить аксиому Мартина и отрицание континуум-гипотезы, то $d(Y) = \omega_1$ [7], и тогда все следует из предложения 8.

§ 2.

Напомним, что пространство X называется псевдо-τ-компактным, если каждая дискретная в X система непустых открытых множеств имеет мощность меньше τ.

Предложение 9. (а) Для вполне регулярных пространств псевдо-ω_0-компактность совпадает с псевдокомпактностью; (б) если метрическое пространство X псевдо-τ^+-компактно, то $w(X) \leq \tau$; (в) псевдо-τ-компактность переходит от прообраза к образу при непрерывных отображениях; (г) метрическое пространство псевдокомпактно тогда и только тогда, когда оно компактно.

Все пункты этого предложения хорошо известны и оно приводится только для ссылок.

Теорема 4. Если $f: X \to Y$ – замкнутое и неприводимое непрерывное отображение регулярного пространства X на псевдо-τ-компактное пространство Y, то X тоже псевдо-τ-компактно.

В качестве следствия получаем такую теорему.

Теорема 5. Если вполне регулярное пространство X замкнуто, неприводимо и непрерывно отображается на псевдокомпактное пространство Y, то X псевдокомпактно.

Доказательство теоремы 4. Предположим противное, пусть в X существует дискретная система $\sigma = \{ U_\alpha \ \alpha < \tau \}$ непустых открытых множеств. Поскольку отображение f замкнуто и неприводимо, система $f^\# \sigma = \{ f^\# U_\alpha \ \alpha < \tau \}$ состоит из непустых попарно-дизъюнктных открытых подмножеств в Y (здесь $f^\# U = Y \setminus f(X \setminus U)$). Пусть $\delta = \{ V_\alpha \neq \emptyset$ $[V]_\alpha \subset f^{-1} f^\# U_\alpha$, V_α открыто в X , $\alpha < \tau \}$ и $[f\delta] = \{ f[V_\alpha] \ \alpha < \tau \}$ Система δ существует ввиду регулярности X . Ясно, что система $[f\delta]$ дискретна в Y , и тогда система $f^\# \delta = \{ f^\# V_\alpha : \alpha < \tau \}$ дискретна в Y , состоит из непустых открытых множеств и имеет мощность τ , что противоречит условию. Значит, X псевдо- τ -компактно.

Б.С.Клебанов [4] называет пространство X φ -пространством, если оно является образом произведения метрических пространств при непрерывном замкнутом отображении.

Предложение 10. Если T_1 -пространство Y является образом при факторном (в частности, при замкнутом) отображении произведения T_2 -пространств X_α счетного характера, то в Y каждая точка является $\varkappa$ -точкой (т.е. или изолированной, или к ней сходится последовательность из бесконечного числа различных точек).

Доказательство. Пусть $X = \Pi \{ X_\alpha : \alpha \in A \}$, f $X \to Y$ - факторное отображение на Y , и $y \in Y$ - неизолированная точка. Ясно, что множество $f^{-1}(y)$ замкнуто, но не открыто в X Следовательно, существует точка $o \in f^{-1}(y)$, граничная для этого множества. Легко видеть, что точка o гранична и для $f^{-1}(y) \cap \Sigma(X, o)$. Так как $\chi(X_\alpha) \leq \omega_0$ для всех $\alpha \in A$, $\Sigma(X, o)$ - пространство Фреше-Урысона [8] Поэтому существует последовательность $\{ x_n \mid n < \omega \} \subset \Sigma(X, o) \setminus f^{-1}(y)$, сходящаяся к точке o Тогда последовательность $\{ f(x_n) \ n < \omega \}$ сходится в Y к точке y и содержит бесконечно много точек.

Предложение 10, по-видимому, известно.

Теорема 6. Пусть X_α, $\alpha \in A$ – метрические пространства, X – их тихоновское произведение, $f: X \to Y$ – непрерывная замкнутая сюръекция и Y псевдо-τ^+-компактно. Тогда существуют подпространства $K_\alpha \subset X_\alpha$ такие, что $w(K_\alpha) \leq \tau$ и если $K = \Pi\{K_\alpha \ \alpha \in A\}$, то $f(K) = Y$ и $f|_K$ – замкнуто.

Доказательство. Из предложения 10 следует, что в Y каждая точка является $\varkappa$-точкой. Из результатов работы [9] следует, что тогда пространство X является i-компактным, а пространство Y – tq-пространством. Тогда существует замкнутое подмножество $X^* \subset X$ такое, что $f(X^*) = Y$ и $f|_{X^*}$ замкнуто и неприводимо. Из теоремы 4 следует, что X^* псевдо-τ^+-компактно. Пусть $K_\alpha = [\pi_\alpha X^*]_{X_\alpha}$, где $\pi_\alpha: X \to X_\alpha$ – проекция. Из предложения 8 теперь следует $w(K_\alpha) \leq \tau$. Остальное очевидно.

Немного изменив доказательство теоремы 6, получим следующую теорему.

Теорема 7. Пусть в условиях теоремы 6 пространство Y псевдо-ω_1-компактно. Тогда существуют метрические компакты $K_\alpha \subset X_\alpha$ при всех $\alpha \in A$ такие, что $f(K) = Y$ и $f|_K$ – замкнуто, где $K = \Pi\{K_\alpha : \alpha \in A\}$. Следовательно, Y диадический бикомпакт.

Следствие 2. Каждое псевдокомпактное φ-пространство является диадическим бикомпактом.

Это следствие обобщает аналогичные результаты работ [4], [9] для счетно-компактных пространств.

Литература.

1. Engelking R., General Topology. Warszawa, PWN, 1977.
2. Borges C.J.R., On stratifiable spaces – Pacif. J. Math., 1966, v. 17, p. 1-16.
3. Przymusinsky T., Tall F.D. The undecidability of the existence of a non-separable normal Moore space satisfyng the countable chain Condition.- Fund. Math., 1974, v. 85, N 3, p. 291-297.

4. Клебанов Б.С. О замкнутых образах произведений метрических пространств. - ДАН СССР, 1978, т.240, № 6, с.1285-1288.
5. Frolik Z. The topological product of two pseudocompact spaces.- Czech. Math. J., 1960, v. 10, p. 339-349.
6. Архангельский А.В. О бикомпактах, которые удовлетворяют условию Суслина наследственно. Теснота и свободные последовательности. - ДАН СССР, 1971, т.199, № 6, с.1227-1239.
7. Малыхин В.И., Шапировский Б.Э. Аксиома Мартина и свойства топологических пространств. - ДАН СССР, 1973, т.213, № 3, с.532-535.
8. Ефимов Б.А., Чертанов Г.И. О классах пространств, не содержащих диадических бикомпактов большого веса. - Мат. заметки, 1974, т.16, № 3, с.423-430.
9. Чертанов Г.И. О замкнутых отображениях. - Вестник МГУ. Сер. мат. мех., 1979, № 4, с.20-23.

Поступила 14 мая 1984 года

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1985.

УДК 513.83

НЕЧЕТКИЙ ИНТЕРВАЛ И ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА НЕЧЕТКИХ КРУЖЕВНЫХ ПРОСТРАНСТВ

А.П.Шостак
ЛГУ им.П.Стучки

Нечеткий интервал $\mathfrak{I}$, введенный Б.Хаттоном [5], принадлежит к числу наиболее важных и интересных нечетких топологических пространств. В последние годы появился ряд работ, посвященных исследованию свойств этого пространства ([5], [7], [8], [9], [12] и др.). Часть из этих свойств вполне аналогичны свойствам обычного интервала $I = [0,1]$, другие же являются специфически "нечеткими" и не имеют "четких" прототипов.

В центре целого направления общей топологии лежит изучение тех или иных классов топологических пространств посредством непрерывных функций, отображающих эти пространства в интервал I. Представляется весьма интересным проведение аналогичных исследований нечетких топологических пространств посредством их нечетко непрерывных отображений в нечеткий интервал $\mathfrak{I}$. Первыми результатами такого рода являются полученные Б.Хаттоном функциональные характеристики нечетких нормальных и нечетких совершенно нормальных пространств [5]. Позднее тот же автор использовал отображения в $\mathfrak{I}$ для описания нечетких равномерных пространств [6]. Этим, по-видимому, и ограничиваются известные к настоящему времени результаты такого сорта.

Целью данной заметки является описание нечетких кружевных пространств посредством нечетко непрерывных отображений, заданных на них и принимающих значения в нечетком интервале $\mathfrak{I}$.

Кратко напомним основные используемые в работе понятия и конструкции.

A. Нечеткие топологические пространства.

Определение [2]. Нечетким топологическим пространством называется пара (X,τ), где X – множество, а τ – некоторое семейство его нечетких подмножеств (т.е. $\tau \subset I^X$), удовлетворяющее следующим условиям:

(I) $0, 1 \in \tau$;

(2) если $\mu_\lambda \in \tau$ для всех $\lambda \in \Lambda$, то $\bigvee_{\lambda \in \Lambda} \mu_\lambda \in \tau$

(3) если $\mu; \nu \in \tau$, то $\mu \wedge \nu \in \tau$

Определение [2]. Нечеткое множество α в нечетком топологическом пространстве (X, τ) называется замкнутым, если $1 - \alpha \in \tau$. Замыкание нечеткого множества μ в нечетком топологическом пространстве (X, τ) определяется равенством $\bar{\mu} = \wedge \{\alpha : \alpha \in I^X, \alpha \geq \mu, \alpha$ замкнуто$\}$.

