分类号______________ 密级______________

UDC ______________ 编号______________

中国科学院研究生院

硕士学位论文

李群在数值求解偏微分方程中的新应用

胡 城

指导教师 游亚戈 研究员 硕士 中国科学院广州能源研究所

吴必军 副研究员 博士 中国科学院广州能源研究所

申请学位级别 硕士 学科专业名称 流体机械及工程

论文提交日期 2006.6 论文答辩日期 2006.6

培养单位 中国科学院广州能源研究所

学位授予单位 中国科学院研究生院

答辩委员会主席______________

摘　要

随着计算机技术的提高及数值计算方法的不断完善，数值计算逐渐成为研究海洋工程领域内水波动力学的有效手段，以前难以处理的非线性现象研究课题在数值手段的帮助下也出现了求解的可能。本文所研究的李群理论在非线性偏微分方程数值求解中的应用，便是这些手段中的一种。本文的选题背景为纯粹数学理论的应用与研究，通过对非线性力学方程求解方法研究现状的分析，结合李群在偏微分方程中的应用理论，提出一种偏微分方程的降维方法：从无穷小变换出发，构建保持偏微分方程不变性的李群，导出偏微分方程的降维系统，结合非经典方法中的解曲面条件，避开群不变量解的直接求解，同时实现偏微分方程的降维简化，得出原偏微分方程的数值描述。在此基础上，本文在应用实例中通过与某些偏微分方程已知精确解的比较，结果验证了该方法的合理性及有效性。在利用该方法求解几个典型的非线性水波动力学偏微分方程时，得出了一系列关于这些方程的新的数值解，并由此揭示了一些有意义的水波物理现象。

本文研究工作的意义在于丰富了偏微分方程的数值解法，为利用数值方法处理非线性问题提供了新思路，通过对水波动力学方程的求解，为海洋潮流、波浪能的基础研究做出了必要的理论铺垫，对海洋工程的实际应用也具有一定的参考价值。

关键词：李群　无穷小变换　偏微分方程　数值方法　对称分析

ABSTRACT

Hu Cheng(Fluid Machinery and Engineering)

Directed by You Yage, Wu Bijun

With the development of computer technology and numerical method, water wave dynamics, especially the nonlinear theory research in the field of ocean engineering become more convenient. In this thesis, we research the application of Lie group theory united with numerical method in the solution procedure of nonlinear partial differential equations(PDEs). The basis of this thesis is the application and investigation of the pure mathematic theory. We offer a new method to obtain reduced system of PDEs, based on the theory of application of Lie group to PDE. The proccedures of our method are as follows, based on infinitesimal transformation, we construct the symmetries of Lie group under the invariance of PDEs, and derive a reduction system of PDEs. Side conditions are used in obtaining the reduced system of PDEs, avoiding solving the characteristic equations to get invariants. Numerical solutions are attained by solving the reducted system at last. The comparison between our solutions and the known exact solutions of PDEs has been testified the validity and availability of our method. The solutions of several classical nonlinear water wave dynamic equations unveil some physical phenomenona based on water wave theory.

The works presented in this thesis provide an idea in processing the nonlinear problems, accumulate some theory foundation for the basic research of ocean tidal and wave energy and bring important references to the application of ocean engineering.

Key words: Lie group; infinitesimal transformation; partial differential equation(PDE) numerical method; symmetry analysis

目 录

第 1 章　绪 论

1.1 引 言

海洋能指依附在海水中的可再生能源，海洋通过各种物理过程或化学过程接收、储存和散发能量，这些能量以潮汐、波浪、温差、盐差、海流等形式存在于海洋之中。鉴于能量转换效率及环境影响，波浪能和海流能更具发展潜力。目前世界上许多国家都已经致力于这方面的研究[1,2]，这其中包括两方面的工作，一是波浪、海流能能量转换俘获技术的研究，二是波浪、海流本身的运动特性及能量形式的基础研究。

波浪及海流的运动与水波动力学息息相关，它是流体力学中的重要分支，自上世纪 80 年代以来此领域的研究就十分活跃[3,4]。目前，对水波动力学的非线性现象的研究也已经相当广泛，例如: 强迫孤立子，先导孤立子，分层流、旋转流和变截面流中的孤立子，波的失稳而导致分岔，振动激励容器中波的共振引起的分岔和混沌等。由于国际上开发海洋和减轻自然灾害的需要，各国普遍加强了非线性波的研究和应用。例如早在 60 年代 O.M. Phillips 就从湍流的级串现象得到启示，提出了波-波相互作用的原理，并应用于海洋上波浪谱的演化；对于由风输入的能量以及因底部磨擦与波浪破碎引起的耗散过程的认识也在深化，在此基础上发展了第三代风浪预报模式(WAM)，可成功地预报全球与区域的海况[5]。

而在研究水动力学非线性现象的过程中通常会牵涉到许多非线性数学物理方程，这些隶属于流体力学的微分方程早在 19 世纪就已经建立，且经实践证明能够用来很好的描述各种数学物理现象，如何求解这些方程并将结果应用于工程实际对于海洋波浪能的利用具有重要意义。

1.2 非线性力学方程求解方法的研究现状

目前，用于非线性微分方程的求解方法大多分为两大类：一是解析方法[6~10]；二是数值方法[11~13]。

数值方法近年来发展极快，现已经成为流体力学各分支中不可缺少的工具。有限差分、有限元、有限体积、边界元、谱方法[14,15]和辛算法[16]等方法的出现，推动了计算流体力学的发展，并由此建立了较完整的理论体系，即稳定性理论、

数值耗散和色散分析、网格生成和自适应技术、迭代和加速收敛方法；提出了求解自由边界问题的多种拉格朗日和欧拉的混合方法，计算包含复杂激波系的复杂流场的高精度格式等。现将具有代表性的几种数值方法简单介绍如下：

有限差分方法(FDM)[12]是计算机数值模拟最早采用的方法，至今仍被广泛运用。该方法以 Taylor 级数展开等方法，把控制方程中的导数用网格节点上的函数值的差商代替进行离散，从而建立以网格节点上的值为未知数的代数方程组。该方法是一种直接将微分问题变为代数问题的近似数值解法，数学概念直观，表达简单，是发展较早且比较成熟的数值方法。

有限元方法(FEM)[17]的基础是变分原理和加权余量法，其基本求解思想是把计算域划分为有限个互不重叠的单元，在每个单元内，选择一些合适的节点作为求解函数的插值点，将微分方程中的变量改写成由各变量或其导数的节点值与所选用的插值函数组成的线性表达式，借助于变分原理或加权余量法，将微分方程离散求解。采用不同的权函数和插值函数形式，便构成不同的有限元方法。有限元方法最早应用于结构力学，后来随着计算机的发展慢慢用于流体力学的数值模拟。

有限体积法(FVM)[18]又称为控制体积法。其基本思路是：将计算区域划分为一系列不重复的控制体积，并使每个网格点周围有一个控制体积；将待解的微分方程对每一个控制体积积分，便得出一组离散方程。其中的未知数是网格点上的因变量的数值。为了求出控制体积的积分，必须假定值在网格点之间的变化规律，即假设值的分段的分布剖面。从积分区域的选取方法看来，有限体积法属于加权剩余法中的子区域法；从未知解的近似方法看来，有限体积法属于采用局部近似的离散方法。简言之，子区域法属于有限体积法的基本方法。

边界元法(BEM)[19]是在有限元法之后发展起来的一种较精确有效的工程数值分析方法。又称边界积分方程-边界元法。它以定义在边界上的边界积分方程为控制方程，通过对边界分元插值离散，化为代数方程组求解。它与基于偏微分方程的区域解法相比，由于降低了问题的维数，而显著降低了自由度数，边界的离散也比区域的离散方便得多，可用较简单的单元准确地模拟边界形状，最终得到阶数较低的线性代数方程组。又由于它利用微分算子的解析的基本解作为边界积分方程的核函数，而具有解析与数值相结合的特点，通常具有较高的精度。

利用解析法求解的问题主要是线性现象，而基于分析方法的渐近展开法日趋成熟，多种渐近法[20,21](如匹配展开法、多重尺度法、平均变分法等)被广泛运用于求解弱非线性问题。此外，试探函数法、行波法、相似变换和自相似法、特殊变换法(特征线方法、因变量或自变量变换、Hopf-Cole 变换、Hirota 双线性法)、逆散射法、Backlund 变换法、Darboux 变换法、常系数 Riccati 展开法等也有较多应用[22~26]。

抛开数值法及解析法范畴，纯粹数学中的泛函、群论、拓扑学、微分动力学等也不失为研究非线性问题的有效手段。本文正是结合群论研究李群在偏微分方程数值求解中的降维简化方法。

1.3 群 论[27~36]

群论起源于 19 世纪初期的几何学、18 世纪末期的数论及引入排列研究的代数方程论。1897 年，由 Burnside 创作的《Theory of Groups of Finite Order》一书的出版标志着群论的诞生，而 Heinrich Weber 在 1895 年出版的两卷代数书《Lehrbuch der Algebra》成为了群论的标准本，这些著作对 20 世纪群论的发展有着极其重要的影响意义。二十世纪以来，特别是爱因斯坦发现相对论之后，对称性的研究在物理学中越来越重要，而群论正是研究对称性的数学基础，因此倍受学者们的重视。

保持某种结构的对称集合即构成群。排列群[37]是特别重要的一类群，一般而言，每个群都是排列群，关键在于作用在集合上的关系，许多组合问题都可简化至对称群的问题，甚至 Rubik 立方都可看作一种特殊的排列群；线性群[39](经典群)则是另一大类群，它在一个场或环[46]R 中可逆 $n\times n$ 矩阵群 GL_n(R)的子群，除了群 GL_n 本身，还包括单行列式矩阵的群 SL_n，正交群 0_n，经 R 自同构定义的相关群(酉群)；Abelian 群[40]也是一类重要的群，其元素可以交换，包括在场、环、向量空间中的加法群，群的分类非常精细，故关键在于辨别大 Abelian 群的结构，这与集合论相交迭。研究表明，Abelian 群挠率自由度大，具有序列或拓扑特征的附加结构。

有限群[41]应用广泛，有限群论作为 Lagrange 理论及 Sylow 论与数论有相似之处，20 世纪期间，研究者们的兴趣在于 p 次群及 p 次群与一般群的相互作用。在研究群的时候，需要检验大量的群(特别是子群及商群)的内部特性，例如群中

心或可换性、群扩展、自同构群或子群网格及其他相似结构、群之间的映射等。同时也引出其他值得注意的研究课题：可解群、幂零群、局部有限群及有内部特性产生的其他类群。

表示论[42]是群(特别是有限群和紧致群)研究的重要工具。一般说来，可将群看作排列群和线性群，从狭义上讲，从群到矩阵群 GL_n(R)可看作同态，群结构在表示上具有严格的限制，值得注意的则是群和其子群、正子群、代数子群、局部子群之间的表示论。表示论可看作其他 abelian 群的自同构群，而不是简单的复向量空间，模表示论研究的是在场中具有正特征向量空间的加法群。现代群论的处理方法包括如何使用从环子及函子得出的工具。同时，这也是表示论的一个应用实例，由于我们可以将群与同调群及上同调群相连，这为群模的辨别、延展构建、不变数的获得等提供了可能，而关键之处还在于投射模。平凡群模的焦点来自群本身，而群上同调可用于反映群的内部结构，比如群秩。由于同调论源于拓扑学，故其也可用于具有其他结构的群作用[47]。

代数系统与群[43](包括半群、带中性元的半群、广群)相比较具有更自由的结构，起源于分析学和拓扑学，例如拓扑空间的曲线组形成串联下的广群。半群组成一个大数学对象系，它们是可以进行结合二进制运算但不必可逆的集合，所有映射的集合形成半群，故可以从代数投影来研究半群，不同的半群具有不同的结构论及表示论。

有时一些群具有附加结构，其共同属性是具有一组因子的群，这与组合几何结构群作用相关。这种具有附加结构的群包括拓扑群和李群[47]。对于微分方程的分析研究，这些群即为调和分析，当然许多分析都调用在实线或复平面上的群作用，如傅立叶级数[44]，但也存在有序群和模糊群。其他数学对象上的群作用则将群论同其他数学分支联系起来，总体说来，关于群作用的问题将逐渐趋向于规范化。因此，我们可以作如下阐述：作用在向量空间的群为矩阵群的子群，这在线性代数中已有所研究；作用在域上的群为 Galois 群，这在域扩张领域已得到体现；作用在特殊低维拓扑空间的群产生簇论[45]；作用在欧几里得空间上的群则为我们展示了几何学的构成；作用在其他代数对象上的群是图形、网格、环块[46]等的对称群；另外一些特殊群作用具有特殊应用，如相对论。群论中一些公理化的问题还可以导出数理逻辑及集合论。

1.4 李群及李代数

李群是由挪威数学家 Sophus Lie[48]创立的一类连续变换群。1870 年前后，Lie 开始研究连续变换群[49]的概念，并用它们阐明微分方程的解，将微分方程进行分类。1874 年，他建立了李群的一般理论[50~52],一个李群可以表示成如下形式：

$$x_i' = \phi(x_1, x_2, \cdots x_n, a_1, a_2, \cdots a_n),\ \ i = 1, 2, \cdots n.$$

其中关对 x_i 和 a_i 都是解析的， x_i 是变量，而 a_i 是参数， $(x_1, x_2, \cdots x_n)$ 表示 n 维空间中的一点,变量或参数都取实数值或复数值。

李群是无限群[40]的一类，是迄今为止研究最为清楚的无限群。此概念是 Weyl 在 1928 年提出的，它是具有额外群特性的特殊群，具有簇的结构。所谓簇即是在局部类似于欧几里得空间的拓扑空间，可微簇是指在簇结构中具有足够的偏微分可微性及微积分的各种特征。李群研究[53~58]复合了微积分学、代数学、拓扑学等学科知识，研究过程一般从李群的整体研究简化至其局部结构研究，进一步将其局部结构研究简化至无穷小结构研究，从而在此基础上讨论对称变换方法，引入新的求解微分方程的数值方法。研究表明，李群对变换理论和微分方程的检验有着极其重要的作用。

李代数[59~63]是一类重要的非结合代数。非结合代数是环论的一个分支，与结合代数有着密切联系，结合代数的定义中把乘法结合律删去，就是非结合代数。李代数是 S. Lie 在 19 世纪后期研究连续变换群时引进的一个数学概念，它与李群的研究密切相关，在更早些时候，它曾以含蓄的形式出现在力学中，其先决条件是“无穷小变换”概念，这至少可追溯到微积分的发端时代。可用李代数语言表述的最早事实之一是关于哈密顿方程的积分问题。S. Lie 是从探讨具有 r 个参数的有限单群的结构开始的，并发现李代数的四种主要类型。法国数学家 É. 嘉当在 1894 年的论文中给出变数和参变数在复数域中的全部单李代数的一个完全分类。他和德国数学家基灵都发现，全部单李代数分成 4 个类型和 5 个例外代数，É. 嘉当还构造出这些例外代数。É. 嘉当和德国数学家 Weyl 还用表示论来研究李代数，后者得到一个关键性的结果，“李代数”这个术语就是 1934 年由 Weyl 引进的。随着时间的推移，李代数在数学以及古典力学和量子力学中的地位不断上升，到 20 世纪 80 年代，李代数已不仅仅被理解为群论问题线性化的工具，它

还是有限群理论及线性代数中许多重要问题的来源。可见，李代数的理论不断得到完善和发展，其理论与方法已渗透到数学和理论物理的许多领域。

1.5 李群在微分方程中的应用[64]

常微分方程的积分是李群理论最有意义的应用之一，李群的奠基人 S. Lie 的基本思想就是：对于一个常微分方程系统，如果知道了它的足够大的对称群，则可通过积分来求出它的通解，具体的说，如果知道了一个微分方程的一个单参数对称群，一阶的方程就可以通过积分求解，高阶的方程则可以降阶。

偏微分方程的群不变解[65~67]。偏微分方程求解的常用的一种方法是在求方程的某些类型的解时，可将问题转化为求解常微分方程，即当求方程的一个对称群的不变解时，方程可约化为常微分方程，具体约化时，不需要找到坐标变换，只需要找到群的不变量，而寻找群的不变量不一定要知道群本身，只需要找到群的生成元就行了，当方程的自变量的个数多于两个时，方程虽不能化为常微分方程，但方程的自变量个数将减少一个。

利用群的不变性来寻求常微分方程和偏微分方程的解的关键在于利用延拓理论[68]将微分方程的问题转化为代数方程的问题。如何使微分方程的不变群与生成元的关系以及求不变群的群不变解变得简明且易于应用就显得特别重要了，这就是微分方程的对称研究课题[69~74]。