Определение [2] Пусть (X, τ) и (Y, σ) - нечеткие топологические пространства и $f: X \longrightarrow Y$ - отображение соответствующих множеств. Тогда f называется (нечетко) непрерывным, если для каждого $\nu \in \sigma$ имеет место $f^{-1}(\nu) \in \tau$

Б. Нечеткие кружевные пространства.

Определение [10], [11]. Нечеткое топологическое пространство (X, τ) называется кружевным, если τ содержит все константы и каждому $\mu \in \tau$ можно сопоставить последовательность $(\mu_n)_{n \in N}$ открытых нечетких множеств таким образом, чтобы выполнялись следующие условия:

(I) $\bar{\mu}_n \leq \mu$ для всех $n \in N$;

(2) $\bigvee_n \mu_n = \mu$;

(3) если $\mu \leq \nu$, $\nu \in \tau$, то $\mu_n \leq \nu_n$ для всех $n \in N$.

Нечеткие кружевные пространства изучались в [10], [11], [12]. Нам потребуется следующее утверждение.

Предложение [10], [11] Пусть (X, τ) - нечеткое кружевное пространство, α - замкнутое нечеткое множество в X, и $\alpha \leq \mu$, $\mu \in \tau$. Тогда существует нечеткое множество $\mu_\alpha \in \tau$ такое, что $\alpha \leq \mu_\alpha \leq \bar{\mu}_\alpha \leq \mu$. При этом множества μ_α могут быть выбраны согласованным образом в том смысле, что, если $\alpha \leq \beta$, $\mu \leq \nu$ (β - нечеткое замкнутое множество, $\beta \leq \nu \in \tau$), то $\mu_\alpha \leq \nu_\beta$.

В. Нечеткий интервал (по Б Хаттону [5]).

Обозначим через $\mathfrak{X}$ совокупность всех монотонно убывающих (нестрого) отображений $z: R \longrightarrow I$ таких, что $z(t) = 1$ при $t < 0$ и $z(t) = 0$ при $t > 1$. Для каждого $t \in R$ положим $z(t^-) = \inf_{s < t} z(s)$ и $z(t^+) = \sup_{s > t} z(s)$.

Для $z, z' \in \mathfrak{Z}$ будем писать $z \sim z'$, если $z(t^-) = z'(t^-)$ и $z(t^+) = z'(t^+)$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Ясно, что $\sim$ является отношением эквивалентности на $\mathfrak{Z}$. Положим $[z] = \{z' \in \mathfrak{Z} : z' \sim z\}$ и пусть $\mathfrak{J}$ обозначает множество всех классов эквивалентности $[z]$.

Введем на $\mathfrak{J}$ нечеткую топологию τ, взяв в качестве предбазы семейство нечетких множеств $\sigma = \{\lambda_b, \rho_a : a, b \in \mathbb{R}\}$, где нечеткие множества $\lambda_b : \mathfrak{J} \to I$ и $\rho_a : \mathfrak{J} \longrightarrow I$ определяются, соответственно, равенствами $\lambda_b[z] = 1 - z(b^-)$, $\rho_a[z] = z(a^+)$. Множество $\mathfrak{J}$, наделенное нечеткой топологией τ, называется нечетким интервалом. (Для него мы сохраняем то же обозначение $\mathfrak{J}$).

<u>Замечание.</u> В некоторых работах ([9], [12] и других) рассматривается также т.н. расслоенный нечеткий интервал $\mathfrak{J}^* = (\mathfrak{J}, \tau^*)$, нечеткая топология τ^* которого задается предбазой $\sigma^* = \{\lambda_b, \rho_a : a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{c : c \in I\}$ (т.е. σ^* отличается от предбазы σ топологии τ тем, что в нее дополнительно включаются всевозможные константы). Легко проверить, что все результаты данной заметки остаются справедливыми и в случае, когда вместо нечеткого интервала используется расслоенный нечеткий интервал.

Перейдем теперь непосредственно к изучению функциональных свойств нечетких кружевных пространств.

<u>Теорема I.</u> Пусть (X, τ) - нечеткое кружевное пространство. Тогда каждой паре нечетких множеств (α, μ), где $\mu \in \tau$, $1-\alpha \in \tau$ и $\alpha \le \mu$, можно сопоставить нечетко непрерывную функцию $(f_{\alpha,\mu} =)$ $f : X \longrightarrow \mathfrak{J}$, удовлетворяющую неравенствам

$$\alpha(x) \le f(x)(1^-) \le f(x)(0^+) \le \mu(x) \qquad (x \in X).$$

При этом такое сопоставление можно произвести согласованным образом в том смысле, что, если $\alpha \le \beta$ и $\mu \le \nu$, где $\nu, 1-\beta \in \tau$, то $f_{\beta,\nu} \le f_{\alpha,\mu}$.

<u>Доказательство.</u> Зафиксируем пару нечетких множеств (α, μ), удовлетворяющую условию теоремы и построим для нее соответствующую функцию $f (= f_{\alpha,\mu})$.

Положим $\mu_0 = \mu$ и $\mu_1 = \mu_\alpha$, где μ_α определено как в предложении пункта Б. Воспользовавшись повторно этим предложением, положим $\mu_{1/2}=(\mu_0)_{\bar\mu_1}$. Из построения следует, что $\mu_1\le\bar\mu_1\le\mu_{1/2}\le\bar\mu_{1/2}\le\mu_0$. Далее, вновь применяя предложение пункта Б, положим $\mu_{1/4}=(\mu_0)_{\bar\mu_{1/2}}$, $\mu_{3/4}=(\mu_{1/2})_{\bar\mu_1}$. Продолжая этот процесс по индукции, аналогичной той, на которой основывается доказательство леммы Урысона (см. [3] и др.; ср. также доказательство нечеткой леммы Урысона в [5]), для каждого двоично-рационального числа $t\in[0,1]$ построим нечеткое множество μ_t, причем так, что, если $t_1,t_2\in[0,1]$ – двоично-рациональные числа и $t_1<t_2$, то $\bar\mu_{t_2}\le\mu_{t_1}$.

Пусть $\mathfrak{D}$ обозначает множество всех двоично-рациональных чисел, заключенных в $[0,1]$. Для каждого $t\in[0,1]$ положим $\mu_t=\sup\{\mu_s : s>t,\ s\in\mathfrak{D}\}$. Из построения ясно, что, если $t,s\in[0,1]$ и $t<s$, то $\bar\mu_s\le\mu_t$. Далее, при $t<0$ положим $\mu_t=1$, а при $t>1$ положим $\mu_t=0$. Зададим теперь функцию $f: X\longrightarrow\mathfrak{I}$, определив для каждого $x\in X$ значение $f(x)\in\mathfrak{I}$ равенством $f(x)(t)=\mu_t(x)$. Проверим, что эта функция удовлетворяет условиям теоремы.

Непосредственно из определения ясна справедливость цепочки неравенств:

$$\lambda(x)\le\mu_2(x)=\mu_1(x)=f(x)(1)\le f(x)(1^-)\le f(x)(0^+)\le f(x)(0)=\mu_0(x)=\mu(x)$$

Покажем теперь, что отображение непрерывно. Для этого рассмотрим прообразы элементов предбазы $\mathfrak{T}$.

Пусть $t\in[0,1[$, тогда для $x\in X$

$$f^{-1}(\rho_t)(x)=\rho_t f(x)=f(x)(t^+)=\sup_{s>t} f(x)(s)=\bigvee_{s>t}\mu_s(x)$$

а следовательно $f^{-1}(\rho_t)\in\tau$. Если $t<0$, то $f^{-1}(\rho_t)(x)=1$; наконец, если $t<1$, то $f^{-1}(\rho_t)(x)=0$. Следовательно, во всех случаях $f^{-1}(\rho_t)\in\tau$.

Пусть теперь $t\in]0,1]$, тогда для $x\in X$

$$f^{-1}(\lambda_t)(x)=\lambda_t f(x)=1-f(x)(t^-)=1-\inf_{s<t} f(x)(s)=1-\bigwedge_{s<t}\mu_s(x)=1-\bigwedge_{s<t}\bar\mu_s(x),$$

а следовательно $f^{-1}(\lambda_t)\in\tau$. Если $t\le 0$, то $f^{-1}(\lambda_t)=0$; наконец, если $t>1$, то $f^{-1}(\lambda_t)(x)=1-f(x)(t^-)=1$.

Итак, прообразы всех элементов предбазы топологии нечеткого интервала открыты, а следовательно, отображение f нечетко непрерывно.

Утверждение о согласованности определенных таким образом функций для различных пар (α, μ) и (β, ν) следует непосредственно из условия согласованности множеств

μ_t и ν_p (см. предложение пункта Б), участвующих в построении этих функций.

Следующая теорема характеризует нечеткие кружевные пространства посредством их отображений в нечеткий интервал.

<u>Теорема 2.</u> Нечеткое топологическое пространство (X,τ) является кружевным тогда и только тогда, когда каждому $\mu\in\tau$ можно сопоставить нечетко непрерывную функцию $f_\mu\ X\longrightarrow \mathfrak{J}$, удовлетворяющую при каждом x равенству $f_\mu(x)(1^-)=(1-\mu)(x)$, причем согласованным образом в том смысле, что из $\mu\leq\nu\in\tau$ должно следовать $f_\mu\leq f_\nu$

<u>Доказательство.</u> Необходимость. Пусть $\mu\in\tau$ и $(\mu_n)_{n\in N}$ - соответствующее кружево. Положим $\alpha=1-\mu$, тогда $\alpha=1-\vee\mu_n=1-\vee\bar{\mu}_n=\wedge(1-\bar{\mu}_n)=\wedge\alpha_n$, где $\alpha_n=1-\bar{\mu}_n$

Построим семейство множеств $\{\nu_t : t\in[0,1[\}$ следующим образом. Положим $\nu_0=\alpha_1$ и, воспользовавшись предложени м пункта Б, определим $\nu_{1/2}=(\nu_0)_\alpha\wedge\alpha_1$. Далее, снова применяя это предложение, определим множества $\nu_{1/4}=(\nu_0)_{\bar{\nu}_{1/2}}$ и $\nu_{3/4}=(\nu_{1/2})_\alpha\wedge\alpha_2$ Положим теперь $\nu_{1/8}=(\nu_0)_{\bar{\nu}_{1/4}}$, $\nu_{3/8}=(\nu_{1/4})_{\bar{\nu}_{1/2}}$, $\nu_{5/8}=(\nu_{1/2})_{\bar{\nu}_{3/4}}$, $\nu_{7/8}=(\nu_{3/4})_\alpha\wedge\alpha_3$

Продолжая этот процесс по индукции, аналогичной той, на которой основывается доказательство леммы Урысона (см. также доказательство предыдущей теоремы), для каждого двоично-рационального числа $t\in[0,1[$ построим нечеткое множество $\nu_t\in\tau$, причем так, что, если $t_1<t_2$, то $\bar{\nu}_{t_2}\leq\nu_{t_1}$

Так же, как в доказательстве теоремы I, определим теперь для каждого числа $t\in[0,1[$ нечеткое множество ν_t, причем так, что, если $s<t$, то $\bar{\nu}_t\leq\nu_s$ Зададим функцию $(f_\mu=)\ f: X\longrightarrow\mathfrak{J}$ равенством

$$f(x)(t)=\begin{cases}\nu_t(x): & t\in[0,1[\\ 1 & t<0\\ 0 & t\geq 1\end{cases}$$

Покажем, что определенная таким образом функция удовлетворяет условиям теоремы. Из построения ясно, что для каждого $x\in X$ $\alpha(x)=\inf_{s<1}\nu_s(x)=\inf_{s<1}f(x)(s)=f(x)(1^-)$

Для проверки непрерывности функции f рассмотрим прообразы элементов предбазы нечеткого интервала. Пусть $t\in[0,1[$, тогда $f^{-1}(\varrho_t)(x)=\varrho_t f(x)=f(x)(t^+)=\sup_{s>t}f(x)(s)=\bigvee_{s>t}\mu_s(x)$

Если $t<0$, то $f^{-1}(\varrho_t)(x)=\varrho_t f(x)=f(x)(t^+)=1$, наконец, если $t > 1$, то $f^{-1}(\varrho_t)(x) = \varrho_t f(x) = f(x)(t^+) = 0$, а следовательно, для каждого $t \in R$ $f^{-1}(\varrho_t) \in \tau$. Далее, для $t \in [0,1]$

$$f^{-1}(\lambda_t)(x) = 1 - f(x)(t^-) = 1 - \inf_{s<t} f(x)(s) = 1 - \bigwedge_{s<t} \mu_s(x) = 1 - \bigwedge_{s<t} \bar{\mu}_s(x)$$

При $t < 0$ $f^{-1}(\lambda_t)(x) = 1 - \inf_{s<t} f(x)(s) = 0$; если же $t > 1$, то $f^{-1}(\lambda_t)(x) = 1 - \inf_{s<t} f(x)(s) = 1$. Итак, опять для каждого $t \in R$ $f^{-1}(\lambda_t) \in \tau$ Тем самым непрерывность отображения f доказана.

Наконец, учитывая предложение пункта Б, легко заметить, что построение функций произведено согласованным образом - в том смысле, что, если $\mu \le \nu$, то $f_\mu \le f_\nu$

Достаточность. Пусть в нечетком топологическом пространстве (X, τ) для каждого $\mu \in \tau$ сопоставлено непрерывное отображение $(f_\mu =)$ $f : X \to \mathfrak{I}$ такое, что $f(x)(1^-) = (1-\mu)(x)$ причем так, что, если $\mu \le \nu$, то $f_\mu \le f_\nu$

Множеству $\mu \in \tau$ сопоставим последовательность открытых нечетких множеств $(\mu_n)_{n \in N}$, положим $\mu_n = f^{-1}(\lambda_{(1-1/n)})$ Проверим, что тем самым получено кружево.

(I) $\bigvee_n \mu_n(x) = \bigvee f^{-1}(\lambda_{(1-1/n)})(x) = \bigvee(1 - f(x)(1-\frac{1}{n})^-) = 1 - f(x)(1^-) = \mu(x)$

(2) $$\mu_n(x) = f^{-1}(\lambda_{(1-1/n)})(x) = 1 - f(x)(1-\tfrac{1}{n})^- \le 1 - f(x)(1-\tfrac{1}{n})^+ = \\ = 1 - f^{-1}(\varrho_{(1-1/n)})(x) \le 1 - f^{-1}(\lambda_{(1-\frac{1}{n+1})})(x)$$

и, следовательно $\bar{\mu}_n \le \mu_{n+1} \le \mu$

(3) Поскольку неравенство $\mu \le \nu$ влечет по условию $f_\mu \le f_\nu$, из построения ясно, что $\mu_n \le \nu_n$

Итак, пространство (X, τ) является кружевным.

Литература

1. Borges C.J.R., On stratifiable spaces - Pacific J.Math., 1966, vol. 17, p. 2-16.
2. Chang C.L., Fuzzy topological spaces. - J. Math. Anal. Appl. 1968, vol. 24, p. 182-190.
3. Engelking R., General topology, Warszawa, PWN, 1977.
4. Goguen J.A., The fuzzy Tychonoff theorem - J. Math. Anal. Appl., 1973, vol. 43, p. 734-742.

5. Hutton B., Normality in fuzzy topological spaces, J. Math. Anal. Appl., 1975, vol. 50, p. 74-79.
6. Hutton B., Uniformities on fuzzy topological spaces, J. Math. Anal. Appl., 1977, vol. 58, p. 559-571.
7. Rodabaugh S.E., Separation Axioms and the fuzzy real lines - Fuzzy Sets and Syst., 1983, vol. 11, p. 163-183.
8. Rodabaugh S.E., Connectivity and the L - fuzzy unit interval.- Rocky Mountain J. Math., 1982, vol. 12, p.113-121
9. Rodabaugh S.E., Complete Fuzzy Topological Hyperfields and Fuzzy Multiplication in the L - Fuzzy real line.- Preprint.
10. Шостак А.П. Нечеткие кружевные пространства. - В кн.: Труды Ленинградской международной топологической конференции. Ленинград, 1982, с.153.
11. Шостак А.П. О нечетких кружевных пространствах. - В кн.: Топология и теория множеств. Ижевск, 1982, с. 71-75.
12. Šostak A.P. A fuzzy modification of a linearly ordered topological space.- Comm. Math. Univ. Car., 1985.

Поступила 18 мая 1984 года

Топологические пространства и их отображения.. Рига, 1985.

УДК 517.5

О НЕКОТОРЫХ СЕМЕЙСТВАХ ПОЛИНОМОВ ДВУХ АРГУМЕНТОВ

Г.К.Энгелис

ЛГУ им. П.Стучки

В §§ 3,4 нашей статьи [2] были рассмотрены некоторые семейства полиномов двух аргументов. Эти полиномы являются собственными функциями некоторого линейного дифференциального оператора второго порядка, во многих отношениях напоминают классические ортогональные полиномы (КОП) и в некоторых случаях выражаются в форме $p_m(x)q_n(y)$, где p_m и q_n – КОП. Но не все произведения указанного вида входят в класс изучаемый в [2]. В настоящей статье рассматриваются операторы более общего вида, множество собственных функций которых содержит все указанные произведения. При этом используются методы и обозначения статьи [2], в частности Π означает множество всех полиномов от двух аргументов над полем комплексных чисел, Π_k – множество полиномов, степень которых не выше k, a_{ij} – коэффициэнт при $x^i y^j$ в полиноме a.

Теорема I. Если оператор

$$L(z) = a z''_{xx} + 2b z''_{xy} + c z''_{yy} + d z'_x + e z'_y \qquad (I)$$

(где $\{a, b, c, d, e\} \subset \Pi$) при каждом $(m,n) \in (N,N)$ имеет собственную функцию вида $x^m y^n + g$, $g \in \Pi_{m+n-1}$, то

$a = a_{20} x^2 + a_{10} x + a_{01} y + a_{00}$, $b = b_{11} xy + b_{10} x + b_{01} y + b_{00}$,

$c = c_{02} y^2 + c_{10} x + c_{01} y + c_{00}$, $d = d_{10} x + d_{00}$, $e = e_{01} y + e_{00}$.