对称分析始于 19 世纪中期，S. Lie 和 Klein 两位数学家对对称理论有着突出贡献，S. Lie 发明了对代数和微分方程的检验对称理论，Klein 进一步研究了函数对称应用的代数部分。利用 S. Lie 的方法可以对微分方程进行新的分类，Lie 理论[75]的主要目的在于应用其对称特性来求解微分方程，但其手动计算过程将非常的繁琐，所以初期很少有人使用这种方法来解决实际问题，直到 1950 年，Birkhoff 将此理论应用于水动力学的计算，近年来，Lie 理论引起许多人的关注，在非线性微分方程的研究领域尤为活跃。相信随着计算机计算能力的快速发展与提高、计算机算法的改进、计算机符号语言的使用，Lie 理论的应用将越来越广泛。

微分方程的对称分析是基于微分算子的分析，这些算子包括常微分、全微分、Fréchet 导数、Euler-Lagrange 导数以及主算子的延拓。而对称分析的基点在于微分方程的延拓，不幸的是在 *Mathematica*[76]中没有作为微分算子的延拓指令，不同类型的导数在对称分析的微积分学中有着不同的应用[77~80]，这将在本文第 2

章应用李群求解偏微分方程的理论基础中得到体现。

1.6 本文的工作

从研究现状中可以看出，在非线性问题的研究中，传统的数值方法、解析方法的应用都很丰富，而关于纯粹数学理论的应用的研究则相对匮乏。本文以此为出发点，结合李群在偏微分方程中的应用理论，探索一种新的非线性偏微分方程数值求解简化方法，对流体力学尤其是水波动力学在海洋工程中的应用极具参考价值，本文的主要内容安排如下：

本章分析了非线性力学方程的求解方法现状，简单介绍了群论的基本理论、分类、特性及其应用；由此进一步阐述了李群作为本文工作的研究起点的一些基本概念、原理、以及它在微分方程求解中的应用。

第 2 章详细讨论了李群应用于偏微分方程求解的理论基础，通过对求解过程中边界条件问题的思考，引出微分系统简化的新思路，为本文研究工作的展开作好了铺垫。

第 3 章阐述了利用 *mathematica* 构建对称群的基本过程，提出了本文的新方法，并从理论上证明了该方法在数值求解偏微分方程时的可行性、合理性及新颖性，然后给出了本文方法的求解思路及步骤，最后利用本文方法对几个在水波动力学中具有代表性的偏微分方程进行了简化降微，并在单微空间上数值求解了这些方程，得出一些具有物理实际意义的数值解，再将这些解与解析精确解相比较，从而进一步论证了本文方法的正确性，最后结合物理实际讨论了这些解的特性及意义。

第 4 章对本文工作进行了总结，并提出了下一步的工作设想和展望。

参考文献

[1] Falnes, L and Lovseth, J. "Ocean Wave Energy", Energy Policy, vol. 19, No. 8, p. 768~775, 1991.

[2] You Y G et al. Wave Energy Study in China. China Ocean Engineering,2003,17(1):101~109.

[3] Alex D.D. Craik. The Origins of Water Wave Theory. Annual Review of Fluid Mechanics, 2004,36:1~28.

[4] Chiang C. Mei, The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves, Advanced Series one Ocean Engineering-Volume 1, World Scientific.
[5] 国家自然科学基金委员会，自然科学学科发展战略调研报告—力学，北京，科学出版社，1997.
[6] Ablowitz M J,Zepetella A, Explicit solution of Fisher`s equation for a special wave speed, Bull Math Bial, 1979,41(4):835~840.
[7] Abdlkaser M A, Travelling wave solution for a generalized Fisher equation, J Math Anal Appl, 1982,85(2):287.
[8] LU Bao-quan et al, Solitary wave solutions of some systems of coupled nonlinear equations, Phys Lett A, 1993,180(1-2):61.
[9] LU Hong-jun, WANG Ming-xin, Exact soliton solutions of some nonlinear physical models, Phys Lett A, 1999,255(4-6):249.
[10] FAN En-gui, ZHANG Hong-qiang, A note on the homogenerous balance method, Phys Lett A, 1998,246(5):403.
[11] Hamming R W, Numerical Methods for Scientists and Engineers(2nd Edition), New York: McGraw・Hill, 1973.
[12] L. Lapidus, G. Pinder, Numerical Solution of Partial Differential Equation in Science and Engineering, New York:Mcgraw-bill Inc.,1981.
[13] D.J.Kouri, D.S.Zhang, Wei G.W., et al., Numerical Solutions of Nonlinear Wave Equation, Physical Review, 1999(59):1274~1277.
[14] Glenn Ierley, Spectral methods in time for a class of parabolic partial differential equations, Journal of Computational Physics, 1992,100(2):434.
[15] John Strain, Spectral Methods for Nonlinear Parabolic Systems, Journal of Computational Physics, 1995, 122(1),1~12.
[16] 曾文平,孔令华, 辛算法的发展历史与现状,华侨大学学报(自然科学版), 2004, 25(2):113~117.
[17] O.C.Zienkiewicz, The Finite Element Method, New York:Mcgraw-bill, 1977.
[18] Carl Ollivier-Gooch, A toolkit for numerical simulation of PDEs: I. Fundamentals of generic finite-volume simulation, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2003, 192(9~10):1147~1175.
[19] Y. Y. Wu, S. J. Liao and X. Y. Zhao, Some notes on the general boundary element method for highly nonlinear problems, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2005, 10(7):725~735.
[20] 谢定裕, 渐近方法—在流体力学中的应用[M], 友谊出版公司, 1983.
[21] Howes F A, Shao S, Asymptotic analysjs of model problems for a coupled system, Nonlinear Anal, 1989, 13(9):1013~1024.
[22] Darboux Transformation in Soliton Theory and Its Geometric Applications，ed. C. H. Gu，Scientific and Technical Publishers, Shanghai(1999).
[23] Sudipta Nandy, Inverse scattering approach to coupled higher-order nonlinear Schrödinger equation and N-soliton solutions, Nuclear Physics B, 2004, 679(3):647~659.
[24] Hirota R, Satsuam J, Soliton solutions of a coupled Korteweg-de Vries equation, Phys Lett A, 1981,85(8-9):407.
[25] Robert Conte, Universal invariance properties of Painlevé analysis and Bäcklund transformation in nonlinear partial differential equations, Physics Letters A,

1988,134(2):100~104.
[26] Alice Gorguis, A comparison between Cole–Hopf transformation and the decomposition method for solving Burgers' equations, Applied Mathematics and Computation, 2006,173(1):126~136.
[27] B Chandler and W Magnus, The history of combinatorial group theory : A case study in the history of ideas (New York-Berlin, 1982).
[28] R Franci, On the axiomatization of group theory by American mathematicians : 1902-1905, Amphora (Basel, 1992), 261~277.
[29] J Gray, Otto Hölder and group theory, Math. Intelligencer 16 (3) (1994), 59~61.
[30] B M Kiernan, The development of Galois theory from Lagrange to Artin, Archive for History of Exact Sciences 8 (1971), 40~154.
[31] I Kleiner, The evolution of group theory: a brief survey, Mathematics magazine 59(4) (1986), 195~215.
[32] J J Nicholson, Otto Holder and the Development of Group Theory and Galois Theory (Ph.D. Thesis Oxford, 1993).
[33] L Novy, Origins of Modern Algebra (Prague, 1973).
[34] K V H Parshall, A study in group theory : Leonard Eugene Dickson's 'Linear groups', Math. Intelligencer 13 (1) (1991), 7~11.
[35] H Wussing, The Genesis of the Abstract Group Concept (Cambridge, MA., 1984).
[36] P. Cvitanovi´c, Group Theory(Princeton Univ.Press, Princeton NJ 2003); http://www.nbi.dk
[37] P.J. Cameron, Permutation Groups, London Math. Soc. Stud. Texts, vol. 45, Cambridge Univ. Press, 1999.
[38] D.L. Armacost, The structure of locally compact Abelian groups, in: Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 68,Marcel Dekker, Inc, New York, 1981.
[39] D.S. Passman, Free products in linear groups, Proc. Amer. Math. Soc. 132 (2004) 37~46.
[40] I. Kaplansky, Infinite Abelian Groups, University of Michigan Press, 1969.
[41] I.M. Isaacs, Character Theory of Finite Groups, Academic Press, New York, 1976.
[42] R.P. Boyer, Representation theory of infinite-dimensional unitary groups, in: Representation Theory of Groups and Algebras, in: Contemp. Math., vol. 145, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, pp. 381~391.
[43] J. Almeida, Finite Semigroups and Universal Algebra,World Scientific, Singapore, 1995.
[44] W. Rudin, Fourier Analysis on Groups, Interscience Publishers, 1962.
[45] E.G. Zelenyuk, I.V. Protasov, Topologies on abelian groups, Math. USSR Izv. 37 (1991) 445~460. Russian original: Izv. Akad. Nauk SSSR54 (1990) 1090~1107.
[46] S.K. Sehgal, Units in Integral Group Rings, Longman, Harlow, 1993.
[47] J.E. Humphreys, Introduction to Lie Algebras and Representation Theory GTM 9, Springer, Berlin, 1972.
[48] Lie S 1881 Arch. Math. 6328.
[49] Campbell J.E., Introductory Treaties on Lie`s Theory Finite Continuous Transformation Group, Oxford University press,1963.
[50] F. W. Warner. Foundations of differentiable manifolds and Lie groups. Springer-Verlag, New York,1971.
[51] R. S. Palais, A Global Formulation of the Lie theory of Transformation Groups, Memoirs of the Amer. MathSoc., vol. 22, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1957.

[52] L. V. Ovsiannikov. Group Analysis of Differential Equations. Academic Press, New York, 1982.
[53] P. E. Hydon, Symmetry Methods for Differential Equations: A Beginners's Guide, Cam-bridge University Press, U.S.A. , 2000.
[54] Bluman, G. W. & Kumei, S. Symmetries and Differential Equations Applied Mathematical Sciences, Vol. 81, Springer, 2002.
[55] Hill, J. M. Differential Equations and Group Methods for Scientists and Engineers, CRC Press, 1992.
[56] Ibragimov, N. H. (Ed.) CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Vols. 1-3. CRC Press 1995.
[57] P. Winternitz, Group theory and exact solutions of partially integrable equations, Partially Integrable Evolution Equations (R. Conte and N. Boccara, eds.), Kluwer Academic Publishers, 1990, pp. 515~567.
[58] Arieh Iserles, Lie-group methods, Acta Numerica, Cambridge University Press, 2000, pp.215~365.
[59] E. Angelopoulos. Classification of simple Lie algebras. Panamerican Math. Jour., 2:65~79, 2001.
[60] E. B. Vinberg, editor. Lie groups and Lie algebras, III, volume 41 of Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Springer-Verlag, Berlin, 1994. Structure of Lie groups and Lie algebras, A translation of Current problems in mathematics. Fundamental directions. Vol. 41.
[61] Belinfante, J.G.F., Kolman, B.: A Survey of Lie Groups and Lie Algebras with Applications and Computational Methods. SIAM, Philadelphia (1972).
[62] Athorne. C.. On the Lie symmetry algebra of a general ordinary differential equation. J. Phys. A: Math. Gen..31(1998).6605~6614.
[63] Steeb, W.H., Continuous symmetries, Lie algebras, differential equations and computer algebra. World Scientific. Singapore, 1996.
[64] P. J. Olver, Applications of Lie Groups to Differential Equations, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 107, Springer 1993.
[65] P. J. Olver. Equivalence, Invariants and Symmetry. Cambridge University Press, 1995.
[66] P. J. Olver. Classical Invariant Theory. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 1999.
[67] P. J. Olver. Joint invariants signatures. Found. Comput. Math., 1:3~67, 2001.
[68] P. J. Olver. Moving frames and singularities of prolonged group actions. Selecta Math., 6:41–77, 2000.
[69] H. Stephani, Differential Equations: Their Solutions Using Symmetries, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
[70] E.L. Mansfield and P.A. Clarkson, Applications of the differential algebra package diffgrob2 to classical symmetries of differential equations. J. Symb. Comp. 23 (1997), 517~533.
[71] P. A. Clarkson, The direct and non-classical methods for symmetry reductions, Modern Group Analysis VI Conference, Johannesburg, South Africa, 15~20 January 1996.
[72] Ibragimov N.H. (Editor), Lie group analysis of differential equations – symmetries, exact solutions and conservation laws, V.1, Boca Raton, FL, Chemical Rubber Company, 1994.

[73] E. M. Vorob'ev, Reduction of quotient equations for differential equations with symmetries, Acta Appl. Math. 23(1991), 1991.

[74] H. Stephani, Differential Equations and their Solutions using symmetries, Cambridge University Press, Cambridge,1989.

[75] Griffiths. P.A., Some aspects of exterior differential systems. Complex geometry and Lie theory (Sundance,1989), Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc.,Providence, 53(1991),151~173.

[76] Wolfram Reasearch, Inc., Mathematica, Version 5.0, Wolfram Research, Inc., Illinois,2003.

[77] Champagne, B., Hereman, W.,and Winternitz, P., The computer calculation of Lie point symmetry of large systems of differential equations, Comput. Phys. Commun., 66(1991),319~340.

[78] Head, AK., LIE: A PC program for Lie analysis of differential equations, Comp. Phys. Comm., 77(1993),241~248.

[79] Hereman. W., SYMMGRP.MAX and other symbolic programs for Lie symmetry analysis of partial differential equation. Lectures in Appl. Math., 29(1993),241~257.

[80] Schwarz. F., A REDUCE package for determining Lie symmetries of ordinary and partial differential equations. Comp. Phys. Comm., 27(1992),179~186.

第 2 章 李群应用于偏微分方程求解的理论基础

2.1 引 言

对称原理在探寻自然规律的过程中有着极其重要的作用，尤其在数学及物理学中的应用意义非凡。对称变换分析是一种求解微分方程系统的、精确的方法，它逐步取代以前用于求解非线性偏微分方程的逆散射方法，因为逆散射方法仅仅适用于完全可积方程，而对称分析还可研究不完全可积方程，并且随着当今计算机性能的不断改善，其计算量大的缺点也已不复存在。

所谓对称，即给定微分方程的解通过某种变换映射为其他的解，李对称则是指因变量和自变量经过李群群变换后仍保持原微分方程的不变性的一个无穷小变换，李群是微分方程因变量和自变量的可逆点变换，同时也依赖于连续参数。这种类型的群对构建微分方程的解有着重要的意义，S. Lie 证明了利用对称群变换来寻求微分方程的解的方法具有统一性和可扩展性，其具体表现如下：

①常微分方程的降阶

②将解映射为其他解

③偏微分方程自变量个数的减少

④不变解的构建

⑤边值问题的不变解的构建

⑥守恒律的构建

⑦检验微分方程变换的线性化

要实现以上任何一种用途，首先必须找到方程的对称(群)，S. Lie 提出了基于无穷小准则理论的方法来寻求原方程的对称，即将对称分析用于求解微分系统的李群。目前，基于李群的对称分析方法主要有经典对称方法[1~5]、非经典对称方法[6~12]、非局部势对称方法[13~15]、用于近似分析的近似对称方法[16~18]及由经典方法推广的广义对称方法[19~22]等。

2.2　经典对称方法

对于一个非线性微分系统，它具有 q 个因变量 u^{α}，依赖于 p 个自变量 x_i，简

单表示其关系为$u=(u^1,u^2,\dots,u^q)$及$x=(x_1,x_2,\dots,x_p)$，假设该系统由m个非线性微分方程组成，即：

$$\Delta^i(x,u^{(k)})=0,\qquad i=1,2,\dots,m \tag{2.1}$$

$u^{(k)}$项是指u对x的k阶偏导数，m,k,p,q都为任意正整数。对于单参数ε的李群群变换：

$$x'=\Xi(x,u;\varepsilon),\qquad u'=\Phi(x,u;\varepsilon) \tag{2.2}$$

那么(2.1)在(2.2)作用下的不变性意为可将其解$u=\Theta(x)$映射到$v=\Psi(x;\varepsilon)$。

将方程(2.2)在$\varepsilon=0$处展开，得到如下无穷小变换：

$$x_i'=x_i+\varepsilon\xi_i(x,u)+o(\varepsilon^2),\qquad i=1,2,\dots,p, \tag{2.3}$$

$$u'^{\alpha}=u^{\alpha}+\varepsilon\phi_{\alpha}(x,u)+o(\varepsilon^2),\qquad \alpha=1,2,\dots,q. \tag{2.4}$$

ξ_i和ϕ_α分别是自变量及因变量变换的无穷小因子，为确定ξ_i及ϕ_α，我们需将变换群进行延拓。首先将无穷小变换(2.3)、(2.4)表示如下：

$$\bar{v}=\sum_{i=1}^{p}\xi_i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i}+\sum_{\alpha=1}^{q}\phi_\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u_\alpha} \tag{2.5}$$