и соответствующее собственное значение

$$\lambda_{mn} = a_{20} m(m-1) + 2 b_{11} mn + c_{02} n(n-1) + d_{10} m + e_{01} n. \qquad (2)$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы I0 из [2] Отметим, что изученный в [2] случай получается, если $a_{20} = b_{11} = c_{02}$ и $d_{10} = e_{01}$.

Легко убедиться, что любое произведение $p_m(x) q_n(y)$, где p_m и q_n – КОП, удовлетворяет уравнению $L(z) = \lambda_{mn} z$. Известно, что существуют такие полиномы a, d, c, e ,что

$$(a_{20}x^2+a_{10}x+a_{00})\frac{d^2p_m}{dx^2}+(d_{10}x+d_{00})\frac{dp_m}{dx}=(a_{20}m(m-1)+d_{10}m)p_m \quad (3)$$

и

$$(c_{02}y^2+c_{01}y+c_{00})\frac{d^2q_n}{dy^2}+(e_{01}y+e_{00})\frac{dq_n}{dy}=(c_{02}n(n-1)+e_{01}n)q_n. \quad (4)$$

Если (3) умножить на q_n, (4) на p_m и результаты сложить, получается искомое уравнение (в этом случае $b=0$).

Следуя [2], введен согласованный с L линейный функционал $\mathcal{J}$, такой, что для каждого $p\in\Pi$

$$\mathcal{J}(ap'_x+bp'_y+dp)=\mathcal{J}(bp'_x+cp'_y+ep)$$

и определим скалярное произведение

$$(p,q)=\mathcal{J}(pq)$$

При выполнении некоторых дополнительных условий такое скалярное произведение можно истолковать как интеграл

$$(p,q)=\iint_{\mathcal{D}}\rho(x,y)\,p(x,y)\,q(x,y)\,dx\,dy$$

Здесь граница области $\mathcal{D}$ удовлетворяет уравнению $ac-b^2=0$ и весовая функция ρ удовлетворяет системе

$$\begin{cases} a\rho'_x+b\rho'_y=(d-a'_x-b'_y)\rho \\ b\rho'_x+c\rho'_y=(e-b'_x-c'_y)\rho \end{cases} \quad (5)$$

Из теоремы I статьи [2] вытекает: если $\lambda_{kl}\neq\lambda_{mn}$, то соответствующие собственные функции P_{kl} и P_{mn} ортогональны:

$$(P_{kl},P_{mn})=0$$

(В дальнейшем через P_{mn} будем обозначать полином вида x^my^n+q, $q\in\Pi_{m+n-1}$).

Можно показать, что при определенных условиях некоторые собственные функции оператора (I) выражаются через формулу Родрига. Введем еще некоторые обозначения. Пусть a,b,c разложены на полиномиальные множители

$$a=a_1a_2,\quad b=a_1b_1c_1,\quad c=c_1c_2 \quad (6)$$

и пусть

$$\delta=c_1(a_2c_2-a_1b_1^2c_1),\quad \varepsilon=a_1(a_2c_2-a_1b_1^2c_1).$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия: I) система (5) имеет ненулевое решение ρ, 2) $a'_y=c'_x=0$, 3) множители в (6) можно подобрать так, что

$$a'_{2x}=2b'_{1y}c_1+b_1c'_{1y},\quad c'_{2y}=2a_1b'_{1x}+a'_{1x}b_1$$

Тогда: I) функция $Q_{mn}=\rho^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^m\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^n(\rho\delta^m\varepsilon^n)$

является полиномом; 2) если $k<m$ или $l<n$, то $(x^k y^l, Q_{mn})=0$;
3) $L(Q_{mn})=\lambda_{mn}Q_{mn}$.

Утверждения I и 2 получаются как частные случаи теоремы 6 из [2], утверждение 3 доказывается так же, как теорема I4 из [2] с небольшими изменениями в выкладках.

Если $P_{mn}(x,y)=p_m(x)q_n(y)$, p_m, q_n из КОП, то Q_{mn} отличается от P_{mn} только постоянным множителем и из утверждения 2 теоремы следует ортогональность этих полиномов. В общем случае эти системы биортогональны.

Покажем теперь, что полиномы P_{mn}, Q_{mn} связаны рекуррентными формулами, аналогичными формулам для КОП (см. [I]). Ради краткости сформулируем эти теоремы только для аргумента x - разумеется такого же вида формулы имеются и для y. В [2] соответствующих теорем нет.

<u>Теорема 3</u>. Существуют системы чисел α, β такие, что для всех $(m,n)\in(N,N)$

$$xP_{mn}(x,y)=P_{m+1,n}(x,y)+\sum_{m+n-1\le k+l\le m+n}\alpha(m,n,k,l)P_{kl}(x,y) \qquad (7)$$

$$xQ_{mn}(x,y)=\sum_{m+n-1\le k+l\le m+n+1}\beta(m,n,k,l)Q_{kl}(x,y) \qquad (8)$$

Докажем только (7). Ясно, что $xP_{mn}=x^{m+1}y^n+r$, $r\in\Pi_{m+n}$ и что r можно представить в виде $\sum_{0\le k+l\le m+n}\alpha(m,n,k,l)P_{kl}$. Потому

$$xP_{mn}(x,y)=P_{m+1,n}(x,y)+\sum_{0\le k+l\le m+n}\alpha(m,n,k,l)P_{kl} \qquad (9)$$

Умножим обе части этого равенства скалярно на $Q_{kl}(x,y)f_{kl}$, где $f_{kl}=(P_{kl},Q_{kl})^{-1}$. Из биортогональности семейств P_{mn}, Q_{mn} следует $\alpha(m,n,k,l)=(xP_{mn},Q_{kl}f_{kl})=f_{kl}\,I(xP_{mn}Q_{kl})=f_{kl}(P_{mn},xQ_{kl})$.
Но это произведение равно 0, если $k+l<m+n-1$. Итак, в правой части равенства (9) отличными от 0 будет только те $\alpha(m,n,k,l)$, для которых $k+l\ge m+n-1$. Равенство (7) доказано, (8) доказывается вполне аналогично.

Для КОП известно несколько соотношений, связывающих полиномы с различными весовыми функциями. Аналогичные соотношения имеют место и для полиномов Q_{mn}. Если существует ρ – ненулевое решение системы (5), это отмечается записью $Q_{mn}(x,y;\rho)$.

Теорема 4. Если существует ненулевое решение системы (5) и выполнены условия теоремы 2, то для каждого $(m,n)\in(N$

$$Q_{m+1,n}(x,y;\rho\delta^{-1})=\left(\delta\frac{\partial}{\partial x}+\varkappa\right)Q_{mn}(x,\rho),$$

где $\varkappa$ определяется равенством $\frac{\rho'_x}{\rho}=\frac{\varkappa}{\delta}$ (в [2] показано, что $\varkappa$ – полином).

Доказательство получается из цепи равенств:

$$Q_{m+1,n}(x,y;\rho\delta^{-1})=\rho^{-1}\delta\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{m+1}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n}(\rho\delta^{-1}\delta^{m+1}\varepsilon^{n})=$$

$$=\delta\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{m}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n}(\rho\delta^{m}\varepsilon^{n}\right)+\rho^{-2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\rho\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{m}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n}(\rho\delta^{m}\varepsilon^{n})\right]=$$

$$=\delta\frac{\partial}{\partial x}Q_{mn}(x,y;\rho)+\delta\rho^{-1}\frac{\varkappa\rho}{\delta}Q_{mn}(x,y;\rho)=\left(\delta\frac{\partial}{\partial x}+\varkappa\right)Q_{mn}(x,y;\rho)$$

Для КОП известен факт, что производные КОП тоже являются КОП, только с другой весовой функцией. Аналогичный факт имеет место для P_{mn} в одном частном случае.

Теорема 5. Если P_{mn} – собственная функция оператора (I) и $a_{01}=c_{10}=0$, то $\frac{\partial}{\partial x}P_{mn}$ – собственная функция аналогичного оператора, где полиномы d, e заменены на $d+a'_x, e+2b'_x$.

Для доказательства продифференцируем по x обе части уравнения

$$L(z)=\lambda_{mn}z$$

и вместо z'_x пишем u. Получим

$$au''_{xx}+2bu''_{xy}+cu''_{yy}+(d+a'_x)u'_x+(e+2b'_x)u'_y=$$

$$=a_{20}m(m-1)+2b_{11}mn+c_{02}n(n-1)+d_{10}m+e_{01}n-d_{10}-e_{01}.$$

Но правая часть этого равенства совпадает с

$$a_{20}(m-1)(m-2)+2b_{11}(m-1)n+c_{02}n(n-1)+(d_{10}+2a_{20})(m-1)+(e_{01}+2b_{11})n$$

т.е., это $\lambda_{m-1,n}$ для оператора в левой части. Теорема доказана.

Итак, полиномы P_{mn} и Q_{mn} можно рассматривать как обобщение КОП, более широкое, чем рассмотренные в [2].

Литература

I. Никифоров А.Ф.,Уваров В.Б. Основы теории специальных функций. - М.,1974.
2. Энгелис Г.К. О некоторых двумерных аналогах классических ортогональных полиномов. - Латвийский математический ежегодник, 1974, т.15, с.169-202.

Поступила 24 сентября 1983 года

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1985.

УДК 512.548

О ГРУППАХ АВТОМОРФИЗМОВ КОНЕЧНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ КВАЗИГРУПП ИЗ $\dot{R}$-МНОГООБРАЗИЙ

А.А.Гварамия, М.Глухов
РКИИГА им. Ленинского комсомола,
АГУ им.А.М.Горького

В данной работе под квазигруппой понимается множество с тремя бинарными операциями $\cdot$ $/$ $\backslash$, удовлетворяющими системе тождеств Σ_0

$$(x\cdot y)/y = x \qquad x\backslash(x\cdot y) = y$$
$$(x/y)\cdot y = x \qquad , \qquad x\cdot(x\backslash y) = y$$

В [1] для систем квазигрупповых тождеств определено так называемое условие R и показано, что в многообразиях квазигрупп и луп, заданных системами тождеств с условием R (в R-многообразиях), положительно решаются алгоритмические проблемы тождества слов, изоморфизма и вхождения для конечно определенных квазигрупп и луп.

Описание R-многообразий квазигрупп дано в [2]. Каждое такое многообразие может быть задано системой тождеств, являющейся объединением Σ_0 с некоторой (произвольной) подсистемой следующей системы тождеств:

1) $xy = yx$, 2) $(xy)y = x$ 3) $x(xy) = y$
4) $(xy)x = y$ 5) $xx = x$ 6) $xx = x\backslash x$,
7) $xx = x/x$ 8) $(xx)(xx) = x$ 9) $(xx)(xx) = xx$,
10) $(x\backslash x)x = x\backslash x$ 11) $(x/x) = x\backslash x$, 12) $(x\backslash x)(x\backslash x) = x\backslash x$,
13) $(x/x)(x/x) = x/x$, 14) $x(x/x) = x/x$

Далее под Σ будет пониматься любая такая система тождеств. Квазигруппы и частичные квазигруппы с системой тождеств Σ будем называть соответственно Σ-квазигруппами и частичными Σ-квазигруппами. Многообразие всех Σ-квазигрупп обозначим через $Q(\Sigma)$.

Из результатов работы [3] следует, что для любой Σ-квазигруппы Q, заданной конечными системами образующих элементов и определяющих соотношений, можно найти минимальную конечную частичную Σ-квазигруппу Q_0, называемую базой для Q, такую, что Q_0 свободно порождает Q в многообразии $Q(\Sigma)$. В связи с этим Q называют свободным замыканием Q_0 и обозначают $\bar{Q}_0$. В общем случае (см. [3]) Q_0 является объединением двух непересекающихся частичных Σ-квазигрупп: однозначно определенной связанной части Q_0' и чистой части Q_0''. Чистая часть порождает свободную Σ-квазигруппу $\bar{Q}_0''$, и $\bar{Q}_0$ является свободным произведением Σ-квазигрупп $\bar{Q}_0'$ и $\bar{Q}_0''$ в многообразии $Q(\Sigma)$. В данной работе мы будем рассматриват лишь тот случай, когда $Q_0''=\emptyset$, то есть когда в $\bar{Q}_0$ не выделяется свободным множителем никакая свободная Σ-квазигруппа. В этом случае, в силу единственности базы Q_0', все автоморфизмы Σ-квазигруппы $\bar{Q}_0$ оставляют базу Q_0' на месте и потому $Aut\ \bar{Q}_0' \cong Aut\ Q_0'$. Так как $|Q_0'|<\infty$, то группа $Aut\ Q_0'$ конечна. Естественно возникает вопрос: любая ли конечная группа может быть представлена как группа автоморфизмов конечно определенной Σ-квазигруппы? Для $\Sigma=\Sigma_0$ этот вопрос решен в [ ]. Здесь он положительно решается в общем случае.

<u>Теорема.</u> Всякая конечная группа изоморфна группе автоморфизмов подходящей конечно определенной Σ-квазигруппы.

<u>Доказательство.</u> Пусть

$$G=\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$$

произвольная конечная группа и g_1 - ее единичный элемент. Построим конечную частичную Σ-квазигруппу Q, такую, что

$$Aut\ Q \cong G. \tag{I}$$

Для этого с каждым числом $i=1,\dots,n$ сопоставим множество символов

$$A_i=\{a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{it}\},$$

где $t=n+2$, если n - четно и $t=n+3$, если n - нечетно, и две системы соотношений

$$K_i=\{a_{i1}a_{i2}=a_{i3},\ a_{i2}a_{i3}=a_{i4}, \dots\ a_{i,t-1}a_{it}=a_{i1},\ a_{it}a_{i1}=g_i\},$$

$$L_i=\{a_{ij}a_{i,j+1}=g_{ij},\ i=1,2,\dots,n,\ j=4,\dots,t\},$$

где g_{ij} - есть элемент $g_j^{-1}g_i$ в группе G, а индекс j у элемента g_j считается наименьшим положительным вычетом по модулю n. Обозначим:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A,\quad A \cup G = Q,\quad \bigcup_{i=1}^{n} K_i = K,\quad \bigcup_{i=1}^{n} L_i = L,\quad K \cup L = M$$

Заметим, что в любой частичной Σ-квазигруппе каждое табличное соотношение s, то есть соотношение вида

$$a * b = c \quad ,$$

где $*$ – любая из операций $\cdot$, $/$, $\backslash$, имеет своими следствиями некоторые другие табличные соотношения. Из условия R на систему тождеств Σ (см. [3]) следует, что система $T_\Sigma(s)$ всех табличных соотношений, являющихся следствиями соотношения s, не зависит от наличия в частичной Σ-квазигруппе других соотношений, каждое соотношение из $T_\Sigma(s)$ связывает те же три элемента a, b, c, что и s, и все соотношения из $T_\Sigma(s)$ являются следствиями любого одного из них. Наибольшее число соотношений $T_\Sigma(s)$ содержит в том случае, когда Σ содержит все тождества I)-I4). В последнем случае следствиями соотношения s являются все соотношения вида

$$u * v = w \quad ,$$

где (u, v, w) – любая перестановка элементов a, b, c (входящих в s), а $*$ – любая из операций $\cdot$, $/$, $\backslash$ (всего I6 соотношений). В общем случае $T_\Sigma(s)$ будет некоторой подсистемой указанной системы соотношений.

Добавим к соотношениям из M все их следствия, а также все соотношения вида $aa = a$, $a \in Q$, если в Σ-квазигруппах выполняется тождество $xx = x$. Получим систему соотношений S между элементами из Q. Покажем, что при $n > 4$ множество Q с системой соотношений S является частичной Σ-квазигруппой. Так как в S вместе с каждым соотношением содержатся и все его следствия, то система тождеств Σ в Q выполняется. Остается показать, что в S нет двух соотношений, отличающихся лишь правыми частями (при наличии таких соотношений нам пришлось бы склеить элементы из правых частей). Из строения системы S видно, что если такие s и s' есть, то они являются следствиями соотношений соответственно из K_i и L_i имеют вид:

$$a_1 a_i = q_i\ ,\quad a_k a_{i+1} = q_{i+1}\ ,\quad \text{где } q_{i+1} = q_i \text{ и}$$
$$|\{a_1, a_i\} \cap \{a_k, a_{i+1}\}| = 1\ . \qquad (2)$$

Так как $g_{i,1} = g_i^{-1} g_i$, то равенство $g_{i,n} = g_i$ возможно лишь при условии $g_n = g_1$, т.е. $i = n+1$. Следовательно, соотношение s' имеет вид

$$a_{i,n+1}\, a_{i,n-1} = g_i .$$

Однако при $i = n+1$ и $n > 4$ условие (2) не выполнимо. Таким образом, при $n > 4$ Q -частичная Σ-квазигруппа с диаграммой S

Теперь докажем изоморфизм (I).