$\bar{v}$表示基于无穷小变换(2.3)、(2.4)的特征量ξ_i和ϕ_α的向量场，也称为无穷小生成元。因此，(2.1)在群变换(2.2)作用下保持不变性的无穷小准则可由下式导出：

$$\mathrm{pr}^{(k)}\bar{v}\Delta\big|_{\Delta=0}=0 \tag{2.6}$$

于是，无穷小生成元$\bar{v}$的k阶延拓为：

$$\mathrm{pr}^{(k)}\bar{v}=\bar{v}+\sum_{\alpha=1}^{q}\sum_{J}\phi_\alpha^J(x,u^{(k)})\frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} \tag{2.7}$$

式中$J=(j_1,\cdots,j_l),\ 1\le j_l\le p, 1\le l\le k$，系数$\phi_\alpha^J$由(2.8)表示。

$$\phi_\alpha^J(x,u^{(k)})=D_J(\phi_\alpha-\sum_{i=1}^{p}\xi_i u_i^\alpha)+\sum_{i=1}^{p}\xi_i u_{J,i}^\alpha \tag{2.8}$$

式中，$u_i^\alpha=\dfrac{\partial u^\alpha}{\partial x_i}, u_{J,i}^\alpha=\dfrac{\partial u_J^\alpha}{\partial x_i}$。因此，如果$\xi_i$和$\phi_\alpha$由(2.6)确定，那么微分系统(2.1)在具有无穷小生成元(2.5)的单参数群变换作用下就可以保持系统的不变性。

2.3 非经典对称方法

非经典方法是经典方法的一种延伸，它是由 Bluman 和 Cole 在研究热传导问题时提出的一种对称分析方法。实际上，该方法只是在原微分系统的基础上附加一个曲面条件，从而形成相应于点对称的“弱对称”。在弱对称过程中，减少了自变量的个数，同时也就减弱了无穷小因子(例如 **2.2 节**中提到的 ξ_i 和 ϕ_α)的限制，增加了变换群。

所谓曲面条件是指在群变换下保持解的曲面不变性，即如果 u_i^α 为微分系统的解，则该解表述的曲面在无穷小变换中保持不变：

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i u_i^\alpha - \phi_\alpha = 0, \quad \alpha - 1, \cdots, m. \tag{2.9}$$

那么，对于 $\Delta = 0$，它在群变换作用下保持不变性的解满足以下系统：

$$\begin{cases} \Delta(x, u_{(k)}) = 0 \\ Q_\alpha(x, u_{(1)}) = 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

因此，对于 $\Delta = 0$ 的非经典对称分析，在经典方法下的不变性条件需要延伸至如下条件：

$$\begin{cases} \mathrm{pr}^{(k)} \bar{v} \Delta \Big|_{\substack{\Delta=0 \\ Q_\alpha=0}} = 0 \\ \mathrm{pr}^{(1)} \bar{v} Q_\alpha \Big|_{\substack{\Delta=0 \\ Q_\alpha=0}} = 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

由此可见，在经典对称分析与非经典对称分析过程中，其主要的差别就在于曲面条件的出现。

对于曲面条件的处理，Levi 和 Winteritz 的算法将(2.9)代入(2.11)消去了 u 的导数之间的附加关系；而 Clarkson 和 Mandfield 的算法则将程(2.11)替换曲面条件(2.9)，再用经典对称简化导出决定方程。两种算法的共同点是导出的决定方程对于无穷小因子 ξ_i 和 ϕ_α 而言都是超定非线性偏微分方程。

在非经典对称下，向量场 $\bar{v}$ 不需要构成李代数，因此它能得出比经典方法更广泛的相似解，在求解一些方程的过程中还得出了利用经典方法不能得出的一类解，例如：热传导方程、Boussinesq 方程、Burger 方程、Fizhugh-Nagumo 方程等。但由于 u 的导数之间的附加关系的存在，其解空间可以不比利用经典对称方法导出的解空间大，故许多时候非经典方法与经典方法导出的解空间是等同的，并不

能产出新的解。

在现有方法中，无论是经典方法还是非经典方法，只要确定无穷小因子ξ_i和ϕ_α，其后续处理方法是一样的，即由以下特征方程

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\xi_1}=\frac{\mathrm{d}x_2}{\xi_2}=\cdots\frac{\mathrm{d}x_n}{\xi_n}=\frac{\mathrm{d}u_1}{\phi_1}=\frac{\mathrm{d}u_2}{\phi_2}=\cdots=\frac{\mathrm{d}u_m}{\phi_m} \tag{2.12}$$

导出不变量，再以不变量为新的自变量和因变量，构造新的、保持原系统不变的降维系统，并由此求出原系统(2.1)的不变解。本文的方法与此略有不同，详见后述。

经典对称和非经典对称都隶属于局部对称，下一节我们将引入非局部对称的概念。

2.4 势对称方法

2.4.1 势对称理论

势对称方法是一种非局部对称方法，它不同于隶属于局部对称的经典和非经典对称方法，但同时，它又不能看作是完全包含局部对称的全局对称，因为它通过对与原微分系统之等效的新系统的对称分析，从而导出与局部对称方法得出的解空间不尽相同的解空间。

设存在偏微分系统$\Delta=0$，$u(x)$为该系统的一个解，若$\Delta=0$中至少存在一个可看作守恒律的偏微分方程，比如$\Delta^m=0$作为守恒律，则可以表示如下：

$$\sum_{i=1}^{n} D_i f^i(x,u^{(k-1)})=0$$

此时，我们可以引入与$u(x)$相关的新变量$v(x)$，这就构成了新的等效偏微分系统。表示为：

$$\begin{cases}\Delta^v(x,u^{(k)})=0, \quad v=1,\ldots,m-1\\ \sum_{i=1}^{n} D_i f^i(x,u^{(k-1)})=0\end{cases} \tag{2.13}$$

据(2.13)，引入$n-1$个辅助变量$v(x)=(v^1(x),\ldots,v^{n-1}(x))$构成势系统$\Psi(x,u^{(k)},v^{(1)})=0$，

$$\begin{cases} f^1(x,u^{(k-1)}) = v^1_{x_2} \\ f^l(x,u^{(k-1)}) = (-1)^{l-1}[v^l_{l+1} + v^{l-1}_{l-1}], \quad 1 < l < n \\ f^n(x,u^{(k-1)}) = (-1)^{n-1} v^{n-1}_{n-1} \\ \Delta^v(x,u^{(k)}) = 0, \quad v = 1,\dots,m-1 \end{cases} \tag{2.14}$$

这里，如果(u,v)是$\Psi=0$的解，则u是$\Delta=0$的唯一解；如果u是$\Delta=0$的一个解，则存在一个v使得(u,v)也是$\Psi=0$的解，但由于f不唯一，故v不是唯一的。可见，Δ和Ψ相互紧密相关。

对于$\Delta=0$的势系统$\Psi=0$，其点对称为：

$$\bar{v}^{\Psi} = \sum_{\alpha=1}^{m}\left[\phi_\alpha(x,u,v) - \sum_{i=1}^{n}\xi_i(x,u,v)u_i^\alpha\right]\frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \sum_{\beta=1}^{n-1}\left[\chi_\beta(x,u,v) - \sum_{i=1}^{n}\xi_i(x,u,v)v_i^\beta\right]\frac{\partial}{\partial v^\beta} \tag{2.15}$$

式中，如果无穷小因子ϕ_α和ξ_i依赖于在非局部对称下引入的辅助变量$v(x)$，该变换就不能局限于原系统的变量空间(x,u)，而是被扩展到势系统的变量空间(x,u,v)，因而称此时的势系统对称为非局部对称，$\bar{v}^{\Psi}$则被称为原系统$\Delta=0$的势对称。

2.4.2 势系统的确定

在势系统的推导过程中，要考虑两种情况，第一种情况是原系统的一个方程已经具有势的形式，第二种情况是原系统的任何一个方程都不具有势的形式，但这些方程的组合具有势形式。第一种情况由$\Delta=0$的守恒律组成，如(2.13)，对于第二种情况，我们必须考虑将一些偏微分方程乘以因子λ，才能使原方程转换为守恒形式。

设存在至少一个λ^μ不为零的积分因子$\lambda(x,u)=(\lambda^1(x,u),\dots,\lambda^m(x,u))$，即可得出原方程与守恒律之间的关系：

$$\sum_{v=1}^{m}\lambda^v(x,u)\Delta^v(x,u^{(k)}) = \sum_{i=1}^{n}D_i f^i(x,u^{(k)}) \tag{2.16}$$

只要确定恰当的积分因子，我们可以将整个寻求势系统的过程递推下去，构建一个完整的链式势系统，最后对所有这些的系统进行对称分析。我们便可以通

过势对称方法构建新的解，而势系统的非局部特性决定了我们导出的新解与利用经典对称及非经典对称寻求原系统的解是显然不同的。

对于利用势对称方法构建在局部对称下不能得到的原系统Δ的新解，有两种方法可以实现：①通过势对称有限变换，由原来的解构建新的解；②计算不变解。另外一种寻求势系统新解的方法是利用不可逆映射法将其线性化，但有时原系统不能通过该方法线性化，故该方法具有很大的局限性。

2.5 近似对称方法

2.5.1 单参数近似群

近似对称方法是由 V.A. Baikov 和 Ibragimov 在 1989 年提出的，该方法基于变换的近似群的概念，它在处理依赖于小参数ε的偏微分方程时非常有效。小参数ε通常用于检验微分方程的一些极限问题，同时它对经典对称的检验也非常有用。

定义函数的自变量$x=(x_1,x_2,\cdots,x_N)$，ε为函数依赖的小参数，ε^{p+1}阶无穷小函数可由$\theta_p(x,\varepsilon)$表示，$p>0$，条件为$\theta_p(x,\varepsilon)=O(\varepsilon^p)$，由此演化为：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\theta_p(x,\varepsilon)}{\varepsilon^p}=0 \tag{2.21}$$

近似的定义：假定f和g是关于x的解析函数，定义p阶近似：$f\sim g$

$$f(z,\varepsilon)=g(z,\varepsilon)+o(\varepsilon^p),\quad p\le 0$$

对于具有坐标$f_i^j(x,\varepsilon),\quad j=1,\cdots,N$的向量函数$f_i(x,\varepsilon),\quad i=0,\cdots,p$，其单参数近似变换群表示如下：

$$x^{*j}\sim\sum_{i=0}^{p}\delta^i f_i^j(x,\varepsilon),\quad j=1,\cdots,N \tag{2.22}$$

此时，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_N)\in\mathbb{R}^N$为原坐标，$x^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_N^*)$为新坐标，$\varepsilon,\delta$分别为群参数和扰动参数，则群变换满足以下条件：

$$f(x,\varepsilon=0,\delta)\sim x \tag{2.23}$$

进一步定义变换$x^*=f(x,\varepsilon,\delta)$，在$\varepsilon=0$邻域内取任意$\varepsilon$值都使得$f(x,\varepsilon,\delta)\sim x$，

对所有变换 $x=f$， 如果

$$f(f(x,\varepsilon,\delta),\gamma,\delta)\sim F(x,\varepsilon+\gamma,\delta) \tag{2.24}$$

我们便将该变换的集合 G 称为局部单参数近似变换群。

2.5.2 近似对称

与经典对称类似，近似群变换产生向量场：

$$\bar{v}=\sum_{i=1}^{p}\xi_i(x,\delta)\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2.25}$$

其中，$\xi_i(x,\delta)\sim\xi_i^0(x)+\delta\xi_i^1(x)+\cdots+\delta^p\xi_i^p(x)$，向量场 $(\xi^0,\xi^1,\cdots,\xi^p)$ 的元素由群变换的扩展系数 $\xi_i^v=\dfrac{\partial f_i^v(x,\varepsilon,\delta)}{\partial\varepsilon}|_{\varepsilon=0}$，$v=0,1,\cdots p;\ i=1,2,\cdots,N$ 给出。因此，近似向量场可写成：

$$\bar{v}\sim(\xi_i^0(x)+\delta\xi_i^1(x)+\cdots+\delta^p\xi_i^p(x))\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2.26}$$

可见，与经典方法的向量场的不同之处在于向量场系数相对于扰动参数 δ 进行了扩展，这些系数是由群变换 f 关于 ε,δ 的 Taylor 展开而得到的。关于近似对称与 Lie 理论之间的联系，在文献[16]中有详细讨论，我们在此只作近似对称的算法的描述。

若 G 是由(2.34)给出的近似变换群，近似阶数 $p\geq q$，近似方程为：

$$\Delta(x,\varepsilon)=\Delta_0(x)+\varepsilon\Delta_1(x)+\cdots+\varepsilon^q\Delta_q(x)=o(\varepsilon^q) \tag{2.27}$$

如果 $\Delta(f(x,\delta,\varepsilon),\varepsilon)=o(\varepsilon^q)$，且 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_N)$ 满足(2.27)，则(2.27)在群 G 变换的作用下保持近似不变性，当近似向量场由(2.25)给出时，保持这种近似不变性的无穷小准则为：

$$\mathrm{pr}^{(k)}\bar{v}\Delta(x,\varepsilon)|_{\Delta(x,\varepsilon)=o(\varepsilon^q)}=o(\varepsilon^q) \tag{2.28}$$

2.6 广义对称方法

不同于经典对称、非经典对称及势对称的特性，将同时应用于自变量、因变量及其导数的变换，这种变换决定了群 G 的性质。

对于非线性微分系统

$$\Delta^i(x,u_{(k)})=0, \qquad i=1,2,\ldots,m \tag{2.29}$$

式中，$u_{(k)}$表示u对x的各阶导数。(2.29)依赖于单参数ε的群变换为：

$$x^*=\Xi(x,u_{(k)};\varepsilon),\ \ u^*=\Phi(x,u_{(k)};\varepsilon) \tag{2.30}$$

假设函数Ξ及Φ分别相对于因变量及自变量可微，(2.29)在(2.30)作用下产生向量场：

$$\bar{v}=\sum_{i=1}^{p}\xi_i(x,u_{(k)})\tfrac{\partial}{\partial x_i}+\sum_{\alpha=1}^{q}\phi_\alpha(x,u_{(k)})\tfrac{\partial}{\partial u^\alpha} \tag{2.31}$$

无穷小因子ξ_i,ϕ_α可由群变换对参数ε求导并令$\varepsilon=0$得出：

$$\xi_i(x,u_{(k)})=\frac{\partial\Xi(x,u_{(k)};\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0},\quad \phi_\alpha(x,u_{(k)})=\frac{\partial\Phi(x,u_{(k)};\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \tag{2.32}$$

相应于(2.32)的无穷小变换由下式给出：

$$\begin{cases} x_i^*=x_i+\varepsilon\xi_i(x,u_{(k)})+o(\varepsilon^2), & i=1,2,\cdots,p \\ u^{\alpha *}=u^\alpha+\varepsilon\phi_\alpha(x,u_{(k)})+o(\varepsilon^2), & \alpha=1,2,\cdots,q \end{cases} \tag{2.33}$$

可见，这是经典对称的直接推广，另一方面，也可简单表述如下：

$$\begin{cases} x_i^*=x_i \qquad i=1,2,\cdots,p \\ u^{\alpha *}=u^\alpha+\varepsilon(\phi_\alpha(x,u_{(k)})-\sum_{i=1}^{p}u_i^\alpha\xi_i(x,u_{(k)}))+o(\varepsilon^2), \qquad \alpha=1,2,\cdots,q \end{cases} \tag{2.34}$$

(2.34)用因变量变换代替了整个群变换。此时，向量场$\bar{v}_Q$为：

$$\bar{v}_Q=\sum_{\alpha=1}^{q}Q_\alpha(x,u_{(k)})\frac{\partial}{\partial u^\alpha} \tag{2.35}$$

式中，$Q_\alpha=Q_\alpha(x,u_{(k)})$是向量场$\bar{v}_Q$的特征式，它由(2.36)式确定。

$$Q_\alpha=\phi_\alpha-\sum_{i=1}^{p}\xi_i u_i^\alpha \qquad \alpha=1,2\cdots,q \tag{2.36}$$

从以上这些关系可以看出，经典对称只是广义对称的一个子集，只要限制关于变量x及u的无穷小因子的依赖性，我们就可以得出经典对称。如何求解Q_α与在经典对称中提到的方法类似，即

$$\mathrm{pr}\bar{v}_Q\Delta|_{\Delta=0}=0 \tag{2.37}$$

$\mathrm{pr}\bar{v}_Q$为向量场$\bar{v}_Q$的延拓，一般表示如下：

$$\mathrm{pr}\bar{v}_Q = \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_J D_J Q_\alpha \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} \tag{2.38}$$

D_J 为依赖于复标 J 的全微分，保持(2.29)的不变性的条件(无穷小准则)即为(2.37)，对于(2.37)，如果我们求出 u 对 x 的任意阶导数的系数，就可以得到关于于 Q_α 的线性复合的偏微分方程系统，而实际运算中阶数并非无穷大。由此可见，(2.37)是广义对称方法的关键所在。

2.7 讨 论

所有这些方法目的都在于寻求保持偏微分方程不变性的李群(对称)，然后再得到满足原方程的不变解。使用非经典方法得出的解虽然不一定完全包含经典方法得出的解，但它可以得到一些经典方法无法得到的解[23,24]，文献[25]比较了二者的异同。近几年基于非经典的解法发展迅速，由此延伸至非经典势对称、近似势对称、非经典条件势对称等方法[26~28]，从而我们可以针对不同的方法得到偏微分方程越来越丰富的群，进一步导出更广阔的解空间，这样固然很好体现了群方法应用于偏微分方程中的优点，即不必考虑方程是否线性或完全可积。但同时，李群方法在求解偏微分方程时的不足之处也暴露无遗：目前的群对称方法都是利用特征方程(2.39)得到不变量，然后再得到以不变量作为新变量的降维方程，最后通过求解降维方程得到原方程的不变解。

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\xi^i} = \frac{\mathrm{d}u}{\phi} \tag{2.39}$$

如果无法求解(2.39)，就无法得到新变量的降维方程，也就无法得到原方程的不变解。而求解(2.39)有时比求解原方程还难。为了能够求解(2.39)，普遍的做法是将无穷小因子设定得足够简单。这样一来，就只能得到少数特解。过于简单的无穷小因子大大降低了解的丰富性，使得现有的李群方法基本上无法应用于边（初）值问题的求解。文献[30]利用上述特解反过来构造原方程的边界条件，得到的仅仅是一些特殊的边界条件；其方法往往无法得到常用的边界条件的解。那么，怎样避开特征方程(2.39)的求解而得到尽可能全面的降维方程，以最大限度的满足定解问题的边界处理，是一个非常有意义的研究方向。本文第 3 章中将阐述一种新的简化方法。

参考文献

[1] N.H. Ibragimov, Transformation Groups Applied to Mathematical Physics, D.Reidel Publishing Company, Dortrecht, 1985.