I) Если α - автоморфизм Q и $a \in Q$, то элементы a и $\alpha(a)$ входят в одно и то же число соотношений из M

Этот факт следует непосредственно из сделанного выше замечания о следствиях каждого табличного соотношения в Q. А именно, все соотношения из S вида $a \cdot b = c$ с различными a, b, c разбиваются на непересекающиеся равномощные классы $T_\Sigma(s)$, соотношения из одного класса связывают одну и ту же тройку элементов и потому M является полной системой представителей из указанных классов. Значит, если a и $\alpha(a)$ входят в различное число соотношений из M, то они входят в различное число соотношений из S, что невозможно поскольку $\alpha \in Aut\, Q$. Отсюда, в частности, следует, что

$$\alpha(G) = G, \quad \alpha(A) = A \tag{3}$$

ибо каждый элемент из A входит не более, чем в 4 соотношения, а каждый элемент из G входит в n соотношений при четном n и в $n+1$ соотношений при нечетном n

2) Если $\alpha \in Aut\, Q$ и $\alpha(g_i) = g_i$ для некоторого $i \in \overline{1,n}$, то α - тождественный автоморфизм Q

Легко видеть, что элемент входит в соотношения из M

$$\begin{aligned} &a_{i_1} a_{i_4} = g_i ,\\ &a_{i_4} a_{i_5} = g_i \\ &a_{i_{k_n}} a_{i,n-3} = g_i ,\\ &\\ &a_{i_{k_n}} a_{i,n-3} = g_i , \end{aligned} \tag{4}$$

где $(k_1, k_2, k_3, \quad , k_n)$ есть перестановка чисел $4,5, \quad , n+3$ при нечетном n и размещение из чисел $4,5, \quad , n+2$ при четном n. Так как $\alpha(g_i) = g_i$, то автоморфизм α должен перевести соотношение

$$a_{i_1} a_{i_4} = g_i \tag{5}$$

в следствие одного из соотношений (4). Для его определения найдем числа вхождений элементов $a_{j\nu}$, $a_{j\nu-3}$ в соотношения M. Соответствующие данные можно записать в виде таблицы.

Элемент	Число вхождений при четном	Число вхождений при нечетном
a_{jn+3}	0	2
a_{jn+2}	2	2
a_{jn+1}	2	3
a_{jn}	3	3
a_{jn-1}	3	4
a_{jn-2}	4	3
a_{jn-3}	3	4
a_{j5}	3	3
a_{j4}	4	4
a_{j3}	2	2
a_{j2}	3	3
a_{j1}	2	2

Из приведенной таблицы видно, что при автоморфизме α соотношение (5) может перейти лишь в себя или соотношение

$$a_{jn-1}\, a_{jn+2} = g_{j,n-1} \qquad (6)$$

при четном n и в соотношение

$$a_{jn}\, a_{jn+3} = g_{j,n} \qquad (7)$$

при нечетном n

Если n - четно и соотношение (5) переходит в (6), то

$\alpha(a_{i2}) = a_{jn-1}$ $\alpha(a_{i1}) = a_{jn+2}$, $g_{j,n-1} = g_i$

Заметим, что a_{i1} входит ещё в соотношение

$$a_{i4}\, a_{i1} = g_{i4}\,, \qquad (8)$$

а a_{jn+2} в соотношение

$$a_{jn+2}\, a_{jn+1} = a_{jn}\,. \qquad (9)$$

Следовательно, соотношение (8) должно перейти при автоморфизме α в одно из следствий соотношения (9). Однако это противоречит (3). Значит при четном n имеем

$\alpha(a_{i2}) = a_{i2}$, $\alpha(a_{i1}) = a_{i1}$

То же самое получается из тех же соображений и при нечетном

n Теперь из соотношений K_i и таблицы легко усмотреть, что

$$\alpha(a_{ir}) = a_{ir}\ , \quad i = 3,4, \quad , t \qquad (10)$$

Если n - нечетно и r пробегает значения $n+3, n+2, \ldots, 4$ то в соотношении

$$a_{ir}\, a_{ir-1} = q_{ir}$$

элемент q_{ir} пробегает всю группу G Отсюда и из (10) следует, что $\alpha(q_j) = q_j$, а потому α - тождественный автоморфизм. Если же n - четно, то при $i = 4,5, \ldots, n+2$ элемент q_{ir} может принимать любые значения из G кроме одного, например, q_k Тогда, как и в случае нечетного n, получим

$$\alpha(q_j) = q_j \qquad \alpha(a_{jr}) = a_{jr}$$

при любом $j \neq k$ Однако, очевидно, что элемент q_k входит в соотношение вида

$$a_{jr}\, a_{jr-1} = q_k$$

при $j \neq k$ Отсюда и из (10) следует, что $\alpha(q_k) = q_k$, а потому и

$$\alpha(a_{kr}) = a_{kr}\ , \quad r = 4,6, \ldots, n-2$$

Таким образом α - тождественный автоморфизм и при нечетном n.

3) Любая правая трансляция ρ_k группы G, т.е. подстановка

$$\rho_k : q \to q q_k\ , \quad q \in G \qquad k \in \overline{1,n}$$

может быть продолжена до автоморфизма частичной квазигруппы Q

Определим по ρ_k отображение $\alpha_k : Q \to Q$, положив: $\alpha_k(a_{ir}) = a_{jr}$, если $\rho_k(q_i) = q_j$, т.е. $q_i q_k = q_j$

Покажем, что $\alpha_k \in Aut\ Q$ Очевидно, что α_k - подстановка множества Q и потому достаточно показать, что если соотношение

$$ab = c \qquad (11)$$

содержится в M то и соотношение

$$\alpha_k(a)\, \alpha_k(b) = \alpha_k(c) \qquad (12)$$

содержится в M. Если (11) находится в K_i то это утверждение очевидно. Пусть (11) содержится в L_i т.е. имеет вид

$$a_{ir}\, a_{ir-3} = q_{i,r}\ , \qquad (13)$$

где $q_{i,r} = q_r^{-1} q_i$. Пусть $q_i q_k = q_j$. Тогда соотношение (13) перейдет в соотношение

$$a_{j3}\cdot a_{j\,n-4} = \alpha_n(q_{j,n}). \qquad (14)$$

Однако $\alpha_n(q_{i,n}) = \alpha_n(q_i^{-1}q_j) = (q_i^{-1}q_j)q = q_i^{-1}q_j = q_{j,n}$. Таким образом, соотношение (14) имеет вид

$$a_{j3}\, a_{j\,n-4} = q_{j,n}$$

и содержится в L_j. Следовательно, α – автоморфизм Q.

Из 2)–3) следует, что для любых $i,j \in \overline{1,n}$ существует единственный автоморфизм α из $Aut\,Q$, такой что $\alpha(q_i) = q_j$, причем на элементах группы G он действует умножением в группе справа на элемент q_α, где $q_\alpha = q_i^{-1}q_j$. Очевидно, что отображение $\varphi: \alpha \to q_\alpha$ есть искомый изоморфизм группы $Aut\,Q$ на группу G.

Частичная квазигруппа Q является базой свободно порождаемой ею квазигруппы $\bar{Q}$ из многообразия $Q(\Sigma)$. Действительно, удалимый элемент частичной квазигруппы может входить только в соотношения, являющиеся следствиями какого-либо одного соотношения из S. Из определения S видно, что таких элементов в Q не существует. Значит Q – база $\bar{Q}$. Кроме того, Q не содержит чистых элементов. Следовательно, $Aut\,Q \cong Aut\,\bar{Q}$, и потому

$$Aut\,\bar{Q} \cong G$$

Этим теорема при $n>4$ доказана.

Рассмотрим случай, когда $n\le 4$.

Единичная группа изоморфна группе автоморфизмов одноэлементной квазигруппы, которая, очевидно, является Σ-квазигруппой для любой из рассматриваемых нами систем Σ. Для $n=2,3,4$ теорема доказывается точно так же, что и при $n>4$, разница заключается лишь в выборе множеств A_i, K_i, L_i. Укажем возможные варианты их выбора.

$n=2$, $G=\{q_1,q_2\}$.

$A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4}, a_{i5}, a_{i6}\}$,

$K_i = \{a_{i1}a_{i5} = a, \; a_{i4}a_{i3} = a_{i2}, \; a_{i2}a_{i4} = q_i\}$,

$L_i = \{a_{i2}a_{i3} = q_2^{-1}q_i, \; a_{i5}a_{i2} = q_i, \; a_{i4}a_{i1} = q_2^{-1}q_i\}$.

$n=3$, $G=\{q_1,q_2,q_3\}$.

$A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4}, a_{i5}, a_{i6}\}$,

$K_i = \{a_{i6}a_{i5} = a_{i4}, \; a_{i4}a_{i3} = a_{i2}, \; a_{i3}a_{i4} = a_{i6}, \; a_{i2}a_{i4} = q\}$,

$L_i = \{a_{i1}a_{i6} = q_3^{-1}q_i, \; a_{i5}a_{i2} = q_2^{-1}q_i, \; a_{i6}a_{i3} = q_i\}$.

$n=4, \quad G=\{g_1, g_2, g_3, g_4\}.$

$A_i=\{a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4}, a_{i5}, a_{i6}, a_{i7}, a_{i8}\},$

$K_i=\{a_{i8}a_{i7}=a_{i6}, \ a_{i6}a_{i5}=a_{i4}, \ a_{i4}a_{i3}=a_{i2}, \ a_{i2}a_{i1}=g_i\},$

$L_i=\{a_{i8}a_{i5}=g_4^{-1}g_i, \ a_{i7}a_{i4}=g_3^{-1}g_i, \ a_{i6}a_{i3}=g_2^{-1}g_i \quad a_{i4}a_{i1}=g_i\}.$

Литература

1. Гварамия А.А., Глухов М.М. Решение основных алгоритмических проблем в некоторых классах квазигрупп с тождествами. – Сиб. мат. журнал, 1969, т.10, № 2, с.297–317.
2. Глухов М.М. R-многообразия квазигрупп и луп. – В кн.: Вопросы теории квазигрупп и луп. – Кишинев, 1971, с.37–47.
3. Глухов М.М. Свободные разложения и алгоритмические проблемы в R-многообразиях универсальных алгебр. Мат. сб., 1971, т.85 (127), № 3, с.307–338.
4. Глухов М.М., Тимофеенко Г.В. Группы автоморфизмов конечно определенных квазигрупп – XУ Всесоюзная алгебраическая конференция:Тезисы докладов. – Красноярск, 1979, ч.2, с.35.