[2] G.W. Bluman and S. Kumei, Symmetries and Differential Equations, Springer, New York, 1989.

[3] P.J. Olver, Applications of Lie groups to differential equations, Springer, Berlin, 1986.

[4] L.V. Ovsiannikov, Group Analysis of Differential Equations, Academic Press, New York, 1982.

[5] N.H. Ibragimov, CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Vol. 1-3, CRC-Press, Boca Raton, 1994, 1995, 1996.

[6] G.W. Bluman and J.D. Cole, The general simlarity solution of the heat equation, J. Math. Mech. 18, 1025-1042, (1969).

[7] P.J. Olver, Applications of Lie groups to differential equations, Springer, Berlin, 1986.

[8] P.J. Olver and P. Rosenau, The construction of special solutions to partial differential equations, Phys. Lett. A 114, 107-112, (1986).

[9] D. Levi and P. Winternitz, Non-classical symmetry reduction: Example of the Boussinesq equation, J. Phys. A: Math. Gen. 22, 2915-2924, (1989).

[10] P.A. Clarkson and E.L. Mansfield, Algorithms for the Non-classical Method of Symmetry Reduction, preperint (1994).

[11] E. Pucci, Similarity reductions of partial differential equations,J. Phys. A: Math. Gen. 25, 2631-2640, (1992).

[12] M.C. Nucci and P.A. Clarkson, The nonclassical method is more general than the direct method for symmetry reductions. An example of the Fitzhugh-Nagumo equation, Phys. Lett. A 164, 49-56, (1992).

[13] G.W. Bluman and S. Kumei, Symmetries and Differential Equations, Springer, New York, 1989.

[14] G.W. Bluman, 1993, Potential Symmetries and Equivalent Conservation Laws, pp. 71; In N. H. Ibragimov (eds.) Modern Group Analysis: Advanced Analytical and Computational Methods in Mathematica Physics, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers 1993.

[15] A.M. Vinogradov and I.S. Krasil'shchik, On the Theory of Nonlocal Symmetries of Nonlinear Partia Differential Equations, Sov. Math. Dokl. 29, 337-341, (1984).

[16] V.A. Baikov, R.K. Gazizov, and N.KH. Ibragimov, Approximate symmetries, Math. USSR Sbornik, 46, 427-441, (1989).

[17] V.A. Baikov, R.K. Gazizov, and N.H. Ibragimov, Perturbation methods in group analysis, J. Sov. Math. 55, 1450, (1991).

[18] J. M. Burgers, A Mathematical Model Illustrating the Theory of Turbulence, Academic Press, New York, (1948).

[19] E. Noether, Invariante Variationsprobleme, Nachr. König. Gesell. Wissen. Göttingen, Math.-Phys. Kl. 235-257, (1918); (see Transport Theory and Stat. Phys. 1, 186-207, (1971) for an English translation)

[20] F. Klein, Über die Differentialgesetze für die Erhaltung von Impuls und Energie in der Einsteinschen Gravitationstheorie, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math. Phys. 2, 171-189, (1918).

[21] B. Abraham-Schrauner and A. Guo, Hidden and nonlocal symmetries of nonlinear differential equations, pp. 1-5, In: Modern Group Analysis: Advanced Analytical and Computational Methods in Mathematical Physics, Eds: N.H. Ibragimov, M. Torrisi, and A. Valenti, Kluwer Academic Publishers, Dortrecht, 1993.

[22] M. Hénon and C. Heiles, The Applicability of the Third Integral of Motion: Some Numerical Experiments, Astron. J. 69, 73-79, (1964).

[23] S. Y. Lou,H. Y. Ruan, Nonclassical Analysis and Painlevé Property for The Kupershmidt Equations, J. Phys. A: Math. Gen., 1993(26):4679~4688.

[24] M. L. Gandarias, J. L. Romero and J. M. Díaz, Nonclassical Symmetry Reductions of a Porous Medium Equation With Convection, J. Phys. A: Math. Gen., 1999(32):1461~1473.

[25] 孙晓燕，基于李群的偏微分方程数值方法，中国科学院硕士学位论文，2004.6.

[26] Maria Luz GANDARIAS, Nonclassical Potential Symmetries of the Burgers Equation, Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics 1997, V.1, 130~137.

[27] A H Kara†, F M Mahomed‡ and Changzheng Qu§, Approximate potential symmetries for partial differential equations, J. Phys. A: Math. Gen. 33 (2000) 6601~6613.

[28] Nucci, M.C., Iterations of the non-classical symmetries method and conditional Lie-Bäcklund symmetries, J. Phys. A: Math. Fen., 29(1996), 8117~8122.

[29] P. A. Clarkson, New Similarity Solutions for The Modified Boussinesq Equation. J. Math. Phys. 1989(22): 2355~2367.

[30] R. Seshadri, T. Y. Na, Group Invariance in Engineering Boundary Value Problems, New York: Spinger Verlag, 1985.

第 3 章 基于李群的分离变量法及其解

3.1 引 言

上一章我们指出了现有的、基于李群的微分方程的简化方法的难点之一，是求解特征方程(2.39)得到不变量。对于具有复杂的无穷小因子的特征方程，其求解有时候甚至比直接求解原方程还要困难。为了降低求解难度，只好将复杂的无穷小因子简单化，因此而降低了解的丰富性。

可见，如果能够避免解特征方程(2.39)的求解，便可望得到更加丰富的解。为此，文献**[7]**在非经典李群方法上提出新的构建降维方程的思想，即结合非经典方法中的解曲面条件，实现原偏微分方程的降维。由于该方法所得到的降维系统仍采用原方程的变量，只是将其中的某些变量变成了参数，因此被称为基于李群的分离变量法。

为了更加清晰的描述该方法，我们在 **3.2** 节以 Boussinesq 方程为例，给出了经典李群、非经典李群的求解详尽步骤。在 **3.3** 节描述了偏微分方程的数值求解的具体步骤。在 **3.4~3.6** 节中，对 Burgers 方程、KdV 方程、Camassa-Holm 方程做了计算，采用文献**[7]**的方法得到了一些众所周知的特解，以验证文献**[7]**的方法的正确性；此外得到一些现有的李群方法无法得到的解。

3.2 对称群无穷小生成元的求解

3.2.1 经典李群的求解

为了求解偏微分方程的李群无穷小生成元，下面我们以 Boussinesq 方程经典对称为例，其他任意偏微分方程的经典群对称方法都可以由此推广。

Boussinesq 方程：$u_{tt}+uu_{xx}+u_x^2+u_{xxxx}=0$ 经典李群无穷小生成元的 *mathematica* 实现过程[32]及源代码：

Solving the infinitesimals of Boussinesq equation by classical Lie symmetry

```
1.  U=u[x,t];Ux=D[U,x];Ut=D[U,t];Uxx=D[Ux,x];Uxt=D[Ux,t];Utt=D[Ut,t];
    Uxxx=D[Uxx,x];Uxxt=D[Uxx,t];Uxtt=D[Uxt,t];Uttt=D[Utt,t];
    Uxxxx=D[Uxxx,x];Uxxxt=D[Uxxx,t];Uxxtt=D[Uxxt,t];Uxxxxx=D[Uxxxx,x];
    Uxxxxt=D[Uxxxx,t];      /*定义微分变量*/
```

2. $\Xi=\xi[x,t,U];T=\tau[x,t,U];\Phi=\phi[x,t,U];$ /*定义向量场分量*/

3. Φx = Dt[Φ - Ξ Ux - T Ut, x] + Ξ Uxx + T Uxt /. Dt[t, x] -> 0;

Φtt = Dt[Φ - Ξ Ux - T Ut, t, t] + Ξ Uxtt + T Uttt /. {Dt[x, t] -> 0,Dt[x, {t, 2}] -> 0};

Φxx = Dt[Φ - Ξ Ux - T Ut, x, x] + Ξ Uxxx + T Uxxt /. {Dt[t, x] -> 0,Dt[t, {x, 2}] -> 0};

Φxxxx = Dt[Φ - Ξ Ux - T Ut, {x, 4}] + Ξ Uxxxxx + T Uxxxxt /. {Dt[t, x] -> 0,

Dt[t, {x, 2}] -> 0, Dt[t, {x, 3}] -> 0, Dt[t, {x, 4}] -> 0};

/*群延拓的微分子项*/

4. prv= Φtt + U Φxx + Uxx Φ + 2 Ux Φx + Φxxxx /*群延拓定义*/

5. X2F = Φtt + U Φxx + Uxx Φ + 2 Ux Φx + Φxxxx /. Utt -> -(U Uxx + Ux Ux + Uxxxx)

/*代入延拓条件 Δ=0*/

6. X2F1 = ExpandAll[X2F] /*群延拓展开*/

7. D[X2F1, Uxxxx]; D[X2F1, Uxxxt]; /*求延拓中含 *u* 对自变量最高阶偏导数项的系数，并令其等于零，推出结果： $\Xi=\xi[x,t]; T=\tau[t]; 2\tau_t-4\xi_x=0;$*/

8. /*将 7 中结果 $\Xi=\xi[x,t]; T=\tau[t];$代入 2，重复步骤 2~6，并将延拓展开结果定义为 X3F1*/

9. D[X3F1, Uxxx]; D[X2F1, Uxxt]; D[X2F1, Uxt]; /*求延拓中含 *u* 对自变量次高阶偏导数项的系数，并令其等于零，推出结果：$\phi_{UU}=0; \Xi=\xi[x]; \tau_{tt}-2\phi_{\tau U}=0;$*/

10. /*将 7、9 中结果 $\Xi=\xi[x]; T=\tau[t];$代入 2，重复步骤 2~6，并将延拓展开结果定义为 X4F1*/

11. X4FC = Collect[X4F1, {Ux, Ut, Uxx, Uxxx, Uxxxx}]； /*将延拓排列成 Ux, Ut, Uxx，Uxxx,Uxxxx 的幂的和的形式*/

12. Coefficient[X4FC, Ux Ux]；Coefficient[X4FC, Ut]；Coefficient[X4FC, Uxxx]

Coefficient[X4FC, Uxx]；Coefficient[X4FC, Uxxxx]；Coefficient[X4FC, U]

/*分别提取 Ux, Ut, Uxx, Uxxx, Uxxxx 的系数并令其等于零，推出结果： $\Xi=ax+b$;

$T=2at+c; \Phi=\phi[t,u]; a,b,c$ 为任意常数*/

13. /*将 12 中结果代入 2，重复步骤 2~6，并将延拓展开结果定义为 X5F1，重复步骤 11~12，推出结果： $\boldsymbol{\Xi=ax+b;\ T=2at+c;\ \Phi=-2aU;}$ */

14. /*将 13 中结果代入 2，重复步骤 2~6，展开群延拓式运算为零，故结果正确*/

3.2.2 非经典李群的求解

在经典李群对称的基础上，同时考虑曲面条件(2.9)，即当且仅当

$$\begin{cases} \mathrm{pr}^{(k)}\bar{v}\Delta\Big|_{\substack{\Delta=0\\ Q_\alpha=0}} = 0 \\ \mathrm{pr}^{(1)}\bar{v}Q_\alpha\Big|_{\substack{\Delta=0\\ Q_\alpha=0}} = 0 \end{cases}$$

成立时，偏微分系统 $\Delta^i(x,u^{(k)})=0$ 将产生非经典李群无穷小生成元，下面我们仍以 Boussinesq 方程的非经典对称为例，其他任意偏微分方程的非经典群对称方法都可以由此推广。

Solving the infinitesimals of Boussinesq equation by non-classical Lie symmetry

1. 微分变量、向量场分量、群延拓的微分子项、群延拓的定义同经典方法中的步骤 **1~4**
2. *X2F = Φtt + U Φxx + Uxx Φ + 2 Ux Φx + Φxxxx /. Utt -> -(U Uxx + Ux Ux + Uxxxx)*

   /*代入延拓条件 Δ=0*/
3. *X2F1= X2F /.Ut->(Φ-ΞUx)/T* /*代入解曲面条件 Q_α=0*/
4. *X2F2 = ExpandAll[X2F1]* /*群延拓展开*/
5. 对延拓展开式中各项系数的处理方法同经典方法中的步骤 **7~12**
6. 得出结果如下：

$-2\zeta_1(\zeta_2)_t^2-\zeta_2^{\,2}(\zeta_1)_{t,t}+\zeta_2(2(\zeta_1)_t(\zeta_2)_t+\zeta_1(\zeta_2)_{t,t})=0$；

$$\xi=\zeta_2+\frac{1}{4}x(\zeta_1)_t-\frac{x\zeta_1(\zeta_2)_t}{4\zeta_2}$$

$$\tau=\zeta_1$$

$$\phi=\frac{1}{2}u\left(-(\zeta_1)_t+\frac{\zeta_1(\zeta_2)_t}{\zeta_2}\right)$$

3.3 数值求解整体思路

结合文献**[7]**中的理论推导，现将本文方法应用于偏微分方程数值求解的整体思路总结如下：

①求出给定偏微分方程的经典、非经典、或在第二章中提到的任意一种对称李群的向量场分量，具体步骤参见本章 **3.2** 节中结合实例做出的详细阐述。

②根据文献**[7]**中推导出的降维方法，导出原方程的降维简化系统，实现微分系统由李群变换不变量解解析描述[33]到单微空间数值描述的转换。实例见 **3.4**、**3.5** 及 **3.6** 节中具体方程的降维简化。

③初始条件及群参数的确定。对于初始条件，我们可以利用原微分方程的物理特性给定一些特征点的初始值；对于群参数，我们可以由初始条件结合原微分方程在李群变换作用下的解曲面条件反推得到。

④求解降维系统。根据③得到的群参数和边、初值条件，经过群变换，得到定义域中任意一点的邻域的边、初值条件，再通过降维方程得到解。图 **3-1** 为含 4 个自变量的偏微分方程的求解示意，图中$[P_i,n]$中的P_i为计算初点，n为方向指向，给出沿 n 方向的降维方程并求解，便可得到其邻近任何一点的解。

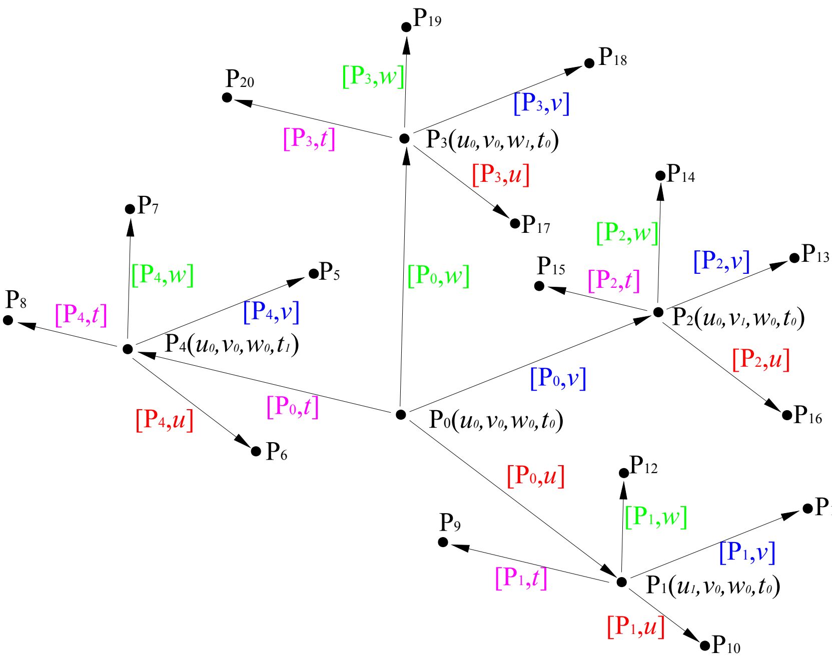


图 3-1 4-变量降维系统数值求解示意

下面我们对 Burgers 方程、KdV 方程、Camassa-Holm 方程做数值求解。

3. 4 Burgers 方程

Burgers 方程的对称分析[1]之所以能引起学者们的广泛关注，因为该方程可以由任意初始条件得到解析解[2]。而基于群论局部对称的不变量解更是研究该方程的便利手段，Maria Luz GANDARIAS[3]就重点研究了其非经典势对称。该方程是第一个用 Lie 对称求其不变解的具有物理意义的非线性演化方程，它不具有孤立子解，只有唯一的守恒量却具有无穷多的对称(Lie 对称)，它还可以通过一个简单的变换将其转化为热方程来研究其对称性及不变解。另一方面，Burgers 方

程的数值解研究[4]也极具意义，因为该方程可应用于粘性流震动波行进的流动相似理论以及 Burgers 的湍流模型。Cole 研究了 Burgers 方程的普通性质并解释了它的一些具体应用，而有限元及有限差分等方法[5,6]在 Burgers 方程的应用则进一步推进了其数值解的研究。下面根据本文方法来讨论该方程。

3.4.1 方程的经典及非经典对称不变解

对于 Burgers 方程：

$$u_t + uu_x - u_{xx} = 0 \tag{3.1}$$

这时， $X=\{(x,t)\}, U=\{u\}$,而微分系统定义于 $X\times U^{(2)}$ 中，

$$\Delta(x,t,u^{(2)}) = u_t + uu_x - u_{xx}$$

设经典李群的生成元：

$$V = \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \phi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} \tag{3.2}$$

方程的二阶延拓为：

$$\mathrm{pr}^{(2)}V = V + \phi^x\frac{\partial}{\partial u_x} + \phi^t\frac{\partial}{\partial u_t} + \phi^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \phi^{xt}\frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \phi^{tt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}} \tag{3.3}$$

故有， $\mathrm{pr}^{(2)}V(\Delta)\big|_{\Delta=0} = 0$ ，必须且只须

$$(\phi^t + \phi u_x + u\phi^x - \phi^{xx})\big|_{\Delta=0} = 0 \tag{3.4}$$

其中，
$$\begin{cases} \phi^x = D_x\phi - u_x D_x\xi - u_t D_x\tau \\ \phi^t = D_t\phi - u_x D_t\xi - u_t D_t\tau \\ \phi^{xx} = D_x^2(\phi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xxx} + \tau u_{xxt} \end{cases}$$

将此代入(3.3)并利用数学软件 *Mathemetica* 展开并推导，得出向量场的分量：

$$\begin{cases} \xi = c_2 + c_4 t + (c_3 + c_5 t)x \\ \tau = c_1 + (2c_3 + c_5 t)t \\ \phi = c_4 - (c_3 + c_5 t)u + c_5 x \end{cases} \tag{3.5}$$

式中，c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 为任意常数，可见不变群的全体生成元构成李代数包含一个 5 维的子代数，并具有下列得一组基：

$$\begin{cases} V_1 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}, V_2 = -xt\frac{\partial}{\partial x} - t^2\frac{\partial}{\partial t} + (tu - x)\frac{\partial}{\partial u} \\ V_3 = -x\frac{\partial}{\partial x} - 2t\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial u}, V_4 = \frac{\partial}{\partial t}, V_5 = \frac{\partial}{\partial x} \end{cases} \tag{3.6}$$

对于非经典无穷小对称的向量场满足以下条件：

$$\nu = \partial_t + \xi \partial_x + \phi \partial_u$$

则由 *Mathemetica* 导出 ξ 及 ϕ 必须满足以下方程：

$$\begin{cases} \xi_{uu} = 0, \phi_{uu} - 2\xi_{xu} - 2(u-\xi)\xi_u = 0, \phi_{xx} + 2\phi\xi_x + u\phi_x + \phi_t = 0 \\ \xi_{xx} - (2\xi - u)\xi_x + 2\phi\xi_u - \xi_t - 2\phi_{xu} + \phi = 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

由(3.7)产生无穷小非经典对称：

$$\begin{cases} V_1 = \partial_t + u\partial_x \\ V_2 = \partial_t + (-\frac{1}{2}u + a_0 t^2 + a_1 t + a_2)\partial_x + [-\frac{1}{4}u^3 + \frac{1}{2}u^2(a_0 t^2 + a_1 t + a_2) - (a_0 t + \frac{1}{2}a_1)xu \\ \qquad + (b_0 t + b_2)u + \frac{1}{2}a_0 x^2 - b_0 x + a_0 t + a_3]\partial_u \\ V_3 = \partial_t - \frac{1}{2}u\partial_x - \dfrac{u^3}{4}\partial_u \\ V_4 = \partial_t - \frac{1}{2}u\partial_x - (\frac{1}{4}u^3 - \frac{1}{4}a_1^2 u)\partial_u \\ V_5 = \partial_t + (a_2 - \frac{1}{2}u)\partial_x + (-\frac{1}{4}u^3 + \frac{1}{2}a_2 u^2)\partial_u \\ V_6 = \partial_t - (\frac{1}{2}u + x^{-1})\partial_x - (\frac{1}{4}u^3 + \dfrac{u^2}{2x})\partial_u \\ V_7 = \partial_t + (-\frac{1}{2}u + w(t,x))\partial_x + (-\frac{1}{4}u^3 + \frac{1}{2}w(t,x)u^2)\partial_u \end{cases}$$

式中，a, b 为任意参数，$w(t,x)$ 是 Burgers 方程 $w_t + 2ww_x - w_{xx} = 0$ 的任意解。

故我们可以进一步得出非经典对称下的一组不变量解：

$$\begin{cases} u(x,t) = x/t, u(x,t) = -\dfrac{4x}{x^2+2t}, u(x,t) = -\dfrac{a_1(c_1\exp(a_1 x) - 1)}{c_1\exp(a_1 x) + 1 \pm c_2\exp(a_1 x/2 - a_1^2 t/4)} \\ u(x,t) = -2\dfrac{1 + a_2\exp(a_2 x + a_2^2 t)}{x + \exp(a_2 x + a_2^2 t)}, u(x,t) = -\dfrac{12t + 6x^2}{6xt + x^3} \end{cases}$$

3.4.2 验证由文献[7]得出的方法

3.4.2.1 降维方程的得出

对于 Burgers 方程，存在特征不变量精确解：

$$u(x,t) = \lambda - A\frac{\exp[A(x-\lambda t)] - B}{\exp[A(x-\lambda t] + B} \tag{3.9}$$

式中 A, B, λ 为任意常数，有关此解的详细推导参见**文献[7]**。

为了利用此精确解来验证本文方法所得出的数值解，我们必须首先由此解反推出包含此特解的解空间所诱导的李群，结果如下：

$$\begin{cases} \xi = c_3 + c_4 t + 4x(t + c_2)c_5 \\ \tau = 4(t + c_2)^2 c_5 + c_1 \\ \phi = c_4 + 4xc_5 - 4(t + c_2)c_5 u \end{cases} \tag{3.10}$$

根据文献[7]的降维方法，我们可以得到任意时刻$t = t_x$沿 x 向的降维微分方程为：(注：由于该计算过程是在 *mathematica5.1* 中实现，方便起见，下面给出其源代码)

$$\begin{aligned} & u[x,t]\,u^{(1,0)}[x,t] \\ & +\Big(C[4]+4\,x\,C[5]-4\,(t+C[2])\,C[5]\,u[x,t] \\ & \quad -(C[3]+t\,C[4]+4\,x\,(t+C[2])\,C[5])\,u^{(1,0)}[x,t]\Big)\Big/\Big(3+4\,(t+C[2])^2\,C[5]\Big) \\ & -u^{(2,0)}[x,t] \\ & =0 \end{aligned}$$

(3.11)

同理，可导出任意$x = x_t$位置沿 t 向的降维方程：

$$\begin{aligned} & \frac{-(4\,(t+C[2])\,C[5]\,(C[4]+4\,x\,C[5]-4\,(t+C[2])\,C[5]\,u[x,t]-u^{(0,1)}[x,t]))}{(C[3]+t\,C[4]+4\,x\,(t+C[2])\,C[5])^2} \\ & +\frac{1}{C[3]+t\,C[4]+4\,x\,(t+C[2])\,C[5]}\Big\{4\,C[5] \\ & \quad +\frac{(C[4]+4\,x\,C[5])\,(C[4]+4\,x\,C[5]-4\,(t+C[2])\,C[5]\,u[x,t]-u^{(0,1)}[x,t])}{(C[3]+t\,C[4]+4\,x\,(t+C[2])\,C[5])^2} \\ & \quad -\frac{4\,(t+C[2])\,C[5]\,(C[4]+4\,x\,C[5]-4\,(t+C[2])\,C[5]\,u[x,t]-u^{(0,1)}[x,t])}{(C[3]+t\,C[4]+4\,x\,(t+C[2])\,C[5])} \\ & \quad -\frac{-4\,C[5]\,u[x,t]-4\,(t+C[2])\,C[5]\,u^{(0,1)}[x,t]-u^{(0,2)}[x,t]}{(C[3]+t\,C[4]+4\,x\,(t+C[2])\,C[5])}\Big\} \\ & =0 \end{aligned}$$

(3.12)

其中，**c[i]**为(4.10)中的$c_i, i = 1,2,3,4,5$ 。

3.4.2.2 初边值的确定及降维方程的数值求解

对于在$t = 0$的边界上,由(3.9)，我们可以得出：

$$u(x,0) = \lambda - A\frac{\exp[Ax] - B}{\exp[Ax] + B}，\quad u_x(x,0) = -\frac{2A^2 B\exp[Ax]}{(\exp[Ax] + B)^2} \tag{3.13}$$

将(3.9)代入(3.1)及(3.3)，结合(3.13)，反推出群参数c_2, c_3, c_4, c_5的约束方程(3.14)：

```
4 A (-B^2 + e1^2) (t + C[2]) C[5] +
  (B + e1)^2 (C[4] + 4 (x - λ (t + C[2])) C[5]) + 2 A^2 B e1 (C[3] + t C[4] +
     4 t x C[5] + 4 x C[2] C[5] - λ (3 + 4 t^2 C[5] + 8 t C[2] C[5] + 4 C[2]^2 C[5]))
```

$$=0 \tag{3.14}$$

注意(3.14)中 e^{Ax} 的 0~2 次幂的展开，可知

$$c_3 = c_1\lambda, c_4 = c_5 = 0 \tag{3.15}$$

(3.15)即为在保持原方程(3.1)不变性的条件下，群参数所必须满足的关系。

那么，只要确定(3.9)式中的待定系数 A, B, c_1, λ，我们便可得出计算初值，于是，我们可根据(3.11)及(3.12)计算出 Burgers 方程任意时刻任意位置沿任意方向的数值解，其求解方式有两种：

①计算点 $\rightarrow$ 单维数值解 $\rightarrow$ 计算点。该计算方式是从任意点出发，沿解空间的任意坐标指向计算，到某个计算点时，由解曲面条件，反演在出该点上沿其他坐标指向计算的初值，再沿此指向数值求解到下一个计算点，依此类推，我们便可得出原方程解空间上的任意数值解。

②计算点 $\rightarrow$ 计算点 $\rightarrow$ 单维数值解。该计算方式是基于李群作用下点变换的无穷小原理：$\frac{\mathrm{d}x}{d\varepsilon} = \xi, \frac{\mathrm{d}t}{d\varepsilon} = \tau, \frac{\mathrm{d}u}{d\varepsilon} = \phi$。只要确定一个计算点，且知道另一个计算点的位置，那么我们便可由此反推出 ε，进而确定所需计算点的所有计算初值，立马可沿其解空间的任意单维指向进行数值计算。

3.4.2.3 验证结果及误差分析

(1) 确定 $A = -2, B = 3, \lambda = 5, c_1 = 3$，我们得出 $x \in [-3,3]$, $t \in [-3,3]$ 上精确解(3.9)的三维解曲面如图 3-1。

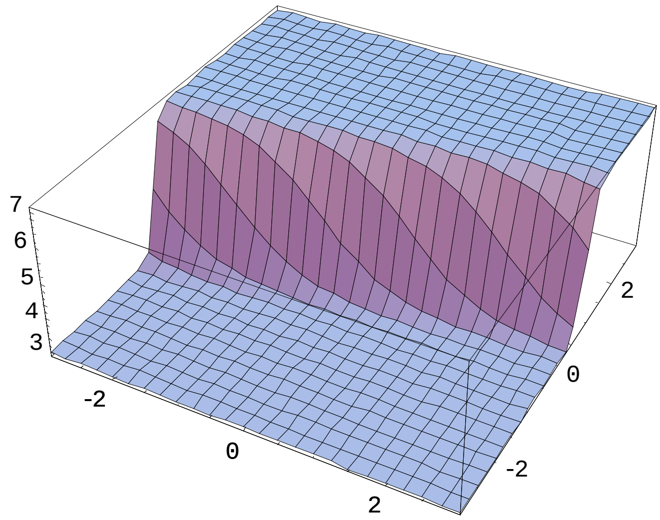
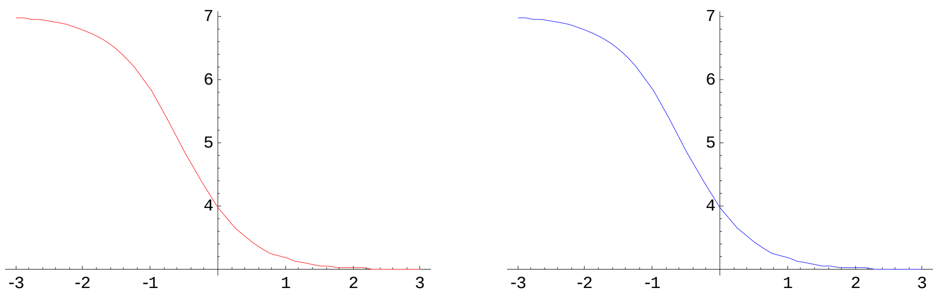
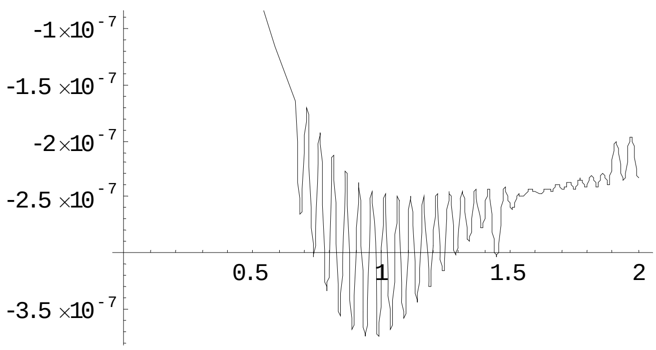


图 3-1 $x \in [-3,3], t \in [-3,3]$ 上精确解的三维解曲面

(2) 按照前节所述的第①种计算方式，我们得出 t=0 时刻单维指向上的数值解如图 4-2(a)，进一步求出 t=0.2 时同样单维指向上的数值解，并与精确解相比较，计算误差如图 3-2(b)。



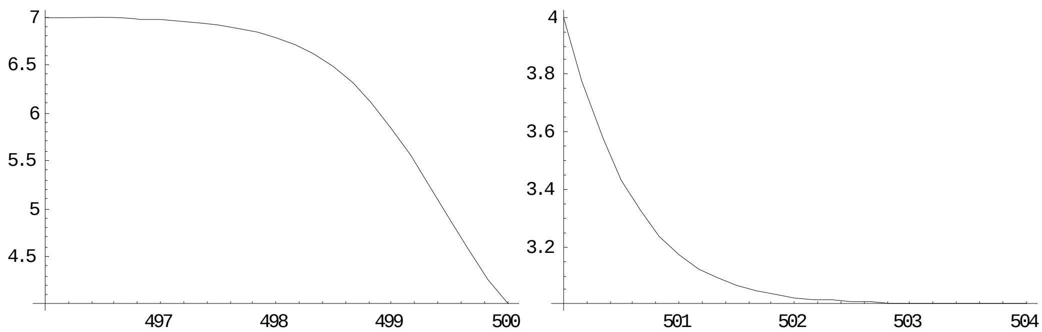
(a) t=0 时刻 $x \in [-3,3]$ 的解曲线，红色曲线代表数值解，蓝色曲线代表精确解