Поступила 20 октября 1984 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ ОТОБРАЖЕНИЯ
Сборник научных трудов

Рецензенты: А.Мышкис, д-р физ.-мат. наук, проф. МИИТ
Е.Царьков, д-р физ.-мат. наук, зав.каф. СК ВМ РПИ;
Л.Кацнельсон, канд.физ.-мат.наук, зав.лаб. мат.модел. электр. цепей

Редакторы: Е.Энгельсон, Р.Павлова
Технический редактор А.Яковича
Корректор Е.Римша

Подписано к печати 01.08.85. ЯТ 21548. Ф/б 60x84/16.
Бум. №3. 12,3 физ.печ.л. 11,4 усл.печ.л. 8,5 уч.-изд.л.
Тираж 400 экз. Зак.№ 1218 Цена 1 р. 30 к.

Латвийский государственный университет им. П.Стучки
226098 Рига, б. Райниса, 19
Отпечатано в типографии, 226050 Рига,ул.Вейденбаума,5
Латвийский государственный университет им. П.Стучки

УДК 513.83

О пространствах с точечно-счетной базой.
Архангельский А.В., с. 3-7.

Цель статьи - нахождение достаточно общих условий, при которых из наличия в псевдокомпактном пространстве точечно-счетной (псевдо-)базы следует существование в нём и счетной базы. Показано, в частности, что каждая точечно-счетная база в сильно псевдокомпактном пространстве счетна и, следовательно, это пространство является метризуемым компактом. (Сильно псевдокомпактным называется вполне регулярное пространство X, в котором существует всюду плотное подмножество У такое, что для каждого счетного множества A⊂У найдется содержащее его множество B⊂X, замыкание которого псевдокомпактно). Библ. - 5 назв.

УДК 517.988.52

Замечание к принципу сравнения Красносельского для компактных групп.
Баланов З.И., Винниченко С.В., с. 8-9.

Построен пример векторных полей, эквивариантных и полугомотопных относительно бесконечной группы, изоморфной компактной вполне несвязной, которые, тем не менее, имеют различные вращения. Библ. - 4 назв.

УДК 519.46

Изоморфизм треугольных разложений представлений алгебр Ли (р-алгебр Ли) и ассоциативных алгебр.
Брегман А.Х., с. 10-17.

Доказывается, что любые два треугольных разложения произвольного точного представления алгебры Ли обладают сопряженными продолжениями. Соответствующее утверждение в категории представлений групп доказано С.М.Вовси, в категории полуавтоматов-Л.А.Альшанским. Библ. - 6 назв.

УДК 513.83

Метод жестких спектров в теории паракомпактных σ-пространств.
Брегман Ю.Х., с. 18-32.

В работе развивается метод обратных спектров в классе паракомпактов с σ-дискретной сетью. Получена спектральная характеристика паракомпактных σ-пространств, исследованы их размерностные свойства, доказаны некоторые факторизационные теоремы. Библ. - I5 назв.

УДК 513.83

О доминирующих последовательностях и узких пространствах.
Веколер А.И., с. 33-43.

Продолжается изучение введенных ранее автором понятий доминирующей последовательности, узкого топологического пространства, стержня. Приводится ряд характеристических свойств доминирующих последовательностей в широких классах пространств. Дана абстрактная характеризация твердого стержня в бикомпакте. Построен пример однородного узкого пространства. Библ. - 8 назв.

УДК 513.83

О пространствах компактных подмножеств нуль-мерных польских пространств.
Выборнов А.Н., с. 44-54.

Получен ряд классификационных теорем об экспонентах нульмерных полных сепарабельных метрических пространств. В доказательстве большинства из них используется полученная автором теорема о продолжении гомеоморфизмов в таких пространствах. Библ. - I0 назв.

УДК 513.83

Характеризация коллективно-нормальных пространств, связанная с расходящимися направленностями.
Гольдман М.А., Павлова С.L., с. 55-58.

Получена характеризация коллективно-нормальных пространств в терминах расходящихся направленностей. Библ. -
назв.

УДК 510.644, 513.83

нечетких предикатах на нечетких множествах (на примере топологического пространства).
Дискин З.Б., с. 59-70.

В работе предлагается схема, по которой топология данного топологического пространства естественным образом индуцирует "структуру топологического типа" на множестве всех его нечетких подмножеств. Библ. - 4 назв.

УДК 513.88

Нормально разрешимые операторы с бесконечной (n,d)-характеристикой.

Иванов Б.Ф., с. 71-75.

Строятся примеры нормально разрешимых сингулярных интегральных операторов и операторов Теплица с бесконечной (n,d)-характеристикой. Библ. - 6 назв.

УДК 517.98

Об одном обобщении понятия вогнутости по М.А.Красносельскому.

Катков М.Л., с. 76-85.

В данной заметке дается определение оператора медленного роста. Это определение позволяет выделить классы монотонных операторов, отличные от класса вогнутых, с такими же свойствами, что и у вогнутых операторов. Библ. - 4 назв.

УДК 517.98

Существование неподвижных точек отображений как проблема оптимизации.

Лиепиньш А.Х., с. 86-90.

Существование неподвижной точки для функции, отображающей метрическое пространство в себя, исследуется как проблема минимизации расстояния между точкой и её образом. Библ.-5 назв.

УДК 513.831

О псевдокомпактных пространствах.

Матвеев М.В., с. 91-99.

Изучается вопрос, какие пространства представимы в виде пересечения определенных семейств псевдокомпактных подпространств своего Стоун-Чеховского расширения. В частности, показано, что каждое (вполне регулярное) пространство X представимо в виде пересечения двух псевдокомпактных подмножеств в βX. Библ. - 8 назв.

УДК 519.55

Сплайны, определяемые обыкновенным линейным дифференциальным оператором и оператором кратного интерполирования.
Мельник С.И., с.100-104.

Приводится способ характеризации пространства сплайнов $S(T,A)$ в случае, когда оператор T является линейным дифференциальным оператором, а A — оператором кратного интерполирования общего вида; характеризуются некоторые частные виды сплайнов.
Библ. - 2 назв.

УДК 512.546 + 513.83

Один пример кружевной топологической группы.
Пестов В.Г., с.105-107.

Построен пример топологической группы, пространство которой является кружевным и топологию которого нельзя ослабить до метризуемой групповой топологии.
Библ. - 4 назв.

УДК 513.6

Разложение типа Шевалле-Мацумото для скрученных групп Шевалле.
Плоткин Е.Б., с.108-118.

Работа посвящена изучению скрученных групп Шевалле над произвольным коммутативным кольцом. В ней доказывается аналог теоремы Шевалле-Мацумото для всех таких групп, за исключением группы типа ${}^2A_{2l}$.
Библ. - 14 назв.

УДК 517.97

К G-сходимости квазилинейных эллиптических операторов.
Райтум У.Е., с.119-129.

Рассматриваются вопросы G-сходимости для квазилинейных эллиптических систем уравнений второго порядка дивергентного вида. Выделены классы соответствующих опе-

раторов с неограниченными по пространственным переменными младшими коэффициентами, для которых имеет место G-компактность. Показано, что предельные в смысле G-сходимости операторы принадлежат аналогичному классу операторов.
Библ. - 6 назв.

УДК 517.52

Обратное преобразование Фурье с использованием некоторых специальных разложений изображения.
Смотров Я.А., с.130-136.

Предложен вариант приближенного метода обращения преобразования Фурье, в котором оригинал ищется в виде суммы ряда по функциям Бесселя. Коэффициенты этого ряда при малых индексах находятся численным интегрированием, а при больших - по асимптотическим формулам.
Библ.-5 назв.

УДК 513.83

О свойствах Линделёфа пространств функций.
Соколов Г.А., с.137.

Найдены некоторые условия на пространство X, при которых пространство функций $C_p(X)$ в топологии поточечной сходимости является Линделефовым. Библ. - 3 назв.

УДК 519.21

О стабилизации решений дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве импульсными случайными возмущениями.
Царькова В.Н., с. 138-142.

Изучается асимптотическая устойчивость решений линейных операторно-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве при импульсных случайных возмущениях. Получены необходимые и достаточные условия устойчивости в среднем квадратичном. Библ. - 1 назв.

УДК 513.83

Два замечания о пространствах межности.
Цирулис Я.П., с.143-145.

Заметка является дополнением к РЖ Мат., 1983, 11А660 и использует введенные там терминологию и обозначения. Приведен пример, показывающий, что не каждая точка, внутренняя в топологии межности, будет внутренней относительно самой межности в том смысле, как это определяется в цитированной работе. Дана также новая характеристика отношений линейной межности. Библ.-1 назв.

УДК 513.83

Образы произведений.
Чертанов Г.И., с.146-157.