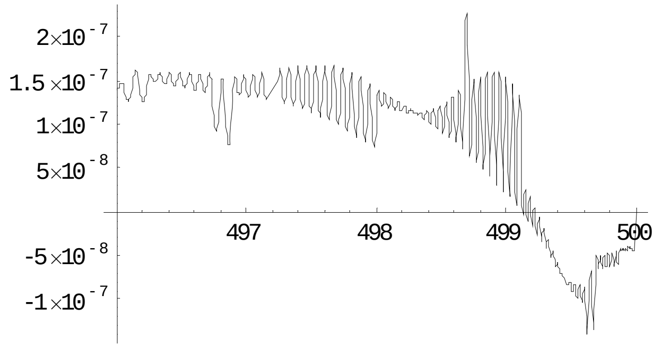
(b) t=0.2 时刻 $x \in [0,2]$ 上数值解与精确解的误差

图 3-2　按计算方式①所得出的数值计算结果分析

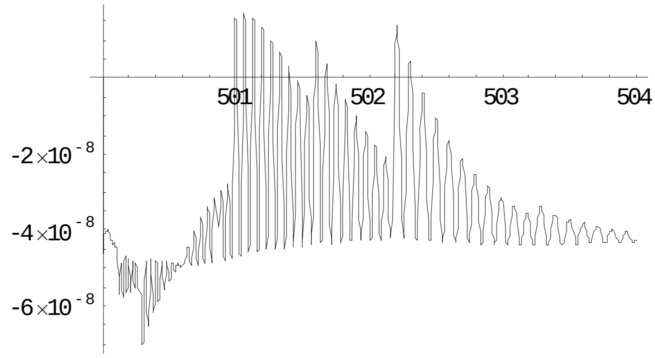
(3) 由第②种计算方式，我们由 $(x,t)=(0,0)$ 变换到 $(x,t)=(500,100)$，从而求出区间 $[500-\Delta x, 500]$ 及 $[500, 500+\Delta x]$ 上的数值解如图 3-3(a)，



(a)t=100 时刻 $x \in [500, \pm 5]$ 上的数值解



(b)t=100 时刻 $x \in [495, 500]$ 数值解与精确解的误差



(c)t=100 时刻 $x \in [500, 505]$ 数值解与精确解的误差

图 3-3　按计算方式②所得出的数值计算结果分析

3.4.3 本例小结

通常的数值方法在求解一个时空问题时，需要从初始条件出发，根据边界条件求出邻近时刻的、沿空间分布的解，以逐渐得到某一时刻某一空间的解。由于解的关联性，前一时刻解的误差到后一时刻会逐渐放大，因此往往在求解到某一时刻，误差已经放大到无法接受的地步，继续计算已经失去意义。本文的方法不存在这个问题。通过 3.4.2.2 中的方法，我们可以得到一个很长时间后的、任意

点的解，其精度与初始时刻的精度一致。

在得到了含待定群参数的降维方程后，借用前人得出的 Burgers 方程的不变量精确解，反推出诱导此特解的李群，以此导出计算初始点的初始条件，再求解降维方程，得出原方程的数值解。通过与精确解的比较，误差在 10^{-7}~10^{-8} 之间，优于其他数值方法的精确度，由此证明了该方法的有效性及优越性。

3.5 KdV 方程

“孤立子”[8]作为非线性科学的核心问题之一，它其有以下几个重大特征：一是孤立子解[9]，二是 Bäcklund 交换[10]，三是无穷多守恒律[11]，四是散射反演法[12]。正是这些特点促使孤立子成为当今世界研究的热点问题。就其历史而言，可追溯到 1834 年英国力学家 Russell 在海边发现的孤立海波，而荷兰数学家 Korteweg 和 Vries 在 1895 年讨论无粘滞不可压缩液体表面波动力学时引入了现在著名的 KdV 方程。随后在物理学、工程学、激光理论、孤立波的观测和在浅水中的传播等许多问题中都相继引入 KdV 方程。

KdV 方程是一个完全的可积系统，它具有无穷多的守恒律。一个线性波动由于在介质中传播时存在色散，所以该波动是不稳定的。只有当在波动中存在非线性的会聚时，且色散与会聚两种作用出现某种平衡，才会出现波形稳定的孤立波。在 KdV 方程中正是同时存在了这两种效应，鉴于此，其数值解的研究十分活跃，目前已经有许多学者使用不同的方法对 KdV 方程进行了数值求解，其中具有代表性的方法包括二阶样条近似法、解析-数值法、修正 Bernstein 多项式法以及 Galerkin B 样条有限元方法等[13~20]。下面将讨论本文方法在 KdV 方程数值求解中的应用。

3.5.1 方程的对称

基于 Korteweg de Vries 方程：

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{3.16}$$

的微分系统：$\Delta(x,t,u^{(3)}) = u^t + uu_x + u_{xxx}$。

假设其不变群的生成元为：

$$V = \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \phi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x}$$

则方程的三阶延拓 $\mathrm{pr}^{(3)}V(\Delta)\big|_{\Delta=0}=0$，必须且只须

$$(\phi^t+u\phi^x+u_x\phi+\phi^{xxx})\big|_{\Delta=0}=0 \tag{3.17}$$

其中，

$$\begin{cases}\phi^t=D_t\phi-u_xD_t\xi-u_tD_t\tau\\ \phi^x=D_x\phi-u_xD_x\xi-u_tD_x\tau\\ \phi^{xxx}=D_x^3(\phi-\xi u_x-\tau u_t)+\xi u_{xxxx}+\tau u_{xxxt}\end{cases} \tag{3.18}$$

将(3.18)代入(3.17)导出原方程在李群对称下的向量场分量：

$$\xi=c_1+c_3t+c_4x,\ \tau=c_2+3c_4t,\ \phi=c_3-2c_4u \tag{3.19}$$

式中，c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 为任意常数，可由此得到不变群 4 维子李代数的一组基：

$$\begin{cases}V_1=\partial_x & \text{(X轴平移)}\\ V_2=\partial_t & \text{(T轴平移)}\\ V_3=t\partial_x+\partial_u & \text{(伽利略变换)}\\ V_4=x\partial_x+3t\partial_t-2u\partial_u & \text{(标量变换)}\end{cases} \tag{3.20}$$

而对于其他 KdV 方程的非标准形式，我们以同样的方法得出其向量场分量，方便起见，现归纳如表 3-1。

表 3-1 不同类型 KdV 方程的李群向量场分量

不同形式的 KdV 方程	向量场分量	维数
$u_t+uu_x+u_{xxx}=0$	$\xi=c_1+c_3t+c_4x,\ \tau=c_2+3c_4t,\ \phi=c_3-2c_4u$	4
$\dfrac{u}{2t}+u_t+6uu_x+u_{xxx}=0$	$\xi=c_4+2c_3\sqrt{t}+\frac{1}{6}(2c_1+3c_2\sqrt{t})x,\tau=(c_1+c_2\sqrt{t})t$ $\phi=\dfrac{4c_3-16c_1\sqrt{t}u-24c_2tu+c_2x}{24\sqrt{t}}$	4
$\dfrac{u}{t}+u_t+6uu_x+u_{xxx}=0$	$\xi=c_1+c_4+c_2x+c_3\mathrm{Log}[t],\tau=3c_2t,\phi=\dfrac{c_3}{6t}-2c_2u$	3
$u_t+u\alpha u_x+\beta u_{xxx}=0$	$\xi=c_2+c_1\int_0^t\alpha[\varepsilon t']\mathrm{d}t',\tau=0,\phi=c_1$	2

$u_t+k_1u_x-h(u+xu_x)$ $+k_0(6u^2u_x+u_{xxx})=0$	$3hk_0\zeta_2+k_1(\zeta_1(k_0)_t-2k_0(\zeta_1)_t)+3k_0(-\zeta_1(k_1)_t$ $+(\zeta_2)_t)=0$ $-\zeta_1(k_0)_t^2+k_0((k_0)_t(\zeta_1)_t+\zeta_1(k_0)_{t,t})+k_0^2(3h_t\zeta_1$ $+3h(\zeta_1)_t+(\zeta_1)_{t,t}=0$ $\xi=\zeta_2+\frac{x(\zeta_1(k_0)_t+k_0(\zeta_1)_t)}{3k_0},\tau=\zeta_1,$ $\phi=-\frac{u(\zeta(k_0)_t+k_0(\zeta_1)_t)}{3k_0}$	∞
$u_t-6u^2u_x+6\lambda u_x+u_{xxx}=0$	$\xi=c_2+c_3(c+12t\lambda),\tau=c_1+3c_3t,\phi=-c_3u$	3
$u_t+u^\alpha\beta u_x+u_{xxx}=0$	$\xi=c_1+\frac{c_3x}{3},\tau=c_2+c_3t,\phi=-\frac{2c_3u}{3\alpha}$	3
$u_t+6uu_x+u_{xxx}$ $+\varepsilon(-u^2\alpha u_x+u\beta u_{xx}$ $+\gamma u_xu_{xx}+\delta u_{xxxxx})=0$	$\xi=c_1$ $\tau=c_2$ $\phi=0$	2
$u_t+uu_x-\nu u_{xx}+\mu u_{xxx}=0$	$\xi=c_2+c_3t,\tau=c_1,\phi=c_3$	3
$u_x^2+u_{xt}+uu_{xx}+$ $\sigma u_{yy}+\mu u_{xxxx}=0$	$\xi=\frac{6\sigma\varsigma_3+2x\sigma(\varsigma_1)_t-y(3(\varsigma_2)_t+y(\varsigma_1)_{tt})}{6\sigma}$ $\eta=\varsigma_2+\frac{2}{3}y(\varsigma_1)_t$ $\tau=\varsigma_1$ $\phi=-\frac{4u\sigma(\varsigma_1)_t-6\sigma(\varsigma_3)_t-2x\sigma(\varsigma_1)_{tt}+3y(\varsigma_2)_{tt}+y^2(\varsigma_1)_{ttt}}{6\sigma}$	∞
$u_t+3u^2\alpha u_x+\alpha(v^2u_x+2uvv_x)$ $+\beta u_{xxx}=0$ $v_t+3v^2\alpha v_x+\alpha(2uvu_x+u^2v_x)$ $+\beta v_{xxx}=0$	$\xi=c_2+(c_4x)/3$ $\tau=c_3c_4t$ $\phi=-(c_4u)/3+c_1v$ $\psi=(-3c_1u-c_4v)/3$	4

3.5.2 关于 $u_t+uu_x+u_{xxx}=0$ 现有理论解的讨论[21]

(1) 行进波解

若 $c_3=c_4=0$，$c_2=1$，$c_1=c$ (A 为常数)。设不变量 $\hbar=x-ct$，$u=v(\hbar)$,代入以上两个微分系统得到简化方程：$v_{\hbar\hbar\hbar}+vv_\hbar-cv_\hbar=0$，将该方程积分得 $\frac{1}{2}v_\hbar^2=-\frac{1}{6}v^3+\frac{1}{2}cv^2+kv+l$，$k,l$ 是任意常数。将方程的普通解按椭圆函数给出：$u=\wp(x-ct+\delta)$，δ 为任意相位移，若 $u\to 0$，$|x|\to\infty$，$k=l=0$，得到单孤立

子解：$u(x,t)=3c\ \mathrm{sech}^2[\frac{1}{2}\sqrt{c}(x-ct)+\delta]$，波速 c 为正，若仅仅 u 有界，则我们可以得到周期潮波解：$u(x,t)=a\mathrm{cn}^2[\lambda(x-ct)+\delta]+m$ 。

(2) 伽利略不变量解

若 $c_1=c_4=0$，$c_2=1/b$，$c_3=1$，假设全局变量：$y=x-\frac{1}{2}bt^2,\ v=u-bt$，于是我们得到：$u=v+bt,\ u_x=v_y,\ u_{xxx}=v_{yyy}$，$u_t=-btv_y+b$，因此，简化方程应为：$v_{yyy}+vv_y+b=0$，其解形式为：$u(x,t)=h(x-\frac{1}{2}bt^2)+bt$，其中函数 h 在整个复平面中是半纯的。

(3) 标量不变量解

若 $c_4=1$，$c_1=c_2=c_3=0$，称为群的标量对称，即存在：$(x,t,u)\to(\lambda x,\lambda^3 t,\lambda^{-2}u)$，半空间 $\{t>0\}$ 的不变量为：$y=t^{-1/3}x, v=t^{2/3}u$，由此即可得到：$u_x=t^{-1}v_y, u_{xxx}=t^{-5/3}v_{yyy}, u_t=-\frac{1}{3}t^{-5/3}(yv_y+2v)$，虽然前面得出的微分系统在形式上存在差异，但都是简化方程 $v_{yyy}+vv_y-\frac{1}{3}yv_y-\frac{2}{3}v=0$ 的不同形态，积分此方程便可求解。

3.5.3 对另一个 KdV 方程的数值解

若 KdV 方程采用如下形式：

$$u_t+\sqrt{gh}u_x+\frac{3}{2h}\sqrt{gh}uu_x+\frac{h^2}{6}\sqrt{gh}u_{xxx}=0 \tag{3.21}$$

式中，$\sqrt{gh}=c_0$ 为标准波速，h 为水深，u 代表波高。

其经典及非经典对称向量场分量为：

$$\xi=c_4+c_3t+c_1x/3\ ,\ \ \tau=c_2+c_1t\ ,\ \ \phi=-\frac{4}{9}c_1h+\frac{2}{3c_0}c_3h-\frac{2}{3}c_1u \tag{3.22}$$

可见求解 $dx/\xi=dt/\tau=du/\phi$ 显得非常困难，故将很难得到构造降维方程的不变量。而按照文献[7]的方法我们可以得到如下含有(3.22)无穷小因子的降维方程

$$\mathrm{c0}\,u^{(1,0)}[x,t]+\frac{3\,\mathrm{c0}\,u[x,t]\,u^{(1,0)}[x,t]}{2\,h}+\frac{\frac{(-4\,\mathrm{c0}\,\mathrm{c1}+6\,\mathrm{c3})\,h}{9\,\mathrm{c0}}-\frac{2}{3}\,\mathrm{c1}\,u[x,t]-\left(\mathrm{c4}+\mathrm{c3}\,t+\frac{\mathrm{c1}\,x}{3}\right)u^{(1,0)}[x,t]}{\mathrm{c2}+\mathrm{c1}\,t}+\frac{1}{6}\,\mathrm{c0}\,h^2\,u^{(3,0)}[x,t]=0 \tag{3.23}$$

(1) 孤立波解

若 $\xi = c_4 \tau = c_2, \phi = 0 (c_3 = c_1 = 0), c = c_4 / c_2$ ， 故 $\mathrm{d}x / c = \mathrm{d}t / 1 = \mathrm{d}u / 0$, 从 而 ，$y = x - ct$ ， $u_t = u_y, \partial_t y = -c, u_x = u_y, u_{xxx} = u_{yyy}$，原方程变为：

$$(-c + c_0) u_y + \tfrac{3}{2h} c_0 u u_y + \tfrac{1}{6} c_0 h^2 u_{yyy} = 0 \tag{3.24}$$

因为$u u_y = \frac{1}{2} \partial_y u^2$，所以对(3.24)积分得，

$$(-c + c_0) u + \tfrac{3}{4h} c_0 u^2 + \tfrac{1}{6} c_0 h^2 u_{yy} = a_1 \tag{3.25}$$

继续对(3.25)积分得，

$$\tfrac{(-c + c_0)}{2} u^2 + \tfrac{1}{4h} c_0 u^3 + \tfrac{1}{12} c_0 h^2 u_y^2 = a_1 u + a_2 \tag{3.26}$$

让$u \to \dfrac{1}{F[y]^2}$，我们得到方程的孤立波解：

$$u(x,t) = \frac{2(c - c_0) h}{c_0} \left(\cosh \left[\sqrt{\frac{3(c - c_0)}{2 c_0 h^2}} (x - ct + y_0) \right] \right)^{-2} \tag{3.27}$$

如果我们由(3.27)得到该解的初始条件 *u(x,0)*、$u_x(x,0)$、$u_{xx}(x,0)$，代入(3.23)，即可得到$\xi = c_4, \tau = c_2, \phi = 0 (c_3 = c_1 = 0), c = c_4 / c_2$。由此可知，降维系统(3.23)包含了孤立波解。

(2) 振荡解

由(3.23)，我们可以得到振荡的行进波。令(3.23)中

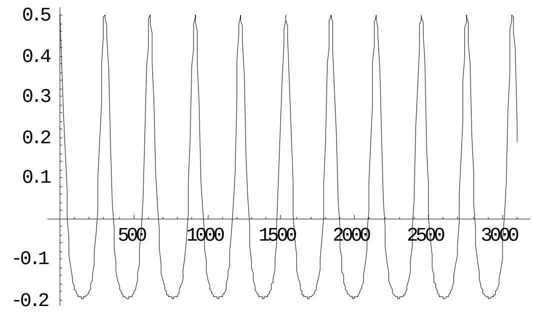
$$c_3 \to \tfrac{2}{3} c_0 c_1, c_0 \to \sqrt{(98/10) h}, h \to 10$$
$$t \to 0, c_1 \to 0, c_2 \to 1, c_4 \to (9801/100)^{1/2}$$

进一步导出在t为常数时，沿x向的降维方程：

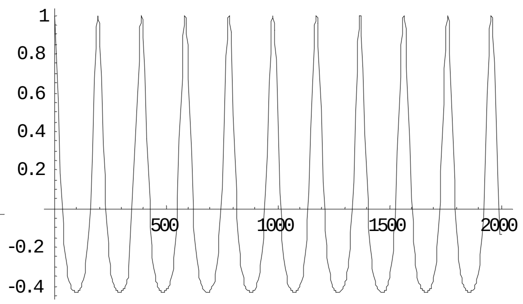
$$\frac{1}{100} \left(700 \sqrt{2} - 3 \sqrt{108889} + 105 \sqrt{2}\, y[x] \right) y1[x] + \frac{350}{3} \sqrt{2}\, y2'[x]$$

$$=0 \tag{3.28}$$

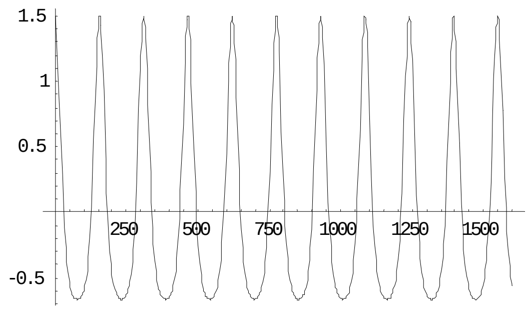
给定初始条件$t = t_0$， $x = x_0$， $u = u(x_0, t_0)$， $u_x = u_x(x_0, t_0)$， $u_{xx} = u_{xx}(x_0, t_0)$，借助 *Mathematica5.1* 求解即可，结果如图 3-4。



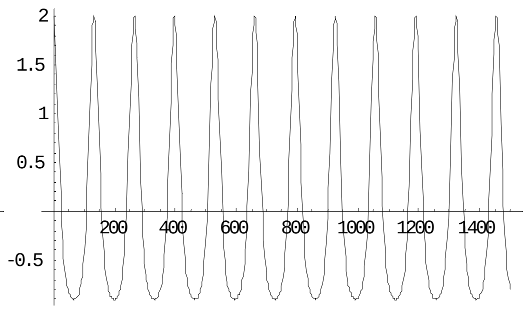
(a)Δx=3100, y=1/2; y'=0,y''= -0.000733092



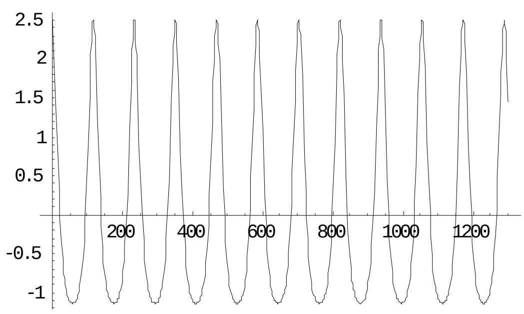
(b)Δx=2000, y=1; y'=0,y''=-0.00314938



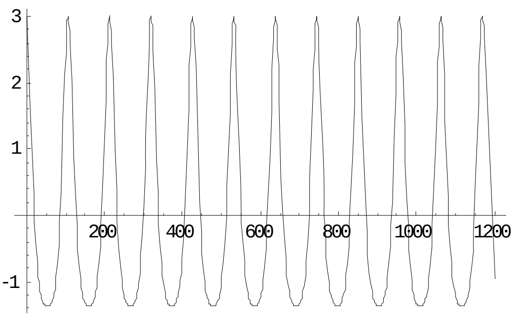
(c)Δx=1600, y=3/2; y'=0,y''=-0.00725253



(d)Δx=1500, y=2; y'=0,y''=-0.0130425



(e)Δx=1300, y=5/2; y'=0,y''=-0.0205194



(f)Δx=1200, y=3; y'=0,y''=-0.0296831

图 3-4 单微空间波能守恒数值解的确定

3.5.4 本例小结

由于本文所得到的降维方程中包含了众所周知的孤立波解，从而证实该降维方程的合理性。

除了孤立波外，我们还得到了振荡形式的行进波。在水波中我们知道，尽管存在着非线性，但振荡的行进波还是存在的，与微小的波比，非线性波呈坦谷状。数值解显示，随着波高的增加，振荡解波峰逐渐变尖，波谷逐渐变坦，形成典型的坦谷波，这证明了该数值解的合理性。

3. 6 Camassa-Holm 方程

对于完全可积浅水方程 Camassa-Holm 方程[22]

$$u_t + 2\kappa u_x - u_{xxt} + 3uu_x - 2u_x u_{xx} - uu_{xxx} = 0 \tag{3.29}$$

式中，$u(x,t)$ 代表沿 x 方向的流速，κ 是与临界浅水波速相关的参数，从数学角度讲，Camassa-Holm 方程是 KdV 方程的 Hamiltonian 推广形式，是一类完全可积系统，用来描述浅水域中的孤立波。它在实直线下的解具有通常孤立子易于复原的碰撞性质，当 $\kappa = 0$ 时，对于任何波速 c，方程具有孤波解的形式为 $u(x,t,c,0) = c\exp(-|x-ct|)$，且存在具有尖峰性质的孤立子，在尖峰处一阶导数不存在；当 $\kappa \neq 0$ 时，孤立子没有尖峰性质。正由于这一奇特性质[23]，对方程(3.29)的研究近年来引起了广泛的关注。Clarkson 和 Mansfiel 研究了该类方程的对称约化[24]，Cooper 和 Shepard 则利用变分法导出了近似孤波解[25]，该方程还具有行进波解、周期孤立子解等众多特性，Jonatan Lenells 对此作了详尽的研究[26]。

3. 6. 1 方程的对称[27,28]

对于微分系统 $\Delta(x,t,u^{(3)}) = u_t + 2\kappa u_x - u_{xxt} + 3uu_x - 2u_x u_{xx} - uu_{xxx}$，存在不变群的生成元 $V = \xi(x,t,u)\dfrac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t,u)\dfrac{\partial}{\partial t} + \phi(x,t,u)\dfrac{\partial}{\partial x}$，且需满足(3.29)在无穷小变换下的不变性条件 $\mathrm{pr}^{(3)}V(\Delta)\big|_{\Delta=0} = 0$，故：

$$[\phi^t + 2\kappa\phi^x - \phi^{xxt} + 3(\phi u_x + u\phi^x) - 2(\phi^x u_{xx} + u_x\phi^{xx}) - \phi u_{xxx} - u\phi^{xxx}]\big|_{\Delta=0} = 0 \tag{3.30}$$

这里，

$$\begin{cases} \phi^t = D_t\phi - u_x D_t\xi - u_t D_t\tau \\ \phi^x = D_x\phi - u_x D_x\xi - u_t D_x\tau \\ \phi^{xx} = D_x^2(\phi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xxx} + \tau u_{xxt} \\ \phi^{xxx} = D_x^3(\phi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xxxx} + \tau u_{xxxt} \\ \phi^{xxt} = D_t D_x^2(\phi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xxxt} + \tau u_{xxtt} \end{cases} \tag{3.31}$$

将(3.31)代入(3.30)导出向量场分量如下：

$$\xi = c_1\kappa t + c_3,\ \tau = -c_1 t + c_2,\ \phi = c_1(\kappa + u) \tag{3.32}$$

然后求解特征方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\xi} = \dfrac{\mathrm{d}t}{\tau} = \dfrac{\mathrm{d}u}{\phi}$，我们得到相似变量：

$$u=\frac{w(z)}{(-c_1t+c_2)}-\kappa,\text{其中，}\ z=x+\kappa t+\frac{\kappa c_2+c_3}{c_1}\log(-c_1t+c_2) \tag{3.33}$$

再把(3.33)代入原方程(3.29)，可以得到关于 $w(z)$ 的相似简化常微分方程：

$$ww'''+K_1w'''+2w'w''-K_2w''-3ww'-K_1w'+K_2w=0 \tag{3.34}$$

式中，$K_1=-(\kappa c_2+c_3), K_2=-c_1$, c_1,c_2,c_3 为任意常数。(3.34)即可根据 Painlevë 特性[29]求得方程的显式解。

对于非经典对称，解曲面条件为：

$$\psi=\xi(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x}+\tau\frac{\partial u}{\partial t}-\phi(x,t,u)=0 \tag{3.35}$$

微分系统除了满足前面的不变性条件(3.30)外，还必须满足解曲面条件(3.35)，即：

$$\begin{cases}\mathrm{pr}^{(3)}V(\Delta)\big|_{\Delta=0,\psi=0}=0\\ \mathrm{pr}^{(1)}V(\psi)\big|_{\Delta=0,\psi=0}=0\end{cases} \tag{3.36}$$

假设在(3.35)中 $\tau\neq 0$，由变量替换消去原方程中所有对时间 t 的微分项 $u_t,u_{xt},u_{xxt},\cdots$，得到只含 x 微分项的微分方程，在此方程中，由于各项线性独立，分别取其系数等于零，立刻求出：

$$\xi=-\left[\frac{K_1}{(t+K_2)}+\kappa\right],\ \tau=1,\ \phi=-\left[\frac{\kappa+u}{(t+K_2)}\right] \tag{3.37}$$

相应的相似变量为：$u=\dfrac{w(z)}{(K_2+t)}-\kappa,$其中，$z=x+\kappa t+K_1\log(K_2+t)$，同理即可得到关于 $w(z)$ 的相似简化常微分方程：

$$ww'''+K_1w'''+2w'w''-w''-3ww'-K_1w'+w=0 \tag{3.37}$$

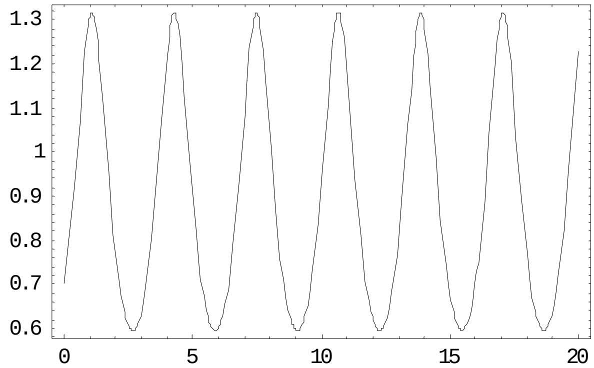
3.6.2 方程的数值解

在 **3.6.1** 中，我们讨论了 C-H 方程的经典及非经典对称，从而得出了各自情况下的相似简化方程，通过求解简化方程，我们可以得出方程的显式解，现在，我们结合(3.32)及(3.35)来研究该方程的数值解。

$x=0$ 沿 t 向的降维微分方程为：

$$\frac{1}{49999990}(50-500\,y2[x]-y1[x]\,(90000003+99999980\,y2[x])+10\,y[x]\,(50+14999997\,y1[x]-4999999\,y2'[x])+100000001\,y2'[x])=0 \tag{3.38}$$

最后借助 *Mathematica5.1* 得出沿 t 向的数值解如图 3-5。



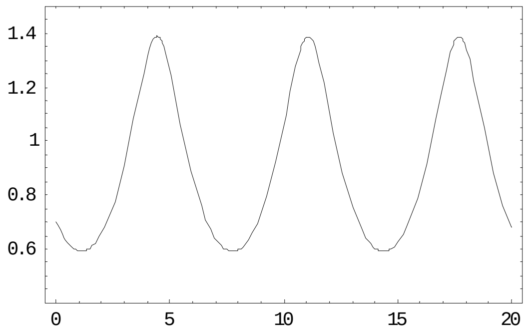
x=0, c_1=1/100000, c_2= 1, c_3 =2, k=1/10

图 3-5　x 为常数时, t 向数值解示意

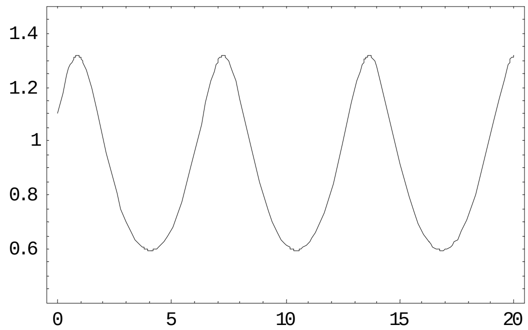
由此数值解，我们可以得到任意时刻的 u,u_t,u_{tt} 值，根据 3.4.2.2 中的计算方式①，再得出 $t=const$ 时沿 x 向的降维微分方程：

$$2\kappa u_x+3uu_x+\frac{c_1(\kappa+u)-(c_3+c_1\kappa t_0)u_x}{c_2-c_1t_0}-2u_xu_{xx}-uu_{xxx}+\frac{(c_3+c_1\kappa t_0)u_{xxx}-c_1u_{xx}}{c_2-c_1t_0}=0 \tag{3.39}$$

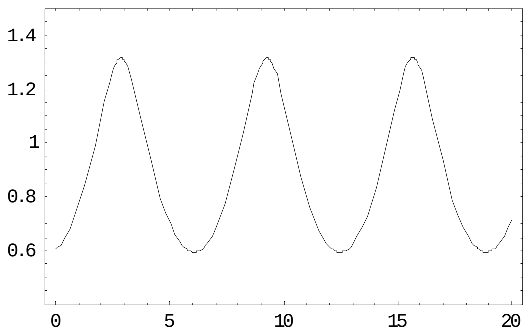
借助 *Mathematica5.1* 得出不同 t 时刻沿 x 向的数值解，如图 3-6。



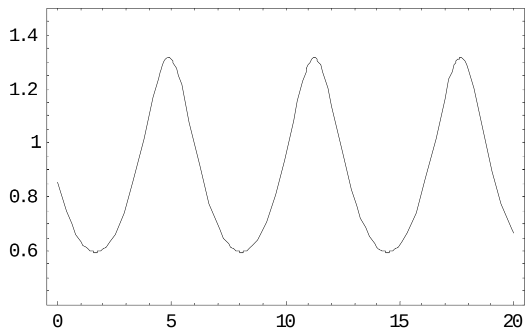
(a)t=0s,c_1=1/100000, c_2= 1, c_3 =2, k=1/10



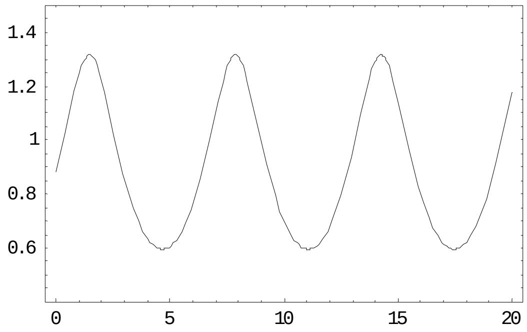
(b)t=1.5s,c_1=1/100000, c_2= 1, c_3 =2, k=1/10



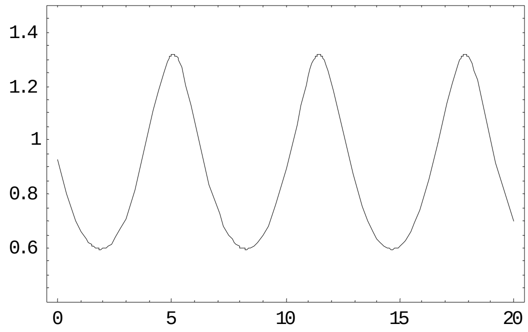
(c)t=2.5s,c_1=1/100000, c_2= 1, c_3 =2, k=1/10



(d)t=3.5s,c_1=1/100000, c_2= 1, c_3 =2, k=1/10



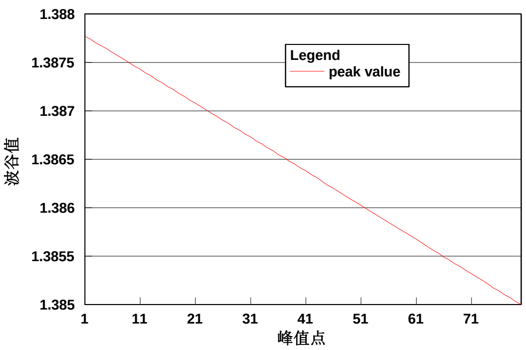
(e)t=5s,c_1=1/100000, c_2= 1, c_3 =2, k=1/10