В статье - два параграфа. В § 1 изучается кардинальный инвариант $C\ell(X)$, названный "консервативной клеточностью", и свойство отображений, заданных на произведениях пространств, названное "накрытием образа $\mathcal{T}$-оболочкой точки произведения". В § 2 доказывается, что псевдо-$\mathcal{T}$-компактность (в частности, псевдокомпактность) - инвариант для пространств, связанных замкнутым и неприводимым непрерывным отображением, и что псевдокомпактное φ-пространство - диадический бикомпакт. Библ. - 6 назв.

УДК 513.83

Нечеткий интервал и функциональная характеристика нечетких кружевных пространств.
Шостак А.П., с.158-164.

В работе приводится описание нечетких кружевных пространств посредством нечетко непрерывных отображений, заданных на нем и принимающих значение в нечетком интервале. Библ. - 12 назв.

УДК 517.5

О некоторых семействах полиномов двух аргументов.
Энгелис Г.К., с. 165-169.

Показано, что полиномиальные собственные функции некоторых операторов в частных производных обладают свойствами ортогональности и рекуррентными соотношениями, аналогичными некоторым свойствам классических ортогональных полиномов. Библ. - 2 назв.

УДК 512.548

О группах автоморфизмов конечно определенных квазигрупп из R-многообразий.
Гварамия А.А., Глухов М.М., с. 170-178.

Доказывается, что всякая конечная группа изоморфна группе автоморфизмов подходящей конечно-определенной квазигруппе из R-многообразия квазигрупп. Библ. - 4 назв.

ABSTRACTS

On spaces with a point-countable base.
Arhangelskii A.V., p. 3-7.

The aim of the paper is to establish general conditions under which the existence of a point-countable (pseudo-)base in a pseudocompact space implies the existence of a countable base in it. Specifically, it is proved that every point-countable base in a strongly pseudocompact space is countable and hence the space is a metrizable compactum. (A completely regular space X is called strongly pseudocompact if there exists an everywhere dense subspace Y such that every countable set $A\subset Y$ is contained in a countable set $B\subset X$ with a pseudocompact closure). Bibl. - 5 names.

On Krasnoselsky principle of comparison for compact groups.
Balanov Z.I., Vinnichenko S.V., p. 8-9.

The present note is directly connected with the joint article due to the first of the authors and S.D.Brodsky, where the well-known Krasnoselsky principle of comparison was extended from the instance of finite cyclic group action to the instance of arbitrary finite and infinite group, isomorphic to the compact, but not completely disconnected one.

Vectorial fields, equivariant and semihomotopic with reference to the infinite group, isomorphic to the compact and completely disconnected one, which, however, have different rotations are constructed. Bibl. - 4 names.

Isomorphisms of the triangle decompositions of representations of Lie algebras (Lie p-algebras) and associative algebras.

Bregman A.H., p. 10-17.

It is proved that any two triangle decompositions of an arbitrary faithful representation of a Lie algebra posess conjugate extensions. The parallel fact for the category of group representations by S.M.Vovsi and for the category of semiautomata by L.A.Alshanski was established. Bibl. - 6 names.

Method of rigid systems in the theory of paracompact σ-spaces.

Bregman Ju.M., p. 18-32.

The method of inverse systems is developed in the class of paracompacta with a σ-discrete network. Paracompact σ-spaces as limits of inverse systems are characterized. Some dimensional properties are established for them and factorization theorems are proved. Bibl. - 15 names.

On dominant sequences and narrow spaces.

Vekslar A.I., p. 33-43.

The notions of a dominant sequence, a narrow space and a pivot were introduced and studied by the author earlier. Here this study is continued. Some characterizations of dominant sequences and solid pivots are given. An example of a homogeneous narrow space is presented. Bibl. - 8 names.

On spaces of compact subspaces of zero-dimensional polish

spaces.
Vib nov A.N., p. 44-54.

A series of classification theorems about exponents of zero-dimensional complete separable metric spaces is obtained. The proofs of these results are based on a theorem about the extension of homeomorphisms in such spaces. Bibl. - 10 names.

A characterization of collectionwise normal spaces by means of divergent nets.
Goldman M.A., Pavlova S.V., p. 55-58.

A characterization of collectionwise normal spaces by means of divergent nets is obtained. Bibl. - 5 names.

On fuzzy predicates fuzzy in sets (the case of a topological space considered).
Diskin Z.B., p. 59-70.

We demonstrate that in the set of all fuzzy subsets of a topological space a fuzzy topology is induced by the topology. Bibl. - 2 names.

Normally solvable operators with an infinite (n,d)-charactiristic.
Ivanov B.F., p. 71-75.

Normally solvable singular integral operators as well as Teplicz operators with an infinite (n,d)-characteristic are constructed. Bibl. - 6 names.

On a generalization of the concept of concavity in the sense of Krasnoselsky.
Katkov M.L., p. 76-85.

A concept of an operator of the slow growth is introduced. Using it we are able to hand out classes of monotone operators with properties of concave operators, however, different from the class of concave operators. Bibl. - 4 names.

Existence of fixed points of mappings as a problem of optimization.
Liepiņš A.H., p. 86-90.

Existence of a fixed point for a selfmap of a metric space as a problem of minimization of the distance between a point and its image is studied. Bibl.-5names.

On pseudocompact spaces.
Matvejev M.V., p. 91-99.

The author studies the problem which spaces are representable as intersections of special families of pseudocompact subspaces in their Stone-Čech compactifications. Specifically, it is shown that every completely regular space X is an intersection of two pseudocompact subspaces of βX. Bibl. - 8 names.

Spline spaces, defined by a linear differential operator and an operator of the repeated interpolation.
Melnik S.I., p. 100-104.

We describe a method how to characterize the spline space S(T,A), where T is a linear differential operator and A is an operator of the repeated interpolation in its general form. Some special spline spaces are characterized. Bibl. - 2 names.

An example of a stratifiable topological group.
Pestov V.G., p. 105-107.

The paper contains an example of a topological group the corresponding space of which is stratifiable and whose topology cannot be weakened to a metrizable group topology. Bibl. - 4 names.

Chevalley-Matsumoto type decomposition for twisted Chevalley groups.
Plotkin J.B., p. 108-118.

Twisted Chevalley groups over an arbitrary commutative ring are studied. Theorem, analoguous to the Chevalley-Matsumoto one for all such groups except the groups of ${}^2A_{2l}$ type is proved. Bibl. - 14 names.

On the G-convergence of quazilinear elliptic operators.
Raitums U.J. p. 119-129.

The G-compactness of the operators, corresponding to the second order divergent type quasilinear elliptic systems with unbounded first order terms, under some natural assumptions is proved. It is also shown that the considered classes of operators are G-closed. Bibl. - 6 names.

Inversion of the Fourier transform by means of some special expansions of the transformed function.
Smotrovs J.A., p. 130-136.

A variant of an approximate method for the inversion of the Fourier transform, where the original is produced by a series of Bessel functions, is proposed. The coefficients of this series are obtained by numerical integration in the case of small index numbers and by means of asymptotic formulas in the case of high index numbers. Bibl. - names.

On Lindelof properties of functions spaces.
Sokolov G.A., p. 137.

The author finds some conditions on a space X under which the space $C_p(X)$ of real-valued functions endowed with the pointwise convergence topology is Lindelöf. Bibl. - 3 names.

Stabilization of the solutions of differential equations in a Hilbert space by stochastic impulse perturbation.
Carkova V.N., p. 138-142.

The asymptotic stability properties of the solutions of linear operator differential equations in a Hilbert space under stochastic impulse perturbation are studied. Conditions necessary and sufficient for the stability in the mean square are obtained. Bibl. - 2 names.

Two notes on betweenness spaces.
Cirulis J.P., p. 143-145.

The notion of betweenness space was introduced by the author in RŽMat 1983, 11A660. Here, we make some explanatory remarks concerning the definition of an inner point of a subset of a betweenness space, and give new characteristic of linear betweenness relations. Bibl. - 1 name.

Images of products.
Čertanov G.I., p. 146-157.

The first one of the two sections is devoted to a new cardinal function CC(X) called"the closure-preserving cellularity" and to a property of mappings defined on products of spaces and called "the covering of an image by a τ-envelope of a product's point". In the second section we prove that pseudo-τ-compactness (in particular, pseudocompactness) is an invariant of spaces which are connected by closed irreducible mappings and that every pseudocompact φ-space is a dyadic compactum. Bibl. - 6 names.

Fuzzy unit interval and a functional characterization of fuzzy stratifiable spaces.
Šostak A.P., p. 158-164.

The paper presents a functional characterization of fuzzy stratifiable spaces by means of fuzzy continuous mappings into the fuzzy unit interval. Bibl. - 12 names.

On some sets of polynomials of two variables.
Engelis G. K., p. 165-169.

Some ortogonality properties and recurrent formulae, analogous to those of the classical orthogonal polynomials, are proved for the polynomial eigenfunctions of certain operators in partial derivatives. Bibl. - 2 names.

On groups of automorphisms of finitly defined quasigroups from R - manifolds.
Gvarenia A.A., Gluhov M.M., p. 170-178.

It is proved that any finite group is isomorphic to the group of automorphisms of some well chosen finitly defined quasigroup from the R - manifold of quasigroups. Bibl. - 4 names.