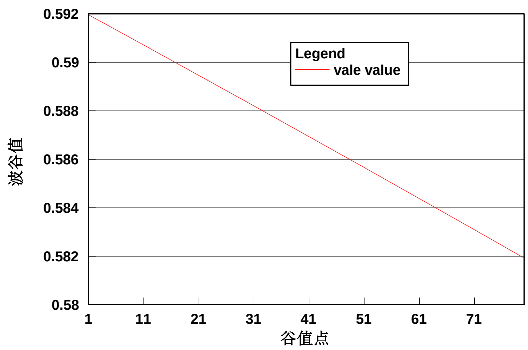
(f)t=10s,c_1=1/100000, c_2= 1, c_3 =2, k=1/10

图 3-6　不同 t 时刻沿 x 向的数值解示意

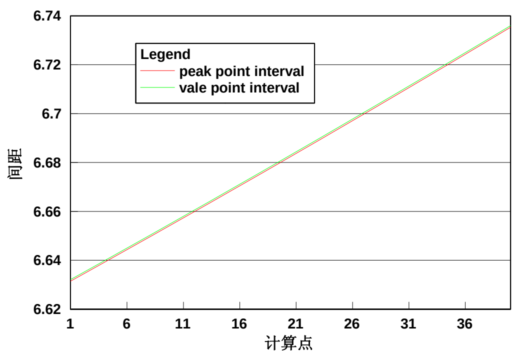
在上述解中，我们假设群参数 c_1=1/100000，得到了拟行进波：即波高、波长随时间、空间有微小变化（图 3-7）。增大 c_1 可以加大波高、 波长的变化。另外，我们还可以得到含流的行进波，其中的流向可以与波行进方向相同，也可以相反。同时，我们也可以通过下列步骤求出不含流的波（即波面平均值与静水面一致的点），求解的具体步骤如下：



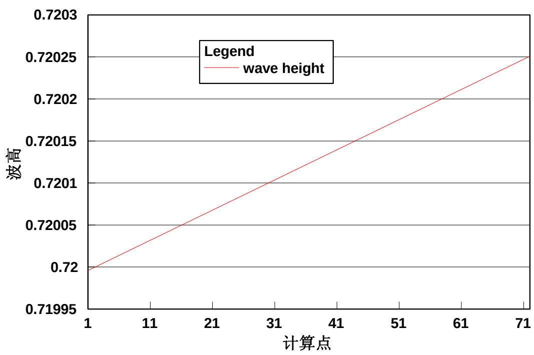
(a)沿 x 向波峰值的变化趋势



(b)沿 x 向波谷值的变化趋势



(c)沿 x 向峰、谷间距的变化趋势



(d)沿 x 向波高的变化趋势

图 3-7　沿 x 向数值解的特性研究

①定义初始条件 $u_0, u_0', u_0'', t_0, x_0, x_1$。

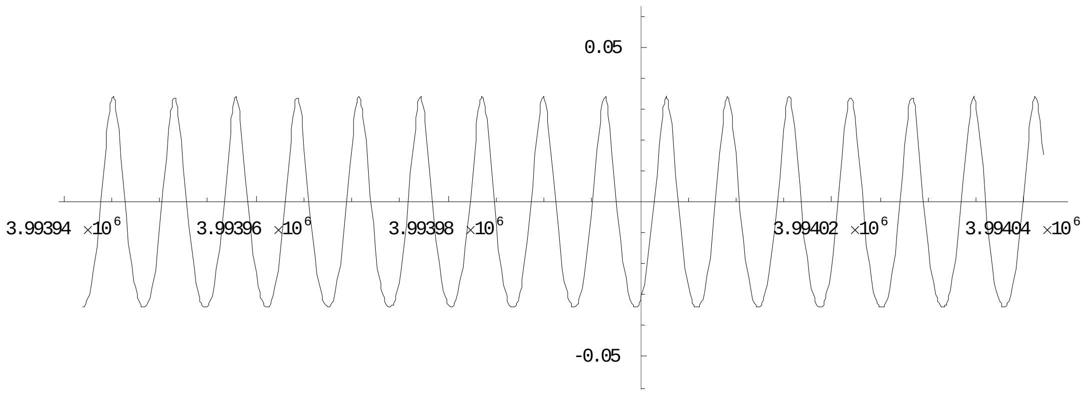
②在 t_0 时刻沿 x 方向求出任意一个相邻的波峰及波谷值。

③利用②所得结果建立并求解波峰及波谷处t,x,u在群变换作用下关于无穷小量ε的微分方程组：

$$t'(\varepsilon)=c_2-c_1t(\varepsilon),x'(\varepsilon)=c_3+c_1\kappa t(\varepsilon),u'(\varepsilon)=c_1(u(\varepsilon)+\kappa)$$ 。

④经线性插值得到波面平均值与静水面一致的点，作为计算的初始条件值。

⑤依本节所述方法既可求解。结果如下图所示：



在 t=9560880s,c_1=-1/1000000, c_2= 1, c_3 =2, k=1/10 条件下 x 向的对流数值解

图 3-8　对流数值解的确定

3.6.3 本例小结

通过对 C-H 方程的对称分析，得出了方程的无穷小变换，而从数值解的研究可知，不同时刻沿 x 向的波动解比较计算稳定，与理论解能够很好的吻合，且波速由ξ/τ决定，该波动解从性质上看既非行进波又非孤立波，故我们称之为“拟行进波”。而当我们计算无穷远处即无穷大时刻的过程中，我们总能找到含有正向流、逆向流或无流的波，这为我们研究浅水波的物理特性提供了新的思路，在波浪能工程应用上，尤其是受波-流作用的潮流能装置研究具有积极意义。

3.7　结束语

本章阐述了不变群的构建过程，以实例的形式说明了基于李群的偏微分方程的降维简化过程，并由此归纳出数值求解的整体思路。在这基础之上，利用**文献[7]**中的降维简化方法，研究了几个典型的水波动力学偏微分方程。通过对 Burgers 方程的研究，我们证明了本文方法的正确性及优越性；通过对 KdV 方程的研究，我们得出了“坦谷波”数值解；通过对 C-H 方程的研究，我们得出了“拟行进波”数值解。

参考文献

[1] Zeng-ju Lian, S.Y. Lou, Symmetry study of the coupled Burgers system, Chaos, Solitons and Fractals 27 (2006) 51~55.

[2] Bai Cheng-lin(白成林), The Exact Solutions Of The Burgers Equation And Higher-Order Burgers Equation In (2+1) Dimensions, Chinese Physics, 2001, 10(12): 1091~1095.

[3] Maria Luz GANDARIAS, Nonclassical Potential Symmetries of the Burgers Equation, Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics 1997, V.1, 130~137.

[4] Mohamed A. Ramadan, Talaat S. El-Danaf, Faisal E.I. Abd Alaal, A numerical solution of the Burgers equation using septic B-splines, Chaos, Solitons and Fractals 26 (2005) 795~804.

[5] Mustafa Gűlsu, A finite difference approach for solution of Burgers equation, Applied Mathematics and Computation, 2005.

[6] M.A. Abdoua, A.A. Solimanb, Variational iteration method for solving Burger's and coupled Burger's equations, Journal of Computational and Applied Mathematics, 181(2005) 245~251.

[7] **游亚戈，基于李群的分离变量法[报告].**

[8] 谷超豪等，孤立子理论与应用[M]．杭州：浙江科技出版社, 1990.

[9] Varley, E.; Seymour, B.R., A Simple Derivation of the N-Soliton Solutions to the Korteweg – de Vries Equation. SIAM Journal on Appl. Math. 58 (1998), 904~911.

[10] Yi Zhang and Deng Yuan Chen, Bäcklund transformation and soliton solutions for the shallow water waves equation, Chaos, Solitons & Fractals, 2004,20(2): 343~351.

[11] de Frutos, J., Sanz-Serna, J.M., Accuracy and conservation properties in numerical integration: the case of the Korteweg - de Vries equation. Num. Math. 75(1997), 421~445.

[12] Stephen Desbruslais, Inverse Scattering Transform for Soliton Transmission Analysis, Optical Fiber Technology, 1996,2(4): 319~342.

[13] Dursun Irk, Idris Dag, Bű lent Saka, A small time solutions for the Korteweg–de Vries equation using spline approximation, Applied Mathematics and Computation 173 (2006) 834~846.

[14] Xiaohua Niu, Zuliang Pan, New approximate solutions of the perturbed KdV equation, Physics Letters A 349 (2006) 192~197.

[15] S. Özer, S. Kutluay, An analytical–numerical method for solving the Korteweg–de Vries equation, Applied Mathematics and Computation 164 (2005) 789~797.

[16] Hilmi Demiray, A travelling wave solution to the KdV–Burgers equation, Applied Mathematics and Computation 154 (2004) 665~670.

[17] Dambaru D. Bhatta, Muhammad I. Bhatti, Numerical solution of KdV equation using modified Bernstein polynomials, Applied Mathematics and Computation 174 (2006) 1255~1268.

[18] E.N. Aksan, A. Özeds, Numerical solution of Korteweg–de Vries equation by Galerkin B-spline finite element method, Applied Mathematics and Computation 175 (2006) 1256~1265.

[19] A. Zerarka, V.G. Foester, Separation method for solving the generalized Korteweg–de Vries equation, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 10 (2005) 217~225.

[20] Paul Bracken, Some methods for generating solutions to the Korteweg–de Vries equation,

Physica A 335 (2004) 70~78.
[21] P. J. Olver, Applications of Lie groups to differential equations, Springer, Berlin, 1986.
[22] Roberto Camassa and Darryl D. Holm, An integrable Shallow Water Equation with Peaked Solitons, Physical Review Letters, 1993,71(11):1661~1664.
[23] 田立新, 许 刚, 刘曾荣, Camassa-Holm 方程凹凸尖峰及光滑孤立子解, 应用数学和力学, 2002,23(5): 497~506.
[24] P, A. Clarkson, E. L. Mansfield, T. J. Priestley, Symmetries of a Class of Nonlinear Third-Order Partial Differential Equations, Mathl. Cornput. Modeli~ng Vol. 25, No. S/9, pp. 195~212, 1997.
[25] Fred Cooper and Harvey Shepard, Solitons in the Camassa-Holm shallow water equation, Physics Letters A, 1994,194(4): 246-250.
[26] Jonatan Lenells, Traveling wave solutions of the Camassa–Holm equation, J. Differential Equations, 2004.
[27] R.A. Kraenkel, M. Senthilvelan, A.I. Zenchuk, Lie symmetry analysis and reductions of a two-dimensional integrable generalization of the Camassa–Holm equation, Physics Letters A 273 (2000) 183~193.
[28] M. Senthil Velan, M. Lakshmanan, Lie Symmetries And Invariant Solutions Of The Shallow-Water Equation, Int. J. Non-Linenr Mechanics. Vol. 31, No. 3, pp. 339~344, 1996.
[29] S. Roy Choudhury, Painlevé analysis of nonlinear evolution equations—an algorithmic method, Chaos, Solitons & Fractals, 2006,27(1): 139~152.
[30] Olver, P. J., Direct reduction and differential constraints. Proc. Roy. Soc. London A 444(1994), 509~523.
[31] Olver, P. J., Rosenau, P., The construction of special solutions to partial differential equations, Phys.Lett. A 114(1986), 107~112.
[32] Dzhamay, A.V., Foursov, M.V., Grishin, O. V. Vorob`ev, E.M., Zhikharev, V.N., A “Mathematica” program SYMMAN for symmetry analysis of systems of partial differential equations, New Computer Technologies in Control Systems, Proceedings of the International Workshop, Pereslavl-Zalessky, Russia, 1994, pp, 25~27.
[33] Olver, P. J., Rosenau, P., Group invariant solutions of differential equations, J. Math. Mech. 47(1987),263~278.

第 4 章　结论与展望

4.1 主要结论

本论文隶属于纯粹数学中群论的理论应用研究。本文首先分析了非线性力学方程求解方法的研究现状，结合李群在偏微分方程求解中的应用基础，提出了本文的创新点：基于李群无穷小变换的偏微分系统的降维简化。在此创新点的基础上，全新的论述与论证了一种利用李群群对称实现偏微分方程的降微方法，然后整理出将该方法应用于非线性偏微分方程数值求解的具体步骤，最后应用该方法数值求解了一些在波能工程理论研究中的具有重要意义的数学物理方程，经过验证与讨论，得出一些对工程应用实际具有参考价值的特征解。

本文的研究成果主要体现在以下几方面：

(1) 为利用数值方法处理非线性问题提供了新思路。鉴于长期以来对纯粹数学(群论中延拓理论、无穷小准则)的应用研究相对匮乏的情况，本文将李群与数值方法相结合来求解非线性偏微分方程，这对该领域的研究具有积极意义。同时本文的思想不单局限于求解偏微分方程，还可以推广到其他非线性问题，所以本文的工作对整个非线性研究领域都具有一定的意义。

(2) 丰富了偏微分方程的数值解法。经过与给定边界的已知方程的比较验证，证明了由本文方法得出的数值解与精确解吻合良好。同时，与其他数值方法相比较，本文方法得到的数值解精度高，不需要构造计算格式，且计算量非常小；与偏微分方程的经典群对称等方法相比较，本文方法避开了不变量及降微方程的直接求解，从而在边界处理上具有更大的自由度，计算效率非常高。

(3) 得出一些非线性水波动力学方程的数值特征解。通过对 KdV 方程的求解，我们得到“坦谷波”解及波能平衡解；通过对 C-H 方程的求解，我们得到正向波、逆向波的顺向传播时的振荡解，该波动解从性质上看既非行进波又非孤立波，故我们称之为“拟行进波”解。当正向流与逆向流迎向流动时，则得到基于波能平衡原理的对流解。

4.1 研究展望

本文的研究工作在水波动力学乃至整个非线性领域都极具吸引力，因为它从

根本上提出了一种处理非线性问题的新的理论与方法。但由于本文在方法上具有极大的创新性，在一些具体方面还有待进一步的研究与展开：

(1) 虽然通过本文方法在边界处理上能够获得较大的自由度，但在数值求解偏微分方程时，如何实现完全自由边界给定的有效性同时保持解的稳定性，也即如何能够得到自由度更大的李群便是下一步研究的重点所在。

(2) 本文方法的推广。本文只是利用该方法初步求解了水波动力学方程，所以还不足以证明其应用的广泛性。如何将本文方法推广到整个非线性偏微分方程求解领域，并建立一套更完整的理论及应用体系是另一个值得研究的课题。

总之，关于本文方法的应用对于非线性力学方程数值求解的研究有着良好的发展前景。

硕士期间发表论文情况

1. 双浮体自由垂向振荡响应特性. 水动力学研究与进展. 2006(4). (已录用)
2. 新型极低速海流发电系统的动力装置研究.可再生能源.2006(6).(已录用)

非第一作者

3. 双淹没矩形体的透反射系数特性分析. 海洋学报. 2006. (已录用)
4. 以 HIT6501 为核心的造波机控制系统研究.机床与液压. 2006(10). (已录用)

致 谢

终于写到了这一页，这意味着学位论文写作结束的一页，也意味着三年研究生生活即将结束的一页。此时此刻的心情是复杂的，有着论文写作过程即将完成的欣慰，也有着面临答辩的忐忑，有着走上工作岗位的憧憬，也有着即将离开校园的失落，然而最多的，还是心里满满的感激。

感谢我的导师游亚戈教授、吴必军教授、郑永红教授，正是在您们的悉心指导下，我的论文工作才得以完成。您们的博学、严谨、不辞辛劳和精益求精不仅让我学到了硕士研究生三年应该学得的知识，更给了我今后一生为人处事的准则。除了学习上的严格要求，您们对我们生活上的关心也常常让我们心生感动。“一日为师，终生为父”，请相信我一定会加倍努力，来回报您们的教诲和期望。

感谢海洋能实验室的每一位职工，马玉久工程师、颜希文工程师、苏琼清大姐，是您们给予我学习及生活上无微不至的关照和帮助，我的论文工作才得以顺利的展开。

感谢能源所，这个底蕴深厚、安详宁静而又激情飞扬的地方，塑造了我积极乐观的人生态度，刻画了我永远留恋的青春记忆，让我在这个即将离别的时候，如此不舍。

感谢我的父母及兄弟，我所迈出的每一步，都凝聚着你们的心血和汗水。你们始终如一的支持和关爱，是我一直勇敢向前的动力。感谢我的朋友们，我将永远记得你们伴我走过的每一个有欢笑有泪水的日子，是你们的情谊和帮助，让我在举目无亲的广州感觉塌实温暖。

最后还要特别感谢国家“863”计划、中国科学院知识创新工程、广东省科技计划等项目提供的资助。

能写下来的感激那么有限，只希望老师、家人、朋友都能体会到我感恩的心，我是如此平凡，却又如此幸运，谢谢你们！

作者简介

胡 城，男，1980 年 9 月出生，四川南充人。

1999 年 9 月—2003 年 7 月　武汉大学热能与动力工程系；

2003 年 9 月—2004 年 7 月　中国科学技术大学热科学与能源工程系；

2004 年 8 月—2006 年 7 月　中国科学院广州能源研究所；

主要研究方向为海洋波浪、潮流能能量转换、水轮机及水波动力学偏微分方程数值方法。